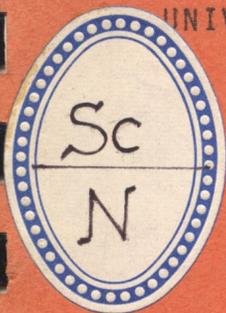


UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES



Sc N $\frac{69}{116}$

USAGE DES TECHNIQUES D'APPROXIMATION EN PROGRAMMATION DYNAMIQUE

THESE

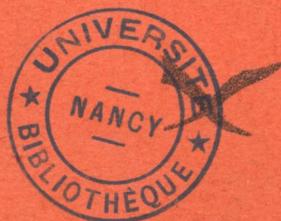
pour l'obtention du

DOCTORAT de SPECIALITE MATHEMATIQUES (3ème CYCLE)

Soutenu devant le Jury le 13 septembre 1969

par

YU ZIANG-KUANG



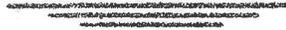
Jury :	M. J. LEGRAS	Président
	M. M. DEPAIX	Examineur
	M. C. PAIR	"
	M. HENTZGEN	"



UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

**USAGE DES TECHNIQUES D'APPROXIMATION
EN PROGRAMMATION DYNAMIQUE**



Par YU (ZIANG KUANG)

ANNEE SCOLAIRE 1968/69
=====

DOYEN : M. AUBRY

ASSESEUR : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JOLY -
LAPORTE - EICHBORN - CAPELLE - GODEMENT - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE -
DE MALLEMAN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET -
OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHL.

Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET - M^{le} MATHIEU.

PROFESSEURS

MM. ROUBAULT	Géologie	GAYET	Physiologie
VEILLET	Biologie animale	HADNI	Physique
BARRIOL	Chimie théorique	*BASTICK	Chimie
BIZETTE	Physique	DUCHAUFOUR	Pédologie
GUILLIEN	Electronique	GARNIER	Agronomie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	NEEL	Chimie organique industrielle
BOLFA	Minéralogie	BERNARD	Géologie appliquée
NICLAUSE	Chimie	*CHAMPIER	Physique
FAIVRE	Physique appliquée	*GAY	Chimie biologique
AUBRY	Chimie minérale	STEPHAN	Zoologie
COPPENS	Radiogéologie	*CONDE	Zoologie
DUVAL	Chimie	*WERNER	Botanique
FRUHLING	Physique	EYMARD	Calcul différentiel et intégral
HILLY	Géologie	LEVISALLES	Chimie organique
LE GOFF	Génie chimique	FELDEN	Physique
SUHNER	Physique expérimentale	*GOSSE	Mécanique physique
CHAPON	Chimie biologique	*DAVOINE	Physique (ENSMIN)
HEROLD	Chimie minérale industrielle	HORN	Physique (1° cycle)
SCHWARTZ B.	Exploitation minière	*ROCCI	Géologie
MALAPRADE	Chimie	*Mme LUMER	Mathématiques
*MANGENOT	Botanique	DELPUECH	Chimie physique
N...	Chimie biologique		
N...	Mécanique appliquée		
N...	Analyse supérieure		
N...	Méthodes mathématiques de la physique		
N...	Mécanique rationnelle		

(*) Professeur titulaire à titre personnel

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme BASTICK	Chimie P. C. Epinal	MM. FLECHON	Physique P. C.
MM. GUDEFIN	Physique	Mlle HUET	Mathématiques C. B. G.
VUILLAUME	Psychophysiologie	VIGNES	Métallurgie
FRENTZ	Biologie animale	BALESDENT	Thermodynamique, Chimie appliquée (ENSIC)
MARI	Chimie (ISIN)	BLAZY	Minéralogie appliquée (ENSG)
AUROUZE	Géologie	JANOT	Physique P. C. Epinal
DEVIOT	Physique du solide	CACHAN	Entomologie appliquée (ENSA)

MAITRES DE CONFERENCES

MM JACQUIN	Pédologie et chimie agricoles	MM. BAVEREZ	Chimie (ENSIC)
MAINARD	Physique M. P.	CHAMBON	Exploitation minière (Mines)
MARTIN	Chimie P. C.	HUSSON	Physique (ENSEM)
PAULMIER	Mécanique expérimentale	GERL	Physique
PROTAS	Minéralogie	WEISSLINGER	Physique
JOZEFOWICZ	Physico-chimie	ROQUES	Chimie minérale
JURAIN	Géologie C. B. G.	PERRIER	Mathématiques
RIVAIL	Chimie appliquée (CUCES)	N...	Mécanique des fluides (ISIN)
VILLERMAUX	Génie chimique	N...	Mécanique (ISIN)
METCHE	Biochimie appliquée (Brasserie)	N...	Mathématiques
PAIR	Mathématiques appliquées	N...	Mathématiques P. C.
BAUMANN	Physique 1° cycle	N...	Mathématiques C. B. G.
DURAND	Physique	N...	Physiologie animale
GRANGE	Physique (ISIN)	N...	Mathématiques M. P.
DEPAIX	Probabilités et statistiques		

CHARGES D'ENSEIGNEMENTS

MM. AMARIGLIO, COEURE, DAVRAINVILLE, GILORMINI, GIRARDEAU, HILY, MAURIN, NOVERRAZ, OVAERT, RUYER, WEBER.

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur J. LEGRAS, Directeur de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique.

Je tiens à lui exprimer ici ma profonde gratitude pour l'aide qu'il n'a cessé de m'apporter et la formation à la recherche qu'il m'a donnée.

Je remercie Messieurs DEPAIX et PAIR, Professeurs à la Faculté des Sciences de Nancy ainsi que Monsieur HENTZGEN, Ingénieur Mathématicien à la Compagnie Internationale pour l'Informatique, qui ont bien voulu me faire l'honneur de participer au Jury.

J'adresse mes vifs remerciements à tous les amis de l'Institut de Calcul qui m'ont beaucoup aidé.

SOMMAIRE

Introduction

CHAPITRE I

La méthode d'approximation

- I.1. Méthode classique
- I.2. Méthodes d'approximation
 - I.2.1. à une variable
 - I.2.2. à deux variables

CHAPITRE II

Application à une variable

- II.1. Exposé du problème
- II.2. Méthode exhaustive
- II.3. Méthode d'approximation
- II.4. Application numérique
- II.5. Conclusion

CHAPITRE III

Application à deux variables dans un domaine rectangulaire

- III.1. Position du problème
- III.2. Schéma de calcul
- III.3. Application numérique
- III.4. Conclusion

CHAPITRE IV

Application à deux variables dans un domaine triangle

IV.1. Position du problème (problème de transport)

IV.2. Schéma de calcul

IV.3. Application numérique

IV.4. Conclusion

Conclusion

Annexes

INTRODUCTION

Le fondement de la programmation dynamique est constitué par le principe d'optimalité* qui conduit à des équations fonctionnelles du type suivant :

$$\mathcal{F}_N(x) = \max_{0 \leq x_N \leq x} [g_N(x_N) + \mathcal{F}_{N-1}(x-x_N)] \quad (I)$$

pour $N = 2, 3, \dots, p, x > 0$.

La résolution par la méthode classique est la suivante :
Les valeurs de $\mathcal{F}_N(x)$ dans l'intervalle $[0, x_0]$ sont prises aux points également espacés :

$$x = 0, \Delta, 2\Delta, \dots, R\Delta = x_0$$

La valeur de chaque élément de la suite $\{\mathcal{F}_N(x)\}$ sera calculée et tabulée en chacun de ces points et seulement en ceux-là ; le processus de maximisation se fait par la méthode exhaustive.

La méthode classique est également applicable à une fonction $\mathcal{F}_N(\vec{V})$ où \vec{V} est un vecteur à n dimensions, mais on rencontre des difficultés pour stocker les résultats en mémoire. En pratique, il est difficile et coûteux d'utiliser une telle méthode pour une fonction \mathcal{F}_N à plusieurs variables. Bellman a suggéré la méthode d'approximation des fonctions par des polynômes pour surmonter les difficultés causées par le nombre de dimensions élevé.

* Le principe d'optimalité :

Une politique optimale est telle que, quels que soient l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes doivent constituer une politique optimale par rapport à l'état résultant de la première décision.

La méthode d'approximation consiste essentiellement, à l'aide d'un polynôme, à représenter sous forme continue un ensemble de valeurs. Cela entraîne d'autres techniques de la recherche optimale.

Nous étudions tout d'abord le cas d'une variable, on utilise la méthode d'approximation à une variable avec la recherche optimale par la méthode des parties proportionnelles et on la compare avec la méthode classique. Ensuite, nous étudions le cas de deux variables dans un domaine rectangulaire, on utilise la méthode d'approximation à deux variables avec des supports de Tchebycheff et la recherche optimale par rapport à une variable par la méthode des parties proportionnelles. Pour terminer, nous étudions le cas de deux variables dans un domaine triangulaire et la recherche optimale sur deux variables également. On utilise la méthode d'approximation à deux variables avec un support quelconque ; quant à la méthode de recherche optimale comme on est limité par la capacité de la machine, on reprend la méthode exhaustive.

CHAPITRE__I

METHODE D'APPROXIMATION

I. I. LA METHODE CLASSIQUE : Énumération directe proposée par
Mr BELLMAN

On utilise une méthode itérative, permettant de recalculer une valeur quelconque à partir de quelques valeurs soigneusement choisies. Les valeurs de $\mathcal{F}_N(x)$ dans l'intervalle $[0, x_0]$, sont prises aux points également espacés :

$$x = 0, \Delta, 2\Delta, \dots, R\Delta = X_0$$

La valeur de chaque élément de la suite $\{\mathcal{F}_N(x)\}$ sera calculée et tabulée en chacun de ces points et seulement en ceux-là. Il est particulièrement commode de considérer les mêmes valeurs pour X_N et pour X . Le processus de maximisation se fait en énumérant directement tous les cas possibles et en comparant les valeurs.

Schéma de calcul :

Pour $N=1$, la fonction $\mathcal{F}_1(x)$ est déterminée immédiatement par la relation $\mathcal{F}_1(x) = g_1(x)$.

L'ensemble des valeurs $\{\mathcal{F}_1(K\Delta)\}$ pour $K=0, 1, 2, \dots, R$ est alors stocké en mémoire.

Nous déterminons maintenant $\mathcal{F}_2(x)$ en utilisant la relation de récurrence pour $N=2$

$$\mathcal{F}_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} [g_2(x_2) + \mathcal{F}_1(x-x_2)]$$

où x prend seulement les valeurs $0, \Delta, \dots, R\Delta$.

Il vient :

$$x = i \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, R ;$$

$$\mathcal{F}_2(i \Delta) = \max_{K=0, 1, \dots, i} [g_2(K \Delta) + \mathcal{F}_1((i-K) \Delta)]$$

Pour chaque valeur de x (c'est à dire de i), on calcule d'abord $g_2(0) + \mathcal{F}_1(i \Delta)$ et $g_2(\Delta) + \mathcal{F}_1((i-1) \Delta)$ puis on les compare et on conserve la quantité la plus grande. On calcule ensuite la valeur de $g_2(2 \Delta) + \mathcal{F}_1((i-2) \Delta)$ et on la compare avec la quantité maximale obtenue auparavant, en gardant la plus grande quantité. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que K ait pris toutes les valeurs possibles de 0 à i . On obtient ainsi la valeur $\mathcal{F}_2(i \Delta)$ qui est donnée par une valeur particulière de X_2 , par exemple $X_2 = j \Delta$, j étant une valeur particulière de K .

Au cours de ce processus de recherche, on détermine non seulement la valeur de $\mathcal{F}_2(x)$ pour les valeurs $0, \Delta, 2 \Delta, \dots, R \Delta$ de x , mais aussi pour la valeur de x_2 pour laquelle le maximum est obtenu ; puisque cette valeur dépend de x , notons la $X_2(x)$. Pour chaque valeur de x , on mettra les deux éléments $X_2(x)$ et $\mathcal{F}_2(x)$ en mémoire.

En continuant ce processus pour N étapes, on peut présenter le tableau de valeurs suivant :

x	$x_1(x)$	$x_2(x)$	$x_{N-1}(x)$	$x_N(x)$
0	-	-		-	-
	-	-		-	-
2Δ	-	-		-	-
⋮					
⋮					
⋮					
$R \Delta$	-	-		-	-

Cette table fournit la solution du problème de maximisation à N étapes de la façon suivante :

étant donnée une valeur particulière de X, il lui correspond la valeur $X_N(x)$. On est alors ramené au problème de détermination de l'allocation optimale dans un processus à N-I étapes, avec une quantité de ressources $x - x_N(x)$. On recommence le même procédé, on trouve finalement la solution $(x_N, x_{N-1}, \dots, x_1)$ qui optimise la fonction R.

I.2. METHODES D'APPROXIMATIONS

Une approximation par des polynômes est une représentation beaucoup plus économique de la fonction $\mathcal{F}_N(x)$, puisqu'il suffit de mettre en mémoire l'ensemble des coefficients du polynôme et des instructions nécessaires pour pouvoir calculer le polynôme correspondant.

I. Approximation d'une fonction à une variable par les polynômes de Tchebycheff sur un support de Tchebycheff.

Définition :

Lorsque les valeurs de la variable y restent comprises entre -1 et +1, il est possible de définir les polynômes de Tchebycheff $T_n(y)$ (n étant entier) par les formules $y = \cos \theta$ et $T_n(y) = \cos n\theta$ $n = 1, 2 \dots i \dots$

Ces polynômes vérifient la relation de récurrence :

$$T_0(y) = 1, \quad T_1(y) = y$$

$$\text{et } T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y) \text{ quelque soit } y.$$

Soit $\mathcal{F}(X)$ la fonction considérée, l'approximation de $\mathcal{F}(X)$ par les polynômes de Tchebycheff sur l'intervalle (a,b) , consiste à déterminer un polynôme $P(X)$ défini

$$P(X) = \sum_{i=0}^m \alpha_i T_i \left(\frac{a+b-2x}{a-b} \right)$$

et tel que $P(x)$ approche $f(x)$ au sens des moindres carrés aux $n+1$ points

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+1}$$

L'ensemble de ces points correspondant à des valeurs de θ équiparties sur $0, \pi$ est dit "support de Tchebycheff". On sait que l'on peut mettre le polynôme $P(X)$ sous forme matricielle.

$$P(X) = \left[1, T_1 \left(\frac{a+b-2x}{a-b} \right), \dots, T_m \left(\frac{a+b-2x}{a-b} \right) \right] \begin{bmatrix} L \\ \mathcal{F}(X_0) \\ \mathcal{F}(X_1) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(X_n) \end{bmatrix}$$

avec $n \geq m$

$[L]$ est une matrice rectangulaire à $m+1$ lignes et à $n+1$ colonnes. Ses éléments sont les valeurs de $T_i(X)$, $i=0,1,\dots,m$ aux points d'approximation. En utilisant la notation en θ ,

nous avons :

$$[L] = \frac{2}{n+1} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ \cos \theta_0 & \cos \theta_1 & \dots & \cos \theta_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \cos m \theta_0 & \cos m \theta_1 & \dots & \cos m \theta_n \end{bmatrix} \dots (B)$$

2. Approximation d'une fonction à 2 variables par les polynômes de Tchebycheff :

On propose deux méthodes d'approximation : l'une, qui utilise le produit de Kronecker des matrices, est valable dans un domaine rectangulaire dont les supports sont les noeuds de supports de Tchebycheff respectivement aux variables ; l'autre est valable pour un support quelconque. Les méthodes s'étendent à n variables.

a) Méthode utilisant le produit de Kronecker :

On se ramène d'abord aux variables x,y dont les valeurs sont situées entre -1 et +1. On peut utiliser les supports de polynômes de Tchebycheff de degré P₁ en x et P₂ en y.

Le polynôme P approchant la fonction est

$$P(x,y) = \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \alpha_{i_1, i_2} T_{i_1}(x) T_{i_2}(y),$$

$P(x,y)$ s'écrit sous la forme du produit de Kronecker :

$$P(x,y) = \left[[I, T_I(x), \dots, T_{N_I}(x)] \otimes [I, T_I(y), \dots, T_{N_2}(y)] \right]$$
$$\left[[L_{N_I}] \otimes [L_{N_2}] \right] [F]$$

le signe \otimes désigne le produit de Kronecker des matrices.

Les matrices $[L_{N_I}]$ et $[L_{N_2}]$ sont rectangulaires respectivement de N_I+I et N_2+I lignes et de P_I+I et P_2+I colonnes. (voir annexe).

b) Supports quelconques

On se ramène toujours au cas $-I \leq \frac{x}{y} \leq +I$ et la fonction à approcher est connue en P points quelconques dans un domaine.

La méthode des moindres carrés consiste à rechercher une fonction $P(x,y)$ de la forme :

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} T_i(x) T_j(y)$$

où les $T_i(x)$ et $T_j(y)$ sont des polynômes de Tchebycheff et les α_{ij} les inconnues.

On peut, ou bien écrire que

$$P(x,y) = f(x,y)$$

en p points de coordonnées x_K, y_K ($p > N$, nombre des coefficients α_{ij}), ce qui conduit à un système surdéterminé

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$

que l'on peut résoudre par la méthode de Fadeeva.

