

89/289

Université de Nancy I

U.E.R. Mathématiques

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE NANCY I

pour l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

Spécialité : **INFORMATIQUE**

Mention : **Gestion de Production**

par

Xiao-lan XIE



Sujet de la thèse : **CONTROLE HIERARCHIQUE D'UN SYSTEME
DE PRODUCTION SOUMIS A PERTURBATIONS**

Soutenu le 19 Juin 1989, devant la commission d'examen composée de :

Rapporteurs : M. René DAVID
Mme Maryse QUERE
M. Jacques THEPOT

Examineurs : MM. Vincent GIARD
Jean-Paul HATON
Mlle Marie-Claude PORTMANN
MM. Jean-Marie PROTH
Jean-Pierre QUADRAT

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE NANCY I

pour l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

Spécialité : **INFORMATIQUE**

Mention : **Gestion de Production**

par

Xiao-lan XIE

Sujet de la thèse : **CONTROLE HIERARCHIQUE D'UN SYSTEME
DE PRODUCTION SOUMIS A PERTURBATIONS**

Soutenue le 19 Juin 1989, devant la commission d'examen composée de :

Rapporteurs : M. René DAVID
 Mme Maryse QUERE
 M. Jacques THEPOT

Examineurs : MM. Vincent GIARD
 Jean-Paul HATON
 Mlle Marie-Claude PORTMANN
 MM. Jean-Marie PROTH
 Jean-Pierre QUADRAT



Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué à l'INRIA-LORRAINE (Unité Lorraine de l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique).

Je tiens à remercier tous les membres du jury.

En premier, les personnalités scientifiques qui ont bien voulu me faire l'honneur de participer à ce jury :

M. Vincent GIARD, Professeur aux Universités de Lyon III et Paris I,

M. Jean-Paul HATON, Professeur à l'Université de Nancy I et Directeur de recherche à l'INRIA,

M. Jean-Pierre QUADRAT, Directeur de recherche à l'INRIA,

Mme Maryse QUERE, Professeur à l'Université de Nancy II,

M. Jacques THEPOT, Professeur et Doyen de la Faculté des Sciences Economiques à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

Je remercie plus particulièrement M. René DAVID, Directeur de recherche au Laboratoire d'Automatique de Grenoble, qui m'a dirigé pendant ma première année de recherche en gestion de production et n'a cessé de manifester son intérêt pour mes travaux de recherche.

Je souhaite exprimer toute ma reconnaissance à Mlle Marie-Claude PORTMANN, Professeur à l'Ecole des Mines de Nancy, pour les nombreuses heures qu'elle m'a consacrées pour m'aider à la rédaction de cette thèse.

C'est à M. Jean-Marie PROTH, Directeur de l'INRIA-LORRAINE, que reviennent mes plus vifs remerciements pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, pour avoir suivi mes travaux et pour m'avoir suggéré de nouvelles voies de recherche. Ses expériences de la recherche ont été pour moi un soutien très efficace tout au long de ce travail.

Enfin, je remercie chaque membre de l'équipe SAGEP de l'INRIA-LORRAINE pour leur intérêt envers mes travaux, pour leur accueil qui m'a permis d'apprécier la vie en France, et pour l'ambiance chaleureuse et amicale qu'ils ont su créer.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE 1

SYSTEMES DE PRODUCTION ET GESTION DE PRODUCTION

1.1. Systèmes de production	5
1.2. Gestion de production	7
1.2.1. Classification des décisions	9
1.2.2. Fonctions de gestion	11
1.3. Planification de la production	12
1.3.1. Approche globale	13
1.3.2. Approche hiérarchisée	13
1.4. Ordonnancement de la production	15
1.4.1. Approche globale	16
1.4.2. Approche hiérarchisée	18

CHAPITRE 2

DEFINITION DU PROBLEME ET CONCEPTION DE LA HIERARCHIE

2.1. Introduction	28
2.2. Spécification du système de production	32
2.3. Décisions à prendre	34
2.4. Conception de la hiérarchie	36

CHAPITRE 3

SEQUENCEMENT DES CONFIGURATIONS DU SYSTEME

3.1. Modèle pour le séquençement des configurations	40
3.1.1. Introduction	40
3.1.2. Définitions et notations	41
3.1.3. Variables de contrôle et état du système	42
3.1.4. Contraintes sur la capacité de production	44
3.1.5. Indice de performance	48
3.1.6. Modèle pour le séquençement des configurations	49
3.2. Recherche des configurations optimales	50
3.2.1. Optimisation locale de la séquence de configurations	52
3.2.2. Heuristique proposée	54

3.3. Planification de la production lorsque les configurations sont définies	57
3.3.1. Décomposition du problème	57
3.3.2. Caractéristiques des politiques optimales	59
3.3.2.1. Principe d'optimalité	59
3.3.2.2. Propriétés des fonctions de coût	60
3.3.2.3. Caractéristiques des politiques optimales	62
3.3.2.4. Démonstration des propriétés des fonctions de coût	63
3.3.3. Calcul des politiques optimales de contrôle	70
3.3.3.1. Calcul des niveaux idéaux du stock	70
3.3.2.2. Calcul des dérivées et des pas de déplacement	73
3.4. Applications numériques	77
3.4.1. Choix de la séquence de départ	77
3.4.2. Premier exemple	78
3.4.3. Deuxième exemple	80

CHAPITRE 4

CONTROLE DE FLUX ET ORDONNANCEMENT EN TEMPS REEL

4.1. Introduction	85
4.2. Modèle de contrôle de flux	87
4.2.1. Définitions et notations	87
4.2.2. Description du modèle	89
4.2.3. Discussion	95
4.3. Caractéristiques des politiques optimales	96
4.3.1. Principe d'optimalité	96
4.3.2. Caractéristiques	100
4.4. Calcul des contrôles optimaux	104
4.4.1. Approximation quadratique des fonctions de coût	104
4.4.2. Calcul du contrôle optimal	106
4.4.3. Trajectoire de l'état des stocks et singularité du contrôle	112
4.4.4. Elimination de la singularité du contrôle	113
4.5. Evaluation des fonctions de coût	121
4.5.1. Evaluation des points de séparation	121
4.5.2. Calcul de la matrice $A(\alpha)$	125
4.6. Optimisation des routages	126
4.7. Ordonnancement en temps réel	129
4.8. Capacité de production à long terme	132
4.9. Exemples numériques	135
4.9.1. Exemple de "flow-shop"	135
4.9.2. Exemple de "job-shop"	142

CHAPITRE 5
CONTROLE DE FLUX AVEC PANNES DIVERSIFIEES

5.1. Introduction	147
5.2. Analyse des pannes et hiérarchie	150
5.2.1. Analyse des pannes des machines	150
5.2.2. Définition de la hiérarchie	153
5.2.3. Structure de contrôle	155
5.3. Modèle du contrôle à chaque niveau	156
5.3.1. Contrôle	157
5.3.2. Exemple illustratif	164
5.4. Applications numériques	166
5.4.1. Exemple de "flow-shop"	166
5.4.2. Exemple de "job-shop"	169

CONCLUSION

REFERENCES

ANNEXE

INTRODUCTION

Les tendances du marché ont considérablement évolué au cours des vingt dernières années. Le coût n'est plus le seul critère pris en compte par les clients. A l'exigence d'un coût peu élevé se sont ajoutées la recherche d'une qualité toujours plus grande et, surtout, une forte variation et une grande imprévisibilité de la demande. Les fabrications ne se font plus en grandes séries, mais au contraire en petits lots qui doivent satisfaire la demande sitôt qu'elle est exprimée. On a coutume de dire que l'économie d'envergure (economy of scope) a remplacé l'économie d'échelle (economy of scale). Pour faire face à cette situation dans de bonnes conditions de compétitivité, l'industrie fait appel à des systèmes à la fois adaptatifs et automatisés: les ateliers flexibles (Flexible Manufacturing Systems = FMS). L'objectif avoué de ces systèmes est de conserver les avantages de la production de masse qui s'effectue à l'aide de lignes de fabrication hautement automatisées (construction automobiles, par exemple), tout en se donnant la possibilité de s'adapter immédiatement (on dit "en temps réel") à la demande du marché.

Un problème fondamental des ateliers flexibles est de trouver le bon compromis entre les deux qualités antagonistes que sont une bonne productivité et une grande flexibilité. La solution se trouve dans la technologie, la normalisation, la formation des hommes et la gestion de ces systèmes. L'insuffisance actuelle de la gestion des systèmes de production est soulignée par Wilson et Henry (1977) : "*The predominant type of manufacturing in the world today is the production of small lots of parts. Traditionally, small-lot manufacturing is performed by a job shop using simple but often inefficient rules for routing and scheduling. Furthermore, new tools with higher cutting speeds and longer tool life will not eliminate the small-lot problem. Only about five percent of the time required to produce a part is spent in cutting metal and setting up the tool. The remainder is spent measuring and checking the piece, getting the necessary tooling together, etc. This is in sharp contrast to the efficiencies in processing and manufacturing in mass production.*" (1)

L'objectif de cette thèse est de développer des algorithmes efficaces pour l'ordonnancement de la production dans les ateliers flexibles.

L'originalité de ce travail est que l'approche proposée privilégie l'utilisation de l'outil de production en introduisant la notion de configuration. Une configuration est un état du système capable de fabriquer dans les meilleures conditions

d'utilisation de ce système un ensemble de produits dans des proportions données avec une productivité maximale et des temps de préparation négligeables. L'ensemble des configurations est fini, ce qui est une hypothèse tout à fait réaliste. Dès lors, l'objectif est le choix d'une suite de configurations qui va permettre de réaliser la demande "au mieux" puis de choisir à l'intérieur de chaque configuration, la production à réaliser. Cette production est contrainte par les possibilités de la configuration correspondante. A noter que le passage d'une configuration à une autre nécessite un temps de préparation qui dépend de la succession des configurations: c'est une des difficultés majeures de notre approche.

Notre travail se situe donc très nettement au niveau opérationnel de la gestion de production. Il est présenté en cinq chapitres :

Le premier chapitre est consacré à une présentation générale de la gestion de production. Nous y présentons les travaux qui, à notre avis, sont les plus marquants en planification et ordonnancement de la production. Les approches hiérarchisées, à l'intérieur desquelles s'inscrivent nos travaux, sont particulièrement détaillées.

Dans le chapitre 2, nous spécifions le type de système de production considéré et proposons une gestion hiérarchisée à trois niveaux :

- *Séquencement des configurations* qui détermine une séquence "optimale" de configurations avec, pour chacune, sa durée et les volumes de production.
- *Contrôle de flux* dont l'objectif est de faire face aux pannes des machines au coût le plus bas. Ce coût est composé d'un coût de stockage et d'un coût de rupture des stocks. Bien entendu, ces flux obéissent aux contraintes imposées par les configurations.
- *Ordonnancement*, où on ordonnance les lancements en fabrication de pièces et la fabrication des pièces en cours en temps réel tout en respectant les flux de production calculés à l'étape précédente.

Le chapitre 3 s'attache au choix des configurations et pose le problème de contrôle à résoudre lorsque la séquence de configurations est connue.

Dans le chapitre 4, nous étudions le problème de contrôle de flux et suggérons de résoudre le problème d'ordonnancement en temps réel à l'aide de règles de production simples qui s'inscrivent à l'intérieur des contraintes imposées par le flux optimal obtenu.

Enfin, **dans le chapitre 5**, nous généralisons le problème de contrôle des flux au cas où les événements aléatoires ou non qui se produisent dans le système peuvent être réunis en classes de fréquences voisines, les fréquences associées à différentes classes étant très différentes. Cette nouvelle hypothèse introduit une hiérarchie plus complexe et nous résolvons le problème de contrôle afférent.

Dans ce travail, nous proposons donc une approche d'ordonnancement particulièrement intéressante pour les systèmes sujets à pannes et qui fabriquent à débits élevés.

(1) 'Actuellement, le type dominant de production dans le monde est la production en lots de faible importance. Traditionnellement, la production de lots de taille réduite est effectuée par un atelier utilisant des règles de routage et d'ordonnancement simples mais souvent inefficaces. De plus, des outils nouveaux avec des vitesses de coupe supérieures et une plus grande durée de vie n'éliminent pas le problème de la fabrication par lots de petite taille. Environ seulement cinq pour cent du temps nécessaire pour fabriquer une pièce est utilisé pour transformer le métal et monter l'outil. Le reste est utilisé pour mesurer et vérifier la pièce, rassembler les outils nécessaires, etc... Il y a là un grand contraste avec l'efficacité de la production de masse.' (traduit de Wilson et Henry [1977])

CHAPITRE 1

Systèmes de Production et Gestion de Production

Dans ce chapitre introductif, nous présentons les notions générales concernant les systèmes de production et leur gestion. On y trouve une synthèse de la littérature concernant la planification de la production à moyen terme et l'ordonnancement de la production, en particulier l'ordonnancement à l'aide d'une approche hiérarchisée.

1.1 Systèmes de production

La production est une opération de transformation qui convertit des matières premières et/ou des composants en produits finis.

Un système de production est un ensemble de ressources qui permettent cette transformation. Dans cet ensemble, on distingue essentiellement quatre types de ressources: des équipements (machines, outils, moyens de transport, moyens informatiques, ...), des moyens humains qui permettent le bon déroulement du processus de transformation, des produits à différents stades de fabrication (matières premières, produits semi-finis, produits finis, ...), des entrepôts de matières ou des aires de stockage.

Un produit fini est souvent obtenu par l'assemblage de plusieurs composants. Un composant est à son tour obtenu par l'assemblage d'autres pièces ou par une succession de transformations de matières premières. La description complète du processus de fabrication d'un produit fini est donnée par une arborescence connue sous le nom de nomenclature (Bill Of Materials). L'industrie automobile en donne un exemple classique.

Face à la complexité du processus de fabrication, les systèmes de production sont organisés et gérés en fonction des demandes et des ressources disponibles. Il existe une grande diversité de systèmes de production. On trouve dans la littérature de nombreuses typologies des systèmes de production. Dans notre travail, nous adoptons les deux typologies proposées par Giard [1988].

La première typologie est basée sur le fait qu'un système de production peut produire pour réapprovisionner des stocks (production prévisionnelle) ou produire pour satisfaire une demande (production à la demande). Une production est prévisionnelle lorsqu'elle est déclenchée par un état des stocks. Un système de production produit à la demande lorsque la production est déclenchée par les commandes fermes des clients.

La production prévisionnelle conduit à des modèles déterministes ou stochastiques de gestion de stocks. Parmi ces modèles, on trouve en particulier les fameuses quantités économiques qui assurent un compromis optimal entre les coûts de stockage et les coûts de changement de fabrication. La littérature sur ces sujets est due essentiellement à Wagner et Whitin [1958], Zangwill [1969], Bensoussan, Crouhy et Proth [1983], Maxwell et Muckstadt [1985], ...

On trouve également la combinaison de ces deux modes de fabrication dans des systèmes qui comportent à la fois la fabrication des composants et l'assemblage. On produit souvent les composants de manière prévisionnelle et l'assemblage se fait à la commande des clients. Ceci permet de fournir une grande variété de produits assemblés à partir d'un nombre limité de types de composant.

La deuxième typologie est liée au mode d'organisation de la fabrication. On peut distinguer les quatre modes d'organisation suivants:

- *Organisation en ligne de fabrication.* Dans les systèmes organisés en ligne de fabrication, les équipements sont agencés de telle façon que les produits sont fabriqués en passant successivement et dans le même ordre par les postes de travail de la ligne. Ce mode d'organisation nécessite la spécialisation des équipements. Il repose sur la parfaite standardisation des gammes de fabrication et la régularité de la circulation du flux de matières. Ce mode d'organisation permet une très bonne utilisation des équipements. Les temps d'attente des pièces pour la fabrication sont faibles. Un autre avantage de ce mode d'organisation est la simplicité de sa gestion. Il n'est pratiquement pas nécessaire d'ordonnancer la production. La rigidité de ce mode d'organisation est justifiée lorsque la quantité de produits fabriqués est suffisamment grande. C'est le cas dans les productions de masse.

- *Organisation en ateliers spécialisés.* Dans ce type d'organisation, on réunit en un même lieu les équipements qui assurent une même fonction technique. Ce mode d'organisation est la conséquence de la diversité en produits finis ou en composants. Chacun de ces ateliers fait l'objet d'une production limitée. Dans ce mode d'organisation, les machines ne sont généralement pas spécifiques et elles peuvent effectuer plusieurs types d'opérations. L'avantage de ce mode d'organisation est la flexibilité du système. Le principal désavantage est l'inefficacité de la fabrication par rapport à une organisation en ligne. En effet, le coût et le temps de manutention des pièces entre les ateliers sont souvent importants. De plus, la diversité des gammes de fabrication dans chaque atelier pose un problème d'ordonnancement. Les temps d'attente des pièces pour la fabrication sont souvent plus importants que dans l'organisation en ligne. En même temps, les machines ne sont pas aussi bien utilisées que dans l'organisation en ligne de fabrication.

- *Organisation en production unitaire.* Il s'agit de la réalisation de quelque produits sur des périodes assez longues, par exemple la fabrication de prototypes. Il est nécessaire de planifier la succession des différentes tâches.
- *Industrie de process.* Les produits fabriqués subissent des transformations pratiquement continues. On rencontre, par exemple, ce mode d'organisation dans l'industrie chimique ou sidérurgique.

Dans ce travail, nous nous intéressons aux systèmes de production fonctionnant en prévisionnel et organisés en ateliers spécialisés.

1.2 Gestion de production

L'objectif d'un système de production est de fournir aux clients des produits de bonne qualité à un prix compétitif et en respectant les délais. L'entreprise doit chercher en permanence à améliorer ses produits et ses délais de livraison. Il doit en outre diminuer constamment le coût de production.

Le système de gestion a pour rôle d'assurer en permanence la bonne utilisation de l'ensemble des moyens de production. Pour bien gérer, les décisions prises par le système de gestion doivent être basées sur des informations actualisées (ressources disponibles, situation des clients et des fournisseurs). Un bon système de gestion est caractérisé par la capacité d'acquisition des informations nécessaires et la capacité de prise de décision.

Si on suit le mouvement des matières dans un système de production, on peut décomposer son fonctionnement en trois étapes:

- Etape de réapprovisionnement qui consiste à commander aux fournisseurs les matières premières et les composants requis pour la fabrication.
- Etape de fabrication qui transforme les matières premières et les composants en produits finis.
- Etape de distribution qui assure la livraison des produits finis aux clients.

Le mauvais fonctionnement d'une étape quelconque perturbe le fonctionnement de l'ensemble. Le système de gestion doit coordonner le fonctionnement des trois étapes.

La figure 1.1 schématise les interactions des sous-systèmes dans un système de fabrication. C'est une gestion avec retour d'information en boucle fermée, en terme d'automaticien.

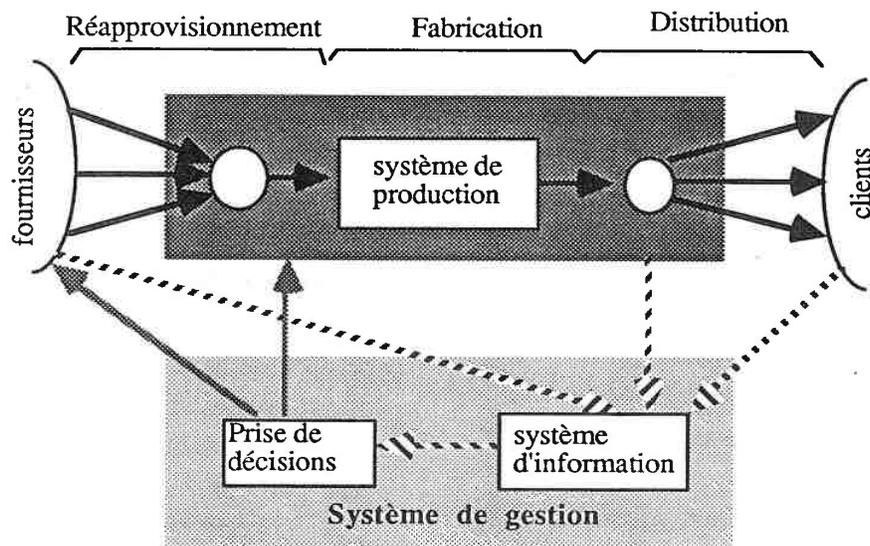


Figure 1.1: Interactions des sous-systèmes dans la fabrication

Le système d'information collecte l'information sur la capacité actuelle de fabrication, les fournisseurs, les demandes, les prévisions, etc... Il permet également d'évaluer les décisions prises par le système de gestion. Il permet de suivre l'évolution du marché et de la technologie. Il met le système de gestion au courant de tout changement du système de fabrication et du monde extérieur, ce qui permet une adaptation rapide des décisions.

Les décisions sont prises en fonction des informations fournies par le système d'information. Pour un système de production réel, il y a en permanence de nombreuses décisions à prendre. De plus, il existe souvent des aléas qui perturbent le fonctionnement du système. Cette instabilité de l'état du système rend la prise de décisions plus difficile.

Une autre difficulté de la gestion est due au fait que les objectifs ne sont pas toujours clairement définis. Souvent, on a une liste d'objectifs souhaités qui peuvent être contradictoires, par exemple :

- minimiser les en-cours et les stocks
- livrer les clients dans le plus court délai
- utiliser au mieux la capacité et les personnels disponibles
- minimiser les heures supplémentaires
- minimiser le coût de fabrication
- etc.

Le système de gestion doit aboutir à un bon compromis entre ces objectifs contradictoires.

1.2.1 Classification des décisions

Afin de réduire la difficulté de la prise de décisions, on adopte une approche progressive. Les décisions sont souvent prises en trois étapes successives caractérisées par l'horizon sur lequel les décisions s'appliquent (voir Antony [1965]):

-Les décisions stratégiques qui concernent la politique générale de l'entreprise à long terme (horizon de plus de 2 ans, en général). A partir de l'analyse de la tendance du marché, de la prévision de l'évolution des technologies et de l'analyse de la concurrence, les décisions stratégiques cherchent à faire évoluer l'ensemble des produits et à ajuster le mode d'organisation de la fabrication et la capacité de production aux besoins du marché. Les décisions stratégiques se traduisent par

- * Investissement en équipements, recrutement, formation du personnel
- * Arrêt de fabrication de certains produits et lancement en fabrication de nouveaux produits
- * Conception de nouveaux produits
- * Adoption de nouveaux modes de fabrication, par exemple Juste-A-Temps
- * Programme publicitaire
- * etc.

-Les *décisions tactiques* qui correspondent à un ensemble de décisions à moyen terme (horizon variant entre 3 mois et 2 ans, en général). La capacité de production a été fixée par le niveau supérieur (décisions stratégiques). A partir du carnet de commande ferme des clients et de la prévision des demandes, les décisions tactiques définissent un plan de fabrication. Les décisions tactiques se traduisent par un calendrier de production.

-Les *décisions opérationnelles* qui contrôlent le déroulement quotidien du processus de fabrication dans le respect des décisions tactiques. Les décisions opérationnelles assurent l'ordonnancement des opérations sur les machines, l'affectation des opérateurs aux machines, la livraison des produits finis, etc. Elles tiennent compte de tous les détails du fonctionnement du système.

La figure 1.2 schématise les interactions entre ces décisions. A chaque classe de décisions correspond un horizon différent. Les informations nécessaires sont d'autant plus agrégées que l'horizon s'allonge. De plus, les décisions prises concernent d'autant plus d'éléments que le niveau de décision est élevé.

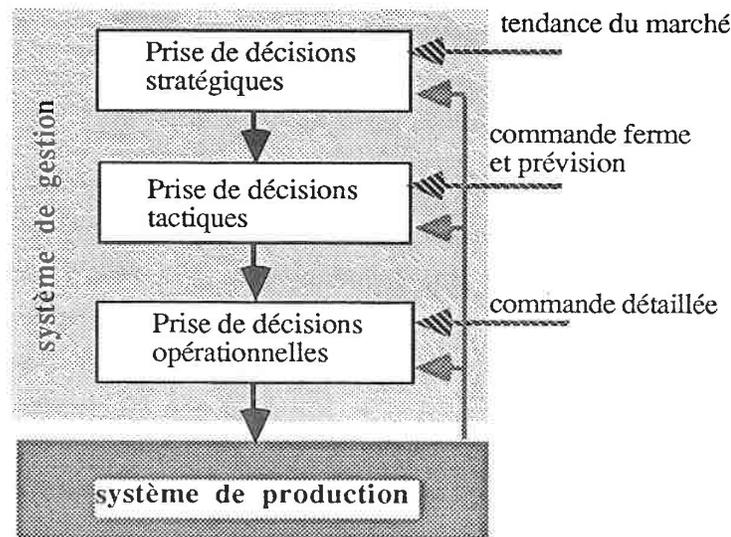


Figure 1.2: Interactions entre décisions

Au niveau des décisions stratégiques, seules les prévisions sur l'évolution du marché et de la technologie sont prises en compte. Les décisions stratégiques ont des effets globaux et profonds sur le fonctionnement du système. C'est uniquement à ce niveau que l'on effectue la prise des décisions importantes sur l'évolution du système physique.

Au niveau des décisions tactiques, on considère les commandes fermes, les prévisions de demande regroupées en familles de produits et les capacités agrégées des sous-systèmes de fabrication. Les décisions sont des productions globales sur des périodes élémentaires relativement importantes (le mois ou le trimestre, par exemple).

Les décisions opérationnelles concernent le détail du fonctionnement du système en temps réel.

Toute décision prise à un niveau devient une contrainte pour les décisions du niveau immédiatement inférieur. Un retour d'information vers les niveaux supérieurs est nécessaire afin de prendre en compte les changements d'états résultant de l'application des décisions (monitoring). Un problème important est de définir l'information à fournir à chaque niveau, sa forme, sa périodicité, son niveau d'agrégation, etc...

Dans ce travail, nous nous intéressons aux décisions tactiques et opérationnelles.

1.2.2 Fonctions de gestion

Nous nous intéressons ici aux différentes fonctions de gestion à court et moyen termes qui correspondent aux décisions tactiques et opérationnelles décrites dans le paragraphe précédent. Une description complète de la structure de gestion et des fonctions de gestion est donnée dans Chassang et Tron [1983], Doumeingts, Breuil et Pun [1983]. Nous donnons un bref résumé des fonctions liées à la fabrication.

Dans la pratique industrielle, la prise des décisions tactiques et opérationnelles peut être divisée en trois phases: planification, programmation, et exécution.

Dans la phase de planification, il s'agit d'établir un *plan directeur de production*. Les décisions portent essentiellement sur la production de familles de produits finis sur un horizon à moyen terme. Elles déterminent quelles sont les familles de produits finis à fabriquer, en quelle quantité et pour quelle date. Cette phase se situe au niveau des décisions tactiques.

La phase de programmation consiste à calculer les besoins en composants et les besoins en capacité en fonction du plan directeur de production. La *planification des besoins en composants* (Material Requirements Planning ou MRP) détermine quels composants et matières premières il faut approvisionner ou fabriquer, en quelle quantité et à quelle date. Ces calculs sont basés sur l'élaboration des gammes de fabrication (ou nomenclatures) des produits finis. A l'issue de la planification des besoins en composants, la *planification des besoins en capacité* détermine les charges de fabrication nécessaires. Ces informations permettent de déterminer le nombre de postes de travail à utiliser, la répartition des opérateurs et le nombre d'heures supplémentaires. Cette phase est largement étudiée dans la littérature et de nombreux logiciels de type MRP sont implantés dans les entreprises (voir Orlicky [1975]). Elle se situe également au niveau des décisions tactiques.

Dans la phase d'exécution, on affronte les détails du déroulement de la fabrication. Dans les activités de la fabrication proprement dite, la fonction d'*ordonnancement d'atelier* a pour objectif d'établir un agenda de fabrication pour chaque poste de travail afin de fabriquer les pièces en temps voulu. Cet agenda est sujet à modifications dues aux aléas du système de fabrication. Une fonction de *suivi d'atelier* a pour rôle l'acquisition des informations sur le déroulement de la fabrication, ce qui permet la modification des agendas de fabrication en cas de perturbations. Cette dernière phase se situe au niveau des décisions opérationnelles.

De nombreux logiciels de gestion de production sont disponibles. Dans ces logiciels, un défaut commun est l'incapacité de planifier la production et d'ordonnancer la fabrication dans chaque atelier en un temps raisonnable et de façon satisfaisante. Nous détaillons dans la suite cet aspect du problème.

1.3 Planification de la production

La planification de la production se situe au niveau des décisions tactiques dans la hiérarchie décrite au paragraphe précédent. Elle a pour rôle de définir un plan de production sur un intervalle de temps appelé l'horizon de planification. On a un carnet de commande ferme et la prévision de la demande future. L'objectif est de satisfaire la demande en minimisant les stocks, les retards de livraison, le coût de fabrication.

En planification de la production, on distingue deux approches fondamentalement différentes: l'approche globale et l'approche hiérarchisée.

1.3.1 Approche globale

Cette approche utilise un modèle monolithique qui décrit l'ensemble du problème de planification de manière détaillée. Elle fournit toutes les décisions sur l'horizon complet.

Le problème de planification est couramment formulé comme un problème de programmation linéaire en variables mixtes. Les procédures par séparation et évaluation basées sur la technique de la relaxation lagrangienne sont souvent utilisées pour obtenir la solution exacte (voir Karmarkar et Schrage [1985]). Cependant, ces procédures sont souvent inacceptables en raison d'un temps de calcul exponentiel. Des méthodes approximatives basées sur des techniques de décomposition sont proposées par de nombreux auteurs, comme Manne [1958], Dzielinski et Gomory [1965], et Lasdon et Terjung [1971]. Malheureusement, on n'est jamais certain d'obtenir une solution admissible.

L'approche globale est sans doute très limitée. Le modèle monolithique conduit souvent à des problèmes de grande taille. A notre connaissance, il n'y a pas de méthodes qui puissent fournir en temps raisonnable le plan de production d'un système réel par une approche globale.

D'autre part, beaucoup de données sont prévisionnelles. La grande quantité de donnée nécessite un système de prévision complexe. Il est sans intérêt de considérer les données de façon détaillée sur l'horizon complet.

1.3.2 Approche hiérarchisée

L'approche hiérarchisée est proposée par de nombreux auteurs. On trouve des états de l'art dans Hax et Meal [1975], Dempster et al. [1981], Gelders et Van Wassenhove [1982], Libosvar [1988]. Cette approche décompose le problème de planification en sous-problèmes. Chaque sous-problème est lié à un niveau dans une hiérarchie. A chaque niveau, les entités sont des agrégats des entités du niveau immédiatement inférieur. L'horizon de planification décroît en descendant dans la hiérarchie. Les décisions correspondant à ces agrégats sont désagrégées au niveau immédiatement inférieur.

Dans le contexte de MRP, Axsäter [1981], Jöhnson [1983] étudient les systèmes hiérarchiques en production et en gestion des stocks. Les gammes de fabrication considérées sont compliquées. Ils s'intéressent à la planification des besoins en composants et à la planification des besoins en capacité de production. Pour cela, ils proposent une approche par agrégation-désagrégation.

Nous détaillons l'approche de Hax et Meal [1975] et les travaux relatifs à cette approche. Ils ont été parmi les premiers à proposer une structure hiérarchisée pour la planification de la production.

Approche de Hax et Meal

Cette approche est étudiée par Hax et Meal [1975], Bitran et Hax [1977], Bitran, Haas et Hax [1981]. Elle est basée sur une agrégation logique des produits. Ils distinguent trois niveaux d'agrégation:

- *articles* correspondant aux produits finis soumis à la demande extérieure
- *familles* correspondant aux groupes d'articles dont le processus de fabrication est identique.
- *types* correspondant aux groupes de familles. Les familles d'un type ont le même coût de fabrication, le même coût de stockage, et la même productivité. Leur demande suit des lois analogues (par exemple, caractère saisonnier).

La planification s'effectue en trois étapes:

- *la première étape* détermine un plan de fabrication pour les types de produits sur l'horizon complet de production. L'horizon de planification prend en compte la fluctuation de la demande. Il varie entre 3 mois et 1 an. Le modèle utilisé est un modèle linéaire qui prend en compte la capacité du système, les heures de travail régulières et supplémentaires, le coût de stockage, le coût de fabrication.
- *la deuxième étape* désagrège la production de chaque type en productions par familles qui constituent ce type. Cette désagrégation est faite uniquement pour la première période de l'horizon. L'objectif retenu est de minimiser la

somme des coûts de lancement de la production des familles qui constituent ce type.

- *la troisième étape* répartit la production agrégée d'une famille entre les articles qui constituent cette famille.

Remarquons que seule la prévision de la demande des types de produits est nécessaire. Bien entendu, la prévision de la demande par type de produits est plus fiable que la prévision de la demande par article. Cela simplifie sans doute la prévision et améliore la fiabilité de la prévision.

Erschler, Fontan et Merce [1985] et Merce [1987] étudient la faisabilité et la robustesse d'un plan agrégé ainsi que la cohérence et la dominance d'une désagrégation. Ils établissent des conditions nécessaires et suffisantes assurant la faisabilité d'un plan agrégé et la cohérence d'un plan détaillé.

Graves [1982] considère une variante de ce problème de planification comportant seulement deux niveaux d'agrégation de produits: familles et types. Il formule ce problème à l'aide d'un modèle linéaire global en variables mixtes. Il propose une procédure qui décompose le problème global en deux sous-problèmes: la planification de la production des types et la détermination de la production par famille. Les deux sous-problèmes correspondent aux niveaux hiérarchiques définis par Hax et Meal [1975]. Cette décomposition est obtenue par relaxation lagrangienne des contraintes assurant la cohérence entre la production des types et la production des familles. Une procédure itérative est proposée pour trouver le meilleur multiplicateur de Lagrange. A chaque itération, la procédure calcule une borne inférieure de la solution optimale et une solution admissible.

1.4 Ordonnancement de la production

L'ordonnancement de la production a pour rôle d'organiser l'exécution des opérations sur les machines dans chaque atelier. Il doit réagir à tout changement non prévu tel que les pannes des machines, les manques de matières premières, l'absence de personnels, etc.

L'ordonnancement de la production est généralement soumis aux contraintes techniques telles que

- une machine exécute au plus une opération à la fois (contrainte d'exclusion mutuelle),
- une opération commencée sur une machine doit être terminée sans interruption sur la même machine (contrainte de non préemption),
- la fabrication d'une pièce nécessite un ensemble d'opérations et les opérations doivent être exécutées dans un ordre spécifique (contrainte de précedence),
- etc.

Dans un problème d'ordonnancement, on a souvent plusieurs objectifs souhaités qui sont parfois contradictoires tels que

- minimiser les en-cours
- minimiser la somme des retards
- maximiser la productivité
- etc.

On trouve dans la littérature une grande diversité de méthodes pour ordonnancer la production en atelier. Pour le besoin de ce travail, nous distinguons deux types d'approches: l'approche globale et l'approche hiérarchisée.

1.4.1 Approche globale

L'approche globale formule le problème d'ordonnancement à l'aide d'un modèle monolithique. Toutes les contraintes y sont prises en compte. Dans la plupart des cas, on s'intéresse au problème déterministe. On trouve des présentations de cette approche dans Baker [1974], Coffman [1976], Graves [1981], French [1982].

Dans le modèle de cette approche, il existe un ensemble de ressources sur lesquelles on réalise un ensemble de travaux. Chaque travail comprend plusieurs opérations. Les opérations doivent être exécutées dans un ordre spécifique. Le problème d'ordonnancement consiste à trouver la localisation temporelle des opérations sur les machines représentée, par exemple, par un diagramme de Gantt (voir la figure 1.3).

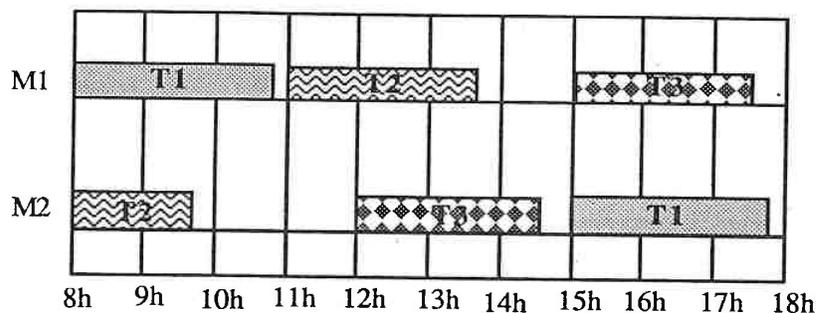


Figure 1.3: Diagramme de Gantt

Souvent, l'ordonnancement de la production peut être formulé comme un problème de théorie des graphes ou de programmation mathématique en variables mixtes. Des procédures par séparation et évaluation et la programmation dynamique sont utilisées pour trouver l'ordonnancement optimal.

L'ordonnancement d'atelier ainsi formulé est connu comme étant NP-difficile, c'est-à-dire que le temps de calcul croît de façon exponentielle avec la taille du problème. C'est pourquoi la plupart des travaux se concentrent sur la recherche de méthodes approchées.

L'approche globale est donc limitée en raison des besoins en temps de calcul. D'autre part, il existe beaucoup d'aléas dans un système réel, par exemple les pannes des machines, le fait que les durées des opérations et des transports ne sont pas déterministes, ... Ces aléas peuvent rendre le diagramme de Gantt ainsi établi non admissible. Il est donc nécessaire de réordonnancer la production.

En résumé, le diagramme de Gantt établi avant la fabrication ne peut pas tenir compte des changements apparus en cours de fabrication. Il devient très vite non utilisable.

Des efforts ont été faits pour limiter le temps de calcul et le besoin de réordonnancement décrit ci-dessus. Parmi ces travaux, Portmann [1987] propose une méthode de décomposition spatiale et temporelle. Non seulement cette méthode permet de diminuer le temps de calcul, mais le fait que cette méthode utilise de manière dynamique une technique de plan glissant offre la possibilité d'absorber partiellement les aléas.

Dans le cas des ateliers de type job-shop, Roubellat et Thomas [1987] définissent sur chaque machine un ensemble ordonné de groupes admissibles d'opérations. Toutes les permutations de ces opérations dans un groupe conduisent à un ordonnancement admissible. Les degrés de liberté introduits permettent d'absorber les aléas faibles comme les manques de matières et les absences courtes des opérateurs.

1.4.2 Approche hiérarchisée

A l'opposé de l'approche globale, l'approche hiérarchisée évite d'établir un diagramme de Gantt pour toutes les opérations. Elle ordonnance la production de manière dynamique.

Un point commun des études par approche hiérarchisée est la reconnaissance de la multiplicité des horizons de temps à considérer pour les différents types de décisions.

Gershwin [1989] résume clairement l'approche hiérarchisée avec les principes suivants:

- 1) Les systèmes de production sont très complexes. Ils sont composés de nombreuses ressources sur lesquelles de nombreux types de produit sont fabriqués. De nombreuses activités apparaissent au cours de la fabrication. Les activités sont contrôlables ou non-contrôlables. L'ordonnancement consiste à organiser l'exécution des activités contrôlables. Le problème d'ordonnancement n'est abordable que s'il est décomposé en sous-problèmes de tailles plus petites.
- 2) Les activités peuvent être regroupées en groupes d'activités en fonction de leur fréquence. Les groupes d'activités forment des bandes de fréquence bien séparées.
- 3) L'ordonnancement n'est applicable que si la capacité du système est respectée en permanence. La capacité est dépassée si un ordonnancement consiste à occuper une ressource à plus de 100% du temps.
- 4) Une hiérarchie est établie d'après les trois principes précédents. Le nombre de niveaux hiérarchiques est choisi égal au nombre de groupes d'activités.

Chaque groupe d'activités est associé à un niveau de la hiérarchie dans l'ordre croissant des fréquences.

- 5) On trouve à chaque niveau un modèle qui décrit de façon détaillée ses propres activités et un modèle agrégé qui décrit les activités des niveaux inférieurs (plus fréquentes). Le contrôle à un niveau consiste à ordonnancer les activités contrôlables du niveau considéré et à sélectionner les fréquences des activités contrôlables des niveaux inférieurs.

Les principes sont respectés dans les études d'ordonnancement par une approche hiérarchisée. Mais la formulation du problème et le contrôle à chaque niveau ne sont pas uniques. Ils dépendent de la nature du problème. Par la suite, nous décrivons cas par cas les études effectuées dans la littérature. Les travaux sont regroupés et présentés sous les noms des auteurs principaux.

Etudes de Hildebrant et Suri

Hildebrant [1980], et Hildebrant et Suri [1980] étudient le contrôle d'un atelier flexible dont les machines sont soumises à pannes. L'atelier flexible étudié comporte un ensemble de machines connectées par des moyens de transport automatisés. Le nombre de palettes disponibles est limité. Plusieurs types de pièces sont fabriqués par le système. Chaque type de pièce peut être fabriqué en utilisant plusieurs gammes de fabrication. Le contrôle consiste à satisfaire une demande donnée dans le plus court délai, c'est-à-dire à minimiser le cycle de fabrication (makespan).

Les études sont basées sur l'hypothèse suivante :

durées des opérations

*<< durées moyennes de fonctionnement et
durées moyennes de réparation des machines*

où "<<" est utilisé pour représenter la relation d'ordre "très petit par rapport à".

Pour chaque état du système, les auteurs utilisent un réseau multiclasse de files d'attente. Les pannes des machines changent le réseau de files d'attente en un nouveau réseau de files d'attente comportant des stations de service différentes.

Ils décomposent le problème d'ordonnancement en sous-problèmes d'optimisation à trois niveaux:

Au niveau haut, ils cherchent à répartir les palettes entre les types de pièce et les différentes gammes de fabrication en fonction de l'état du système de manière à minimiser le cycle de fabrication. A la sortie de ce niveau, on obtient également le débit de production des pièces de chaque type fabriquées par une gamme particulière.

Pour surmonter la difficulté de l'optimisation stochastique, ils supposent que le modèle associé à chaque état peut être décrit par le régime permanent du réseau de files d'attente. Le problème de la répartition des palettes est résolu par une procédure itérative qui résout un problème de programmation non-linéaire à chaque itération. A chaque itération, ils partent d'une répartition initiale des palettes. Ils estiment le temps total pour fabriquer une pièce en suivant une gamme particulière à l'aide de la technique de l'analyse de la valeur moyenne en théorie de files d'attente (voir Reiser et Lavenberg [1978] et Dallery [1984]). En fonction de ces temps estimés, ils répartissent les palettes de manière à minimiser le cycle de fabrication.

Le niveau intermédiaire calcule la séquence d'entrée en fabrication des pièces pour chaque état du système. Il s'agit de maintenir le lancement en fabrication proche des débits de production calculés au niveau haut.

Le niveau bas prend toutes les décisions détaillées telles que

- instants d'entrée des pièces dans le système,
- gammes de fabrication utilisées.

En raison de la complexité du problème, des règles simples qui tiennent compte des décisions prises aux autres niveaux sont utilisées.

Lors de l'implantation de cette méthode, les décisions des deux premiers niveaux sont calculées hors ligne. Seules les décisions du niveau bas sont prises en temps réel. Ce contrôle est donc de type boucle ouverte.

Les résultats de simulation montrent que cette méthode est plus performante que les heuristiques antérieures.

Etudes de Kimemia et Gershwin

Kimemia [1982] et Kimemia et Gershwin [1983] proposent une approche pour le contrôle d'un atelier flexible. Le système considéré comporte un ensemble de machines sur lesquelles plusieurs types de pièces sont fabriqués. Le système est flexible dans le sens où une machine peut enchaîner des opérations différentes avec des temps de préparation négligeables. Les machines peuvent tomber en panne.

Ils supposent que la demande pour chaque type de pièce est constante tout au long de l'horizon d'ordonnement.

Le contrôle d'un tel système consiste à gérer le lancement en fabrication des pièces et le séquençage des pièces dans le système afin que :

- la demande soit satisfaite,
- les en-cours soient petits.

Dans leur travail, ils supposent que les activités qui arrivent au cours de la fabrication satisfont les conditions suivantes:

temps de préparation

<< durées des opérations

<< durées moyennes de fonctionnement normal et de réparation

<< horizon d'ordonnement.

Comme dans l'étude précédente, l'idée essentielle est de séparer les éléments relatifs au long terme (la réponse aux pannes des machines) de l'ordonnement en temps réel.

Ils proposent un contrôle à trois niveaux de manière à anticiper les pannes des machines en temps réel.

Au niveau haut, ils s'intéressent à la régulation des flux de matière. Les flux de matière déterminent une bonne combinaison des pièces à produire simultanément par le système. Les flux de matière sont ajustés en permanence en fonction de l'état des machines et de l'état des stocks afin d'absorber les pannes de machines. Ce niveau est appelé contrôle de flux.

Au niveau intermédiaire, un algorithme de routage détermine les proportions de pièces qui suivent une gamme particulière. Les auteurs modélisent le système comme un réseau de files d'attente. Ils déterminent les proportions des routages de manière à minimiser les blocages et les temps d'attente des pièces. Ce niveau est appelé contrôle de routage.

Au niveau bas, il s'agit de déterminer les instants auxquels les pièces sont lancées en fabrication et le choix des gammes pour chaque pièce individuelle. Des règles simples qui tiennent compte des choix des niveaux supérieurs sont utilisées. Ce niveau est appelé lancement et séquençement.

