

UNIVERSITE DE NANCY I

enregistrement au CNRS AO 8041

Dactyl

Sc N. 73/34 A

# THESES

présentées à

l'UNIVERSITE DE NANCY I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

**micHEL VERON**

Ingénieur INSA (Lyon) Docteur Ingénieur

PREMIERE THESE: CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SURFACES  
NUMERIQUES UNISURF - CONDITIONS DE  
RACCORDEMENT.

DEUXIEME THESE: PROPOSITION DONNEE PAR L'UNIVERSITE :  
COMMANDE DIRECTE DES MACHINES OUTILS  
PAR CALCULATEUR INDUSTRIEL.

Soutenues le 8 février 1973 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury

President : M. J. BARRIOL

Examinateurs : MM. P. BEZIER  
P. DEBRAINE  
A. FRUHLING  
R. MAINARD

1973

UNIVERSITE DE NANCY I

Enregistrement au CNRS AO 8041

Dactyl

Sc N 73/34

A

# THESES

présentées à

l'UNIVERSITE DE NANCY I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

**michel VERON**

Ingénieur INSA (Lyon) Docteur Ingénieur

PREMIERE THESE: CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SURFACES  
NUMERIQUES UNISURF - CONDITIONS DE  
RACCORDEMENT.

DEUXIEME THESE: PROPOSITION DONNEE PAR L'UNIVERSITE :  
COMMANDE DIRECTE DES MACHINES OUTILS  
PAR CALCULATEUR INDUSTRIEL.

Soutenues le 8 février 1973 devant la Commission d'Examen

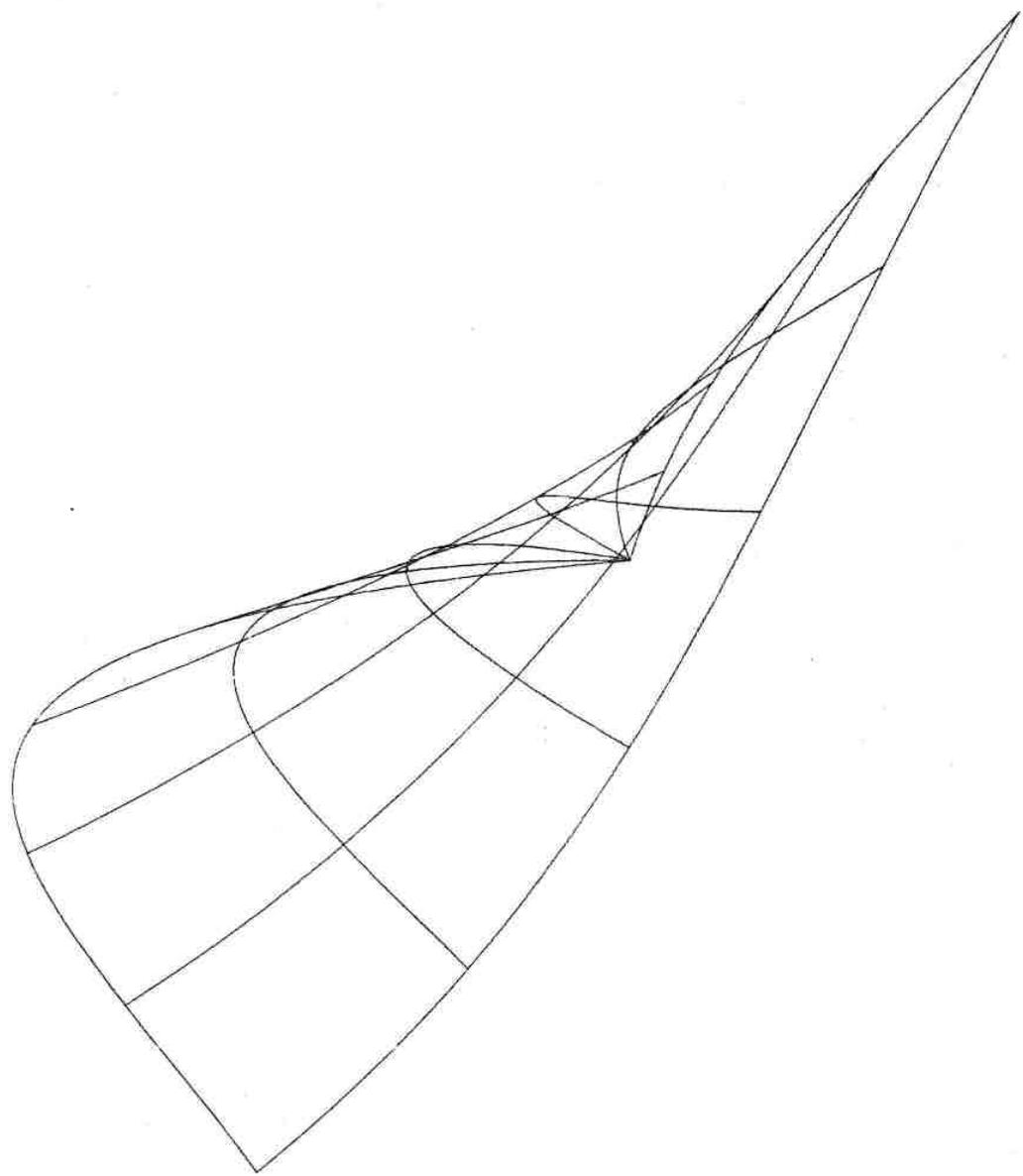
Membres du Jury

President : M. J. BARRIOL

Examineurs : MM. P. BEZIER  
P. DEBRAINE  
A. FRUHLING  
R. MAINARD

1973





\*\*\*\*\*  
\* AVANT - PROPOS \*  
\*\*\*\*\*

Le présent travail a été effectué dans le cadre des préoccupations habituelles du Centre Universitaire de Commande Numérique de Nancy (CUCN).

Le Centre de Commande Numérique des machines outils est dû aux efforts de plusieurs organismes universitaires de Nancy : le Laboratoire d'Electricité et d'Automatique, l'Institut des Sciences de l'Ingénieur, et l'Institut Universitaire de Technologie et des Associations spécialisées pour promouvoir la Commande Numérique.

Mes premiers remerciements vont donc à tous ceux qui nous ont permis de créer le CUCN et plus particulièrement à Messieurs A. FRUHLING, Directeur du LEA , et R. MAINARD, Directeur de l'IUT et à tous mes camarades du groupe Commande Numérique.

A l'occasion des manifestations auxquelles a été mêlé le CUCN , j'ai toujours trouvé le plus précieux soutien auprès de Monsieur P. BEZIER, Directeur à la Régie Renault, dont l'intérêt bienveillant s'est en particulier manifesté lorsqu'il m'a suggéré le sujet de ce travail qu'il n'a cessé de suivre constructivement. Je le prie de trouver ici l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie Monsieur le Professeur DEBRAINE qui, ayant dirigé des travaux antérieurs sur le même sujet, a bien voulu prendre connaissance de mon travail et participer à mon jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur le Professeur J. BARRIOL qui me fait l'honneur de présider la Commission d'Examen.

Monsieur le Recteur J. CAPELLE, en regrettant d'être dans l'impossibilité de faire partie du Jury, a examiné et annoté le projet de mon mémoire, me permettant ainsi de donner à celui-ci une meilleure forme. Particulièrement sensible à son encourageante et agissante sollicitude, je lui exprime ma plus vive reconnaissance.

J. P. MUSSE et G. RIS m'ont apporté une aide importante et efficace pour la mise en oeuvre numérique de mes résultats, notamment pour la programmation sur calculateur T 2000 et ordinateur CII 10070.

Mademoiselle J. BOGUET a donné à ce manuscrit difficile une présentation parfaite grâce à sa diligente et souriante compétence.

Qu'ils veuillent bien tous trouver l'expression de mes remerciements les plus amicaux.

\*\*\*\*\*

## TABLE DES MATIERES

---

	page
INTRODUCTION.	1
CHAPITRE A - METHODE UNISURF ; FONCTIONS DE BEZIER.	3
CHAPITRE B - COURBURE D'UNE SURFACE EN UN POINT.	13
PREMIERE PARTIE - CALCUL DIRECT DES CONDITIONS DE RACCORDEMENT.	
CHAPITRE I - DEFINITION DES SURFACES CANONIQUES - NOTATIONS - POSITION DU PROBLEME.	21
CHAPITRE II - EXPRESSION LOCALE D'UNE SURFACE AU VOISINAGE D'UN POINT $P_0$ DE LA GENERATRICE. II. a) Développement limite pour le paramètre $r$ II. b) Développement limite au voisinage de $P_0$ .	25
CHAPITRE III - CONDITIONS DE RACCORDEMENT AU PREMIER ORDRE.	27
CHAPITRE IV - CONDITIONS DE RACCORDEMENT AU DEUXIEME ORDRE. IV. 1) Notations IV. 2) Définitions des Normales IV. 3) Directions principales de courbure IV. 4) Rayons de courbure	32

CHAPITRE V - EXPLOITATIONS DES CONDITIONS DE RACCORDEMENT.	40
V. 1) Choix d'une solution particulière	
V. 2) Utilisation de $\vec{\Gamma}'_D = \mu^2 \vec{\Gamma}'_D + \lambda^2 \vec{\Gamma}'_C + 2\lambda\mu \vec{\Omega}$	
V. 2.1) Terme en $\vec{a}_{\delta}^j$ , fonction $k^j$	
V. 2.2) Terme en $\vec{a}_{\delta}^j$ , fonction $d^j(\vec{a}_{\delta}^j)$	
V. 2.3) Terme en $\vec{a}_{\delta}^j$ , fonction $b^j(\vec{a}_{\delta}^j)$	
CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE.	52
DEUXIEME PARTIE - GENERALISATION.	57
CHAPITRE VII - CAS DES COURBES UNISURF.	58
VII. 1) Autre formulation d'une courbe Unisurf	
VII. 2) Elévation du degré d'une courbe	
CHAPITRE VIII - SURFACES UNISURF.	62
VIII. 1) Généralisation	
VIII. 2) Nouvelle formulation des surfaces Unisurf - Expression locale	
CHAPITRE IX - CONDITIONS GENERALISEES DE RACCORDEMENT AU PREMIER ORDRE.	70
CHAPITRE X - CONDITIONS DE RACCORDEMENT AU DEUXIEME ORDRE.	74
CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE.	77

CHAPITRE XI - MISE EN OEUVRE.	79
XI. 1) Expression matricielle d'un point P de la surface S	
XI. 2) Expression des conditions de raccordement	
XI. 3) Exemples	
CONCLUSION.	107
BIBLIOGRAPHIE.	110
ANNEXES.	

---

## INTRODUCTION

La création de surfaces obéit à des impératifs esthétiques (carrosseries automobiles) ou physiques déduits des lois de l'aéro ou hydrodynamique (constructions aéronautiques ou navales).

Les surfaces analytiques classiques ne suffisent plus à traduire une forme un peu compliquée dont le découpage en carreaux élémentaires devient vite fastidieux, surtout lorsqu'il faut assurer une continuité de degré donné entre eux.

Ainsi différentes méthodes numériques de définition des surfaces ont été développées, comme celle du Professeur INABA (d'après Réf. [3]), ou celle du Professeur S. A. COONS [1] qui utilise comme fonctions d'interpolation des polynômes de degré 3 ou 5. La méthode Unisurf, due à P. BEZIER [2] [3] [4], étudiée à la Régie Renault (RNUR) initialement pour la conception des carrosseries et l'usinage des outils d'emboutissage, apporte "des avantages que nulle autre ne peut revendiquer" [5], grâce à une définition vectorielle biparamétrique élégante, basée sur l'emploi de produits tensoriels d'un type nouveau.

Des systèmes extrêmement conversationnels utilisant la méthode Unisurf, sont actuellement développés par Renault et Peugeot.

Comme il n'est pas possible de définir dans son ensemble une structure complexe par un seul carreau de surface, le problème de la continuité entre carreaux successifs se pose, et nous l'examinerons dans le cadre de la méthode Unisurf.

Le raccordement au premier ordre entre deux éléments  $S$  et  $S'$  a été traité par CHEMLA [6] dans le cas où  $S$  et  $S'$  ont des génératrices définies par un même nombre  $p$  de vecteurs.

L'objet de ce travail est de généraliser les résultats de CHEMLA et d'établir les conditions de raccordement au 2ème ordre.

Dans la première partie, après avoir rappelé le principe Unisurf et les propriétés des fonctions de BEZIER ainsi que le calcul des directions et des rayons principaux de courbure, on traite directement le problème du raccord en utilisant les vecteurs caractéristiques de la surface.

Dans la deuxième partie on utilise un autre formalisme, plus facilement exploitable sur ordinateur qui permet une généralisation de la notion de surface Unisurf, ainsi que l'établissement des conditions généralisées de raccordement au 1er et au 2ème ordre.

---

A) Méthode Unisurf ; fonctions de BEZIER.

Dans la méthode Unisurf [2] [3] [4], le point P d'un arc de courbe  $\vec{G}(\rho)$  est représenté paramétriquement par

$$\vec{OP}(\rho) = \vec{G}(\rho) = \sum_{j=0}^p \alpha_j \cdot \varphi_j(\rho) \quad \text{avec } \rho \in [0,1]$$

où les  $\vec{\alpha}_j$  sont des vecteurs de  $R^2$  (courbes planes) ou  $R^3$  (courbes gauches), repéré dans un référentiel orthonormé d'ordre 2 ou 3.

L'idée de BEZIER consiste à imposer un certain nombre de contraintes pour que le polygone caractéristique formé par les vecteurs  $\vec{\alpha}_j$  placés bout à bout, dans l'ordre des indices, donne immédiatement l'allure générale de la courbe, puis d'en déduire les fonctions répondant au problème. Ainsi la schématisation de la courbe à obtenir facilite le travail de conception de l'utilisateur, le "projeteur" comme on l'appelle dans l'industrie automobile. Tous les changements de repère (rotation, translation) nécessaires depuis la création jusqu'à l'usinage de la forme sont résolus par simple projection des  $\vec{\alpha}_j$  sur le nouveau référentiel.

Les contraintes, relatives à des considérations géométriques, concernent :

- l'origine de la courbe, correspondant à  $\rho = 0$ , qui coïncide avec l'extrémité du vecteur  $\vec{\alpha}_0$ , d'où

$$\vec{OP}(0) = \vec{\alpha}_0$$

donc

$$\varphi_0(0) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_j(0) = 0 \quad \text{pour } p \geq j \geq 1$$

- l'extrémité, correspondant à  $\rho = 1$ , définie par l'extrémité du polygone formé par les  $\vec{\alpha}_j$  placés bout à bout, d'où

$$\vec{OP}(1) = \sum_{j=0}^p \vec{\alpha}_j$$

donc  $\varphi_j^{(p)}(1) = 1$  pour  $p \geq j \geq 0$  ;

- les tangentes à l'origine et à l'extrémité qui sont respectivement portées par les vecteurs  $\vec{\alpha}_1$  et  $\vec{\alpha}_p$ , d'où

$$\frac{d\vec{OP}(0)}{d\rho} = k_1 \cdot \vec{\alpha}_1 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{OP}(1)}{d\rho} = k_p \cdot \vec{\alpha}_p$$

avec  $k_1 > 0$  et  $k_p > 0$ ,

donc  $\varphi_1^{(p)}(0) > 0$   $\varphi_j^{(p)}(0) = 0$  pour  $p \geq j > 1$

$\varphi_p^{(p)}(1) > 0$   $\varphi_j^{(p)}(1) = 0$  pour  $p-1 \geq j \geq 0$  ;

- les plans osculateurs à l'origine et à l'extrémité de  $\vec{G}(\rho)$  qui ne dépendent que des vecteurs  $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$  et  $\vec{\alpha}_{p-1}, \vec{\alpha}_p$  respectivement, ce qui donne

$\varphi_1^{(p)}(0) \neq 0, \varphi_2^{(p)}(0) \neq 0$  et  $\varphi_j^{(p)}(0) = 0$  pour  $p \geq j > 2$

et  $\varphi_{p-1}^{(p)}(1) \neq 0, \varphi_p^{(p)}(1) \neq 0$  et  $\varphi_j^{(p)}(1) = 0$  pour  $p-1 > j \geq 0$ .