On peut également déterminer les α_{ij} pour rendre minimum

$$I = \sum_{K=1}^P \left[\mathcal{F}(x_K, y_K) - P(x_K, y_K) \right]^2 =$$
$$= \sum_{K=1}^P \left[\mathcal{F}(x_K, y_K) - \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} \alpha_{ij} T_i(x_K) T_j(y_K) \right]^2$$

Il faut remarquer que le système ainsi obtenu est le système

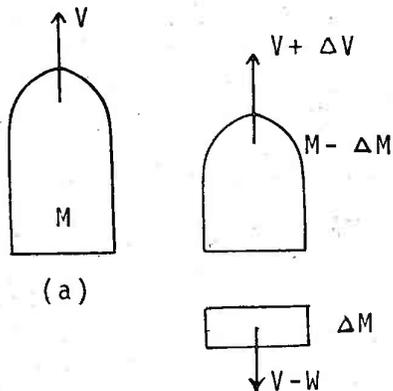
$$\left[A \right]^T \left[A \right] \left[\alpha \right] = \left[A \right]^T \left[F \right]$$

Les deux méthodes sont donc théoriquement équivalentes mais la première est moins sensible aux erreurs de chute et c'est elle que nous utiliserons.

CHAPITRE II

APPLICATION A UNE VARIABLE

II. I. EXPOSE DU PROBLEME



Soit une fusée de masse à vide m décollant verticalement avec une masse de propergols P_0 . On suppose la vitesse d'éjection des gaz de la tuyère constante W et la résistance de l'air négligeable. On cherche le maximum de la vitesse \bar{V} à la fin de la combustion et le programme de combustion correspondant.

Etablir l'équation du mouvement :

On considère la fusée, de masse M et de vitesse V à un certain instant t (fig.a). Au bout d'un intervalle de temps dt , une masse de gaz dM a été éjectée vers l'arrière à la vitesse absolue $(V-W)$ tandis que la fusée, de masse $(M+dM)$, a acquis la vitesse $(V+dV)$ (fig.b). On calcule la quantité de mouvement au début et à la fin de ce processus élémentaire.

Au début : $(MV)_1 = MV$

A la fin : $(MV)_2 = (M+dM)(V+dV) - (V-W)dM$

$$(MV)_2 = MV + MdV + WdM$$

En négligeant le produit $dM \cdot dV$

$$d(MV) = MdV + WdM \quad (a1)$$

D'autre part, la seule force agissant sur la masse totale M est la pesanteur $-Mg$, dirigée en sens opposé à la vitesse de sorte que l'application du théorème de la quantité de mouvement donne :

$$\frac{d(MV)}{dt} = -Mg \dots \quad (a2)$$

En utilisant la relation (a1), il vient

$$\frac{d(MV)}{dt} = M(t) \frac{dV}{dt} + W \frac{dM}{dt} = -Mg \quad (a3)$$

M est une fonction de temps et W est une constante. Cette équation différentielle définit V(t) lorsque M(t) est fixé.

Détermination de la loi de commande M(t) :

On suppose que la masse de propergols P_0 se consomme en N étapes, c'est à dire en un temps N. ΔT , ΔT étant un intervalle de temps élémentaire. A la N^{ième} étape, définie par l'intervalle de temps $[(N-1)\Delta T, N\Delta T]$. On affecte l'indice I, de même à la i^{ième} étape, définie par l'intervalle de temps $[(i-1)\Delta T, i\Delta T]$. On affecte l'indice N-i+1, on désigne par p_i la consommation de propergols à l'étape ayant l'indice i et par v_i l'accroissement de la vitesse correspondante.

On détermine v_i à l'aide de (a3)

$$\int_{(N-i)\Delta T}^{(N-i+1)\Delta T} M(t) \frac{dV}{dt} dt + W \int_{(N-i)\Delta T}^{(N-i+1)\Delta T} dM(t) = -g \int_{(N-i)\Delta T}^{(N-i+1)\Delta T} M(t) dt$$

La formule de la moyenne donne :

$$\int_a^b \mathcal{F}(x) g(x) dx = \mathcal{F}(c) \int_a^b g(x) dx \quad \text{avec } a \leq c \leq b.$$

$$M(t) V_i + WM((N-i+1)\Delta T) - WM((N-i)\Delta T) = -gM(\bar{t}) \Delta T$$

$$M(\bar{t}) = \frac{1}{2} M(\Delta T \times (N-i+1)) + \frac{1}{2} M(\Delta T \times (N-i))$$

$$V_i = W \times \frac{M(\Delta T \times (N-i)) - M(\Delta T \times (N-i+1))}{M(\bar{t})} - g \Delta T$$

On calcule $M(\bar{t}), M(\Delta T_x(N-i)), M(\Delta T_x(N-i+I))$:

On désigne par m la masse à vide de la fusée. A la fin de la première étape, la masse de la fusée est $m+P_0-P_N$ et à la fin de la $i^{\text{ième}}$ étape, la masse de la fusée devient $m+P_0-P_N-P_{N-1}\dots-P_{N-i+1}$ ou bien $m+P_0-\sum_{j=N-i+1}^N P_j$.

On aura très facilement $M(\bar{t}), M(\Delta T_x(N-i)), M(\Delta T_x(N-i+I))$:

$$M(\Delta T_x(N-i)) = m+P_0 - \sum_{j=i+1}^N P_j$$

$$M(\Delta T_x(N-i+I)) = m+P_0 - \sum_{j=i}^N P_j = m+P_0 - \sum_{j=i+1}^N P_j - P_i$$

$$M(\bar{t}) = \frac{I}{2} (M(\Delta T_x(N-i)) + M(\Delta T_x(N-i+I)))$$

On pose R_i la masse de propergols disponible à la $(N-i)^{\text{ième}}$ étape :

$$R_i = P_0 - \sum_{j=i+1}^N P_j$$

$$M(\bar{t}) = \frac{I}{2} [2m + 2R_i - P_i] = m + R_i - \frac{I}{2} P_i$$

D'où
$$V_i = W \frac{P_i}{m + R_i - 0,5 P_i} - g \Delta T \quad (a4)$$

en supposant la consommation instantanée constante pendant l'intervalle ΔT .

L'établissement du programme de combustion optimale consiste à déterminer la masse P_i de propergols qu'il convient de consommer pendant chaque intervalle de temps depuis le début de la combustion.

On applique maintenant le principe d'optimalité en écrivant l'expression de la vitesse maximale $\bar{V}_N(P)$ que peut fournir une masse P de propergols consommée en N étapes, c'est à dire en un temps $N \cdot \Delta T$. Connaissant la fonction $\bar{V}_{N-1}(P)$ préalablement calculée pour un processus à $N-1$ étapes, on remarque que l'on a inséré le problème particulier relatif à la masse de propergols P_0 dans un problème plus général portant sur une masse quelconque P comprise entre 0 et P_0 . L'application du principe d'optimalité fournit la formule de récurrence suivante :

$$\bar{V}_N(P) = \max_{f_N} [V_N(P_N, P) + \bar{V}_{N-1}(P - P_N)] \quad (\text{a5})$$

Dans cette équation, P_N représente la première décision du processus à N étapes, c'est à dire la consommation pendant le premier intervalle de ce processus et $V_N(P_N, P)$ la vitesse calculée à l'aide de l'équation (a4) ; $\bar{V}_{N-1}(P - P_N)$ représente alors la vitesse obtenue en $(N-1)$ étapes avec la quantité de propergols restante $(P - P_N)$.

Pour un processus à une seule étape, on a $\bar{V}_1(P) = V_1(P)$. Enfin, une borne supérieure P_{\max} sera imposée à P_N de sorte que :

$$0 \leq P_N \leq P_{\max}.$$

II.2. METHODE EXHAUSTIVE

Bellman a proposé la technique de calcul suivante :

Le problème initial comportant des variables continues a été remplacé par un problème ne comportant que des variations discrètes, en discrétisant à la fois en P et en t . On détermine alors la valeur maximale par une simple énumération des cas puis par comparaison des différentes valeurs.

N=1

$$\bar{V}_1(P) = V_1(P) = W \frac{P}{m+P/2} - g \Delta T$$
$$0 \leq P \leq P_{\max}$$

N=2

$$\bar{V}_2(P) = \max [V_2(P, P_2) + \bar{V}_1(P(P_2))] \dots \quad (a6)$$
$$0 \leq P_2 \leq P$$

$$V_2(P, P_2) = W \times \frac{P_2}{m+P-P_2/2} - g \Delta T$$

où P prend seulement les valeurs $\Delta P, 2 \Delta P, \dots, K \Delta P$.

$K \Delta P$ correspondant à la valeur maximale disponible de la masse de propergols à l'étape considérée. On remplace l'intervalle $[0, P_{\max}]$ par un ensemble de valeurs discrètes $\Delta P, 2 \Delta P \dots R \Delta P$, d'où $R \Delta P = P_{\max}$.

La relation (a6) est remplacée par la relation approximative

$$\bar{V}_2(P) = \max_{i=0,1,\dots,R} [V_2(P, i \Delta P) + \bar{V}_1(P-i \Delta P)]$$

Dans celle-ci, l'on calcule d'abord $V_2(P, 0) + \bar{V}_1(P-0)$ et

$V_2(P, \Delta P) + \bar{V}_1(P-\Delta P)$ puis on les compare et on retient la quantité la plus grande. On calcule ensuite la valeur de $V_2(P, 2 \Delta P) + \bar{V}_1(P-2 \Delta P)$ et on la compare à la quantité maximale obtenue auparavant, en gardant la plus grande quantité. Ce processus continue jusqu'à ce qu'il ait pris toutes les valeurs possibles, c'est à dire $P-i \Delta P \geq 0$. On obtient ainsi $\bar{V}_2(P)$ pour une valeur particulière de P.

Au cours de ce processus de recherche, on détermine non seulement $\bar{V}_2(P)$ pour les valeurs $\Delta P, 2 \Delta P, \dots, R \Delta P$ de P mais aussi la valeur de P_2 pour laquelle le maximum est obtenu dans (a6).

Pour chaque valeur de P , on associe P_2 et $\bar{V}_2(P)$ et l'on utilise $\bar{V}_1(P-P_2)$ trouvée à l'étape précédente.

En continuant ce processus pour N étapes, on peut obtenir la solution sous la forme du tableau :

P	$\bar{V}_1(P)$	$P_1(P)$	$\bar{V}_2(P)$	$P_2(P)$	$\bar{V}_3(P)$	$P_3(P)...$
ΔP	-	-	-	-	-	-
$2\Delta P$	-	-	-	-	-	-
.	-	-	-	-	-	-
.						
.						

Cette table fournit la solution du problème de maximisation à N étapes de la façon suivante : étant donnée une valeur particulière de P , on parcourt la colonne de P_N jusqu'à trouver la valeur correspondante de $P_N(P)$. On est ramené au problème de maximisation à $N-1$ étapes avec une quantité de propergols $P-P_N(P)$. En continuant ce mécanisme, on obtient le programme optimal de combustion et la vitesse maximale à la fin de chaque étape.

La méthode de Bellman est très simple. On sort les résultats de calcul étape par étape et on les garde en mémoire. Au cours des opérations, on s'arrange toujours pour que $P-P_N$ ait exactement la valeur qui se trouve en mémoire. Les fonctions $\bar{V}_N(P)$ et $P_N(P)$ sont stockées sous forme discrète et les précisions de cette représentation sont déterminées par la valeur ΔP . Par contre, plus ΔP est petit, plus les valeurs de la fonction à calculer et à garder en mémoire sont nombreuses, plus le temps de calcul est long.

cette méthode amène des difficultés dues au stockage d'information en mémoire et au temps de calcul.

Organigramme fig. 1 et 2.

II.3. METHODE D'APPROXIMATION

On approche les fonctions $\bar{V}_N(P)$ et $P_N(P)$ par des polynômes dont il suffit de garder les coefficients en mémoire. On peut obtenir la valeur $\bar{V}_N(P)$ pour des valeurs arbitraires de P dans l'intervalle considéré au prix d'un stockage d'information en mémoire relativement peu important. Maintenant on a une fonction continue définie sur un intervalle fini. On recherchera le maximum par la méthode des parties proportionnelles.

On se fixe pour le problème de degré du polynôme n et le nombre $m+1$ des points du support d'approximation

pour $N=1$

$$\bar{V}_I(P) = V_I(P_I, P) = W \times \frac{P}{m+P/2} - g \Delta T$$
$$0 \leq P_I = P \leq P_{\max}$$

On calcule uniquement des P tels que

$$P_j = \frac{P_{\max}}{2} \cos \left(\frac{2j+1}{2m+2} \pi \right) + \frac{P_{\max}}{2} \quad j=0, 1, \dots, m$$

$$\bar{V}_I(P) \approx \sum_{K=0}^n a_{IK} T_K(P)$$

$T_K(P)$ est un polynôme de Tchebycheff de degré K
pour $N=2$

$$\bar{V}_2(P) = \max [V_2(P_2, P) + \bar{V}_I(P-P_2)]$$
$$0 \leq P_2 \leq P_{\max} \quad \text{et} \quad 0 \leq P-P_2 \leq P_{\max}.$$

On calcule des P_j :

$$P_j = \frac{XM}{2} \cos \frac{2J+I}{2m+2} \pi + \frac{XM}{2} \quad J=0, I, \dots, m$$

avec $XM = \min(2 \times P_{\max}, P_{\text{disponible}})$

Pour chaque P_j , on emploie la méthode des parties proportionnelles (voir annexe) pour maximiser $V_2(P_2, P) + \bar{V}_I(P - P_2)$ dans l'intervalle $[\max[0, P - P_{\max}], \min[P_{\max}, P]]$

Alors $\bar{V}_2(P) = \sum_{K=0}^n a_{2K} T_K(P)$, $P_2(P) = \sum_{K=0}^n a'_{2K} T_K(P)$

d'une façon générale avec $N = K$

$$\bar{V}_K(P) = \max_{0 \leq P_K \leq P_{\max}, 0 \leq P - P_K \leq Y_M} [V_K(P_K, P) + \bar{V}_{K-I}(P - P_K)]$$

avec des valeurs P

$$P_j = \frac{XM}{2} \cos \frac{2J+I}{2M+2} \pi + \frac{XM}{2} \quad j=0, I, \dots, m$$

$$XM = \min [K \times P_{\max}, P_{\text{disponible}}]$$

$$YM = \min [(K-I) \times P_{\max}, P_{\text{disponible}}]$$

Pour chaque P on reprend la méthode des parties proportionnelles pour minimiser $V_K(P_K, P) + \bar{V}_{K-I}(P - P_K)$ dans l'intervalle $[\max[0, P - Y_M], \min[P_{\max}, P]]$

d'où $\bar{V}_K(P) = \sum_{j=0}^n a_{Kj} T_j(P)$ et $P_K(P) = \sum_{j=0}^n a'_{Kj} T_j(P)$

On stocke seulement les coefficients a_{kj} et a'_{kj} . Pour un P donné, on trouve facilement le programme optimal et la vitesse maximum atteinte à la fin de chaque étape, Organigramme.

II.4. APPLICATION NUMERIQUE

$$\begin{aligned}
 m &= 300 \text{ kg} & W &= 3000 \text{ m/s} & g &= 10 \text{ m/s} \\
 \Delta T &= 5 \text{ s} & P_0 &= 3000 \text{ kg disponible} \\
 P_{\max} &= 800 \text{ kg} \\
 \bar{V}_N &= (3000 P_N) / (300+P-P_N/2) - 50 \\
 V_I &= 3000 P / (300+P/2) - 50
 \end{aligned}$$

A) Méthode exhaustive

On étudie l'influence de la variation élémentaire de propergols P sur les résultats et le temps de calcul.

\bar{V}_N la vitesse maximale à la fin de combustion
 P_N politique optimum de la consommation

ΔP	300 kg		200 kg		100 kg		50 kg	
	P_N	\bar{V}_N	P_N	\bar{V}_N	P_N	\bar{V}_N	P_N	\bar{V}_N
6	600	6750	800	6789	800	6790	800	6794
5	600	6200	800	6012	800	6012	800	6016
4	600	5500	600	4919	500	4919	600	4923
3	600	4550	400	3683	400	3935	400	3688
2	300	3100	200	2400	300	2785	250	2404
I	300	1950	200	1450	200	1450	150	1150
Temps de calcul	30 sec		37 sec		70 sec		215 sec	
Plan en mémoire	135 mots		207 mots		414 mots		834 mots	

B) Méthode d'approximation

La méthode dépend de trois paramètres :

n degré de polynôme,

m+1 nombre des points d'approximation,

q nombre d'essais pour la méthode des parties proportionnelles.

(Notons l_0 l'intervalle initial, L_q l'intervalle d'incertitude d'après q essais $l_0/L_q = (1.62)^{q-1}$).

B.1) On étudie d'abord l'influence de n degré de polynôme et de m+1 nombre des points d'approximation sur les résultats obtenus tout en fixant le nombre d'essais q=5 pour la méthode des parties proportionnelles (ceci entraîne une incertitude

$$l_0/L_q = (1.62)^{q-1} ,$$

$$l_0/L_q = 6.85 \implies L_q = \frac{\min [P_{\max}, P] - \max [0, P - P_{\max}]}{6.85}$$

et on garde la valeur maximale trouvée d'après q essais).

Résultats numériques :

Tableau I

n degré de polynôme	3		5		5	
m+1 nombre de points	7		6		11	
ETAPE	P_N	\bar{V}_N	P_N	\bar{V}_N	P_N	\bar{V}_N
6	788.56	6984.43	798.51	6804.03	784.78	6809.37
5	654.91	6161.31	792.25	6024.73	792.85	6037.67
4	485.03	5359.66	629.42	4936.70	680.58	4946.47
3	424.19	4437.42	372.99	3647.94	368.36	3540.52
2	406.25	3311.33	230.59	2438.85	211.53	2299.15
1	241.06	1671.76	176.24	1312.94	161.90	1225.52
Temps de calcul	65 sec		74 sec		113 sec	
Plan en mémoire	52 mots		78 mots		78 mots	

Comme on fixe le nombre d'essais q, on a une qualité de la recherche optimale identique pour trois cas. Plus n augmente, on a besoin d'un temps de calcul plus long et on occupe plus de place en mémoire. Mais, par contre, le résultat est plus précis. Plus m+1 augmente tout en gardant n, plus on prolonge le temps de calcul, mais on améliore le résultat également.