Le contrôle est de type boucle fermée. A chaque instant, l'état des machines et l'état des stocks sont pris en compte dans le calcul du flux de matières.

Il est à noter que dans leur réalisation, les machines qui peuvent faire la même opération sont identiques. Par conséquent, le problème de routage des pièces disparaît. Les auteurs se concentrent sur le contrôle de flux.

Au niveau du contrôle de flux, la fabrication est considérée comme un processus continu. La production est déterminée par les débits de production à chaque instant. Ces débits de production sont les variables de contrôle.

Chaque machine se trouve soit en état de marche soit en panne. Les transitions entre les états des machines sont modélisées comme un processus de Markov. A chaque instant, les débits de production sont limités par la capacité de production de l'ensemble des machines en état de marche. La capacité de production du système dépend de l'état des machines.

L'accumulation de produits dans le système est strictement interdite. Ceci assure que la politique du contrôle de flux peut être réalisée par l'ordonnancement en temps réel avec des en-cours faibles. Cette hypothèse permet la fabrication à flux tendu.

Le contrôle de flux consiste à minimiser la différence cumulée entre la production et la demande. Il est modélisé comme un problème de contrôle optimal pour un système soumis à des perturbations markoviennes. Ce problème est étudié par de nombreux auteurs, Rishel [1975], Olsder et Suri [1980]. Ils montrent que la politique de contrôle optimale satisfait l'équation partielle de Bellman.

Nous signalons que les fonctions de coût jouent un rôle essentiel dans le calcul des politiques de contrôle optimal. Si les fonctions de coût sont connues, la politique de contrôle optimal peut être calculée à l'aide d'un problème de programmation linéaire.

Dans leur travail, Kimemia et Gershwin calculent les fonctions de coût hors ligne par la technique de programmation dynamique. Le principe d'optimalité est appliqué pour calculer le contrôle optimal en temps réel.

Pour un état des machines dans lequel la demande est réalisable, ils montrent que le contrôle optimal conduit l'état des stocks vers un état stable, appelé "point de séparation" (hedging point). Quand cet état stable est atteint, le contrôle optimal consiste à maintenir l'état des stocks à cet état stable. On peut comparer ce point de séparation avec le stock de sécurité, dans la gestion classique de stock. Ce stock est établi pour absorber les aléas qui sont les pannes des machines dans ce contexte.

Ils constatent une singularité dans leur contrôle: le contrôle optimal bascule périodiquement entre deux politiques de contrôle.

Gershwin, Akella et Choong [1985] se concentrent sur un cas restrictif où chaque opération est faite sur une machine spécifique. Ils diminuent sensiblement les besoins en calcul. Leur contribution se résume par les trois points suivants:

1. Ils introduisent l'approximation quadratique des fonctions de coût dans l'équation partielle de Bellman. Ils proposent des techniques pour calculer les points de séparation et les paramètres des fonctions de coût.
2. Ils montrent que le contrôle optimal est constant par morceaux dans le temps. A chaque instant, ils calculent le contrôle optimal et la durée d'application de ce contrôle. Ceci diminue sensiblement les besoins en calcul et la singularité du contrôle est évitée.
3. Au niveau du lancement et du séquençement, ils proposent des règles efficaces et faciles à implanter.

Cette approche améliorée est implantée dans la simulation d'une cellule d'assemblage de circuits intégrés (voir Akella, Choong, et Gershwin [1984]). Comparée aux autres politiques de contrôle, elle donne des résultats très satisfaisants.

Maimon et Gershwin [1988] étendent l'approche de Kimemia et Gershwin aux systèmes plus généraux dans lesquels une opération peut être faite par différentes machines avec des durées différentes, c'est-à-dire des machines non identiques en parallèle. Ils établissent le modèle de contrôle et déduisent l'équation partielle de Bellman.

Akella et Kumar [1986] étudient le problème avec un seul type de pièce et une seule machine. Ils montrent qu'il existe effectivement un état du stock idéal (ou point de séparation) vers lequel l'état du stock converge. La politique optimale de contrôle consiste à produire à la capacité maximale si l'état du stock est inférieur à l'état du stock idéal, à ne rien produire si l'état du stock est supérieur à l'état idéal et à produire au débit de la demande si l'état idéal est atteint. Ils obtiennent également la solution analytique de l'état du stock idéal.

Bielecki et Kumar [1988] s'intéressent au même problème. Ils montrent que le meilleur point de séparation peut être zéro. Ceci implique que la politique "zéro-stock" peut être optimale même en présence d'aléas. Ils établissent les conditions nécessaires et suffisantes assurant l'optimalité de la politique "zéro-stock".

Sharifnia [1988] s'intéresse également au problème avec un seul type de pièce. Mais, le système a plusieurs états de fonctionnement. A chaque état, la production est limitée par un débit maximal. Etant donné les points de séparation de chaque état, il établit des équations pour évaluer la performance. Par conséquent, les meilleurs points de séparation sont obtenus par l'optimisation de la performance.

Etudes de Choong

Choong [1988] étudie l'ordonnancement de la production par lots. Le système de production comporte un ensemble de machines sur lesquelles plusieurs types de pièce sont fabriqués. Chaque type de pièce est fabriqué successivement par un sous-ensemble de machines. Une machine nécessite un temps de préparation pour passer d'un type d'opération à un autre.

Il s'agit de déterminer les tailles des lots et leur date de lancement en fabrication afin qu'une demande aléatoire soit satisfaite et que le cycle de production soit petit.

Il suppose que la demande arrive de manière continue. La demande pour chaque type de pièce peut arriver à plusieurs débits constants et la transition entre ces débits est modélisée comme un processus de Markov. Par conséquent, la demande peut être également modélisée comme un processus de Markov. Dans chaque état, le débit de la demande pour chaque type de pièce est constant.

Ce travail est basé sur l'hypothèse suivante:

durées de fabrication des lots

<< longueurs des périodes sur lesquelles la demande est constante

Il propose une structure de contrôle qui traite la fluctuation de la demande et l'ordonnancement de lots à deux niveaux.

Au niveau haut, il s'agit d'ajuster les débits de production et les fréquences de lancement en fabrication pour chaque type de pièce. Les capacités des machines, pour la fabrication des pièces et pour la préparation de fabrication des lots, sont représentées sous forme agrégée. Le contrôle de flux consiste à minimiser la différence cumulée entre la production et la demande aléatoire. Il est modélisé comme un problème de contrôle optimal pour un système soumis à des perturbations markoviennes.

Au niveau bas, il s'agit de déterminer les tailles des lots et leur date de lancement en fabrication. Ces choix doivent se conformer aux débits de production et aux fréquences de lancement du niveau haut. Le séquençement des lots dans le système est fait par une règle simple, PAPS (premier arrivé premier servi).

Les résultats de simulation montrent que les stocks et les retards de livraison sont faibles et le temps de cycle est petit par rapport aux autres heuristiques.

Etudes de Gershwin

Actuellement, Gershwin [1987a, b], Gershwin, Caramanis et Murray [1988] s'intéressent au contrôle des systèmes de production avec des temps de préparation importants. Les machines peuvent tomber en panne. La demande

pour chaque type de pièce arrive à un débit constant. Le contrôle consiste à ordonnancer les lancements en fabrication et l'exécution des opérations sur les machines de manière à satisfaire la demande à un coût minimal.

Il y a trois types d'activités de fabrication: les opérations, les réglages des machines et les pannes des machines. Les opérations et les réglages des machines sont des activités contrôlables tandis que les pannes des machines sont des activités non contrôlables. Les activités sont regroupées en fonction de leur fréquence.

Ils proposent une hiérarchie dont le nombre de niveaux est égal au nombre de groupes d'activités. Chaque groupe d'activités est associée à un niveau de la hiérarchie dans l'ordre croissant des fréquences.

A chaque niveau, les activités des niveaux inférieurs (plus fréquentes) sont considérées comme des activités continues. Les pannes des niveaux inférieurs sont absorbées en corrigeant les disponibilités des machines correspondantes.

Les activités des niveaux supérieurs ne sont jamais remises en cause.

A chaque niveau, le contrôle consiste à sélectionner: 1) les temps d'exécution des activités contrôlables du niveau considéré; 2) les fréquences des activités contrôlables des niveaux inférieurs.

Dans leur travail, ils testent différentes règles pour ordonnancer les activités contrôlables.

Nous terminons ce chapitre par une brève présentation de travaux qui intègrent la planification et l'ordonnancement de la production. En utilisant les méthodes d'analyse des automaticiens, Gershwin, Hildebrant, Suri et Mitter [1986] décrivent de manière intégrée les différents problèmes de planification et d'ordonnancement dans un système de production. Récemment, Meier [1989] a proposé une structure de contrôle à deux niveaux qui intègre la planification et l'ordonnancement de la production. Le niveau supérieur effectue la planification de la production avec un modèle continu à temps discret. La planification de la production est modélisée comme un problème de programmation linéaire. Ce modèle tient compte des coûts de stockage, des coûts de retard et des coûts d'utilisation des machines. L'ordonnancement de la production est fait à l'aide de règles simples.

CHAPITRE 2

Définition du Problème et Conception de la Hiérarchie

Ce chapitre a pour but de spécifier le système de production étudié dans cette thèse et de présenter le problème de contrôle dans un tel système. Le système considéré fabrique plusieurs types de produits. On suppose que le système peut être configuré de différentes façons en fonction des familles de produits à fabriquer simultanément. Quelle que soit la configuration, la fabrication peut être perturbée par des pannes de machines.

Ce chapitre propose une hiérarchie à trois niveaux. Au niveau haut, on cherche à déterminer une suite de configurations, la durée et la production de chaque configuration. Au niveau intermédiaire, on cherche à définir le flux de matières à travers le système lors de la fabrication dans une configuration. Les pannes des machines sont prises en compte à ce niveau. Au niveau bas, il s'agit d'ordonnancer la fabrication des pièces en temps réel lors de la fabrication dans une configuration. Cet ordonnancement en temps réel doit respecter le plan de fabrication du niveau intermédiaire.

2.1 Introduction

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe SAGEP (Simulation et Analyse des systèmes de GEstion de Production) de l'INRIA-LORRAINE où plusieurs chercheurs s'intéressent à la gestion hiérarchisée de la production. Dans une communication récente, Hillion et Proth [1988] proposent une structure conceptuelle de Systèmes de Gestion de Production Hiérarchisée (SGPH). Les systèmes de gestion de production hiérarchisée sont utilisés pour simplifier la prise de décisions en la remplaçant par une suite de prises de décisions plus simples.

Leur conception de la hiérarchie part de lois de comportement: lois de comportement des demandes et lois de comportement des ressources utilisées. Elle dépend à la fois des aléas endogènes et exogènes, et de la complexité du système.

La figure 2.1 schématise la structure de cette hiérarchie. La figure 2.2 schématise le contrôle dans la hiérarchie.

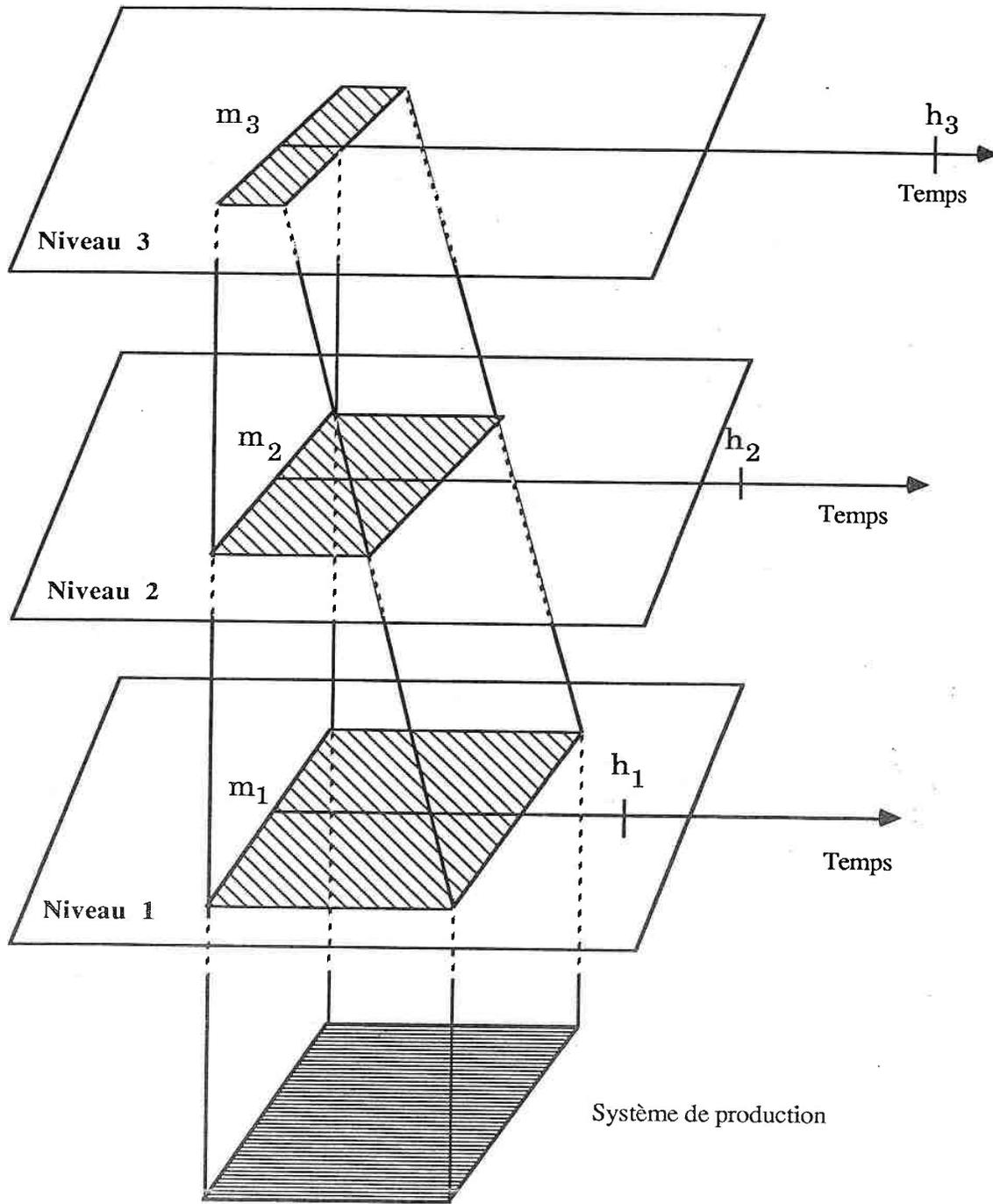
Un SGPH comporte un certain nombre de niveaux hiérarchiques. Ce nombre est d'autant plus grand que le système est complexe et que les aléas qu'il subit sont variés au sens de leur fréquence.

A chaque niveau de la hiérarchie se trouve un modèle composé d'entités caractérisées par des attributs, et reliées entre elles. A chacun de ces modèles est associé un (ou plusieurs) critères et un ensemble de décisions possibles.

A chaque niveau de la hiérarchie correspond un horizon qui est l'intervalle de temps sur lequel on cherche le contrôle optimal.

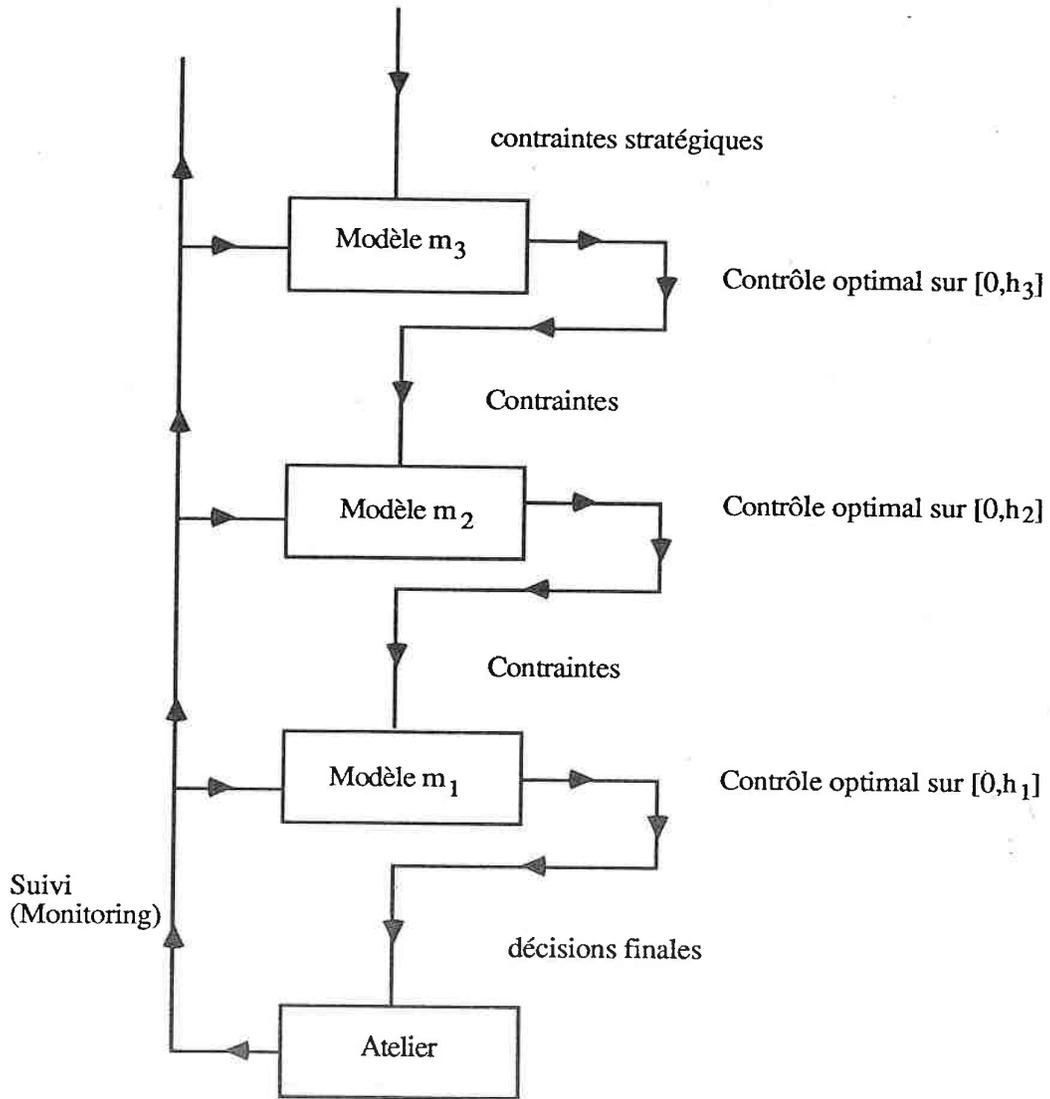
L'horizon associé à chaque niveau est d'autant plus important que le niveau est élevé. Le modèle est d'autant plus réduit en taille que le niveau hiérarchique est élevé: à un niveau donné, une entité est obtenue par agrégation d'entités du niveau immédiatement inférieur.

Les niveaux de la hiérarchie sont liés entre eux: le contrôle à un niveau donné fournit les contraintes à appliquer à la recherche du contrôle optimal au niveau immédiatement inférieur.



h_i ; $i = 1,2,3$: Horizon du niveau i
 m_i ; $i = 1,2,3$: Modèle du niveau i

Figure 2.1: Structure de la hiérarchie proposée par Hillion et Proth [1988]



$h_i ; i = 1,2,3$: Horizon du niveau i

$m_i ; i = 1,2,3$: Modèle du niveau i

Figure 2.2 : Contrôle dans la hiérarchie

L'horizon retenu dans leur travail est le plus petit intervalle de temps sur lequel tous les produits (ou toutes les familles de produits) voient leur demande satisfaite avec une probabilité donnée.

Le passage d'un niveau donné au niveau immédiatement supérieur est basé sur trois agrégations.

La première agrégation consiste à agréger les aléas peu importants par rapport à l'horizon de planification en corrigeant les capacités des machines soumises à ces aléas. A partir de cet instant, les machines correspondant à ces aléas sont considérées comme parfaitement fiables.

La deuxième agrégation consiste à agréger dans une même famille tous les produits dont les processus de fabrication sont similaires.

La troisième agrégation consiste à agréger dans un même sous-système de fabrication toutes les machines qui assurent la fabrication des mêmes familles de produits.

La construction de la hiérarchie se termine lorsque l'une des situations suivantes est obtenue:

- tous les produits sont regroupés en une seule famille
- et/ou - toutes les machines sont regroupées en un seul sous-système.

Le travail présenté dans cette thèse peut être considéré comme un pas vers la gestion de production hiérarchisée décrite ci-dessus. Dans notre travail, nous ne considérons ni l'agrégation de produits ni l'agrégation de machines, car nous nous intéressons plus spécialement aux niveaux les plus bas correspondant à l'ordonnancement détaillé à "court terme". Seules l'agrégation des aléas et l'agrégation des activités de fabrication sont étudiées. En d'autres termes, nous considérons uniquement l'agrégation du temps.

2.2 Spécification du système de production

Le système de production étudié comporte des ressources de production qui permettent de fabriquer différents types de pièce. Les ressources de fabrication sont des machines à commande numérique, des machines classiques, des moyens de transport (chariots, palettes), etc. Nous détaillons par la suite les différents aspects du système.

Conditions nécessaires de la fabrication

Théoriquement, les ateliers dits "flexibles" (Flexible Manufacturing Systems) sont conçus de manière à fabriquer une grande diversité de produits complémentaires du point de l'utilisation des machines. Ceci permet en particulier de maximiser la charge des machines.

Pour que le gain en productivité soit réel, il est en particulier nécessaire que les temps de réglage soient négligeables. En pratique, ces temps de réglage ne sont pas toujours négligeables. Nous nous plaçons dans cette hypothèse et proposons en conséquence de regrouper les produits en familles dans le but de minimiser les temps de changement d'outils.

Les pièces d'une même famille partagent les mêmes outils, les mêmes programmes sur les machines à commande numérique, etc... Lors de la fabrication des pièces d'une même famille, une machine peut passer de la fabrication d'une pièce à la fabrication d'une autre pièce sans changement important. Par contre, quand un atelier passe de la fabrication d'une famille à la fabrication d'une autre famille, des changements considérables dans la configuration du système sont nécessaires.

On appelle **configuration** l'état de l'atelier capable de prendre en charge une famille au sens précédent.

Dans la pratique, de nombreux logiciels de classification automatique ont été développés pour trouver les types de pièces qui partagent la même configuration des ressources. Les pièces de la même famille sont ensuite fabriquées conjointement. En faisant cela, on constate que les temps de réglage des machines diminuent sensiblement, ce qui améliore l'efficacité de la fabrication.

Plus précisément, dans une configuration :

- * les machines à commande numérique sont chargées avec des programmes de fabrication donnés,
- * les machines classiques sont réglées pour la fabrication de la famille,
- * les outils nécessaires à la fabrication de la famille sont montés,
- * les moyens de transport nécessaires à la fabrication de la famille sont présents,
- * etc.

Une condition nécessaire à la fabrication d'un type de pièce est que le système se trouve dans une configuration relative à ce type de pièce.

Nous supposons qu'il existe un nombre fini de configurations du système.

Nous supposons également que le passage de la fabrication d'une pièce à la fabrication d'une autre pièce de la même famille ne nécessite pas de temps de changement d'outils.

Processus de fabrication

On trouve dans la littérature des définitions complètes d'un processus de fabrication. Dans notre étude, nous ne considérons pas les opérations d'assemblage ni les opérations de désassemblage. La prise en considération de ces deux types d'opération ne poserait pas de difficulté théorique, mais elle alourdirait la présentation.

Chaque type de pièce est obtenu par un ensemble d'opérations. Les opérations doivent être faites dans un ordre spécifique que nous appelons la **gamme de fabrication**.

Capacité des machines

Nous définissons la capacité d'une machine en tenant compte à la fois de la diversité des opérations qu'elle sait effectuer et de la rapidité de leur exécution.

La capacité d'une machine est d'abord le nombre d'opérations différentes qu'elle est capable d'exécuter. Nous ne donnons aucune limite à ce nombre. Si ce nombre est supérieur à un, la machine est dite polyvalente. Sinon, elle est dite spécifique à

un type d'opération.

La capacité d'une machine est aussi la cadence à laquelle la machine effectue les opérations. Aucune limite n'est donnée sur cette cadence. Deux machines capables d'effectuer un même type d'opération peuvent faire ce type d'opérations à des cadences différentes.

La fabrication dans une configuration est donc de type **job-shop généralisé**. Lorsque toute opération ne peut être faite que par une seule machine, la fabrication dans une configuration est du type **job-shop**.

Demande

Dans les problèmes d'ordonnancement d'atelier, la demande est donnée par une liste des ordres qui indiquent les types de pièces demandés, les quantités et les dates de livraison.

Cette demande est le résultat de la planification tactique (ou planification à "moyen terme") et de la planification des besoins en composant.

2.3 Décisions à prendre

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'ordonnancement de la production à court terme. Ce travail a pour but de développer des algorithmes d'ordonnancement qui permettent de réagir en temps réel aux aléas du système.

L'ordonnancement de la production consiste à affecter les ressources aux différents types de pièce. Il se traduit par la prise d'un ensemble de décisions. L'objectif global est de satisfaire la demande à un coût minimal. La prise de l'ensemble des décisions doit être intégrée autour de cet objectif. Cet objectif global est la combinaison de deux objectifs contradictoires: minimiser les stocks (en-cours et produits finis) et minimiser les retards de livraison. Nous examinons ci-dessous les différents types de décision.

Configuration du système

Le choix de la configuration du système définit l'environnement dans lequel la production va se dérouler. Ce choix est primordial dans notre problème, car il

détermine la famille de pièce que le système va pouvoir produire. Ce choix contraint les autres décisions.

Les décisions concernent le choix de la configuration, sa durée et la production totale à réaliser au cours de la configuration choisie. Ces décisions doivent répondre à l'objectif de minimisation des stocks et des retards.

Lancement en fabrication

Après avoir choisi la configuration du système, la première décision concerne les instants de lancement en fabrication des pièces correspondantes.

Les pièces ne doivent pas être lancées trop fréquemment en fabrication, car cela ne peut que causer l'accumulation des pièces dans le système, donc conduire à des en-cours excessifs. La fréquence d'entrée des pièces dans le système ne doit pas être trop faible non plus, car cela diminuerait la capacité du système. Cette fréquence d'entrée doit être choisie en fonction de la capacité des machines.

Le lancement en fabrication des pièces doit prendre en compte l'état des machines. Si une machine tombe en panne, les pièces en cours de fabrication qui ont besoin de cette machine s'accumulent dans le système.

Routage et Séquencement des pièces

Le troisième type de décision concerne le cheminement des pièces dans le système. Deux choix sont à faire pour les pièces en cours de fabrication: 1) un choix de machine pour chaque pièce qui peut être prises en charge par plusieurs machines; 2) un choix de pièce lorsque plusieurs pièces sont en attente devant une machine libre.

Le premier choix est appelé le routage des pièces. La nécessité de ce choix est due à la diversité des capacités des machines. Si les pièces sont toujours fabriquées par des machines lentes, la capacité du système n'est pas utilisée au mieux et la durée totale de fabrication d'une pièce est plus longue que si les pièces étaient fabriquées par des machines rapides. Par conséquent, non seulement la demande ne peut pas être satisfaite, mais encore les en-cours vont être importants.

Le deuxième choix est appelé le séquencement des pièces. Un choix adéquat de l'ordre d'exécution des opérations permet de diminuer les en-cours.

2.4 Conception de la hiérarchie

La conception de la hiérarchie que nous allons proposer est basée sur l'hypothèse suivante:

Durées des opérations

<< *Durées de fonctionnement normal et de réparation des machines*

<< *Durées des configurations.*

Nous allons examiner cette hypothèse. D'après cette hypothèse, les machines tombent en panne et sont réparées plusieurs fois au cours de la période d'activité d'une configuration. Par conséquent, nous ne prenons pas en compte les pannes importantes. Cette hypothèse est justifiée par le fait que les pannes importantes ne peuvent pas être absorbées par la gestion à court terme. La prise en considération de ces pannes importantes dépasse l'horizon du court terme. Par contre, les pannes fréquentes par rapport aux durées des configurations peuvent être absorbées par une gestion adéquate.

Nous supposons également que les durées des opérations sont beaucoup plus courtes que les durées de fonctionnement et de réparation des machines. Cette hypothèse est justifiable dans beaucoup de cas pratiques. La panne d'une machine change considérablement les possibilités de fabrication des pièces.

Dans cette étude, nous développons une hiérarchie de planification et contrôle en temps réel à trois niveaux. Le premier niveau établit la séquence des configurations et détermine la production à chaque configuration. Le second niveau est le contrôle de flux de matière et le troisième niveau le contrôle opératoire. Le niveau du séquençement des configurations peut être considéré comme le niveau immédiatement inférieur du niveau de la planification tactique dans la hiérarchie proposée par Antony [1965].

La figure 2.3 schématise cette hiérarchie. Cette approche peut être intégrée dans les logiciels du MRP afin d'améliorer la fonction ordonnancement d'atelier. Le MRP classique calcule les besoins pour chaque atelier et notre travail permet de satisfaire ces besoins à un coût raisonnable.

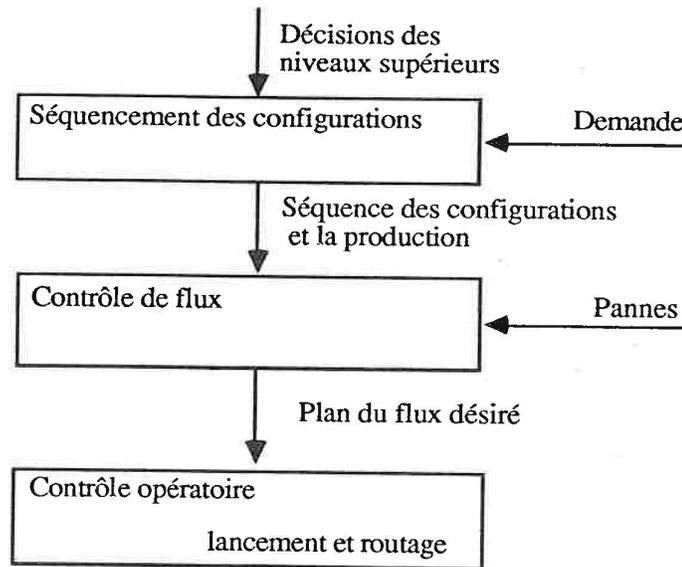


Figure 2.3: Structure de contrôle

Au niveau du séquencement des configurations, il s'agit d'établir un ordonnancement des configurations et de définir les volumes à produire durant chaque configuration afin de satisfaire la demande. A ce niveau, les pannes des machines et les opérations sont considérées comme infiniment fréquentes. Seule la capacité agrégée de production est considérée, elle prend en compte en moyenne l'existence des pannes.

Au niveau du contrôle de flux, la configuration est fixée et une seule famille de pièces est considérée. Le contrôle de flux consiste à réaliser la production de la famille demandée par le niveau supérieur en tenant compte des pannes de manière discrète et en maintenant les en-cours à des niveaux raisonnables.

Le nombre d'opérations comparé au nombre de pannes est suffisamment grand pour que la fabrication puisse être considérée comme un processus continu.

Les pannes des machines sont prises en compte et modélisées comme des processus de Markov. La production d'un type de pièce demandée par le niveau supérieur est exprimée sous forme d'un débit constant de la demande tout au long de la durée de la configuration.

Généralement, la panne d'une machine diminue la capacité de fabrication du système. Par conséquent, les demandes de certains types de pièce sont retardées.

Après la réparation de la machine, ces retards seront rattrapés.

Le contrôle de flux consiste à ajuster en permanence le flux de matières afin d'absorber les effets des pannes. Cet ajustement doit être fait en boucle fermée en prenant en compte l'état des machines et l'écart entre la demande et la production. Il doit respecter en permanence la capacité de production du système.

La figure 2.4 illustre le rôle du contrôle de flux. Dans cet exemple, nous nous concentrons sur la fabrication d'un type de pièce. Le niveau supérieur décide de fabriquer U_p pièces de type p pendant une période T_p . Cette quantité est répartie de façon uniforme sur l'horizon T_p . A cause des pannes des machines, la production cumulée $V_p(t)$ ne peut pas suivre exactement la demande cumulée $D_p(t)$. Le rôle du contrôle de flux est de minimiser l'écart entre la production cumulée et la demande cumulée. En particulier, la figure 2.4 montre que l'on a intérêt à anticiper les effets des pannes (ce qui est illustré par une pente de V_p plus forte que celle de D_p à partir de l'instant $t=0$).

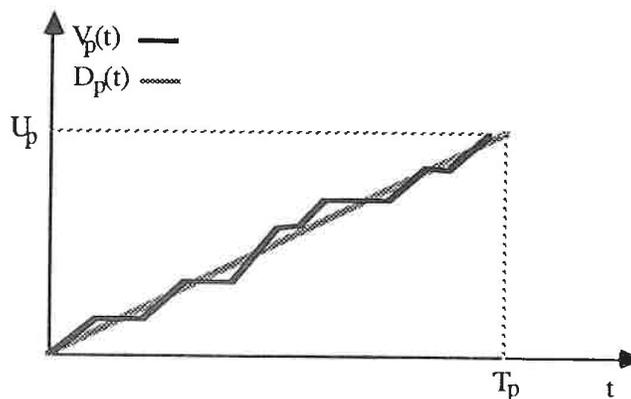


Figure 2.4: Rôle du contrôle de flux

Au niveau de contrôle opératoire, on cherche à ordonnancer en temps réel la fabrication de manière à respecter la politique de contrôle de flux. Les pièces doivent être lancées en fabrication à une cadence conforme à la politique de contrôle de flux. Le suivi de la fabrication des pièces doit permettre de minimiser les en-cours du système.

Dans la suite de la thèse, nous allons examiner successivement la construction de modèles et les problèmes de contrôle à ces trois niveaux.

CHAPITRE 3

Séquencement des Configurations du Système

Dans ce chapitre, nous étudions le problème du séquencement des configurations du système. Ce problème se situe au niveau le plus élevé de la hiérarchie du court terme introduite dans le chapitre 2.

Un modèle en temps discret est établi dans le paragraphe 3.1. Dans ce modèle, les pannes des machines et les opérations sont considérées comme très fréquentes. Par conséquent, seul le régime permanent est considéré. Une seule configuration est permise dans chaque période élémentaire. Le problème du séquencement des configurations consiste à trouver la meilleure séquence de configurations et la production de chaque période. Nous formulons ce problème en termes de programmation mathématique en variables mixtes.

Compte tenu de la difficulté des problèmes de programmation mathématique en variables mixtes, une heuristique itérative est proposée dans le paragraphe 3.2. A chaque itération, on cherche à améliorer localement la séquence de configurations.

Dans le paragraphe 3.3, nous nous intéressons à la planification de la production lorsque la séquence de configurations est donnée. Dans notre modèle, la planification de la production pour les différents types de pièce peut être décomposée en sous-problèmes indépendants lorsque la séquence de configurations est donnée. Pour chaque sous-problème concernant un seul type de pièce, nous montrons qu'il existe un niveau idéal du stock pour chaque période et que la politique optimale de production consiste à conduire l'état du stock vers ce niveau idéal.

On trouvera des exemples numériques dans le paragraphe 3.4.

3.1 Modèle pour le séquençement des configurations

Cette section est consacrée à la modélisation du problème du séquençement des configurations. Le paragraphe 3.1.1 décrit les principales propriétés du modèle. Nous définissons les données caractérisant le système dans le paragraphe 3.1.2. Nous introduisons les variables de contrôle et l'état du système dans le paragraphe 3.1.3 et construisons les contraintes de la capacité de production dans le paragraphe 3.1.4. Le paragraphe 3.1.5 définit l'indice de performance d'une politique de contrôle. Le modèle pour le séquençement des configurations est établi au paragraphe 3.1.6.

3.1.1 Introduction

Conformément aux hypothèses du travail et à la conception de la hiérarchie du court terme, on trouve au niveau le plus élevé de cette hiérarchie le séquençement des configurations du système. Nous distinguons ici un nombre fini de configurations telles qu'elles ont été définies au chapitre précédent. Dans chaque configuration, une seule famille de pièce peut être fabriquée. Le séquençement des configurations consiste à trouver une suite de configurations avec leur durée.

A ce niveau, on doit également choisir la quantité de pièces à fabriquer dans chaque configuration. Mais les décisions détaillées telles que les lancements en fabrication et l'affectation des pièces aux machines ne sont pas prises en compte.

Les pannes des machines et les opérations sont supposées très fréquentes. Aussi, la fabrication peut être considérée comme un processus déterministe dès que l'on a corrigé les capacités des machines en fonction des taux de pannes. Les contraintes de la fabrication discrète telles que les contraintes de précédence, les contraintes d'exclusion mutuelle des opérations et les contraintes de non préemption sont négligées.

Nous utilisons un modèle en temps discret. L'horizon de planification est décomposé en périodes de même longueur. Nous supposons qu'une seule configuration est permise dans chaque période élémentaire. Le problème du séquençement des configurations consiste à déterminer la configuration du système et la production de chaque période.

Dans les modèles en temps continu, la demande est toujours modélisée comme un débit constant ou variable. En réalité, les demandes des clients arrivent à des

instants discrets et doivent être livrés à des instants discrets. C'est pourquoi, le modèle en temps discret est mieux adapté pour modéliser la demande.

Le modèle en temps discret permet une certaine flexibilité aux autres niveaux de la hiérarchie. Lors de la réalisation en temps réel de la production d'une période, la durée effective de la fabrication sera plus ou moins longue selon le nombre réel de pannes. Mais la durée d'une période élémentaire du modèle en temps discret peut être allongée en faisant appel par exemple à des heures supplémentaires. Cette possibilité assure la parfaite faisabilité en temps réel des volumes de production choisis au niveau du séquençement des configurations.

L'hypothèse d'une seule configuration dans chaque période élémentaire correspond bien à la pratique des entreprises. De nombreux changements de configurations impliquent non seulement la perte de productivité, mais aussi la présence des opérateurs spécialisés pour le réglage des machines. De plus, chaque changement de configurations est généralement suivi par un régime transitoire (ou montée en régime) pendant lequel des pièces sont rejetées en raison de leur mauvaise qualité (rebuts de réglage). C'est pourquoi, on limite souvent le nombre de changements de configurations pendant une journée.

3.1.2 Définitions et notations

Nous définissons dans ce paragraphe les données caractérisant le système de production.

Le système de production fabrique N types de pièce. L'horizon de planification est décomposé en T périodes élémentaires de longueur Δ .

Une configuration est un état du système dans lequel des pièces d'une même famille de pièce peuvent être fabriquées simultanément. Nous supposons que le nombre de configurations est fini et le notons Q .

Pour simplifier les notations, nous notons :

$$Q := \{1, 2, \dots, Q\}, \mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}, \text{ et } \mathcal{T} := \{1, 2, \dots, T\}$$

les ensembles d'indices correspondants respectivement aux configurations, aux types de pièce et aux périodes.

Sous une configuration, le système peut fabriquer une famille de pièces. Pour $i \in Q$ et $n \in \mathcal{N}$, nous définissons un paramètre bivalent C_{in} qui indique si une pièce de type n peut être fabriquée sous la configuration i de la manière suivante:

$$C_{in} = \begin{cases} 1 & \text{si une pièce de type } n \text{ peut être fabriquée sous la configuration } i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout couple $(i, j) \in Q \times Q$, nous notons S_{ij} le temps de réglage pour passer de la configuration i à la configuration j . Par convention, $S_{ii} = 0$ pour tout $i \in Q$.

Nous notons :

$$S := [S_{ij}]_{(i,j) \in Q \times Q}$$

la matrice des temps de réglage. C'est une matrice carrée.

Nous supposons que le temps de réglage est toujours plus petit que la longueur d'une période élémentaire, i.e.

$$S_{ij} \leq \Delta \quad \forall (i, j) \in Q \times Q$$

Ainsi, nous avons défini tous les paramètres connus du système de production sauf les paramètres concernant la cadence de fabrication sous chaque configuration. Dans le paragraphe 3.14, nous introduisons les capacités maximales pour chaque type de pièce et pour chaque configuration.

3.1.3 Variables de contrôle et état du système

Dans le problème du séquençement des configurations, le contrôle concerne le choix des configurations et la production de chaque période élémentaire. L'état du système est composé de l'état des stocks et de la configuration du système.

Nous supposons que la demande sur l'horizon T est connue ainsi que la configuration initiale du système et l'état initial des stocks. Ces quantités connues sont notées de la manière suivante:

- d_{tn} ($t \in \mathcal{T}$ et $n \in \mathcal{N}$) représente la demande de pièces de type n à livrer à la fin de la période t ,

- \mathbf{x}_{0n} ($n \in \mathcal{N}$) représente le stock initial de pièces de type n ,
- ω_{0i} ($i \in Q$) est un nombre bivalent qui indique si le système est initialement sous la configuration i de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \omega_{0i} &= 1 && \text{si le système est initialement sous la configuration } i, \\ &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Nous notons $\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0Q})$ le vecteur configuration initiale.

Les variables de contrôle et les variables d'état du système sont inconnues. Ce sont les suivantes:

- u_{tn} ($t \in \mathcal{T}$ et $n \in \mathcal{N}$) nombre réel positif qui représente la production de pièces de type n pendant la période t ,
- x_{tn} ($t \in \mathcal{T}$ et $n \in \mathcal{N}$) nombre réel qui représente l'état du stock en pièces de type n à la fin de la période t ,
- ω_{ti} ($t \in \mathcal{T}$ et $i \in Q$) nombre bivalent indiquant si le système est sous la configuration i pendant la période t de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \omega_{ti} &= 1 && \text{si le système est sous la configuration } i \text{ durant la période } t, \\ &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Les variables u_{tn} sont des variables de contrôle. Les variables ω_{ti} sont à la fois des variables de contrôle et des variables d'état du système. Les variables x_{tn} sont des variables d'état du système. Le problème du séquençement des configurations consiste à déterminer les variables de contrôle de façon à optimiser des critères que nous allons définir.

Nous notons :

$$\omega_t := (\omega_{t1}, \omega_{t2}, \dots, \omega_{tQ})$$

le vecteur configuration de la période t . Les vecteurs $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T$ définissent donc la séquence de configurations sur l'horizon de planification.

Nous désignons par :

$$\mathbf{u}_t := (u_{t1}, u_{t2}, \dots, u_{tN})$$

le vecteur production de la période t . Une politique de contrôle au niveau du séquençement des configurations se traduit par une séquence de configurations $\{\omega_t, t \in \mathcal{T}\}$ et un plan de production $\{u_t, t \in \mathcal{T}\}$.

Puisqu'une seule configuration est admise dans chaque période, les variables ω_{ti} sont soumises aux contraintes suivantes :

$$\sum_i \omega_{ti} = 1 \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.1)$$

Les variables d'état du système x_{tn} sont déterminées par :

$$x_{tn} = x_{t-1n} + u_{tn} - d_{tn} \quad \forall t \in \mathcal{T} \text{ et } \forall n \in \mathcal{N} \quad (3.2)$$

Si x_{tn} est positif, il existe réellement un stock à la fin de la période t . Si x_{tn} est négatif, il y a retard de livraison.

3.1.4 Contraintes sur la capacité de production

La capacité de production sur une période dépend de deux facteurs: l'un est le temps disponible pour la fabrication, l'autre est la cadence maximale à laquelle le système produit les pièces.

Soit Δ_t le temps disponible pour la fabrication pendant la période t . Pour calculer Δ_t , une période élémentaire Δ est décomposée en deux parties: le temps disponible Δ_t et le temps de réglage.

Si le système est sous la configuration i pendant la période $t-1$ et s'il est sous la configuration j pendant la période t , le temps de réglage durant période t est égal à S_{ij} . Ce temps de réglage peut être calculé de façon équivalente par:

$$\omega_{t-1}^T S \omega_t$$

où l'exposant "T" indique la transposition d'un vecteur.

On en déduit:

$$\Delta_t = \Delta - \omega_{t-1}^T S \omega_t. \quad (3.3)$$

La quantité u_{tn}/Δ_t correspond au débit moyen de la production de pièce de type n pendant la période Δ_t . Le vecteur des débits de production (u_{tn}/Δ_t , $n = 1, 2, \dots, N$) est limité par la capacité de fabrication du système.

Nous allons montrer qu'il est possible de définir pour chaque configuration i un vecteur de débits maximaux qui modélisera de manière satisfaisante les limites supérieures du vecteur (u_{tn}/Δ_t , $n \in \mathcal{N}$).

Nous notons (U_{ni} , $n \in \mathcal{N}$) le vecteur des débits maximaux de la configuration i . Si le système est sous la configuration i pendant la période t , une politique de contrôle u_t est dite admissible si et seulement si

$$u_{tn}/\Delta_t \leq U_{ni} \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Nous notons :

$$U := [U_{ni}]_{n \in \mathcal{N} \text{ et } i \in Q}$$

la matrice des débits maximaux de production. Les contraintes de capacité de production peuvent être réécrites sous une forme équivalente:

$$u_t \leq U \omega_t \Delta_t \quad (3.4)$$

Capacité de fabrication sous une configuration

Nous nous intéressons à la capacité de production sous la configuration i . Nous signalons que les notations introduites dans ce paragraphe sont des notations locales qui ne sont pas utilisées dans le reste de la thèse.