Ces contraintes peuvent être extrapolées à des entités d'ordre

supérieur n'ayant pas de significations géométriques bien définies, ce qui fournit pour les dérivées successives les conditions :

à l'origine

$$\begin{array}{l} \varphi_P^{(3)}(0), \varphi_P^{(3)}(0), \varphi_P^{(3)}(0) \neq 0 \\ \vdots \\ \varphi_P^{(j)}(0), \varphi_P^{(j)}(0), \dots, \varphi_P^{(j)}(0) \neq 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \varphi_P^{(3)}(0) = \dots = \varphi_P^{(3)}(0) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_P^{(j)}(0) = \dots = \varphi_P^{(j)}(0) = 0, \end{array}$$

et à l'extrémité

$$\begin{array}{l} \varphi_P^{(3)}(1), \varphi_{p-1}^{(3)}(1), \varphi_{p-2}^{(3)}(1) \neq 0 \\ \vdots \\ \varphi_P^{(j)}(1), \varphi_{p-1}^{(j)}(1), \dots, \varphi_{p-j+1}^{(j)}(1) \neq 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \varphi_{p-3}^{(3)}(1) = \dots = \varphi_0^{(3)}(1) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_{p-j}^{(j)}(1) = \dots = \varphi_0^{(j)}(1) = 0 \end{array}$$

Ainsi que l'a démontré CHEMLA [ 6 ] seule la famille

$$(A.1) \quad \varphi_P^j(p) = \sum_{k=j}^p (-1)^{k-j} \binom{k-j}{k-1} \binom{k}{p} p^k \quad 1 \leq j \leq p$$

$$\text{et} \quad \varphi_P^0(p) = 1 \quad \forall p \in [0, 1]$$

proposée par P. BEZIER, constitue la solution dans l'espace vectoriel de degré  $p$ , au problème posé. On adopte par convention

$$\varphi_{j,p}(\rho) \equiv 0 \quad \text{pour } j > p.$$

Nous nommerons ces fonctions, fonctions de BEZIER, ainsi qu'on le fait dans les pays anglo-saxon [8]

On peut montrer [3] que ces fonctions sont engendrées à partir d'une fonction génératrice

$$(A.2) \quad \Phi_p(\rho) = \frac{(1-\rho)^p - 1}{\rho}$$

$$(A.3) \quad \text{par } \varphi_{j,p}(\rho) = \frac{(-\rho)^j}{(j-1)!} \cdot \frac{d^{j-1} \Phi_p(\rho)}{d\rho^{j-1}}$$

A titre d'exemple, les fonctions de BEZIER, pour  $p = 3, 4$  et  $5$  sont :

$$(A.4) \quad \left. \begin{array}{l} p = 3 \\ \varphi_{1,3}(\rho) = \rho^3 - 3\rho^2 + 3\rho \\ \varphi_{2,3}(\rho) = -2\rho^3 + 3\rho^2 \\ \varphi_{3,3}(\rho) = \rho^3 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l}
 p = 4 \\
 (A. 5)
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \gamma_1(p) = -p^4 + 4p^3 - 6p^2 + 4p \\
 \gamma_2(p) = 3p^4 - 8p^3 + 6p^2 \\
 \gamma_3(p) = -3p^4 + 4p^3 \\
 \gamma_4(p) = p^4
 \end{array}
 \right.$$

$$\begin{array}{l}
 p = 5 \\
 (A. 6)
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \gamma_1(p) = p^5 - 5p^4 + 10p^3 - 10p^2 + 5p \\
 \gamma_2(p) = -4p^5 + 15p^4 - 20p^3 + 10p^2 \\
 \gamma_3(p) = 6p^5 - 15p^4 + 10p^3 \\
 \gamma_4(p) = -4p^5 + 5p^4 \\
 \gamma_5(p) = p^5
 \end{array}
 \right.$$

### Propriétés des fonctions de BEZIER.

Les fonctions  $\gamma_i(p)$  jouissent d'un grand nombre de propriétés relatives à leurs dérivées, leurs intégrales, ... [6]. On se limite ici à celles qui sont utilisées par la suite.

A l'exception de  $\varphi_0$  qui est une constante, les fonctions  $\varphi_j$  sont toutes de degré  $p$  en  $\rho$  et le terme de plus bas degré est en  $\rho^j$ .

Elles sont symétriques par rapport à la variable et à l'indice d'après

$$(A. 7) \quad 1 - \varphi_j(\rho) = \varphi_{k-p-j+1}(\rho) \quad \text{avec } k = p-j+1,$$

ce qui permet d'inverser le sens de parcours d'une courbe. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \sum_{j=0}^p \overrightarrow{\alpha}_j \cdot \varphi_j(\rho) \\ &= \sum_{j=0}^p \overrightarrow{\alpha}_j \cdot [1 - \varphi_{k-p-j+1}(\rho)] \quad \text{avec } k = p-j+1 \end{aligned}$$

soit

$$(A. 8) \quad \overrightarrow{OP} = \sum_{i=0}^p \overrightarrow{\beta}_i \cdot \varphi_i(r) \quad \text{avec } r \in [0, 1]$$

et

$$\overrightarrow{\beta}_0 = \sum_{j=0}^p \overrightarrow{\alpha}_j$$

$$\overrightarrow{\beta}_i = -\overrightarrow{\alpha}_{p-i+1} \quad \text{pour } p \gg i > 0$$

ce qui décrit la même courbe, mais en sens contraire.

De l'expression (A.1) on déduit les relations :

$$(A.9) \quad \gamma_{\frac{j}{p}} - \gamma_{\frac{j+1}{p}} = C_p^j \cdot p^j \cdot (1-p)^{p-j}$$

$$(A.10) \quad \left( \gamma_{\frac{j-1}{p}} - \gamma_{\frac{j}{p}} \right) + \frac{j}{p-j+1} \left( \gamma_{\frac{j}{p}} - \gamma_{\frac{j+1}{p}} \right) = \frac{1}{p-j+1} \cdot \gamma'_{\frac{j}{p}}$$

$$(A.11) \quad \gamma'_{\frac{j}{p}} = p \cdot C_{p-1}^{j-1} \cdot p^{j-1} \cdot (1-p)^{p-j}$$

$$(A.12) \quad \gamma'_{\frac{j-1}{p}} - \gamma'_{\frac{j}{p}} = p \cdot C_{p-1}^{j-1} \cdot p^{j-2} \cdot (1-p)^{p-j} \cdot \left[ \frac{j-1}{p-j+1} \cdot (1-p) - p \right]$$

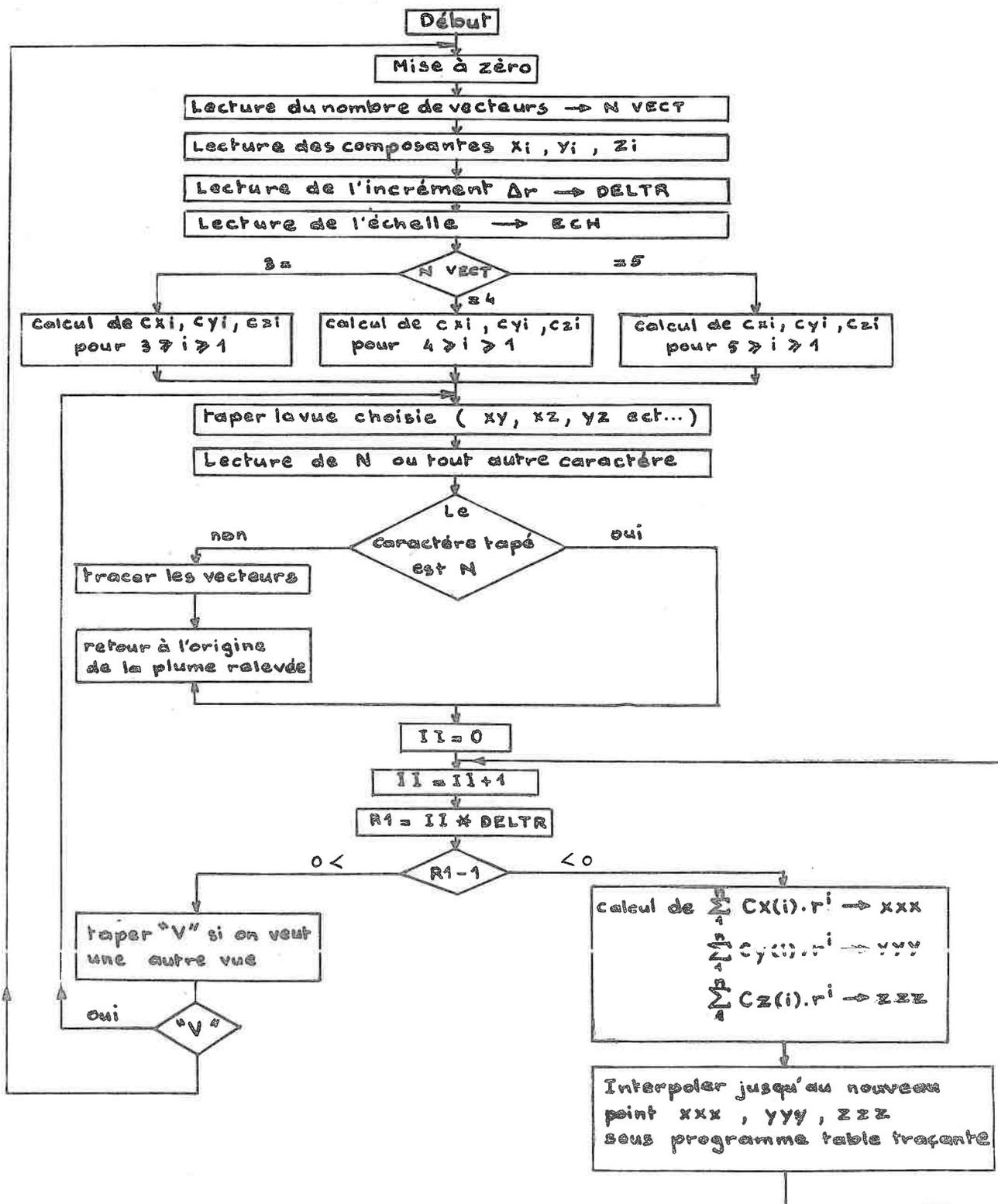
$$(A.13) \quad \gamma''_{\frac{j}{p}} = p \cdot C_{p-1}^{j-1} \cdot p^{j-2} \cdot (1-p)^{p-j-1} \cdot [(j-1) + p(1-p)]$$

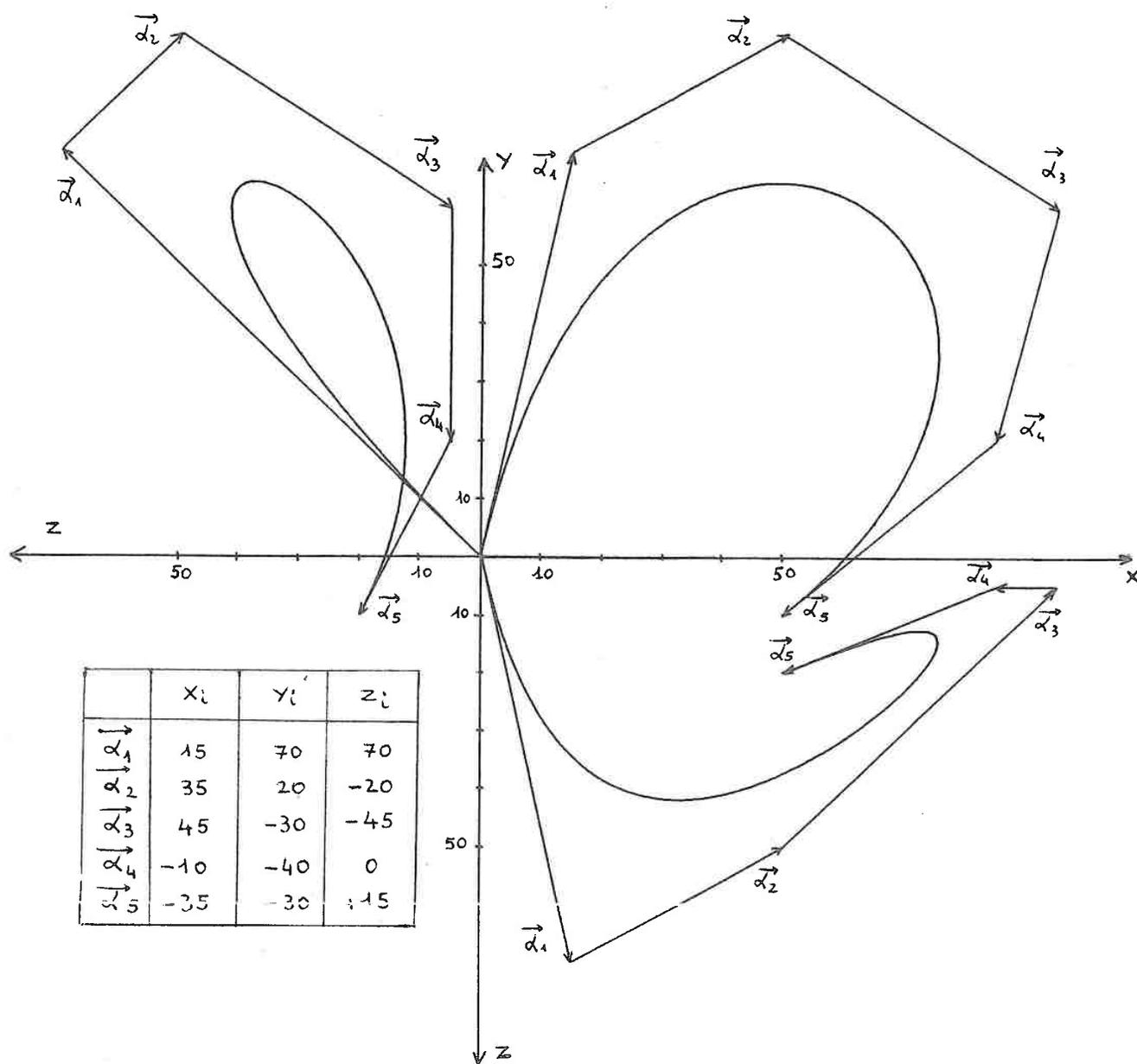
#### Exemples :

Afin de visualiser les courbes obtenues avec la définition Unisurf, nous avons écrit un programme en langage machine pour Calculateur T 2000 connecté à une table traçante numérique. Ce programme qui correspond à l'organigramme simplifié suivant, permet de tracer à une échelle quelconque selon la vue désirée des courbes de degré 3, 4 ou 5 dont quelques exemples sont donnés figures 1 et 2.

# ORGANIGRAMME DE TRACÉ DES COURBES UNISURF AVEC LE T2000

pour  $n = 3, 4$  ou  $5$



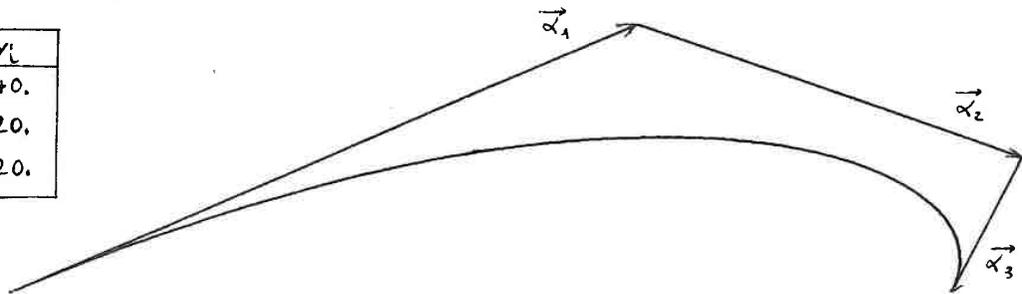


PROJECTION SUR LES 3 PLANS D'UNE COURBE UNISURF.  
 $n = 5$

FIGURE 1

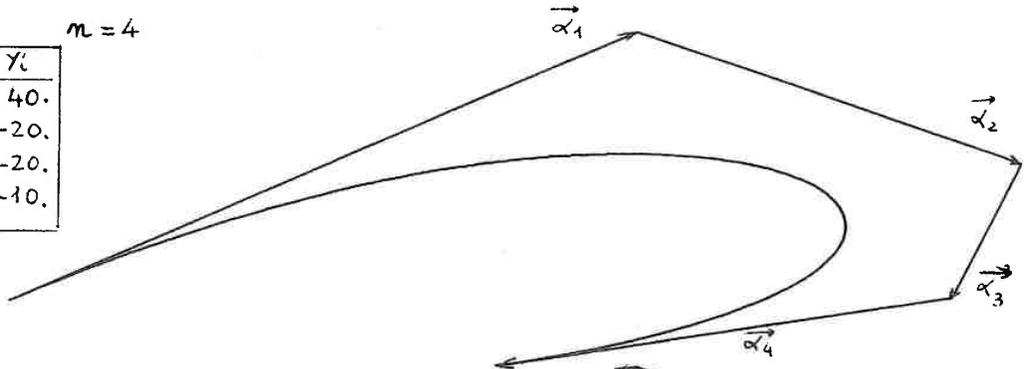
$n = 3$

	$x_i$	$y_i$
$\alpha_1$	90.	40.
$\alpha_2$	55.	-20.
$\alpha_3$	-10.	-20.