B.2) On fixe le degré du polynôme n=10 et le nombre des points d'approximation m+1=11. On fait varier le nombre d'essais q, c'est à dire qu'on veut améliorer la qualité de la recherche optimale ; on réduit l'intervalle d'incertitude.

pour q=5
$$l_0/L_5 = 6.85 \Rightarrow L_5 = \frac{\min [P_{\max}, P] - \max [0, P - P_{\max}]}{6.85}$$

q=10
$$l_0/L_{10} = 76 \Rightarrow L_{10} = \frac{\min [P_{\max}, P] - \max [0, P - P_{\max}]}{76}$$

Résultats numériques

Tableau 2

Nombre d'expériences	5		10		Plan en mémoire
	P _N	\bar{V}_N	P _N	\bar{V}_N	
6	748.32	6790.79	791.33	6793.70	143 mots
5	763.19	6073.33	793.72	6026.22	
4	650.32	5068.60	622.98	4948.99	
3	408.67	3785.40	386.21	3667.38	
2	252.93	2522.42	245.97	2427.80	
1	176.26	1314.19	159.80	1211.86	
Temps de calcul	180 sec		265 sec		

plus q augmente, plus le temps de calcul augmente également et le résultat s'améliore aussi.

C) Comparaison de deux méthodes (même pas de discrétisation en t).

Méthode	B $n=5, q=5$ $m+I=II$		A ($\Delta p=50$)	
ETAPE	P_N	\bar{V}_N	P_N	\bar{V}_N
6	784.78	6809.37	800	6794
5	792.85	6037.67	800	6016
4	680.58	4946.47	600	4923
3	368.36	3540.52	400	3687
2	211.53	2299.15	250	2404
I	161.90	1225.53	150	1150
Temps de calcul	113 sec		215 sec	
Plan en mémoire	78 mots		834 mots	

Deux méthodes sont valables. On trouve des résultats de même ordre de grandeur.

Conclusion

Les applications numériques, dans notre petit exemple, montre que la méthode d'approximation réduit considérablement la place occupée en mémoire.

Selons des besoins, on peut désirer obtenir un temps de calcul réduit et occuper très peu de place en mémoire, à l'aide du polynôme de degré faible et d'un nombre d'essais peu élevé mais le résultat est moins précis. On peut également désirer que le résultat soit très précis et il faut y mettre "le prix", c'est à dire accepter que le temps de calcul soit plus long, occuper plus de place en mémoire et augmenter le nombre d'essais avec un polynôme de degré plus élevé ; il faudra alors plus de points d'approximation.

On peut comparer le produit de temps de calcul et la place en mémoire de deux méthodes :

Méthode classique		Méthode d'approximation	
caractéristique	sec x mots	caractéristique	sec x mots
$\Delta P = 300$	4050	$n=3, m+1=7, q=5$	3380
$\Delta P = 100$	28980	$n=5, m+1=6, q=5$	5572
$\Delta P = 50$	179310	$n=10, m+1=11, q=10$	37895

La méthode d'approximation est une méthode économique et elle donne des résultats aussi valables que la méthode classique.

Il faut encore noter que la méthode de Bellman donne toujours une approximation du maximum par valeurs inférieures, alors que la méthode d'approximation peut conduire à des valeurs approchées par excès ou par défaut.

Organigramme : Méthode de Bellman

Fig. I

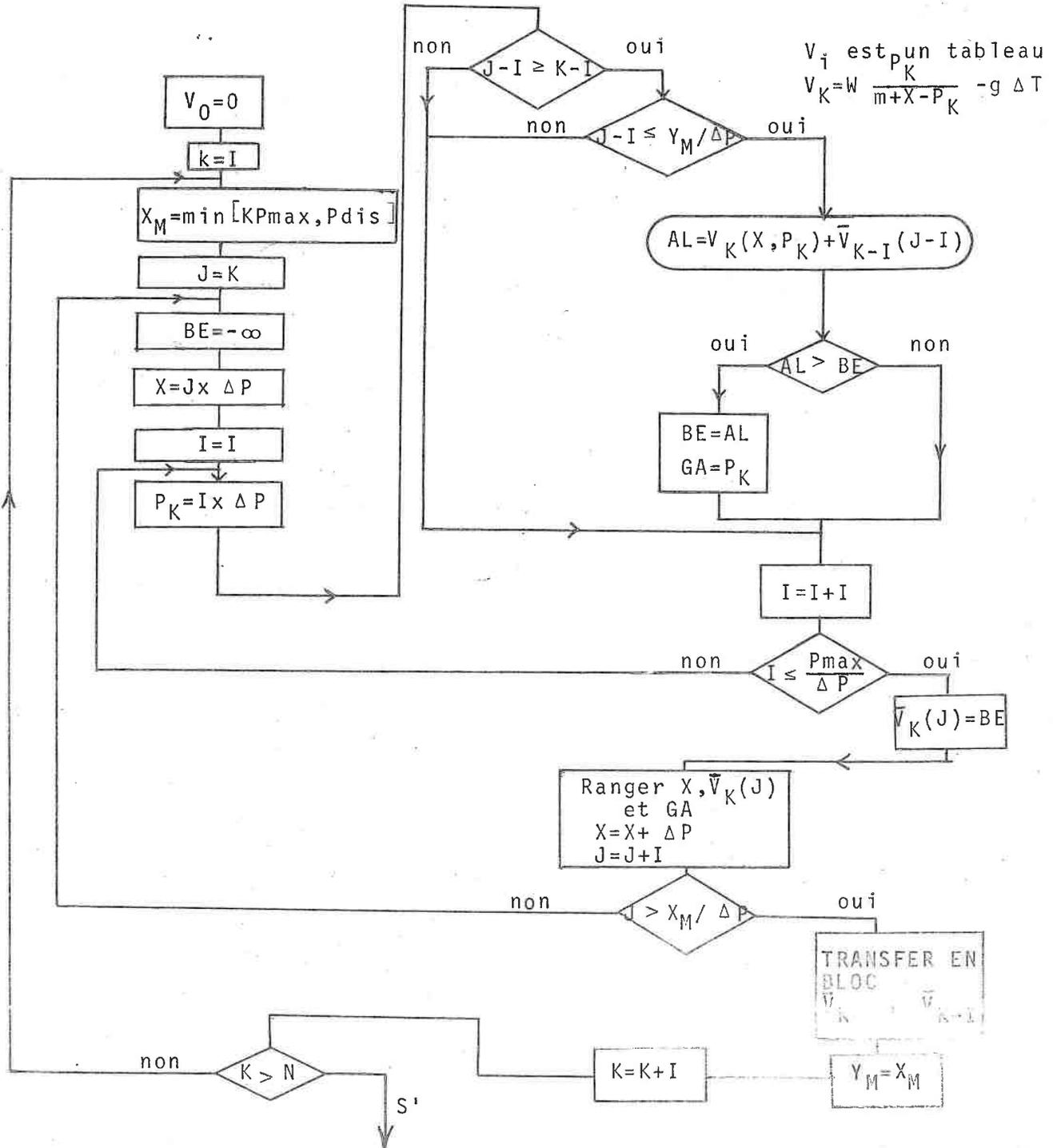
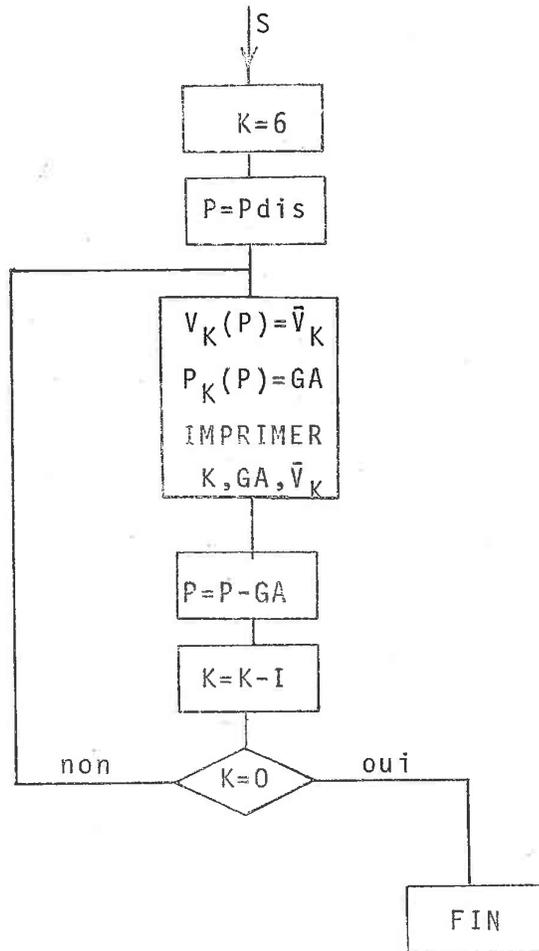


Fig. Ibis



Organigramme : méthode d'approximation

Fig. 2

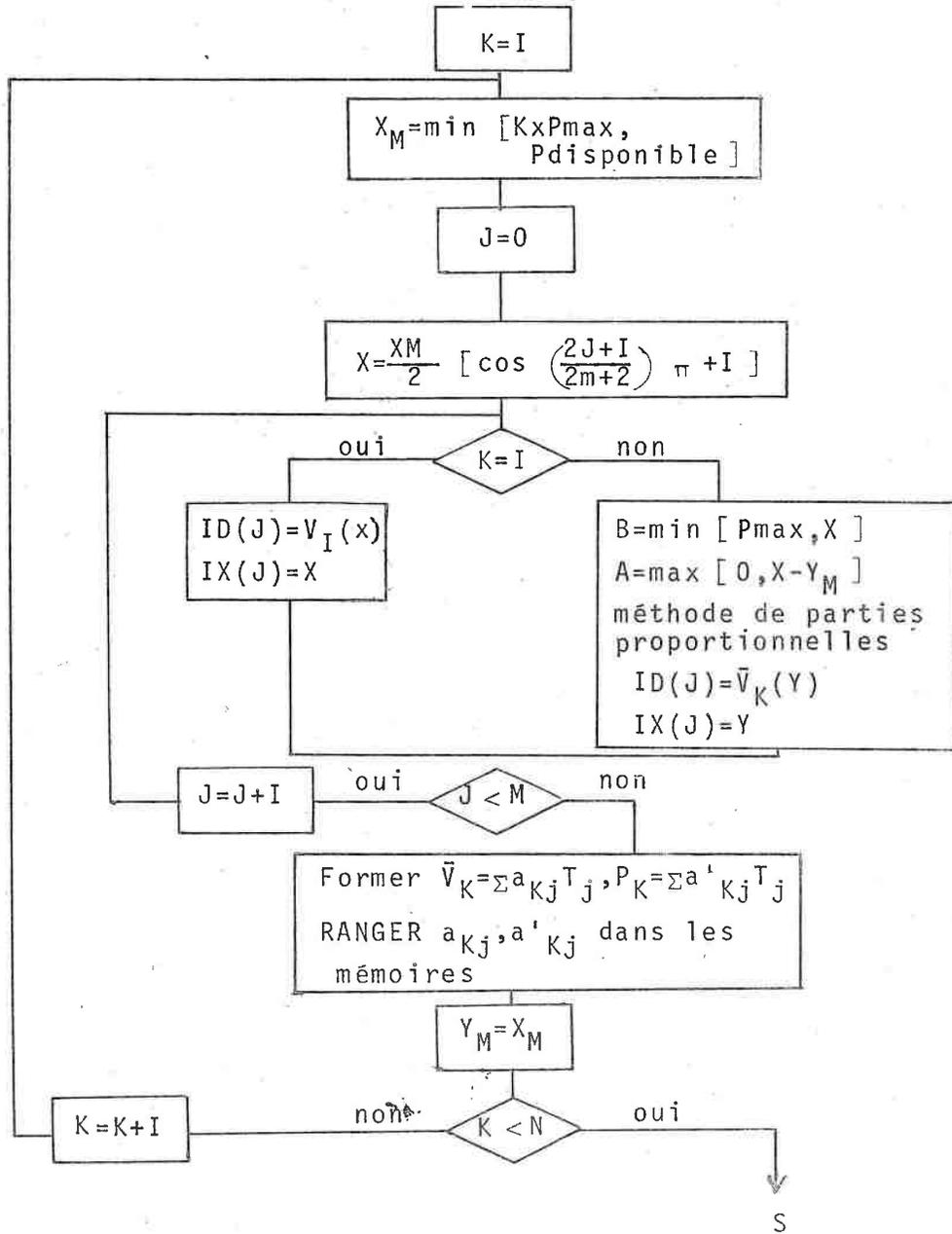
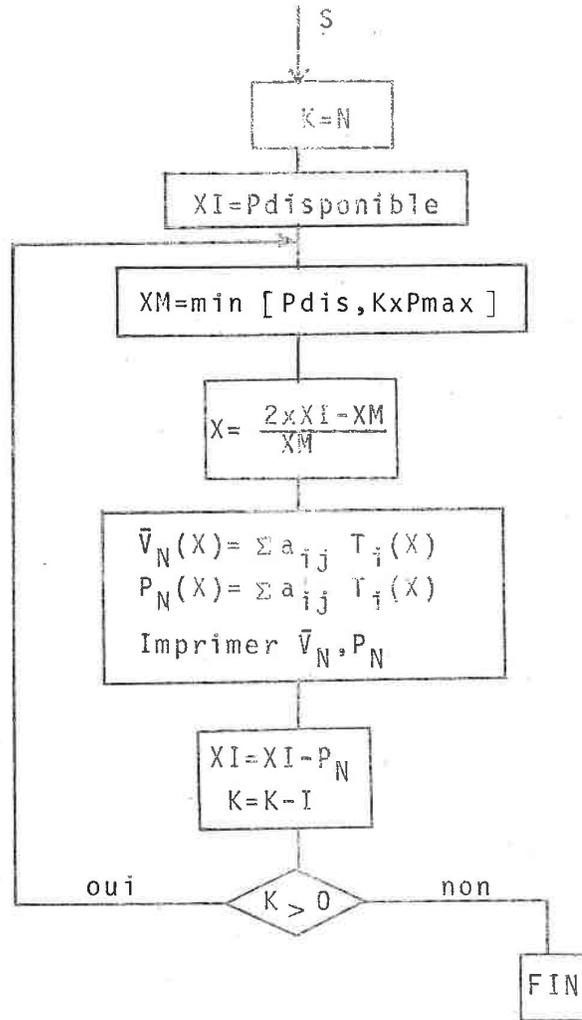


Fig. 2bis



CHAPITRE III

APPLICATION : PROBLEME A DEUX VARIABLES
DANS UN DOMAINE RECTANGULAIRE

III.1 POSITION DU PROBLEME

Soit un chariot de masse M roulant sans frottement sur des rails horizontaux sous l'effet d'une force horizontale F . Son état à un instant donné est complètement défini par son abscisse x par rapport à une certaine origine et sa vitesse \dot{x} . Soient x_0 et \dot{x}_0 sa position et sa vitesse à l'instant $t=0$.

On cherche la condition à imposer à la force F pour ramener le chariot à l'origine avec une vitesse nulle ($x=\dot{x}=0$) en un temps imposé, en minimisant la fonction de coût :

$$Q = \int_0^T F^2 dt.$$

Formule de récurrence

Soit $S = \min Q = \min \int_0^T F^2 dt.$

On partage l'intervalle de temps $[0, T]$ en N petits intervalles égaux tels que $N \Delta t = T$: cela revient à chercher la fonction de coût en N étapes. En supposant la force F constante sur chaque intervalle Δt . On cherche les valeurs optimales de cette force pour chaque étape pour que la fonction de coût soit minimale :

$$\int_0^T F^2 dt = \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} F^2 dt + \int_0^{(N-1)\Delta t} F^2 dt = F_N^2 \Delta t + \int_0^{(N-1)\Delta t} F^2 dt$$

Le principe d'optimalité nous conduit à établir la formule de récurrence :

La fonction de coût optimale d'un processus à N étapes

partant du point (x_0, \dot{x}_0) est la somme de la fonction de coût au cours de la première étape sous l'effet de la force F_N et de la fonction de coût optimale d'un processus à $N-1$ étapes partant du point (x_I, \dot{x}_I) avec :

$$x_I = x_0 + \dot{x}_0 \Delta t$$
$$\dot{x}_I = \dot{x}_0 + \frac{F_N}{M} \Delta t$$

Pour un processus à une seule étape, on a évidemment

$$\Delta x = -x \quad \text{et} \quad \Delta \dot{x} = -\dot{x}$$

de sorte que $\Delta x = \dot{x} \Delta t$, on a $\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{1}{\Delta t}$

Pour ramener le chariot à l'origine avec une vitesse nulle, il n'y a pas de choix. On a directement

$$F_I = \frac{M \Delta \dot{x}}{\Delta t} = -\frac{M \dot{x}}{\Delta t} = \frac{M x}{\Delta t^2}$$

$$S_I = Q_I = F_I^2 \Delta t = \frac{M^2 x^2}{\Delta t^3}$$

Pour un processus à deux étapes, le point de la première étape de coordonnées $(x + \Delta x)$ et $(\dot{x} + \Delta \dot{x})$ doit se trouver sur la droite de pente $-\frac{1}{\Delta t}$ passant par l'origine le long de laquelle doit nécessairement se dérouler la seconde étape. On doit donc avoir :

$$\frac{x + F_2 \Delta t / M}{x + \dot{x} \Delta t} = -\frac{1}{\Delta t}$$

On en déduit immédiatement l'expression de F_2 en fonction de x et de \dot{x}

$$F_2 = - \frac{M}{\Delta t^2} [x + 2\dot{x} \Delta t]$$

d'où le coût S_2 du processus à deux étapes

$$\begin{aligned} S_2(x, \dot{x}) &= F_2^2 \Delta t + S_1(x + \Delta x, \dot{x} + \Delta \dot{x}) \\ &= \frac{M^2}{\Delta t^3} [(x + 2\dot{x} \Delta t)^2 + (x + \dot{x} \Delta t)^2] \end{aligned}$$

On voit que les deux premières étapes du processus (c'est à dire la dernière et l'avant-dernière étape d'un processus à N étapes $N > 2$) de calcul ne comportent pas de problème de minimisation,

d'où on peut écrire sous la forme d'équations fonctionnelles :

$$S_p(x, \dot{x}) = \min_{F_p} (F_p^2 \Delta t + S_{p-1}(x + \dot{x} \Delta t, \dot{x} + \frac{F_p}{M} \Delta t)) \dots (A)$$

avec $p \geq 3$, champ de variation de F_p : $C_1 \leq F_p \leq C_2$.