Nous désignons par v_n^i l'inconnue correspondant au débit moyen de production de pièces de type n sous la configuration i . Nous notons :

$$v^i := (v_1^i, v_2^i, \dots, v_N^i)$$

le vecteur inconnu des débits de production.

Puisque les pannes et les opérations sont supposées infiniment fréquentes, le vecteur v^i est limité par la capacité de production à long terme décrite dans le chapitre 4. Le calcul de cette capacité tient compte de la disponibilité des machines et de l'accumulation de matières dans le système en cas de pannes des machines. Nous définissons Ω_i , ensemble des vecteurs admissibles pour v^i , encore appelé domaine des contrôles admissibles. Le domaine Ω_i est défini de la manière suivante :

Le vecteur v^i est dit admissible ($v^i \in \Omega_i$) si et seulement si il existe des vecteurs $v^i(\alpha) \in \mathbb{R}^{N^+}$ pour tout $\alpha \in S$ et $\{y_{nmk}^i(\alpha) \in \mathbb{R}^+, (n,m,k,\alpha) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \times \mathcal{K} \times S\}$ tels que

$$v_n^i = \sum_{\alpha \in S} q(\alpha) v_n^i(\alpha) \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (a)$$

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk}^i y_{nmk}^i(\alpha) \leq \alpha_m \quad \forall (m,\alpha) \in \mathcal{M} \times S, \quad (b)$$

$$v_n^i(\alpha) = \sum_m y_{nmk}^i(\alpha) \quad \forall (n,k,\alpha) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \times S, \quad (c)$$

τ_{nmk}^i est le temps nécessaire à la machine m pour effectuer l'opération k sur une pièce de type n sous la configuration i .

α_m est une variable binaire qui indique l'état de la machine m à chaque instant. Son espérance $E(\alpha_m)$ exprime la disponibilité à long terme de la machine m . $q(\alpha)$ est la probabilité que l'état des machines soit α .

$y_{nmk}^i(\alpha)$ représente le débit des pièces de type n affectées à la machine m pour l'opération k lorsque l'état des machines est α .

Les contraintes (b) correspondent à la limitation des capacités des machines. Les contraintes (c) correspondent à la conservation de flux.

Le domaine Ω_i est un polyèdre convexe et sa description exacte du domaine Ω_i est très complexe. Nous montrerons dans le chapitre 4 que le polyèdre Ω_i peut être approximé par un autre polyèdre convexe Ω_i^* . Ω_i^* est l'ensemble des vecteurs v^i pour lesquels il existe $\{y_{nmk}^i \geq 0\}$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk}^i y_{nmk}^i \leq E(\alpha_m) \quad \forall m, \quad (d)$$

et

$$\sum_m y_{nmk}^i = v_n^i \quad \forall n,k \quad (f)$$

Les inégalités (d) expriment les limitations de capacité des machines pour effectuer les opérations. Les égalités (f) signifient que toute pièce lancée en fabrication sort du système au bout d'un temps fini ou encore qu'il y a conservation des flux à long terme.

Supposons que le débit y_{nmk}^i soit la valeur moyenne de $y_{nmk}^i(\alpha)$, c'est-à-dire :

$$y_{nmk}^i = \sum_{\alpha \in S} q(\alpha) y_{nmk}^i(\alpha)$$

Nous en déduisons :

$$(d) \Leftrightarrow \sum_{n,k} \tau_{nmk}^i \sum_{\alpha \in S} q(\alpha) y_{nmk}^i(\alpha) \leq E(\alpha_m)$$

$$(f) \Leftrightarrow \sum_m \sum_{\alpha \in S} q(\alpha) y_{nmk}^i(\alpha) = \sum_{\alpha \in S} q(\alpha) v_n^i(\alpha)$$

Le domaine Ω_i est alors contenu dans le domaine Ω_i^* (voir la figure 3.1(a)).

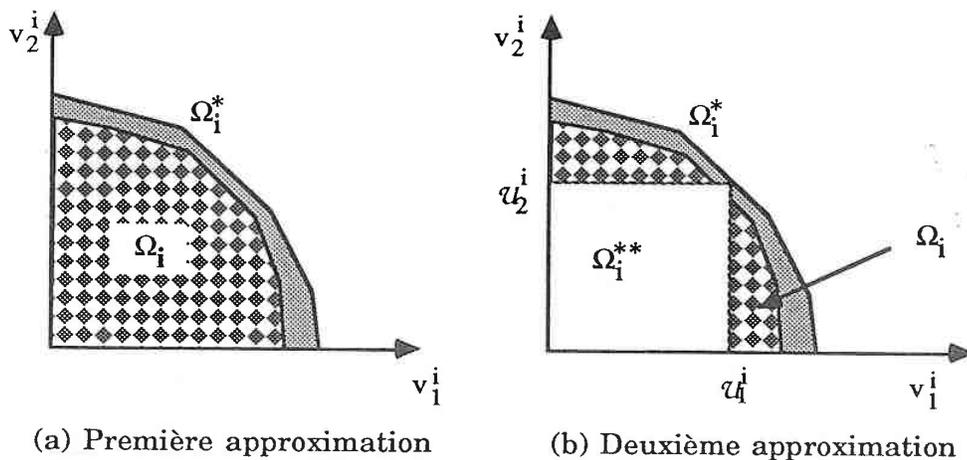


Figure 3.1: Approximation du domaine des contrôles admissibles

Ω_i^* contient donc des solutions non admissibles. Pour diminuer le nombre de ces solutions non admissibles, nous cherchons une autre approximation du domaine Ω_i^* . L'idée est de chercher un hypercube Ω_i^{**} contenu dans le polyèdre convexe Ω_i^* .

La figure 3.2 (b) schématise les relations entre les trois ensemble de contrôles Ω_i , Ω_i^* et Ω_i^{**} .

Soit $u^i = [u^i_1, u^i_2, \dots, u^i_N]^T$ le vecteur des dimensions de l'hypercube Ω_i^{**} . Nous examinons maintenant le calcul de ce vecteur.

Nous introduisons un vecteur $\gamma^i \in \mathbb{R}^N$. Il est déterminé par:

$$\gamma^i_n = C_{in} \mathcal{D}_n / \sum_p C_{ip} \mathcal{D}_p$$

où \mathcal{D}_n est la demande totale de pièces de type n sur l'horizon complet.

Remarquons que le vecteur γ^i représente les ratios moyens de production sous la configuration i.

Le vecteur u^i est choisi égal à la capacité de production sous la configuration i avec les ratios fixés γ^i . Plus précisément, u^i est la solution du problème suivant:

maximiser X

sous les contraintes $\gamma^i X = v^i$ et $v^i \in \Omega_i^*$.

Après la résolution de ce problème linéaire, la capacité de production sous la configuration i peut être caractérisée approximativement par le vecteur u^i des débits maximaux.

3.1.5 Indice de performance

Au niveau du séquençement des configurations, nous nous intéressons à la minimisation des stocks et des retards. L'idéal de la production est "zéro stock" et "zéro retard" tout au long de l'horizon. Généralement, la politique "zéro stock" est impossible en raison de l'insuffisance de la capacité de production.

Afin de comparer les coûts engendrés par les politiques de contrôle, nous supposons que les stocks positifs ainsi que le retards sont pénalisés par des fonctions de coût continues, convexes, linéaires par morceaux, notées $g_{tn}(x_{tn})$. La fonction $g_{tn}(x_{tn})$ est définie par :

$$\begin{aligned} g_{tn}(x_{tn}) &= cs_{tn} x_{tn} && \text{si } x_{tn} \geq 0; \\ &= -cb_{tn} x_{tn} && \text{si } x_{tn} < 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

où cs_{tn} et cb_{tn} sont respectivement le coût unitaire de stockage et le coût unitaire

dû au retard de livraison de pièces de type n à la fin de la période t . La fonction $g_{tn}(x_{tn})$ atteint son minimum en $x_{tn} = 0$.

Nous introduisons $J(\omega, u)$ qui est l'indice de performance de la politique de contrôle (ω, u) . Cet indice représente le coût cumulé sur l'horizon complet, i.e.

$$J(\omega, u) = \sum_t \sum_n g_{tn}(x_{tn}) \quad (3.6)$$

Plus cet indice est petit, moins il y a de stocks et de retards. Lorsque cet indice est égal à zéro, l'état de zéro stock et zéro retard est atteint tout au long de l'horizon.

3.1.6 Modèle pour le séquençement des configurations

Le problème du séquençement des configurations est le suivant: étant donné l'état initial des stocks x_0 et la configuration initiale ω_0 , nous cherchons à déterminer une séquence de configurations $\{\omega_t\}$ et le plan de production $\{u_t\}$ de manière à

$$\text{minimiser } J(\omega, u) \quad (3.7)$$

sous les contraintes (3.1), (3.2), (3.3), et (3.4).

En résumé, le problème du séquençement des configurations s'écrit de la manière suivante:

$$\text{minimiser } \sum_t \sum_n g_{tn}(x_{tn})$$

sous les contraintes suivantes pour $t = 1, 2, \dots, T$

$$x_{tn} = x_{t-1n} + u_{tn} - d_{tn} \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

$$u_t \leq U \omega_t \Delta_t,$$

$$\Delta_t = \Delta - \omega_{t-1}^T S \omega_t,$$

$$\sum_i \omega_{ti} = 1,$$

$$\text{avec } \omega_{ti} \in \{0,1\} \text{ et } u_{tn} \geq 0.$$

C'est un problème de programmation mathématique en variables mixtes.

Dans le cas où un seul type de pièce est fabriqué sous chaque configuration, une variante de ce problème est bien connue dans la littérature où on considère les coûts de changement de production au lieu des temps de changement. Le modèle de programmation linéaire considérant les coûts de changement de production a été initialement proposé par Wagner et Whitin [1958] et le problème est connu comme un problème NP-difficile.

Dans le cas où un seul type de pièce est fabriqué sous chaque configuration, des modèles considérant les temps de changement de production existent également. Il s'agit de déterminer les tailles des lots ou les quantités économiques et d'ordonner la fabrication des lots. La demande est généralement supposée déterministe et constante ou stochastique mais stable (voir Elmaghraby [1978] et Maxwell et Muckstadt [1985]). Le problème est également NP-difficile.

Notre problème est une généralisation de ce deuxième problème. Dans notre problème, plusieurs types de pièce peuvent être fabriqués sous une configuration et la demande est dynamique. Il est également NP-difficile. Par conséquent, il est peu probable que l'on puisse trouver une méthode exacte qui résoud le problème en un temps raisonnable.

3.2 Recherche des configurations optimales

Les méthodes exactes proposées pour résoudre les problèmes de programmation mathématique en variables mixtes sont essentiellement des procédures par séparation et évaluation. La technique de la relaxation lagrangienne y est souvent utilisée pour évaluer les bornes du critère pour les sous-ensembles de solutions à séparer (voir Fisher [1981]). Karmarkar et Schrage [1985] appliquent cette technique à la planification de la production en considérant dans leur critère les coûts des changements de production.

Les procédures par séparation et évaluation basées sur la technique de la relaxation lagrangienne sont inapplicables à notre problème en raison du temps de calcul trop important. Il y a généralement plusieurs possibilités pour relaxer des contraintes. Mais les relaxations capables de donner des bornes proches de l'optimum aboutissent dans la plupart des cas à des sous-problèmes difficiles.

Compte tenu de ces difficultés, nous proposons dans la suite une heuristique itérative qui est capable de donner des résultats satisfaisants en un temps raisonnable.

L'heuristique proposée part d'une solution admissible et cherche à l'améliorer par une procédure itérative. A chaque itération, on cherche une meilleure solution en faisant varier localement la séquence de configurations.

Cette méthode est une méthode du type "méthode par voisinage". Ces méthodes sont très utilisées pour les problèmes combinatoires. On distingue essentiellement les méthodes de descente (hill climbing), le recuit simulé (simulated annealing) et les méthodes dite "tabou" (tabu search).

Toutes les méthodes sont itératives. Les méthodes de descente sont bien connues en optimisation. Elles consistent à améliorer la solution à chaque itération. L'inconvénient de ces méthodes est qu'elles conduisent souvent à un optimum local. Les deux autres types de méthode cherchent à éviter les optima locaux.

Pour cela, les méthodes tabou mémorisent un certain nombre de solutions trouvées et cherchent à chaque itération la meilleure solution voisine qui est différente des solutions mémorisées. L'efficacité de ces méthodes dépend de la stratégie de mémorisation aussi bien que la définition de voisinage. On trouve des états de l'art dans Glover [1986] et Glover [1987].

Le recuit simulé utilise un paramètre de contrôle nommé température. A chaque itération, on accepte avec une certaine probabilité une solution voisine qui n'est pas meilleure que la solution trouvée. Cette probabilité est une fonction croissante de la valeur du paramètre de contrôle. La valeur du paramètre de contrôle est réduit progressivement afin d'éviter les optima locaux au début de la recherche. Cette méthode est introduite par Kirkpatrick, Gelatt et Vecchi [1982].

Nous utilisons ici une méthode de descente par plus forte pente. Dans la suite, nous indiquons d'abord comment trouver une meilleure solution en faisant varier localement la séquence de configurations. Ensuite, nous présentons l'heuristique.

3.2.1 Optimisation locale de la séquence de configurations

Nous proposons dans ce paragraphe deux approches locales qui conduisent à une amélioration d'une séquence de configurations donnée. L'une consiste à améliorer la séquence de configurations en faisant varier la configuration d'une période. L'autre consiste à améliorer une séquence donnée en permutant deux configurations.

Pour faciliter la présentation, nous notons $\mathbf{w} \in Q^{T+1}$ le vecteur des indices des configurations dans une séquence. Soit S le domaine de définition du vecteur \mathbf{w} .

$(\omega_t, t \in T)$ et \mathbf{w} sont deux façons différentes de représenter les séquences de configurations. $(\omega_t, t \in T)$ et \mathbf{w} désignent la même séquence si et seulement si on a :

$$\omega_t, w_t = 1 \quad \forall t = 0, 1, \dots, T \quad (3.8)$$

Nous notons $\mathcal{J}(\mathbf{w})$ le coût minimal cumulé sur l'horizon complet lorsque la séquence de configurations \mathbf{w} est appliquée. Il est calculé de la manière suivante:

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \min_u J(\mathbf{w}, u) \quad (3.9)$$

où $J(\mathbf{w}, u)$ est également donné par le second membre de (3.6).

$\mathcal{J}(\mathbf{w})$ est l'indice de performance qui permet de comparer les différentes séquences de configurations en retenant pour chaque séquence le meilleur plan de production. Nous aborderons son calcul dans la section 3.3.

Approche 1: Optimisation locale de la configuration d'une période

Pour une séquence de configurations \mathbf{w} et une période t , nous définissons un ensemble de séquences voisines $CI(\mathbf{w}, t)$ par:

$$CI(\mathbf{w}, t) := \{v / v \in S \text{ et } v_s = w_s \forall s \neq t\} \quad (3.10)$$

C'est l'ensemble des séquences de configurations qui ne diffèrent de la séquence \mathbf{w} que par la configuration de la période t .

Le problème de recherche du meilleur voisin est le suivant: étant donnée une séquence de configurations w , nous cherchons une séquence de configurations $w1(w,t) \in C1(w,t)$ de manière à minimiser l'indice de performance J , i.e.

$$w1(w,t) = \underset{v \in C1(w,t)}{\operatorname{argmin}} J(v) \quad (3.11)$$

où *argmin* est la valeur d'un argument (v) qui minimise l'expression qui suit ($J(v)$).

La séquence de configurations $w1(w,t)$ est toujours meilleure que la séquence de départ, i.e.

$$Jw1(w,t) \leq J(w) \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.12)$$

Approche 2: Optimisation locale par échange de deux configurations

Pour une séquence de configurations w et une période t , nous définissons un ensemble de séquences voisines $C2(w,t)$ par :

$$C2(w,t) := \{v / v \in S \text{ et } \exists \tau \in \mathcal{T} : v_\tau = w_t, v_t = w_\tau \text{ et } v_s = w_s \forall s \notin \{t, \tau\}\} \quad (3.13)$$

C'est l'ensemble des séquences de configurations obtenues en échangeant la configuration w_t avec une autre configuration.

Le problème de recherche du meilleur voisin est le suivant: étant donnée une séquence de configurations w , nous cherchons une séquence de configurations $w2(w,t) \in C2(w,t)$ de manière à minimiser l'indice de performance J , i.e.

$$w2(w,t) = \underset{v \in C2(w,t)}{\operatorname{argmin}} J(v). \quad (3.14)$$

La séquence de configurations $w2(w,t)$ est toujours meilleure que la séquence de départ, i.e.

$$Jw2(w,t) \leq J(w) \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.15)$$

3.2.2 Heuristique proposée

Nous allons décrire une heuristique itérative basée sur les deux optimisations décrites au paragraphe précédent. Chaque itération comporte deux phases associées à chacune des deux approches d'optimisation.

Dans la première (resp. deuxième) phase, nous cherchons améliorer la séquence de configurations en balayant plusieurs fois les périodes de 1 à T. Pour chaque période, nous résolvons un problème du type correspondant à la formule 3.11 (resp. 3.14). Cette phase s'arrête lorsqu'un balayage des périodes de 1 à T n'apporte plus aucune amélioration.

L'itération sur l'ensemble des deux phases s'arrête lorsqu'aucune amélioration n'est plus possible. La séquence de départ est générée de façon aléatoire et plusieurs essais sont effectués afin d'obtenir une séquence de configurations satisfaisante.

La complexité de cet algorithme est étudiée en annexe. Dans la suite, nous donnons d'abord la description détaillée des deux phases de chaque itération. Ensuite, nous décrivons formellement l'algorithme heuristique.

Phase 1: Optimisation séquentielle des configurations

Partant d'une séquence de départ $w(0)$, la première étape consiste à optimiser la configuration de la période $t=1$ en fixant les configurations des autres périodes. Le résultat de cette optimisation est la séquence de configurations $w_1(w(0),1)$. Notons cette nouvelle séquence $w(1)$, i.e. $w(1) := w_1(w(0),1)$.

La deuxième étape cherche à améliorer la séquence de configurations $w(1)$. Partant de cette séquence, cette étape consiste à optimiser la configuration de la période $t=2$ en fixant les configurations des autres périodes. On obtient par cette optimisation une meilleure séquence de configurations que nous notons $w(2)$. Par définition, $w(2) = w_1(w(1),2)$.

La même amélioration peut être faite pour $t=3$, puis $t=4$, ..., et ainsi de suite jusqu'à $t=T$. En résumé, partant de la séquence de configurations $w(t-1)$, on cherche à optimiser la configuration de la période t . La nouvelle séquence de configurations, notée $w(t)$, est la séquence $w_1(w(t-1),t)$.

A la fin de cette série d'optimisations, nous obtenons une nouvelle séquence de configurations $w(T)$. Si $w(T)$ est meilleure que la séquence de départ $w(0)$, i.e.

$$\mathcal{J}(w(T)) < \mathcal{J}(w(0)),$$

nous posons $w(0) := w(T)$ et commençons une nouvelle série d'optimisations afin d'obtenir une séquence encore meilleure. Si $w(T)$ n'est pas meilleure que la séquence de départ $w(0)$, i.e.

$$\mathcal{J}(w(T)) = \mathcal{J}(w),$$

aucune amélioration n'est plus possible en optimisant séquentiellement les configurations et la première phase se termine.

Phase 2: Optimisation de l'ordre des configurations

Partant d'une séquence de configurations $w(0)$, cette phase permute l'ordre des configurations de façon séquentielle. La première étape consiste à trouver le meilleur échange entre la configuration de la période $t=1$ et une autre configuration. Le résultat de cette optimisation est la séquence de configurations $w_2(w(0), 1)$. Notons cette nouvelle séquence $w(1)$, i.e. $w(1) := w_2(w(0), 1)$.

Partant de la séquence $w(1)$, la deuxième étape consiste à trouver le meilleur échange entre la configuration de la période $t=2$ et la configuration d'une autre période $t \neq 2$. Le résultat obtenu est la séquence de configurations $w_2(w(1), 2)$ que nous notons $w(2)$.

La même amélioration de la séquence de configurations est faite pour $t = 3$, puis $t=4$, ..., et ainsi de suite jusqu'à $t = T$. En bref, partant de la séquence $w(t-1)$, on cherche le meilleur échange entre la configuration de la période t et la configuration d'une autre période. Nous obtenons la séquence de configurations $w_2(w(t-1), t)$ qui est notée $w(t)$.

A la fin de cette série d'optimisations, la nouvelle séquence de configurations est $w(T)$. Comme dans la première phase, si $w(T)$ est meilleure que la séquence de départ $w(0)$, nous posons $w(0) := w(T)$ et commençons une nouvelle série d'optimisations. Si $w(T)$ n'est pas meilleure que la séquence de départ $w(0)$, aucune amélioration n'est plus possible et la deuxième phase se termine.

Algorithme

1. **Faire:** $I := 0$ où I est le compteur du nombre d'essais

2. **Générer** aléatoirement une séquence de configurations $w(0)$

3. **Répéter**

3.1. **Faire:** $w_0 := w(0)$

3.2. *Phase 1:* optimisation séquentielle des configurations

3.2.1. **Faire:** $w(T) := w(0)$

3.2.2. **Répéter**

3.2.2.1. Initialisation de l'itération

Faire: $w(0) := w(T)$

3.2.2.2. **Pour t de 1 à T faire :**

$w(t) := u_1(w(t-1), t)$

Jusqu'à $\mathcal{J}(w(T)) = \mathcal{J}(w(0))$

3.3. *Phase 2:* optimisation de l'ordre des configurations

3.3.1. **Faire:** $w(T) := w(0)$

3.3.2. **Répéter**

3.3.2.1. Initialisation de l'itération

Faire: $w(0) := w(T)$

3.3.2.2. **Pour t de 1 à T faire :**

$w(t) := u_2(w(t-1), t)$

Jusqu'à $\mathcal{J}(w(T)) = \mathcal{J}(w(0))$

Jusqu'à $\mathcal{J}(w(0)) = \mathcal{J}(w_0)$

4. Enregistrement de la meilleure séquence trouvée

Si $I = 0$ ou $\mathcal{J}(w^*) > \mathcal{J}(w_0)$ **faire :** $w^* := w_0$

5. **Incrémenter** le compteur I d'une unité: $I := I + 1$

6. **Si** $I <$ le nombre d'essais prédéfini, **aller en 2, sinon fin.**

3.3 Planification de la production lorsque les configurations sont définies

Dans cette section, nous étudions la planification de la production lorsque la séquence de configurations est donnée. Nous montrons dans le paragraphe 3.3.1 que la planification de la production peut être décomposée en sous-problèmes indépendants dont chacun correspond à un type de pièce. Ensuite, nous nous intéressons à la planification de la production avec un seul type de pièce. Dans le paragraphe 3.3.2, nous étudions les caractéristiques des politiques optimales de contrôle à l'aide du principe d'optimalité de Bellman. Le paragraphe 3.3.3 est consacré au calcul des politiques optimales de contrôle.

3.3.1 Décomposition du problème

Rappelons que le modèle pour la recherche de la solution optimale est le suivant :

$$\text{minimiser } \sum_t \sum_n g_{tn}(x_{tn})$$

sous les contraintes suivantes pour $t = 1, 2, \dots, T$

$$x_{tn} = x_{t-1n} + u_{tn} - d_{tn} \quad \forall n \in \mathcal{N}_t$$

$$u_t \leq U \omega_t \Delta_t,$$

$$\Delta_t = \Delta - \omega_{t-1}^T S \omega_t,$$

$$\sum_i \omega_{ti} = 1,$$

$$\text{avec } \omega_{ti} \in \{0,1\} \text{ et } u_{tn} \geq 0$$

Lorsque la séquence de configurations est connue, le vecteur de la capacité de production $U \omega_t \Delta_t$ est connu. Ce vecteur est noté :

$$\mathbf{P}_t := (P_{t1}, P_{t2}, \dots, P_{tN}) := U \omega_t \Delta_t \quad (3.16)$$

Le problème du séquencement des configurations peut alors être décomposé en N sous-problèmes indépendants. Chaque sous-problème consiste à optimiser la production d'un type de pièce. Pour les pièces de type n , le sous-problème détermine la politique de production $\{u_{tn}, t \in \mathcal{T}\}$ de manière à

$$(SP_n) \quad \text{minimiser } \sum_t g_{tn}(x_{tn})$$

sous les contraintes suivantes pour $t = 1, 2, \dots, T$

$$x_{tn} = x_{t-1n} + u_{tn} - d_{tn},$$

$$u_{tn} \leq P_{tn},$$

$$\text{avec } u_{tn} \geq 0$$

Nous voyons que le problème global se ramène à la résolution de N problèmes indépendants. On appelle SP_n le problème correspondant au produit n . Dans la suite, nous nous intéressons à la planification de la production avec un seul type de pièce. Pour simplifier les notations, nous supprimons l'indice de type de pièce en conservant les notations précédentes. Le problème de la planification de la production d'un type de pièce s'écrit alors :

$$\text{minimiser } \sum_t g_t(x_t) \tag{3.17}$$

sous les contraintes suivantes pour $t = 1, 2, \dots, T$

$$x_t = x_{t-1} + u_t - d_t, \tag{3.18}$$

$$u_t \leq P_t, \tag{3.19}$$

$$\text{avec } u_t \geq 0 \tag{3.20}$$

où

$$\begin{aligned} g_t(x_t) &= cs_t x_t & \text{si } x_t \geq 0, \\ &= -cb_t x_t & \text{si } x_t < 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Les fonctions objectifs $g_t(x_t)$ dans le problème précédent sont convexes linéaires par morceaux. Il est possible de transformer ce problème en un problème de programmation linéaire en introduisant des variables et des contraintes (voir Zions [1974]).

En introduisant contraintes et variables pour rendre le modèle linéaire, on augmente considérablement la taille des sous-problèmes SP_n . Par ailleurs, il y a beaucoup de sous-problèmes SP_n à résoudre et les contraintes de celui-ci lui donnent une forme particulière. Il est préférable de développer des méthodes exactes et spécifiques mais plus efficaces pour résoudre ces sous-problèmes. C'est pour cela que nous examinons ci-dessous les caractéristiques des politiques optimales de contrôle et que nous proposons un algorithme de résolution rapide.

3.3.2 Caractéristiques des politiques optimales

Dans le paragraphe 3.3.2.1, nous introduisons la fonction de coût d'une politique optimale et déduisons la condition d'optimalité des politiques de contrôle. Le paragraphe 3.3.2.2 présente les caractéristiques des fonctions de coût. Nous montrons dans le paragraphe 3.3.2.3 que la politique optimale pour chaque période est caractérisée par un niveau idéal du stock. Le paragraphe 3.3.2.4 est consacré à la démonstration des propriétés des fonctions de coût présentées dans le paragraphe 3.3.2.2.

3.3.2.1 Principe d'optimalité

Afin de pouvoir étudier la politique de contrôle, nous introduisons $F_t(z)$, coût minimal pour les périodes $t, t+1, \dots, T$ lorsque l'état du stock à la fin de la période t est z . $F_t(z)$ correspond à la **fonction de coût** de la programmation dynamique rétrograde. La valeur de $F_t(z)$ est la solution du problème ci-dessous :

$$\text{minimiser } \sum_{s=t}^T g_s(x_s) \quad (3.22)$$

sous les contraintes suivantes pour $s = t+1, t+2, \dots, T$

$$x_s = x_{s-1} + u_s - d_s, \quad (3.23)$$

$$u_s \leq P_s, \quad (3.24)$$

$$\text{avec } u_s \geq 0 \text{ et } x_t = z \quad (3.25)$$

Par conséquent, $F_0(x_0)$ est le coût minimal du problème (3.17) à (3.21). Pour la période $t=T$, la valeur de la fonction $F_T(z)$ est égale à $g_T(z)$:

$$F_T(z) = g_T(z) \quad \forall z$$

La valeur $F_t(z)$ peut être mise sous la forme récurrente de la programmation dynamique de type rétrograde :

$$\begin{aligned} F_{t-1}(z) &= \min_{0 \leq u_t \leq P_t} \{g_{t-1}(z) + F_t(z + u_t - d_t)\} \\ &= g_{t-1}(z) + \min_{0 \leq u_t \leq P_t} \{F_t(z + u_t - d_t)\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

D'après le principe d'optimalité de Bellman, connaissant x_{t-1} , état du stock à la fin de période t-1, la politique optimale de contrôle u_t^* est déterminée par :

$$\min_{0 \leq u_t \leq P_t} F_t(x_{t-1} + u_t - d_t) \quad (3.27)$$

Cette équation permet de décomposer le problème d'optimisation sur l'horizon complet en sous-problèmes d'optimisation pour chaque période lorsque la fonction $F_t(z)$ est connue.

Puisque $x_t = x_{t-1} + u_t - d_t$, l'équation (3.27) peut être réécrite de façon équivalente sous la forme :

$$\min_{0 \leq u_t \leq P_t} F_t(x_t) \quad (3.28)$$

3.3.2.2 Propriétés des fonctions de coût

Nous examinons les caractéristiques de la fonction de coût $F_t(z)$. La fonction de coût $F_t(z)$ possède les propriétés suivantes :

Propriété 3.1:

$F_t(z)$ est une fonction continue, convexe et linéaire par morceaux en z .

Propriété 3.2:

$F_t(z)$ est strictement décroissante pour z négatif, c'est-à-dire :

$$F_t(z_2) < F_t(z_1) \quad \forall z_1 < z_2 \leq 0.$$

Propriété 3.3:

$F_t(z)$ n'est pas bornée lorsque z tend vers l'infini, c'est-à-dire :

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} F_t(z) \rightarrow \infty$$

La propriété 3.3 est évidente et la démonstration est omise. La démonstration des propriétés 3.1 et 3.2 est donnée dans le paragraphe 3.3.2.4 car nous préférons examiner d'abord les conséquences de ces propriétés.

La figure 3.2 illustre la fonction $F_t(z)$. Bien que la fonction $F_t(z)$ ne soit pas partout différentiable, la continuité et la linéarité par morceaux de $F_t(z)$ implique que la dérivée à gauche ainsi que la dérivée à droite de $F_t(z)$ existent. Notons par $\phi_t(z)$ et $\psi_t(z)$ la dérivée à gauche et la dérivée à droite de $F_t(z)$ respectivement, i.e.

$$\phi_t(z) = \lim_{x \rightarrow z_-} \frac{dF_t(z)}{dz} \quad \text{et} \quad \psi_t(z) = \lim_{x \rightarrow z_+} \frac{dF_t(z)}{dz}$$

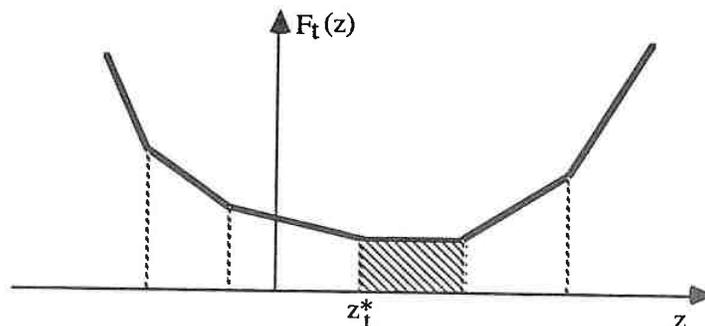


Figure 3.2: Courbe de la fonction $F_t(z)$

Les deux fonctions $\phi_t(z)$ et $\psi_t(z)$ sont constantes par morceaux et non-décroissantes et elles ne diffèrent qu'en un nombre fini de points.

La convexité de la fonction de coût $F_t(z)$ implique qu'un minimum local est également un minimum global. La propriété 3.3 assure que la fonction $F_t(z)$ atteint réellement son minimum sur un intervalle fini (l'intervalle hachuré dans la figure 3.2). Nous nous intéressons plus particulièrement à l'extrémité gauche de cet intervalle, notée par z_t^* . Par construction, z_t^* vérifie la propriété suivante :

Propriété 3.4:

Il existe un seul point $z^*_t \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} \text{a) } & \phi_t(z^*_t) < 0 \text{ et } \psi_t(z^*_t) \geq 0, \\ \text{b) } & F_t(z_1) > F_t(z_2) & \forall z_1 < z_2 \leq z^*_t, \\ & F_t(z_1) \geq F_t(z_2) & \forall z_1 > z_2 \geq z^*_t \end{aligned}$$

et z^*_t ainsi défini est positif ou nul.

3.3.2.3 Caractéristiques des politiques optimales

D'après la condition d'optimalité (3.28), le contrôle optimal u_t doit minimiser la valeur $F_t(x_t)$. On vient de voir que l'idéal serait de choisir u_t de telle sorte que x_t soit égal à z^*_t . Les contraintes du sous-problème ne le permettent pas toujours, aussi on retient la valeur de u_t qui conduit x_t le plus près possible de z^*_t . Cette caractéristique essentielle des politiques optimales est décrite par la propriété suivante :

Propriété 3.5:

Etant donné l'état du stock x_{t-1} , la politique optimale de contrôle pour la période t est la suivante:

$$\begin{aligned} 1) \quad & u^*_t = 0 & \text{si } x_{t-1} - d_t \geq z^*_t, \\ 2) \quad & u^*_t = P_t & \text{si } x_{t-1} + P_t - d_t \leq z^*_t, \\ 3) \quad & u^*_t = z^*_t - x_{t-1} + d_t & \text{sinon.} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Cette propriété montre qu'il existe un **niveau idéal du stock** z^*_t et que la politique optimale de contrôle consiste à conduire l'état du stock x_t vers ce niveau idéal. Plus précisément, la politique optimale consiste à atteindre si possible le niveau idéal du stock. Elle consiste à produire à la capacité maximale si celle-ci conduit à un état du stock inférieur à z^*_t . Elle consiste à ne rien produire dans les autres cas.

Démonstration :

Nous examinons les trois cas de la propriété 3.5.

Cas 1: $x_{t-1} - d_t \geq z_t^*$

Considérons une politique $u_t > 0$. Puisque $x_{t-1} + u_t - d_t > x_{t-1} - d_t \geq z_t^*$, d'après la propriété 3.4 nous avons

$$F_t(x_{t-1} + u_t - d_t) \geq F_t(x_{t-1} - d_t).$$

La politique $u_t^* = 0$ minimise $F_t(x_t)$. C'est donc la politique optimale.

Cas 2: $x_{t-1} + P_t - d_t \leq z_t^*$

Considérons une politique $u_t < P_t$. Puisque $x_{t-1} + u_t - d_t < x_{t-1} + P_t - d_t \leq z_t^*$, d'après la propriété 3.4 nous avons

$$F_t(x_{t-1} + u_t - d_t) > F_t(x_{t-1} + P_t - d_t).$$

La politique $u_t^* = P_t$ minimise $F_t(x_t)$. C'est donc la politique optimale.

Cas 3: $0 \leq z_t^* - x_{t-1} + d_t \leq P_t$

Dans ce cas, la politique $u_t^* = z_t^* - x_{t-1} + d_t$ est admissible. Puisque

$$F_t(x_{t-1} + u_t^* - d_t) = F_t(z_t^*),$$

la politique $u_t^* = z_t^* - x_{t-1} + d_t$ minimise $F_t(x_t)$ ce qui implique l'optimalité de cette politique.

Q.E.D.

Nous verrons dans le paragraphe 3.3.3 comment calculer les niveaux idéaux du stock. Mais auparavant, nous allons donner les démonstrations des propriétés 3.1 et 3.2 annoncées dans le paragraphe 3.3.2.2.

3.3.2.4 Démonstration des propriétés des fonctions de coût

Pour simplifier les notations, nous désignons par

$$\mathcal{T}_t := \{t, t+1, \dots, T\}$$

l'ensemble d'indices des périodes $t, t+1, \dots, T$.

Pour les périodes $t, t+1, \dots, T$, nous notons par $\{u_s, s \in \mathcal{T}_t\}$ une politique de contrôle. Elle est dite **admissible** si et seulement si

$$0 \leq u_s \leq P_s \quad \forall s \in \mathcal{T}_t$$

Pour le besoin de la démonstration, nous introduisons $F_t^u(z)$, coût cumulé sur les périodes $t, t+1, \dots, T$ lorsque la politique admissible de contrôle $\{u_s, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ est appliquée et que l'état initial du stock x_t est égal à z . Par conséquent, nous avons

$$F_t^u(z) \geq F_t(z) \quad (3.30)$$

Démonstration de la propriété 3.1:

1) Continuité de la fonction $F_t(z)$

Nous notons par $\{u_s^z, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ la politique optimale de contrôle à partir de la période $t+1$ sachant que $x_t = z$. Nous désignons par $\{x_s^z, s \in \mathcal{T}_t\}$ la trajectoire de l'état du stock correspondant. Nous avons :

$$x_s^z = x_{s-1}^z + u_s^z - d_s \quad \forall s \in \mathcal{T}_{t+1},$$

et

$$x_t^z = z$$

Par conséquent, le coût minimal $F_t(z)$ est calculé de la manière suivante :

$$F_t(z) = \sum_{s \geq t} g_s(x_s^z)$$

Supposons que la politique $\{u_s^z, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ est appliquée au cas où $x_t = z + \Delta$. Nous notons $\{x_s^{z+\Delta}, s \in \mathcal{T}_t\}$ la trajectoire de l'état du stock correspondant, i.e.

$$x_s^{z+\Delta} = x_{s-1}^{z+\Delta} + u_s^z - d_s \quad \forall s \in \mathcal{T}_{t+1},$$

et

$$x_t^{z+\Delta} = z + \Delta$$

Cela implique que

$$x_s^{z+\Delta} = x_s^z + \Delta \quad \forall s \in \mathcal{T}_t$$

Le coût cumulé $F_t^{uz(z+\Delta)}$ est calculé de la manière suivante :

$$F_t^{uz(z+\Delta)} = \sum_{s \geq t} g_s(x_s^z + \Delta) \quad (3.31)$$

Compte tenu de la forme particulière de g_s , on a :

$$g_s(x_s^z + \Delta) \leq g_s(x_s^z) + g_s(\Delta) \quad \forall \Delta \quad (3.32)$$

Nous déduisons :

$$\begin{aligned} F_t(z+\Delta) &\leq F_t^{uz(z+\Delta)} && \text{d'après (3.30)} \\ &= \sum_{s \geq t} g_s(x_s^z + \Delta) && \text{d'après (3.31)} \\ &\leq \sum_{s \geq t} [g_s(x_s^z) + g_s(\Delta)] && \text{d'après (3.32)} \\ &\leq F_t(z) + \sum_{s \geq t} (cs_s + cb_s) |\Delta| && \text{car } g_s(\Delta) \leq (cs_s + cb_s) |\Delta| \end{aligned}$$

En développant de la même manière, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_t(z) &\leq F_t^{u(z+\Delta)}((z+\Delta) - \Delta) \\ &\leq F_t(z+\Delta) + \sum_{s \geq t} (cs_s + cb_s) |-\Delta| \end{aligned}$$

Lorsque $\Delta \rightarrow 0$, nous obtenons

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} F_t(z+\Delta) = F_t(z)$$

2) Convexité de $F_t(z)$

Considérons deux réels z_1 et z_2 . Soient $\{u_s^{z_1}, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ et $\{u_s^{z_2}, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ les politiques optimales de contrôle à partir de la période $t+1$ sachant que $x_t = z_1$ et $x_t = z_2$ respectivement. Soient $\{x_s^{z_1}, s \in \mathcal{T}_t\}$ et $\{x_s^{z_2}, s \in \mathcal{T}_t\}$ les trajectoires de l'état du stock correspondant.

Pour $\lambda \in [0, 1]$, considérons la politique de contrôle $\{u_s, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ définie de la manière suivante :

$$u_s := \lambda u_s^{z_1} + (1-\lambda) u_s^{z_2} \quad \forall s \in \mathcal{T}_{t+1}$$

Puisque u_s^{z1} et u_s^{z2} sont admissibles, u_s l'est également.

Nous désignons par $(x_s^u, s \in \mathcal{T}_t)$ la trajectoire de l'état du stock à partir de la période t sachant que $x_t = \lambda z1 + (1-\lambda)z2$ lorsque la politique de contrôle u est appliquée. Cette trajectoire peut être calculée à partir de x^{z1} et x^{z2} de la manière suivante:

$$x_s^u = \lambda x_s^{z1} + (1-\lambda) x_s^{z2} \quad \forall s \in \mathcal{T}_t$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} F_t(\lambda z1 + (1-\lambda)z2) & \leq F_t^u(\lambda z1 + (1-\lambda)z2) && \text{d'après (3.30)} \\ & = \sum_{s \geq t} g_s(x_s^u) \\ & \leq \sum_{s \geq t} [\lambda g_s(x_s^{z1}) + (1-\lambda) g_s(x_s^{z2})] && \text{d'après la convexité de } g_s(x) \\ & = \lambda F_t(z) + (1-\lambda) F_t(z2) \end{aligned}$$

ce qui implique la convexité de la fonction $F_t(z)$.

3) Linéarité par morceaux de $F_t(z)$

D'après la définition de $F_t(z)$, la valeur de $F_t(z)$ est égal au coût minimal du problème suivant:

$$\text{minimiser } \sum_{s=t}^T g_s(x_s) \quad (3.33)$$

sous les contraintes suivantes pour $s = t+1, t+2, \dots, T$

$$x_s = x_{s-1} + u_s - d_s, \quad (3.34)$$

$$u_s \leq P_s, \quad (3.35)$$

avec $u_s \geq 0$ et $x(t) = z$

où

$$\begin{aligned} g_s(x_s) & = cs_s x_s && \text{si } x_s \geq 0, \\ & = -cb_s x_s && \text{si } x_s < 0 \end{aligned}$$

Les équations (3.34) sont équivalentes aux équations suivantes :

$$x_s = z + \sum_{\tau=t+1}^s (u_\tau - d_\tau) \quad \forall s \in \mathcal{T}_{t+1} \quad (3.36)$$

Nous introduisons y_s le coût de stockage de la période s . Ce coût peut être calculé de la manière suivante :

$$y_s = g_s(x_s) = \max \{cs_s x_s, -cb_s x_s\} \quad (3.37)$$

Pour linéariser les équations (3.37), on les remplace par deux inéquations linéaires. Le problème (3.33) est alors équivalent au problème de programmation linéaire suivant :

$$\text{minimiser } \sum_{s=t}^T y_s \quad (3.38)$$

sous les contraintes suivantes pour $s = t+1, t+2, \dots, T$

$$\begin{aligned} y_s &\geq cs_s \left[z + \sum_{\tau=t+1}^s (u_\tau - d_\tau) \right], \\ y_s &\geq -cb_s \left[z + \sum_{\tau=t+1}^s (u_\tau - d_\tau) \right], \\ u_s &\leq P_s \\ \text{avec } u_s &\geq 0 \end{aligned}$$

En introduisant des variables d'écart, nous obtenons un problème de programmation linéaire mis sous forme standard :

$$\text{minimiser } \sum_{s=t}^T y_s \quad (3.39)$$

sous les contraintes suivantes pour $s = t+1, t+2, \dots, T$

$$\begin{aligned} y_s - cs_s \sum_{\tau=t+1}^s u_\tau - R1_s &= cs_s \left[z - \sum_{\tau=t+1}^s d_\tau \right], \\ y_s + cb_s \sum_{\tau=t+1}^s u_\tau - R2_s &= -cb_s \left[z - \sum_{\tau=t+1}^s d_\tau \right], \\ u_s + R3_s &= P_s \\ \text{avec } u_s, y_s, R1_s, R2_s, R3_s &\geq 0 \end{aligned}$$

Lorsque l'on considère un problème de programmation linéaire sous la forme standard suivante :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } c v \\ & \text{sous les contraintes } A v = b_0 + \Delta b \text{ et } v \geq 0 \end{aligned}$$

où $\Delta \in \mathbb{R}$ est un paramètre du problème.

Il est bien connu que le coût optimal en fonction de Δ est une fonction linéaire par morceaux.

Puisque le second membre du problème (3.39) est linéaire en z , le coût minimal du problème (3.39) $F_t(z)$ est donc une fonction de z linéaire par morceaux.

Q.E.D.

Démonstration de la propriété 3.2:

Nous considérons ici deux nombres réels z_1 et z_2 tels que $z_1 < z_2 \leq 0$. Nous notons par $\{u^z_1, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ la politique optimale de contrôle à partir de la période $t+1$ en supposant que le stock initial x_t vaut z_1 . Notons par $\{x^z_1, s \in \mathcal{T}_t\}$ la trajectoire de l'état du stock correspondant.

Nous allons définir une nouvelle politique $\{u_s, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ à partir de la période $t+1$ en supposant que le stock initial x_t vaut z_2 . Cette politique est construite de telle sorte que la trajectoire de l'état du stock correspondant tende vers la trajectoire $\{x^z_1, s \in \mathcal{T}_t\}$. Nous construisons à présent cette nouvelle politique.