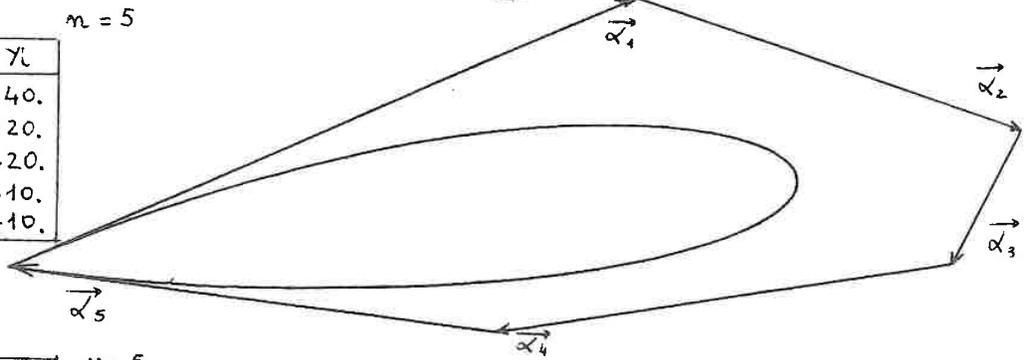
$n = 4$

	$x_i$	$y_i$
$\alpha_1$	90.	40.
$\alpha_2$	55.	-20.
$\alpha_3$	-10.	-20.
$\alpha_4$	-65.	-10.



$n = 5$

	$x_i$	$y_i$
$\alpha_1$	90.	40.
$\alpha_2$	55.	-20.
$\alpha_3$	-10.	-20.
$\alpha_4$	-65.	-10.
$\alpha_5$	-70.	+10.



$m = 5$

	$x_i$	$y_i$
$\alpha_1$	90.	30.
$\alpha_2$	55.	-20.
$\alpha_3$	-10.	-20.
$\alpha_4$	-10.5	+20.
$\alpha_5$	-30.	-10.

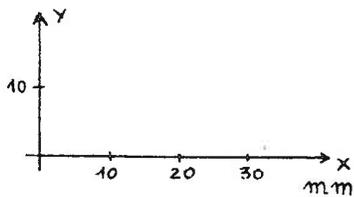
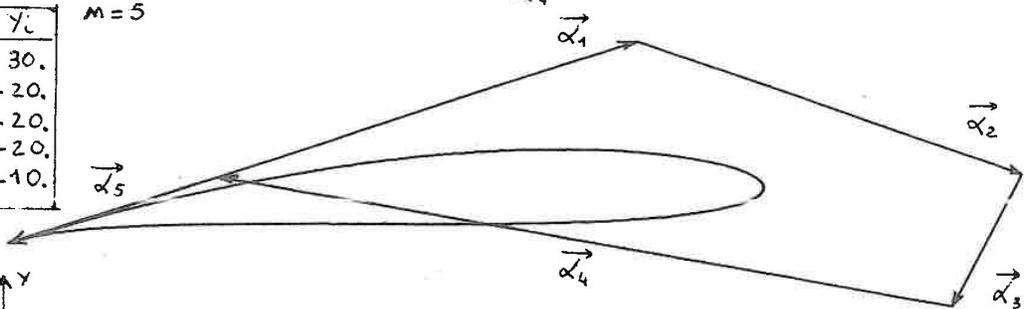


FIGURE 2

### B.1 Courbure d'une surface en un point.

On rappelle quelques définitions puis le calcul de l'indicatrice de courbure en un point  $P_0$  de la surface  $S$  [9], dont le point courant  $P$  a pour coordonnées

$$(B.1) \quad \overrightarrow{OP} \quad \left| \begin{array}{l} x = f(u, v) \\ y = \Upsilon(u, v) \\ z = \Psi(u, v) \end{array} \right.$$

Le plan tangent en  $P_0$  à  $S$  est formé des tangentes  $\overrightarrow{T}_D$  et  $\overrightarrow{T}_C$  aux courbes  $u = u_0$  et  $v = v_0$ , et la normale  $\overrightarrow{N}$  est définie par  $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{T}_C \wedge \overrightarrow{T}_D$

avec

$$(B.2) \quad \overrightarrow{\frac{\partial P_0}{\partial v}} = \overrightarrow{T}_D \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \Upsilon}{\partial v} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\frac{\partial P_0}{\partial u}} = \overrightarrow{T}_C \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial \Upsilon}{\partial u} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial u} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N} \quad \left| \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{T}_C = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{T}_D = 0$$

$$(B.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{soit} \quad A \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + B \cdot \frac{\partial \Upsilon}{\partial v} + C \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial v} = 0 \\ \text{et} \quad A \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + B \cdot \frac{\partial \Upsilon}{\partial u} + C \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial u} = 0 \end{array} \right.$$

Les paramètres directeurs de la tangente à une section normale  $\Gamma$  de S sont proportionnels à

$$(B. 4) \quad \begin{aligned} dx &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot dv \\ dy &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot dv \\ dz &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot dv \end{aligned}$$

A chaque valeur du rapport  $\frac{du}{dv}$  correspond un plan normal Q et la tangente  $\overrightarrow{P_0 D}$

$$(B. 5) \quad \overrightarrow{P_0 D} = ( du \cdot \overrightarrow{T_G} + dv \cdot \overrightarrow{T_D} ) \nu, \quad \nu \text{ variable quelconque.}$$

En  $P_0$ , les différentielles  $dx, dy, dz$  vérifient

$$(B. 6) \quad A \cdot dx + B \cdot dy + C \cdot dz = 0$$

qui exprime que la tangente à  $\Gamma$  est dans le plan tangent à S.

On forme alors la différentielle totale

$$(B. 7) \quad A \cdot d^2 x + B \cdot d^2 y + C \cdot d^2 z + dA \cdot dx + dB \cdot dy + dC \cdot dz = 0$$

$$\text{d'où} \quad Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = - ( dA \cdot dx + dB \cdot dy + dC \cdot dz )$$

Le deuxième membre est donc une expression quadratique en  $du$ ,  $dv$  selon

$$(B. 8) \quad dA \cdot dx + dB \cdot dy + dC \cdot dz = D du^2 + 2 D' du \cdot dv + D'' dv^2$$

Plaçons nous alors dans le plan  $Q$  et soit  $P$ , le point de  $\Gamma$  infiniment voisin de  $P_0$ , défini par

$$u_0 + du \quad \text{et} \quad v_0 + dv.$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à deux, la tangente en  $P$  coupe  $\overrightarrow{P_0 D}$  en  $M$ , milieu de  $P_0 H$ ,  $H$  étant la projection de  $P$  sur  $\overrightarrow{P_0 D}$ , d'où, selon la figure 3

$$MH = \frac{d\delta}{2} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{d\delta}{2} \cdot d\alpha$$

Ainsi pour la courbure, que nous exprimerons algébriquement suivant  $N$ ,

$$\frac{1}{R} = \limite \frac{d\alpha}{ds}, \quad \text{on obtient}$$

$$(B. 9) \quad \frac{1}{R} = \limite \frac{2\delta}{ds^2}$$

où figurent deux formes quadratiques  $ds^2$  et  $\delta$  que nous nous proposons d'exprimer.

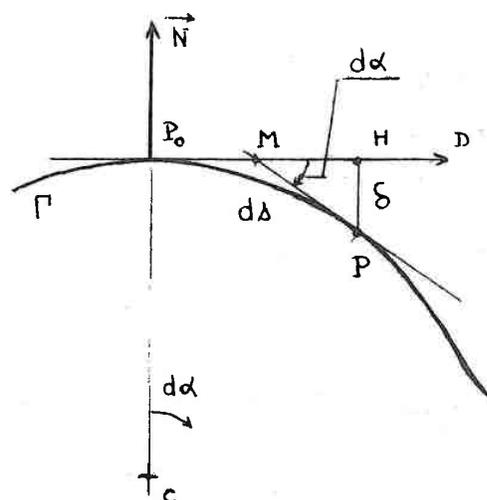


Figure 3

La première,  $ds^2$ , est le carré de l'arc  $\widehat{P_0 P}$  donc avec l'approximation considérée, du carré du segment  $\overline{P_0 P}$ , soit

$$\text{avec} \quad \overrightarrow{P P_0} = du \cdot \overrightarrow{T_C} + dv \cdot \overrightarrow{T_D},$$

$$(B.10) \quad ds^2 = \overrightarrow{P_0 P} \cdot \overrightarrow{P_0 P} = du^2 \cdot \overrightarrow{T_C} \cdot \overrightarrow{T_C} + dv^2 \cdot \overrightarrow{T_D} \cdot \overrightarrow{T_D} + 2du \cdot dv \cdot \overrightarrow{T_D} \cdot \overrightarrow{T_C}$$

écrit en général sous la forme

$$(B.11) \quad ds^2 = du^2 \cdot E + dv^2 \cdot G + 2du \cdot dv \cdot F$$

La deuxième forme quadratique,  $\delta$ , définit algébriquement la distance du point P au plan tangent, suivant :

$$(B.12) \quad \delta = - \frac{\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{P_0 P}}{|\overrightarrow{N}|}$$

En prenant le développement limite de la surface au voisinage de  $P_0$ , on a

$$(B.13) \quad \overrightarrow{P_0 P} = du \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P_0}}{\partial u} + dv \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P_0}}{\partial v} + \frac{du^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{P_0}}{\partial u^2} + \frac{dv^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{P_0}}{\partial v^2} + du \cdot dv \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{P_0}}{\partial u \partial v}$$

Dans le produit scalaire avec  $\overrightarrow{N}$ , les termes  $\overrightarrow{N} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P_0}}{\partial u}$  et  $\overrightarrow{N} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{P_0}}{\partial v}$  disparaissent et  $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{P_0 P}$  se réduit à  $\overrightarrow{N} \cdot d^2 \overrightarrow{P_0 P}$ . Le vecteur  $d^2 \overrightarrow{P_0 P}$  a pour composantes

$$(B.14) \quad d^2 \overrightarrow{P_0 P} \left\{ \begin{array}{l} d^2 x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot du^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot dv^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot du \cdot dv \right) \\ d^2 y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot du^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \cdot dv^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \cdot du \cdot dv \right) \\ d^2 z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \cdot du^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \cdot dv^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \cdot du \cdot dv \right) \end{array} \right.$$

Ainsi, compte-tenu de (B. 2),  $\delta$  devient

$$(B.15) \quad \delta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{A \cdot d^2 x + B \cdot d^2 y + C \cdot d^2 z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

qui, avec (B.7) et (B.8) s'écrit aussi

$$(B.16) \quad \delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{D \cdot du^2 + 2D' \cdot du \cdot dv + D'' \cdot dv^2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Par identification avec (B.12) et (B.13) on obtient les expressions des coefficients  $D$ ,  $D'$  et  $D''$ , de la deuxième forme quadratique (B.8) :

$$(B.17) \quad D = \overrightarrow{N} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial^2 P_0}}{\partial u^2}, \quad D' = \overrightarrow{N} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial^2 P_0}}{\partial u \partial v}, \quad D'' = \overrightarrow{N} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial^2 P_0}}{\partial v^2}$$

La courbure d'une section normale a alors pour expression, d'après (B. 9), (B. 11) et (B. 16),

$$(B. 18) \quad \frac{1}{R} = \frac{D \, du^2 + 2D' \, du \, dv + D'' \, dv^2}{E \, du^2 + 2F \, du \, dv + G \, dv^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

### B.2 Indicatrice - Sections Normales principales et rayons de courbure principaux.

Si on porte sur  $\overrightarrow{P_0 D}$  la longueur  $P_0 m$  égale à  $\sqrt{|R|}$ , le point  $m$ , lorsque le plan normal tourne autour de  $\overrightarrow{N}$ , décrit l'indicatrice de courbure, qui est une conique centrée en  $P_0$ .

Les valeurs minimale  $R_1$  et maximale  $R_2$  de  $R$  sont les rayons principaux de courbure et les sections normales correspondantes les sections normales principales. Ces sections sont orthogonales entre elles et leur connaissance, ainsi que celle de  $R_1$  et  $R_2$ , définit l'indicatrice autour de  $P_0$ , donc la courbure  $\frac{1}{R}$ , dans toute section normale, d'après le théorème d'Euler

$$(B. 19) \quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2},$$

où  $\varphi$  désigne l'angle du dièdre formé par une section normale principale et la section normale considérée.

A une valeur donnée de  $R$ , correspondent en général deux sections normales, réelles ou imaginaires.

Dans le cas où  $R = R_1$  ou  $R_2$ , seule une section principale admet cette valeur du rayon de courbure, ce qui permet de calculer la position des sections normales. En effet, reprenons l'expression générale (B. 18)

$$(B. 20) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{D du^2 + 2D' du \cdot dv + D'' dv^2}{E du^2 + 2F du \cdot dv + G dv^2}$$

en posant

$$(B. 21) \quad R = \rho \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Pour une valeur donnée de  $\rho$ , (B. 21) est du deuxième degré en  $\frac{dv}{du}$  :

$$(B. 22) \quad (\rho \cdot D - E) du^2 + 2(\rho \cdot D' - F) du \cdot dv + (\rho \cdot D'' - G) dv^2 = 0$$

dont les racines déterminent les tangentes aux sections normales qui admettent le rayon de courbure  $R$ . Si  $R$  est un rayon de courbure principal, (B. 22) admet une racine double en  $\frac{dv}{du}$ , soit

$$(B. 23) \quad \frac{dv}{du} = - \frac{(\rho \cdot D' - F)}{(\rho \cdot D'' - G)}$$

d'où

$$(B. 24) \quad (\rho \cdot D'' - G) dv + (\rho \cdot D' - F) du = 0$$

qui, reportée dans (B. 22), fournit aussi

$$(B. 25) \quad (\rho \cdot D' - F) dv + (\rho \cdot D - E) du = 0$$

Le système formé par ces deux dernières équations détermine à la fois les rayons de courbure principaux et les sections normales principales.

En éliminant  $dv/du$ , on obtient une équation du deuxième degré en  $\rho$

$$(B. 26) \quad (\rho \cdot D' - F)^2 - (\rho \cdot D - E)(\rho \cdot D'' - G) = 0$$

qui donne  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , donc  $R_1$  et  $R_2$ . Ces deux racines sont toujours réelles.

En éliminant  $\rho$ , l'équation

$$(B. 27) \quad \left( D+D' \cdot \frac{dv}{du} \right) \left( F+G \cdot \frac{dv}{du} \right) - \left( D'+D'' \cdot \frac{dv}{du} \right) \left( E+F \cdot \frac{dv}{du} \right) = 0$$

fait connaître les rapports  $dv/du$  qui définissent les traces sur le plan tangent des sections normales principales.