III.2. SCHEMA DE CALCUL

La recherche minimale se fait par la méthode des parties proportionnelles.

$S_p(x, \dot{x})$ est définie dans un domaine rectangulaire tel que $A_1 \leq x \leq A_2$, $\dot{B}_1 \leq \dot{x} \leq \dot{B}_2$. On effectue un changement de

variables, en posant $y = \frac{A_1 + A_2 - 2x}{A_1 - A_2}$, $\hat{y} = \frac{\hat{B}_1 + \hat{B}_2 - 2\hat{x}}{\hat{B}_1 - \hat{B}_2}$ et y, \hat{y}

sont des variables comprises entre -1, +1, du fait que l'on peut utiliser la méthode d'approximation à l'aide du produit Kronecker des matrices. On choisit les supports de polynômes de Tchebycheff de degré P_1 en x et P_2 en \hat{x} .

On calcule seulement des valeurs x et \hat{x} comme suit :

$$x_i = \frac{A_2 - A_1}{2} \cos \left(\frac{(2i-1)\pi}{2(P_1+1)} \right) + \frac{A_1 + A_2}{2} \quad i=1, \dots, P_1+1$$

$$\hat{x}_j = \frac{\hat{B}_2 - \hat{B}_1}{2} \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2(P_2+1)} \right) + \frac{\hat{B}_1 + \hat{B}_2}{2} \quad j=1, \dots, P_2+1$$

On note $D_p(y, \hat{y})$ un polynôme de Tchebycheff approcher la fonction $S_p(x, \hat{x})$

Pour $P=2$

$$D_2(y, \hat{y}) = [[1, T_1(y), \dots, T_{n_1}(y)]$$

$$\otimes [[1, T_1(\hat{y}), \dots, T_{n_2}(\hat{y})]] \cdot [[L_{p_1}] \otimes [[L_{p_2}]]] [B_2]$$

$$n_1 \leq P_1, \quad n_2 \leq P_2$$

$[L_{p_1}]$ et $[L_{p_2}]$ sont deux matrices rectangulaires d'ordre respectivement $(n_1+1) \times (p_1+1)$, $(n_2+1) \times (p_2+1)$ (forme de la formule (B) dans la page 6).

$[B_2]$ représente la matrice colonne dont les éléments sont les fonctions $S_2(x, \hat{x})$ rangées ainsi :

$$B_2 = \begin{bmatrix} S_2(x_1, \dot{x}_1) \\ S_2(x_1, \dot{x}_2) \\ \vdots \\ S_2(x_1, \dot{x}_{p_2+1}) \\ S_2(x_2, \dot{x}_1) \\ \vdots \\ S_2(x_2, \dot{x}_{p_2+1}) \\ \vdots \\ S_2(x_{p_1+1}, \dot{x}_1) \\ \vdots \\ S_2(x_{p_1+1}, \dot{x}_{p_2+1}) \end{bmatrix}$$

Ce rangement est dû au procédé d'interpolation choisi (voir annexe).

Soit $D_2(y, \dot{y}) = \sum_{i=1}^{p_1+1} \sum_{j=1}^{p_2+1} a_{ij}^{(2)} T_i(y) \cdot T_j(\dot{y})$

Pour $P=3$ on utilise la formule de récurrence et on pose

$$Q_3(x_i, \dot{x}_j) = F_3^L \Delta t + \sum_{l=1}^{p_1+1} \sum_{g=1}^{p_2+1} a_{l,g}^{(2)} T_l \left(\frac{A_1 + A_2 - 2(x_i + \dot{x}_j \Delta t)}{A_1 - A_2} \right) \cdot T_g \left(\frac{\dot{B}_1 + \dot{B}_2 - 2(\dot{x}_j + \frac{F_3}{M}) \Delta t}{\dot{B}_1 - \dot{B}_2} \right)$$

On minimise la fonction $Q_3(x_i, x_j)$ à l'aide de la méthode des parties proportionnelles, sa valeur minimale $Q_3(x_i, x_j, F)$ et F_3 correspondante. On la note $F_3(x_i, x_j)$ où x_i, x_j sont les supports de Tchebycheff.

On a

$$D_3(y, \hat{y}) = [[I, T_I(y), \dots, T_{p_I}(y)] \otimes [I, T_I(\hat{y}), \dots, T_{p_2}(\hat{y})]] \\ \cdot [L_{p_I}] \otimes [L_{p_2}] [B_3]$$

$$DF_3(y, \hat{y}) = [[I, T_I(y), \dots, T_{p_I}(y)] \otimes [I, T_I(\hat{y}), \dots, T_{p_2}(\hat{y})]] \\ \cdot [[L_{p_I}] \otimes [L_{p_2}]] [F_3]$$

$[B_3]$ et $[F_3]$ représentent la matrice colonne dont les éléments sont les fonctions $Q_3(x_i, x_j, F_3)$ et $F_3(x_i, x_j)$ rangées ainsi :

$$[B_3] = \begin{bmatrix} Q_3(x_{I_1}, x_{I_1}, F) \\ Q_3(x_{I_1}, x_{I_2}, F) \\ \vdots \\ Q_3(x_{I_1}, x_{p_2+I_1}, F) \\ Q_3(x_{I_2}, x_{I_1}, F) \\ \vdots \\ Q_3(x_{I_2}, x_{p_2+I_1}, F) \\ Q_3(x_{I_3}, x_{I_1}, F) \\ \vdots \\ Q_3(x_{p_{I_1}+I_1}, x_{I_1}, F) \\ \vdots \\ Q_3(x_{p_{I_1}+I_1}, x_{p_2+I_1}, F) \end{bmatrix} \quad [F_3] = \begin{bmatrix} F_3(x_{I_1}, x_{I_1}) \\ \vdots \\ F_3(x_{I_1}, x_{p_2+I_1}) \\ F_3(x_{I_2}, x_{I_1}) \\ \vdots \\ F_3(x_{I_2}, x_{p_2+I_1}) \\ \vdots \\ F_3(x_{p_{I_1}+I_1}, x_{I_1}) \\ \vdots \\ F_3(x_{p_{I_1}+I_1}, x_{p_2+I_1}) \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit } D_3(y, \dot{y}) = \sum_{i=1}^{p_1+1} \sum_{j=1}^{p_2+1} a_{ij}^{(3)} T_i(y), T_j(\dot{y})$$

$$\text{et } DF_3(y, \dot{y}) = \sum_{i=1}^{p_1+1} \sum_{j=1}^{p_2+1} b_{ij}^{(3)} T_i(y), T_j(\dot{y})$$

D'une façon générale, pour $F=K$

On pose :

$$Q_K(x_i, \dot{x}_j) = F_K^2 \Delta t + \sum_{l=1}^{p_1+1} \sum_{g=1}^{p_2+1} a_{l,g}^{(K-1)} T_l \left(\frac{A_1 + A_2 - 2(x_i + \dot{x}_j \Delta t)}{A_1 - A_2} \right) \cdot T_g \left(\frac{\dot{B}_1 + \dot{B}_2 - 2(\dot{x}_j + \frac{F_K}{M}) \Delta t}{\dot{B}_1 - \dot{B}_2} \right)$$

pour chaque couple x_i, \dot{x}_j , on emploie la méthode des parties proportionnelles pour minimiser la fonction $Q_K(x_i, \dot{x}_j)$ dans l'intervalle $[\text{Sup}((\dot{B}_1 - \dot{x}_j) \times M, C_1), \text{inf}(C_2, (\dot{B}_2 - \dot{x}_j) \cdot M)]$. On note $Q_K(\dot{x}_i, \dot{x}_j, F)$ sa valeur minimale où F correspond à $F_K(x_i, \dot{x}_j)$.

On a :

$$D_K(y, \dot{y}) = \left[[I, T_1(y), \dots, T_{p_1}(y)] \otimes [I, T_1(\dot{y}), \dots, T_{p_2}(\dot{y})] \right] \cdot \left[[L_{p_1}] \otimes [L_{p_2}] \right] \cdot [B_K]$$

et

$$D_{FK}(y, \dot{y}) = \left[[I, T_1(y), \dots, T_{p_1}(y)] \otimes [I, T_1(\dot{y}), \dots, T_{p_2}(\dot{y})] \right] \cdot \left[[L_{p_1}] \otimes [L_{p_2}] \right] \cdot [F_K]$$

avec

$$\begin{bmatrix} B_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_K(x_I, \dot{x}_I, F) \\ Q_K(x_I, \dot{x}_2, F) \\ \vdots \\ Q_K(x_I, \dot{x}_{p_2+I}, F) \\ Q_K(x_2, \dot{x}_I, F) \\ \vdots \\ Q_K(x_{p_I+I}, \dot{x}_I, F) \\ \vdots \\ Q_K(x_{p_I+I}, \dot{x}_{p_2+I}, F) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_K(x_I, \dot{x}_I) \\ F_K(x_I, \dot{x}_2) \\ \vdots \\ F_K(x_I, \dot{x}_{p_2+I}) \\ F_K(x_2, \dot{x}_I) \\ \vdots \\ F_K(x_{p_I+I}, \dot{x}_I) \\ F_K(x_{p_I+I}, \dot{x}_2) \\ \vdots \\ F_K(x_{p_I+I}, \dot{x}_{p_2+I}) \end{bmatrix}$$

Soit
$$D_K(y, \dot{y}) = \sum_{i=I}^{p_I+I} \sum_{j=I}^{p_2+I} a_{ij}^{(K)} T_i(y), T_j(\dot{y})$$

et
$$DF_K(y, \dot{y}) = \sum_{i=I}^{p_I+I} \sum_{j=I}^{p_2+I} b_{ij}^{(K)} T_i(y), T_j(\dot{y})$$

On stocke les suites $\{b_{ij}^k\}$ en mémoire et on garde $\{a_{ij}^{(k-1)}\}$

et $\{a_{ij}^{(k)}\}$ en mémoire pour le procédé d'itération.

Résolution :

Etant données deux valeurs X et \dot{X} et on décide en N étapes pour un intervalle de temps $N \Delta t = T$. On calcule d'abord :

$$DF_N(Y_0, \dot{Y}_0) = \sum_{i=1}^{p_1+1} \sum_{j=1}^{p_2+1} b_{ij}^{(N)} T_i(Y_0) \cdot T_j(\dot{Y}_0)$$

avec
$$Y_0 = \frac{A_1 + A_2 - 2x}{A_1 - A_2}, \quad \dot{Y}_0 = \frac{\dot{B}_1 + \dot{B}_2 - 2\dot{x}}{\dot{B}_1 - \dot{B}_2}$$

Il nous reste $N-1$ étapes en partant du point :

$$X_I = X + \dot{X} \Delta t$$

$$\dot{X}_I = \dot{X} + \frac{DF_N(Y_0, \dot{Y}_0)}{M} \Delta t$$

On calcule ensuite

$$DF_{(N-1)}(Y_I, \dot{Y}_I) = \sum_{i=1}^{p_1+1} \sum_{j=1}^{p_2+1} b_{ij}^{(N-1)} T_i(Y_I) \cdot T_j(\dot{Y}_I)$$

avec
$$Y_I = \frac{A_1 + A_2 - 2x_I}{A_1 - A_2}, \quad \dot{Y}_I = \frac{\dot{B}_1 + \dot{B}_2 - 2\dot{x}_I}{\dot{B}_1 - \dot{B}_2}$$

et il nous reste $N-2$ étapes, en partant du point :

$$X_2 = X_I + \dot{X}_I \Delta t$$

$$\dot{X}_2 = \dot{X}_I + \frac{DF_{N-1}(Y_I, \dot{Y}_I)}{M} \Delta t$$

d'une manière générale, il nous reste $N-j$ étapes, en partant du point :

$$X_j = X_{j-1} + \dot{X}_{j-1} \Delta t$$

$$\dot{X}_j = \dot{X}_{j-1} + \frac{DF_{N-j+1}(Y_{j-1}, \dot{Y}_{j-1})}{M}$$

et on calcule

$$DF_{N-j}(Y_j, \dot{Y}_j) = \sum_{i=1}^{p_1+1} \sum_{l=1}^{p_2+1} b_{il}^{(N-j)} T_i(Y_j) T_l(\dot{Y}_j)$$

avec

$$Y_j = \frac{A_1 + A_2 - 2x_j}{A_1 - A_2}, \quad \dot{Y}_j = \frac{\dot{B}_1 + \dot{B}_2 - 2\dot{x}_j}{\dot{B}_1 - \dot{B}_2}$$

Finalement, on a trouvé les conditions à imposer à la force F pour ramener le chariot à un endroit déterminé en un temps imposé T.

III.3. Applications numériques

$$M=1, T=5, \Delta t=1, x_0=12, \dot{x}_0=0$$

champ de variation de F : $-5 \leq F \leq 5$

- organigramme : fig. 3 et fig. 3bis
- résultats numériques :

La méthode dépend de 2 paramètres :

- n degré du polynôme choisi
- q nombre d'essais pour la méthode de parties proportionnelles.

A) On étudie d'abord l'influence de n degré du polynôme sur les résultats finaux et le coût du calcul, tout en gardant le nombre d'essais q=5 (ceci entraîne un intervalle d'incertitude

$$l_0/L_5 = (1.62)^4 = 6.85 \quad L_5 = \frac{\inf(\hat{B}_2 - y, C_2) - \max(\hat{B}_1 - y, C_1)}{6.85}$$

et on prend la valeur minimale trouvée d'après 5 essais).

Les résultats numériques se trouvent dans le tableau A. On voit que la fonction de coût diminue lorsque le degré du polynôme augmente et en même temps, la durée du calcul s'allonge également.

De même, on fixe le nombre d'essais q=10, c'est à dire que l'on augmente la qualité de la recherche minimale et l'intervalle d'incertitude diminue.

$$l_0/L_{10} = 76 \quad L_{10} = \frac{\inf(\hat{B}_2 - y, C_2) - \max(\hat{B}_1 - y, C_1)}{76}$$

et on prend la valeur minimale trouvée d'après 10 essais.

Ces résultats se trouvent dans le tableau C.

B) On fixe le degré du polynôme n=3 et on fait varier le nombre d'essais pour la méthode de parties proportionnelles, c'est à dire que l'on réduit l'intervalle d'incertitude :

$$q=5 \quad l_0/L_5 = 6.85 \quad L_5 = \frac{\inf(\hat{B}_2 - y, C_2) - \max(\hat{B}_1 - y, C_1)}{6.85}$$

$$q=10 \quad l_0/L_{10} = 76 \quad L_{10} = \frac{\inf(\hat{B}_2 - y, C_2) - \max(\hat{B}_1 - y, C_1)}{76}$$

$$q=15 \quad l_0/L_{15} = 846 \quad L_{15} = \frac{\inf(\hat{B}_2 - y, C_2) - \max(\hat{B}_1 - y, C_1)}{846}$$

quand l'on augmente le nombre d'essais, on augmente également la précision des résultats mais en même temps la durée de calcul se prolonge.

C) Comparaison des résultats avec la méthode classique :

Méthode classique					Méthode d'approximation			
$\Delta F = 1$					$n=4-4, q=10$			
coût	18				14.114193			
étapes	x	\hat{x}	F_N	σ_N	x	\hat{x}	F_N	σ_N
5	12	0	-2	4	12	0	-2.2306	5.4319
4	12	-2	-2	4	12	-2.3306	-1.291	1.6677
3	10	-4	0	0	9.669	-3.6221	0.0043	0.00002
2	6	-4	2	4	6.047	-3.4178	1.1883	1.4119
1	2	-2	2	4	2.427	-2.430	2.423	5.9203

Conclusion

La méthode d'approximation dépend de deux paramètres, le degré du polynôme n et le nombre d'essais q . Les résultats numériques nous montrent que si l'on veut avoir un résultat précis, il faut bien choisir ces deux paramètres. Dans le tableau A, le résultat $n=6-6$, $q=5$ avec un temps de calcul de 45 minutes qui est moins bien qu'au résultat obtenu dans le tableau C avec $n=2-2$, $q=10$ la durée de calcul est de 3 minutes seulement. Augmenter le degré du polynôme peut améliorer le résultat mais ce n'est pas une façon économique. Selon la nature du problème, la fonction approchée peut se représenter fidèlement par un polynôme de degré petit parfois, donc il y a un choix optimal à faire sur n .

En comparant le tableau C, avec le tableau A et avec le tableau B, on peut déduire que deux paramètres réagissent mutuellement au résultat final. Pour avoir des résultats précis et la durée de calcul courte, il faut choisir $n \geq 2$ et $q \geq 10$.

On les compare finalement avec les résultats obtenus par la méthode classique. On montre ainsi la validité de notre méthode d'approximation.