Pour $s \in \mathcal{T}_{t+1}$, nous notons par U^z_1 la production cumulée de la politique u^z_1 sur les périodes $t+1, t+2, \dots, s$, c'est-à-dire :

$$U^z_1 = \sum_{\tau = t+1}^s u^z_\tau$$

La politique de contrôle $\{u_s, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ est définie par :

$$\begin{aligned} u_s &= 0 && \text{pour } s = t+1, t+2, \dots, t^* - 1, \\ &= U^z_1_{t^*} + z_1 - z_2 && \text{pour } s = t^*, \\ &= u^z_1 && \text{pour } s = t^*+1, t^*+2, \dots, T \end{aligned}$$

où t^* est la première période pour laquelle la production cumulée U^{z1}_s dépasse la différence $(z2 - z1)$, i.e.

$$\begin{aligned} t^* &= T+1 && \text{si } U^{z1}_T \leq z2 - z1, \\ &= \min\{s / U^{z1}_s > z2 - z1\} && \text{sinon} \end{aligned}$$

u_s est admissible pour $s \neq t^*$. Vérifions l'admissibilité pour la période $s=t^*$. Puisque $U^{z1}_{t^*} > z2 - z1$ et $U^{z1}_{t^*-1} \leq z2 - z1$, nous avons :

$$u_{t^*} > 0,$$

et

$$\begin{aligned} u_{t^*} &= U^{z1}_{t^*} + z1 - z2 \\ &= u^{z1}_{t^*} + U^{z1}_{t^*-1} + z1 - z2 \\ &\leq u^{z1}_{t^*} \end{aligned}$$

Ceci nous assure que la politique de contrôle $\{u_s, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ est admissible.

Nous désignons par $\{x^u, s \in \mathcal{T}_t\}$ la trajectoire de l'état du stock à partir de la période t sachant que $x_t = z2$ lorsque que la politique u est appliquée.

Puisque $U^{z1}_s \leq z2 - z1$ et $u_s = 0$ pour $s < t^*$, nous avons pour $s = t+1, t+2, \dots, t^*-1$

$$x^{z1}_s \leq x^u_s \leq 0$$

\Rightarrow

$$g_s(x^{z1}_s) \geq g_s(x^u_s) \tag{3.40}$$

Pour la période t^* , nous avons :

$$\begin{aligned} x^u_{t^*} &= z2 + u_{t^*} - (d_{t+1} + d_{t+2} + \dots + d_{t^*}) \\ &= z1 + U^{z1}_{t^*} - (d_{t+1} + d_{t+2} + \dots + d_{t^*}) \\ &= x^{z1}_{t^*} \end{aligned}$$

Puisque $u_s = u^{z1}_s$ pour $s > t^*$, on obtient:

$$x^u_s = x^{z1}_s \quad \text{pour } s \geq t^* \tag{3.41}$$

En combinant les formules (3.40) et (3.41), nous avons :

$$g_s(x^{z1}_s) \geq g_s(x^u_s) \quad \forall s \in \mathcal{T}_{t+1} \tag{3.42}$$

On déduit :

$$\begin{aligned}
 F_t(z_2) &\leq F_t^u(z_2) && \text{d'après (3.30)} \\
 &= -cb_t z_2 + \sum_{s \geq t+1} g_s(x_s^u) \\
 &< -cb_t z_1 + \sum_{s \geq t+1} g_s(x_s^{z_1}) && \text{d'après (3.42) et } z_1 < z_2 \leq 0 \\
 &= F_t(z_1)
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$z_1 < z_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad F_t(z_2) < F_t(z_1)$$

Q.E.D.

3.3.3 Calcul des politiques optimales de contrôle

D'après la propriété 3.5, le calcul de la politique optimale de contrôle du problème (3.17) sur l'horizon complet est simple lorsque tous les niveaux idéaux du stock, soit $z^*_1, z^*_2, \dots, z^*_T$, sont connus.

La politique optimale de contrôle u^*_t et l'état du stock x^*_t pour $t=1, 2, \dots, T$ sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 u^*_t &= 0 && \text{si } x^*_{t-1} - d_t \geq z^*_t, \\
 &= P_t && \text{si } x^*_{t-1} + P_t - d_t \leq z^*_t, \\
 &= z^*_t - x^*_{t-1} + d_t && \text{sinon,}
 \end{aligned}$$

et

$$x^*_t = x^*_{t-1} + u^*_t - d_t$$

La recherche des politiques optimales de contrôle est donc équivalente à la recherche des niveaux idéaux du stock.

Dans le paragraphe 3.3.3.1, nous calculons les niveaux idéaux du stock par une méthode de gradient. Ensuite, nous examinons les problèmes liés au calcul des dérivées et au choix du pas dans le paragraphe 3.3.3.2.

3.3.3.1 Calcul des niveaux idéaux du stock

Nous avons montré que le niveau idéal du stock z^*_t minimise la fonction de coût $F_t(z)$. Puisque $F_T(z) = g_T(z)$, $F_T(z)$ atteint son minimum en $z = 0$ ce qui implique

que:

$$z^*_T = 0$$

Pour les autres périodes, le niveau idéal du stock possède la propriété suivante :

Propriété 3.6 :

$$z^*_t \leq \max\{ z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1}, 0 \} \text{ pour } t = 1, 2, \dots, T-1.$$

Cette propriété donne des bornes supérieures des niveaux idéaux du stock. La démonstration sera donnée à la fin de ce paragraphe.

Lorsque les niveaux idéaux du stock $z^*_{t+1}, z^*_{t+2}, \dots, z^*_T$ sont connus, la politique optimale de contrôle pour les périodes $t+1, t+2, \dots, T$ est connue et donnée par l'équation (3.29) de la propriété 3.5. Il est possible d'évaluer la valeur de la fonction $F_t(z)$ ainsi que le niveau idéal du stock z^*_t .

Dans notre travail, nous utilisons une méthode de gradient pour calculer le niveau idéal du stock. **Partant de la borne supérieure de z^*_t , nous réduisons progressivement la valeur de z jusqu'à ce que la dérivée à gauche devienne négative.** Nous obtenons ainsi le z qui minimise la fonction $F_t(z)$, i.e. z^*_t .

Puisque la fonction est linéaire par morceaux, il est possible de choisir le pas de façon à diminuer sûrement à chaque itération la valeur de la dérivée à gauche. Nous désignons par $\theta_t(z)$ ce pas en partant du point z . Comme illustré dans la figure 3.3, ce pas peut être défini de la manière suivante :

$$\theta_t(z) := \sup\{ \Delta / \Delta \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \phi_t(\omega) = \phi_t(z) \forall \omega \in]z - \Delta, z] \}$$

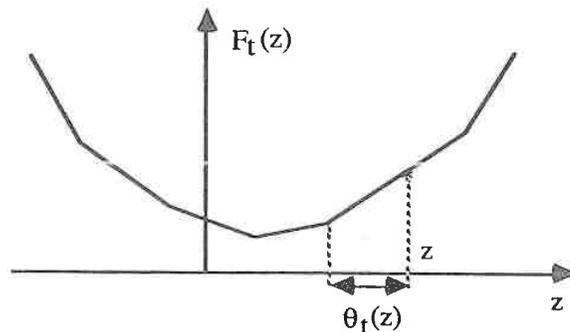


Figure 3.3: Pas dans la recherche de z^*_t

La description de la méthode de gradient est donnée par l'algorithme suivant :

Algorithme du calcul de z^*_t

1. **Initialiser** le niveau idéal du stock :

$$z^*_t := \max\{z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1}, 0\} \text{ [voir la propriété 3.6]}$$

2. **Tant que** $\phi_t(z^*_t) \geq 0$ **faire** :

2.1. **Calculer** : $\theta_t(z^*_t)$ [cf. (3.47)]

2.2. **Faire** : $z^*_t := z^*_t - \theta_t(z^*_t)$

fin tant que

Le calcul des niveaux idéaux du stock s'effectue de manière rétrograde. Puisque $z^*_T = 0$, nous commençons par calculer z^*_{T-1} . Puis connaissant z^*_T et z^*_{T-1} , nous calculons la valeur de z^*_{T-2} , et ainsi de suite.

Le calcul du niveau idéal du stock z^*_t dépend des calculs de la dérivée à gauche $\phi_t(z)$ et du pas de déplacement $\theta_t(z)$. Nous examinerons ces calculs au paragraphe suivant.

Démonstration de la propriété 3.6 :

Nous distinguons deux cas: $z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1} > 0$ et $z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1} \leq 0$. La démonstration dans les deux cas est similaire et nous donnons la démonstration uniquement pour le premier cas.

Cas 1: $z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1} > 0$

Considérons le cas où $x_t = z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1}$. Puisque $x_t + P_{t+1} - d_{t+1} = z^*_{t+1}$, le contrôle optimal u_{t+1} est égal à la capacité maximale P_{t+1} . Nous avons donc :

$$F_t(z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1}) = cs_t(z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1}) + F_{t+1}(z^*_{t+1}) \quad (3.43)$$

Pour les cas où $x_t = z > z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1}$, nous avons

$$\begin{aligned} F_t(z) &= cs_t z + F_{t+1}(z + u^*_{t+1} - d_{t+1}) \\ &> cs_t(z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1}) + F_{t+1}(z^*_{t+1}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

D'après les équations (3.43) et (3.44), on en déduit

$$\begin{aligned} & F_t(z) > F_t(z_{t+1}^* - P_{t+1} + d_{t+1}) \quad \forall z > z_{t+1}^* - P_{t+1} + d_{t+1}, \\ \Rightarrow & z_t^* \leq z_{t+1}^* - P_{t+1} + d_{t+1} \end{aligned}$$

Q.E.D.

3.3.3.2 Calcul des dérivées et des pas de déplacement

Lorsque $z_{t+1}^* - P_{t+1} + d_{t+1} \leq 0$, le niveau idéal du stock z_t^* est égal à zéro. Il n'est donc pas nécessaire d'examiner le calcul de la dérivée à gauche $\phi_t(z)$ et du pas de déplacement $\theta_t(z)$ pour ce cas.

Lorsque $z_{t+1}^* - P_{t+1} + d_{t+1} > 0$, nous avons montré que le niveau idéal du stock z_t^* ne dépasse pas la valeur $z_{t+1}^* - P_{t+1} + d_{t+1}$. Par conséquent, nous nous limitons au cas suivant :

$$z_{t+1}^* - P_{t+1} + d_{t+1} > 0 \text{ et } z \leq z_{t+1}^* - P_{t+1} + d_{t+1}$$

Rapellons que la dérivée à gauche est définie de la manière suivante :

$$\phi_t(z) = \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \frac{F_t(z) - F_t(z-\Delta)}{\Delta}$$

Nous allons d'abord évaluer les coûts minimaux $F_t(z)$ et $F_t(z-\Delta)$. Puis nous en déduirons la dérivée à gauche et le pas de déplacement.

Nous désignons par $\{u_s^z, s \in \mathcal{T}_{t+1}\}$ la politique optimale de contrôle à partir de la période $t+1$ sachant que $x_t = z$ (voir 3.3.2.4 pour la définition de \mathcal{T}_{t+1}). Notons par $\{x_s^z, s \in \mathcal{T}_t\}$ les états du stock correspondants. Nous avons donc :

$$F_t(z) = \sum_{s \geq t} g_s(x_s^z)$$

La trajectoire de l'état du stock possède la propriété suivante :

Propriété 3.7 :

Pour $z \leq \max\{z_{t+1}^* - P_{t+1} + d_{t+1}, 0\}$, la trajectoire de l'état du stock $\{x_s^z, s \in \mathcal{T}_t\}$ ne peuvent jamais dépasser les niveaux idéaux du stock, c'est-à-dire :

$$x_s^z \leq z_s^* \quad \forall s \in \mathcal{T}_{t+1} \quad (3.45)$$

Pour la clarté de la présentation, nous donnons la démonstration de cette propriété à la fin de ce paragraphe.

Nous désignons par t^* la première période pendant laquelle la production u_s^z est strictement inférieure à la capacité maximale, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u_s^z &= P_s & \text{pour } s = t+1, t+2, \dots, t^*-1, \\ u_{t^*}^z &< P_{t^*} \end{aligned}$$

Bien entendu, le niveau idéal du stock est atteint à la fin de la période t^* :

$$x_{t^*}^z = z_{t^*}^*$$

Nous supposons que la période t^* existe. Dans le cas où cette période n'existe pas, la dérivée à gauche et le pas de déplacement peuvent être calculés de manière similaire en remplaçant t^* par $T+1$.

Pour $\Delta \in [0, P_{t^*} - u_{t^*}^z[$, nous désignons par $(u^{z-\Delta}_s, s \in \mathcal{T}_{t+1})$ la politique optimale de contrôle à partir de la période $t+1$ sachant que $x_t = z - \Delta$. Notons par $(x^{z-\Delta}_s, s \in \mathcal{T}_t)$ les états du stock correspondants.

Compte tenu des inéquations (3.45) et de la définition de t^* , la politique optimale de contrôle $u^{z-\Delta}$ satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} u^{z-\Delta}_s &= u^z_s = P_s & \text{pour } s = t+1, t+2, \dots, t^*-1, \\ u^{z-\Delta}_{t^*} &= u^z_{t^*} + \Delta < P_{t^*} \\ u^{z-\Delta}_s &= u^z_s & \text{pour } s = t^*+1, t^*+2, \dots, T \end{aligned}$$

La trajectoire de l'état du stock satisfait :

$$\begin{aligned} x^{z-\Delta}_s &= x^z_s - \Delta & \text{pour } s = t, t+1, \dots, t^*-1, \\ x^{z-\Delta}_s &= x^z_s & \text{pour } s = t^*, t^*+1, \dots, T \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} F_t(z-\Delta) &= \sum_{s \geq t} g_s(x^{z-\Delta}_s) \\ &= \sum_{s=t}^{t^*-1} g_s(x^z_s - \Delta) + \sum_{s \geq t^*} g_s(x^z_s) \end{aligned}$$

La dérivée à gauche $\phi_t(z)$ peut alors être calculée de la manière suivante :

$$\phi_t(z) = \sum_{s=t}^{t^*-1} \lim_{\Delta \rightarrow 0_+} \frac{g_s(x^z_s) - g_s(x^z_s - \Delta)}{\Delta}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\phi_t(z) = \sum_{s=t}^{t^*-1} \alpha_s \tag{3.46}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_s &= cs_s && \text{si } x^z_s > 0, \\ &= -cb_s && \text{si } x^z_s \leq 0 \end{aligned}$$

Si on diminue de façon continue la valeur z , la dérivée à gauche change lorsque soit un état du stock positif x^z_s pour $s = t, t+1, \dots, t^*-1$ devient négatif, soit la production de la période t^* ($u^z_{t^*}$) atteint la capacité maximale. Le pas de déplacement $\theta_t(z)$ est alors calculé de la manière suivante :

$$\theta_t(z) = \min\{\beta_t, \beta_{t+1}, \dots, \beta_{t^*-1}, P_{t^*} - u^z_{t^*}\} \tag{3.47}$$

où

$$\begin{aligned} \beta_s &= +\infty && \text{si } x^z_s \leq 0, \\ &= x^z_s && \text{si } x^z_s > 0 \end{aligned}$$

Démonstration de la propriété 3.7 :

Nous allons montrer cette propriété par récurrence. Nous distinguons deux cas : $z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1} \geq 0$ et $z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1} < 0$. La démonstration dans ces deux cas est similaire. Nous donnons uniquement la démonstration pour le premier cas.

Puisque $x^z_t = z \leq z^*_{t+1} - P_{t+1} + d_{t+1}$, nous avons :

$$\begin{aligned} x^z_{t+1} &= x^z_t + u^z_{t+1} - d_{t+1} \\ &\leq x^z_t + P_{t+1} - d_{t+1} \\ &\leq z^*_{t+1} \end{aligned}$$

Supposons par récurrence que $x^z_k \leq z^*_k$.

Considérons la période $k+1$. Nous examinons deux cas : $z^*_{k+1} - P_{k+1} + d_{k+1} \geq 0$ et $z^*_{k+1} - P_{k+1} + d_{k+1} < 0$.

Cas 1 : $z^*_{k+1} - P_{k+1} + d_{k+1} \geq 0$

$$\begin{aligned}x^z_{k+1} &= x^z_k + u^z_{k+1} - d_{k+1} \\ &\leq z^*_k + P_{k+1} - d_{k+1} && \text{car } x^z_k \leq z^*_k \text{ et } u^z_{k+1} \leq P_{k+1} \\ &\leq z^*_{k+1} && \text{d'après la propriété 3.6}\end{aligned}$$

Cas 2 : $z^*_{k+1} - P_{k+1} + d_{k+1} < 0$

D'après la propriété 3.6 et la non négativité des niveaux idéaux du stock, on a :

$$z^*_k = 0$$

Puisque $x^z_k \leq z^*_k = 0$, on obtient :

$$x^z_k - d_{k+1} \leq 0 \leq z^*_{k+1}$$

La politique optimale u^z_{k+1} satisfait alors :

$$\begin{aligned}u^z_{k+1} &= P_{k+1} && \text{si } x^z_k + P_{k+1} - d_{k+1} \leq z^*_{k+1}, \\ &= z^*_{k+1} - x^z_k + d_{k+1} && \text{si } x^z_k + P_{k+1} - d_{k+1} > z^*_{k+1}\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$x^z_{k+1} = x^z_k + u^z_{k+1} - d_{k+1} \leq z^*_{k+1}$$

Nous avons donc :

$$x^z_s \leq z^*_s \quad \forall s \in \mathcal{T}_{t+1} \quad \text{Q.E.D.}$$

3.4 Applications numériques

Dans cette section, nous évaluons l'heuristique proposée sur des exemples numériques. Nous commençons par présenter des choix possibles pour la séquence de configurations de départ autre qu'une génération aléatoire. Puis, un exemple simple est présenté pour illustrer l'évolution de l'algorithme. Ensuite, nous donnons un exemple plus complexe pour évaluer la performance de l'heuristique proposée.

3.4.1 Choix de la séquence de départ

La génération aléatoire permet de multiplier les essais ce qui augmente la probabilité de trouver une solution finale proche de la solution optimale. Cependant, on peut penser qu'un choix astucieux de la séquence de départ améliore la qualité de la solution finale. Dans notre travail, nous proposons deux méthodes pour construire des séquences de départ.

Dans la première méthode, nous choisissons comme séquence de départ la séquence composée de configurations toutes égales à la configuration initiale. La séquence de configurations que nous notons w^1 est donc la suivante :

$$w_t^1 = w_0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

où w_0 est l'indice de la configuration initiale.

En conservant la même configuration, on choisit d'éliminer les temps de changement de fabrication.

Dans la deuxième méthode, nous maintenons en permanence le système dans une configuration fictive que nous notons 0. La séquence de configurations que nous notons w^2 est la suivante :

$$w_t^2 = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Le temps de changement de cette configuration fictive à tout autre configuration est supposé nul, ainsi que le temps de changement de toute configuration à cette configuration fictive, c'est-à-dire :

$$S_{i0} = S_{0i} = 0 \quad \forall i \in Q$$

La capacité de production sous cette configuration fictive est nulle :

$$U_{n0} = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Pour cette séquence de configurations, les demandes sont retardées jusqu'à la fin de l'horizon ce qui engendrent des coûts de retard importants. On peut penser qu'en partant une production nulle, la première phase d'optimisation sur les séquences aura plutôt tendance à maximiser la production.

3.4.2 Premier exemple

Le système considéré fabrique quatre type de pièces p1, p2, p3 et p4 sous trois configurations c1, c2, c3. L'horizon de planification est de 3 périodes élémentaires de 10 unités de temps chacune. Par conséquent :

$$N = 4, Q = 3, T = 3 \text{ et } \Delta = 10 \text{ unités}$$

Les temps de changement entre configurations et les capacités de production sous les différentes configurations sont donnés ci-dessous:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } [U_{ni}] = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

La demande est donnée dans le tableau 3.1.

période	p1	p2	p3	p4
1	20	10	20	10
2	10	20	40	60
3	10	10	20	0

Tableau 3.1: Demande (en pièces)

Le coût unitaire de stockage et le coût unitaire de retard sont identiques pour tous les types de pièces et pour toutes les périodes :

$$cs_{tn} = 3 \text{ et } cb_{tn} = 30 \quad \forall (n,t) \in \mathcal{N} \times \mathcal{T}$$

Les stocks sont supposés nuls initialement, i.e.

$$x_{0n} = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Le système est initialement sous la configuration c3, i.e.

$$w_0 = 3$$

Le tableau 3.2 donne les résultats des calculs pour les différentes méthodes d'initialisation. Dans ce tableau, on donne la séquence de configurations (entre parenthèse) et le coût de cette séquence. La meilleure séquence de configurations $[1, 2, 3]^T$ est trouvée dans tous les essais. La politique optimale de contrôle est donnée dans le tableau 3.3.

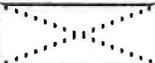
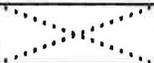
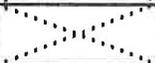
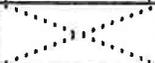
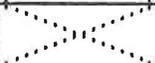
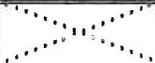
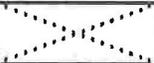
		initialisation	itération 1		itération 2	
			phase 1	phase 2	phase 1	phase 2
générations aléatoires	1	(232) 3810	(112) 2904	(121) 2553	(123) 2313	(123) 2313
	2	(213) 2694	(213) 2694	(123) 2313	(123) 2313	
	3	(121) 2553	(123) 2313	(123) 2313		
	4	(231) 2904	(213) 2694	(123) 2313	(123) 2313	
	5	(311) 5493	(213) 2694	(123) 2313	(123) 2313	
	6	(222) 7980	(112) 2904	(121) 2553	(123) 2313	(123) 2313
w^1	(333) 7500	(213) 2694	(123) 2313	(123) 2313		
w^2	(000) 14400	(123) 2313	(123) 2313			

Tableau 3.2: Séquence et coût à la fin de chaque phase

Commentaires :

Prenant comme exemple le premier essai de la génération aléatoire de la séquence de départ, la séquence générée est $w = [2, 3, 2]^T$, c'est-à-dire la configuration c2 pour la période 1, la configuration c3 pour la période 2 et la configuration c2 pour la période 3. Le coût de cette séquence est 3810. A la première itération, la phase 1 donne une meilleure séquence $w = [1, 1, 2]^T$ dont le coût est 2904. En permutant l'ordre des configurations de cette séquence, la phase 2 obtient une nouvelle séquence $[1, 2, 1]^T$ dont le coût est 2553. Dans la deuxième itération, la phase 1 donne la séquence optimale.

Dans cet exemple, la meilleure séquence est trouvée dans tous les cas. Le résultat obtenu par l'algorithme n'est pas sensible au choix de la séquence de départ.

période	w_t	Δt	p1			p2			p3			p4		
			Pt	u_t	x_t									
0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	7	42	40	20	14	14	4	0	0	-20	35	35	25
2	2	9	0	0	10	0	0	-16	72	72	12	9	9	-26
3	3	8	0	0	0	40	26	0	0	0	-8	48	26	0

Tableau 3.3: Politique optimale de contrôle

3.4.3 Deuxième exemple

Le système considéré fabrique 11 types de pièce, notés par p1, p2, ..., p11, sous 5 configurations, notées par c1, c2, ..., c5. On cherche à planifier la production sur 10 périodes élémentaires de 10 unités de temps chacune. On a donc :

$$N = 11, Q = 5, T = 10 \text{ et } \Delta = 10 \text{ unités}$$

Les temps de changement entre les configurations sont :

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarquons que le temps de changement ne dépend pas de la séquence de configurations, il est propre à chaque configuration (réglage en début de période).

Le tableau 3.4 donne la capacité de production sous les différentes configurations ($\{U_{ni}\}$).

conf.	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11
c1	10	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0
c2	0	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0
c3	0	0	3	3	0	0	10	0	7	8	0
c4	4	4	0	8	10	0	2	0	3	3	0
c5	0	0	2	3	3	0	0	5	4	4	15

Tableau 3.4: Capacité de production sous les différentes configurations

Il n'y a pas de demande pendant les 9 premières périodes :

$$d_{tn} = 0 \quad \forall t = 1, 2, \dots, 9 \text{ et } \forall n \in \mathcal{N}$$

La demande pendant la dernière période est 250 pièces pour le type 6, 200 pièces pour le type 8, 180 pièces pour le type 11 et 160 pièces pour chacun des autres types, c'est-à-dire :

$$d_{T6} = 250, d_{T8} = 200, d_{T11} = 180 \text{ et } d_{Tn} = 160 \quad \forall n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, \text{ et } 10$$

Le coût unitaire de stockage et le coût unitaire de retard sont identiques pour tous les produits et pendant toutes les périodes et sont donnés par :

$$cs_{tn} = 10 \text{ et } cb_{tn} = 100 \quad \forall (n,t) \in \mathcal{N} \times \mathcal{T}$$

Le système est initialement sous la configuration 1 et les stocks sont initialement nuls, i.e.

$$w_0 = 1 \text{ et } x_{0n} = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Le tableau 3.5 donne le coût à la fin de chaque phase pour les différentes méthodes d'initialisation. La séquence optimale $[5,5,2,2,5,5,1,3,4,4]^T$ dont le coût est 62700 est trouvée dans le 5^{ème} et 6^{ème} essai de la génération aléatoire de la séquence de départ (voir la fin du chapitre). L'erreur maximale est atteinte dans le cas où on utilise la séquence de départ w^1 et elle est à 3.7% de la solution optimale. Le tableau 3.6 donne la politique optimale de contrôle.

Les séquences trouvées avec les différentes séquences de départ sont toutes très proches la solution optimale. Comme nous l'avons remarqué dans l'exemple précédent, le résultat final obtenu par l'algorithme n'est pas très sensible au choix de la séquence de départ.

Nous avons traité de nombreux autres exemples et avons obtenu des résultats similaires. Nous en déduisons qu'un choix particulier de la séquence de départ n'est pas nécessaire et que la génération aléatoire de la séquence de départ est suffisante pour donner des résultats corrects.

Par ailleurs, nous avons programmé une méthode exacte de résolution. Pour ce deuxième exemple, le temps de calcul a été de 8 jours sur une station de travail SUN 3/110. Alors que le traitement des 6 générations aléatoires conduit 2 fois à l'optimum ne demande que 4 minutes sur le même ordinateur. Ceci donne une idée de l'efficacité de notre méthode.

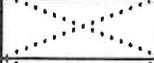
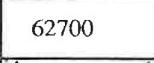
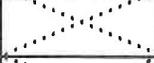
		initialisation	itération 1		itération 2	
			phase 1	phase 2	phase 1	phase 2
génération aléatoires	1	84770	67150	64360	64260	64260
	2	86580	64030	63230	63230	
	3	70270	64710	63230	63230	
	4	83290	63850	63850		
	5	84640	65840	62980	62700	62700
	6	87020	65450	62700	62700	
w^1	145100	66070	64990	64990		
w^2	191000	64500	64260	64260		

Tableau 3.5: Coût à la fin de chaque phase

période	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
w_t	1	5	5	2	2	5	5	1	3	4	4	
Δ_t	0	8	10	8	10	8	10	9	9	8	10	
p1	u_t	0	0	0	0	0	0	0	88	0	32	40
	x_t	0	0	0	0	0	0	0	88	88	120	0
p2	u_t	0	0	0	0	0	0	0	72	0	32	40
	x_t	0	0	0	0	0	0	0	72	72	104	-16
p3	u_t	0	0	16	0	0	16	20	81	27	0	0
	x_t	0	0	16	16	16	32	52	133	160	160	0
p4	u_t	0	0	0	0	0	0	0	0	16	64	80
	x_t	0	0	0	0	0	0	0	0	16	80	0
p5	u_t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	60	100
	x_t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	60	0
p6	u_t	0	0	0	50	200	0	0	0	0	0	0
	x_t	0	0	0	50	250	250	250	250	250	250	0
p7	u_t	0	0	0	0	0	0	0	0	90	16	20
	x_t	0	0	0	0	0	0	0	0	90	106	-34
p8	u_t	0	40	50	0	0	40	50	0	0	0	0
	x_t	0	40	90	90	90	130	180	180	180	180	-20
p9	u_t	0	0	0	0	0	3	40	0	63	24	30
	x_t	0	0	0	0	0	3	43	43	106	130	0
p10	u_t	0	0	0	0	0	0	34	0	72	24	30
	x_t	0	0	0	0	0	0	34	34	106	130	0
p11	u_t	0	0	0	0	0	30	150	0	0	0	0
	x_t	0	0	0	0	0	30	180	180	180	180	0

Tableau 3.6: Politique optimale de contrôle

CHAPITRE 4

Contrôle de Flux et Ordonnancement en Temps Réel

Dans ce chapitre, nous étudions le contrôle de la production sous une configuration donnée. Le travail se situe aux deux niveaux le plus bas de la hiérarchie définie dans le chapitre 2.

Le contrôle consiste à gérer la production d'une famille de pièces de manière à satisfaire une demande à débits constants. La difficulté principale du problème réside dans le fait que les machines peuvent tomber en panne. Les pannes des machines sont supposées peu fréquentes par rapport aux opérations.

Nous étudions un contrôle à deux niveaux.

Au niveau haut, les opérations sont considérées comme très fréquentes et elles sont modélisées comme des flux continus. Les pannes des machines sont modélisées comme des processus de Markov. Le contrôle consiste à gérer le flux de matière de façon à satisfaire au mieux la demande et à respecter la capacité de production. Il est formulé comme un problème de contrôle optimal des systèmes soumis à des perturbations markoviennes. Ce niveau est le niveau du contrôle de flux.

Au niveau bas, on cherche à ordonnancer les opérations de manière à respecter la politique du contrôle de flux. Des règles simples sont étudiées. Ce niveau correspond au niveau d'ordonnancement en temps réel.

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au contrôle du système de production sous une configuration donnée. Plus précisément, on admet que le système peut produire les différents types de pièces simultanément afin de satisfaire des demandes à débits constants.

Les études menées dans ce chapitre ainsi que les études du chapitre 5 sont également applicables au contrôle d'un système de production qui fabrique simultanément plusieurs types de pièces pour satisfaire une demande à débits constants. Nous admettons que les temps de changements de production sont négligeables. C'est, par définition, le cas lorsqu'on évolue à l'intérieur d'une configuration donnée. **Les notations utilisées dans ce chapitre et dans le chapitre 5 sont indépendantes des notations du chapitre 3.**

La principale difficulté du contrôle vient du fait que les machines peuvent tomber en panne. Les pannes d'une machine interrompent la production des pièces qui passent sur cette machine, ce qui diminue la capacité de production du système. Le contrôle du système doit donc réagir aux pannes des machines.

Objectifs :

Il y a deux objectifs qui correspondent à des horizons de temps différents. Le premier objectif concerne la **réponse aux pannes des machines**. Le contrôleur doit disposer d'un horizon raisonnable pour pouvoir absorber les pannes, c'est-à-dire pour remplacer les interruptions dues aux pannes par une réduction des capacités de production. Le deuxième objectif est de trouver un ordonnancement qui **minimise les en-cours** sur un horizon court. Dans l'approche présentée dans cette thèse, nous nous contentons de chercher une solution admissible, c'est-à-dire une solution qui réalise le flux optimal trouvé au niveau immédiatement supérieur.

Le contrôle d'un tel système consiste à prendre des décisions qui répondent aux objectifs des horizons différents. Une approche globale serait certainement mal adaptée à ce problème.

Hypothèse fondamentale :

Nous supposons que les opérations sont exécutées plus fréquemment que se

produisent les pannes et que les machines tombent plusieurs fois en panne sous une configuration, i.e.

durées des opérations

<< durées moyennes de fonctionnement normal et de réparation

<< durée de la configuration

A partir de cette hypothèse, nous considérons un contrôle à deux niveaux (voir la figure 4.1):

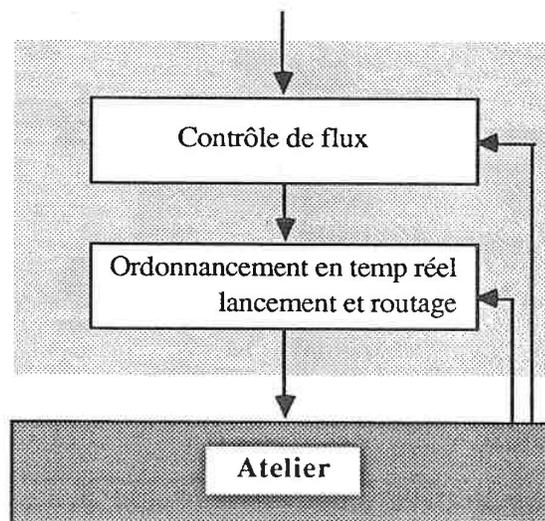


Figure 4.1: Structure du contrôle sous une configuration donnée

Le niveau haut concerne le contrôle du flux de production. Les opérations sont supposées infiniment fréquentes. Aussi, la fabrication est considérée comme un processus continu. Le contrôle de flux consiste à définir un plan de flux à travers le système en fonction de l'état des machines et de l'état des stocks. Il tient compte des statistiques sur la fiabilité des machines.

Le niveau bas concerne l'ordonnancement en temps réel. Il s'agit d'ordonner le lancement en fabrication de pièces et l'exécution des opérations tout en respectant le plan de flux établi au niveau supérieur. En outre, les contraintes de la fabrication discrète, négligées dans le plan de flux, sont prises en compte à ce niveau.

Ce chapitre est organisé en neuf sections.

Les sections de 4.2 à 4.5 sont consacrées au contrôle de flux. Dans la section 4.2, nous établissons le modèle du contrôle de flux. Dans la section 4.3, nous examinons les caractéristiques des politiques optimales à l'aide du principe d'optimalité de Bellman. La section 4.4 est consacrée au calcul des politiques optimales. La section 4.5 évalue les fonctions de coût des politiques optimales pour les présenter sous la forme sous laquelle elles ont été utilisées dans la section précédente. Les sections 4.2 à 4.4 résument les travaux de Kimemia et Gershwin [1983] et Gershwin, Akella et Choong [1985]. Dans la section 4.5, nous étendons les résultats de ces auteurs aux systèmes qui comportent des machines non identiques en parallèle.

Dans la section 4.6, nous étudions le problème de routage. Il s'agit de trouver les proportions de pièces à affecter aux différentes gammes de fabrication.

La section 4.7 est consacrée à l'ordonnancement en temps réel. Des règles simples sont utilisées pour le lancement en fabrication et le routage des pièces.

La section 4.8 évalue la capacité de production à long terme. Cette capacité de production tient compte des pannes en moyenne.

La section 4.9 présente des résultats numériques. Un exemple de "flow-shop" ainsi qu'un exemple de "job-shop" y sont présentés.

4.2. Modèle de contrôle de flux

Conformément à la conception précédente, les opérations sont supposées très fréquentes et la fabrication est considérée comme un processus continu. Les contraintes de la fabrication discrète telles que l'exclusion mutuelle, la non préemptivité et la précedence des opérations sont négligées dans le modèle du contrôle de flux. Rappelons que ces contraintes négligées seront prises en compte au niveau de l'ordonnancement en temps réel.

4.2.1. Définitions et notations

L'atelier étudié comporte M machines sur lesquelles N types de pièces sont fabriqués. L'horizon considéré est T . Cet horizon correspond à la durée totale de la

fabrication sous une configuration donnée.

Nous notons :

$$\mathcal{M} := \{1, 2, \dots, M\},$$

$$\mathcal{N} := \{1, 2, \dots, N\}$$

les ensembles d'indices correspondant aux machines et aux types de pièces.

D'après l'hypothèse faite dans le chapitre 2, les pièces du même type sont toutes obtenues par la même séquence d'opérations. Les données caractérisant les séquences d'opérations sont les suivantes:

- K_n ($n \in \mathcal{N}$) représente le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir une pièce de type n ,
- O_n^k ($n \in \mathcal{N}$ et $k = 1, 2, \dots, K_n$) représente la $k^{\text{ième}}$ opération nécessaire pour obtenir une pièce de type n .

Nous désignons par

$$\mathcal{K}_n := \{1, 2, \dots, K_n\}$$

l'ensemble des indices correspondant aux opérations sur les pièces de type n .

Une opération peut être faite par plusieurs machines mais les temps nécessaires à ces machines pour effectuer l'opération peuvent être différents. Pour $(n, m, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \times \mathcal{K}_n$, nous désignons par τ_{nmk} le temps nécessaire à la machine m pour effectuer l'opération O_n^k . Par convention, $\tau_{nmk} = \infty$ si l'opération O_n^k ne peut pas être effectuée par la machine m .

Nous supposons que la demande pour chaque type de pièce arrive à un débit constant tout au long de l'horizon considéré. Pour $n \in \mathcal{N}$, nous notons d_n la demande instantanée constante de pièces de type n qui correspond au débit constant de la demande de pièces de type n . Nous désignons par

$$\mathbf{d} := (d_1, d_2, \dots, d_N)$$

le vecteur **demande instantanée**, appelé encore débit de la demande.

4.2.2. Description du modèle

Ce paragraphe est consacré à la description du modèle du contrôle de flux. Nous commençons par définir les variables de contrôle et les variables d'état du modèle. Puis, nous examinons la modélisation de la dynamique de l'état des machines et précisons les contraintes de capacité de production du système. Ensuite, nous introduisons les valeurs du critère des politiques de contrôle. Enfin, nous établissons le modèle du contrôle de flux.

1. Variable de contrôle et état du système

Les variables de contrôle au niveau du contrôle de flux sont les productions instantanées des différents types de pièces. Pour $n \in \mathcal{N}$ et $t \in [0, T]$, nous notons $u_n(t) \in \mathbb{R}^+$ la production instantanée de pièces de type n à l'instant t . Nous désignons par

$$\mathbf{u}(t) := (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))$$

le vecteur production instantanée. Une politique de contrôle peut être notée $\{\mathbf{u}(t), t \in [0, T]\}$.

Pour $n \in \mathcal{N}$, $m \in \mathcal{M}$ et $k \in \mathcal{X}_n$, nous désignons par $y_{nmk}(t)$ le débit des pièces de type n sur la machine m lorsqu'elles subissent l'opération O_n^k . Ces débits sont également des variables inconnues. Cependant, ce ne sont pas des variables de contrôle mais des variables intermédiaires au niveau du contrôle de flux.

L'état du système à un instant donné se traduit par les états des machines et par les états des stocks. Les variables caractérisant l'état du système sont :

- $\alpha_m(t)$ ($m \in \mathcal{M}$) nombre bivalent indiquant l'état de la machine m à l'instant t de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \alpha_m(t) &= 1 && \text{si la machine } m \text{ est en état de marche à l'instant } t, \\ &= 0 && \text{si la machine } m \text{ est en panne à l'instant } t, \end{aligned}$$

- $x_n(t)$ ($n \in \mathcal{N}$) nombre réel qui représente l'état du stock de produits finis de type n à l'instant t .

Nous désignons par :

$$\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_M(t))$$

le vecteur état des machines à l'instant t . Ce vecteur sera également appelé **état des machines**.

Nous notons S le domaine de définition du vecteur état des machines $\alpha(t)$. L'ensemble S comprend 2^M éléments, i.e.

$$\text{card}(S) = 2^M$$

Nous notons :

$$\mathbf{x}(t) := (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$$

le vecteur état des stocks à l'instant t . $\mathbf{x}(t)$ sera également appelé **état des stocks**.

L'état du système à un instant t est composé de deux parties: l'état des machines $\alpha(t)$ et l'état des stocks $\mathbf{x}(t)$. Nous le notons $(\alpha(t), \mathbf{x}(t))$.

Nous supposons que l'état initial du système $(\alpha(0), \mathbf{x}(0))$ est connu.

Compte tenu de ces notations, l'état du stock $x_n(t)$ peut être calculé de la manière suivante:

$$\frac{d x_n(t)}{dt} = \sum_{m \in \mathcal{M}} y_{nmK_n}(t) - d_n \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (4.1)$$

où K_n est l'indice de la dernière opération nécessaire pour obtenir une pièce de type n .

$x_n(t)$ peut être positif ou négatif. S'il est positif, il correspond à un niveau du stock. S'il est négatif, il correspond à un retard de livraison.

D'après l'équation (4.8) que nous allons établir au paragraphe 3, l'équation (4.1) peut s'écrire de façon équivalente :

$$\frac{d x_n(t)}{dt} = u_n(t) - d_n \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (4.2)$$

2. Modélisation de la dynamique de l'état des machines

Une machine est en état de marche ou en panne. *Nous supposons que la transition entre ces deux états peut être modélisée comme un processus de Markov.*

Par conséquent, la dynamique de l'état des machines est caractérisée par les paramètres suivants:

p_m ($m \in \mathcal{M}$) le taux de panne de la machine m ,

r_m ($m \in \mathcal{M}$) le taux de réparation de la machine m .

Si la machine m est en état de marche, la probabilité qu'elle tombe en panne dans un intervalle de longueur δt est égale à $p_m \delta t + o(\delta t)$. Si la machine m est en panne, la probabilité qu'elle soit réparée est $r_m \delta t + o(\delta t)$. La dynamique de $\alpha_m(t)$ est donc gouvernée par

$$\text{Prob}(\alpha_m(t+\delta t) = 0 \mid \alpha_m(t) = 1) = p_m \delta t + o(\delta t), \quad (4.3)$$

et

$$\text{Prob}(\alpha_m(t+\delta t) = 1 \mid \alpha_m(t) = 0) = r_m \delta t + o(\delta t) \quad (4.4)$$

La durée de fonctionnement normal et la durée de réparation d'une machine sont donc modélisées comme des variables aléatoires de distributions exponentielles. La durée moyenne de fonctionnement normal et la durée moyenne de réparation de la machine m sont $1/p_m$ et $1/r_m$ respectivement.

Par conséquent, la dynamique de l'état des machines $\alpha(t)$ est également modélisée par une chaîne de Markov dont le nombre d'états est 2^M . La loi de transition est la suivante:

$$\text{Prob}[\alpha(t+\delta t) = b \mid \alpha(t) = a] = \lambda_{ab} \delta t + o(\delta t) \quad \forall (a,b) \in S \times S \quad (4.5)$$

où λ_{ab} représente le taux de transition entre les états a et b des machines. Les taux de transition λ_{ab} dépendent des taux de panne p_m et des taux de réparation r_m .

Remarquons que dans ce modèle de pannes, on suppose que la probabilité qu'une machine tombe en panne ne dépend pas de l'utilisation des machines. Cette hypothèse ne correspond pas à la réalité en ce qui concerne, par exemple, l'usure des outils. Par contre, en ce qui concerne le vieillissement des machines, cette

hypothèse n'est pas restrictive car le vieillissement des machines n'est pas sensible à cet horizon.

3. Contraintes de capacité du système

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux contraintes de capacité de production du système. La capacité de production est limitée à la fois par les capacités des machines et par les capacités des stocks tampons. Nous examinons d'abord les deux limites. Ensuite, nous définissons le domaine des contrôles admissibles.

A. Limitation de capacité des machines

Considérons une période courte de longueur Δt . Pendant cette période, le temps nécessaire à la machine m pour effectuer l'opération k sur les pièces de type n est le suivant:

$$\tau_{nmk} y_{nmk}(t) \Delta t$$

Donc, la charge totale de la machine m pendant cette période est :

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) \Delta t$$

La disponibilité de la machine m dépend de son état de fonctionnement. Si elle est en panne, elle ne peut effectuer aucune opération. Si elle est en état de marche, elle ne peut pas travailler au delà de 100% du temps. Donc, les contraintes de capacité des machines peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) \Delta t \leq \alpha_m(t) \Delta t \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

ou encore :

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) \leq \alpha_m(t) \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

B. Limitation des en-cours du système

Pour le contrôle de flux, nous supposons que l'accumulation de matières dans le système est strictement interdite.

Cette hypothèse permet de produire les pièces avec des en-cours faibles. Elle est justifiée dans beaucoup de cas parce que les capacités des en-cours (stocks internes) sont souvent petits et que la durée totale de fabrication d'une pièce est

petite.

Considérons une période courte de longueur Δt . Le nombre de pièces de type n lancées en fabrication pendant cette période est $u_n(t) \Delta t$. Le nombre de pièces de type n qui visitent la machine m pour y subir l'opération k est $y_{nmk}(t) \Delta t$. Le nombre total de pièces de type n qui visitent les machines pour l'opération k est $\sum_m y_{nmk}(t) \Delta t$.

Puisque l'accumulation de matière dans le système est strictement interdite, le nombre de pièces lancées en fabrication doit être égal au nombre total de pièces qui visitent les machines pour l'opération k , i.e.

$$\sum_m y_{nmk}(t) \Delta t = u_n(t) \Delta t \quad \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n,$$

ou encore :

$$\sum_m y_{nmk}(t) = u_n(t) \quad \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n$$

Ces contraintes impliquent que la fabrication est à flux tendu.

C. Domaine des contrôles admissibles

Nous pouvons maintenant définir le domaine des contrôles admissibles. Un contrôle $u(t)$ est dit admissible si les capacités des machines ne sont pas dépassées et si les contraintes de non accumulation de matière sont respectées.