Ces résultats seront utilisés pour définir le raccordement au deuxième ordre entre deux éléments de surface  $S$  et  $S'$ , pour lequel il faut et il suffit que le long de la courbe de raccordement  $S$  et  $S'$  admettent des sections normales principales confondues et des rayons principaux de courbure égaux.

## PREMIERE PARTIE

## CALCUL DIRECT DES CONDITIONS DE RACCORDEMENT

I - Définition des surfaces canoniques - Notations - Position du problème.

Une surface canonique Unisurf S est définie par le déplacement de la génératrice courante  $G_r(p)$ , dont le polygone caractéristique s'appuie sur des courbes Unisurf  $\vec{T}_j$ , définie chacune à son tour pour un polygone composé de n vecteurs  $\vec{a}_j$ , avec  $1 \leq j \leq n$ , et caractérisée par le paramètre  $r \in [0, 1]$ . (Directrices principales et auxiliaires. Figure 4).

Pour  $r = 0$ , la génératrice est définie par

$$(1.1) \quad G_0(p) = \vec{A}_0 + \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \cdot \varphi_j(p) \quad \text{avec} \quad p \in [0, 1] \quad \text{et} \quad \vec{A}_0 = \vec{\alpha}_0$$

où  $\varphi_j(p)$  désigne les fonctions polynomiales de Bézier dont on rappelle l'expression

$$(1.2) \quad \varphi_j(p) = \sum_{k=j}^p (-1)^{k-j} \cdot C_{k-1}^{k-j} \cdot C_p^k \cdot p^k \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq p$$

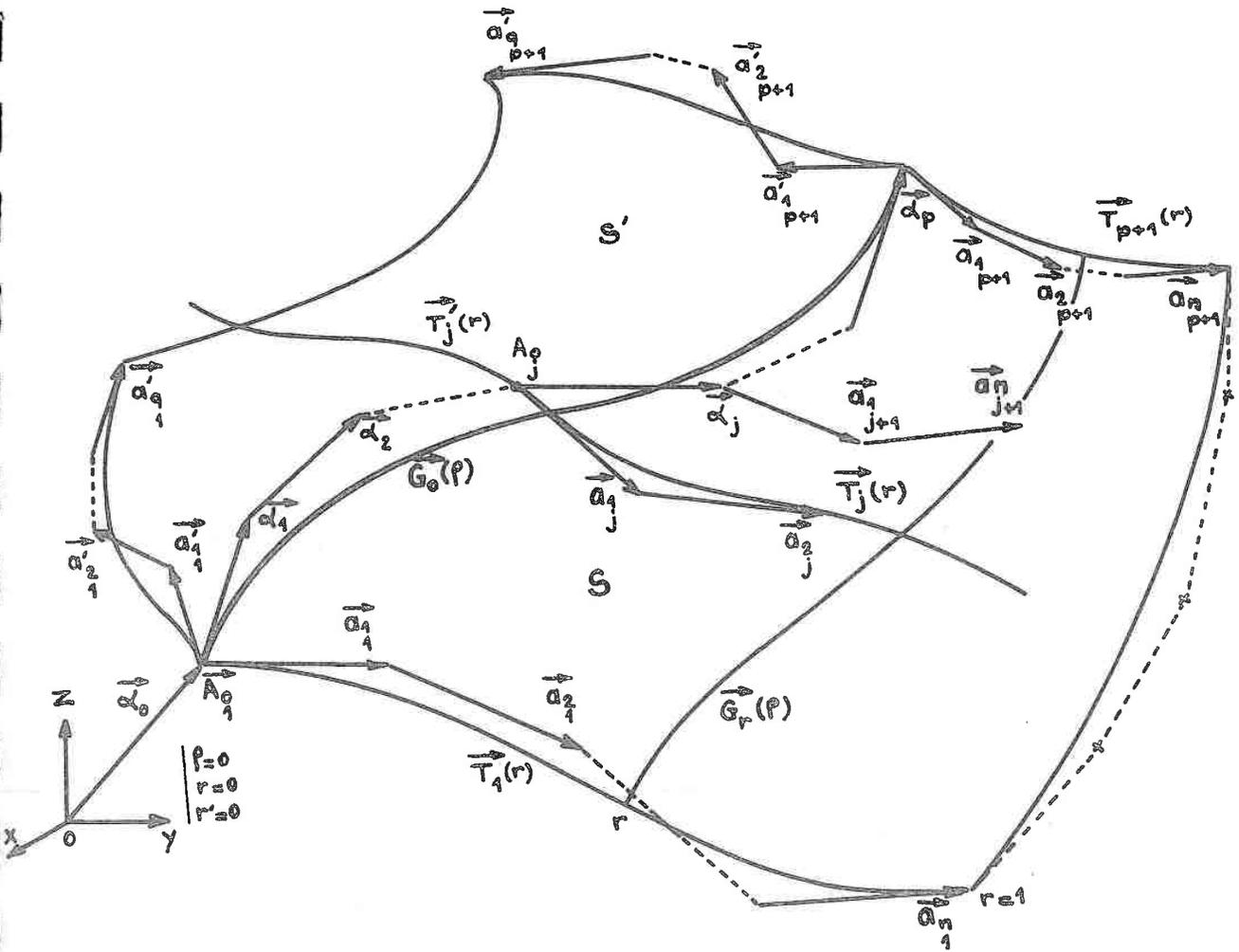


Fig 4

Les directrices principales et auxiliaires  $\vec{T}_j$  sont définies par les polygones caractéristiques

$$(1.3) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \quad \text{pour } \vec{T}_1(r) \\ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \quad \text{pour } \vec{T}_j(r) \\ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \quad \text{pour } \vec{T}_{p+1}(r) \end{array} \right\}$$

Le paramètre  $r$  définit donc la position de la génératrice courante et le paramètre  $\rho$  le déplacement le long de cette génératrice.

On remarquera que le vecteur  $\vec{a}_j$  est issu de l'origine de  $\vec{\alpha}_j$  et de l'origine de  $\vec{\alpha}_{j+1}$ , (ou de l'extrémité de  $\vec{\alpha}_j$ ).

Dans ces conditions, l'équation d'un point  $P$  de la surface  $S$  s'écrit (d'après [6] p. 66) :

$$(1.4) \quad \vec{OP} = \vec{A}_0 + \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \cdot f_i(r) + \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \cdot \varphi_j(\rho) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n (\vec{a}_i - \vec{a}_{i-1}) f_i(r) \cdot \varphi_j(\rho)$$

où  $f_i$  désigne aussi une fonction polynomiale de Bézier.

#### Position du problème.

On cherche à raccorder à la Surface  $S$  un élément  $S'$  ayant la génératrice  $G_0(\rho)$

commune avec  $S$  de façon à ce que :

- en tout point de  $G_o(\rho)$  les plans tangents à  $S$  et  $S'$  soient confondus (raccordement au 1er ordre),
- en tout point de  $G_c(\rho)$ , l'indicatrice de courbure de  $S$  soit identique à celle de  $S'$  (raccordement au 2ème ordre, surfaces "osculatrices" entre elles).

La surface  $S'$  est donc définie par la génératrice  $G_o(\rho)$  et  $p+1$  directrices principales et auxiliaires dont les polygones caractéristiques sont composés de  $q$  vecteurs dont les 2 premiers, comme on le verra, seront déterminés par le raccordement.

Le paramètre  $r'$  définit le déplacement le long des directrices. Dans le cas du calcul direct,  $S'$  est nécessairement de même degré  $p$  en  $\rho$  que  $S$ .

Remarque :

Si l'on désire un raccordement de  $S'$  avec  $S$  de façon à ce que  $G_c(\rho)$  corresponde à la valeur 1 du paramètre  $r'$ , il suffit d'inverser les indices en prenant pour nouveaux vecteurs :

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{b}'_1 \\ \vec{b}'_2 \\ \vdots \\ \vec{b}'_q \end{array} \right. = - \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}'_q \\ \vdots \\ \vec{a}'_1 \end{array} \right.$$

comme on l'a vu en (A. 8).

## II - Expression locale d'une surface au voisinage d'un point $P_0$ de la génératrice.

Le point  $P_0$  est défini par la valeur  $\rho_0$  du paramètre  $\rho$ . Au voisinage de  $G_c(\rho)$ ,  $r$  est petit et sera noté  $dr$ . En outre, comme les conditions de raccordement au 1er et au 2ème ordre, définies précédemment, ne font intervenir que les dérivées première et seconde (chapitre B), seuls interviennent dans les expressions polynomiales des fonctions  $\varphi_i(\rho)$  et  $f_i(r)$  les termes du 1er et du 2ème degré en  $\rho$  ou  $r$  respectivement.

### II. a) Développement limite pour le paramètre $r$ .

D'après l'expression polynomiale

$$f_i(r) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \cdot C_{k-1}^{k-i} \cdot C_n^k \cdot r^k$$

on a, d'après les remarques précédentes :

$$f_1^n(dr) = n \cdot dr - \frac{n \cdot (n-1)}{2} dr^2$$

$$(2.1) \quad f_2^n(dr) = \frac{n \cdot (n-1)}{2} dr^2$$

$$\text{et} \quad f_i^n(dr) = 0 \quad \text{pour } i > 2 \quad .$$

En rappelant les conventions

$$\varphi_0^p(\rho) \equiv 1 \quad \forall p \geq 1$$

$$\text{et} \quad \varphi_k^p(\rho) \equiv 0 \quad \text{pour } k > p, \text{ en particulier } k = p+1 \quad .$$

et en regroupant les termes en  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ , l'expression (1.4) devient :

$$(2.2) \quad \vec{OP} = \vec{A}_1 + \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \cdot \varphi_j^p(\rho_0) + \sum_{k=0}^p \left\{ X_1 \cdot \vec{a}_{k+1} + X_2 \cdot \vec{a}_{k+1} \right\} \cdot \left[ \varphi_k^p(\rho_0) - \varphi_{k+1}^p(\rho_0) \right]$$

$$\text{avec } X_1 = n \cdot dr - \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot dr^2$$

$$(2.3) \quad X_2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot dr^2$$

II. b) Développement limité au voisinage de  $\rho_0$ ,  $\rho = \rho_0 + d\rho$ .

Le développement de Taylor limité au 2ème ordre pour  $\varphi_j^p(\rho)$  est :

$$\varphi_j^p(\rho) = \varphi_j^p(\rho_0) + d\rho \cdot \varphi_j^p{}'(\rho_0) + \frac{d\rho^2}{2} \cdot \varphi_j^p{}''(\rho_0)$$

Toutes les fonctions  $\varphi_j^p(\rho_0)$  étant relatives à la valeur  $\rho_0$  du paramètre et à l'indice  $p$ , nombre de vecteurs du polygone caractéristique de  $G_0(p)$ , on les écrira simplement  $\varphi_j^p$ , de même  $\varphi_j^p{}'(\rho_0)$  sera notée  $\varphi_j^p{}'$ .

Ainsi (2.2) devient :

$$(2.4) \quad \vec{OP} = \vec{OP}_0 + \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \left[ d\rho \cdot \varphi_j^p{}' + \frac{d\rho^2}{2} \cdot \varphi_j^p{}'' \right] \\ + \sum_{k=0}^p \left\{ X_1 \cdot \vec{a}_{k+1} + X_2 \cdot \vec{a}_{k+1} \right\} \left( \left[ \varphi_k^p - \varphi_{k+1}^p \right] + d\rho \left[ \varphi_k^p{}' - \varphi_{k+1}^p{}' \right] + \frac{d\rho^2}{2} \left[ \varphi_k^p{}'' - \varphi_{k+1}^p{}'' \right] \right)$$

$$\text{avec } \vec{OP}_0 = \vec{A}_1 + \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \cdot \varphi_j^p$$

En remarquant que  $X_1$  et  $X_2$  contiennent des termes en  $dr$  et  $dr^2$ , on négligera les termes en  $dr^2$ ,  $d\rho^2$ ,  $dr^2$ ,  $d\rho$  et  $dr$ ,  $d\rho^2$  pour se limiter au deuxième ordre. Ainsi l'expression d'une surface Unisurf au voisinage d'un point  $P_0$  de la génératrice est :

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} &+ d\rho \cdot \sum_{j=1}^P \vec{\alpha}_j \cdot \varphi'_j + \frac{d\rho^2}{2} \cdot \sum_{j=1}^P \vec{\alpha}_j \cdot \varphi''_j \\
 &+ n \cdot dr \cdot \sum_{k=0}^P \vec{a}_1 \cdot [\varphi_k - \varphi_{k+1}] + n \frac{n-1}{2} \cdot dr^2 \cdot \sum_{k=0}^P (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot [\varphi_k - \varphi_{k+1}] \\
 &+ n \cdot d\rho \cdot dr \cdot \sum_{k=0}^P \vec{a}_1 \cdot [\varphi'_k - \varphi'_{k+1}]
 \end{aligned}$$

### III - Conditions de raccordement au premier ordre.

Les conditions de raccordement au premier ordre ne faisant intervenir que des termes en  $dr$  et  $d\rho$ , on limite l'expression (2.5) à :

$$(3.1) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + d\rho \cdot \sum_{j=1}^P \vec{\alpha}_j \cdot \varphi'_j + n \cdot dr \cdot \sum_{k=0}^P \vec{a}_1 \cdot [\varphi_k - \varphi_{k+1}]$$

qui met en évidence l'expression des tangentes

$$(3.2) \quad \vec{T}_C = \sum_{j=1}^P \vec{\alpha}_j \cdot \varphi'_j, \quad \vec{T}_D = n \cdot \sum_{k=0}^P \vec{a}_1 \cdot [\varphi_k - \varphi_{k+1}]$$

à la génératrice  $G_0(\rho)$  et à la courbe ( $\rho = \rho_0$ ), issues du point  $P_0$  (figure 5), sur la surface  $S$

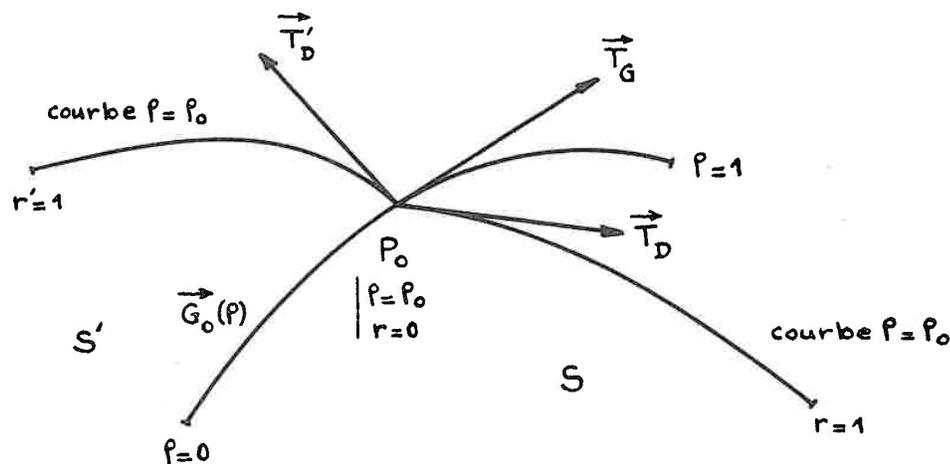


Figure 5

Pour que  $S'$  se raccorde au  $1^{er}$  ordre à  $S$ , il faut et il suffit que  $\vec{T}'_D$ , tangente à  $\rho = \rho_0$  de  $S'$  soit dans le plan formé par  $\vec{T}_G$  et  $\vec{T}_D$ , quel que soit le point  $P_0$  choisi le long de  $G_0(\rho)$ . Il faut ainsi

$$(3.3) \quad \vec{T}'_D = \lambda \cdot \vec{T}_G + \mu \cdot \vec{T}_D$$

$$(3.4) \quad \text{avec} \quad \vec{T}'_D = q \cdot \sum_{k=0}^p \vec{a}'_k [\gamma_k - \gamma_{k+1}] \quad , \text{ expression (3.2) appliquée à } S'.$$

Les conditions de tangence aux extrémités de  $G_0(\rho)$ , pour  $\rho = 0$  et  $\rho = 1$  impliquent :

$$(3.5) \quad \vec{a}'_1 = A_0 \cdot \vec{\alpha}'_1 + B_0 \cdot \vec{a}_1$$

et

$$\vec{a}'_1 = A_1 \cdot \vec{\alpha}'_p + B_1 \cdot \vec{a}_{p+1}$$

En imposant que le vecteur  $\vec{a}'_{k+1}$  ne dépende que des vecteurs  $\vec{\alpha}_k, \vec{\alpha}_{k+1}$  et  $\vec{a}_{k+1}$ , selon

$$(3.6) \quad \vec{a}'_{k+1} = x_k \cdot \vec{\alpha}_k + y_k \cdot \vec{\alpha}_{k+1} + z_k \cdot \vec{a}_{k+1}$$

ce qui correspond à des conditions minimales pour satisfaire l'égalité (3.3). On peut le vérifier en faisant dépendre  $\vec{a}'_{k+1}$  d'un nombre supérieur ou inférieur de vecteur  $\vec{\alpha}_j, \vec{a}_k$ .