TABLEAU A Nombre d'expériences à 5

Degré de polynôme	2-2					3-3						
Nombre de points	9					16						
coût	14,536678					14,485770						
Temps de calcul	2 m					5,75 m						
	x	k	F _N	q _N	x	k	F _N	q _N	x	k	F _N	q _N
5	12	0	-2,5568	6,5371	12	0	-2,41216	5,8185	12	0	-2,41216	5,8185
4	12	-2,5567	-1,1320	1,2814	12	-2,4122	-1,03333	1,0678	12	-2,4122	-1,03333	1,0678
3	9,443	-3,6887	0,2871	0,0824	9,5878	-3,4454	-0,16879	0,02849	9,5878	-3,4454	-0,16879	0,02849
2	5,754	-3,4017	1,0489	1,1002	6,1424	-3,6142	1,08620	1,1798	6,1424	-3,6142	1,08620	1,1798
1	2,353	-2,3528	2,3528	5,5355	2,5280	-2,5281	2,52807	6,3911	2,5280	-2,5281	2,52807	6,3911
Degré de polynôme	4-4					6-6						
Nombre de points	25					49						
coût	14,467976					14,465104						
Temps de calcul	8 m					45 m						
	x	k	F _N	q _N	x	k	F _N	q _N	x	k	F _N	q _N
5	12	0	-2,3669	5,6022	12	0	-2,388	5,7034	12	0	-2,388	5,7034
4	12	-2,3669	-1,3490	1,8198	12	-2,388	-1,251	1,5655	12	-2,388	-1,251	1,5655
3	9,633	-3,7159	0,19639	0,0385	9,611	-3,639	0,1462	0,0213	9,611	-3,639	0,1462	0,0213
2	5,917	-3,5195	1,1219	1,2586	5,972	-3,493	1,0138	1,0278	5,972	-3,493	1,0138	1,0278
1	2,398	-2,3976	2,3976	5,7486	2,479	-2,479	2,4793	6,1470	2,479	-2,479	2,4793	6,1470

TABLEAU B

Nbre d'expériences		5					10					
coût		14,48577					14,431572					
Temps de calcul		5,75 m					8,75 m					
	x	k	F _N	q _N	x	k	F _N	q _N	x	k	F _N	q _N
5	12	0	-2,41216	5,8185	12	0	-2,4367	5,9379	12	0	-2,4367	5,9379
4	12	-2,4122	-1,03333	1,0678	12	-2,4367	-1,1052	1,2215	12	-2,4367	-1,1052	1,2215
3	9,5878	-3,4454	-0,16579	0,02849	9,5632	-3,342	-0,1121	0,0126	9,5632	-3,342	-0,1121	0,0126
2	6,1424	-3,6142	1,08620	1,1798	6,0212	-3,6541	1,2870	1,6565	6,0212	-3,6541	1,2870	1,6565
1	2,5280	-2,5281	2,52807	6,3911	2,3670	-2,3670	2,3671	5,6030	2,3670	-2,3670	2,3671	5,6030
Nbre d'expériences		15										
coût		14,426634										
Temps de calcul		10 m										
	x	k	F _N	q _N	x	k	F _N	q _N	x	k	F _N	q _N
5	12	0	-2,433	5,9215	12	0	-2,433	5,9215	12	0	-2,433	5,9215
4	12	-2,4334	-1,116	1,2447	12	-2,4334	-1,116	1,2447	12	-2,4334	-1,116	1,2447
3	9,5666	-3,3491	-0,1015	0,0103	9,5666	-3,3491	-0,1015	0,0103	9,5666	-3,3491	-0,1015	0,0103
2	6,0175	-3,6506	1,2837	1,648	6,0175	-3,6506	1,2837	1,648	6,0175	-3,6506	1,2837	1,648
1	2,3668	-2,3669	2,3669	5,6021	2,3668	-2,3669	2,3669	5,6021	2,3668	-2,3669	2,3669	5,6021

TABLEAU C

Degré du polynôme	2-2					3-3				
Nombre d'expériences	I0					I0				
coût	I4.454654					I4.431572				
Temps de calcul	3 m					9.75 m				
	x	\dot{x}	F_N	q_N	q_N	x	\dot{x}	F_N	q_N	q_N
5	I2	0	-2.384	5.684	5.684	I2	0	-2.437	5.9379	5.9379
4	I2	-2.384	-I.319	I.739	I.739	I2	-2.4568	-I.105	I.2216	I.2216
3	9.616	-3.703	0.1851	0.0343	0.0343	9.563	-3.542	-0.112	0.01257	0.01257
2	5.913	-3.518	I.123	I.2606	I.2606	6.021	-3.654	I.287	I.65655	I.65655
I	2.395	-2.395	2.395	5.736	5.736	2.367	-2.367	2.367	5.603	5.603
Degré de polynôme	4-4									
Nombre d'expériences	I0									
Coût	I4.414193									
Temps de calcul	22 m									
	x	\dot{x}	F_N	q_N	q_N	x	\dot{x}	F_N	q_N	q_N
5	I2	0	-2.3306	5.4319	5.4319					
4	I2	-2.3306	-I.291	I.6677	I.6677					
3	9.669	-3.6221	0.0043	0.00002	0.00002					
2	6.047	-3.6178	I.1883	I.4119	I.4119					
I	2.429	-2.430	2.423	5.9203	5.9203					

Organigramme. Deux dimensions

Fig. 3

$$\begin{aligned} A_1 &\leq x \leq A_2 \\ B_1 &\leq y \leq B_2 \\ C_1 &\leq F_N \leq C_2 \end{aligned}$$

Polynômes de Tchebycheff de degré
 (N₁-I) en X
 (N₂-I) en Y

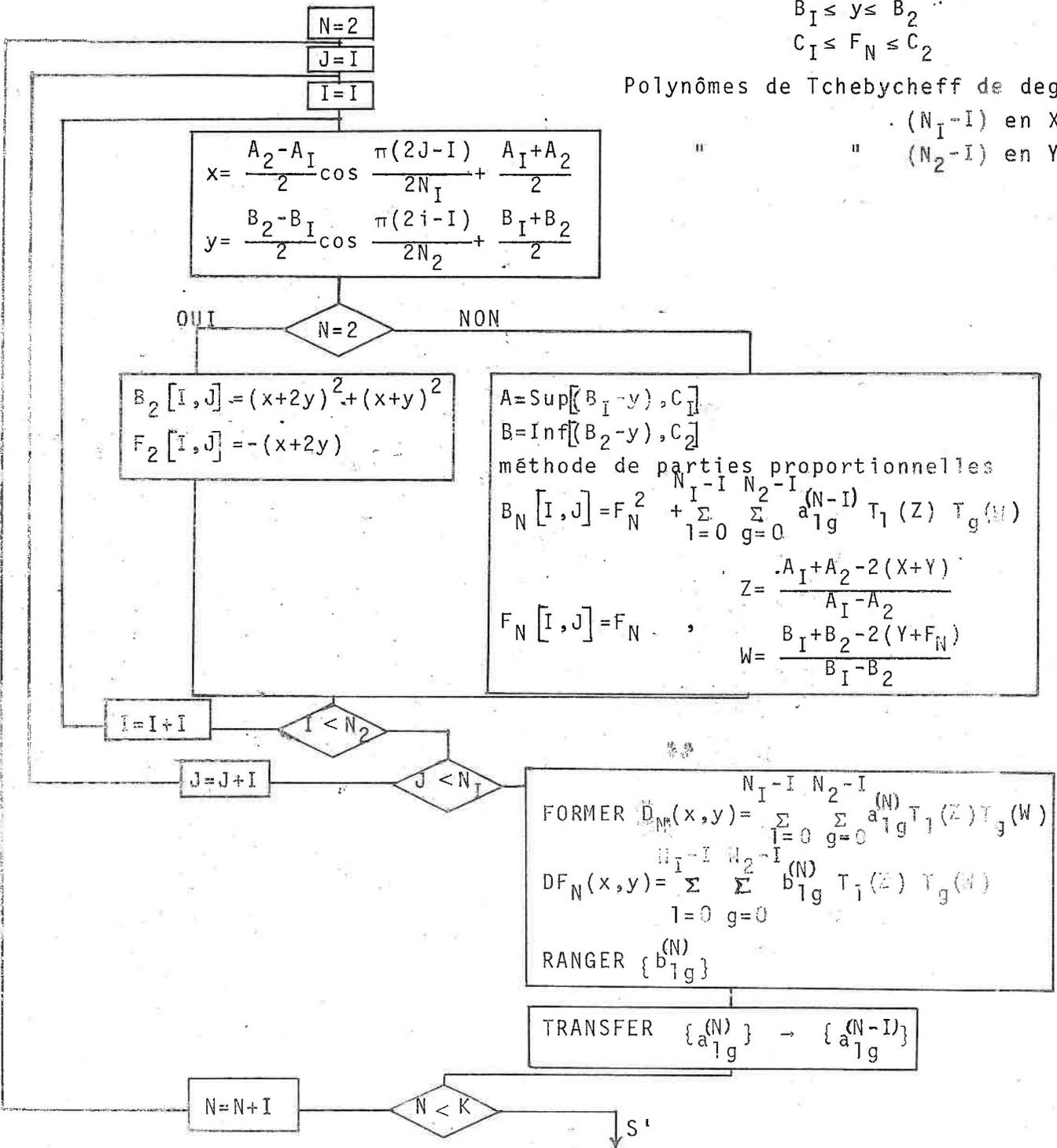
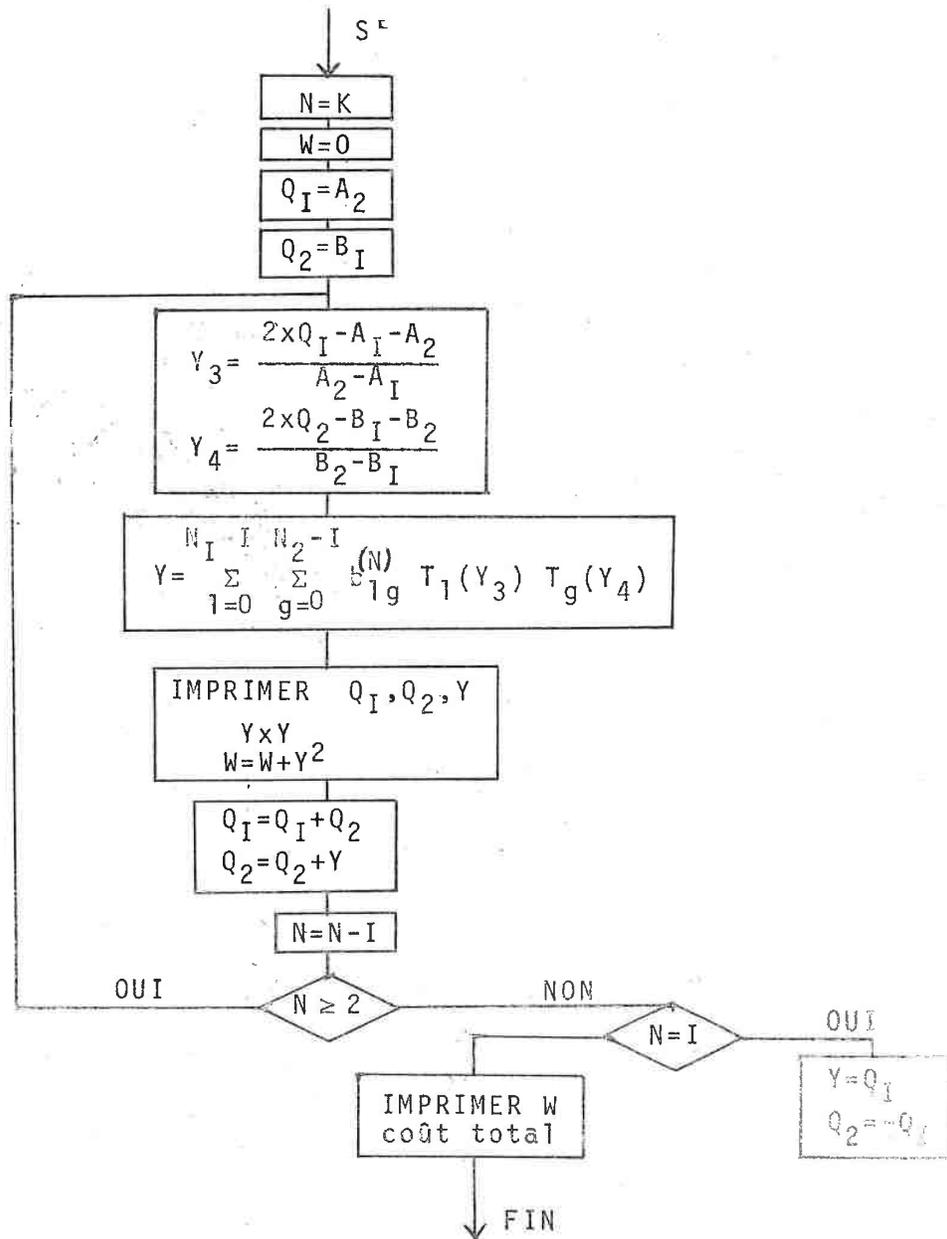


Fig. 3bis



CHAPITRE IV

APPLICATION A DEUX VARIABLES

DANS UN DOMAINE TRIANGLE

IV. I. POSITION DU PROBLEME

(Le problème du transport de Hitchcock-Koopmans).

Soient D_1, D_2, \dots, D_M les dépôts (les endroits où se trouvent les ressources) et P_1, P_2, \dots, P_N les points de consommation (les endroits où existe une demande pour ces ressources).

x_i : la quantité de ressources disponible au i -ième dépôt
 $i=1, 2, \dots, M$

r_j : la demande de ressources au j -ième point de consommation
 $j=1, 2, \dots, N$

En supposant que l'offre totale est égale à la demande totale, si bien qu'il n'y a qu'un problème de distribution, nous avons la relation

$$\sum_i x_i = \sum_j r_j$$

Soient :

x_{ij} : la quantité de ressources envoyée du dépôt i au point de consommation j

$g_{ij}(x_{ij})$: le coût de cette opération,

Les quantités x_{ij} doivent satisfaire trois contraintes :

a) $x_{ij} \geq 0$

b) la quantité totale expédiée d'un dépôt quelconque doit être égale à l'offre de ce dépôt

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = x_i \quad i=1, 2, \dots, M$$

c) la quantité totale expédiée en un point de consommation quelconque doit être égale à la demande en ce point :

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = r_j \quad j=1,2,\dots,N$$

Le problème est de déterminer les x_{ij} satisfaisant à ces conditions, de façon à minimiser le coût du transport total

$$\text{soit } C_{MN} = \sum_{ij} g_{ij} (x_{ij}).$$

Résolution par programmation dynamique :

<u>Dépôts</u>	<u>points de consommations</u>
$D_1 : X_1$	$P_1 : r_1$
$D_2 : X_2$	$P_2 : r_2$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
$D_M : X_M$	$P_{N-1} : r_{N-1}$
	$P_N : r_N$

Nous pouvons satisfaire les demandes les unes après les autres, en commençant par la demande en P_N , puis en P_{N-1} , etc... Le coût du transport en utilisant une politique optimale, partant avec des quantités x_1, x_2, \dots, x_M respectivement aux dépôts D_1, D_2, \dots, D_M et des besoins r_1, r_2, \dots, r_N respectivement aux N points de consommation P_1, P_2, \dots, P_N , se calculera ainsi :

On satisfait d'abord la demande du N-ième point de consommation. Cela entraîne :

$$\sum_{i=1}^M g_{iN}(x_{iN}),$$

Les stocks de ressources aux dépôts sont alors $x_i - x_{iN}$ pour $i=1,2,\dots,M$. D'après le principe d'optimalité, nous obtenons l'équation de récurrence :

$$C_{MN}(x_1, x_2, \dots, x_M) = \min_{[R_N]} \left[\sum_{i=1}^M g_{iN}(x_{iN}) + C_{MN-1}(x_1 - x_{iN}, \dots, x_M - x_{iN}) \right]$$

avec $N \geq 2$ $[R_N]$ étant la région à M dimensions déterminée par les relations

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M x_{iN} = r_N \\ 0 \leq x_{iN} \leq x_i \quad i=1,2,\dots,M \end{cases}$$

Pour $N=1$, nous avons

$$C_{M1}(x_1, x_2, \dots, x_M) = \sum_{i=1}^M g_{i1}(x_i).$$

Réduction du nombre de variables

Du fait que l'offre est égale à la demande, nous avons

$$\sum_{i=1}^M x_i = \sum_{j=1}^N r_j$$

Pour un ensemble donné de demandes, x_M est déterminé quand x_1, x_2, \dots, x_{M-1} sont connues. On peut donc éliminer la variable d'état x_M .

La relation (A) devient :

$$(A1) \quad C_{MN}(x_1, x_2, \dots, x_{M-1}) = \min_{[D]} \left[\sum_{i=1}^{M-1} g_{iN}(x_{iN}) + g_{MN}(r_N - \sum_{i=1}^{M-1} x_{iN}) + C_{M \ N-1}(x_1, x_{iN}, \dots, x_{M-1}, -x_{M-1N}) \right]$$

[D] étant la région à M-1 dimensions déterminée par les relations

$$0 \leq x_{iN} \leq x_i \quad i=1, 2, \dots, M-1 \quad \dots <d_1>$$

$$0 \leq r_N - \sum_{i=1}^{M-1} x_{iN} \leq \sum_{j=1}^N r_j - \sum_{i=1}^{M-1} x_i \quad \dots <d_2>$$

le domaine de variation de C_{MN} étant défini par

$$x_i \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, M-1$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} x_i \leq \sum_{i=1}^N r_i$$

avec

$$C_{M1}(x_1, x_2, \dots, x_{M-1}) = \sum_{i=1}^{M-1} g_{i1}(x_i) + g_{M1}(r_1 - \sum_{j=1}^{M-1} x_j)$$

N.B. <d₂> assure que les variables de $(x_i - x_{iN})$ restent dans le domaine défini pour C_{MN-1} .