Plus formellement, un contrôle $u(t)$ est dit **admissible** si et seulement s'il existe $\{y_{nmk}(t), (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n\}$ de telle sorte que

$$y_{nmk}(t) \geq 0 \quad \forall (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n, \quad (4.6)$$

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) \leq \alpha_m(t) \quad \forall m \in \mathcal{M}, \quad (4.7)$$

$$\sum_m y_{nmk}(t) = u_n(t) \quad \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \quad (4.8)$$

Nous notons $\Omega(t)$ l'ensemble des contrôles $u(t)$ admissibles.

Remarquons que le domaine $\Omega(t)$ ne dépend pas explicitement du temps t . Il dépend de l'état des machines. Il peut être noté plus précisément $\Omega(\alpha(t))$.

4. Critère

Nous nous intéressons à la minimisation des stocks et des retards. L'idéal du contrôle de flux est de satisfaire la demande avec zéro stock et sans retard, c'est-à-dire $x(t) = 0 \forall t$. En raison des pannes des machines, ce cas idéal n'est jamais possible. La politique du contrôle de flux consiste à conduire le système vers cette situation idéale.

Pour cela, nous pénalisons la valeur positive et la valeur négative de l'état des stocks $x(t)$ par une fonction de pénalisation $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$. En particulier, nous supposons que :

$$g(x) = \sum_n g_n(x_n), \quad (4.9)$$

$$\lim_{|x_n| \rightarrow \infty} g_n(x_n) \rightarrow +\infty \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (4.10)$$

et

$$g_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (4.11)$$

L'équation (4.9) implique que la fonction de pénalisation $g(x(t))$ est séparable. Chaque fonction $g_n(x_n)$ est continue, convexe et positive. La fonction suivante est souvent utilisée dans la littérature

$$\begin{aligned} g_n(x_n) &= cs_n x_n && \text{si } x_n \geq 0, \\ &= -cb_n x_n && \text{si } x_n < 0 \end{aligned}$$

où cs_n et cb_n représentent le coût de stockage et le coût dû au retard de pièces de type n respectivement.

Etant donné un état initial du système (α, x) à l'instant 0, nous définissons la valeur du critère d'une politique de contrôle $\{u(t), t \in [0, T]\}$ comme le coût cumulé sur l'horizon complet. Notons cette valeur du critère $J_u(\alpha, x, 0)$, i.e. :

$$J_u(\alpha, x, 0) = E \left[\int_0^T g(x(s)) ds \mid \alpha(0) = \alpha, x(0) = x \right] \quad (4.12)$$

Dans le cas idéal où $x(t) = 0 \forall t$, cette valeur du critère devient nulle.

5. Modèle du contrôle de flux

Le problème du contrôle de flux peut être énoncé de la manière suivante: étant donné un état initial du système (α, x) à l'instant 0, nous cherchons une politique de contrôle $u(t) \in \Omega(\alpha(t))$ sur l'horizon $[0, T]$ de manière à

$$\text{minimiser } J_u(\alpha, x, 0) \quad (4.13)$$

sous les contraintes (4.2) et (4.5).

En résumé, le modèle de contrôle de flux peut être écrit comme :

$$\min E \left[\int_0^T g(x(s)) ds \right]$$

sous les contraintes :

$$\frac{d x_n(t)}{dt} = u_n(t) - d_n \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

$$\text{Prob}[\alpha(t) = b \mid \alpha(t) = a] = \lambda_{ab} \delta t + o(\delta t) \quad \forall (a, b) \in S \times S,$$

$$u(t) \in \Omega(\alpha(t)), \alpha(0) = \alpha \text{ et } x(0) = x$$

Remarquons que le contrôle de flux est un problème de contrôle optimal des systèmes soumis à des perturbations markoviennes.

4.2.3. Discussion

Nous allons examiner la faisabilité par le niveau de l'ordonnancement en temps réel d'une politique du contrôle de flux.

Dans le modèle de contrôle de flux, nous ignorons les contraintes de la fabrication discrète, c'est-à-dire les contraintes d'exclusion mutuelle, les contraintes de précedence et les contraintes de non préemption. L'utilisation d'un modèle continu est justifiée lorsque toute politique du contrôle de flux est réalisable par un ordonnancement adéquat.

La cohérence entre le modèle continu et le modèle discret est assurée par les résultats de recherche de Cohen, Dubois, Quadrat et Viot [1985] pour les

"flow-shops" à l'aide de la théorie des dioïdes et de Hillion [1989], Hillion et Proth [1989] pour les "job-shops" à l'aide des réseaux de Petri temporisés. Ils étudient les systèmes de production répétitive pour des ratios de production fixés. Le résultat qui nous intéresse le plus est le suivant :

Il est toujours possible de saturer la machine goulot (ou la plus chargée) avec un nombre limité de pièces d'en-cours.

Ce résultat concerne le cas où il n'y a pas de panne. Néanmoins, il reste valable pour notre étude car nous avons supposé que les pannes sont peu fréquentes par rapport aux opérations. Le régime transitoire dû au changement d'état des machines est donc négligeable. Nous en déduisons que toute politique de contrôle de flux $u(t)$, pour laquelle les charges des machines sont toujours inférieures à leur capacité, est toujours réalisable par le niveau de l'ordonnancement en temps réel avec un nombre limité d'en-cours.

La décomposition en niveau du contrôle de flux et niveau de l'ordonnancement en temps réel proposée dans la section 4.1 est donc cohérente.

4.3. Caractéristiques des contrôles optimaux

Dans cette section, nous nous intéressons aux caractéristiques des contrôles optimaux. D'abord, nous déduisons les conditions d'optimalité des contrôles à l'aide du principe d'optimalité de Bellman. Ensuite, nous étudions les caractéristiques des contrôles optimaux.

4.3.1. Principe d'optimalité

Ce paragraphe examine les conditions de l'optimalité à l'aide du principe d'optimalité de Bellman dans les trois cas suivants : horizon fini, horizon infini avec actualisation de coût, et minimisation du coût moyen sur l'horizon infini.

1. Cas de l'horizon fini

Nous étudions ici le problème du contrôle optimal sur un horizon de longueur T . Le problème consiste à minimiser le coût cumulé sur un horizon de temps fini $[0, T]$, c'est-à-dire :

$$J_u(\alpha, x, 0) = E \left[\int_0^T g(x(s)) ds \mid \alpha(0) = \alpha, x(0) = x \right]$$

Afin d'appliquer le principe d'optimalité, nous désignons par $J_u(\mathbf{x}, \alpha, t)$ le coût cumulé sur l'intervalle $[t, T]$ sachant que l'état du système à l'instant t est (α, \mathbf{x}) et que la politique de contrôle u est appliquée, i.e.

$$J_u(\alpha, \mathbf{x}, t) := E \left[\int_t^T g(x(s)) ds \mid \alpha(t) = \alpha, x(t) = \mathbf{x} \right]$$

Notons $J(\alpha, \mathbf{x}, t)$ la valeur minimale du coût cumulé sur l'horizon $[t, T]$, i.e.

$$J(\alpha, \mathbf{x}, t) = \min_{u \in \Omega} J_u(\alpha, \mathbf{x}, t)$$

D'après le principe d'optimalité de Bellman, nous avons :

$$J(\alpha, \mathbf{x}, t) = \min_{u \in \Omega} E \left[\int_t^{t+\delta t} g(x(s)) ds + J(\alpha(t+\delta t), x(t+\delta t), t+\delta t) \mid \alpha(t) = \alpha, x(t) = \mathbf{x} \right]$$

En utilisant le développement de Taylor, l'équation précédente peut s'écrire :

$$J(\alpha, \mathbf{x}, t) = \min_{u \in \Omega} \left\{ g(x(t))\delta t + \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda_{\alpha\beta} \delta t J(\beta, x(t+\delta t), t+\delta t) \right. \\ \left. + (1 + \lambda_{\alpha\alpha}\delta t) \left[J(\alpha, \mathbf{x}, t) + \frac{\partial J(\alpha, \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \delta t + \frac{\partial J(\alpha, \mathbf{x}, t)}{\partial t} \delta t \right] + o(\delta t) \right\}$$

Lorsque $\delta t \rightarrow 0$, après quelques manipulations on obtient :

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ g(x) + \frac{\partial J(\alpha, \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial J(\alpha, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{\beta} \lambda_{\alpha\beta} J(\beta, \mathbf{x}, t) \right\} = 0 \quad (4.14)$$

Cette équation est appelée **équation partielle de Bellman**. Elle permet de transformer un problème d'optimisation sur un horizon complet en un problème d'optimisation à un instant donné. La démonstration rigoureuse de ce résultat est donnée par Rishel [1975].

Puisque $dx/dt = u(t) - d$, le deuxième terme est le seul terme dans l'équation (4.14) qui dépend de $u(t)$. L'équation (4.14) implique que la politique optimale peut être déterminée par :

$$\min_{u \in \Omega} \frac{\partial J(\alpha, x, t)}{\partial x} (u - d) \quad (4.15)$$

2. Cas de l'horizon infini avec actualisation de coût

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au problème de contrôle optimal sur l'horizon infini avec actualisation de coût. Nous cherchons une politique de contrôle u qui minimise le coût suivant :

$$J_u(\alpha, x) = E \left[\int_0^{\infty} g(x(s)) e^{-\gamma s} ds \mid \alpha(0) = \alpha, x(0) = x \right]$$

Notons $J(\alpha, x)$ la valeur minimale du coût cumulé $J_u(\alpha, x)$, c'est-à-dire :

$$J(x, \alpha) = \min_{u \in \Omega} J_u(x, \alpha)$$

Par le principe d'optimalité de Bellman, nous avons :

$$J(\alpha, x) = \min_{u \in \Omega} E \left\{ \int_0^{\delta t} g(x(s)) e^{-\gamma s} ds + e^{-\gamma \delta t} J(\alpha(\delta t), x(\delta t)) \mid \alpha(0) = \alpha, x(0) = x \right\}$$

Lorsque $\delta t \rightarrow 0$, par le développement de Taylor on obtient :

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ g(x) + \frac{\partial J(\alpha, x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \gamma J(\alpha, x) + \sum_{\beta} \lambda_{\alpha\beta} J(\beta, x) \right\} = 0 \quad (4.16)$$

L'équation (4.16) est la condition de l'optimalité des politiques de contrôle. Elle transforme un problème d'optimisation sur l'horizon infini en un problème d'optimisation à un instant donné.

Remarquons que dans l'équation (4.16), seul le deuxième terme dépend de $u(t)$. L'équation (4.16) implique que la politique optimale peut être déterminée par :

$$\min_{u \in \Omega} \frac{\partial J(\alpha, x)}{\partial x} (u - d) \quad (4.17)$$

3. Minimisation du coût moyen sur l'horizon infini

Nous abordons ici le problème de minimisation du coût moyen sur l'horizon infini. Nous cherchons une politique de contrôle u qui minimise la limite suivante:

$$\varphi_u(\alpha, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} \int_0^T g(x(s)) ds \mid \alpha(0) = \alpha, x(0) = x \right]$$

La difficulté de ce problème vient du fait que le coût moyen sur l'horizon infini ne dépend pas de l'état initial du système. En plus, des conditions supplémentaires sont nécessaires pour que le coût moyen sur l'horizon infini existe. Par la suite, nous nous limitons aux politiques de contrôle dont le coût moyen est borné lorsque l'horizon tend vers l'infini.

Nous désignons par $(\alpha(t), x(u,t))$ le processus de Markov en utilisant la politique de contrôle u . Le coût moyen sur l'horizon infini existe lorsque $(\alpha(t), x(u,t))$ est ergodique.

Pour que $(\alpha(t), x(u,t))$ soit ergodique, une condition nécessaire est que la demande soit réalisable en moyenne, c'est-à-dire que la capacité de fabrication à long terme soit plus grande que la demande. Sinon, le système n'a pas suffisamment de capacité pour satisfaire la demande et $x(t)$ va décroître sans limite ce qui implique que $(\alpha(t), x(u,t))$ n'est pas ergodique.

La seconde condition nécessaire est que les politiques admissibles consistent à produire à capacité maximale lorsque la production est en retard par rapport à la demande et à ne pas autoriser à l'état des stocks $x(t)$ de croître sans limite.

Une politique de contrôle est dite admissible si les deux conditions précédentes sont satisfaites. Le processus $(\alpha(t), x(u,t))$ correspondant à une politique de contrôle admissible est ergodique.

L'ergodicité du processus $(\alpha(t), x(t))$ implique qu'il existe une distribution probabiliste $P_u(\alpha, x)$ pour chaque politique admissible u . Par conséquent, le coût moyen sur l'horizon infini existe pour chaque politique admissible et nous le notons φ_u . Il est indépendant de l'état initial et est donné par :

$$\varphi_u = \int_{x, \alpha} g(x) d P_u(x, \alpha)$$

La politique optimale de contrôle satisfait :

$$\varphi_{u^*} = \inf_u \varphi_u$$

Pour caractériser les politiques optimales, il est nécessaire qu'une fonction de coût existe et qu'elle soit bien définie dans tout espace d'état du système et pour toute politique admissible.

Il est montré (voir Tsitsiklis [1982]) qu'il existe une fonction de coût continue, convexe et positive qui est notée $J(\alpha, \mathbf{x})$ et que la politique optimale de contrôle est déterminée par :

$$\min_{u \in \Omega} \left\{ g(\mathbf{x}) + \frac{\partial J(\alpha, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \sum_{\beta} \lambda_{\alpha\beta} J(\beta, \mathbf{x}) - \varphi_{u^*} \right\} = 0 \quad (4.18)$$

L'équation (4.18) est la condition de l'optimalité des politiques de contrôle dans le cas où le critère est la minimisation de coût moyen sur l'horizon infini.

Remarquons que dans l'équation (4.18), seul le deuxième terme dépend de $u(t)$. L'équation (4.18) implique que la politique optimale peut être déterminée par:

$$\min_{u \in \Omega} \frac{\partial J(\alpha, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (u - d) \quad (4.19)$$

4.3.2. Caractéristiques

Les conditions de l'optimalité dans les trois cas de la section 4.3.1 peuvent être écrites sous une forme unifiée de la manière suivante :

$$u^* = \operatorname{argmin}_{u \in \Omega} \frac{\partial J(\alpha, \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} (u - d) \quad (4.20)$$

où *argmin* est un argument qui minimise l'expression qui suit.

Nous notons $c(\alpha, \mathbf{x}, t)$ le vecteur dérivée de la fonction de coût $J(\alpha, \mathbf{x}, t)$ en \mathbf{x} :

$$c(\alpha, \mathbf{x}, t) = \frac{\partial J(\alpha, \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$$

Par conséquent, la condition de l'optimalité (4.20) est équivalente à :

$$u^* = \operatorname{argmin}_{u \in \Omega} c(\alpha, x, t)^T (u - d)$$

Cette équation est linéaire en u et l'ensemble $\Omega(\alpha(t))$ est un polyèdre convexe. Si la fonction de coût $J(\alpha, x, t)$ est connue, la politique optimale de contrôle peut être calculée à l'aide de la programmation linéaire. Donc, l'évaluation de la fonction de coût $J(\alpha, x, t)$ est primordiale dans la recherche de la politique optimale de contrôle.

Si le vecteur dérivée $c(\alpha, x, t)$ n'est orthogonal à aucune surface du domaine $\Omega(\alpha(t))$, la politique optimale de contrôle $u^(\alpha, x, t)$ correspond à un point extrême du domaine $\Omega(\alpha(t))$. Pour chaque état des machines α , la politique optimale de contrôle divise l'espace de $x(t)$ en plusieurs régions. Dans chaque région, le contrôle optimal $u^*(\alpha, x, t)$ correspond à un point extrême du domaine $\Omega(\alpha(t))$. Ceci n'est pas vrai dans toutes les frontières de ces régions.*

La fonction de coût $J(\alpha, x, t)$ possède les propriétés suivantes (voir Kimemia [1983]):

1. $J(\alpha, x, t)$ est continue en x et t $\forall \alpha \in S,$
2. $J(\alpha, x, t)$ est convexe en x $\forall \alpha \in S$ et $\forall t;$
3. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} J(\alpha, x, t) \rightarrow \infty$ $\forall \alpha \in S$ et $\forall t$

La convexité de la fonction de coût implique que chaque optimum local est aussi un optimum global. La propriété (3) assure que la fonction de coût atteint son minimum pour des valeurs finies de x .

Nous allons examiner la trajectoire de l'état des stocks $x(t)$ lorsque l'état des machines $\alpha(t)$ reste invariant pendant une période longue.

La trajectoire de l'état des stocks dépend de la capacité de production qui est fonction de l'état des machines $\alpha(t)$. Dans la suite, nous décomposons le domaine de définition du vecteur état $\alpha(t)$ (noté S) en deux sous-ensembles disjoints selon la capacité de production. Un état des machines $\alpha \in S$ est dit **faisable** lorsque $d \in \Omega(\alpha)$. Par contre, un état des machines $\alpha \in S$ est dit **infaisable** lorsque $d \notin \Omega(\alpha)$.

La capacité de production est suffisamment grande pour satisfaire la demande lorsque le vecteur état $\alpha(t)$ correspond à un état faisable. Par contre, elle n'est pas suffisante pour satisfaire la demande lorsque le vecteur état $\alpha(t)$ correspond à un état infaisable.

1. Trajectoire de l'état des stocks dans le cas de l'horizon fini

Dans le cas de l'horizon fini, la fonction de coût $J(\alpha, x, t)$ décroît dans le temps t , c'est-à-dire :

$$J(\alpha, x, t_1) < J(\alpha, x, t_2) \quad \forall t_1 > t_2, \text{ et } \forall (\alpha, x) \in S_x | \mathbb{R}^N$$

Nous en déduisons que :

$$\frac{\partial J(\alpha, x, t)}{\partial t} \leq 0 \quad \forall t \text{ et } \forall (\alpha, x) \in S_x | \mathbb{R}^N$$

Lorsque l'état des machines $\alpha(t)$ reste dans un état α pour $\alpha \in S$, la dérivée du coût $J(\alpha(t), x(t), t)$ par rapport au temps t satisfait la condition suivante :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{J(\alpha, x(t+\Delta), t+\Delta) - J(\alpha, x(t), t)}{\Delta} = \frac{\partial J(\alpha, x, t)}{\partial x} (u^* - d) + \frac{\partial J(\alpha, x, t)}{\partial t} \leq c(\alpha, x, t)^T (u^* - d)$$

Considérons un état des machines α faisable ($d \in \Omega(\alpha)$). Puisque la politique optimale $u^*(t)$ minimise $c(\alpha, x, t)^T (u - d)$ dans le domaine $\Omega(\alpha)$, la dérivée de $J(\alpha, x(t), t)$ en t est toujours négative. Par conséquent, **la valeur de $J(\alpha, x(t), t)$ décroît par rapport au temps t lorsque le système reste dans le même état α des machines.** D'autre part, la valeur de $J(\alpha, x(t), t)$ est toujours positive. Elle décroît jusqu'à une limite positive. Cette limite est atteinte lorsque $x(t)$ minimise la fonction de coût $J(\alpha, x, t)$.

Considérons un état α des machines infaisable ($d \notin \Omega(\alpha)$). Si le système reste dans cet état pendant une période longue, l'état des stocks $x(t)$ décroît vers moins l'infini. Néanmoins, il est possible que la politique optimale consiste à maintenir les stocks de certains types de pièce positifs et en même temps à conduire les stocks des autres types vers moins l'infini. Cela arrive dans le cas où la capacité de production pour certains types de pièce est beaucoup plus grande que la capacité pour d'autres types de pièce.

2. Trajectoire de l'état des stocks dans le cas de l'horizon infini

Dans le cas de l'horizon infini, la fonction de coût ne dépend pas explicitement du temps t et elle peut être notée $J(\alpha(t), x(t))$.

Intuitivement, si le système reste dans un état α des machines faisable pendant une période longue, l'état des stocks $x(t)$ ne peut pas croître sans limite et il va converger vers un vecteur à déterminer.

Notons h^α cet état des stocks stable que nous appelons **point de séparation** (hedging point). Il correspond à l'état idéal des stocks établi pour absorber les pannes. On peut le comparer au stock de sécurité dans la gestion classique de stocks. Nous donnons ici des arguments plus formels de l'existence des points de séparation.

Lorsque l'état $\alpha(t)$ des machines reste dans un état α pour $\alpha \in S$, la dérivée de $J(\alpha(t), x(t))$ par rapport au temps t satisfait la condition suivante:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{J(\alpha, x(t+\Delta)) - J(\alpha, x(t))}{\Delta} &= \frac{\partial J(\alpha, x)}{\partial x} (u^* - d) \\ &= c(\alpha, x)^T (u^* - d) \end{aligned}$$

Considérons un état α des machines tel que $d \in \Omega(\alpha)$. Puisque la politique optimale u^* minimise $c(\alpha, x)^T (u - d)$ dans le domaine $\Omega(\alpha)$, la dérivée de $J(\alpha, x(t))$ en t est toujours négative. Par conséquent, *la valeur de la fonction de coût $J(\alpha, x(t))$ décroît par rapport au temps t lorsque le système reste dans l'état α .*

D'autre part, la valeur de la fonction de coût $J(\alpha, x(t))$ est toujours positive. Elle décroît jusqu'à une limite positive. Cette limite est atteinte lorsque $x(t)$ minimise la fonction de coût $J(\alpha, x)$. Après cet instant, la politique optimale consiste à maintenir invariant l'état des stocks $x(t)$ ce qui implique $u^* = d$. *La vecteur x qui minimise la fonction de coût $J(\alpha, x)$ correspond au point de séparation que nous avons défini ci-dessus, c'est-à-dire :*

$$h^\alpha = \underset{x}{\operatorname{argmin}} J(\alpha, x)$$

Pour un état α des machines tel que $d \notin \Omega(\alpha)$, la trajectoire de l'état des stocks est la même que dans le cas de l'horizon fini.

4.4 Calcul des contrôles optimaux

Cette section est entièrement consacrée au calcul des contrôles optimaux pour le cas de l'horizon infini. Elle est organisée en quatre parties. Le paragraphe 4.4.1 propose une approximation quadratique des fonctions de coût et établit la condition d'optimalité du contrôle. Dans le paragraphe 4.4.2, nous nous intéressons au calcul des contrôles optimaux. Dans le paragraphe 4.4.3, nous constatons la singularité du contrôle. Le paragraphe 4.4.4 propose un algorithme de calcul qui permet de gérer la singularité du contrôle.

4.4.1 Approximation quadratique des fonctions de coût

Nous rappelons que la politique optimale de contrôle peut être déterminée par l'équation suivante :

$$u^* = \underset{u \in \Omega}{\operatorname{argmin}} c(\alpha, x)^T (u - d) \quad (4.21)$$

où

$$c(\alpha, x) = \frac{\partial J(\alpha, x)}{\partial x}$$

Nous avons également montré dans le paragraphe 4.3.2 que lorsque l'état des machines $\alpha(t)$ est faisable, la politique optimale consiste à conduire l'état des stocks $x(t)$ vers un état idéal des stocks h^α que nous avons appelé point de séparation et

$$h^\alpha = \underset{x}{\operatorname{argmin}} J(\alpha, x)$$

Comme nous l'avons souligné dans la section 4.3, l'évaluation de la fonction de coût $J(\alpha, x)$ est primordiale dans la recherche de la politique optimale. La solution exacte de la fonction de coût $J(\alpha, x)$ consiste à résoudre l'équation partielle de Bellman. En raison de la difficulté de sa résolution, l'équation partielle de Bellman n'est pas directement utilisable.

D'un point de vue pratique, l'essentiel du contrôle de flux n'est pas d'obtenir la solution exacte de l'équation partielle de Bellman mais d'assurer la bonne conduite du système en cas de panne des machines. Dans la suite, nous utilisons une approximation quadratique pour les fonctions de coût $J(\alpha, x)$ et nous montrons

par des simulations que cette approximation donne des résultats satisfaisants. La politique de contrôle issue de cette approximation est capable d'assurer la bonne conduite du système en cas de panne des machines.

Nous supposons que la fonction de coût $J(\alpha, x)$ peut être approximée par une fonction quadratique de la manière suivante :

$$J(\alpha, x) = \frac{1}{2} x^T A(\alpha) x + B(\alpha)^T x + C_1(\alpha) \quad \forall (\alpha, x) \in S \times \mathbb{R}^{N+}$$

où $A(\alpha)$ est une matrice définie positive de dimension $N \times N$, $B(\alpha)$ est un vecteur de dimension N et $C_1(\alpha)$ est un nombre réel.

La "définie positivité" de la matrice A assure la convexité de la fonction de coût $J(\alpha, x)$ et $J(\alpha, x)$ est minimisée en :

$$h^\alpha = - A(\alpha)^{-1} B(\alpha)$$

La fonction de coût peut alors être réécrite de manière équivalente comme :

$$J(\alpha, x) = \frac{1}{2} (x - h^\alpha)^T A(\alpha) (x - h^\alpha) + C_2(\alpha) \quad (4.22)$$

La condition à réaliser pour optimiser (4.21) est donc remplacée par :

$$u^* = \operatorname{argmin}_{u \in \Omega} [A(\alpha) (x - h^\alpha)]^T (u - d)$$

En résumé, la politique optimale de contrôle est déterminée par le problème suivant:

$$\text{minimiser } [A(\alpha) (x - h^\alpha)]^T (u(t) - d) \quad (4.23)$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) &\leq \alpha_m(t) & \forall m \in \mathcal{M}, \\ \sum_m y_{nmk}(t) &= u_n(t) & \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n, \\ y_{nmk}(t) &\geq 0 & \forall (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \end{aligned}$$

Nous étudierons le choix des paramètres des fonctions de coût dans la section 4.5. Dans la suite de cette section, nous nous intéressons au calcul des politiques optimales de contrôle.

4.4.2 Calcul du contrôle optimal

En introduisant des variables d'écart, le problème linéaire (4.23) peut être mis sous forme standard de programmation linéaire :

$$\text{minimiser } C(\alpha, \mathbf{x})^T \mathbf{v} \quad (4.24)$$

sous les contraintes $G \mathbf{v} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{v} \geq 0$

Pour ce problème, nous désignons respectivement par I et J le nombre de contraintes et le nombre de variables. Il est clair que $I \leq J$. G est une matrice $I \times J$ et $\text{rang}(G) = I$.

Le vecteur \mathbf{v} est l'inconnue du problème et il est composé du vecteur production instantanée $u(t)$, des variables de routage $\{y_{nmk}(t), (m, n, k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n\}$ et des variables d'écart pour transformer les contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité.

Le vecteur $C(\alpha, \mathbf{x})$ est défini de la manière suivante :

$$C(\alpha, \mathbf{x}) = P(\alpha) (\mathbf{x} - \mathbf{h}^\alpha) \quad (4.25)$$

où

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

La méthode du simplexe peut être utilisée pour résoudre le problème (4.24) (voir Minoux [1983]). Dans cette méthode, on part du fait que l'ensemble des solutions admissibles forme un polyèdre convexe et qu'au moins un point extrême de ce polyèdre correspond à une solution optimale si ce polyèdre n'est pas vide. Pour cela, on introduit les notions de base et de solution de base. On appelle base toute sous-matrice carrée régulière ($I \times I$) extraite de G .

Soit B une base. On peut mettre la matrice G sous la forme $G = [B, \mathcal{N}]$ où \mathcal{N} est la sous-matrice formée par les colonnes de G qui ne sont pas dans la base. De même, on peut partitionner u en $[u_B, u_N]$ et $c(\alpha, x)$ en $[C_B(\alpha, x), C_N(\alpha, x)]$. La solution de base est définie comme :

$$u_B = B^{-1} b, \text{ et } u_N = 0.$$

Une solution de base est dite réalisable si $u_B \geq 0$.

Rappelons que chaque solution de base réalisable correspond à un point extrême du polyèdre des solutions admissibles. Il existe au moins un point extrême qui est une solution optimale. Une solution de base réalisable est une solution optimale si et seulement si

$$C_B(\alpha, x)^T B^{-1} \mathcal{N} - C_N(\alpha, x)^T \leq 0$$

Considérant l'équation (4.25), la condition précédente est équivalente à :

$$[(B^{-1} \mathcal{N})^T P_B(\alpha) - P_N(\alpha)] (x - h^\alpha) \leq 0 \quad (4.26)$$

où $P_B(\alpha)$ est la sous-matrice formée par les lignes de $P(\alpha)$ correspondant aux variables de base, et $P_N(\alpha)$ est la sous-matrice formée par les lignes de $P(\alpha)$ correspondant aux variables hors base.

La condition (4.26) est la condition de l'optimalité des solutions de base réalisables. Elle décompose l'espace de l'état des stocks $x(t)$ en cônes convexes polyédriques dont le point extrême correspond au point de séparation h^α . A l'intérieur de chaque cône, la politique optimale u^* est unique et constante et correspond à une solution de base ou à un point extrême du domaine $\Omega(\alpha)$.

Remarquons que cette décomposition de l'espace $x(t)$ est indépendante de la demande. Nous allons montrer sur un exemple comment l'espace de l'état des stocks est décomposé en régions par politiques de contrôle.

Exemple:

Considérons un système comportant deux machines M1 et M2. Deux types de pièces, notés P1 et P2, sont fabriqués. Toutes les pièces passent successivement les deux machines, M1 puis M2. Les temps de fabrication des pièces de type 1 sont τ_1

sur la machine M1 et τ_2 sur la machine M2. Les temps de fabrication des pièces de type 2 sont τ_2 sur la machine M1 et τ_1 sur la machine M2. Supposons que $\tau_1 > \tau_2$.

Notons $u_n(t)$ la production instantanée de pièces de type n pour $n = 1$ et 2. Le domaine des contrôles admissibles $\Omega(\alpha)$ est donc défini par les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_1 u_1(t) + \tau_2 u_2(t) &\leq \alpha_1(t), \\ \tau_2 u_1(t) + \tau_1 u_2(t) &\leq \alpha_2(t) \end{aligned} \quad \forall t \in [0, T]$$

Lorsqu'au moins une machine tombe en panne, $u_1(t) = u_2(t) = 0$ est la seule solution admissible. Nous nous concentrons donc sur le cas où les deux machines sont en état de marche ($\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = 1$).

La figure 4.2 illustre le domaine des contrôles admissibles $\Omega((1,1))$. C'est un polygone à quatre sommets $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ et

$$S_0 = (0,0), S_1 = (0, 1/\tau_1), S_2 = (1/(\tau_1+\tau_2), 1/(\tau_1+\tau_2)), \text{ et } S_3 = (1/\tau_1, 0)$$

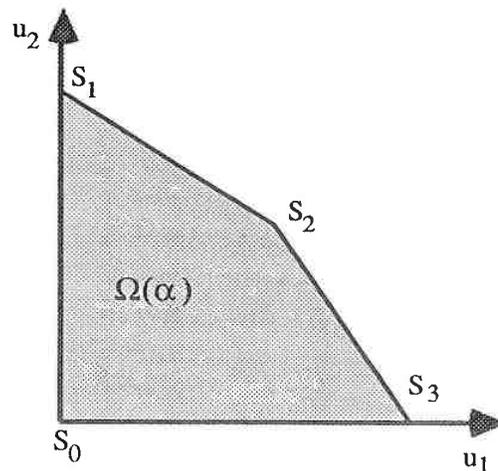


Figure 4.2: Domaine des contrôles admissibles

Nous supposons connue les matrices $A(\alpha)$ des fonction de coût et soit :

$$A((1, 1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forme standard du problème de contrôle optimal (4.24) est la suivante :

minimiser $C(\alpha, x)^T v$
sous les contraintes:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & 1 & 0 \\ \tau_2 & \tau_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

et $v \geq 0$

où R_1 et R_2 sont deux variables d'écart.

Les coefficients de coût sont définis de la manière suivante :

$$C(\alpha, x) = P(\alpha) (x - h^\alpha)$$

où

$$P((1, 1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il y a quatre solutions de base réalisables. Les variables de base sont $\{R_1, R_2\}$, $\{u_2, R_1\}$, $\{u_1, u_2\}$ et $\{u_1, R_2\}$ respectivement. Nous donnons dans la suite les conditions de l'optimalité de chaque base.

Base 1

Les variables de base sont R_1 et R_2 et la matrice de base est :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution de base correspond au point extrême S_0 du domaine Ω , c'est-à-dire :

$$u_1 = u_2 = 0, \text{ et } R_1 = R_2 = 1.$$

Les conditions de l'optimalité de cette base sont les suivantes :

$$x - h^\alpha \geq 0$$

Ces conditions sont satisfaites dans la région D_0 illustrée dans la figure 4.3. Elles impliquent que lorsque l'état des stocks $x(t)$ dépasse le point de séparation h , la politique optimale consiste à ne rien produire.

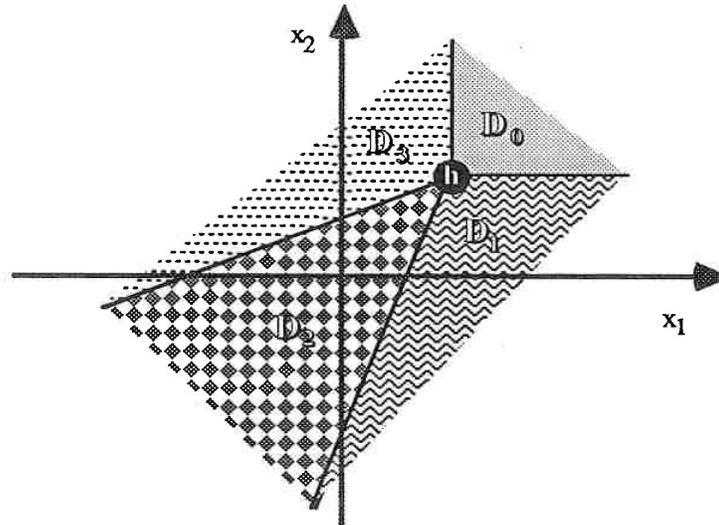


Figure 4.3: Décomposition de l'espace $x(t)$ par politiques de contrôle

Base 2

Les variables de base sont u_2 et R_1 . La matrice de base est :

$$B = \begin{bmatrix} \tau_2 & 1 \\ \tau_1 & 0 \end{bmatrix}$$

La solution de base correspond au point extrême S_1 du domaine Ω , i.e.

$$u_1 = R_2 = 0, u_2 = 1/\tau_1 \text{ et } R_1 = 1 - \tau_2/\tau_1$$

Les conditions de l'optimalité de cette base s'écrivent comme :

$$\begin{bmatrix} -\tau_1 & \tau_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (x - h^\alpha) \leq 0$$

Ces conditions sont satisfaites dans la région D_1 illustrée dans la figure 4.3. Elles impliquent que lorsque le niveau du stock de pièces de type 2 est suffisamment bas par rapport au niveau du stock de pièces de type 1, la politique optimale consiste à

produire à la capacité uniquement les pièces de type 2.

Base 3

Les variables de base sont u_1 et u_2 . La matrice de base est :

$$B = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix}$$

La solution de base correspond au point extrême S_2 du domaine Ω , c'est-à-dire :

$$u_1 = u_2 = 1/(\tau_1 + \tau_2), \text{ et } R_1 = R_2 = 0$$

Les conditions de l'optimalité de cette base s'écrivent comme :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & -\tau_2 \\ -\tau_2 & \tau_1 \end{bmatrix} (x - h^\alpha) \leq 0$$

Ces conditions sont satisfaites dans la région D_2 illustrée dans la figure 4.3. Elles impliquent que lorsque l'état du stock de pièces de type 1 est suffisamment proche de l'état du stock de pièces de type 2, la politique optimale consiste à produire à la capacité type 1 et type 2 en même quantité.

Base 4

Les variables de base sont u_1 et R_2 . La matrice de base est :

$$B = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ \tau_2 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution de base correspond au point extrême S_3 du domaine Ω , i.e.

$$u_2 = R_1 = 0, u_1 = 1/\tau_1 \text{ et } R_2 = 1 - \tau_2/\tau_1$$

Les conditions de l'optimalité de cette base sont :

$$\begin{bmatrix} \tau_2 & -\tau_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (x - h^\alpha) \leq 0$$

Ces conditions sont satisfaites dans la région D_3 illustrée dans la figure 4.3. Elles impliquent que lorsque le niveau du stock de pièces de type 1 est suffisamment bas par rapport au niveau du stock de pièces de type 2, la politique optimale consiste à produire à la capacité uniquement les pièces de type 1.

4.4.3 Trajectoire de l'état des stocks et singularité du contrôle

Nous avons montré que l'espace de l'état des stocks $x(t)$ peut être décomposé en régions en fonction des politiques de contrôle. A l'intérieur de chaque région, la politique optimale est toujours la même. Nous allons examiner la trajectoire de l'état des stocks.

Rappelons que l'état des stocks et la politique de contrôle satisfont la condition suivante:

$$dx(t)/dt = u(t) - d$$

Lors du changement de l'état des machines $\alpha(t)$ à un instant t_0 , $x(t_0)$ se trouve dans une région. La politique optimale de cette région est $u(t_0)$. Puisque $u(t_0)$ est optimale partout dans cette région, la trajectoire de $x(t)$ forme une droite dans cette région jusqu'à ce que $x(t)$ atteigne une frontière de la région.

Une frontière est elle-même une région de dimension réduite. Les frontières peuvent être divisées en deux classes: **attractives** et **non attractives**.

Lorsque $x(t)$ traverse une frontière non attractive, la politique optimale $u(t)$ change. La nouvelle politique de contrôle conduit l'état $x(t)$ à s'éloigner de cette frontière. La politique optimale saute d'un point extrême du domaine $\Omega(\alpha(t))$ à un autre point extrême. La trajectoire de $x(t)$ forme une autre droite avant de rencontrer une autre frontière. La figure 4.4 (a) schématise cette situation.

Lorsque $x(t)$ traverse une frontière attractive et entre dans une nouvelle région à l'instant t_1 , la politique optimale $u(t_1)$ est différente de $u(t_0)$. Mais, la nouvelle politique de contrôle conduit $x(t)$ à revenir à cette frontière et à rentrer dans la région de départ. Lorsque $x(t)$ traverse la frontière et rentre dans la région de départ, la politique optimale qui est $u(t_0)$ conduit $x(t)$ à re-traverser la frontière. La politique optimale bascule ainsi sans arrêt entre $u(t_1)$ et $u(t_0)$ qui correspondent à deux points extrêmes du domaine $\Omega(\alpha(t))$. La trajectoire de $x(t)$ zigzague autour de

la frontière. La figure 4.4 (b) schématise cette situation.

Ce phénomène est dû à la singularité du contrôle optimal. Les solutions optimales de base du programme linéaire ne permettent pas que la trajectoire de $x(t)$ reste dans la frontière.

Cette singularité augmente la difficulté de l'implantation en temps réel de la politique du contrôle de flux. L'algorithme décrit ci-dessous permet d'éliminer cette singularité du contrôle.

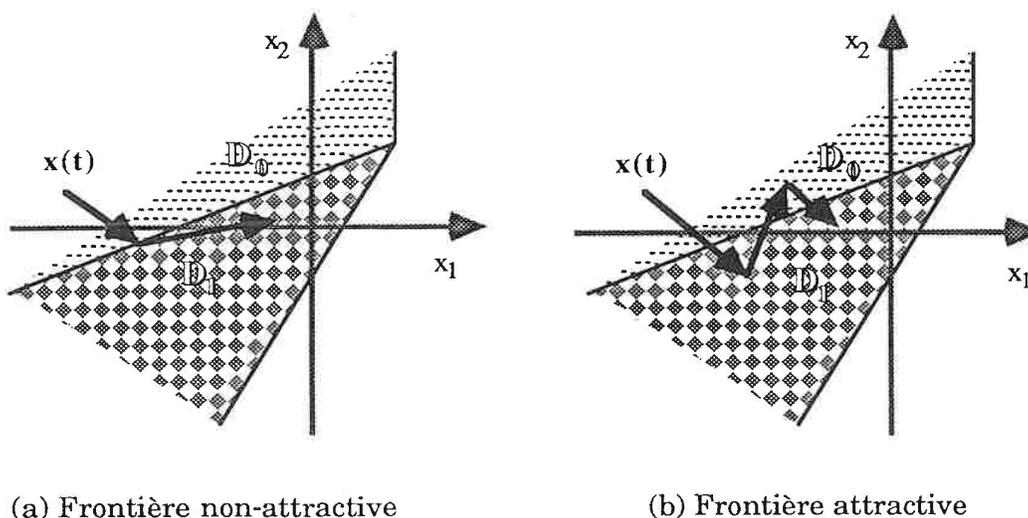


Figure 4.4: Trajectoire de l'état des stocks $x(t)$

4.4.4 Elimination de la singularité du contrôle

L'espace $x(t)$ est décomposé en cônes situés côte-à-côte. Les cônes sont convexes et polyédriques et ils ont le même point extrême: le point de séparation.

Supposons que la singularité du contrôle soit éliminée. Dès que l'état $x(t)$ atteint une frontière attractive, il ne quitte plus cette frontière avant le prochain changement d'état des machines. L'état $x(t)$ est donc limité dans un espace de dimension réduite: la frontière attractive.

Cet espace de dimension réduite est également décomposé en cônes de dimension réduite. Lorsque $x(t)$ rencontre dans cet espace une frontière attractive, il est de

nouveau limité dans un autre espace de dimension encore plus faible.

Si le vecteur état $\alpha(t)$ reste dans un état faisable ($d \in \Omega(\alpha(t))$) pendant une période suffisamment longue, $x(t)$ converge en un point. Si la capacité du système est strictement plus grande que la demande, $x(t)$ s'arrête au point de séparation.

Si le vecteur état $\alpha(t)$ reste dans un état infaisable ($d \notin \Omega(\alpha(t))$) pendant une période suffisamment longue, $x(t)$ décroît sans limite en suivant une droite.

L'idée de base pour l'élimination de la singularité est la suivante: lorsque $x(t)$ atteint une frontière attractive, ajouter une contrainte supplémentaire au domaine des contrôles admissibles $\Omega(\alpha(t))$ afin de maintenir $x(t)$ dans cette frontière.

L'algorithme conçu sur cette idée est itératif. Chaque itération comporte les étapes suivantes :

- (1) Résoudre le programme linéaire (4.24),
- (2) Calculer la durée pendant laquelle $x(t)$ reste dans la même région,
- (3) Détecter la nature de la frontière rencontrée,
- (4) Ajouter une contrainte supplémentaire si la frontière est attractive.

Supposons que le système entre dans un état α de machines à l'instant t_0 . A l'issue de cet algorithme, nous obtenons une suite d'instants $\{t_1, t_2, \dots, t_j = \infty\}$ telle que $t_0 < t_1 < \dots < t_{j-1} < t_j = \infty$ et une suite de contrôles $\{u^1, u^2, \dots, u^j\}$. La politique optimale de contrôle $u(t)$ et la trajectoire de l'état des stocks $x(t)$ sont données par :

$$u(t) = u^i \quad \text{et} \quad x(t) = x(t_{i-1}) + (u^i - d)(t - t_{i-1}) \quad \text{si } t_{i-1} \leq t < t_i$$

Par conséquent, la politique optimale de contrôle est constante par morceaux et la singularité du contrôle est éliminée. Une autre suite de contrôles sera appliquée dès que l'état des machines changera.

La première étape de cet algorithme a déjà été présentée dans les paragraphes précédents. Nous allons examiner successivement les autres étapes. Un exemple est donné à la fin de cette section.

1. Trajectoire de $x(t)$ dans une région

Nous allons calculer la trajectoire de $x(t)$ dans une région et pour un état donné des machines α .

Considérons un instant initial t_0 . L'état des stocks et la politique de contrôle sont respectivement $x(t_0)$ et $u(t_0)$. Notons \mathbf{R} la région de l'état des stocks $x(t)$ correspondante. Nous désignons par \mathbf{B} la base optimale correspondante (voir 4.4.2).

Supposons que $x(t_0)$ se trouve à l'intérieur de la région \mathbf{R} . La politique optimale $u(t_0)$ et la base \mathbf{B} restent optimales tant que $x(t)$ reste dans cette région.

Supposons que $x(t)$ atteigne une frontière de la région \mathbf{R} à l'instant t_1 . La trajectoire de $x(t)$ dans cette région est la suivante :

$$x(t) = x(t_0) + (u(t_0) - d)(t - t_0) \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.27)$$

D'après la condition d'optimalité (4.26), nous avons :

$$[(\mathbf{B}^{-1} \mathcal{A})^T \mathbf{P}_B(\alpha) - \mathbf{P}_N(\alpha)] (x(t) - h^\alpha) \leq 0 \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.28)$$

Nous notons, pour l'équation (4.28)

$$\mathbb{F} := (\mathbf{B}^{-1} \mathcal{A})^T \mathbf{P}_B(\alpha) - \mathbf{P}_N(\alpha)$$

\mathbb{F} est donc une matrice de dimensions $(J - I) \times N$.