L'expression (3.3) devient alors :

$$(3.3 \text{ bis}) \quad q \left\{ (A_0 \cdot \vec{\alpha}_1 + B_0 \cdot \vec{a}_1) [1 - \gamma_1] + \sum_{k=1}^{p-1} (x_k \cdot \vec{\alpha}_k + y_k \cdot \vec{\alpha}_{k+1} + z_k \cdot \vec{a}_{k+1}) [\gamma_k - \gamma_{k+1}] \right. \\ \left. + (A_1 \cdot \vec{\alpha}_p + B_1 \cdot \vec{a}_{p+1}) \cdot \gamma_p \right\} = \lambda \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \cdot \gamma'_j + \mu \cdot n \cdot \sum_{k=0}^p \vec{a}_{k+1} [\gamma_k - \gamma_{k+1}]$$

L'identification terme à terme des coefficients des vecteurs  $\vec{a}_j$  de cette égalité entraîne immédiatement :

$$(3.7) \quad B_0 = B_1 = z_k \quad \forall k, \text{ pour } 1 \leq k \leq p+1$$

$$(3.8) \quad \text{et} \quad \mu = \frac{q}{n} B_0.$$

Le problème des coefficients  $z_k$  étant réglé, il reste les termes en  $\vec{\alpha}_j$  pour lesquels (3.3 bis) donne l'équation

$$(3.9) \quad q \left\{ A_0 \vec{\alpha}_1 [1 - \gamma_1] + \sum_{k=1}^p (x_k \cdot \vec{\alpha}_k + y_k \cdot \vec{\alpha}_{k+1}) [\gamma_k - \gamma_{k+1}] + A_1 \vec{\alpha}_p \cdot \gamma_p \right\} = \lambda \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \cdot \gamma'_j,$$

soit pour le terme en facteur de  $\vec{\alpha}_j$

$$(3.9 \text{ bis}) \quad q \left\{ y_{j-1} [\varphi_{j-1} - \varphi_j] + x_j [\varphi_j - \varphi_{j+1}] \right\} = \lambda \cdot \varphi'_j .$$

En remarquant que le membre de gauche est de degré  $p$  en  $\varrho$ , alors que celui de droite n'est que de degré  $(p-1)$ , seule une variation linéaire de de la forme:

$$(3.10) \quad \lambda = \frac{q}{p} \left[ p \cdot (A_1 - A_0) + A_0 \right]$$

satisfait (3.9) et (3.9 bis) dans leur généralité.

En utilisant les propriétés (A.9) et (A.10) et d'après l'expression de  $\varphi'_j$ , donnée par (A.11), l'identité des termes de plus bas degré en  $\varrho$  de l'équation (3.9 bis) donne :

$$(3.11) \quad y_{j-1} = A_0 \cdot \frac{p-j+1}{p} \quad \text{soit} \quad y_j = A_0 \cdot \frac{p-j}{p}$$

qui, reportée dans (3.9), fournit :

$$(3.12) \quad x_j = A_1 \cdot \frac{j}{p}$$

Cette expression réalise alors l'identité des coefficients des différentes puissances de  $\varrho$  dans les deux termes de la relation (3.3 bis).

Remarque :

Ces expressions portées dans (3.9) conduisent à l'égalité :

$$(3.13) \quad A_1 \cdot j \cdot [\varphi_j - \varphi_{j+1}] + A_0 (p-j+1) [\varphi_{j-1} - \varphi_j] = [p(A_1 - A_0) + A_0] \cdot \varphi'_j$$

dont nous aurons besoin ultérieurement.

Les conditions de raccordement au premier ordre entraînent donc :

$$(3.14) \quad \vec{a}'_{j+1} = \frac{j}{p} \cdot A_1 \cdot \vec{\alpha}'_j + \frac{p-j}{p} \cdot A_0 \cdot \vec{\alpha}'_{j+1} + B_0 \cdot \vec{a}'_{j+1}$$

Nous retrouvons les résultats de Chemla ( [6] p. 80 ), avec en plus, l'expression fondamentale (3.10)

$\lambda = \frac{q}{p} [ p (A_1 - A_0) + A_0 ]$  qui permet d'exprimer facilement  $\vec{T}'_D$  en fonction de  $\vec{T}'_G$  et  $\vec{T}'_D$  d'après :

$$\vec{T}'_D = \lambda \cdot \vec{T}'_G + \mu \cdot \vec{T}'_D \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{q}{n} B_0 .$$

Ces relations sont indispensables pour l'étude directe du raccordement au 2ème ordre.

N. B. On peut vérifier que toute autre loi de variation de  $\lambda(\rho)$  impose une relation entre  $A_0$  et  $A_1$ . En particulier  $\lambda(\rho) = \text{cste}$  ou  $\lambda(\rho)$  de la forme

$$\frac{p}{q} [ \rho^2 (A_1 - A_0) + A_0 ] \quad \text{entraîne} \quad A_1 = A_0 .$$

Ces conditions sont donc les plus générales lorsque S et S' sont de même degré p en  $\rho$ , seul cas qu'il est envisageable d'étudier sous la forme actuelle.

IV - Conditions de raccordement au deuxième ordre.IV-1 Notations :

L'expression locale (2.5) de la surface Unisurf s'écrit :

$$(4.1) \quad \overrightarrow{P_0 P} = d\rho \cdot \overrightarrow{T_G} + \frac{d\rho^2}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma_G} + dr \cdot \overrightarrow{T_D} + \frac{dr^2}{2} \cdot \overrightarrow{\Gamma_D} + d\rho \cdot dr \cdot \overrightarrow{\Omega}$$

avec

$$\overrightarrow{T_G} = \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial \rho} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \cdot \gamma_j' \quad \overrightarrow{T_D} = \frac{\overrightarrow{\partial P}}{\partial r} = n \cdot \sum_{k=0}^p \overrightarrow{a_{k+1}} [\gamma_k - \gamma_{k+1}]$$

$$(4.2) \quad \overrightarrow{\Gamma_G} = \frac{\overrightarrow{\partial^2 P}}{\partial \rho^2} = \sum_{j=1}^p \alpha_j \cdot \gamma_j'' \quad \overrightarrow{\Gamma_D} = \frac{\overrightarrow{\partial^2 P}}{\partial r^2} = n \cdot (n-1) \sum_{k=0}^p (\overrightarrow{a_{k+1}} - \overrightarrow{a_k}) [\gamma_k - \gamma_{k+1}]$$

$$\text{et } \overrightarrow{\Omega} = \frac{\overrightarrow{\partial^2 P}}{\partial \rho \cdot \partial r} = n \sum_{k+1} \overrightarrow{a_{k+1}} [\gamma_k' - \gamma_{k+1}']$$

Les coefficients E, F et G qui apparaissent dans la première forme quadratique (B.10) sont alors :

$$(4.3) \quad E = \overrightarrow{T_G} \cdot \overrightarrow{T_G} \quad , \quad F = \overrightarrow{T_G} \cdot \overrightarrow{T_D} \quad , \quad G = \overrightarrow{T_D} \cdot \overrightarrow{T_D}$$

Les coefficients D, D' et D'' de la deuxième forme quadratique, sont, d'après (B.17) en utilisant la notation précisée en (4.2)

$$(4.4) \quad D = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Gamma_G} \quad D' = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Omega} \quad D'' = \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Gamma_D}$$

Les traces des directions principales de courbure sur le plan tangent en  $P_0$  sont données par (B.27), en changeant du en  $d\varphi$  et  $dv$  en  $dr$  :

$$(4.5) \quad \left( D + D' \frac{dr}{d\varphi} \right) \left( F + G \frac{dr}{d\varphi} \right) - \left( D' + D'' \frac{dr}{d\varphi} \right) \left( E + F \frac{dr}{d\varphi} \right) = 0$$

Pour simplifier l'écriture tous les produits scalaires seront notés :  $\vec{N} \cdot \vec{\Gamma}_G = N \Gamma_G$  (à titre d'exemple) afin d'insister sur le caractère indissociable des termes qui les composent. Les multiplications entre scalaires seront mises en évidence par le signe  $\times$ . Dans ces conditions, compte-tenu de (4.3) et (4.4), l'équation (4.5) devient, après arrangement en  $K = \frac{dr}{d\varphi}$  :

$$(4.6) \quad K^2 \left[ N \Omega \times T_D T_D - N \Gamma_D \times T_G T_D \right] + K \left[ N \Gamma_G \times T_D T_D - N \Gamma_D \times T_G T_G \right] + \left[ N \Gamma_G \times T_G T_D - N \Omega \times T_G T_G \right] = 0$$

dont les racines  $K_1$  et  $K_2$  donnent les directions des sections normales principales par rapport aux vecteurs de base locaux  $\vec{T}_G$  et  $\vec{T}_D$ , d'après

$$\vec{P}_0 \vec{D} = \left( \vec{T}_G + K \cdot \vec{T}_D \right) \gamma.$$

Avec ces notations, l'expression (B.18) du rayon de courbure devient

$$(4.7) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \frac{N \Gamma_G + 2 \times N \Omega \times K + N \Gamma_D \times K^2}{T_G T_G + 2 \times T_G T_D \times K + T_D T_D \times K^2}$$

qui, avec les valeurs particulières  $K_1$  et  $K_2$ , solutions de (4.6), fournit les rayons de courbure principaux.

Les relations (4.6) et (4.7) sont valables pour toute surface biparamétrique définie vectoriellement sous la forme générale (4.1).

En remarquant que  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \rho}$  et  $\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial \rho^2}$  sont communs aux deux éléments S et S', l'expression locale de S' est

$$(4.8) \quad \vec{P}_0 \vec{P}' = d\rho \cdot \vec{T}_G + \frac{d\rho^2}{2} \cdot \vec{\Gamma}_G + dr' \cdot \vec{T}'_D + \frac{dr'^2}{2} \cdot \vec{\Gamma}'_D + d\rho \cdot dr' \cdot \vec{\Omega}'$$

avec 
$$\vec{T}'_D = \frac{\partial \vec{P}'}{\partial r} = q \sum_{k=0}^p \vec{a}'_{k+1} [\psi_k - \psi_{k+1}]$$

$$(4.9) \quad \vec{\Gamma}'_D = \frac{\partial^2 \vec{P}'}{\partial r^2} = q \cdot (q-1) \cdot \sum_{k=0}^p (\vec{a}'_{k+2} - \vec{a}'_{k+1}) [\psi_k - \psi_{k+1}]$$

$$\vec{\Omega}' = \frac{\partial^2 \vec{P}'}{\partial \rho \cdot \partial r'} = q \cdot \sum_{k=0}^p \vec{a}'_{k+1} [\psi'_k - \psi'_{k+1}]$$

où les vecteurs  $\vec{a}'_k$  sont à déterminer pour assurer le raccordement au deuxième ordre.

#### IV-2 Définitions des Normales :

Pour  $P_0 \in G_\rho(\rho)$ , les normales  $\vec{N}$  et  $\vec{N}'$  étant définies par

$$(4.10) \quad \vec{N} = \vec{T}_G \wedge \vec{T}_D \quad \text{et} \quad \vec{N}' = \vec{T}_G \wedge \vec{T}'_D$$

et avec  $\vec{T}'_D = \lambda \vec{T}_G + \mu \vec{T}_D$  on obtient

$$(4.11) \quad \vec{N}' = \mu \cdot \vec{N}$$

On voit que pour  $\mu < 0$ , soit  $\vec{T}'_D$  du côté opposé à  $\vec{T}_D$  par rapport au plan défini par  $\vec{N}$  et  $\vec{T}_G$ , les normales  $\vec{N}$  et  $\vec{N}'$  sont de directions opposées et les rayons de courbure relatifs à S et S' de signes contraires. Dans ce cas, il faudra évaluer  $\left(\frac{1}{R}\right)_S = -\left(\frac{1}{R}\right)_{S'}$

#### IV-3 Directions principales de courbure :

Soit  $\vec{P}_0 \vec{D}$  une direction du plan tangent définie par

$$\vec{P}_0 \vec{D} = (\vec{T}_G + K \cdot \vec{T}_D) \gamma, \quad (\text{figure 6})$$

$\gamma$  étant une variable quelconque.

La même direction rapportée à  $\vec{T}_G$  et  $\vec{T}'_D$  s'écrit

$$\vec{P}_0 \vec{D} = \left( \vec{T}_G + \frac{K}{\mu - \lambda K} \cdot \vec{T}'_D \right) \gamma \cdot \frac{\mu - \lambda K}{\mu}$$

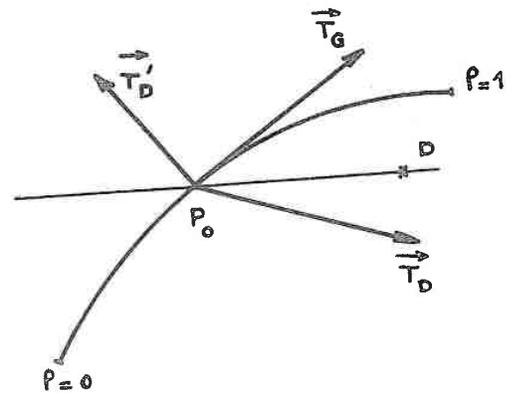


Figure 6

En particulier, si K et K' définissent respectivement une direction d'une section normale principale relative à S et S', l'identité de ces directions se traduit par

$$(4.12) \quad K' = \frac{K}{\mu - \lambda K} \quad \text{ou par} \quad K = \frac{\mu K'}{1 + \lambda K'}$$

En reprenant alors l'expression (4.6) qui définit les directions principales, on a

- pour S

$$(4.13) \quad K^2 [N\Omega \times T_D T_D - N\Gamma_D \times T_G T_D] + K [N\Gamma_G \times T_D T_D - N\Gamma_D \times T_G T_G] + [N\Gamma_G \times T_G T_D - N\Omega \times T_G T_G] = 0$$

de la forme

$$(4.14) \quad K^2 . a + K . b + c = 0$$

- pour S', après avoir simplifié par  $\mu$  en facteur dans  $\vec{N}'$ ,

$$(4.15) \quad K'^2 [N\Omega' \times T_D' T_D' - N\Gamma_D' \times T_G' T_D'] + K' [N\Gamma_G' \times T_D' T_D' - N\Gamma_D' \times T_G' T_G'] + [N\Gamma_G' \times T_G' T_D' - N\Omega' \times T_G' T_G'] = 0$$

de la forme

$$(4.16) \quad K'^2 . a' + K' . b' + c' = 0$$

En remplaçant dans (4.14) K par son expression (4.12) en fonction de K' et en ordonnant, on obtient :

$$(4.17) \quad K'^2 [\mu^2 a + \lambda \mu b + \lambda^2 c] + K' [\mu b + 2\lambda c] + c = 0$$

Les solutions de (4.17) devant être identiques à celles de (4.16), on en déduit les relations

$$(4.18) \quad \begin{array}{ll} (1) & c' = t . c \\ (2) & b' = t . (\mu b + 2\lambda c) \\ (3) & a' = t . (\mu^2 a + \lambda \mu b + \lambda^2 c) \end{array}$$

où  $t$  est un coefficient de proportionnalité arbitraire.

Les relations (4.18) traduisent l'identité des directions des sections principales, les inconnues étant  $\vec{\Omega}'$ ,  $\vec{\Gamma}'_D$  et  $t$ .