On a donc une suite de fonctions à (m-1) variables $(x_1, x_2, x_3 \dots x_{m-1})$ à construire. Chaque terme de cette suite sera déterminé par un ensemble de valeurs de ce terme en plusieurs points ces valeurs étant celles calculées par optimisation d'une fonction à (m-1) variables $(x_{1N}, x_{2N}, \dots, x_{m-1,N})$ en tenant compte des contraintes telles que $\langle d_1 \rangle, \langle d_2 \rangle$.

Exemple d'application :

On prend le cas où il y a trois dépôts et P points de consommation donc $N=P$ et $M=3$,

(A1) donne directement

$$\mathcal{F}_N(x_1, x_2) = \min_{[D_N]} \left[g_{1N}(x_{1N}) + g_{2N}(x_{2N}(r_N - x_{1N} - x_{2N})) \right. \\ \left. + \mathcal{F}_{N-1}(x_1 - x_{1N}, x_2 - x_{2N}) \right] \dots \dots \quad (A2)$$

D_N étant la région à deux variables déterminée par les relations :

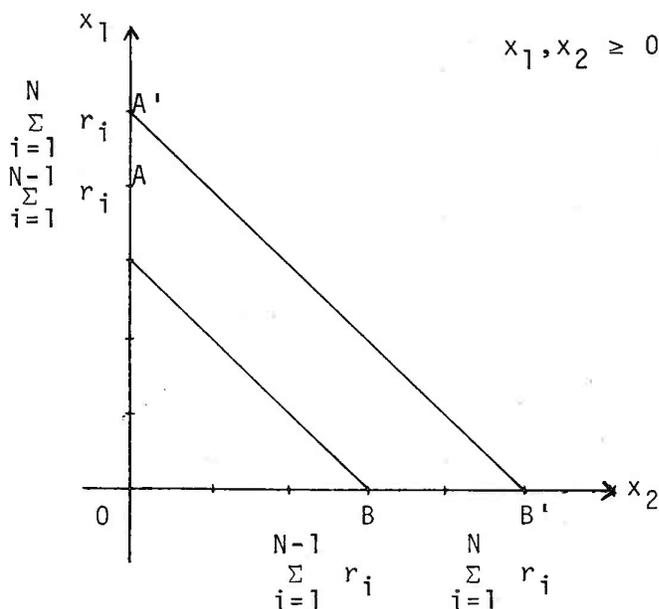
$$0 \leq x_{iN} \leq x_i \quad i=1,2 \\ 0 \leq r_N - x_{1N} - x_{2N} \leq \sum_{j=1}^N r_j - x_1 - x_2$$

et

$$\mathcal{F}_N(x_1, x_2) \text{ étant définie dans un domaine} \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 \leq \sum_{i=1}^N r_i$$

pour $N=2,3,\dots,P$

avec $\mathcal{F}_1(x_1, x_2) = g_{11}(x_1) + g_{21}(x_2) + g_{31}(r_1 - x_1 - x_2)$.



$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 \leq r_1$$

$\mathcal{F}_N(x_1, x_2)$ est définie dans le triangle $A'OB'$

$\mathcal{F}_{N-1}(x_1, x_2)$ est définie dans le triangle AOB

Figure a4

IV.2. SCHEMA DE CALCUL

$\mathcal{F}_N(x_1, x_2)$ est définie dans un triangle $A'OB'$ (fig.a4). On ne peut pas utiliser un support de Tchebycheff, cela nous conduit à appliquer la deuxième méthode d'approximation sur un support quelconque. Comme nous utilisons des polynômes de Tchebycheff pour s'approcher les fonctions, il nous faut tout d'abord effectuer un changement des variables :

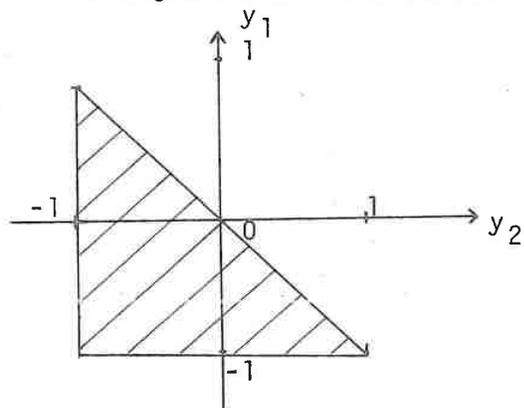


Figure b4

$$y_1 = \frac{2}{\sum_{i=1}^N r_i} x_1 - 1$$

$$y_2 = \frac{2x_2}{\sum_{i=1}^N r_i} - 1$$

pour $N=1, 2, \dots, p$

y_1 et y_2 se situent entre -1 et +1 et se trouvent dans un tel triangle (fig. b4).

Avant de commencer le processus itératif, on choisit le degré D et la silhouette des polynômes de Tchebycheff, par exemple de degré $D=2$,

$$1, T_1(y_2), T_2(y_2), T_1(y_1), T_1(y_1) T_1(y_2), T_1(y_1) T_2(y_2), T_2(y_1), T_2(y_1) T_1(y_2), T_2(y_1) T_2(y_2).$$

Il y a $(D+1)^2$ coefficients de polynôme à déterminer par la méthode d'approximation au sens des moindres carrés et il nous faut donc effectuer au moins deux ou trois fois de $(D+1)^2$ expériences.

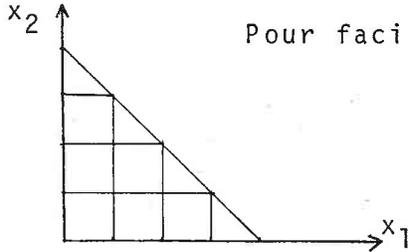


Figure c4

Pour faciliter la programmation, on effectue des calculs uniquement aux noeuds d'un grillage à l'intérieur du triangle (fig. c4),

A chaque noeud (x_1, x_2) , on minimise la fonction : $g_{1N}(x_{1N}) + g_{2N}(x_{2N}) + g_{3N}(r_N - x_{1N} - x_{2N})$

$$+ \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^D a_{ij}^{(N-1)} T_i\left(\frac{2(x_1 - x_{1N})}{\sum_{\ell=1}^{N-1} r_\ell} - 1\right) T_j\left(\frac{2(x_2 - x_{2N})}{\sum_{\ell=1}^{N-1} r_\ell} - 1\right)$$

dans un domaine défini par :

$$D_N \begin{cases} 0 \leq x_{1N} \leq x_1 & \langle d_1 \rangle \\ 0 \leq x_{2N} \leq x_2 & \langle d_2 \rangle \\ 0 \leq x_1 + x_2 - \sum_{j=1}^{N-1} r_j \leq x_{1N} + x_{2N} & \langle d_3 \rangle \end{cases}$$

(on remplace $\mathcal{F}_{N-1}(x_1-x_{1N}, x_2-x_{2N})$ dans l'expression (A2) par un polynôme $\sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^D a_{ij}^{(N-1)} T_i\left(\frac{2(x_1-x_{1N})}{\sum_{\ell=1}^{N-1} r_\ell} - 1\right) T_j\left(\frac{2(x_2-x_{2N})}{\sum_{\ell=1}^{N-1} r_\ell} - 1\right)$).

à l'aide de la méthode exhaustive, c'est à dire que l'on choisit les pas en x_{1N} et en x_{2N} et on forme un quadrillage.

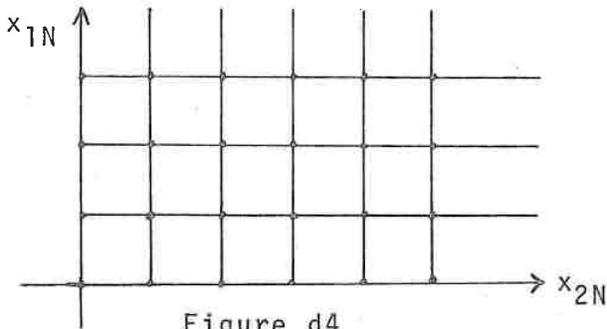


Figure d4

On effectue la recherche d'un minimum parmi les noeuds du quadrillage qui satisfont $\langle d_1 \rangle, \langle d_2 \rangle, \langle d_3 \rangle$.

On obtient trois valeurs :

les politiques $x_{1N}(x_1, x_2)$ et $x_{2N}(x_1, x_2)$; valeurs où se trouvent le minimum ; $\mathcal{F}_N(x_1, x_2)$.

Pour chaque itération N, on a un système surdimensionné d'équations linéaires qui ont trois seconds membres. On peut le résoudre par la méthode Fadeeva par exemple, d'où on a

$$\mathcal{F}_N(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^D a_{ij}^{(N)} T_i\left(\frac{2x_1}{\Sigma} - 1\right) T_j\left(\frac{2x_2}{\Sigma} - 1\right)$$

$$x_{1N}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^D b_{ij}^{(N)} T_i\left(\frac{2x_1}{\Sigma} - 1\right) T_j\left(\frac{2x_2}{\Sigma} - 1\right)$$

$$x_{2N}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^D c_{ij}^{(N)} T_i\left(\frac{2x_1}{\Sigma} - 1\right) T_j\left(\frac{2x_2}{\Sigma} - 1\right)$$

avec $\Sigma = \sum_{l=1}^N r_l$

On range les suites $\{b_{ij}^{(N)}\}$ et $\{c_{ij}^{(N)}\}$ en mémoire et on remplace $\{a_{ij}^{(N-1)}\}$ par $\{a_{ij}^{(N)}\}$, puis le processus continue. Organigramme (page suivante).

IV.3. APPLICATIONS NUMERIQUES

Le tableau suivant donne les valeurs supposées des coûts et des demandes. Chaque fonction de coût $g_{ij}(x)$ a la forme

$$g_{ij}(x) = a_{ij} x + b_{ij} x^2$$

Les coefficients a_{ij} de x se trouve dans la colonne $\langle x \rangle$, celui de x^2 dans la colonne $\langle x^2 \rangle$.

Destination	Dépôt 1		Dépôt 2		Dépôt 3		Demande (r_i)
	x	x^2	x	x^2	x	x^2	
1	1,0	0,20	3,1	0,10	7,0	0	25
2	2,0	0,06	4,1	0	3,0	0,04	40
3	3,0	0,01	2,1	0	9,0	0	60
4	1,5	0	1,1	0,10	1,0	0	30
5	2,5	0,05	2,6	0	1,0	0,20	20
6	5,0	0,01	3,0	0	2,0	0	30
7	3,0	0	1,0	0,20	4,0	0	35
8	6,0	0	2,0	0	3,0	0,10	30
9	6,0	0,05	2,0	0	5,0	0	25
10	6,0	0	5,0	0,01	6,0	0	40

Ainsi, expédier une quantité x du 1er dépôt vers le 5ème point de consommation (destination 5) "coûte" à $2,5x+0,05x^2$.

x_1 = disponibilité au dépôt 1=100

x_2 = disponibilité au dépôt 2= 97

x_3 = disponibilité au dépôt 3=138.

On choisit le degré $D=2$ et on calcule 21 points pour déterminer 9 coefficients inconnus du polynôme.

Le choix d'un pas de 5 pour la méthode exhaustive donne la solution optimale ci-dessous :

Destination	Dépôt 1	Dépôt 2	Dépôt 3	Coût
1	12,71	8,05	4,23	106,12
2	17,23	1,70	21,07	140,21
3	24,70	35,30	0,00	154,34
4	3,91	0,00	26,09	31,96
5	9,64	1,41	8,95	57,39
6	0,00	0,00	30,00	60,00
7	19,32	2,18	13,50	115,10
8	0,00	24,58	5,42	68,36
9	0,14	21,81	3,04	59,70
10	12,34	1,97	25,69	238,07

Le "coût total" est de 1031,24 et les calculs durent 6 minutes. En utilisant le pas de 2.50 pour la méthode exhaustive, on obtient la solution optimale ci-dessous :

Destination	Dépôt 1	Dépôt 2	Dépôt 3	Coût
1	12,72	9,37	2,91	103,28
2	17,36	0,89	21,75	140,62
3	24,28	35,72	0,00	153,74
4	3,55	0,00	26,45	31,78
5	9,57	1,53	8,90	57,22
6	0,00	0,00	30,00	60,00
7	19,96	1,74	13,30	115,42
8	0,00	23,98	6,02	69,65
9	0,17	21,81	3,02	59,74
10	12,39	1,95	25,66	238,09

Le "coût total" est de 1029.53 et les calculs durent 18 minutes.

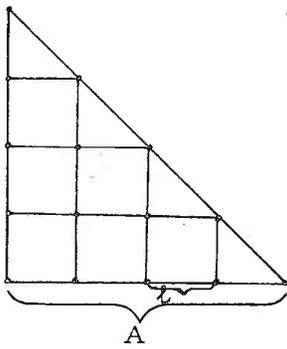
IV.4. CONCLUSION

Les essais numériques à l'aide d'un faible degré d'un polynôme de Tchebycheff, nous donnent des résultats assez convenables. Notons que Bellman a pu obtenir par la méthode des approximations successives un "coût total" de 1005.26 mais la capacité de notre machine ne nous a pas permis d'utiliser cette méthode avec les données du problème. En utilisant la méthode exhaustive de pas 5, qui demande un temps de calcul de 6 minutes, on obtient un coût total de 1031.24, soit trois pour cent supérieur à celui de Bellman. Cela nous montre que la méthode est mieux adaptée à la résolution d'un tel problème dans une machine de faible capacité.

La qualité de la recherche minimale influence peu les résultats numériques précédents car les fonctions politiques sont approchées très grossièrement.

Organigramme

Support choisi :



$$\ell = \frac{A}{PAS}$$

(16)

$T(x, x_5)$ est un polynôme de Tchebycheff $T_{n-1}(x_5)$

Degré du polynôme de Tchebycheff

P_3-1 en x_5

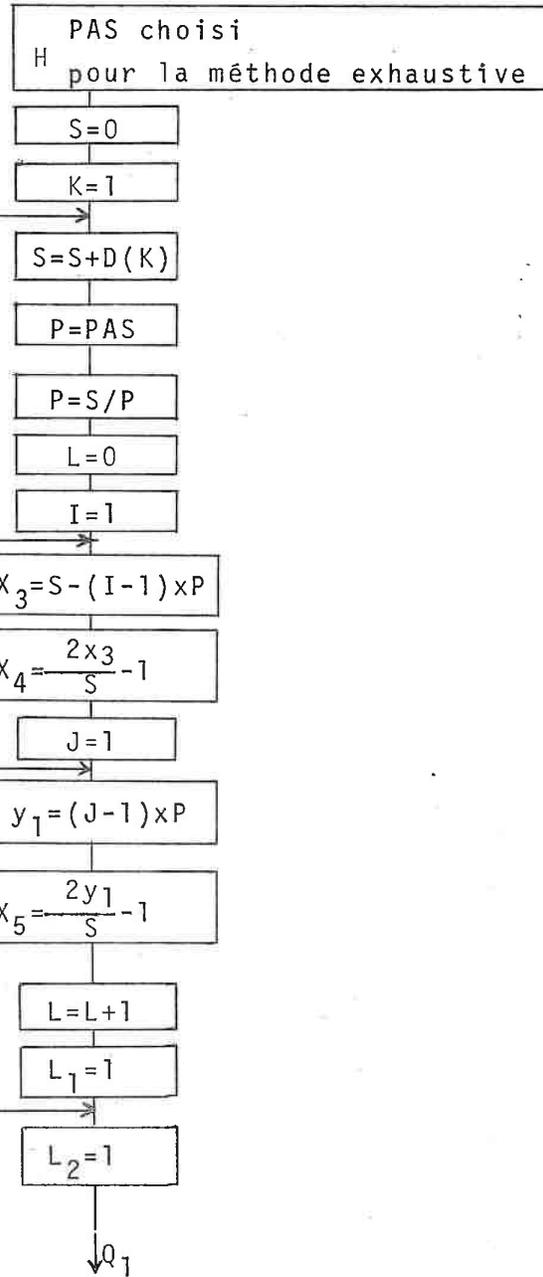
P_2-1 en x_4

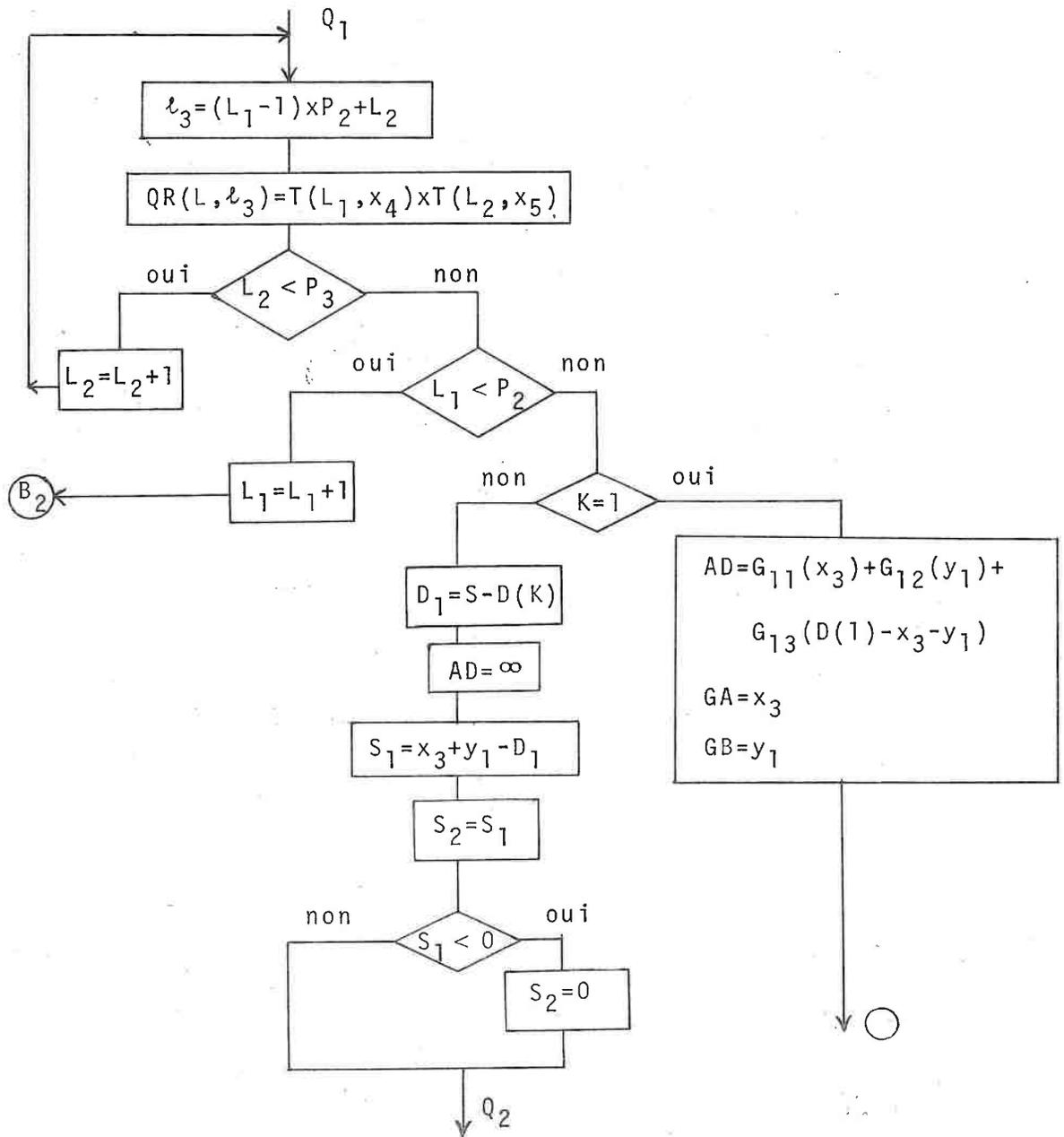
$G_{iK}(x)$ fonction de coût de transport de K dépôt à $i^{\text{ème}}$ point consommation.