Combinant les équations (4.27) et (4.28), nous obtenons :

$$\mathbb{F} [u(t_0) - d] (t - t_0) \leq - \mathbb{F} (x(t_0) - h^\alpha) \quad \forall t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.29)$$

D'après la définition de t_1 , les conditions (4.29) ne sont plus satisfaites après l'instant t_1 . Par conséquent, si les conditions (4.29) sont satisfaites pour tout $t \geq t_0$, nous avons :

$$t_1 = \infty$$

Dans le cas contraire, t_1 est obtenu par l'équation suivante :

$$t_1 - t_0 = \min_{1 \leq i \leq J-1 / F(i)^T (u(t_0) - d) > 0} \left\{ \frac{F(i)^T (x(t_0) - h^\alpha)}{F(i)^T (u(t_0) - d)} \right\} \quad (4.30)$$

où $F(i)$ est un vecteur qui désigne le i ième ligne de la matrice F ou :

$$F(i) := (F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{iN})$$

2. Détection des frontières

Nous allons examiner si la frontière rencontrée à l'instant t_1 est attractive. Supposons que cette frontière soit la π ième frontière de la région R . Alors, nous avons :

$$F(\pi)^T (u(t_0) - d) > 0 \text{ et } F(\pi)^T (x(t_1) - h^\alpha) = 0$$

Afin de déterminer la nature de cette frontière, supposons que la politique $u(t_0)$ soit appliquée après t_1 pendant une période suffisamment courte de longueur ϵ . La trajectoire $x(t)$ entre dans une région voisine qui est notée R^ϵ .

L'état des stocks à l'instant $t+\epsilon$ est donc :

$$x(t_1 + \epsilon) = x(t_1) + (u(t_0) - d) \epsilon$$

D'après la définition de l'indice π , la π ième condition de (4.28) n'est plus satisfaite après l'instant t_1 , c'est-à-dire :

$$F(\pi)^T (x(t_1 + \epsilon) - h^\alpha) > 0$$

Nous notons u^ϵ la politique optimale correspondant à la région R^ϵ . Pour $t \geq t_1 + \epsilon$, l'état des stocks est déterminé de la manière suivante :

$$x(t) = x(t_1 + \epsilon) + (u^\epsilon - d) (t - t_1 - \epsilon)$$

Si u^ϵ conduit $x(t)$ à s'éloigner de la frontière après l'instant $t_1 + \epsilon$, la frontière est non-attractive. Sinon, la frontière est attractive. La figure 4.5 schématise les deux possibilités.

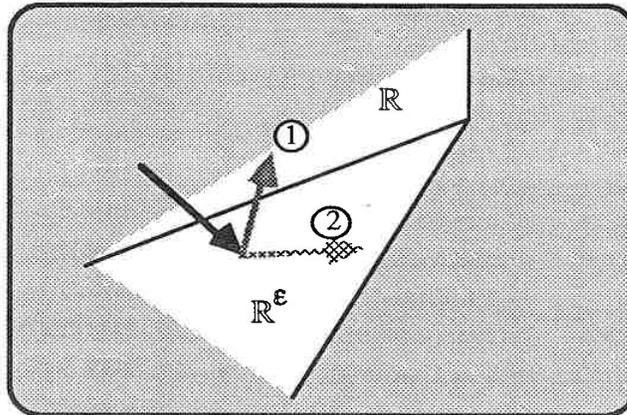


Figure 4.5: Test de la nature d'une frontière

Remarquons que la quantité $F(\pi)^T (x(t) - h^\alpha)$ pour $t \geq t_1 + \epsilon$ satisfait la condition suivante :

$$F(\pi)^T (x(t) - h^\alpha) = F(\pi)^T (u(t_0) - d) \epsilon + F(\pi)^T (u^\epsilon - d) (t - t_1 - \epsilon)$$

Si $F(\pi)^T (u^\epsilon - d) < 0$, la quantité $F(\pi)^T (x(t) - h^\alpha)$ décroît et elle devient à nouveau négative après un certain temps. Les conditions de (4.28) sont à nouveau satisfaites. Par conséquent, $x(t)$ rentre dans la région R. La frontière est donc attractive.

Si $F(\pi)^T (u^\epsilon - d) > 0$, la quantité $F(\pi)^T (x(t) - h^\alpha)$ croît et elle reste positive pour $t \geq t_1 + \epsilon$. $x(t)$ s'éloigne de la frontière et la frontière est non-attractive.

En résumé, la π ième frontière est attractive si et seulement si

$$F(\pi)^T (u^\epsilon - d) < 0 \tag{4.31}$$

3. Contrainte supplémentaire

Lorsque $x(t)$ rencontre une frontière attractive, la politique de contrôle après cet instant consiste à maintenir la trajectoire $x(t)$ sur cette frontière.

Utilisant les notations du paragraphe précédent, $x(t)$ atteint la π ième frontière de

la région R à l'instant t_1 . Après l'instant t_1 , $x(t)$ doit rester dans cette frontière, ce qui implique :

$$F(\pi)^T (x(t) - h^\alpha) = 0 \quad \forall t \geq t_1$$

Considérant la dérivée en t de cette équation, nous obtenons :

$$F(\pi)^T (dx/dt) = 0 \quad \forall t \geq t_1$$

Cette condition supplémentaire s'écrit de façon équivalente comme :

$$F(\pi)^T (u(t) - d) = 0 \quad \forall t \geq t_1 \quad (4.32)$$

Le nouveau domaine des contrôles admissibles $\Omega^n(\alpha(t))$ est alors défini par :

$$\Omega^n(\alpha(t)) := \{u / u \in \Omega(\alpha(t)) \text{ et } F(\pi)^T (u(t) - d) = 0\}$$

Le programme linéaire du contrôle optimal (4.24) est modifié de la manière suivante :

$$\text{minimiser } C(\alpha, x)^T v \quad (4.33)$$

sous les contraintes suivantes :

$$G v = b,$$

$$F(\pi)^T u(t) = F(\pi)^T d,$$

$$v \geq 0$$

Les solutions de ce programme linéaire assurent que la trajectoire de $x(t)$ reste dans la π ième frontière de la région R.

Cette frontière attractive est un espace de dimension réduite. Il est également décomposé en cônes convexes de la même dimension par les politiques de contrôle relatives aux points extrêmes du domaine $\Omega^n(\alpha(t))$. Les frontières de ces cônes de dimension réduite sont également attractives ou non attractives. Lorsque $x(t)$ atteint une frontière attractive dans cet espace de dimension réduite, une autre contrainte supplémentaire est ajoutée au domaine des contrôles admissibles $\Omega^n(\alpha(t))$ afin de maintenir $x(t)$ dans cette frontière attractive. La trajectoire de $x(t)$

entre dans un espace de dimension encore plus basse.

La trajectoire de $x(t)$ entre successivement dans des espaces de dimension décroissante. Après d'avoir ajouté N contraintes supplémentaires au domaine $\Omega(\alpha(t))$, $u(t) = d$ sera la seule politique admissible et la trajectoire de $x(t)$ entre dans un espace de dimension 0, c'est-à-dire que $x(t)$ se maintient à un point. C'est le cas pour lequel la demande est réalisable ou $d \in \Omega(\alpha)$. Le point de séparation est atteint lorsque la capacité du système est strictement supérieure à la demande.

Si la demande n'est pas réalisable ou $d \notin \Omega(\alpha)$, $u(t)$ devient une constante mais la trajectoire $x(t)$ forme une droite et décroît vers moins l'infini.

En reprenant l'exemple introduit dans le paragraphe 4.4.2, l'espace de l'état des stocks $x(t)$ est décomposé en quatre régions. Les politiques optimales correspondant à ces quatre régions sont :

$$\begin{aligned} D_0: u_1 &= u_2 = 0, \\ D_1: u_1 &= 0 \text{ et } u_2 = 1/\tau_1, \\ D_2: u_1 &= u_2 = (\tau_1 + \tau_2)^{-1}, \\ D_3: u_1 &= 1/\tau_1 \text{ et } u_2 = 0 \end{aligned}$$

Considérons le cas où la capacité de production dans l'état des machines (1,1) est strictement plus grande que la demande. Par conséquent, le vecteur demande instantanée d se trouve à l'intérieur du domaine $\Omega((1,1))$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \tau_1 d_1 + \tau_2 d_2 &< 1, \\ \tau_2 d_1 + \tau_1 d_2 &< 1 \end{aligned}$$

Supposons que $x(t)$ soit initialement dans la région D_3 et que l'état des machines soit (1, 1). Dans cette région, la politique optimale de contrôle consiste à produire les pièces de type 1 à la capacité maximale. La trajectoire de $x(t)$ est une droite et $x(t)$ se dirige vers la région D_2 .

Lorsque $x(t)$ atteint la frontière entre les régions D_2 et D_3 , il y a deux possibilités en fonction de la demande.

Si la demande satisfait la condition suivante :

$$\tau_2 [(\tau_1 + \tau_2)^{-1} - d_1] \leq \tau_1 [(\tau_1 + \tau_2)^{-1} - d_2], \quad (4.34)$$

la frontière entre D_2 et D_3 est attractive. $x(t)$ reste dans cette frontière et se dirige vers le point de séparation. La figure 4.6 (a) illustre ce cas.

Par contre, si la condition (4.34) n'est pas satisfaite, la frontière est non attractive. Dans ce cas, $x(t)$ entre dans la région D_2 et avance vers la région D_1 . La frontière entre D_1 et D_2 est attractive parce que la condition (4.34) n'est pas satisfaite. Lorsque cette frontière est atteinte, $x(t)$ reste dans cette frontière et avance directement vers le point de séparation. La figure 4.6 (b) illustre ce cas.

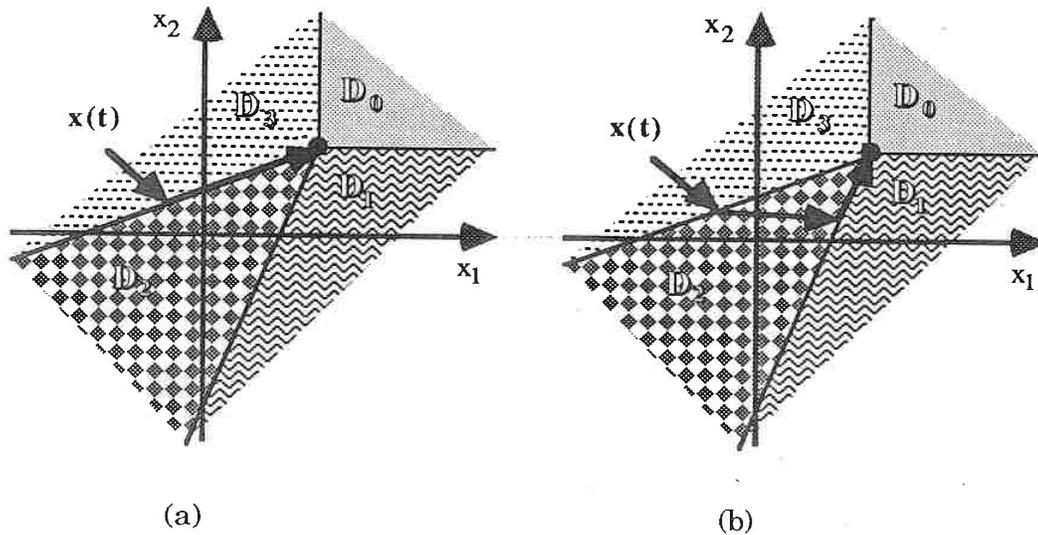


Figure 4.6: Trajectoire de l'état des stocks

4.5 Evaluation des fonctions de coût

Dans la section 4.4, nous avons proposé d'utiliser une approximation quadratique pour les fonctions de coût, c'est-à-dire :

$$J(\alpha, x) = \frac{1}{2} (x - h^\alpha)^T A(\alpha) (x - h^\alpha) + C_2(\alpha) \quad \forall (\alpha, x) \in S \times \mathbb{R}^N$$

L'argument principal est qu'une approximation quadratique est capable d'assurer la bonne conduite du système en cas de pannes des machines.

Cette section est consacrée à l'évaluation des paramètres des fonctions de coût: h^α et $A(\alpha)$. Dans le paragraphe 4.5.1, nous nous intéressons au calcul des points de séparation h^α . L'évaluation des matrices $A(\alpha)$ est étudiée dans le paragraphe 4.5.2.

4.5.1. Evaluation des points de séparation

Dans ce paragraphe, nous proposons d'abord un vecteur débit qui indique la faisabilité de la demande pour chaque état des machines et pour chaque type de pièce. Ensuite, nous évaluons le point de séparation pour un cas particulier. Dans la troisième partie, nous nous intéressons à l'évaluation des points de séparation à l'aide des résultats obtenus dans les deux premières parties.

1. Mesure de la faisabilité de la demande

Lorsque $d \notin \Omega(\alpha(t))$, la demande n'est pas réalisable. Néanmoins, les demandes de certains types de pièces peuvent être satisfaites. Nous allons introduire une mesure qui indique les types de pièces dont la demande est réalisable.

Pour chaque état des machines $\alpha \in S$, nous définissons $d^c(\alpha) \in \mathbb{R}^{N^+}$ le **vecteur débit de la demande contrôlable** de la manière suivante :

$$d^c(\alpha) := \underset{u \in \Omega(\alpha) \text{ et } u \leq d}{\operatorname{argmin}} \sum_n cb_n * (d_n - u_n) \quad (4.35)$$

où cb_n est le coût unitaire dû au retard de livraison des pièces de type n .

Si α est un état faisable, le vecteur débit de la demande contrôlable est égal au

vecteur demande instantanée, c'est-à-dire :

$$d \in \Omega(\alpha) \rightarrow d^c(\alpha) = d$$

Si α est un état infaisable, $d^c(\alpha)$ est la meilleure politique de contrôle stable. Plus précisément, si on choisit un vecteur production instantanée $u(t)$ constant tout au long de l'état α et si le système reste dans cet état pendant une période suffisamment longue, $d^c(\alpha)$ est naturellement la politique optimale.

2. Point de séparation dans un cas particulier

Dans ce paragraphe, nous considérons un cas particulier qui est initialement introduit par Gershwin, Akella et Choong [1985] pour évaluer les points de séparation dans les cas de monogramme de fabrication.

Un seul type de pièce est fabriqué par une seule machine. Le temps nécessaire à la machine pour fabriquer une pièce est τ . Le fonctionnement de la machine est périodique. Dans chaque période, la machine est en état de marche pendant T_f unités de temps puis elle tombe en panne pendant T_r unités de temps. La demande est de d pièces par unité de temps et elle est réalisable, c'est-à-dire que :

$$T_f(1/\tau - d) \geq T_r d$$

La figure 4.8 illustre la trajectoire de l'état du stock. La machine tombe en panne à l'instant t_0 . L'état du stock $x(t)$ décroît au débit $-d$ et la durée de la panne est T_r . Après la réparation, le système produit à la capacité maximale ($u(t) = 1/\tau$). L'état du stock $x(t)$ remonte vers le point de séparation. Lorsque le point de séparation est atteint, la production instantanée $u(t)$ est choisie égale à la demande instantanée ($u(t) = d$) et l'état du stock se maintient au point de séparation.

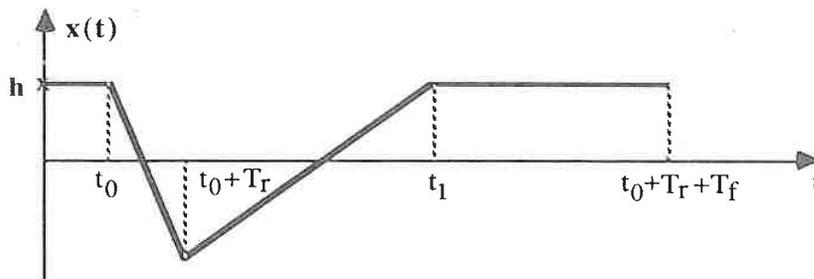


Figure 4.8: Trajectoire de l'état du stock (Gershwin, Akella et Choong [1985])

Pour cette trajectoire, on obtient le coût cumulé pendant un cycle du fonctionnement en pénalisant la région positive par le coût unitaire de stockage cs et la région négative avec le coût unitaire de retard cb . La minimisation de ce coût cumulé en fonction du point de séparation h conduit à :

$$h = \frac{cb}{cs + cb} T_r d - \frac{cs * d \tau}{cs + cb} (T_f(1/\tau - d) - T_r d)$$

Si la condition suivante est satisfaite

$$T_f(1/\tau - d) = T_r d, \quad (4.36)$$

le point de séparation est donné par :

$$h = \frac{cb}{cs + cb} T_r d \quad (4.37)$$

Remarquons que la condition (4.36) implique que la capacité moyenne du système est égale à la demande instantanée.

3. Evaluation des points de séparation

L'interprétation du vecteur h^α est différente selon le vecteur état des machines α est faisable ou infaisable. Nous allons évaluer séparément le point de séparation dans les deux cas. Les valeurs que nous allons proposer ne correspondent pas aux valeurs exactes des points de séparation.

A. Cas $d \in \Omega(\alpha)$

Pour un vecteur état α faisable, le point de séparation h^α est un état des stocks à établir pour absorber partiellement ou totalement la réduction de capacité due aux pannes des machines. Si la capacité de production est toujours supérieure à la demande quel que soit l'état des machines, alors ces stocks ne sont pas nécessaires, c'est-à-dire $h^\alpha = 0$.

Partant de ce raisonnement et des résultats obtenus dans le cas particulier, nous proposons la formule suivante :

$$h_n^\alpha = \sum_{m \in \mathcal{M}^+(\alpha)} G(\alpha, m) (1 + cs_n/cb_n)^{-1} r_m^{-1} [d_n - d_n^c(\beta(\alpha, m))] \quad (4.38)$$

où $\mathcal{M}^+(\alpha)$, $\beta(\alpha, m)$ et $G(\alpha, m)$ sont définis de la manière suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+(\alpha) &:= \{m / m \in \mathcal{M} \text{ et } \alpha_m = 1\}, \\ \beta(\alpha, m) &:= (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, 0, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_M), \\ G(\alpha, m) &:= p_m^{-1} / \sum_{w \in \mathcal{M}^+(\alpha)} p_w^{-1} \end{aligned}$$

$\mathcal{M}^+(\alpha)$ est l'ensemble des machines qui sont en état de marche dans le vecteur état α . $\beta(\alpha, m)$ représente un état voisin du vecteur état α obtenu lorsque la machine m est en panne.

La quantité suivante

$$(1 + cs_n/cb_n)^{-1} r_m^{-1} [d_n - d_n^c(\beta(\alpha, m))]$$

correspond à l'état du stock de pièces de type n à établir pour absorber l'insuffisance de capacité de production lorsque la machine m tombe en panne.

Sachant qu'une machine tombe en panne lorsqu'on se trouve dans l'état α , la quantité $G(\alpha, m)$ représente la probabilité que cette machine soit la machine m .

B. Cas $d \notin \Omega(\alpha)$

Pour un vecteur état α infaisable, l'interprétation de la quantité h_n^α dépend du fait que la demande de pièces de type n est réalisable ou non. Nous distinguons deux cas: $d_n^c(\alpha) = d_n$ et $d_n^c(\alpha) < d_n$.

Pour $n \in \mathcal{N}$ tel que $d_n^c(\alpha) = d_n$, la demande de pièces de type n est réalisable dans l'état des machines α . La quantité h_n^α correspond au niveau du stock de pièces de type n à établir pour absorber les pannes. Elle peut alors être calculée par la formule (4.38).

Pour $n \in \mathcal{N}$ tel que $d_n^c(\alpha) < d_n$, la demande de pièces de type n n'est pas réalisable dans cet état. L'existence de la quantité h_n^α est due à la convexité de la fonction de coût $J(\alpha, x)$.

Puisque la capacité de production est plus petite que la demande pour les pièces de type n , la politique optimale consiste à produire à la capacité maximale les pièces de type n . Par conséquent, la quantité h_n^α doit satisfaire la condition suivante :

$$h_n^\alpha \geq h_n^\beta \quad \forall \beta \in \mathcal{M} \text{ et } d \in \Omega(\beta) \quad (4.39)$$

Cette condition assure que la politique de contrôle consiste toujours à produire à la capacité maximale les pièces de type n lors de la transition d'un état des machines β faisable à l'état α .

Afin de satisfaire les conditions (4.39), nous proposons la valeur suivante pour tout n tel que $d_n^c(\alpha) < d_n$:

$$h_n^\alpha = (1 + cs_n/cb_n)^{-1} [d_n - d_n^c(\alpha)] \max_{m \in \mathcal{M}} \{1/r_m\} \quad (4.40)$$

où $\mathcal{M}(\alpha)$ est l'ensemble des machines qui sont en panne dans le vecteur état α , c'est-à-dire :

$$\mathcal{M}(\alpha) := \{m / m \in \mathcal{M} \text{ et } \alpha_m = 0\}$$

Cette valeur de h_n^α correspond à une borne supérieure du niveau du stock à établir pour absorber l'insuffisance de capacité de production dans l'état α .

4.5.2. Calcul de la matrice $A(\alpha)$

La matrice $A(\alpha)$ est diagonale et définie positive. Elle exprime la priorité des différents types de pièce. Le calcul de cette matrice doit prendre en compte la vulnérabilité aux pannes, la capacité du système à rattraper une demande retardée et l'importance relative des différents types de pièces.

Nous proposons une formule qui combine les trois facteurs. L'élément A_{nn} est calculé de la manière suivante :

$$A_{nn} = \beta_n * \rho_n * \xi_n \quad (4.41)$$

où β_n , ρ_n , ξ_n mesurent l'importance relative, la vulnérabilité aux pannes et la difficulté à rattraper une demande de pièces de type n en retard.

Pour la vulnérabilité aux pannes des machines, nous utilisons la valeur suivante:

$$\rho_n = \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \sum_{m \in \mathcal{M}} \gamma_{nmk} (p_m/r_m) \quad (4.42)$$

où γ_{nmk} est la proportion de pièces de type n qui visitent la machine m pour l'opération k . γ_{nmk} est obtenue par l'équilibrage des charges des machines en prenant en compte en moyenne l'existence des pannes.

La quantité (p_m/r_m) exprime la disponibilité de la machine m . Plus le taux de panne p_m est grand et plus le taux de réparation r_m est petit, plus la machine est susceptible de tomber en panne.

La somme dans l'équation (4.42) exprime la vulnérabilité de pièces de type n aux pannes des machines. Plus le nombre d'opérations est grand, plus les pièces de ce type sont sensibles aux pannes de machines.

La valeur suivante est utilisée pour évaluer la difficulté à rattraper une demande en retard :

$$\xi_n = 1/U_n^* \quad (4.43)$$

où U_n^* est le débit maximal auquel le système produit les pièces de type n en considérant les pannes en moyenne. Plus U_n^* est grand, plus vite le système est capable de rattraper une demande en retard.

4.6 Optimisation des routages

Dans le problème du contrôle de flux présenté dans les sections 4.2 à 4.5, il s'agit de déterminer un vecteur production instantanée pour chaque instant ($u(t)$). Cependant, il peut y avoir infinité de choix de routages $\{y_{nmk}(t), (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}_n\}$ pour chaque vecteur production instantanée.

Dans ce paragraphe, nous déterminons $\{y_{nmk}(t), (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}_n\}$ de manière à équilibrer les charges des machines. L'optimisation de routage présentée ci-dessous suppose qu'il y a suffisamment de moyens de transport. Elle est similaire à l'approche statique de Frein et al. [1987]. Frein et al. [1987] ont également étudié l'optimisation de routage avec le nombre de transports limité.

Pour bien équilibrer les charges des machines , il est indispensable de minimiser la charge maximale des machines. Souvent, les machines peuvent encore être mieux équilibrées après avoir minimisé la charge maximale. Dans la suite, nous nous intéressons d'abord à la minimisation de la charge maximale. Ensuite, nous examinons comment améliorer les charges des machines à l'issue de la minimisation de la charge maximale.

1. Minimisation de la charge maximale

Connaissant le vecteur production instantanée $u(t)$, les variables de routage $y_{nmk}(t)$ satisfont les conditions suivantes :

$$\sum_m y_{nmk}(t) = u_n(t) \quad \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \quad (4.44)$$

Pour $m \in \mathcal{M}$, nous désignons par z_m la charge de la machine m . Elle est déterminée par :

$$z_m = \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk} \quad (4.45)$$

Notons z la charge des machines les plus chargées, c'est-à-dire :

$$z = \max\{z_1, z_2, \dots, z_M\} \quad (4.46)$$

Le problème de la minimisation de la charge maximale est le suivant: étant donné le vecteur production instantanée $u(t)$, nous cherchons $\{y_{nmk}(t) \geq 0, (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n\}$ de manière à :

$$\text{minimiser } z \quad (4.47)$$

sous les contraintes (4.44), (4.45), (4.46).

Le problème (4.47) peut être transformé en un problème équivalent de programmation linéaire :

minimiser z

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} z &\geq \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) & \forall m \in \mathcal{M}, \\ \sum_m y_{nmk}(t) &= u_n(t) & \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n, \\ y_{nmk}(t) &\geq 0 & \forall (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \end{aligned}$$

Pour la solution optimale du problème (4.47), nous appellerons $z(1)$ la valeur optimale de z et $\mathcal{M}(1)$ l'ensemble des machines dont la charge est égale à $z(1)$.

Le problème (4.47) minimise la charge des machines les plus chargées, mais il est encore possible de mieux équilibrer les charges des autres machines.

2. Amélioration de l'équilibrage des charges des machines

Pour mieux équilibrer les charges des machines du sous-ensemble $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}(1)$, nous cherchons à minimiser la charge maximale de ces machines en supposant que les charges des machines du sous-ensemble $\mathcal{M}(1)$ sont limitées par $z(1)$. Cette optimisation correspond au problème suivant :

minimiser z

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} z &\geq \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) && \forall m \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}(1), \\ \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) &\leq z^*(1) && \forall m \in \mathcal{M}(1), \\ \sum_m y_{nmk}(t) &= u_n(t) && \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \\ y_{nmk}(t) &\geq 0 && \forall (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \end{aligned}$$

Pour la solution optimale, nous désignons par $z(2)$ la valeur minimale de z et par $\mathcal{M}(2)$ l'ensemble des machines dont la charge est supérieure ou égale à $z(2)$.

Remarquons qu'il est encore possible de mieux équilibrer les charges des machines du sous-ensemble $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}(2)$.

Plus généralement, le problème de l'équilibrage des charges des machines est résolu par une procédure itérative. A chaque itération l , l'ensemble des machines est divisé en deux sous-ensembles $\mathcal{M}(l-1)$ et $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}(l-1)$ et nous désignons par $z_m(l-1)$ la charge de la machine m d'après la solution optimale de l'itération précédente. Les charges des machines du sous-ensemble $\mathcal{M}(l-1)$ sont supposées inférieures ou égales à $z_m(l-1)$. Nous cherchons à minimiser la charge maximale des machines du sous-ensemble $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}(l-1)$.

Pour la solution optimale correspondante, nous notons $z(l)$ le minimum de la charge maximale des machines du sous-ensemble $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}(l-1)$ et $\mathcal{M}(l)$ le sous-ensemble des machines dont la charge est supérieure ou égale à $z(l)$.

L'algorithme suivant équilibre donc les charges des machines.

Algorithme de routage :

1. Initialisation

1.1. **Faire** : $l := 1$ où l est le compteur d'itération,

1.2. **Faire** : $\mathcal{M}(0) := \emptyset$,

2. **Résoudre** le problème suivant :

minimiser z

sous les contraintes suivantes :

$$z \geq \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) \quad \forall m \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}(l-1),$$

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) \leq z_m(l-1) \quad \forall m \in \mathcal{M}(l-1),$$

$$\sum_m y_{nmk}(t) = u_n(t) \quad \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n,$$

$$y_{nmk}(t) \geq 0 \quad \forall (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n$$

Notons z^* et $\{y_{nmk}^*(t), (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n\}$ la solution optimale obtenue.

3. Calcul de l'ensemble $\mathcal{M}(l)$ et des charges des machines $z_m(l)$

3.1. **Faire** : $\mathcal{M}(l) := \emptyset$,

3.2. **Pour** m de 1 à M :

3.2.1. **Faire** : $z_m(l) := \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}^*(t)$,

3.2.2. **Si** $z_m(l) \geq z^*$ **faire** : $\mathcal{M}(l) := \mathcal{M}(l) \cup \{m\}$,

4. **Si** $\text{card}(\mathcal{M}(l)) < M$ **faire** : $l := l+1$ et **aller en** 2, **sinon fin**.

4.7 Ordonnancement en temps réel

Dans les paragraphes 4.2 à 4.6, nous nous sommes intéressés au calcul du flux à travers le système. Nous obtenons le flux d'entrée $u(t)$ et les flux $y_{nmk}(t)$ qui traversent les machines.

Conformément à la conception de la hiérarchie, nous examinons par la suite l'implantation en temps réel de ces politiques de contrôle de flux. Deux problèmes d'ordonnancement se posent en temps réel : le lancement en fabrication et l'ordonnancement des pièces. Nous proposons des solutions à ces deux problèmes

basées sur des règles simples. Notons que notre objectif n'est pas de minimiser les en-cours mais simplement de trouver une solution admissible.

1. Lancement en fabrication

Il s'agit de trouver les instants auxquels les pièces sont lancées en fabrication. Le lancement en fabrication doit respecter la politique du contrôle de flux $u(t)$. Nous utilisons ici une règle proposée par Gershwin, Akella et Choong [1985].

Pour la période $[0, t]$, nous désignons par

- $U_n^A(t)$ ($n \in \mathcal{N}$) le nombre entier qui représente le nombre total de pièces de type n réellement lancées en fabrication,
- $U_n(t)$ ($n \in \mathcal{N}$) le nombre réel qui représente la production cumulée de pièces de type n d'après la politique du contrôle de flux.

La production cumulée $U_n(t)$ est égale à la somme de la demande cumulée et de l'état du stock $x_n(t)$, c'est-à-dire :

$$U_n(t) = d_n * t + x_n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N} \text{ et } \forall t \geq 0$$

La stratégie de lancement consiste à maintenir le nombre $U_n^A(t)$ de pièces réellement lancées en fabrication toujours plus grand que $U_n(t)$. Chaque fois que $U_n^A(t)$ devient égal à $U_n(t)$ et que la production instantanée $u_n(t)$ est positive, une pièce de type n est lancée en fabrication. La figure 4.9 illustre cette stratégie.

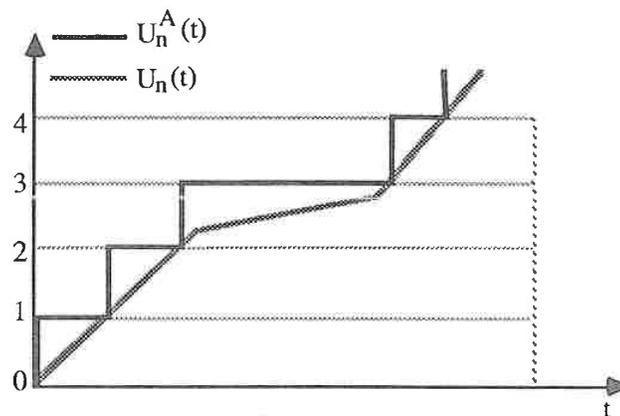


Figure 4.9: Lancement en fabrication

Par cette stratégie, il est évident qu'on lance au plus une pièce de plus que la quantité $U_n(t)$, c'est-à-dire :

$$U_n(t) \leq U_n^A(t) \leq U_n(t) + 1 \quad \forall n \in \mathcal{N} \text{ et } \forall t \geq 0$$

2. Ordonnancement des pièces en fabrication

Nous abordons ici l'ordonnancement de la production des pièces lancées en fabrication. Il s'agit d'affecter les machines libres aux pièces en fabrication. Des règles simples comme PAPS (premier arrivé premier servi) peuvent être utilisées pour ordonnancer la fabrication. Mais nous cherchons des règles plus compliquées de façon à respecter les décisions de routage du niveau de flux ($y_{nmk}(t)$).

Afin de minimiser les en-cours, nous supposons qu'aucune machine n'est délibérément maintenue inactive. Cela implique que si une machine est libre et si la file d'attente de cette machine n'est pas vide, alors une pièce dans la file d'attente est affectée à cette machine.

Pour $(m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n$, nous notons $Y_{nmk}^A(t)$ le nombre de pièces de type n qui visitent réellement la machine m pour l'opération k pendant la période $[0, t]$.

Nous définissons par $\Delta Y_{nmk}(t)$ l'écart entre $Y_{nmk}^A(t)$ et la quantité cumulée de pièces de type n affectées à la machine m pour l'opération k en accord avec la politique du contrôle de flux, c'est-à-dire :

$$\Delta Y_{nmk}(t) = Y_{nmk}^A(t) - \int_0^t y_{nmk}(s) ds$$

Pour $(n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n$, nous désignons par $q_{nk}(t)$ le nombre de pièces de type n qui attendent pour subir l'opération k à l'instant t .

Pour $(m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n$ tels que la file d'attente (n,k) n'est pas vide ($q_{nk}(t) > 0$) et que la machine m est libre, nous cherchons un triplet (m^*, n^*, k^*) dont la valeur de l'écart $\Delta Y_{nmk}(t)$ est minimale, c'est-à-dire :

$$(m^*, n^*, k^*) := \underset{(n,k,m)}{\operatorname{argmin}} \{ \Delta Y_{nmk}(t) / q_{nk}(t) > 0 \text{ et la machine } m \text{ est libre} \}$$

Si le triplet (m^*, n^*, k^*) existe, la stratégie d'ordonnancement consiste à affecter

une pièce de type n^* à la machine m^* pour l'opération k^* .

4.8 Capacité de production à long terme

Nous nous intéressons ici à la capacité de production à long terme. D'abord, nous nous intéressons à la capacité de production avec des ratios de production fixés. Nous définissons ensuite le domaine des contrôles admissibles à long terme.

1. Capacité de production avec des ratios de production fixés

Nous nous intéressons au cas où les pièces sont produites avec des ratios fixés. Pour $n \in \mathcal{N}$, nous désignons par γ_n le ratio correspondant aux pièces de type n .

Puisque les pièces sont produites avec des ratios fixés, la production à long terme peut être exprimée par $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^+$, débit moyen des pièces produites par le système.

Nous désignons par $\mathbf{X}^*(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ le maximum du débit moyen \mathbf{X} . Ce débit maximal $\mathbf{X}^*(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ caractérise la capacité de production du système lors de la fabrication en suivant les ratios $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$.

Pour évaluer cette capacité de production à long terme, considérons une période suffisamment longue de longueur \mathbf{T} .

Pendant la période \mathbf{T} , la production est donnée par les quantités suivantes :

- \mathbf{XT} qui est la production totale,
- $\gamma_n \mathbf{XT}$ ($n \in \mathcal{N}$) qui est la production de pièces de type n .

Supposons que le système soit en état d'équilibre pendant la période \mathbf{T} . Cela implique qu'il existe une distribution probabiliste du vecteur état des machines $\alpha(t)$.

Pour $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$ où \mathbf{S} dénote le domaine de définition du vecteur état des machines $\alpha(t)$, nous notons $q(\mathbf{a})$ la probabilité que le vecteur état $\alpha(t)$ soit \mathbf{a} . Pendant la période \mathbf{T} , la durée cumulée moyenne de l'état \mathbf{a} est donc égale à $q(\mathbf{a}) \mathbf{T}$.

Notons $\mathbf{v}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ le vecteur production instantanée lorsque le vecteur état $\alpha(t)$ est égal à \mathbf{a} . Par conséquent, $\mathbf{v}_n(\mathbf{a}) q(\mathbf{a}) \mathbf{T}$ représente le nombre total de pièces de type n produites lorsque l'état des machines est \mathbf{a} .

Les contraintes dues aux ratios fixés s'écrit de la manière suivante :

$$\gamma_n X T = \sum_{a \in S} q(a) v_n(a) T \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

ou encore :

$$\gamma_n X = \sum_{a \in S} q(a) v_n(a) \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (4.48)$$

En outre, les vecteurs $v(a)$ sont limités par les domaines des contrôles admissibles $\Omega(a)$, c'est-à-dire :

$$v(a) \in \Omega(a) \quad \forall a \in S \quad (4.49)$$

La capacité de production $X^*(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ est déterminée par le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } X && (4.50) \\ & \text{sous les contraintes (4.48) et (4.49)} \end{aligned}$$

2. Domaine des contrôles admissibles

Nous notons

$$U^\infty := (U^\infty_1, U^\infty_2, \dots, U^\infty_N) \in \mathbb{R}^{N+}$$

le vecteur débit de production à long terme.

Nous donnons ici deux définitions équivalentes de l'admissibilité du vecteur U^∞ .

Définition 1:

Compte tenu de la définition du vecteur $X^*(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$, U^∞ est **admissible** si et seulement si

$$\sum_n U^\infty_n \leq X^*(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \quad (4.51)$$

où

$$\gamma_n = U^\infty_n / \sum_{i \in \mathcal{N}} U^\infty_i$$

Notons Ω^∞ l'ensemble des vecteurs U^∞ admissibles.

Sans passer par le vecteur $X^*(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$, le domaine Ω^∞ peut être défini de la manière suivante:

Définition 2:

U^∞ est **admissible** si et seulement si il existe des vecteurs production instantanée $v(a) \in \Omega(a)$ pour tout $a \in S$ tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$U^\infty = \sum_{a \in S} q(a) v(a) \quad (4.52)$$

Cette deuxième définition implique que le domaine Ω^∞ est une projection linéaire des polyèdres convexes $\Omega(a)$. Par conséquent, Ω^∞ est également un polyèdre convexe.

Remarquons que la description exacte du domaine Ω^∞ peut être très complexe. Afin d'évaluer rapidement la capacité de production à long terme, nous allons donner une approximation du domaine Ω^∞ .

Considérons le cas où les réparations sont beaucoup plus rapide que la fréquence d'arrivée des pannes, c'est-à-dire $r_m \gg p_m$ pour tout $m \in \mathcal{M}$. L'arrêt délibéré d'une machine en raison des pannes des autres machines est négligeable. La capacité de production à long terme peut être exprimée approximativement par les disponibilités des machines.

Notons y_{nmk}^∞ le débit auquel les pièces de type n visitent la machine m pour subir l'opération k . Les contraintes de disponibilité des machines s'expriment comme :

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}^\infty \leq E(\alpha_m(t)) \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (4.53)$$

La conservation des flux à long terme implique que :

$$\sum_m y_{nmk} = U_n^\infty \quad \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \quad (4.54)$$

Nous notons Ω^* l'ensemble des vecteurs U^∞ qui satisfont les contraintes (4.53) et (4.54). Le domaine des contrôles admissibles Ω^∞ peut être approximé par le domaine Ω^* .

Le domaine exact des contrôles admissibles Ω^∞ est contenu dans le domaine approximatif Ω^* , c'est-à-dire :

$$u \in \Omega^\infty \quad \rightarrow \quad u \in \Omega^*$$

Donc, Ω^* donne une évaluation optimiste de la capacité de production du système.

4.9 Exemples numériques

Cette section est consacrée à la présentation des résultats de simulation. Le premier exemple est un "flow-shop". Les résultats de simulation sont analysés en détail. Ensuite, nous présentons un exemple de "job-shop".

4.9.1 Exemple numérique de "flow-shop"

Dans ce paragraphe, nous examinons les résultats de simulation d'un "flow-shop". Nous évaluons les performances de la méthode de contrôle.

1. Modèle de simulation

Nous considérons une ligne de fabrication flexible illustrée dans la figure 4.10. Elle comporte trois stations de travail A, B et C. Chaque station de travail comporte deux machines. Les machines d'une même station peuvent effectuer les mêmes opérations, mais les temps nécessaires peuvent être différents. Deux types de pièces sont fabriqués. Les pièces du type 1 passent successivement par les trois stations de travail. Les pièces de type 2 demandent une opération à la station A, puis une autre opération à la station C.

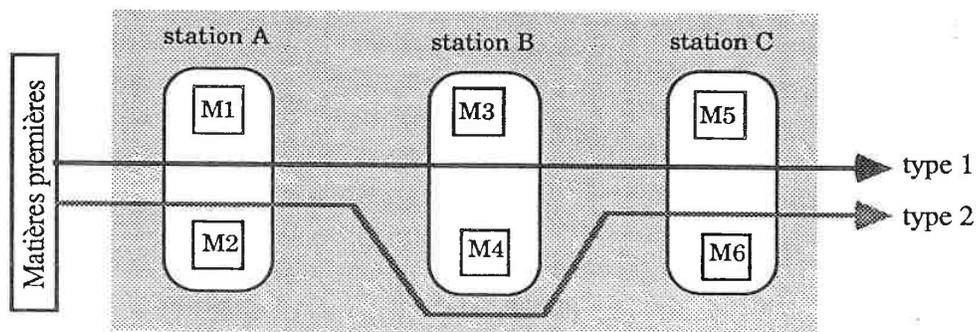


Figure 4.10: Une ligne de fabrication flexible

La demande est 1 pièce par minute pour les pièces de type 1 et 2 pièces par minute pour les pièces de type 2 :

$$d_1 = 1 \text{ pièce / minute, et } d_2 = 2 \text{ pièces / minute.}$$

Les durées des opérations sont données dans le tableau 4.1. Les durées varient entre 1/3 minute et 3 minutes.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
P1	1	1	1	3	1	1
P2	1/2	1/3	Non utilisées		1/3	1/3

Tableau 4.1: Durées des opérations en minutes

Les statistiques de pannes et de réparations sont données dans le tableau 4.2. La ligne "MTBF" (Mean Time Between Failures) donne les durées moyennes de fonctionnement normal des machines. La ligne "MTTR" (Mean Time To Repair) donne les durées moyennes de réparation. Par exemple, la machine M1 tombe en panne après en moyenne 100 minutes de travail et la réparation prend en moyenne 10 minutes.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
MTBF	100	200	200	100	300	100
MTTR	10	10	20	10	30	10

Tableau 4.2: Durées moyennes de fonctionnement et de réparation en minutes

Le tableau 4.3 donne les statistiques sur la disponibilité des machines et leur taux d'utilisation. Toutes les machines, à l'exception de la machine M2, sont disponibles pendant 90.9 % du temps, et la machine M2 est disponible pendant 95.2 % du temps.

Les taux d'utilisation espérée des machines sont obtenues par l'équilibrage des charges des machines en considérant leur disponibilité. Ces taux sont les taux minimaux d'utilisation des machines. La station C est le goulot d'étranglement du système: les machines de cette station sont utilisées à 91.7% du temps disponible. La station B est la station la moins utilisée, cependant le taux d'utilisation s'élève à 82.5%.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Disponibilité	0.909	0.952	0.909	0.909	0.909	0.909
Utilisation	0.895	0.895	0.825	0.825	0.917	0.917

Tableau 4.3: Disponibilité et utilisation espérées des machines

2. Résultats de simulation

Les résultats de cette partie proviennent d'une simulation correspondant à une durée de 7200 minutes (ou 120 heures) de la fabrication.

Le tableau 4.4 donne les disponibilités et les taux d'utilisation réels des machines. Comme prévu, les stations A et C sont plus chargées par rapport à la station B. Les machines d'une même station sont bien équilibrées, 90.7% et 86.9% pour les deux machines de la station A, 81.4% et 83.0% pour celles de la station B, 90.5% et 90.8% pour celles de la station C.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Disponibilité	0.930	0.940	0.889	0.926	0.891	0.905
Utilisation	0.907	0.869	0.814	0.830	0.905	0.908

Tableau 4.4: Disponibilité et utilisation réelle des machines

Le tableau 4.5 donne les résultats de production. La demande est de 7200 pièces de type 1 et 14000 pièces de type 2. La production réalisée est de 7053 pièces de type 1 et 13,984 pièces de type 2, soit 98.0% de la demande pour le type 1 et 97.1% de la demande pour le type 2.

Dans les colonnes de "Stock final", la colonne \bar{x} donne la moyenne de l'état des stocks $x(t)$, la colonne \bar{x}^+ donne la moyenne de la surproduction ou $\max\{0, x(t)\}$ et la colonne \bar{x}^- donne la moyenne des retards ou $\min\{0, x(t)\}$. En moyenne, la production est 54.1 pièces de type 1 et 119.5 pièces de type 2 de moins que la

demande. En résumé, la production est essentiellement en retard par rapport à la demande. Nous verrons que cela vient du fait que la capacité maximale de production n'est pas suffisante pour satisfaire la demande.

Type de pièce	Demande	Production	En-cours	Stock Final		
				x	x ⁺	x ⁻
1	7200	7053	5.199	-54.12	0.606	54.73
2	14400	13984	3.274	-119.5	0.428	119.9

Tableau 4.5: Statistiques de fabrication

Le tableau 4.6 enregistre l'historique de la fabrication. Il est possible que la production soit en retard par rapport à la demande en cas de pannes longues des machines. Mais les ratios de production sont toujours proches des ratios de la demande. C'est une caractéristique importante de l'algorithme proposé.

instant (minutes)	type 1			type 2		
	demande	production	%_produit	demande	production	%_produit
0	0	0	-	0	0	-
600	600	582	97.0	1200	1146	95.5
1200	1200	1176	98.0	2400	2385	99.4
1800	1800	1794	99.7	3600	3598	99.9
2400	2400	2371	98.8	4800	4723	98.4
3000	3000	2951	98.4	6000	5964	99.4
3600	3600	3588	99.7	7200	7135	99.1
4200	4200	4160	99.0	8400	8318	99.0
4800	4800	4749	98.9	9600	9453	98.5
5400	5400	5313	98.5	10800	10798	100.0
6000	6000	5829	97.1	12000	11597	96.6
6600	6600	6421	97.3	13200	12753	96.6
7200	7200	7053	98.0	14400	13984	97.1

Tableau 4.6: Historique de la production

3. Capacité à long terme et performance de l'algorithme

Considérons une expérience de simulation ϵ . Nous notons $T(\epsilon)$ la durée de la simulation et $T(\alpha, \epsilon)$ la durée cumulée de l'état α des machines. Nous nous intéressons à l'évaluation de la capacité de production pour une expérience particulière.