En remplaçant  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  par leurs expressions tirées de (4.13) et de (4.15) et en arrangeant, on obtient successivement pour (4.18) (1) et (2) :

$$N\Omega' \times T_G T_G = N\Gamma'_G \times (\lambda \times T_G T_G + \mu \times T_G T_D - t \times T_G T_D) + t \times N\Omega \times T_G T_G$$

$$(4.19) \quad N\Gamma'_D \times T_G T_G = N\Gamma'_G \times [\lambda^2 \times T_G T_G + T_D T_D \times (\mu^2 - t\mu) + T_G T_D \times (2\lambda\mu - 2\lambda t)]$$

$$+ t\mu \times N\Gamma'_D \times T_G T_G + 2\lambda t \times N\Omega \times T_G T_G .$$

Avec ces résultats, le calcul montre que la relation (4.18) (3) est identiquement vérifiée.

#### IV-4 Rayons de courbure.

Le rayon de courbure de  $S$ , relatif à la direction définie par  $K$ , est donné comme on l'a vu en (4.7) par :

$$\left(\frac{1}{R}\right)_S = \frac{1}{|N|} \frac{N\vec{e} + 2N\Omega \times K + N\Gamma'_D \times K^2}{T_G T_G + 2T_G T_D \times K + T_D T_D \times K^2}$$

Pour  $S'$ , avec  $\vec{T}_D = \lambda \vec{T}_G + \mu \vec{T}_D$ ,  $\vec{N}' = \mu \vec{N}$  et  $\kappa' = \frac{\kappa}{\mu - \lambda \kappa}$ , on a :

$$(4.20) \quad \left(\frac{1}{R}\right)_{S'} = \frac{\varepsilon}{|\vec{N}'|} \cdot \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\mu^2 N \Gamma_G + \kappa [2\mu \times N \Omega' - 2\lambda \mu \times N \Gamma_G] + \kappa^2 [\lambda^2 \times N \Gamma_G - 2\lambda \times N \Omega' + N \Gamma_D']}{\Gamma_G \Gamma_G + 2 \Gamma_G \Gamma_D \times \kappa + \Gamma_D \Gamma_D \times \kappa^2}$$

où  $\varepsilon$  désigne le signe de  $\mu$  introduit par  $|\vec{N}'|$  au dénominateur,

$$|\vec{N}'| = |\mu| \cdot |\vec{N}|$$

Si  $\mu > 0$ , les normales  $\vec{N}$  et  $\vec{N}'$  sont de même sens et on prend

$$\left(\frac{1}{R}\right)_S = \left(\frac{1}{R}\right)_{S'}$$

Si  $\mu < 0$ , les normales étant de sens contraires, les rayons de courbure sont de signes opposés et il faut  $\left(\frac{1}{R}\right)_S = -\left(\frac{1}{R}\right)_{S'}$ , mais alors  $\varepsilon < 0$ .

Ainsi, dans tous les cas, les dénominateurs étant égaux, l'identité des rayons de courbure se traduit par :

$$(4.21) \quad N \Gamma_G + 2 N \Omega \times \kappa + N \Gamma_D \times \kappa^2 = \frac{1}{\mu^2} [\mu^2 N \Gamma_G + \kappa (2\mu N \Omega' - 2\lambda \mu \times N \Gamma_G) + \kappa^2 (\lambda^2 \times N \Gamma_G - 2\lambda N \Omega' + N \Gamma_D)]$$

Cette équation, qui doit être vérifiée quel que soit  $\kappa$  entraîne immédiatement

$$(4.22) \quad N \Omega = \frac{1}{\mu} [N \Omega' - \lambda \times N \Gamma_G]$$

soit  $N\Omega' = \mu \times N\Omega + \lambda \times N\Gamma_C$  d'une part, et d'autre part :

$$N\Gamma_D = \frac{1}{\mu^2} [\lambda^2 \times N\Gamma_C - 2\lambda \times N\Omega' + N\Gamma_D'] ,$$

soit, compte-tenu de (4.22)

$$(4.23) \quad N\Gamma_D' = \mu^2 \times N\Gamma_D + \lambda^2 \times N\Gamma_C + 2\lambda \mu \times N\Omega$$

Ces conditions, concernant l'identité des rayons de courbure, portées dans celles qui concernent l'identité des directions principales (4.19) entraînent

$$(4.24) \quad t = \mu$$

et, identiques alors, constituent les conditions de raccordement au deuxième ordre de S et S', le long d'une génératrice commune sous la forme

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \vec{N}; \vec{\Omega}' &= \mu \cdot \vec{N} \cdot \vec{\Omega} + \lambda \cdot \vec{N} \cdot \vec{\Gamma}_C \\ \vec{N}; \vec{\Gamma}_D' &= \mu^2 \cdot \vec{N} \cdot \vec{\Gamma}_D + \lambda^2 \cdot \vec{N} \cdot \vec{\Gamma}_C + 2\lambda \mu \cdot \vec{N} \cdot \vec{\Omega} \end{aligned}$$

en reprenant l'écriture traditionnelle .

V - Exploitation des conditions de raccordement.

V-1 Choix d'une solution particulière.

Le raccordement de  $S'$  avec  $S$  se fait dans la majorité des cas le long d'une courbe  $G_c(\rho)$  quelconque. Si  $G_c(\rho)$  est dans un plan de symétrie  $Q$ , plan de symétrie longitudinal qui existe pour tout objet physique (avions, bateaux, voitures), le raccordement au deuxième ordre ne présente alors aucune difficulté. Les vecteurs  $\vec{a}'_1$  et  $\vec{a}'_2$  doivent être les symétriques par rapport à  $Q$  des  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ , les  $\vec{a}_1$  étant nécessairement perpendiculaires à  $Q$ .

Parmi l'infinité des solutions des équations vectorielles (4.25) nous choisissons d'étudier le cas particulier

$$(5.1) \quad \vec{\Omega}' = \mu \vec{\Omega} + \lambda \vec{\Gamma}_G$$

$$(5.2) \quad \vec{\Gamma}'_D = \mu^2 \vec{\Gamma}_D + \lambda^2 \vec{\Gamma}_G + 2\lambda\mu \vec{\Omega}$$

qui permet d'assurer le raccordement dans tous les cas sauf celui de la symétrie qui vient d'être évoqué.

On peut remarquer que la première condition (4.25) est toujours vérifiée par le raccordement au premier ordre. En effet, la dérivée par rapport à  $\rho$  de

$$\vec{\Gamma}'_D = \lambda \vec{\Gamma}_G + \mu \vec{\Gamma}_D$$

est

$$\frac{d\vec{\Gamma}'_D}{d\rho} = \lambda \cdot \frac{d\vec{\Gamma}_G}{d\rho} + \mu \cdot \frac{d\vec{\Gamma}_D}{d\rho} + \frac{d\lambda}{d\rho} \cdot \vec{\Gamma}_G + \frac{d\mu}{d\rho} \cdot \vec{\Gamma}_D$$

qui s'écrit aussi

$$(5.3) \quad \vec{\Omega}' = \lambda \cdot \vec{\Gamma}_G + \mu \vec{\Omega} + \frac{d\lambda}{d\rho} \cdot \vec{T}_G + \frac{d\mu}{d\rho} \cdot \vec{T}_D$$

d'après les expressions (4.2) et (4.9) de  $\vec{\Omega}$ ,  $\vec{\Gamma}_G$  et  $\vec{\Omega}'$ .

Dans la multiplication scalaire avec  $\vec{N}$  les termes  $\vec{N} \cdot \vec{T}_G$  et  $\vec{N} \cdot \vec{T}_D$  disparaissent, quels que soient  $\lambda$  et  $\mu$ , et on retrouve

$$\vec{N} \cdot \vec{\Omega}' = \lambda \cdot \vec{N} \cdot \vec{\Gamma}_G + \mu \cdot \vec{N} \cdot \vec{\Omega}$$

Le cas particulier exprimé par (5.1) entraîne par comparaison avec

(5.3)

$$(5.4) \quad \frac{d\lambda}{d\rho} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mu}{d\rho} = 0$$

Dans ce cas  $\lambda$  est aussi une constante et d'après son expression (3.10) on a

$$(5.5) \quad A_0 = A_1 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{q}{p} A_0 = \frac{q}{p} A_1$$

Retrouvons ce résultat directement à partir de (5.1). En remplaçant  $\vec{\Omega}'$ ,  $\vec{\Omega}$ ,  $\vec{\Gamma}_G$  par leurs expressions données en (4.2) et (4.9) et en utilisant les conditions (3.14) de raccordement au premier ordre, on obtient :

$$q \left\{ A_1 \sum_{k=0}^p \frac{k}{p} \cdot \vec{\alpha}_k [\psi'_k - \psi'_{k+1}] + A_0 \sum_{k=0}^p \frac{p-k}{p} \vec{\alpha}_{k+1} [\psi'_k - \psi'_{k+1}] \right\} = \lambda \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \cdot \psi''_j$$

où les termes en facteur de  $B_0$  disparaissent.

En ordonnant par rapport aux vecteurs de même indice  $j$  et en prenant pour  $\lambda$  son expression (3.10), on a

$$\frac{q}{p} \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \left\{ A_1 \cdot j \cdot [\Psi'_j - \Psi'_{j+1}] + A_0 \cdot (p-j+1) [\Psi'_{j-1} - \Psi'_j] \right\} = \frac{q}{p} [p(A_1 - A_0) + A_0] \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \cdot \Psi''_j$$

Cette égalité devant être vérifiée quel que soit  $j$ , il faut et il suffit que les termes en facteur de  $\vec{\alpha}_j$  soient égaux, soit

$$(5.6) \quad A_1 \cdot j \cdot [\Psi'_j - \Psi'_{j+1}] + A_0 \cdot (p-j+1) [\Psi'_{j-1} - \Psi'_j] = [p(A_1 - A_0) + A_0] \cdot \Psi''_j$$

Or en dérivant (3.13), relation vérifiée par le raccordement au premier ordre, on a

$$(5.7) \quad A_1 \cdot j \cdot [\Psi'_j - \Psi'_{j+1}] + A_0 \cdot (p-j+1) [\Psi'_{j-1} - \Psi'_j] = [p(A_1 - A_0) + A_0] \cdot \Psi''_j + (A_1 - A_0) \cdot \Psi'_j$$

égalité qui ne peut être identique à (5.6) que si

$$A_0 = A_1$$

c'est-à-dire  $\lambda = \text{constante}$ .

Ainsi pour la suite de l'étude directe, nous prendrons

$$\mu = \frac{q}{m} B_0 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{p}{q} A_0 = \frac{p}{q} A_1 .$$

V-2 Utilisation de  $\vec{\Gamma}_D = \mu^2 \vec{\Gamma}_D + \lambda^2 \vec{\Gamma}_G + 2\lambda\mu \vec{\Omega}$

Cette égalité doit fournir les conditions sur les vecteurs  $\vec{a}_2^j$ . En remplaçant dans  $\vec{\Gamma}_D'$  les vecteurs  $\vec{a}_1^j$  par leur expression issue des conditions de raccordement au premier ordre et en regroupant alors les termes en  $\vec{\alpha}_j^j$ ,  $\vec{a}_1^j$ ,  $\vec{a}_2^j$ , on obtient :

$$(5.8) q \cdot (q-1) \sum_{j=1}^{p+1} \vec{a}_2^j [\varphi_{j-1} - \varphi_j] = \lambda \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j^j \left\{ \lambda \cdot \varphi_j'' + q \cdot (q-1) \left( \frac{j}{p} [\varphi_j - \varphi_{j+1}] + \frac{p-j+1}{p} [\varphi_{j-1} - \varphi_j] \right) \right\} \\ + \sum_{j=1}^{p+1} \vec{a}_1^j \left\{ 2\mu\lambda n [\varphi'_{j-1} - \varphi'_j] + (q \cdot (q-1) B_0 - \mu^2 n(n-1)) [\varphi_{j-1} - \varphi_j] \right\} \\ + \mu^2 n(n-1) \sum_{j=1}^{p+1} \vec{a}_2^j [\varphi_{j-1} - \varphi_j] .$$

Cette relation met en évidence que chaque vecteur  $\vec{a}_2^j$  est fonction des vecteurs  $\vec{\alpha}_j^j$ ,  $\vec{a}_1^j$  et  $\vec{a}_2^j$ , de la forme :

$$(5.9) \quad \vec{a}_2^j = b^j(\vec{\alpha}_k) + d^j(\vec{a}_1) + k^j \cdot \vec{a}_2^j$$

où  $b^j$ ,  $d^j$ ,  $k^j$  sont des fonctions à déterminer.

V-2 . 1) Terme en  $\vec{a}_2^j$ , fonction  $k^j$ .

On voit immédiatement que la fonction  $k^j$  se réduit au coefficient

$$(5.10) \quad k^j = \frac{q}{n} \cdot \frac{(n-1)}{(q-1)} \cdot B_0^2 \quad \text{en utilisant } \mu = \frac{q}{n} B_0$$

V-2. 2) Terme en  $\vec{a}_k$ , fonction  $d^j(\vec{a}_k)$ .

L'identité de tous les coefficients des vecteurs  $\vec{a}_k$  de (5.8), compte-tenu de (5.9), est réalisée par la fonction  $d^j$  telle que

$$(5.11) \quad d^j(\vec{a}_k) = d_{j-1}^j \cdot \vec{a}_{j-1} + d_j^j \cdot \vec{a}_j + d_{j+1}^j \cdot \vec{a}_{j+1}$$

L'indice  $j$  en exposant de  $d_k^j$  rappelle l'appartenance de ce coefficient à la fonction  $d^j$  (relative à  $\vec{a}_j$ ), alors que l'indice inférieur  $k$  précise sa correspondance avec le vecteur  $\vec{a}_k$ .

Dans ces conditions, en regroupant les termes en facteur du vecteur  $\vec{a}_k$  on obtient l'égalité :

$$(5.12) \quad q \cdot (q-1) \left\{ d_k^{k-1} \cdot [\gamma_{k-2} - \gamma_{k-1}] + d_k^k \cdot [\gamma_{k-1} - \gamma_k] + d_k^{k+1} \cdot [\gamma_k - \gamma_{k+1}] \right\} \\ = 2\mu\lambda n [\gamma'_{k-1} - \gamma'_k] + R [\gamma_{k-1} - \gamma_k]$$

$$(5.13) \quad \text{avec} \quad R = q \cdot (q-1) B_0 - \frac{q^2}{n} (n-1) B_0^2$$

On exprime alors les différences  $[\gamma_j - \gamma_{j+1}]$ , pour  $j = k-2$ ,  $j = k-1$  et  $j = k$  et  $[\gamma'_{k-1} - \gamma'_k]$  par leurs expressions données en A9 et A12.