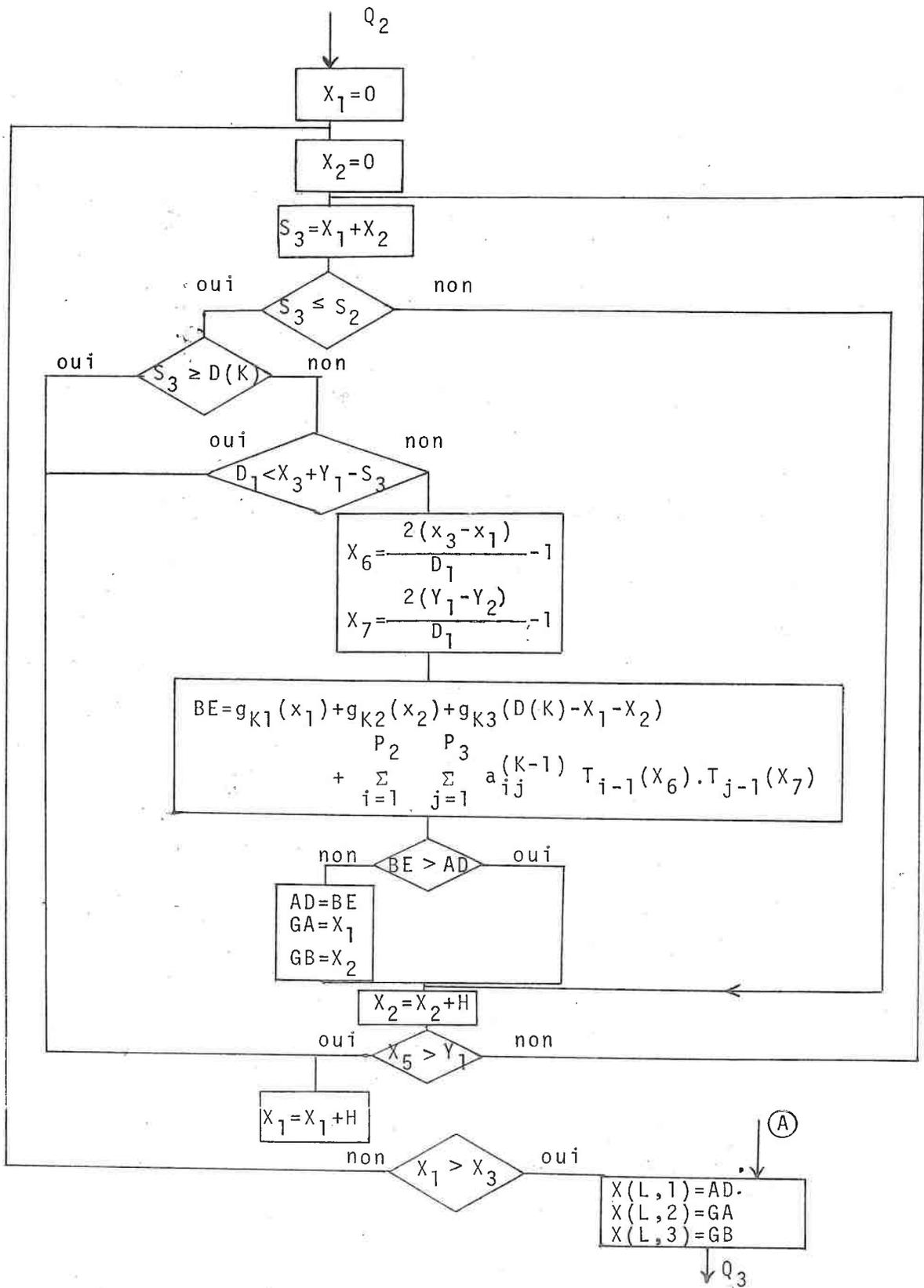
(13)

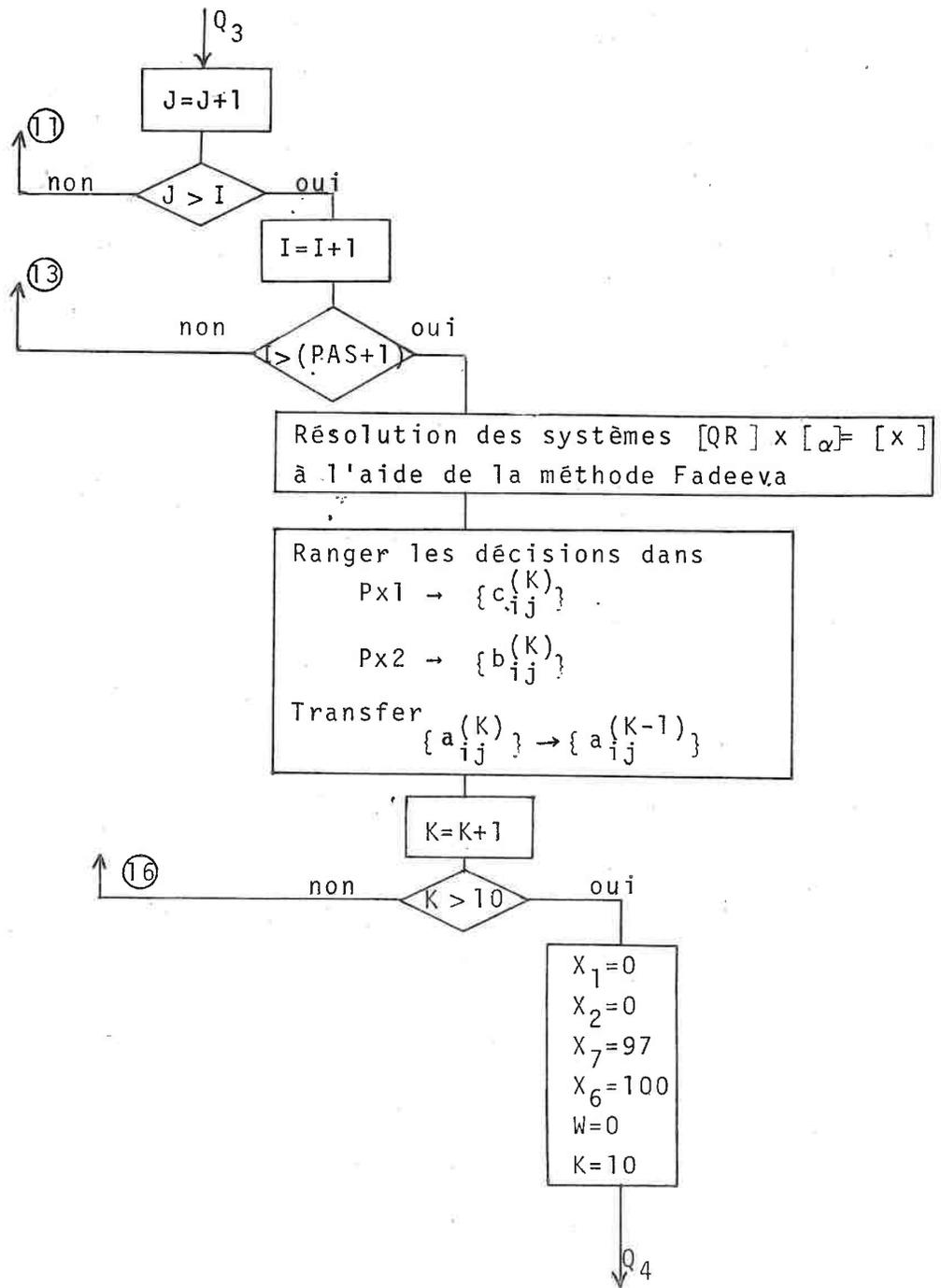
(11)

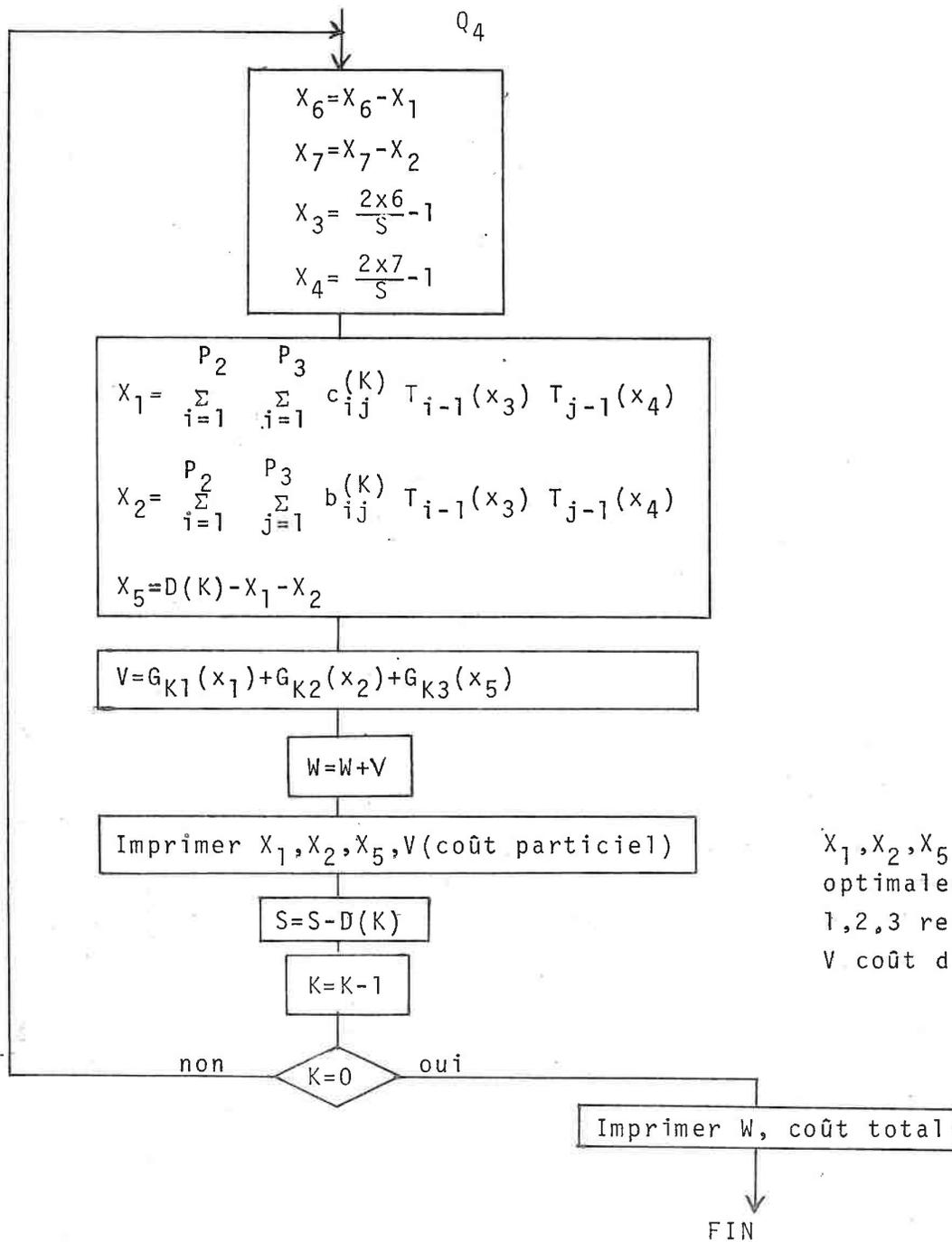
(B₂)











X_1, X_2, X_5 politiques
 optimales pour dépôts
 1, 2, 3 respectivement
 V coût d'opération

CONCLUSION

Les applications numériques à l'aide des techniques d'approximation en programmation dynamique nous montrent que ces méthodes d'approximation réduisent considérablement la place occupée en mémoire centrale et constituent l'une des solutions efficaces pour surmonter les difficultés causées par le nombre de dimensions. Elles ont donné les résultats numériques attendus.

L'utilisation d'une méthode d'approximation demande une étude un peu plus attentive que la méthode classique de Bellman, et ne conduisent qu'à une solution approchée. La qualité de cette approximation, le coût en mémoire centrale et en temps dépendent de paramètres et de techniques, qu'il faudra adapter à chaque problème.

Le fait que cette étude a été conduite sur ordinateur de petite capacité (CAE 510 de 8K mots de mémoire centrale) nous a obligé à nous limiter à un nombre très faible de variables. Il est vraisemblable que l'intérêt de la méthode que nous avons développée augmente avec le nombre de variables et que ces méthodes prendront leur plein intérêt sur gros ordinateur.

ANNEXES

Résolution d'un système d'équations linéaires surdéterminées par la méthode proposée par Fadeeva- Golüp et à l'aide des matrices de Householder.

Soit un système surdéterminé $Ax=B$
avec A matrice $m \times n$ $m \geq n$
B vecteur à m dimensions
x vecteur à n dimensions

La résolution approximative en sens de moindres carrés consiste à trouver X vérifiant $A^T A X = A^T B \Leftrightarrow C X = B'$. C'est une matrice définie positive. On démontre qu'elle est toujours décomposable suivant :

$C = R R^T$ où R est une matrice triangulaire inférieure. La méthode de Choleski résoud le système en deux temps

$$R Y = A^T B \quad , \quad R^T X = Y$$

Pour calculer R^T directement à partir de la matrice A sans passer par $A^T A$ et R^{-1} , on utilise des propriétés des matrices orthogonales et la matrice de Householder comme suit :

a) Propriété des matrices orthogonales :

$$Q^T = Q^{-1} \quad \text{et} \quad \|Q\| = I$$

On a donc $\|B - AX\| = \|QB - QAX\|$, on choisit Q telle que

$QA = R$ avec $R = \begin{vmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{vmatrix}$ où \tilde{R} est une matrice carrée triangulaire supérieure.

On démontre que si la matrice est carrée, le système linéaire se résoud d'autant mieux que le rapport de la plus grande à la plus petite valeur propre est petite d'où l'intérêt d'une transformation à l'aide d'une matrice orthogonale.

b) La matrice de Householder :

La matrice de Householder est sous la forme :

$$P = I - \beta W W^T$$

I : une matrice unité d'ordre m

β : un scalaire non nul

W : un vecteur à m dimensions

P : une matrice symétrique mxm

Proposition :

Pour qu'une matrice de Householder orthogonale transforme un vecteur V d'ordre m non nul en un vecteur U dont les composantes sont nulles sauf le premier élément, il suffit que

$$W_j = V_j \quad \text{pour } j=2, \dots, m$$

en posant

$$\sigma = \sqrt{V^T V}$$

$$W_1 = \text{signe}(V_1) \times (\sigma + |V_1|)$$

et

$$\beta = 1 / (\sigma \cdot (\sigma + |V_1|))$$

Démonstration $PV = U$

Cherchons la condition pour que P soit orthogonale.

$$P \times P = I$$

$$P \times P = I - 2\beta W W^T + \beta^2 W (W^T W) W^T$$

$$\beta^2 W^T W - 2\beta = 0 \quad \text{car } W^T W \text{ est un scalaire}$$

$$\beta W^T W = 2 \quad \text{d'où la condition d'orthogonalité de P}$$

$$P \times V = (I - \beta W W^T) V = V - \beta W (W^T V)$$

$$U = V - \beta W (W^T V) \implies u_i = V_i - \beta (W^T V) W_i$$

On a alors un système :

$$\begin{cases} u_i = 0 & i=2,3,\dots,m \\ \beta W^T W = 2 \end{cases}$$

m équations pour m+1 inconnues (β et W_i), on peut choisir une nouvelle relation arbitraire

$$\beta (W^T V) = I$$

On a $V_i = W_j$ pour $i=2,3,\dots,m$

Il reste à déterminer W_I et β à l'aide de deux relations :

$$\beta W^T W = 2$$

$$\beta W^T V = I$$

$$W^T W = V^T V - V_I^2 + W_I^2, \quad W^T V = V^T V - V_I^2 + W_I V_I$$

en posant $\sigma = \sqrt{V^T V}$

$$\text{Il vient : } \beta (\sigma^2 - V_I^2 + W_I^2) = 2$$

$$\beta (\sigma^2 - V_I^2 + W_I V_I) = I$$

$$\text{d'où : } W_I^2 - 2W_I V_I - \sigma^2 + V_I^2 = 0$$

$$W_I = V_I + \varepsilon \sigma \quad \text{avec } \varepsilon = \pm I$$

$$\beta = I / (\sigma (\sigma + \varepsilon V_I))$$

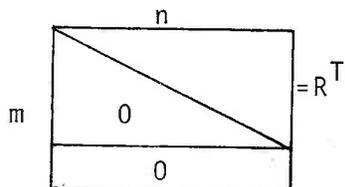
pour que $\sigma + \varepsilon V_I$ soit toujours positive (non nul) on choisit $\varepsilon V_I > 0$

$$\text{d'où : } W_I = \text{signe}(V_I) \times (\sigma + V_I)$$

$$\beta = I / (\sigma (\sigma + V_I))$$

c) Construction R^T par la méthode itérative,

Par le processus itératif, on ramène la matrice rectangulaire $A(m \times n)$ sous la forme telle que



soit une sous matrice $n \times n$ triangulaire supérieure et complétée par une matrice $(m-n) \times n$ nulle.