Soit $X^*(\gamma_1, \dots, \gamma_N; \epsilon)$ le débit maximal de la production totale lorsque les pièces sont produites avec les ratios $\gamma_1, \dots, \gamma_N$. Son calcul est le même que le calcul de $X^*(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ dans le paragraphe 4.8 en substituant $T(\alpha, \epsilon)/T(\epsilon)$ à $p(\alpha)$.

Le tableau 4.7 donne les durées $T(\alpha, \epsilon)$ de l'expérience de simulation précédente. La durée de simulation $T(\epsilon)$ est de 7200 minutes. La capacité maximale dans cette expérience est :

$$X^*(\gamma_1, \dots, \gamma_N; \epsilon) = 2.975 \text{ pièces/minute.}$$

Plus précisément, la capacité de production dans cette expérience est de 7140 pièces de type 1 et 14280 pièces de type 2, soit 99.2% de la demande.

Rappelons que la production réellement réalisée est de 7053 pièces de type 1 et 13984 pièces de type 2, soit 98.0% de type 1 et 97.1% de type 2 de la demande. Ces données montrent que la capacité de production est bien utilisée.

4. Justification du choix de paramètres

Dans la section 4.5, nous avons proposé les valeurs suivantes pour les matrices A des fonctions de coût :

$$A_{nn} = \beta_n * \rho_n * \xi_n$$

où

$$\xi_n = 1 / U_n^*$$

Nous allons justifier en particulier le choix des paramètres ξ_n sur un exemple numérique. Il s'agit bien entendu d'une justification très partielle.

Supposons que l'on n'utilise pas ces paramètres ce qui implique que $\xi_n = 1$. Le tableau 4.8 donne l'historique de la production. Le pourcentage de la demande satisfaite pour le type 2 est toujours supérieur à celui du type 1.

Comparé avec l'historique de la production du tableau 4.6, les ratios de production sont plus éloignés des ratios de la demande. Un atelier est souvent une partie du système de production, les pièces produites dans un atelier peuvent être assemblées dans les autres ateliers. La capacité de produire les pièces en suivant les ratios demandés est très importante. C'est pour cette raison que l'on effectue les choix donnés dans la section 4.5.

Nous allons comparer également la production réalisée en effectuant les deux choix des paramètres ξ_n . Nous désignons par u_n le nombre de pièces de type n réalisées en utilisant les paramètres ξ_n proposés ($\xi_n = 1/U_n^*$) et par v_n le nombre des pièces de type n réalisées en n'utilisant pas les paramètres ξ_n ($\xi_n = 1$). On a donc :

$$u_1 = 7053 \text{ et } u_2 = 13984, v_1 = 6918 \text{ et } v_2 = 14172$$

La capacité maximale de production est de 2 pièces par minute pour les pièces de type 1. Elle est de 5 pièces par minute pour les pièces de type 2. Donc, le temps de travail gagné en utilisant les paramètres ξ_n proposés peut être estimé à :

$$\Delta w = (u_1 - v_1)/2 + (u_2 - v_2)/5 = 29.9 \text{ minutes}$$

Il est donc préférable, dans cet exemple, d'utiliser les paramètres ξ_n proposés dans la section 4.5.

$\alpha_6 \alpha_5 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$	durée (minutes)	$\alpha_6 \alpha_5 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$	durée (minutes)
000000	0	100000	0
000001	0	100001	0
000010	0	100010	0
000011	0	100011	0
000100	0	100100	0
000101	0	100101	0
000110	0	100110	0
000111	3	100111	68
001000	0	101000	0
001001	0	101001	0
001010	0	101010	6
001011	0	101011	63
001100	0	101100	0
001101	7	101101	33
001110	29	101110	8
001111	87	101111	481
010000	0	110000	0
010001	0	110001	8
010010	0	110010	0
010011	2	110011	49
010100	0	110100	0
010101	5	110101	21
010110	0	110110	58
010111	44	110111	274
011000	0	111000	0
011001	0	111001	51
011010	0	111010	10
011011	26	111011	583
011100	1	111100	3
011101	36	111101	266
011110	26	111110	355
011111	414	111111	4178

Tableau 4.7: Durées cumulées des états

instant (minutes)	type 1			type 2		
	demande	production	%_produit	demande	production	%_produit
0	0	0	-	0	0	-
600	600	566	94.3	1200	1181	98.4
1200	1200	1163	96.9	2400	2398	99.9
1800	1800	1793	99.6	3600	3598	99.9
2400	2400	2354	98.1	4800	4772	99.4
3000	3000	2923	97.4	6000	5979	99.6
3600	3600	3558	98.8	7200	7153	99.3
4200	4200	4103	97.7	8400	8339	99.3
4800	4800	4673	97.4	9600	9501	99.0
5400	5400	5241	97.1	10800	10800	100.0
6000	6000	5686	94.8	12000	11807	98.4
6600	6600	6270	95.0	13200	12987	98.4
7200	7200	6918	96.1	14400	14172	98.4

Tableau 4.8: Historique de la simulation avec $\xi_n = 1$

4.9.2 Exemple de "job-shop"

Nous considérons un job-shop illustrée par la figure 4.11. Ce job-shop comporte quatre machines: M1, M2, M3 et M4. Quatre types de pièces, P1, P2, P3 et P4, sont fabriqués.

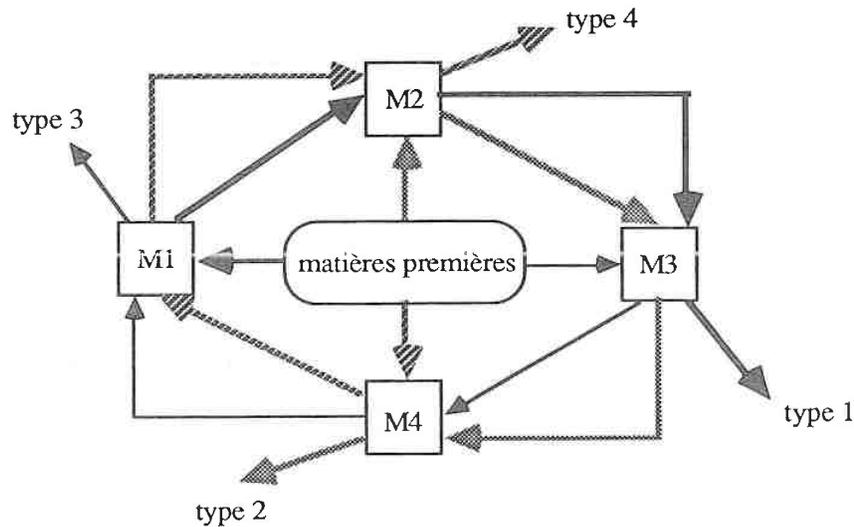


Figure 4.10: Un job-shop

Chaque pièce est obtenue par transformations successives sur certaines machines. Les successions des machines sont les suivantes :

P1: M1, M2, M3

P2: M2, M3, M4

P3: M3, M4, M1

P4: M4, M1, M2

La demande est de 0.2 pièce par minute pour tous les types de pièces, c'est-à-dire :

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.2 \text{ pièce / minute.}$$

Les durées des opérations sont données dans le tableau 4.9. Les durées varient entre 1 minute et 2 minutes.

	M1	M2	M3	M4
P1	2	1	1	∞
P2	∞	2	1	1
P3	1	∞	2	1
P4	1	1	∞	2

Tableau 4.9: Durées des opérations en minutes

Les statistiques de pannes et de réparations sont données dans le tableau 4.10. La ligne MTBF donne les durées moyennes de fonctionnement normal des machines. La ligne MTTR donne les durées moyennes de réparation. Par exemple, la machine M1 tombe en panne après en moyenne 100 minutes de travail et la réparation prend en moyenne 10 minutes.

	M1	M2	M3	M4
MTBF	100	200	100	300
MTTR	10	20	10	30

Tableau 4.10: Durées moyennes de fonctionnement et de réparation en minutes

Le tableau 4.11 donne les statistiques sur la disponibilité des machines et leur taux d'utilisation. Toutes les machines sont disponibles pendant 90.9 % du temps. Les taux d'utilisation espérés des machines sont obtenus par équilibrage des charges de machines considérant les disponibilités. Ces taux sont les taux minimaux d'utilisation des machines. Toutes les machines sont utilisées à 88.0% du temps disponible.

	M1	M2	M3	M4
Disponibilité	0.909	0.909	0.909	0.909
Utilisation	0.880	0.880	0.880	0.880

Tableau 4.11: Disponibilité et utilisation espérées des machines

Résultats de simulation

Les résultats de cette partie proviennent d'une simulation dont la durée est de 6600 minutes (ou 110 heures) de fabrication.

Le tableau 4.12 donne les disponibilités et les taux d'utilisation réels des machines. Comme prévu, les charges des machines sont très proches les unes aux autres.

	M1	M2	M3	M4
Disponibilité	0.921	0.937	0.919	0.935
Utilisation	0.868	0.854	0.870	0.856

Tableau 4.12: Disponibilité et utilisation réelle des machines

Le tableau 4.13 donne les résultats de la production. La demande est de 1320 unités de chaque type de pièce. La production réalisée est de 1317 pièces de type 1, 1321 pièces de type 2, 1319 pièces de type 3, 1321 pièces de type 4, soit 99.8% de la demande pour le type 1, 100.0% de la demande pour le type 2, 99.9% de la demande pour le type 3, 100.0% de la demande pour le type 4. Les en-cours sont très faibles.

D'après les données de la colonne "Stock final", la production est souvent en retard par rapport à la demande, mais ces retards sont faibles.

Type de pièce	Demande	Production	En-cours	Stock Final		
				x	x ⁺	x ⁻
1	1320	1317	1.40	-8.97	0.09	9.07
2	1320	1321	1.36	-5.47	0.41	5.88
3	1320	1319	1.39	-7.64	0.09	7.72
4	1320	1321	1.35	-3.88	0.63	4.51

Tableau 4.13: Statistiques de la fabrication

Le tableau 4.14 enregistre l'historique de la production. Il est possible que la production soit en retard par rapport à la demande en cas de pannes longues des machines. Mais les ratios de production sont toujours proches des ratios de la demande.

instant	demande par type	type 1		type 2		type 3		type 4	
		production	%_produit	production	%_produit	production	%_produit	production	%_produit
0	0	0	-	0	-	0	-	0	-
600	120	121	100.5	110	91.4	109	90.5	113	93.9
1200	240	238	99.1	228	95.0	237	98.7	233	97.1
1800	360	353	98.1	346	96.1	360	100.0	354	98.3
2400	480	465	96.9	470	98.0	473	98.5	473	98.5
3000	600	598	99.7	598	99.7	598	99.7	601	100.2
3600	720	702	97.5	713	99.0	700	97.2	717	99.6
4200	840	833	99.2	835	99.4	827	98.5	842	100.2
4800	960	942	98.1	955	99.5	938	97.7	950	99.0
5400	1080	1061	98.2	1082	100.2	1070	99.1	1072	99.3
6000	1200	1201	100.1	1202	100.1	1201	100.1	1203	100.2
6600	1320	1317	99.8	1321	100.0	1319	99.9	1321	100.0

Tableau 4.14: Historique de la production

CHAPITRE 5

Contrôle de Flux avec Pannes Diversifiées

Dans ce chapitre nous étendons l'étude du contrôle des flux. L'élément nouveau est la prise en compte de la diversité des fréquences des pannes des machines. Les machines sont regroupées en sous-ensembles en fonction de leur fréquence de pannes. Une hiérarchie dont le nombre de niveaux est égal au nombre de sous-ensembles de machines est proposée et chaque sous-ensemble de machines est associé à un niveau de la hiérarchie dans l'ordre des fréquences de pannes.

A chaque niveau, les pannes des niveaux inférieurs (qui correspondent aux pannes les plus fréquentes) sont considérées comme infiniment fréquentes et les états des machines des niveaux supérieurs (dont les pannes sont les moins fréquentes) sont considérés comme stationnaires. Seule la dynamique des machines du niveau considéré est prise en compte. L'objectif du contrôle est de suivre le plan de production du niveau immédiatement supérieur avec un écart minimal.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous continuons à examiner le contrôle des flux. L'élément nouveau de ce chapitre est la prise en compte de la diversité de pannes des machines.

Dans un système réel, il existe généralement une grande diversité de pannes. Par exemple, on distingue souvent des pannes longues et des pannes courtes. Certaines machines peuvent tomber en panne beaucoup plus fréquemment que d'autres.

Dans l'approche présentée dans le chapitre précédent, toutes les pannes sont supposées analogues et elles sont prises en compte de la même manière. La conséquence est la singularité de contrôle et l'instabilité de la politique de contrôle.

L'idée de base dans ce chapitre consiste à séparer les pannes de fréquences différentes et à les traiter de manière hiérarchique. A chaque niveau, seules les pannes d'une fréquence donnée sont prises en compte. Le modèle d'un niveau est établi en considérant les états des machines soumises aux pannes peu fréquentes comme stationnaires et en considérant les pannes fréquentes comme infiniment fréquentes, ce qui permet de se débarrasser des pannes en corrigeant simplement les capacités des machines concernées.

Nous allons illustrer cette idée de base à l'aide de l'exemple représenté dans la figure 5.1. Le système considéré comporte deux machines sur lesquelles un seul type de pièce est fabriqué. Supposons que la machine M2 tombe en panne beaucoup plus souvent que la machine M1. Les pièces visitent successivement les machines M1, puis M2.



Figure 5.1: Un système de deux machines et un type de pièce

La figure 5.2 illustre la trajectoire de la demande et la trajectoire de la production. La demande est supposée arriver avec un débit constant. Donc, la trajectoire de la demande cumulée est une droite. En raison des pannes des machines, il est impossible de suivre cette trajectoire de façon précise parce que la panne d'une machine quelconque interrompt la production.

Dans un premier temps, nous nous plaçons au niveau hiérarchique défini par les pannes de M1. De ce point de vue, les pannes de la machine M2 sont supposées infiniment fréquentes, et M2 est considérée comme une machine totalement fiable ayant une capacité égale à sa capacité initiale corrigée des durées d'immobilisation. Par contre, M1 est susceptible de tomber en panne. Nous cherchons une politique qui conduise à une "production espérée" (voir figure 5.2) aussi proche que possible de la demande cumulée. Cette production espérée est la production cumulée en fonction du comportement moyen de M2. Nous nous plaçons ensuite au niveau hiérarchique défini par les pannes de M2 et nous cherchons une politique qui assure une production cumulée (appelée "production réelle" sur la figure 5.2) aussi proche que possible de la "production espérée".

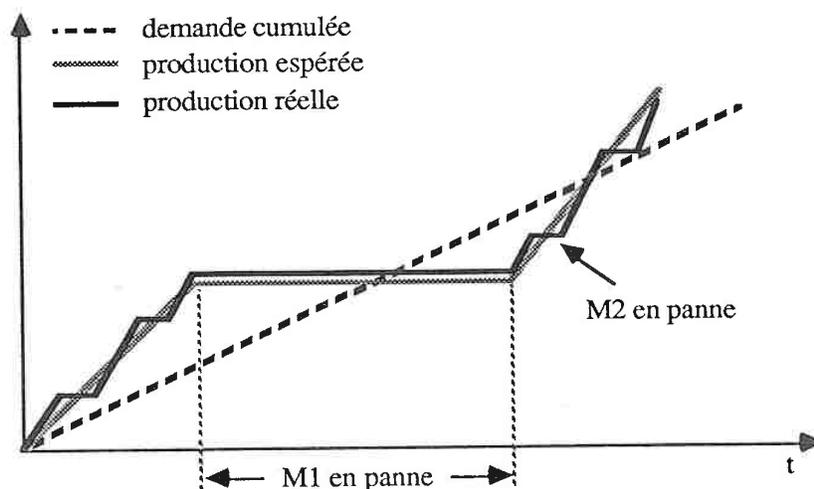


Figure 5.2: Trajectoires de la demande et de la production

Généralement, les pannes peu fréquentes (pannes de M1) entraînent des perturbations peu fréquentes mais importantes. Au contraire, les pannes fréquentes (pannes de M2) ont pour résultat des perturbations limitées mais fréquentes.

En résumé, nous cherchons à gérer le flux de production de manière hiérarchique. Par niveau, nous établissons un modèle du système de production avec un horizon particulier. Dans chaque modèle, les pannes fréquentes par rapport à cet horizon sont considérées comme infiniment fréquentes et les états des machines soumises à des pannes peu fréquentes sont considérés comme stationnaires.

La politique de contrôle est calculée en plusieurs étapes. D'abord, une politique est

calculée en utilisant le modèle ayant l'horizon le plus long. Bien entendu, cette politique ne prend en compte que les pannes peu fréquentes. La politique de contrôle est ensuite ajustée en utilisant successivement les autres modèles dans l'ordre des horizons.

Rappelons que l'approche présentée ci-dessus est couramment utilisée dans les problèmes de contrôle continu. Il s'agit de la commande des systèmes soumis à des perturbations singulières. Dans les systèmes de ce type, le problème majeur est l'interaction entre les composantes qui varient rapidement et celles qui varient lentement. D'excellents états de l'art sont donnés dans Sandell, Varaiya, Athans et Safonov [1978], Kokotovic [1981] et Saksena, O'Reilly et Kokotovic [1984]. L'approche est appliquée au contrôle des réseaux d'électricité par Chow et Kokotovic [1985] et au contrôle optimal des modèles markoviens dans les systèmes de files d'attente par Delebeque et Quadrat [1981].

Dans tout système dynamique, il existe deux types de quantités: des quantités statiques et des quantités dynamiques. La philosophie de base est l'utilisation de plusieurs modèles du système dynamique. Chaque modèle est établi avec une échelle de temps particulier.

Dans chaque modèle, les quantités sont regroupées d'après leur degré de variation dans le temps. Cela conduit aux quantités variables à fréquence haute et aux quantités variables à fréquence basse. Ensuite, les quantités variables à fréquence haute sont modélisées comme des quantités variables à fréquence infinie et les quantités variables à fréquence basse sont considérées comme des quantités statiques.

Dans le cas de deux niveaux, le modèle qui admet une longue échelle de temps est appelé le système lent et le modèle qui admet une courte échelle de temps est appelé système rapide.

Gershwin [1987a,b] ont été le premier à introduire la technique d'échelle de temps multiple pour la résolution de problèmes d'ordonnancement. L'idée de base est de traiter les activités de fréquences différentes à différents niveaux hiérarchiques. Les détails de cette approche ont été présentés dans le chapitre 1.

Dans ce chapitre, nous examinons un cas particulier dans lequel les activités sont les opérations et les réparations des machines. L'objectif est d'établir une hiérarchie complète afin de pouvoir analyser complètement ses caractéristiques.

Il s'agit d'une extension importante des résultats connus.

Ce chapitre est organisé en quatre sections. Dans la section 5.2, nous nous intéressons à la classification des machines en fonction de leur fréquence de pannes. Nous définissons ensuite une hiérarchie en fonction des résultats de la classification des machines. Dans la section 5.3, nous établissons un modèle pour le contrôle de chaque niveau de la hiérarchie et étudions le problème de contrôle correspondant. La section 5.4 est entièrement consacrée à la présentation des exemples numériques.

5.2 Analyse des pannes et établissement de la hiérarchie

Nous commençons ce paragraphe par l'analyse fréquentielle des pannes des machines. Cette analyse aboutit à des sous-ensembles de machines dont chacun est caractérisé par une fréquence de pannes. Nous proposons ensuite une hiérarchie basée sur cette analyse. Nous proposons à la fin de ce paragraphe la structure de contrôle considérée.

5.2.1 Analyse des pannes des machines

Ce paragraphe est consacré au regroupement des machines en fonction de leur fréquence de pannes. Nous aborderons d'abord le problème de la classification des machines. Ensuite, nous décrivons les résultats de la classification.

1. Problème de la classification des machines

Avant d'étudier la classification des machines, nous proposons une mesure de la fréquence de pannes d'une machine.

Le fonctionnement d'une machine est cyclique. Elle bascule entre l'état de marche et l'état de réparation. Nous avons supposé que la transition entre ces deux états est un processus de Markov.

Nous introduisons T_m , durée d'un cycle de fonctionnement. T_m est la somme de la durée d'un état de marche et la durée de la réparation suivante. C'est une variable aléatoire dont l'espérance est :

$$E[T_m] = 1/r_m + 1/p_m \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

où r_m et p_m sont respectivement le taux de réparation et le taux de panne de la machine m .

Nous définissons l'inverse de l'espérance $E[T_m]$ la **fréquence de pannes de la machine m** . Notons f_m cette fréquence, i.e.

$$f_m = 1/E[T_m] \quad \forall m \in \mathcal{M} \quad (5.1)$$

Les transitions d'état des machines sont supposées indépendantes de l'utilisation des machines. La quantité f_m exprime la fréquence réelle de pannes de la machine m .

Nous sommes prêts à examiner la classification des machines en fonction de leur fréquence de pannes f_m .

Dans le cas idéal, les machines peuvent être regroupées en plusieurs classes de telle manière que les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1. Dans chaque classe, les fréquences de pannes sont identiques
2. Pour deux machines m et m' de classes différentes, nous avons

$$f_m \gg f_{m'} \text{ ou } f_m \ll f_{m'}$$

D'après la deuxième condition, les fréquences de pannes pour différentes classes de machines sont différentes dans l'ordre de grandeur. Par conséquent, par rapport aux machines d'une classe particulière, les machines dont les fréquences de pannes sont plus grandes tombent en panne beaucoup plus fréquemment et les machines dont les fréquences de pannes sont plus petites tombent en panne rarement.

Afin de mesurer l'ordre de grandeur des fréquences de pannes, nous introduisons pour chaque machine une quantité v_m définie de la manière suivante:

$$v_m = \log f_m \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

L'ensemble des machines est alors représenté par un ensemble de points sur l'axe v . *La classification des machines consiste à trouver des sous-ensembles de points de telle sorte que les points d'un même sous-ensemble soient proches les uns des autres et que les sous-ensembles soient nettement séparés les uns des autres.*

C'est un problème de classification automatique qui est largement étudié dans la littérature (voir Diday et al. [1981]). Il existe de nombreuses méthodes qui permettent de trouver des classes de machines qui se distinguent les unes des autres sur l'axe v . Nous ne donnons pas le détail de la résolution dans cette thèse.

Un exemple de 9 machines est illustré par la figure 5.3. Trois classes de machines sont obtenues: $(v_1 v_9 v_7)$, $(v_2 v_8 v_5)$ et $(v_6 v_4 v_3)$. Les classes sont compactes et distinctes entre elles.

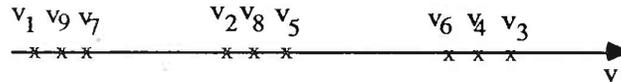


Figure 5.3: Un exemple de la classification des machines

2. Représentation des résultat de la classification

Supposons que la classification des machines ait été faite. Nous désignons par L le nombre de classes obtenues. Notons \mathcal{M}_l le sous-ensemble de machines de la classe l . Par conséquent, nous avons

$$\mathcal{M} = \bigcup_{l=1}^L \mathcal{M}_l$$

Sans nuire à la généralité, supposons que les sous-ensembles de machines sont indexés dans l'ordre croissant des fréquences de pannes, i.e.

$$f_m < f_{m'} \quad \forall (m, m') \in \mathcal{M}_l \times \mathcal{M}_{l+1} \quad (5.2)$$

Pour chaque sous-ensemble \mathcal{M}_l , nous définissons une **fréquence représentative**, notée F_l , de la manière suivante:

$$F_l = \log^{-1}(V_l) \quad (5.3)$$

où

$$V_l = \sum_{m \in \mathcal{M}_l} v_m / \text{card}(\mathcal{M}_l)$$

Remarquons que V_l correspond au centre de la classe l sur l'axe v . Les valeurs V_l et F_l satisfont les conditions suivantes:

$$V_1 < V_2 < \dots < V_L,$$

et

$$F_1 \ll F_2 \ll \dots \ll F_L$$

Par conséquent, les fréquence de pannes satisfont les conditions suivantes:

$$F_{l-1} \ll f_m \ll F_{l+1} \quad \forall m \in \mathcal{M}_l \text{ et } \forall 1 \leq l \leq L \quad (5.4)$$

Par rapport à une échelle de temps de longueur $1/F_1$, les pannes des machines des sous-ensembles $\mathcal{M}_{l+1}, \mathcal{M}_{l+2}, \dots, \mathcal{M}_L$ arrivent fréquemment et les pannes des machines des sous-ensembles $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_{l-1}$ arrivent rarement.

5.2.2 Définition de la hiérarchie

La hiérarchie proposée est basée sur les résultats de la classification des machines.

Le nombre de niveaux de la hiérarchie est égal au nombre de classes de machines obtenues.

Nous associons le sous-ensemble des machines \mathcal{M}_l au niveau l de la hiérarchie. Nous introduisons au niveau l une **échelle de temps**, notée T_l . Cette échelle de temps est calculée de la manière suivante:

$$T_l = 1/F_l \quad (5.5)$$

Cette échelle de temps T_l exprime le temps de cycle des pannes des machines de la classe l . Il décroît du niveau 1 au niveau L .

Au niveau l de la hiérarchie, l'ensemble des machines est réparti en trois sous-ensembles $\mathcal{M}_f^l, \mathcal{M}_s^l$ et \mathcal{M}_c^l définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f^l &= \bigcup_{i=l+1}^L \mathcal{M}_i, \\ \mathcal{M}_s^l &= \bigcup_{i=1}^{l-1} \mathcal{M}_i, \\ \mathcal{M}_c^l &= \mathcal{M}_l \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous utilisons les indices supérieurs pour indiquer les indices de niveaux sauf indication contraire explicite.

Le sous-ensemble \mathcal{M}_f^l (pannes fréquentes) correspond à l'ensemble des machines des niveaux inférieurs (fréquences hautes et grands indices de niveaux). Les machines de ce sous-ensemble tombent en panne fréquemment relativement à l'échelle de temps T_1 .

Le sous-ensemble \mathcal{M}_s^l (pannes peu fréquentes) correspond à l'ensemble des machines des niveaux supérieurs (fréquences basses et petits indices de niveaux). Les machines de ce sous-ensemble tombent en pannes rarement relativement à l'échelle de temps T_1 .

Nous supposons au niveau l que les pannes des machines du sous-ensemble \mathcal{M}_f^l sont infiniment fréquentes et que les états des machines du sous-ensemble \mathcal{M}_s^l sont stationnaires.

Nous désignons par f_m^l la fréquence de pannes de la machine m observée au niveau l . La hypothèse précédente implique que

$$\begin{aligned} f_m^l &= \infty && \text{si } m \in \mathcal{M}_f^l, \\ &= 0 && \text{si } m \in \mathcal{M}_s^l, \\ &= f_m && \text{si } m \in \mathcal{M}_c^l \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ceci signifie que seule la dynamique des machines associées au niveau l est considérée. Nous appelons cette hypothèse l'**hypothèse d'observation du niveau l** .

Nous pouvons déduire les disponibilités des machines observées au niveau l de l'hypothèse précédente. Nous notons $\alpha_m^l(t)$ la disponibilité de la machine m observée au niveau l à l'instant t . D'après l'hypothèse d'observation, nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha_m^l(t) &= E[\alpha_m(t)] && \text{si } m \in \mathcal{M}_f^l, \\ &= \alpha_m(t^l(t)) && \text{si } m \in \mathcal{M}_s^l, \\ &= \alpha_m(t) && \text{si } m \in \mathcal{M}_c^l \end{aligned} \quad (5.8)$$

où $t^l(t)$ indique l'instant où le dernier changement d'état des machines du sous-ensemble \mathcal{M}_s^l avait eu lieu.

Nous désignons par:

$$\begin{aligned}\alpha_f^1 &= (E[\alpha_m(t)], m \in \mathcal{M}_f^1), \\ \alpha_s^1(t) &= (\alpha_m^1(t^1), m \in \mathcal{M}_s^1), \\ \alpha_c^1(t) &= (\alpha_m^1(t), m \in \mathcal{M}_c^1)\end{aligned}\quad (5.9)$$

les vecteurs de disponibilité observée au niveau 1 de machines correspondant aux sous-ensembles \mathcal{M}_f^1 , \mathcal{M}_s^1 et \mathcal{M}_c^1 respectivement.

Au niveau 1, les vecteurs α_f^1 et $\alpha_s^1(t)$ sont des vecteurs constants et seul le vecteur $\alpha_c^1(t)$ est dynamique.

5.2.3 Structure de contrôle

Comme nous l'avons énoncé dans le chapitre précédent, le contrôle de flux a pour objectif de déterminer le plan de production. Il doit répondre aux pannes des machines et maintenir la production aussi proche que possible de la demande.

Dans ce chapitre, le plan de production est calculé de manière hiérarchique. Les pannes d'une machine sont prises en compte à un niveau particulier en fonction de la fréquence. A chaque niveau, on planifie le flux de telle sorte que le plan du niveau supérieur soit respecté et que les pannes des machines du niveau considéré soient prises en compte.

La figure 5.4 illustre une structure de contrôle basée sur cette idée. La notation u^1 représente le plan de production du niveau 1. Elle sera définie dans la section 5.3.

Au niveau le plus élevé ($l=1$), un plan de production u^1 est calculé de manière à satisfaire la demande tout en répondant aux pannes des machines du sous-ensemble \mathcal{M}_1 et en respectant la capacité de production observée au niveau 1.

Au niveau $l=2$, nous cherchons un plan de production u^2 afin de réaliser le plan de production u^1 . Le plan u^2 doit répondre aux pannes des machines du sous-ensemble \mathcal{M}_2 et respecte la capacité de production observée au niveau 2.

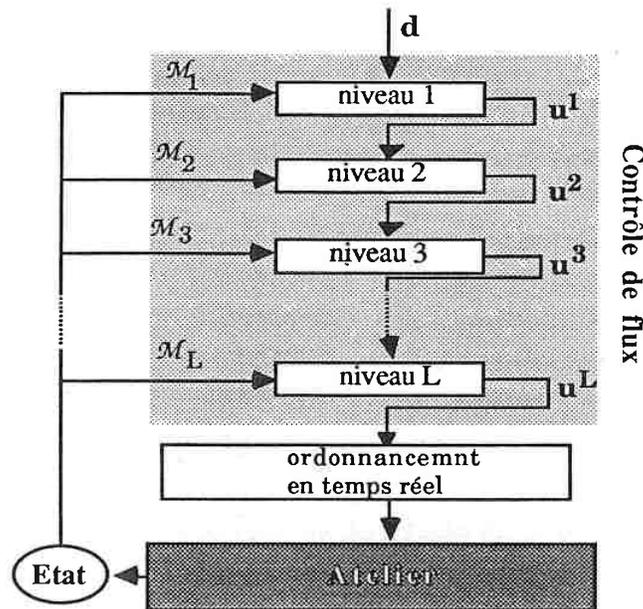


Figure 5.4: Structure de contrôle

Nous calculons de la même manière les plans de production u^3, u^4, \dots, u^L en descendant dans la hiérarchie. Le plan de production u^L prend en compte les pannes de toutes les machines et s'inscrit dans les contraintes imposées par u^{L-1} .

Une caractéristique important de cette structure de contrôle est que les changements d'état des machines d'un niveau particulier (1° par exemple) ne remettent pas en cause les plans de production des niveaux supérieurs ($l < l^\circ$).

L'ordonnancement en temps réel est similaire à l'ordonnancement en temps réel présenté dans le chapitre précédent. Il ne sera pas repris dans ce chapitre.

5.3 Contrôle à chaque niveau de la hiérarchie

Cette section est consacrée au contrôle à chaque niveau de la hiérarchie. Dans le paragraphe 5.3.1, nous établissons le modèle du contrôle à chaque niveau de la hiérarchie. Dans le paragraphe 5.3.2, nous nous intéressons à la recherche des politiques de contrôle à chaque niveau. Le paragraphe 5.3.3 illustre la construction des modèles de contrôle et la recherche des politiques de contrôle à l'aide d'un exemple simple.

5.3.1. Contrôle

Ce paragraphe est consacré à la construction du modèle de contrôle au niveau l. La démarche de la construction est similaire à celle utilisée dans le chapitre précédent. Les notations introduites dans le chapitre précédent restent valables.

Nous commençons par définir les variables de contrôles et les variables d'état du système. Puis nous construisons les contraintes de capacité de production. Ensuite, nous établissons le modèle de contrôle.

1. Variables de contrôle et état du système

L'objectif de contrôle du niveau l est de suivre le plan de production du niveau l-1. Le plan de production du niveau l-1 est connu et il est noté de la manière suivante:

$u^{l-1}_n(t)$ ($n \in \mathcal{N}$) nombre réel positif qui représente la production instantanée de pièces de type n à l'instant t choisie au niveau l-1.

Nous notons :

$$u^{l-1}(t) := (u^{l-1}_1(t), u^{l-1}_2(t), \dots, u^{l-1}_N(t))$$

le vecteur production instantanée à l'instant t choisi au niveau l-1.

Les variables de contrôle au niveau l sont les productions instantanées des différents types de pièces et elles sont notées :

$u^l_n(t)$ ($n \in \mathcal{N}$) nombre réel positif qui représente la production instantanée de pièces de type n à l'instant t à choisir au niveau l.

Nous notons :

$$u^l(t) := (u^l_1(t), u^l_2(t), \dots, u^l_N(t))$$

le vecteur production instantanée à choisir au niveau l à l'instant t.

Les variables d'état sont d'une part les états du fonctionnement des machines du niveau l et d'autre part la différence entre la production du niveau l et celle du niveau l-1. Ce sont les suivantes:

- $\alpha_m^1(t)$ ($m \in \mathcal{M}_c^1$) (voir 5.2.2),
- $x_n^1(t)$ ($n \in \mathcal{N}$) nombre réel qui représente la différence cumulée entre la production du niveau l et le plan de production du niveau l-1. Il est calculé de la manière suivante:

$$\frac{dx_n^1(t)}{dt} = u_n^1(t) - u^{l-1}_n(t) \quad (5.10)$$

Si $x_n^1(t)$ est positif, la production $u_n^1(t)$ dépasse le plan de production $u^{l-1}_n(t)$ afin d'absorber les pannes des machines du niveau l. Si $x_n^1(t)$ est négatif, la production $u_n^1(t)$ est en retard par rapport au plan de production $u^{l-1}_n(t)$ en raison des pannes des machines du niveau l.

Nous notons :

$$\mathbf{x}^1(t) := (x_1^1(t), x_2^1(t), \dots, x_N^1(t))$$

le vecteur différence cumulée entre $u_n^1(t)$ et $u^{l-1}_n(t)$.

Le vecteur $(\alpha_c^1(t), \mathbf{x}^1(t))$ décrit l'état du système observé au niveau l. Nous supposons que l'état initial du système $(\alpha_c^1(0), \mathbf{x}^1(0))$ est connu.

Nous désignons par S^1 le domaine de définition du vecteur $\alpha_c^1(t)$. Puisque la transition d'état de chaque machine est markovienne, la dynamique du vecteur $\alpha_c^1(t)$ peut également être modélisée par une chaîne de Markov dont chaque état correspond à un élément de l'ensemble S^1 . La transition d'état du vecteur $\alpha_c^1(t)$ est gouvernée par l'équation suivante:

$$\text{Prob}[\alpha_c^1(t+\delta t) = b \mid \alpha_c^1(t) = a] = \lambda_{ab}^1 \delta t + o(\delta t) \quad \forall (a,b) \in S^1 \times S^1 \quad (5.11)$$

où λ_{ab}^1 représente le taux de transition les états a et b. Les taux de transition λ_{ab}^1 dépendent des taux de pannes p_m et des taux de réparation r_m des machines du sous-ensemble \mathcal{M}_c^1 .

Les équations (5.10) et (5.11) sont les équations d'état du système. Elles décrivent l'évolution de l'état du système.

2. Contraintes de capacité de production

Lorsque toutes les pannes sont considérées à un seul niveau, nous avons défini la capacité de production dans le chapitre 4. Un contrôle $u(t)$ est dit admissible si et seulement s'il existe $\{y_{nmk}(t), (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n\}$ tel que :

$$y_{nmk}(t) \geq 0 \quad \forall (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n,$$

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}(t) \leq \alpha_m(t) \quad \forall m \in \mathcal{M},$$

$$\sum_m y_{nmk}(t) = u_n(t) \quad \forall (n,k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n$$

L'ensemble des contrôles $u(t)$ admissibles est noté $\Omega(\alpha(t))$.

Lorsque les pannes sont considérées de manière hiérarchique, le domaine des contrôles admissibles $\Omega(\alpha(t))$ correspond au domaine des contrôles admissibles du niveau le plus bas, i.e. $l=L$.

Nous désignons par $\Omega^l(t)$ l'ensemble des contrôles admissibles du niveau l . Par conséquent, nous avons

$$\Omega^L(t) = \Omega(\alpha(t)) \quad (5.12)$$

Par la suite, nous allons définir la capacité de production du niveau $l < L$. Nous allons d'abord donner le domaine des contrôles admissibles de manière exacte. Compte tenu de la complexité de ce domaine exact, nous proposons une approximation.

A. Dédution du domaine des contrôles admissibles

Au niveau l , d'après l'hypothèse d'observation (5.7), nous avons

$$\begin{aligned} f_m^l &= \infty && \text{si } m \in \mathcal{M}_f^l, \\ &= 0 && \text{si } m \in \mathcal{M}_s^l, \\ &= f_m && \text{si } m \in \mathcal{M}_c^l \end{aligned}$$

Le domaine des contrôles admissibles $\Omega^l(t)$ est limité par la capacité de production à long terme lorsque les états des machines des sous-ensembles \mathcal{M}_s^l et \mathcal{M}_c^l sont considérés comme stationnaires. Nous allons calculer cette capacité de production

à long terme.

Les capacités des machines des sous-ensembles \mathcal{M}_s^1 et \mathcal{M}_c^1 sont représentées par $\alpha_s^1(t)$ et $\alpha_c^1(t)$ respectivement. Elles sont considérées comme stationnaires.

Nous définissons par $\beta(s)$ le vecteur état des machines du sous-ensemble \mathcal{M}_f^1 à l'instant s de la manière suivante:

$$\beta(s) := (\alpha_m(s), m \in \mathcal{M}_f^1)$$

Notons \mathcal{B} le domaine de définition du vecteur état $\beta(s)$.

La transition de $\beta(s)$ peut être modélisée par une chaîne de Markov et il existe une distribution probabiliste en état d'équilibre. Pour $b \in \mathcal{B}$, nous désignons par $q^1(b)$ la probabilité de l'état b en régime permanent.

Lorsque le vecteur état $\beta(s)$ est b pour $b \in \mathcal{B}$, nous notons :

- $u_{n,b}$ ($n \in \mathcal{N}$) la production instantanée inconnue de pièces de type n ,
- $y_{nmk,b}$ ($(m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n$) le débit inconnu auquel les pièces de type n visitent la machine m pour l'opération k

Lorsque le vecteur état $\beta(s)$ est b pour $b \in \mathcal{B}$, les contraintes de capacité des machines s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk,b} &\leq b_m & \forall m \in \mathcal{M}_f^1, \\ \text{et} \\ \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk,b} &\leq \alpha_m(t) & \forall m \in \mathcal{M}_s^1 \cup \mathcal{M}_c^1 \end{aligned}$$

Puisque l'accumulation de matières dans le système est strictement interdite au niveau du contrôle de flux, nous avons :

$$u_{n,b} = \sum_m y_{nmk,b} \quad \forall (n,k, b) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \times \mathcal{B}$$

Au niveau 1, la transition d'état du vecteur état $\beta(s)$ est supposée infiniment fréquente et $\beta(s)$ est considéré en état d'équilibre. Par conséquent, une politique de contrôle $u^1(t)$ est dite **admissible** si et seulement si il existe $\{u_{n,b}, (n,b) \in \mathcal{N} \times \mathcal{B}\}$ et $\{y_{nmk,b}, (m,n,k,b) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \times \mathcal{B}\}$ qui satisfont les conditions suivantes :

$$u_n^1(t) = \sum_{b \in \mathcal{B}} q^1(b) u_{n,b} \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (5.13)$$

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk,b} \leq b_m \quad \text{si } (m,b) \in \mathcal{M}_f^1 \times \mathcal{B}, \quad (5.14)$$

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk,b} \leq \alpha_m(t) \quad \text{si } (m,b) \in (\mathcal{M}_s^1 \cup \mathcal{M}_c^1) \times \mathcal{B}, \quad (5.15)$$

$$u_{n,b} = \sum_m y_{nmk,b} \quad \forall (n,k, b) \in \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \times \mathcal{B}, \quad (5.16)$$

$$y_{nmk,b} \geq 0 \quad \forall (m,n,k,b) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{K}_n \times \mathcal{B}, \quad (5.17)$$

$\Omega^1(t)$ est alors défini comme l'ensemble des contrôles $u^1(t)$ admissibles. Puisque le domaine des contrôles admissibles $\Omega^1(t)$ est limité par un ensemble de contraintes linéaires, c'est un polyèdre convexe.

$\Omega^1(t)$ ne dépend pas explicitement du temps t . Il dépend des vecteurs $\alpha_s^1(t)$ et $\alpha_c^1(t)$. Par conséquent, il peut être noté plus précisément $\Omega^1(\alpha_s^1(t), \alpha_c^1(t))$.

B. Approximation du domaine des contrôles admissibles

Considérons le cas où les machines sont réparées beaucoup plus vite qu'elles ne tombent en panne, i.e.

$$r_m \gg p_m \quad \forall m \in \mathcal{M}$$

L'arrêt d'une machine causé par les pannes d'autres machines est négligeable. La capacité de production peut être exprimées approximativement en termes de disponibilité des machines.

Nous notons $y_{nmk}^1(t)$ le débit auquel les pièces de type n visitent la machine m pour y subir l'opération k . Au niveau 1, les contraintes des disponibilités des machines s'écrivent de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}^1(t) &\leq E[\alpha_m(t)] & \forall m \in \mathcal{M}_f^1, \\ \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}^1(t) &\leq \alpha_m(t) & \forall m \in \mathcal{M}_c^1, \\ \sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}^1(t) &\leq \alpha_m(t^1) & \forall m \in \mathcal{M}_s^1 \end{aligned}$$

où t^1 indique l'instant où le dernier changement d'état des machines du sous-ensemble \mathcal{M}_s^1 avait eu lieu.

Puisque l'accumulation de matière dans le système est strictement interdite au niveau de contrôle de flux, nous avons :

$$u_n^l(t) = \sum_m y_{nmk}^l(t) \quad \forall (n,k) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{K}_n$$

Nous définissons $\Omega^{l*}(t)$, ensemble des contrôles $u^l(t)$ pour lesquels il existe $\{y_{nmk}^l(t), (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}(x) \times \mathcal{K}_n\}$ tel que :

$$y_{nmk}^l(t) \geq 0 \quad \forall (m,n,k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}(x) \times \mathcal{K}_n, \quad (5.18)$$

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}^l(t) \leq E[\alpha_m(t)] \quad \forall m \in \mathcal{M}_f^l, \quad (5.19)$$

$$\sum_{n,k} \tau_{nmk} y_{nmk}^l(t) \leq \alpha_m(t) \quad \forall m \in \mathcal{M}_s^l \cup \mathcal{M}_c^l, \quad (5.20)$$

$$u_n^l(t) = \sum_m y_{nmk}^l(t) \quad \forall (n,k) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{K}_n \quad (5.21)$$

Le domaine $\Omega^{l*}(t)$ n'est qu'une approximation du domaine $\Omega^l(t)$, car les contraintes de la conservation de flux (5.21) ne prennent pas en compte l'arrêt de certaines machines des sous-ensembles \mathcal{M}_s^l et \mathcal{M}_c^l lorsque des machines du sous-ensemble \mathcal{M}_f^l sont en panne. **Le domaine des contrôles admissibles $\Omega^l(t)$ est contenu dans le domaine $\Omega^{l*}(t)$.**

3. Modèle de contrôle

Le problème de contrôle au niveau l peut être énoncé de la manière suivante: étant donné l'état initial du système (α_c^l, x^l) et le plan de production du niveau l-1 $u^{l-1}(t)$, nous cherchons une politique de production $u^l(t) \in \Omega^l(\alpha_s^l(t), \alpha_c^l(t))$ de manière à minimiser la valeur du critère suivante :

$$J^l(\alpha^l, x^l, 0) = E \left[\int_0^T g^l(x^l(s)) ds \mid \alpha^l(0) = \alpha^l, x^l(0) = x^l \right] \quad (5.22)$$

sous les contraintes (5.10) et (5.11).

La fonction $g^l(x^l(t))$ est une fonction continue et convexe en x. Elle pénalise les valeurs non-nulles de $x^l(t)$.