En divisant les deux membres par  $\binom{k-1}{p-1} \cdot p \cdot (1-p)^{k-2}$ , (ce qui suppose  $p \neq 0$  et  $p \neq 1$ , ces cas étant étudiés ultérieurement) on a :

$$(5.14) \quad q \cdot (q-1) \left\{ d_k^{k-1} \cdot \frac{k-1}{p-k+2} \cdot (1-p)^2 + d_k^k \cdot p \cdot (1-p) + d_k^{k+1} \cdot \frac{p-k+1}{k} \cdot p^2 \right\} \\ = -R \cdot p^2 + p [R - 2\mu\lambda n p] + 2\mu\lambda n (k-1).$$

Les coefficients  $d_k^{k-1}$ ,  $d_k^k$  et  $d_k^{k+1}$  sont obtenus par identification des termes en  $\rho^2$ ,  $\rho$  et du terme constant, ce qui donne, tous calculs faits

$$(5.15) \quad \left. \begin{aligned} d_k^{k-1} &= \frac{2\lambda B_0}{q-1} (p-k+2) \\ d_k^k &= B_0 \left[ 1 + \frac{2\lambda}{q-1} (2k-2-p) - B_0 \frac{q}{n} \frac{n-1}{q-1} \right] \\ d_k^{k+1} &= - \frac{2\lambda B_0}{q-1} k \end{aligned} \right\} \text{pour } 1 \leq k \leq p+1$$

On repasse enfin aux coefficients  $d_{j+1}^j$ ,  $d_j^j$ ,  $d_{j-1}^j$  relatifs à la fonction  $d^j$  en faisant successivement  $j = k-1$ ,  $j = k$ ,  $j = k+1$ , soit :

$$(5.16) \quad \left. \begin{aligned} d_{j+1}^j &= \frac{2\lambda B_0}{q-1} (p-j+1) \\ d_j^j &= B_0 \left[ 1 + \frac{2\lambda}{q-1} (2j-2-p) - B_0 \frac{q}{n} \frac{n-1}{q-1} \right] \\ d_{j-1}^j &= - \frac{2\lambda B_0}{q-1} (j-1) \end{aligned} \right\} \text{pour } 1 \leq j \leq p+1$$

Cas particuliers  $p = 0$  et  $p = 1$

En reprenant l'équation générale (5.8) avec les seuls termes en  $\vec{a}_0^1$ , le cas  $p = 0$  fournit les coefficients

$$d_1^1 = B_0 \left[ 1 - \frac{2\lambda}{q-1} \cdot p + B_0 \frac{q}{n} \frac{n-1}{q-1} \right] \quad \text{et} \quad d_2^1 = \frac{2\lambda B_0}{q-1} \cdot p$$

tandis qu'avec  $p \neq 1$  on obtient

$$d_{p+1}^{p+1} = B_0 \left[ 1 + \frac{2\lambda}{q-1} \cdot p - B_0 \cdot \frac{q}{n} \frac{n-1}{q-1} \right] \quad \text{et} \quad d_p^{p+1} = - \frac{2\lambda B_0}{q-1} \cdot p$$

Ces expressions sont en accord avec les solutions générales données en (5.16).

On peut aussi remarquer que pour  $j = 1$ ,  $d_0^1 = 0$ , de même pour  $j = p+1$ ,  $d_{p+2}^{p+1} = 0$ , ce qui est logique.

V-2. 3) Terme en  $\vec{\alpha}_j$ , fonction  $b^j(\vec{\alpha}_k)$

On doit résoudre :

$$q \cdot (q-1) \cdot \sum_{j=1}^{p+1} b^j(\vec{\alpha}_k) \cdot [\varphi_{j-1} - \varphi_j] = \lambda \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \left\{ \lambda \cdot \varphi_j'' + q \cdot (q-1) \left( \frac{j}{p} [\varphi_j - \varphi_{j+1}] + \frac{p-j+1}{p} [\varphi_{j-1} - \varphi_j] \right) \right\}$$

Compte-tenu de la propriété A10, le deuxième membre s'écrit :

$$(5.17) \quad \lambda \sum_{j=1}^p \vec{\alpha}_j \left\{ \lambda \cdot \varphi_j'' + q \frac{q-1}{p} \cdot \varphi_j' \right\}$$

L'égalité des coefficients des vecteurs  $\vec{\alpha}_k$ , quel que soit  $k$ , impose pour fonction  $b^j(\vec{\alpha}_k)$  la forme :

$$(5.18) \quad b^j(\vec{\alpha}_k) = b_{j-2}^j \cdot \vec{\alpha}_{j-2} + b_{j-1}^j \cdot \vec{\alpha}_{j-1} + b_j^j \cdot \vec{\alpha}_j + b_{j+1}^j \cdot \vec{\alpha}_{j+1}$$

comme on peut le montrer.

L'identité des coefficients des vecteurs  $\vec{\alpha}_k$  donne ainsi :

$$(5.19) \quad q.(q-1) \left\{ b_k^{k+2} [\varphi_{k+1} - \varphi_{k+2}] + b_k^{k+1} [\varphi_k - \varphi_{k+1}] + b_k^k [\varphi_{k-1} - \varphi_k] + b_k^{k-1} [\varphi_{k-2} - \varphi_{k-1}] \right\} \\ = \lambda (\lambda \cdot \varphi_k'' + Q \cdot \varphi_k')$$

$$(5.20) \quad \text{avec} \quad Q = \frac{q(q-1)}{p}$$

On exprime alors les différences  $[\varphi_i - \varphi_{i+1}]$  pour  $i = k+1$ ,  $i = k$ ,  $i = k-1$  et  $i = k-2$ , ainsi que  $\varphi_k'$  et  $\varphi_k''$  données en A11 et A13.

En divisant ensuite les deux membres de l'égalité obtenue par

$$C_{p-1}^{k-1} \cdot p^{k-2} \cdot (1-p)^{p-k-1}$$

ce qui suppose  $p \neq 0$  et  $p \neq 1$ , on a :

$$(5.21) \quad q.(q-1) \left\{ b_k^{k+2} \cdot \frac{p-k}{(k+1)k} \cdot p^3 + b_k^{k+1} \cdot \frac{1}{k} \cdot p^2 \cdot (1-p) + b_k^k \cdot \frac{1}{p-k+1} \cdot p \cdot (1-p)^2 \right. \\ \left. + b_k^{k-1} \cdot \frac{k-1}{(p-k+2)(p-k+1)} \cdot (1-p)^3 \right\} = \lambda \left\{ \lambda(k-1) + p[Q + \lambda(1-p)] - p^2 Q \right\}$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit  $p$ , on identifie les termes de même degré en  $p$ , ce qui fournit les coefficients  $b_k$ .

On repasse alors aux coefficients  $b^j$ , relatifs à un même vecteur  $\vec{a}_j$   
soit :

$$\begin{aligned}
 (5.22) \quad \left. \begin{aligned}
 b_k^{k-1} &\longrightarrow b_{j+1}^j = \frac{\lambda^2 (p-j+1)(p-j)}{q \cdot (q-1)} \\
 b_k^k &\longrightarrow b_j^j = \frac{\lambda}{q \cdot (q-1)} (p-j+1) \left[ \lambda (3j-2-p) + \frac{q \cdot (q-1)}{p} \right] \\
 b_k^{k+1} &\longrightarrow b_{j-1}^j = \frac{\lambda}{q (q-1)} (j-1) \cdot \left[ \lambda (3j-4-2p) + \frac{q \cdot (q-1)}{p} \right] \\
 b_k^{k+2} &\longrightarrow b_{j-2}^j = - \frac{\lambda^2}{q (q-1)} (j-2) \cdot (j-1)
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

pour  $1 \leq j \leq p+1$

Les cas particuliers  $p = 0$  et  $p = 1$  déterminent respectivement les coefficients  $b_1^1$ ,  $b_2^1$  et  $b_p^{p+1}$  et  $b_{p+1}^{p+1}$  en accord avec les expressions générales précédentes en faisant  $j = 1$ , et  $j = p+1$ .

En résumé, les vecteurs  $\vec{a}_j$  dépendent de 8 vecteurs selon :

$$\begin{aligned}
 (5.23) \quad \vec{a}_j &= b_{j-2}^j \cdot \vec{a}_{j-2} + b_{j-1}^j \cdot \vec{a}_{j-1} + b_j^j \cdot \vec{a}_j + b_{j+1}^j \cdot \vec{a}_{j+1} \\
 &+ d_{j-1}^j \cdot \vec{a}_{j-1} + d_j^j \cdot \vec{a}_j + d_{j+1}^j \cdot \vec{a}_{j+1} \\
 &+ k^j \cdot \vec{a}_j
 \end{aligned}$$

avec les coefficients  $b^j$ ,  $d^j$ ,  $k^j$  définis par les expressions (5.22), (5.16) et (5.10).

Ces relations entre les vecteurs caractéristiques assurent le raccordement au deuxième ordre entre S et S' le long de  $C_0(p)$  comme nous allons le vérifier numériquement sur un exemple.

#### VI - Vérification numérique.

Le programme écrit en FORTRAN dont on trouvera le listing complet en Annexe I a pour seul but de vérifier la validité des expressions littérales (5.23) ; il a été testé sur le C II 10070 de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique de Nancy. Il correspond à l'organigramme simplifié de la page suivante et utilise les désignations :

$n \rightarrow N$	$\vec{\alpha}_j \rightarrow$ ALPHA (J)
$p \rightarrow P$	$\vec{a}_1 \rightarrow$ A (1, J)
$q \rightarrow Q$	$\vec{a}_2 \rightarrow$ A(2, J)
$\lambda \rightarrow LDA$	$\vec{a}'_1 \rightarrow$ APRIM (1, J)
$\mu \rightarrow BO$	$\vec{a}'_2 \rightarrow$ APRIM (2, J)
$\mu \cdot \frac{n}{q} \rightarrow BBO$	
$\rho \rightarrow R\emptyset$	

A partir des vecteurs  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  et  $\vec{\alpha}_j$  on calcule  $\vec{a}'_1$  et  $\vec{a}'_2$  pour toute valeur de  $\lambda$  et de  $\mu$  et quels que soient les nombres n, p et q, inférieurs ou égaux à 10.

Le tableau 1 donne les valeurs des composantes et les coordonnées des extrémités des vecteurs  $\vec{\alpha}_j$ ,  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  correspondants à l'exemple choisi et le tableau 2 celles des  $\vec{a}'_1$  et  $\vec{a}'_2$ , résultats des conditions de raccordement au deuxième ordre.

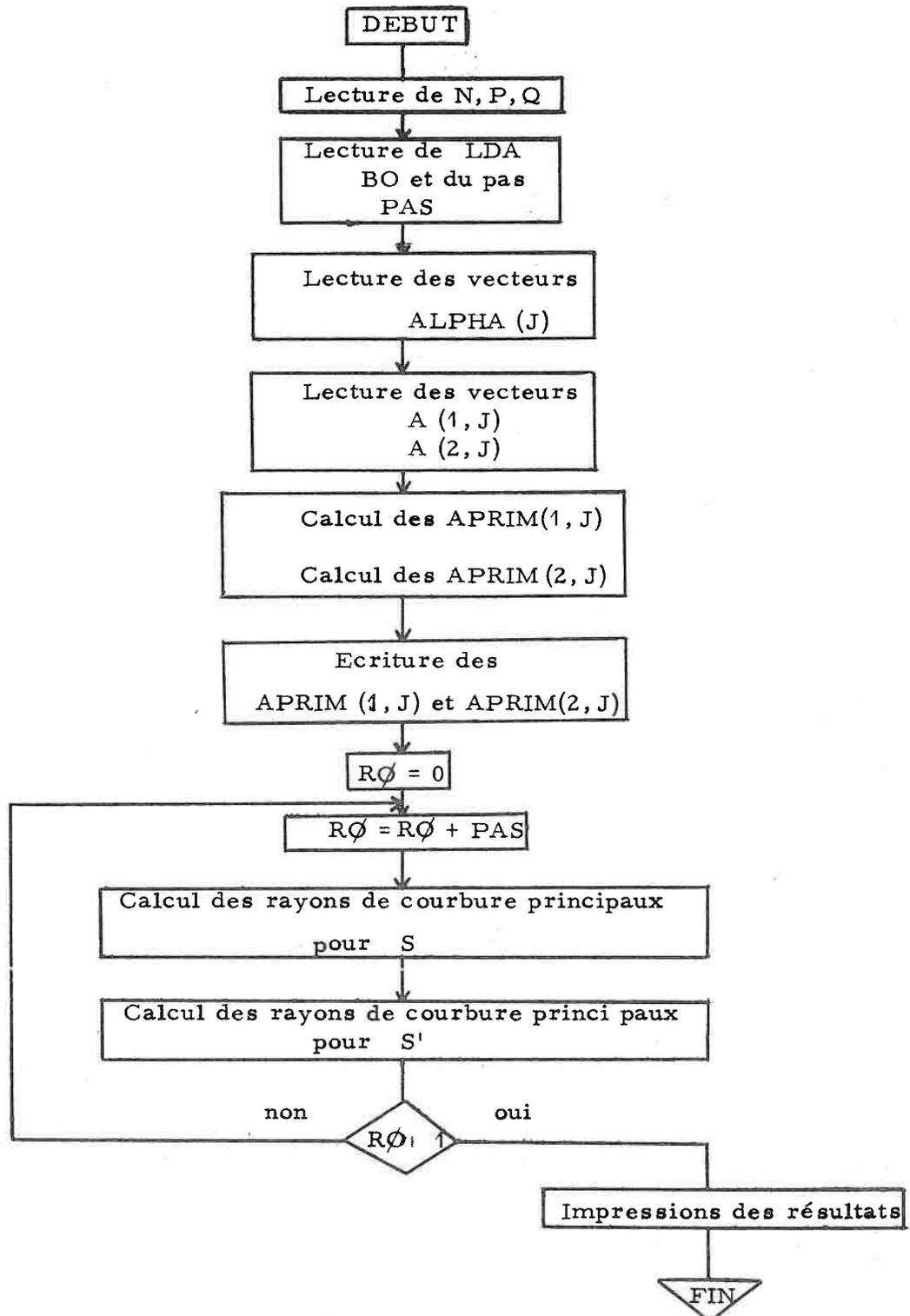
Pour une valeur donnée de  $\rho$ , un même sous programme, appelé "VERIF", calcule les rayons principaux de courbure  $R_1$ ,  $R_2$  relatifs à S et  $R'_1$ ,  $R'_2$  relatifs à S'. Le tableau 3 fournit les résultats correspondants au cas traité pour  $\rho$  variant de 0,1 à 1 par pas de 0,1.

On remarque que pour  $\mu < 0$ , les rayons de courbure sont toujours de signes opposés et que la différence des valeurs absolues, lorsqu'elle n'est pas rigoureusement nulle est inférieure à  $10^{-12}$ , ce qui vérifie les expressions (5.10), (5.16) et (5.22) intervenant dans (5.23).

---

## DE RACCORDEMENT

Organigramme simplifié.



CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE.

Dans l'expression locale, limitée au 2ème ordre, d'une surface canonique autour du point  $P_0$  de  $\vec{G}_0(\rho)$ , seuls subsistent les vecteurs  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ , les autres vecteurs  $\vec{a}_i$ , pour  $i > 2$  n'intervenant pas grâce aux propriétés des fonctions de Bézier pour la valeur zéro du paramètre. Le calcul direct sur les vecteurs géométriques  $\vec{a}_i$  ne permet que de considérer des éléments  $S$  et  $S'$  de même degré  $p$  en  $\rho$ , et dans ce cas, au cours de l'étude du raccordement au premier ordre, nous avons mis en évidence la relation

$$\vec{T}'_D = \lambda \cdot \vec{T}_G + \mu \cdot \vec{T}_D$$

avec  $\mu = \frac{q}{n} B_0$  et  $\lambda = \frac{q}{p} [p(A_1 - A_0) + A_0]$

et retrouvé les conditions déjà connues sur les vecteurs  $\vec{a}'_1$ .

Après avoir transposé l'expression des directions principales et des rayons de courbure principaux au cas de surfaces vectorielles, nous avons appliqué ces résultats aux Surfaces Unisurf. L'écriture de l'identité des directions principales ainsi que de l'égalité des rayons principaux de courbure a été grandement facilitée grâce à la relation précédente. Nous obtenons ainsi les conditions (4.25) de raccordement au deuxième ordre de deux éléments de Surface ayant une génératrice commune.

Ces relations vectorielles sous forme de produits scalaires admettent une infinité de solutions possibles. Nous avons choisi de nous limiter au cas

$$\vec{\Omega}' = \mu \cdot \vec{\Omega} + \lambda \cdot \vec{\Gamma}_G$$

et  $\vec{\Gamma}'_D = \mu^2 \cdot \vec{\Gamma}_D + 2\lambda\mu \cdot \vec{\Omega} + \lambda^2 \cdot \vec{\Gamma}_G$

La première équation entraîne  $A_0 = A_1$ , soit  $\lambda$  constant et la seconde fournit après des calculs assez longs les conditions que doivent satisfaire les vecteurs  $\vec{a}'_2$  par identification des termes de même degré en  $\rho$ .

Les calculs numériques vérifient la validité des expressions littérales obtenues.

Dans la deuxième partie, on fait apparaître directement dans l'expression de la surface les puissances successives du paramètre, ce qui facilite l'identification et fournit une solution plus élégante et plus générale.