Une matrice $m \times n$ peut-être considérée comme formée par n vecteurs à m dimensions. On choisit P une suite de matrices de Householder orthogonales et on construit une suite \mathcal{A} telle que :

$$\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^{(k+1)} = P^{(k)} \mathcal{A}^{(k)} \quad k=1, 2, \dots, n$$

et $\mathcal{A}^{(n+1)} = P^{(n)} \mathcal{A}^{(n)} = R^T$

$\mathcal{A}^{(k)}$ est la forme

	n				
m	<table border="1"> <tr> <td style="text-align: center;">D_k</td> <td style="text-align: center;">C_{n-k}</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">B_{n-k}</td> </tr> </table>	D_k	C_{n-k}	0	B_{n-k}
D_k	C_{n-k}				
0	B_{n-k}				

$\mathcal{A}^{(k+1)}$ est la forme

	n				
m	<table border="1"> <tr> <td style="text-align: center;">D_{k+1}</td> <td style="text-align: center;">C_{n-k-1}</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">B_{n-k-1}</td> </tr> </table>	D_{k+1}	C_{n-k-1}	0	B_{n-k-1}
D_{k+1}	C_{n-k-1}				
0	B_{n-k-1}				

B_{n-k} est une matrice $(m-k) \times (n-k)$

D_k est une matrice triangulaire supérieure $k \times k$

C_{n-k} est une matrice $k \times (n-k)$

$$\mathcal{P}(K) = \begin{array}{|c|c|} \hline I_K & 0 \\ \hline 0 & P_{m-K} \\ \hline \end{array}$$

$\mathcal{P}(K)$ matrice $m \times m$
 I_K matrice unité $K \times K$
 P_{m-K} matrice de Householder
 $(m-K) \times (m-K)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(K+1)} = \mathcal{P}(K) \mathcal{A}^{(K)} &= \begin{array}{|c|c|} \hline I_K & 0 \\ \hline 0 & P_{m-K} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline D_K & C_{n-K} \\ \hline 0 & B_{n-K} \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{bmatrix} D_K & C_{n-K} \\ 0 & P_{m-K} \cdot B_{n-K} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

P_{m-K} transforme la première colonne de B_{n-K} en une colonne qui n'a qu'un premier élément non nul d'où $\mathcal{A}^{(K+1)}$ est de la forme indiquée ci-dessus ; en effet, on utilise directement la proposition (b) en prenant V comme 1^{ère} colonne de la matrice B_{n-K} et $P = P_{m-K}$.

Résolution d'un système tel que $AX=B$.

On a $\mathcal{A}^{(1)} = A$, $\mathcal{B}^{(1)} = B$

$\mathcal{A}^{(K+1)} X = \mathcal{P}(K) \mathcal{A}^{(K)} X = \mathcal{P}(K) \mathcal{B}^{(K)}$ pour $K=1, 2, \dots, n$
 $\mathcal{A}^{(K+1)} X = \mathcal{B}^{(K+1)}$

jusqu'à n : $\mathcal{P}^{(n)} \mathcal{A}^{(n)} X = \mathcal{P}^{(n)} \mathcal{B}^{(n)} \Rightarrow \mathcal{R}^T X = \mathcal{B}^{(n+I)}$

avec $\mathcal{P}^{(k)} = I - \beta_K W^{(k)} W^{(k)T}$

$$\sigma_K = \left(\sum_{i=K}^m (a_{iK}^{(k)})^2 \right)^{1/2}$$

$$w_i^{(k)} = 0 \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, K-1$$

$$w_i^{(k)} = a_{iK}^{(k)} \quad \text{pour } i=K+1, \dots, m$$

$$w_K^{(k)} = \text{signe}(a_{KK}^{(k)}) (\sigma_K + |a_{KK}^{(k)}|)$$

$$\beta_K = 1 / (\sigma_K (\sigma_K + |a_{KK}^{(k)}|))$$

$\mathcal{A}^{(k)}$ Il est très facile de calculer les éléments de la matrice par la matrice $\mathcal{P}^{(k)}$ en remarquant que si Y est un vecteur

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(k)} Y &= (I - \beta_K W^{(k)} W^{(k)T}) Y = Y - \beta_K W^{(k)} W^{(k)T} Y \\ &= Y - (\beta_K W^{(k)T} Y) W^{(k)} \\ &= \{ y_i - \beta_K W^{(k)T} Y w_i^{(k)} \} \end{aligned}$$

arrivé à $\mathcal{R}^T X = \mathcal{B}^{(n+I)}$, on trouve très facilement la solution X. On note $\tilde{\mathcal{R}}$ qui est la sous-matrice nxn triangulaire supérieure de \mathcal{R}^T . On a alors :

$$\tilde{\mathcal{R}}_{nn} x_n = b_n^{(n+I)}$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{n-1, n} x_{n-1} + \tilde{\mathcal{R}}_{nn} x_n = b_{n-1}^{(n+I)}$$

soit
$$x_i = (b_i^{(n+I)} - \sum_{K=n}^{i+1} \tilde{\mathcal{R}}_{iK} \cdot x_K) / \tilde{\mathcal{R}}_{ii}$$

pour $i=n, n-1, \dots, 1$

d'où la solution du système.

Remarque : La méthode peut se généraliser à des systèmes surdimensionnés d'équations linéaires qui ont plusieurs seconds nombres, c'est à dire que B est une matrice à plusieurs colonnes.

Méthode des parties proportionnelles :

Supposons que la fonction $\bar{V}_N(p)$ est unimodale dans l'intervalle $[0, P_{\max}]$, il existe un nombre P_0 , $0 \leq P_0 \leq P_{\max}$, tel que $\bar{V}_N(p)$ soit strictement croissante pour $P \leq P_0$ et strictement décroissante pour que $P > P_0$ ou strictement croissante pour $P < P_0$ et strictement décroissante pour $P \geq P_0$.

Déterminons l'ensemble des emplacements des expériences à effectuer pour trouver le maximum.

Posons d'abord l'intervalle initial $L_1 = P_{\max} - 0$. Nous choisissons l'emplacement de la première expérience de telle sorte que $L_2 = L_1/z$ où z est le nombre d'or

$(\sqrt{z} + 1)/2 = 1.618033989$ et $1/z = -1 = 0.618033989$.

Ensuite chaque expérience est choisie dans l'intervalle restant au symétrique de l'expérience déjà effectuée par rapport au milieu de l'intervalle.

Les intervalles successifs sont déterminés par

$$L_i = L_{i-1} \times \frac{1}{z}, \quad L_i = \frac{L_1}{z^{i-1}} \quad (i^{\text{ème}} \text{ expérience})$$

Etudions la méthode de calcul à l'aide de l'organigramme suivant.

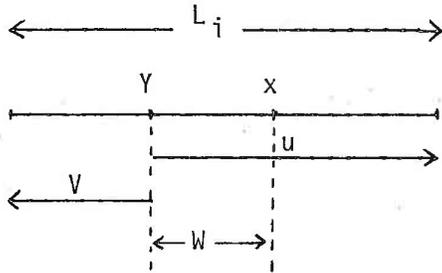
Notations :

Dans un intervalle restant, l'expérience déjà effectuée s'appelle Y, celle qui va l'être s'appelle X.

L'intervalle d'incertitude d'après q expériences est

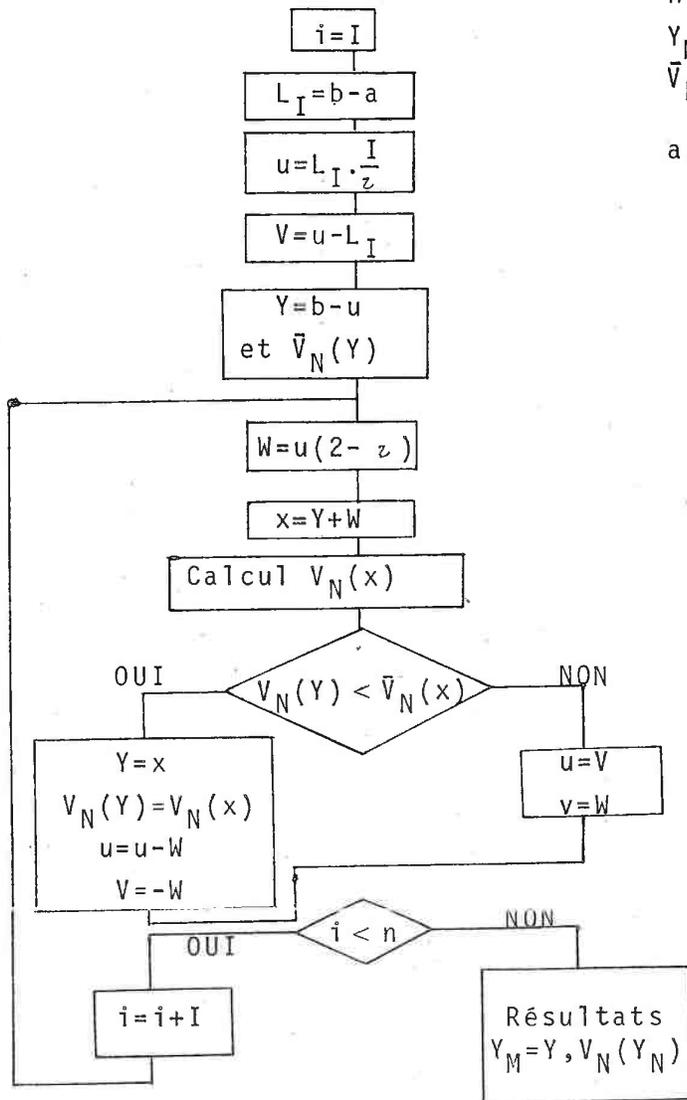
$$L_q = L_0 / (1.62)^{q-1}$$

on garde la valeur optimale d'après q essais.



u, v sont les mesures algébriques des vecteurs issus de Y ayant pour extrémités les bornes de l'intervalle avec toujours $|u| > |v|$ par définition, $W = u + v$, alors $X = Y + W$

\bar{V}_N fonction à optimiser
 n nombre d'expériences ($n \geq 2$)
 Y_M valeur approchée du maximum
 $\bar{V}_N Y_M$ valeur de \bar{V}_N en Y_M
 a, b bornes de l'intervalle



Approximation d'une fonction à 2 variables à l'aide du produit de Kronecker.

Produit de Kronecker (Produit tensoriel)

1°) Définition :

Si A_1 et A_2 sont deux matrices quelconques d'ordres respectifs $(m_1 \times n_1)$, $(m_2 \times n_2)$, le produit de Kronecker des matrices A_1, A_2 noté $A_1 \otimes A_2$ est une matrice d'ordre $(m_1 \cdot m_2 \times n_1 \cdot n_2)$.

$$[C] = [A_1] \otimes [A_2] = \begin{bmatrix} a_{11}[A_2] & a_{12}[A_2] & \dots & a_{1n_1}[A_2] \\ a_{21}[A_2] & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m_1 1}[A_2] & \dots & \dots & a_{m_1 n_1}[A_2] \end{bmatrix}$$

2°) Certaines propriétés :

Nous citons seulement des propriétés du produit de Kronecker qui seront utiles dans la suite :

$$\begin{aligned} K_1 \quad [A] \otimes [B] \otimes [C] &= [A] \otimes ([B] \otimes [C]) = ([A] \otimes [B]) \otimes [C] \\ K_2 \quad [A] \otimes [B] \otimes [C] \otimes [D] &= ([A] \otimes [C]) \otimes ([B] \otimes [D]) \\ K_3 \quad [A] \otimes [B]^t &= [A]^t \otimes [B]^t \end{aligned}$$

application à l'approximation d'une fonction à 2 variables.

Nous utilisons un polynôme P défini ainsi que la fonction \mathcal{F} à approcher dans $[-1, 1]$.

Nous construisons le polynôme P à l'aide des polynômes de Tchebycheff suivants :

$$P(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} T_{i-1}(x) T_{j-1}(y)$$

On peut l'écrire sous la forme du produit de Kronecker :

$$P(x,y) = [1, T_1(x), T_2(x), \dots, T_{n-1}(x)] \otimes [1, T_1(y), \dots, T_{m-1}(y)] \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1m} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \cdot (P_I)$$

On prend des supports de Tchebycheff :

$$x_i = \cos \left(\frac{(2i-1)}{2P} \pi \right) \quad i=1, 2, \dots, P$$

$$y_j = \cos \left(\frac{(2j-1)}{2Q} \pi \right) \quad j=1, 2, \dots, Q$$

$$P \geq n \quad \text{et} \quad Q \geq m$$

On note $\mathcal{F}(x_i, y_j) = \mathcal{F}_{ij}$.

On cherche à déterminer les coefficients a_{ij} dans l'expression P_I . On établit l'égalité entre $P(x_i, y_j) = \mathcal{F}(x_i, y_j)$ et on va garder l'écriture tensorielle

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}(x_I, y_I) \\ \mathcal{F}(x_I, y_2) \\ \mathcal{F}(x_I, y_3) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(x_I, y_Q) \end{bmatrix} = [I, T_I(x_I), T_2(x_I) \dots T_{n-I}(x_I)] \otimes \begin{bmatrix} I, T_I(y_I), T_2(y_I) \dots T_{m-I}(y_I) \\ I, T_I(y_2), T_2(y_2) \dots T_{m-I}(y_2) \\ \vdots \\ I, T_I(y_Q), T_2(y_Q) \dots T_{m-I}(y_Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{I1} \\ a_{I2} \\ \vdots \\ a_{Im} \\ a_{2I} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

de même :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}(x_I, y_I) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(x_I, y_Q) \\ \mathcal{F}(x_2, y_I) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(x_p, y_I) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(x_p, y_Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I, T_I(x_I) \dots T_{n-I}(x_I) \\ I, T_I(x_2) \dots T_{n-I}(x_2) \\ \vdots \\ I, T_I(x_p) \dots T_{n-I}(x_p) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I, T_I(y_I) \dots T_{m-I}(y_I) \\ \vdots \\ I, T_I(y_Q) \dots T_{m-I}(y_Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{I1} \\ a_{I2} \\ \vdots \\ a_{Im} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

Soit $[F] = [T(x)] \otimes [T(y)] [\alpha]$

$$[[T(x)] \otimes [T(y)]]^t [F] = [[T(x)] \otimes [T(y)]]^t [[T(x)] \otimes [T(y)]] [\alpha]$$

on utilise K_2 et K_3 .

$$[T(x)]^t \times [T(y)]^t [F] = \left[[T(x)]^t [T(x)] \times [T(y)]^t [T(y)] \right] [\alpha]$$

or $[T(x)]^t [T(x)] = \frac{p}{2} \begin{bmatrix} 2I_{I_1} & & \\ & \dots & \\ & & I \end{bmatrix}$ et $[T(y)]^t [T(y)] = \frac{q}{2} \begin{bmatrix} 2I_{I_1} & & \\ & \dots & \\ & & I \end{bmatrix}$

$$[\alpha] = \frac{2}{p} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & \dots & 0,5 \\ T_1(x_I) & \dots & \dots & T_1(x_p) \\ T_2(x_I) & & & T_2(x_p) \\ \vdots & & & \vdots \\ T_{n-I}(x_I) & \dots & \dots & T_{n-I}(x_p) \end{bmatrix} \otimes \frac{2}{q} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & \dots & 0,5 \\ T_1(y_I) & \dots & \dots & T_1(y_Q) \\ T_2(y_I) & & & T_2(y_Q) \\ \vdots & & & \vdots \\ T_{m-I}(y_I) & \dots & \dots & T_{m-I}(y_Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{I1} \\ F_{I2} \\ \vdots \\ F_{IQ} \\ \vdots \\ F_{pI} \\ \vdots \\ F_{pQ} \end{bmatrix}$$

D'où

$$P(x,y) = \left[[I, T_1(x), \dots, T_{n-I}(x)] \times [I, T_1(y), \dots, T_{m-I}(y)] \right] \left[[L_N] \times [L_m] \right] \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$$



NOM DE L'ETUDIANT : YU Ziang Kuang

Nature de la thèse : Spécialité en Mathématiques Appliquées

Vu, Approuvé

et Permis d'Imprimer

NANCY, le 29 août 1969

Le DOYEN :



J. AUBRY