En résumé, le problème de contrôle au niveau l est le suivant :

$$\min E \left[\int_0^T g^l(x^l(s)) ds \right]$$

sous les contraintes :

$$\frac{dx_n^l(t)}{dt} = u_n^l(t) - u^{l-1}_n(t) \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

$$\text{Prob}[\alpha_c^l(t+\delta t) = b \mid \alpha_c^l(t) = a] = \lambda_{ab}^l \delta t + o(\delta t) \quad \forall (a,b) \in S^l \times S^l,$$

$$u^l(t) \in \Omega^l(\alpha_s^l(t), \alpha_c^l(t)), \alpha_c^l(0) = \alpha_c^l \text{ et } x^l(0) = x^l$$

C'est un problème de contrôle optimal des systèmes soumis à des perturbations markoviennes.

Ce problème n'est pas différent du problème du contrôle de flux du chapitre 4 si on remplace $u^{l-1}(t)$ par d , λ_{ab}^l par λ_{ab} et $\Omega^l(\alpha_s^l(t), \alpha_c^l(t))$ par $\Omega(\alpha(t))$.

Cependant, le calcul développé dans le chapitre 4 n'est pas directement applicable parce que le vecteur demande instantanée d est constant et que le plan de production du niveau l-1 ($u^{l-1}(t)$) n'est pas constant. Néanmoins, nous avons montré que le contrôle obtenu par l'approximation quadratique est constant par morceaux. Le calcul de contrôle dans la hiérarchie peut alors se dérouler de la manière suivante.

Commençons par le niveau le plus haut ($l=1$). Le contrôle du niveau supérieur $u^0(t) = d$ est constant. Le contrôle de ce niveau $u^1(t)$ peut être calculé et il est constant par morceaux.

Au niveau suivant ($l=2$), une politique de contrôle $u^2(t)$ est calculée pour chaque valeur constante de $u^1(t)$. Le contrôle $u^2(t)$ ainsi obtenu est également constant par morceaux.

De la même manière, nous pouvons calculer les politiques de contrôle $u^3(t)$, $u^4(t)$, ..., $u^L(t)$.

La caractéristique des politiques de contrôle qui est d'être constante par morceaux est importante dans le calcul du contrôle dans la hiérarchie. La fréquence d'estimation des fonctions de coût, en raison des changements de contrôle des

niveaux supérieurs, dépend des fréquences des pannes des machines des niveaux supérieurs.

Par conséquent, une bonne classification des machines permet de diminuer la fréquence des calculs de politiques de contrôle.

5.3.2 Exemple illustratif

Nous allons illustrer les étapes principales de l'approche hiérarchisée du contrôle de flux à l'aide un exemple simple. La figure 5.5 illustre un système comportant deux machines sur lesquelles un seul type de pièce est fabriqué. Une pièce visite soit la machine M1 soit la machine M2. La durée de l'opération pour une pièce est soit τ_1 sur la machine M1 soit τ_2 sur la machine M2. La demande instantanée d est une constante.

La machine M2 tombe en panne beaucoup plus fréquemment que la machine M1, i.e.

$$f_1 \ll f_2$$

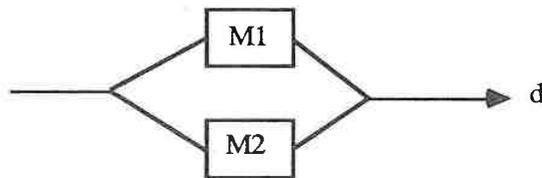


Figure 5.5: Un système de deux machines et un type de pièce

Par conséquent, nous définissons une hiérarchie à deux niveaux.

Au niveau haut ($l=1$), la dynamique de la machine M1 est considérée et les pannes de la machine M2 sont supposées infiniment fréquentes.

Remarquons que dans ce système, les pannes d'une machine ne provoquent pas l'arrêt de l'autre machine. Donc, la capacité de production peut être exprimée directement en disponibilité des machines.

Le domaine des contrôles admissibles du niveau 1 s'écrit de la manière suivante:

$$\Omega^1(\alpha_s^1(t), \alpha_c^1(t)) := \{u(t) / u(t) \geq 0 \text{ et } u(t) \leq \alpha_1(t)/\tau_1 + E(\alpha_2(t))/\tau_2\}$$

Le problème de contrôle au niveau 1 s'écrit :

$$\min J_u^1(\alpha_1, x^1, 0) = E \left[\int_0^T g^1(x^1(s)) ds \mid \alpha^1(0) = \alpha_1, x^1(0) = x^1 \right]$$

$$\text{avec } u^1(t) \leq \alpha_1(t)/\tau_1 + E(\alpha_2(t))/\tau_2,$$

$$\text{Prob}[\alpha_1(t+\Delta t) = 0 \mid \alpha_1(t) = 1] = p_1 \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\text{Prob}[\alpha_1(t+\Delta t) = 1 \mid \alpha_1(t) = 0] = r_1 \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = u^1(t) - d$$

Au niveau bas (l=2), l'état de la machine M1 est considéré comme stationnaire et la dynamique de la machine M2 est modélisée.

Le domaine des contrôles admissibles du niveau 2 s'écrit de la manière suivante:

$$\Omega^2(\alpha_s^2(t), \alpha_c^2(t)) := \{u(t) / u(t) \geq 0 \text{ et } u(t) \leq \alpha_1(t)/\tau_1 + \alpha_2(t)/\tau_2\}$$

Le problème de contrôle du niveau bas s'écrit :

$$\min J_u^2(\alpha_2, x^2, 0) = E \left[\int_0^T g^2(x^2(s)) ds \mid \alpha_2(0) = \alpha_2, x^2(0) = x^2 \right]$$

$$\text{avec } u^2(t) \leq \alpha_1(0)/\tau_1 + \alpha_2(t)/\tau_2,$$

$$\text{Prob}[\alpha_2(t+\Delta t) = 0 \mid \alpha_2(t) = 1] = p_2 \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\text{Prob}[\alpha_2(t+\Delta t) = 1 \mid \alpha_2(t) = 0] = r_2 \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\frac{dx^2(t)}{dt} = u^2(t) - u^1(0)$$

Rappelons que la politique de contrôle $u^1(t)$ est constant par morceaux. Chaque changement de $u^1(t)$ conduit au changement de la politique de contrôle $u^2(t)$. La figure 5.6 illustre les trajectoires des états $x(t)$, $x^1(t)$ et $x^2(t)$.

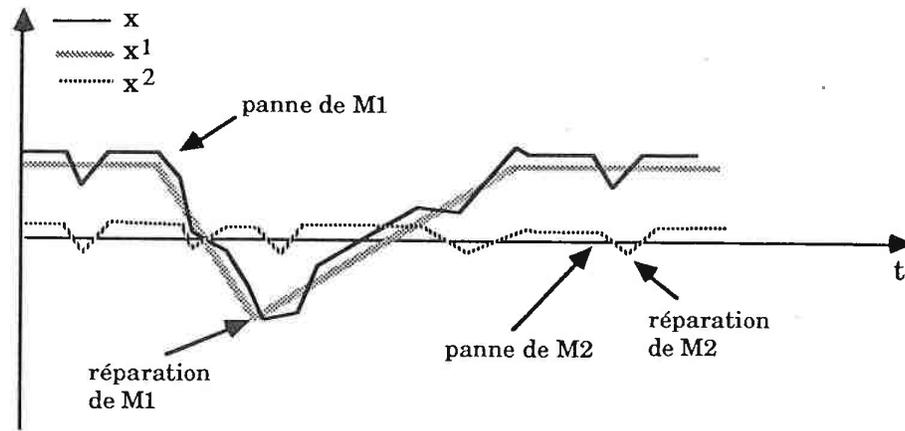


Figure 5.6: Trajectoires de l' état du stock

5.4 Applications numériques

Nous allons présenter deux exemples numériques et leurs résultats de simulation. Le premier exemple est un flow-shop et le deuxième exemple un job-shop.

5.4.1 Exemple de "flow-shop"

Le système considéré est illustré dans la figure 5.7. C'est une ligne de fabrication flexible. Le système comporte deux stations de travail, A et B. Il y a deux machines dans chaque station, les machines M1 et M2 dans la station A et les machines M3 et M4 dans la station B. Deux types de pièces sont fabriqués. Les pièces de type 1 ou P1 visitent successivement la station A et la station B. Les pièces de type 2 ou P2 visitent uniquement la station A et ne subissent qu'une opération.

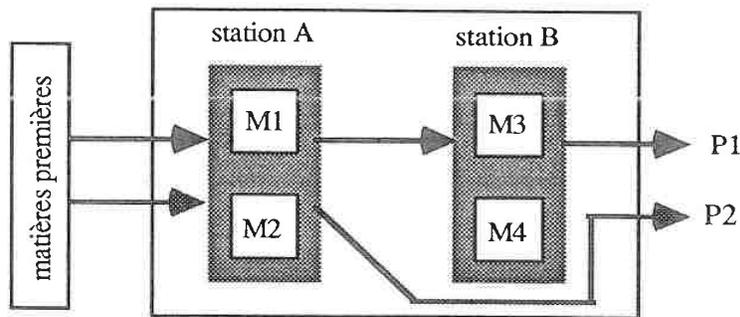


Figure 5.7: Une ligne de fabrication flexible

La demande est de 1 pièce par minute pour les pièces de type 1, et 1.2 pièces par minute pour les pièces de type 2, i.e.

$$d_1 = 1 \text{ pièce/minnute, et } d_2 = 1.2 \text{ pièces /minute.}$$

Les durées des opérations sont données dans le tableau 5.1. Elles varient entre 0.5 minute et 1 minute.

	M1	M2	M3	M4
P1	1	1	1	1
P2	0.5	1	Non utilisées	

Tableau 5.1: Durées des opérations en minutes

Les données statistiques de pannes et de réparations sont fournies dans le tableau 5.2. La ligne MTBF donne les durées moyennes de fonctionnement normal des machines, i.e. $1/p_m$. La ligne MTTR donne les durées moyennes de réparation des machines, i.e. $1/r_m$.

Remarquons que les machines M2 et M4 tombent en panne beaucoup plus fréquemment que les machines M1 et M3. La classification des machines donne deux classes de machines $\mathcal{M}1$ et $\mathcal{M}2$. Les machines soumises à pannes fréquentes, i.e. M2 et M4, sont dans le sous-ensemble $\mathcal{M}2$. Les machines soumises à pannes rares, i.e. M1 et M3, sont dans le sous-ensemble $\mathcal{M}1$.

	M1	M2	M3	M4
MTBF	1000	100	2000	50
MTTR	100	10	200	5

Tableau 5.2: Durées moyennes de fonctionnement et de réparation en minutes

Le tableau 5.3 donne les statistiques sur les disponibilités des machines et les taux d'utilisation des machines. Toutes les machines sont disponibles pendant 90.9% du temps. Les taux d'utilisation des machines sont obtenus par équilibrage des charges des machines en considérant leur disponibilité. Les machines de la

station A sont utilisées à 88% du temps disponible. Les machines de la stations B sont utilisées à 55% du temps disponible.

	M1	M2	M3	M4
Disponibilité	0.909	0.909	0.909	0.909
Utilisation	0.88	0.88	0.55	0.55

Tableau 5.3: Disponibilité et utilisations prévues des machines

Résultats de simulation

Nous avons effectué une simulation de 10000 minutes (167heures) de fabrication.

Le tableau 5.4 donne les disponibilités et les taux d'utilisation réels des machines. Comme prévu, les machines de la station A sont beaucoup plus chargées que les machines de la station B. Les charges des machines sont bien équilibrées, soit 97.42% et 96.21% pour les deux machines de la station A, et 55.49% et 57.69% pour les deux machines de la station B.

Les charges des machines de la station A sont plus grandes que les charges prévues. Cela vient du fait qu'en cas de pannes des machines, les pièces peuvent être affectées aux machines lentes afin d'utiliser au mieux la capacité de production. Dans cet exemple, les pièces de type 2 sont affectées à 100% à la machine M1 d'après l'équilibrage des charges des machines, alors que pour le contrôle en temps réel, les pièces de type 2 sont affectées à la machine M2 lorsque la machine M1 est en panne.

	M1	M2	M3	M4
Disponibilité	0.936	0.902	0.856	0.909
Utilisation	0.9742	0.9621	0.5549	0.5769

Tableau 5.4: Disponibilités et taux d'utilisation réels des machines

Le tableau 5.5 donne les résultats de la production. La demande est de 10000 pièces de type 1 et 12000 pièces de type 2. La production réalisée est de 9992 pièces de type 1

et 12001 pièces de type 2, soit 99.92% de la demande de type 1 et 100.01% de la demande de type 2. Les en-cours moyens sont de 2.763 pièces de type 1 et 1.256 pièces de type 2.

Dans les colonnes "Stock final", la colonne x donne la moyenne de l'état des stocks $x(t)$, la colonne x^+ donne la moyenne de la surproduction ou $\max\{0, x(t)\}$ et la colonne x^- donne la moyenne des retards ou $\min\{0, x(t)\}$. En moyenne, la production est de 34.57 pièces de plus que la demande pour le type 1 et 19.27 pièces de moins que la demande pour le type 2. En résumé, le système est capable de satisfaire la demande en maintenant les en-cours à un niveau très bas.

Type de pièce	Demande	Production	En-cours	Stock Final		
				x	x^+	x^-
1	10000	9992	2.763	34.57	40.53	5.95
2	12000	12001	1.256	-19.27	4.61	23.88

Tableau 5.5: Statistique de la production

5.4.2 Exemple de "job-shop"

Nous considérons un job-shop illustré dans la figure 5.8. Rappelons que cet exemple est similaire à l'exemple présenté dans la section 4.9.2. Le job-shop comporte quatre machines: M1, M2, M3 et M4. Quatre types de pièces, P1, P2, P3 et P4, sont fabriqués. Chaque pièce est obtenue par transformations successives sur certaines machines. Les successions des machines que doivent visiter les pièces sont les suivantes :

P1: M1, M2, M3,

P2: M2, M3, M4,

P3: M3, M4, M1,

P4: M4, M1, M2

Les durées des opérations sont données dans le tableau 5.6. Ces durées varient entre 1 minute et 2 minutes.

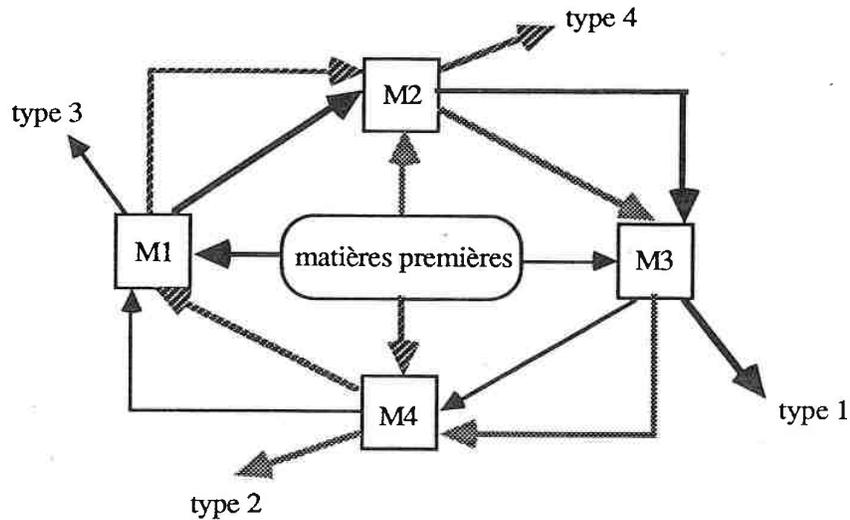


Figure 5.8: Un job-shop

	M1	M2	M3	M4
P1	2	1	1	∞
P2	∞	2	1	1
P3	1	∞	2	1
P4	1	1	∞	2

Tableau 5.6: Durées des opérations en minutes

La demande est de 0.2 pièce par minute pour tous les types de pièces, i.e.

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0.2 \text{ pièce / minute}$$

Les statistiques de pannes et de réparations sont données dans le tableau 5.7. Les machines M1 et M3 tombent en panne beaucoup plus fréquemment que les machines M2 et M4. Approximativement, les machines M1 et M3 tombent en panne 10 fois plus fréquemment que les machines M2 et M4.

La classification des machines donne deux classes de machines $\mathcal{M}1$ et $\mathcal{M}2$. Les machines soumises à pannes fréquentes, i.e. M1 et M3, sont affectées au sous-ensemble $\mathcal{M}2$. Les machines soumises à pannes lentes, i.e. M2 et M4, sont affectées au sous-ensemble $\mathcal{M}1$.

	M1	M2	M3	M4
MTBF	100	1000	100	1000
MTTR	10	100	5	100

Tableau 5.7: Durées moyennes de fonctionnement et de réparation en minutes

Le tableau 5.8 donne les statistiques sur les disponibilités et les taux d'utilisation des machines. Toutes les machines, à l'exception de la machine M3, sont disponibles pendant 90.9 % du temps et la machine M3 est disponible pendant 95.2% du temps. Les taux d'utilisation estimés des machines sont obtenus par équilibrage des charges des machines en considérant leur disponibilité. Toutes les machines, à l'exception de la machine M3, sont utilisées à 88.0% du temps disponible et la machine M3 est utilisée à 84.0% du temps disponible.

	M1	M2	M3	M4
Disponibilité	0.909	0.909	0.952	0.909
Utilisation	0.880	0.880	0.840	0.880

Tableau 5.8: Disponibilité et utilisation estimées des machines

Résultats de simulation

Les résultats de cette partie proviennent d'une simulation dont la durée est de 9000 minutes de fabrication, soit 150 heures.

Le tableau 5.9 donne les disponibilités et les taux d'utilisation réels des machines. Les charges des machines sont très proches des charges prévues.

	M1	M2	M3	M4
Disponibilité	0.893	0.924	0.955	0.938
Utilisation	0.892	0.866	0.835	0.853

Tableau 5.9: Disponibilité et utilisation réelles des machines

Le tableau 5.10 donne les résultats de la production. La demande est de 1800 pièces de chaque type. La production réalisée est de 1786 pièces de type 1, 1802 pièces de type 2, 1790 pièces de type 3, 1805 pièces de type 4, soit 99.2% de la demande pour le type 1, 100.1% de la demande pour le type 2, 99.4% de la demande pour le type 3, 100.3% de la demande pour le type 4. Les en-cours sont très faibles. D'après les données de la colonne "**Stock final**", la production est souvent en retard par rapport à la demande, mais ces retards sont faibles.

Comparé avec l'exemple présenté dans la section 4.9.2, les différences entre la production et la demande sont plus importantes dans cet exemple. Cela vient du fait que les pannes des machines M2 et M4 sont beaucoup plus importantes dans cet exemple.

Type de pièce	Demande	Production	En-cours	Stock Final		
				x	x ⁺	x ⁻
1	1800	1786	1.43	-32.4	0.06	32.4
2	1800	1802	1.34	-15.3	3.25	18.6
3	1800	1790	1.42	-30.1	0.02	30.1
4	1800	1805	1.47	-26.9	2.10	29.0

Tableau 5.10: Statistiques de la fabrication

CONCLUSION

Le travail de cette thèse se situe au niveau opérationnel (à court terme). Les points essentiels de notre étude concernent :

- l'introduction de la notion de configuration pour décrire l'état du système capable de fabriquer un ensemble de pièces avec des temps de préparation négligeables
- la mise en évidence d'une hiérarchie construite en fonction des fréquences des activités de la fabrication qui conduit à une hiérarchie à trois niveaux pour le système étudié :
 - *Séquencement des configurations* qui détermine la séquence de configurations avec, pour chacune d'elles, sa durée et les volumes de production
 - *Contrôle de flux* qui ajuste constamment les flux de production en fonction des états des machines et de l'état des stocks de façon à faire face aux pannes des machines. Bien entendu, ces flux sont contraints par le choix du niveau du séquencement des configurations
 - *Ordonnancement*, où on ordonnance les lancements en fabrication des pièces et leur fabrication en temps réel tout en respectant les flux de production calculés au niveau du contrôle de flux
- la modélisation mathématique des problèmes de contrôle à chaque niveau et la mise en évidence des caractéristiques des contrôles optimaux
- le traitement hiérarchique des pannes des machines en fonction de leur fréquence.

Nous pensons que le travail concernant le choix des configurations se limite aux systèmes de production de type "atelier flexible".

Comme nous l'avons indiqué, l'étude du contrôle de flux est applicable à tout système dans lequel les pannes sont peu fréquentes par rapport aux opérations et les temps de réglage sont négligeables.

A notre avis, l'idée du traitement hiérarchique des pannes des machines peut être généralisée aux problèmes d'ordonnancement et de planification de la production. Mais la construction des modèles correspondants dépend de la nature du système considéré.

En particulier, nous pensons que les points suivants méritent d'être approfondis:

Extensions du contrôle de flux :

Dans le modèle du contrôle de flux de cette thèse, nous faisons les hypothèses suivantes :

- les temps de réglage des machines sont négligeables,
- il n'y a pas d'accumulation de matière dans le système,
- les délais de fabrication sont négligeables.

L'extension du contrôle de flux consiste à relaxer ces contraintes. En effet, la prise en considération des temps de changement d'outils dans le modèle du contrôle flux fait l'objet des travaux de recherche menés par Gershwin, Caramanis et Murray [1988], Perkins et Kumar [1989], Kumar et Seidman [1989]. Ils proposent des règles locales pour le choix de la taille des lots et pour leur ordonnancement.

Souvent, l'accumulation de matière et les délais de fabrication peuvent ne pas être négligeables. Dans beaucoup de systèmes, des stocks tampons sont permis pour atteindre une productivité souhaitée, aussi les délais de fabrication sont importants. Le contrôle de flux considérant les stocks tampons et les délais de fabrication sont étudiés par Lou, Van Ryzin et Gershwin [1987], Van Ryzin [1987]. Compte tenu de la complexité, leurs résultats sont encore inapplicables.

Vers une gestion de production hiérarchisée :

Comme Hillion et Proth [1988] l'ont souligné, la construction d'un système de gestion de production hiérarchisée dépend à la fois de la complexité du système et de la variété des aléas que subit le système. Pour aboutir à une gestion systématique de production hiérarchisée, les points suivants sont, à notre avis, particulièrement importants :

1. Prise en compte des aléas exogènes :

Dans cette thèse, nous nous sommes limités à l'ordonnancement d'atelier et seuls

les aléas endogènes (pannes des machines) sont considérés. Cependant, on doit tenir compte des aléas exogènes (aléas des demandes, par exemple) aux niveaux supérieurs de la hiérarchie. En particulier, il sera nécessaire d'étudier la réponse à la fluctuation des demandes et l'horizon nécessaire pour faire face à cette fluctuation.

2. Agrégation spatiale du système :

Pour réduire la complexité de la gestion, un problème majeur est l'agrégation des entités. En particulier, il est primordial d'étudier des méthodes systématiques pour agréger les produits en familles de produits et les machines en sous-systèmes de fabrication. Un problème afférent est de trouver les attributs des familles de produits et des sous-systèmes de fabrication. En particulier, il n'existe pas de méthode satisfaisante pour exprimer la capacité de production des sous-systèmes de fabrication pour les familles de produits.

REFERENCES

- [1] R. N. Antony (1965), "Planning and Control Systems: A Framework for Analysis," Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1965
- [2] R. Akella, Y. F. Choong et S. B. Gershwin (1984), "Performance of Hierarchical Production Scheduling Policy," *IEEE Trans. on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, Vol. CHMT-7, No. 3, September 1984
- [3] R. Akella et P. R. Kumar (1986), "Optimal Control of Production Rate in A Failure Prone Manufacturing System," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-31, No. 2, February 1986
- [4] S. Axsäter (1981), "Aggregation of Product Data for Hierarchical Production Planning," *Operations Research*, Vol. 29, No. 4, 1981
- [5] E. K. Baker (1974), "Introduction to Sequencing and Scheduling," John Wiley, New York, 1974
- [6] A. Bensoussan, M. Crouhy et J.M. Proth (1983), "Mathematical Theory of Production Planning," Advanced Series in Management, North-Holland, 1983
- [7] C. Behrtul et M.C. Portmann (1985), "Flexible Manufacturing Systems Control under Large Disturbances," Proc. of the 6th International IFIP/IFAC Conference on Software for Discret Manufacturing, Paris, June 1985
- [8] T. Bielecki et P. R. Kumar (1988), "Optimality of Zero-Inventory Policies for Unreliable Manufacturing Systems," *Operations Research*, Vol. 36, No. 4, July-August 1988
- [9] G. R. Bitran, E. A. Haas et A. C. Hax (1981), "Hierarchical Production Planning : A Single Stage System," *Operations Research*, Vol. 29, No. 4, July-August 1981
- [10] G. R. Bitran et A. C. Hax (1977), "On the Design of Hierarchical Production Planning Systems," *Decision Sciences*, Vol. 8, No. 1, 1977

- [11] G. Chassang et H. Tron (1983), "Gérer la Production Avec l'Ordinateur," Edition Dunod, Paris, 1983
- [12] Y. F. Choong (1988), "Flow Control Approach for Batch Production Scheduling with Random Demand," Ph.D. Thesis, M.I.T. Dept of Mechanical Engineering, May 1988
- [13] J. H. Chow et P. V. Kokotovic (1985), "Time Scale Modeling of Sparse Dynamic Networks," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 8, August 1985
- [14] G. Cohen, D. Dubois, J. P. Quadrat et M. Viot (1985), "A Linear-System Theoretic View of Discret-Event Processes and its View for Performance Evaluation in Manufacturing," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 3, March 1985
- [15] E. G. Coffman (1976), "Computer and Job-Shop Scheduling Theory," John Wiley & Sons, New York, 1976
- [16] Y. Dallery (1984), "Une Méthode Analytique pour l'Evaluation des Performances d'un Atelier Flexible," Thèse de Doctoral Ingénieur, INPG, Grenoble, 1984
- [17] F. Delebecque et J.P. Quadrat (1981), "Optimal Control of Markov Chains Admitting Strong and Weak Interactions," *Automatica*, Vol. 17, pp. 281-296, 1981
- [18] M.A.H. Dempster, M.L. Fischer, L. Jansen, B.J. Lageweg, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan (1981), "Analytical Evaluation of Hierarchical Planning Systems," *Operations Research*, Vol. 29, No. 4, July-August 1981
- [19] E. Diday, J. Lemaire, J. Pouger et F. Testu (1981), "Elément d'Analyse des Données," Dunod, 1981
- [20] G. Doumeingts, D. Breuil et L. Pun (1983), "La Gestion de Production Assistée par Ordinateur," Hermes Publishing, France

- [21] B. P. Dzielinski et R. E. Gomory (1965), "Optimal Programming of Lot Sizes, Inventory and Labor Allocations," *Management Science*, Vol. 11, No. 9, July 1965

- [22] S. E. Elmaghraby (1978), "The Economic Lot Scheduling Problem (ELSP): Review and Extensions," *Management Science*, Vol. 24, No. 6, February 1978

- [23] J. Erschler, G. Fontan, C. Merce (1985), "Consistency of the Disaggregation Process in Hierarchical Planning," *Operations Research*, Vol. 34, No. 3, May-June 1985

- [24] M. L. Fisher (1981), "The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems," *Management Science*, Vol. 27, No. 1, January 1981

- [25] Y. Frein, Y. Dallery, J.J. Pierrat et R. David (1987), "Optimisation du Routage des Pièces dans un Atelier Flexible par des Méthodes Analytiques," 2nd International Conference on Production Systems, INRIA, Paris, 6-10 Avril 1987

- [26] S. French (1982), "Sequencing and Scheduling," Ellis Horwood Limited, Chichester England, 1982

- [27] L. F. Gelders et L. N. Van Wassenhove (1982), "Hierarchical Integration in Production Planning: Theory and Practice," *Journal of Operations Management*, Vol. 3, No. 1, November 1982

- [28] S. B. Gershwin (1987a), "A Hierarchical Framework for Discret Event Scheduling in Manufacturing Systems," Presented at IIASA Workshop on Discret Event Systems: Models and Applications, Sopron, Hungary, August 3-7, 1987. Published in Vol. 103, *Lecture Notes in Control and Information Sciences, Discret Event Systems: Models and Applications*, P. Varaiya and A. B. Kurzhanski (eds.), Springer-Verlag

- [29] S. B. Gershwin (1987b), "A Hierarchical Framework for Manufacturing Systems Scheduling: A Two-Machine Example," Proceedings of the 26th IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, California, December, 1987

- [30] S. B. Gershwin (1989), "Hierarchical Flow Control: A Framework for Scheduling and Planning Discret Events in Manufacturing Systems," *IEEE Proceedings Special Issue on Discret Event Systems*, 1989
- [31] S. B. Gershwin, R. Akella et Y. F. Choong (1985), "Short-term Production Scheduling of an Automated Manufacturing Facility," *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 29, No. 4, July 1985
- [32] S. B. Gershwin, M. Caramanis et P. Murray (1988), "Simulation Experience with a Hierarchical Scheduling Policy for a Simple Manufacturing System," Proc. 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, Texas, December 1988
- [33] S. B. Gershwin, R. R. Hildebrandt, R. Suri et S. K. Mitter (1986), "A Control Perspective on Recent Trends in Manufacturing System," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 6, No. 2, April 1986
- [34] V. Giard (1988), "Gestion de la Production," Edition Economica, Paris, 1988
- [35] F. Glover (1987), "Tabu Search," paper presented at the ORSA/TIMS Joint National Meeting, St. Louis, MO., October 1987
- [36] F. Glover (1987), "Tabu Search Methods in Artificial Intelligence and Operations Research," *ORSA Artificial Intelligence Newsletter*, Vol. 1, No. 2, 1987
- [37] S. C. Graves (1981), "A Review of Production Scheduling," *Operations Research*, Vol. 29, No. 4, July-August 1981
- [38] S. C. Graves (1982), "Using Lagrangean Techniques to Solve Hierarchical Production Planning Problems," *Management Science*, Vol. 28, No. 3, March 1982
- [39] A. C. Hax et H. C. Meal (1975), "Hierarchical Integration of Production Planning and Scheduling," M.A. Geisler, ed. In *Studies in Management Sciences*, Vol. I, Logistics. North Holland-American Elsevier, 1975, pp. 53-69

- [40] R. R. Hildebrant (1980), "Scheduling and Control of Flexible Machining Systems when Machines are Prone to Failures," Ph.D. Thesis, M.I.T. Dept. of Astronautics and Aeronautics, August 1980
- [41] R. R. Hildebrant et R. Suri (1980), "Methodology and Multi-Level Algorithm Structure for Scheduling and Real-Time Control of Flexible Manufacturing Systems," Proc. 3rd International Symposium on Large Engineering Systems, Memorial University of Newfoundland, July 1980, pp. 239-244
- [42] H. P. Hillion (1989), "Modélisation et Analyse des Systèmes de Production Discrets par les Réseaux de Petri Temporisés," Thèse de l'Université de Paris VI, Paris, Janvier 1989
- [43] H. P. Hillion et J.M. Proth (1988), "Systèmes de Gestion de Production Hiérarchisée: Conception et Utilisation," Proc. du Congrès Automatique 1988, AFCET, Grenoble, France, Octobre 1988
- [44] H. P. Hillion et J.M. Proth (1989), "Performance Evaluation of Job-shop System using Timed Event-Graphs," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-34, No. 1, January 1989
- [45] H. Jönsson (1983), "Simulation Studies of Hierarchical Systems in Production and Inventory Control," Ph.D. Thesis, Linköping University, Linköping, Suède, 1983
- [46] U. S. Karmarkar et L. Schrage (1985), "The Deterministic Dynamic Product Cycling Problem," *Operations Research*, Vol. 33, No. 2, March-April 1985
- [47] J. Kimemia (1982), "Hierarchical Control of Production in Flexible Manufacturing Systems," Ph.D. Thesis, M.I.T. Dept of Electrical Engineering and Computer Science, April 1982
- [48] J. Kimemia et S. B. Gershwin (1983), "An Algorithm for the Computer Control of a Flexible Manufacturing System," *IIE Trans.* Vol. 15, No. 4 December 1983
- [49] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, M. P. Vecchi (1983), "Optimization by Simulated Annealing," *Science*, Vol. 220, No. 4598, May 1983

- [50] P. V. Kokotovic (1981), "Subsystems, Time Scales, and Multi-modeling," *Automatica*, Vol. 17, pp. 789-795, 1981
- [51] P. R. Kumar et T. I. Seidman (1989), "Dynamic Instabilities and Stabilization Methods in Distributed Real-Time Scheduling of Manufacturing System," Working Paper, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1989
- [52] L. S. Lasdon et R. C. Terjung (1971), "An Efficient Algorithm for Multi-Item Scheduling," *Operations Research*, Vol. 19, 1971
- [53] C. Libosvar (1988), "Hierarchical Production Management: the Flow-Control Layer," Thèse de l'Université de Metz, France, 1988
- [54] S. X. Lou, G. J. Van Ryzin et S. B. Gershwin (1987), "Scheduling Job Shops with Delays," Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Raleigh, North Carolina, March, 1987
- [55] O. Z. Maimon et S. B. Gershwin (1988), "Dynamic Scheduling and Routing For Flexible Manufacturing Systems That Have Unreliable Machines," *Operations Research*, Vol. 36, No. 2, March-April 1988
- [56] A. S. Manne (1958), "Programming of Economic Lot Sizes," *Management Science*, Vol. 4, No. 2, January 1958
- [57] W. L. Maxwell et J. A. Muckstadt (1985), "Establishing Consistent and Realistic Reorder Intervals in Production-Distribution Systems," *Operations Research*, Vol. 33, No. 6, November-December 1985
- [58] K. Meier (1989), "Commande Hiérarchisée d'un Système de Production," Thèse de l'Université de Metz, Metz, France, Janvier 1989
- [59] C. Merce (1987), "Cohérence des Décisions en Planification Hiérarchisée," Thèse d'Etat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1987
- [60] M. Minoux (1983), "Programmation Mathématique: Théorie et Algorithme", Tome 1, Dunod, Paris, 1983

- [61] G. J. Olsder et R. Suri (1980), "Time-Optimal Control of Flexible Manufacturing Systems with Failure Prone Machines," Proc. 19th IEEE Conference on Decisions and Control, Albuquerque, December 1980
- [62] J. Orlicky (1975), "Material Requirements Planning: the New Way of Life in Production and Inventory Management," Edition Mc Graw-Hill, New York
- [63] J. Perkins et P.R. Kumar (1989), "Stable, Distributed, Real-Time Scheduling of Flexible Manufacturing/Assembly/Disassembly Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-34, No. 2, February 1989
- [64] M.C. Portmann (1987), "Méthode de Décomposition Spatiale et Temporelle en Ordonnancement de la Production," Thèse d'Etat, Université de Nancy I, Nancy, France, Septembre 1987
- [65] M. Reiser et S. Lavenberg (1980), "Mean Value Analysis of Closed Multichain Queuing Network," *Journal of ACM*, Vol. 27, No. 2, 1980
- [66] R. Rishel (1975), "Dynamic Programming and Minimum Principles for Systems with Jump Markov Disturbances," *SIAM Journal on Control*, Vol. 13, No. 2, February 1975
- [67] F. Roubellat et V. Thomas (1987), "Une Méthode et un Logiciel pour l'Ordonnancement en Temps Réel d'Ateliers," 2nd International Conference on Production Systems, INRIA, Paris, 6-10 Avril, 1987
- [68] V. R. Saksena, J. O'Reilly et P. V. Kokotovic (1984), "Singular Perturbations and Time-Scale Methods in Control Theory: Survey 1976-1983," *Automatica*, Vol. 20, No. 3, May 1984
- [69] N. R. Sandell, P. Varaiya, M. Athans et M. G. Safonov (1978), "Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-23, No. 2, April 1978
- [70] A. Sharifnia (1988), "Production Control of a Manufacturing System with Multiple Machine States," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-33, No. 7, July 1988

- [71] J. N. Tsitsiklis (1982), "Characterization of Optimal Policies in a Dynamic Routing Problem," Technical Report LIDS-R-1178, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, 1982

- [72] G. J. Van Ryzin (1987), "Control of Manufacturing Systems with Delays," M.S. Thesis, Laboratory for Information and Decision Systems, MIT, 1987

- [73] H. M. Wagner et T. M. Whitin (1958), "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model," *Management Science*, Vol. 5, 1958

- [74] R. C. Wilson et R. A. Henry (1977), "Introduction to Group Technology in Manufacturing and Engineering," ed. by Industrial development division, Institut of Science and Technology, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1977

- [75] W. I. Zangwill (1969), "A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production Systems - A Network Approach," *Management Science*, Vol. 15, No. 9, 1969

- [76] S. Zions (1974), "Linear and Integer Programming," Prentice Hall, 1974

ANNEXE

Complexité de l'Algorithme de la Recherche de Configurations

Dans la section 3.2.2, nous avons proposé une heuristique itérative pour trouver la meilleure séquence de configurations. Comme l'algorithme de la section 3.2.2. se prête mal à une évaluation de complexité, nous proposons un calcul de complexité sur une légère variante de cet algorithme (nous avons remplacé certains tests d'arrêt par égalité de deux nombres par des tests d'arrêts par égalité à ϵ près). La méthode approchée part de plusieurs séquences initiales de configurations générées aléatoirement. A partir de chaque séquence initiale, on applique un algorithme pour trouver une meilleure séquence de configurations. Nous calculons la complexité pour cette partie centrale de la méthode. Ci-dessous la nouvelle version de cette partie (les notation utilisées sont celles du paragraphe 3.2.2) :

Algorithme :

1. **Générer** aléatoirement une séquence de configurations $w(0)$
 2. **Répéter**
 - 2.1. **Faire:** $w_0 := w(0)$
 - 2.2. *Phase 1:* optimisation séquentielle des configurations
 - 2.2.1. **Faire:** $w(T) := w(0)$
 - 2.2.2. **Répéter**
 - 2.2.2.1. Initialisation de l'itération
Faire: $w(0) := w(T)$
 - 2.2.2.2. **Pour t de 1 à T faire :**
 $w(t) := w_1(w(t-1), t)$
Jusqu'à $\mathcal{X}(w(T)) - \mathcal{X}(w(0)) < \epsilon$
 - 2.3. *Phase 2:* optimisation de l'ordre des configurations
 - 2.3.1. **Faire:** $w(T) := w(0)$
 - 2.3.2. **Répéter**
 - 2.3.2.1. Initialisation de l'itération
Faire: $w(0) := w(T)$
 - 2.3.2.2. **Pour t de 1 à T faire :**
 $w(t) := w_2(w(t-1), t)$
Jusqu'à $\mathcal{X}(w(T)) - \mathcal{X}(w(0)) < \epsilon$
- Jusqu'à** $\mathcal{X}(w(0)) - \mathcal{X}(w_0) < \epsilon$

Dans cet annexe, pour évaluer la complexité de cet algorithme, nous commençons par présenter des hypothèses. Puis à partir de ces hypothèses, nous déduisons une borne supérieure de la valeur du critère ($J(w)$) qui nous fournit la complexité de l'algorithme.

1. Hypothèses

Afin d'évaluer la complexité de l'algorithme, nous faisons les hypothèses suivantes :

H1. La capacité de production est limitée :

$$\Delta U_{ni} \leq V \quad \forall (n,i) \in \mathcal{N} \times \mathcal{Q}$$

H2. Les demandes sont bornées :

$$d_{tn} \leq D \quad \forall (t,n) \in \mathcal{T} \times \mathcal{N}$$

H3. Les coûts unitaires de stock et de retard sont bornées :

$$cs_{tn} \leq C \text{ et } cb_{tn} \leq C \quad \forall (t,n) \in \mathcal{T} \times \mathcal{N}$$

H4. Les stocks initiaux sont bornées :

$$|x_{0n}| \leq X \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

2. Une borne supérieure de la valeur du critère

Pour une politique admissible de contrôle w et u , d'après l'hypothèse H1, nous avons :

$$u_{tn} \leq V \quad \forall (t,n) \in \mathcal{T} \times \mathcal{N} \quad (\text{a1})$$

D'après la relation (a1) et les hypothèses H2 et H4, les états des stocks satisfont aux conditions suivantes :

$$-X - D t \leq x_{tn} \leq V t + X \quad \forall (t,n) \in \mathcal{T} \times \mathcal{N} \quad (\text{a2})$$

Donc, la valeur du critère $J(w,u)$ satisfait à :

$$\begin{aligned} J(w,u) &= \sum_t \sum_n g_{tn}(x_{tn}) \\ &= \sum_t \sum_n \max\{c_{s_{tn}} x_{tn}, -c_{b_{tn}} x_{tn}\} \\ &\leq \sum_t \sum_n C |x_{tn}| \\ &\leq \sum_t \sum_n C [X + \max\{D, V\} * t] \\ &= C [X * T * N + \max\{D,V\} * T(T-1)/2] \end{aligned}$$

D'après la définition de la valeur du critère $\mathcal{J}(w)$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\mathcal{J}(w) \leq C [X * T * N + \max\{D,U\} * T(T-1)/2] \quad (a3)$$

3. Complexité

Nous allons majorer le nombre de fois où l'on calcule la valeur du critère $\mathcal{J}(w)$.

Dans phase 1 de l'algorithme, nous calculons la séquence de configurations suivante :

$$w1(w,t) = \underset{v \in C1(w,t)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{J}(v)$$

où $C1(w,t) = \{v / v \in S \text{ et } v_s = w_s \forall s \neq t\}$.

Le nombre le nombre de fois où l'on calcule $\mathcal{J}(v)$ pour obtenir la séquence de configurations $w1(w(t-1),t)$ est donc Q .

Dans phase 2, nous calculons la séquence de configurations suivante :

$$w2(w,t) = \underset{v \in C2(w,t)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{J}(v)$$

où $C2(w,t) := \{v / v \in S \text{ et } \exists \tau \in \mathcal{T} : v_\tau = w_t, v_t = w_\tau \text{ et } v_s = w_s \forall s \notin \{t,\tau\}\}$.

Le nombre de fois où l'on calcule $\mathcal{J}(v)$ pour obtenir la séquence de configurations $w2(w(t-1),t)$ est donc $T - 1$.

A chaque itération de l'étape 2, soit t_1 (resp. t_2) le nombre d'itérations effectuées à l'étape 2.2.2 (resp. 2.3.2). Le gain en valeur du critère satisfait :

$$\mathcal{J}(w(0)) - \mathcal{J}(w_0) \geq (t_1 + t_2 - 2) \varepsilon.$$

Le nombre de fois où l'on calcule $\mathcal{J}(w)$ est $t_1 * T * Q + t_2 * T * (T-1)$. Nous en déduisons que le nombre de calculs nécessaire pour améliorer la valeur du critère $\mathcal{J}(w)$ de ε est majoré par $2 * T * Q + 2 * T * (T-1)$.

Puisque la valeur du critère $\mathcal{J}(w)$ est toujours positive ou nulle, le nombre total de calculs de $\mathcal{J}(v)$ pour l'ensemble de l'algorithme est donc majoré par :

$$(\mathcal{J}(w^0)/\varepsilon) (2TQ + 2T(T-1))$$

où w^0 est la séquence de configurations initiale.

D'après la relation (a3), ce nombre est aussi majoré par :

$$\frac{2C}{\varepsilon} T^2 N \left[\frac{\max\{V, D\} (T-1)}{2} + X \right] (Q + T - 1)$$

qui est polynômial en T, N et Q.

Remarquons que si l'on comparait toutes les séquences de configurations possibles afin de trouver la solution exacte, le nombre total d'évaluations de $\mathcal{J}(w)$ serait :

$$Q^T$$

qui est exponentiel en T.

NOM DE L'ETUDIANT : XIE Xiao-Lan

NATURE DE LA THESE : Doctorat de l'Université de NANCY I en Informatique
mention gestion de production

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le - 7 JUIN 1989 n° 986

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



RÉSUMÉ

Nous étudions, dans cette thèse, l'ordonnancement en temps réel d'un atelier flexible par une approche hiérarchisée. Nous introduisons la notion de configuration pour décrire un état du système permettant de fabriquer un ensemble de produits avec des temps de préparation négligeables. Les machines de l'atelier sont sujettes à pannes.

Pour gérer en temps réel un tel système, nous proposons une gestion hiérarchisée à trois niveaux : séquençement des configurations, contrôle de flux et ordonnancement en temps réel. Le niveau du séquençement des configurations détermine une séquence "optimale" de configurations avec, pour chacune d'elles, sa durée et les volumes de production. Pour chaque configuration, le contrôle de flux a pour objectif de faire face aux pannes des machines en ajustant constamment les flux de production en fonction des états des machines et de l'état des stocks. Au niveau de l'ordonnancement, on ordonnance les lancements en fabrication de pièces et leur fabrication en temps réel en respectant les flux de production calculés à l'étape précédente.

Pour les deux premiers niveaux, nous établissons des modèles mathématiques pour trouver les politiques optimales de contrôle. Nous mettons en évidence des propriétés de ces modèles et développons des méthodes de résolution. Pour le troisième niveau, nous utilisons des règles de production simples qui conduisent à de bonnes solutions admissibles.

Enfin, nous généralisons le problème de contrôle de flux au cas où les pannes peuvent être regroupées en classes de fréquences voisines bien différenciées. Nous proposons un traitement hiérarchique des pannes et établissons, puis résolvons, les modèles de contrôle correspondants.

Mots-clés : Ordonnancement en temps réel, Approche hiérarchisée,
Atelier flexible, Configuration, Pannes, Contrôle