---

VECTEURS DE LA SURFACE S.  
\*\*\*\*\*

LDA= 1.23      MU= 1.57      PAS= .10  
N= 3            P= 4            Q= 8

ORIGINE DES 'ALPHA'.

X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Z <sub>0</sub>
.0000	.0000	.0000
.0000	2.0000	4.0000
1.0000	5.0000	8.0000
3.0000	7.0000	12.0000

CAMPBANTES DES 'ALPHA'.

X	Y	Z
.0000	2.0000	4.0000
1.0000	3.0000	4.0000
2.0000	2.0000	4.0000
5.0000	1.0000	-12.0000

EXTREMITES DES A(1,I).

X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Z <sub>0</sub>
2.0000	2.0000	3.0000
1.0000	8.0000	8.0000
3.0000	8.0000	6.0000
7.0000	13.0000	12.0000
9.0000	10.0000	1.0000

CAMPBANTES DES A(1,I).

X	Y	Z
2.0000	2.0000	3.0000
1.0000	6.0000	4.0000
2.0000	3.0000	-2.0000
4.0000	6.0000	.0000
1.0000	2.0000	1.0000

EXTREMITES DES A(2,I).

X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Z <sub>0</sub>
3.0000	-2.0000	5.0000
4.0000	14.0000	4.0000
1.0000	11.0000	-1.0000
9.0000	18.0000	15.0000
10.0000	12.0000	4.0000

CAMPBANTES DES A(2,I).

X	Y	Z
1.0000	-4.0000	2.0000
3.0000	6.0000	-4.0000
-2.0000	3.0000	-7.0000
2.0000	5.0000	3.0000
1.0000	2.0000	3.0000

TABLEAU 1.

RESULTATS  
\*\*\*\*\*

VECTEURS DE LA SURFACE S'.  
\*\*\*\*\*

EXTREMITES DES A'(1,1).

X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Z <sub>0</sub>
1.1775	2.4075	4.2262
1.0500	7.2237	8.8150
3.1000	8.3037	9.2825
7.0462	11.6087	12.0000
11.6637	9.7925	-6.7913

COMPONENTES DES A'(1,1).

X	Y	Z
1.1775	2.4075	4.2262
1.0500	5.2237	4.8150
2.1000	3.3037	1.2825
4.0462	4.6087	.0000
3.6637	1.7925	-6.7913

EXTREMITES DES A'(2,1).

X <sub>0</sub>	Y <sub>0</sub>	Z <sub>0</sub>
1.5875	8.0951	11.4760
3.8274	13.1042	10.4599
6.7398	12.9289	9.1848
13.5247	17.7400	11.6471
16.8922	8.5654	-24.7938

COMPONENTES DES A'(2,1).

X	Y	Z
.4100	5.6876	7.2498
2.7774	5.8805	1.6449
3.6398	4.6251	-0.0977
6.4784	6.1312	-0.3529
5.2285	-1.2271	-18.0025

TABLEAU 2.

VALEURS DES RAYONS DE COURBURE:  
 \*\*\*\*\*

POUR R0 VARIANT DE .10 A 1 AVEC UN PAS DE: .10

R1 =	R1 =	D1 =	R2 =	R2 =	D2 =
27.336302496	27.336302496	.10-13	-.753686693	-.753686693	.20-14
111.174002983	111.174002983	.10-12	-2.217991063	-2.217991063	.30-14
271.073616711	271.073616711	.30-11	-9.392617692	-9.392617692	.50-14
17.703235773	17.703235773	.40-13	-11.128629959	-11.128629959	-.30-14
22.921190989	22.921190989	.10-12	-3.176153079	-3.176153079	-.60-14
-44.314657776	-44.314657776	-.30-12	-.291280518	-.291280518	-.20-14
-43.274492488	-43.274492488	-.10-12	-1.232656830	-1.232656830	-.20-14
-145.970717684	-145.970717684	-.10-11	-9.610065505	-9.610065505	-.60-14
102.876110745	102.876110745	.20-12	-45.656256974	-45.656256974	.40-14
-137.307094679	-137.307094679	-.60-13	15.276054002	15.276054002	-.20-12

TABLEAU 3.

DEUXIEME PARTIE

GENERALISATION

Introduction.

Dans la première partie nous nous sommes attachés à exprimer les conditions que doivent satisfaire les deux premiers vecteurs  $\vec{a}'_1$  et  $\vec{a}'_2$  des polygones des directrices  $T'_j$  de l'élément de surface  $S'$  en fonction des vecteurs  $\vec{\alpha}'_j$ ,  $\vec{a}_j$  et  $\vec{a}_j$  de l'élément connu  $S$ .

Ces vecteurs ont une signification géométrique fondamentale et matérialisent en particulier pour le projecteur la forme schématique de la surface : forme du contour, direction des tangentes aux coins des carreaux, rayons de courbure, ...

Cependant, la méthode Unisurf particulièrement élégante pour créer à volonté des formes nouvelles doit s'appuyer sur un système informatique aussi conversationnel que possible pour que le projecteur puisse modifier facilement la surface et voir dans les plus brefs délais les résultats de ses modifications.

Aussi, bien que notre étude ne soit pas faite dans le but de développer un système informatique opérationnel, nous utilisons dans cette deuxième partie un autre formalisme, suggéré par P. BEZIER, qui, compte-tenu des résultats précédents, fournit une solution plus élégante et plus facilement utilisable au problème de raccordement de deux surfaces, tout en le généralisant.

VII - Cas des courbes Unisurf.VII-I Autre formulation d'une courbe Unisurf.

Considérons la courbe  $\vec{G}_0(p)$  utilisée précédemment comme génératrice, définie par le polygone caractéristique  $\Delta_0$ , composé de  $p$  vecteurs  $\alpha_{0j}$

$$(7.1) \quad \vec{G}_0(p) = \sum_{j=0}^p \alpha_{0j} \cdot \frac{Y_j(p)}{p}, \quad p \in [0, 1]$$

avec, d'après (1.2)

$$Y_j(p) = \sum_{k=j}^p (-1)^{k-j} \cdot \binom{k-j}{k-1} \cdot \binom{k}{p} \cdot p^k$$

que l'on peut écrire

$$(7.2) \quad Y_j(p) = \sum_{k=j}^p x_{k,j} \cdot p^k$$

où  $x_{k,j}$  représente le coefficient du terme  $p^k$  relatif à la fonction  $Y_j$ , soit

$$x_{k,j} = (-1)^{k-j} \cdot \binom{k-j}{k-1} \cdot \binom{k}{p}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(7.3) \quad x_{k,j} = (-1)^{k-j} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{p!}{(p-k)! (k-j)! (j-1)!}$$

En ordonnant par rapport aux puissances croissantes de  $\rho$ , la courbe  $\vec{G}_o(\rho)$  peut toujours se mettre sous la forme [10] :

$$(7.4) \quad G_o(\rho) = \sum_{j=0}^p \vec{b}_{oj} \cdot \rho^j \quad \text{où les vecteurs } \vec{b}_{oj} \text{ sont à déterminer.}$$

Construisons la matrice  $[X_p]$ , carrée d'ordre  $p+1$ , où la  $(k+1)^{\text{ème}}$  ligne est constituée des coefficients  $x_{k,j}$  des termes  $\rho^k$  relatifs aux fonctions successives  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ . Puisque les fonctions  $\varphi_j$  n'ont pas de terme de degré inférieur à  $j$ , les termes  $x_{k,j}$  sont nuls pour  $j > k$ ; la matrice  $[X_p]$  est donc triangulaire inférieure. Son déterminant n'est jamais nul.

Notons  $[\vec{\alpha}_{oj}]$  le vecteur de l'espace vectoriel  $[\mathbb{R}^3]^{p+1}$  dont chacune des composantes est un vecteur de l'espace  $[\mathbb{R}^3]$  et de même  $[\vec{b}_{oj}]$  pour les vecteurs  $\vec{b}_{oj}$  que l'on peut ainsi calculer par

$$(7.5) \quad [\vec{b}_{oj}] = [X_p] \times [\vec{\alpha}_{oj}]$$

Les vecteurs  $\vec{b}_{oj}$  ainsi obtenus n'ont aucune signification physique mais fournissent une expression mathématique (7.4) beaucoup plus souple pour le traitement sur ordinateur par la mise en évidence des puissances successives de  $\rho$ .

Inversement, si on connaît  $[\vec{b}_{oj}]$ , la matrice  $[\vec{\alpha}_{oj}]$  est calculée par

$$(7.6) \quad [\vec{\alpha}_{oj}] = [X_p]^{-1} \times [\vec{b}_{oj}]$$

$[X_p]^{-1}$  désignant la matrice inverse de  $[X_p]$ .

## VII-2 Élévation du degré d'une courbe.

Dans la suite, il sera nécessaire d'élever "artificiellement" au degré  $e$  une courbe donnée de degré  $p$ , avec  $e > p$ . Sous la forme (7.4) cette opération est immédiate et s'écrit :

$$(7.7) \quad \vec{G}_0(p) = \sum_{j=0}^e \vec{b}_{0j} \cdot p^j \quad \text{avec} \quad \vec{b}_{0j} = \vec{0} \quad \text{pour } j > p$$

dont on peut déduire les vecteurs  $\vec{\gamma}_{0j}$ , tels que

$$(7.8) \quad \vec{G}_0(e) = \sum_{j=0}^e \vec{\gamma}_{0j} \cdot \varphi_j^i(p)$$

soit de proche en proche par identification, soit par

$$[\vec{\gamma}_{0j}] = [X_e] \times [\vec{b}_{0j}] ,$$

le vecteur  $[\vec{b}_{0j}]$  étant complété par des zéros pour  $e \geq j > p$ .

### Exemple de calcul direct.

$$\text{On donne } \vec{G}_0(p) = \sum_{j=0}^3 \vec{\alpha}_{0j} \cdot \varphi_j^i(p) \quad \text{que l'on veut exprimer par}$$

$$\vec{G}_0(p) = \sum_{j=0}^5 \vec{\gamma}_{0j} \cdot \varphi_j^i(p) , \quad \text{soit } p = 3 \text{ et } e = 5.$$

En prenant  $\varphi_j^i$  et  $\varphi_j^i$  données en (A4) et (A6) et en identifiant les coefficients de même puissance en  $p$ , on obtient le système :

$$\vec{\gamma}_{00} = \vec{\alpha}_{00} \quad \text{terme } p^0$$

$$5\vec{\gamma}_{01} = 3\vec{\alpha}_{01} \quad \text{terme } p^1$$

$$(7.9) \quad -10\vec{\gamma}_{01} + 10\vec{\gamma}_{02} = -3\vec{\alpha}_{01} + 3\vec{\alpha}_{02} \quad \text{terme } p^2$$

$$10\vec{\gamma}_{01} - 20\vec{\gamma}_{02} + 10\vec{\gamma}_{03} = \vec{\alpha}_{01} - 2\vec{\alpha}_{02} + \vec{\alpha}_{03} \quad \text{terme } p^3$$

$$-5\vec{\gamma}_{01} + 15\vec{\gamma}_{02} - 15\vec{\gamma}_{03} + 5\vec{\gamma}_{04} = 0 \quad \text{terme } p^4$$

$$\vec{\gamma}_{01} - 4\vec{\gamma}_{02} + 6\vec{\gamma}_{03} - 4\vec{\gamma}_{04} + \vec{\gamma}_{05} = 0 \quad \text{terme } p^5$$

d'où l'on tire successivement

$$\vec{\gamma}_{00} = \vec{\alpha}_{00}$$

$$\vec{\gamma}_{01} = \frac{3}{5}\vec{\alpha}_{01}$$

$$(7.10) \quad \vec{\gamma}_{02} = \frac{3}{10}(\vec{\alpha}_{01} + \vec{\alpha}_{02})$$

$$\vec{\gamma}_{03} = \frac{1}{10}(\vec{\alpha}_{01} + 4\vec{\alpha}_{02} + \vec{\alpha}_{03})$$

$$\vec{\gamma}_{04} = \frac{3}{10}(\vec{\alpha}_{02} + \vec{\alpha}_{03})$$

$$\vec{\gamma}_{05} = \frac{3}{5}\vec{\alpha}_{03}$$

Remarques.

- D'une façon générale, on a

$$(7.11) \quad \vec{\gamma}_{0p} = \frac{p}{e}\vec{\alpha}_{01} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}_{0e} = \frac{p}{e}\vec{\alpha}_{0p}$$

- Quant  $e$  devient grand, le polygone formé par les  $\overrightarrow{\gamma_{0j}}$  tend à se confondre avec la courbe.

### VIII - Surfaces Unisurf.

#### VIII-1 Généralisation.

Une surface est définie par le déplacement de la génératrice  $\overrightarrow{G_r}(e)$ , caractérisée pour  $r = 0$ , par le polygone  $\Delta_0$ , composé de  $p$  vecteurs, soit des  $p+1$  sommets  $A_{0_1}, A_{0_2}, \dots, A_{0_p}, \dots, A_{0_{p+1}}$ .

La trajectoire suivie par chaque sommet  $A_{0_j}$  est une courbe Unisurf paramétrée en  $r$ , appelée directrice et notée  $\overrightarrow{T_j}$ , caractérisée par un polygone composé de  $n_j$  vecteurs. Les nombres entiers positifs  $n_j$  ne sont pas nécessairement égaux entre eux, ce qui constitue une première généralisation.

Afin de rendre homogène l'expression de la surface et de retrouver la définition donnée au chapitre I, on désigne par  $n$  le plus grand nombre  $n_j$ . Les courbes  $\overrightarrow{T_j}$  de degré inférieur à  $n$  sont alors élevées au degré  $n$ , comme on a vu qu'il est toujours possible de le faire. On obtient ainsi des polygones  $\Theta_j$  caractéristiques des courbes  $\overrightarrow{T_j}$ , tous composés de  $n$  vecteurs  $\overrightarrow{a_{kj}}$ , avec  $n \geq k \geq 1$ .

La figure 7 explicite les notations utilisées :

les extrémités des vecteurs  $\overrightarrow{a_{1j}}$ , issus des points  $A_{0_j}$  sont désignées par  $A_{1j}$  et forment le polygone  $\Delta_1$ , composé des  $p$  vecteurs  $\overrightarrow{a_{1j}}$ ; de même, les points  $A_{2j}$ , extrémités des vecteurs  $\overrightarrow{a_{2j}}$  issus des  $A_{1j}$ , forment le polygone  $\Delta_2$ , composé des  $p$  vecteurs  $\overrightarrow{a_{2j}}$  et d'une façon générale  $\Delta_k$  désigne celui formé des points  $A_{kj}$ , soit des  $p$  vecteurs  $\overrightarrow{a_{kj}}$ .



Ces notations supposent que chaque sommet  $A_0, A_1, \dots, A_k$  n'est l'origine que d'un seul vecteur  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  ou  $\vec{a}_{k+1}$ , respectivement, mais n'exclut pas la possibilité d'avoir deux ou plusieurs points successifs d'un même polygone  $\Delta_k$  confondus. Ainsi les polygones  $\Delta_k$ , avec  $n \geq k \geq 0$ , peuvent avoir un nombre variable  $(p_k + 1)$  de sommets.

Si  $p$  est égal au plus grand des nombres  $p_k$ , alors nécessairement  $\vec{G}_r(p)$  est de degré  $p$  et tous les polygones  $\Delta_k$ , autre que celui de  $(p+1)$  sommets ont au moins deux sommets confondus, ce qui constitue une deuxième généralisation.

En effet, montrons sur un exemple qu'il est impossible que deux vecteurs  $\vec{a}_{k+1}$  et  $\vec{a}_{k+1}$  soient issus d'un même point  $A_k$  sans entraîner  $\vec{a}_{k+1} = 0$ , ce qui oblige  $\vec{G}_r(p)$  d'être du degré le plus élevé rencontré.

Exemple.

Prenons  $k = 0$  et  $p_0 = 3$ , c'est-à-dire  $\Delta_0$  défini par 3 vecteurs  $\vec{\alpha}_{01}, \vec{\alpha}_{02}$  et  $\vec{\alpha}_{03}$ ,  $p = 5$  et supposons que  $A_1$  et  $A_3$  constituent l'origine de deux directrices distinctes comme le montre la figure 8.

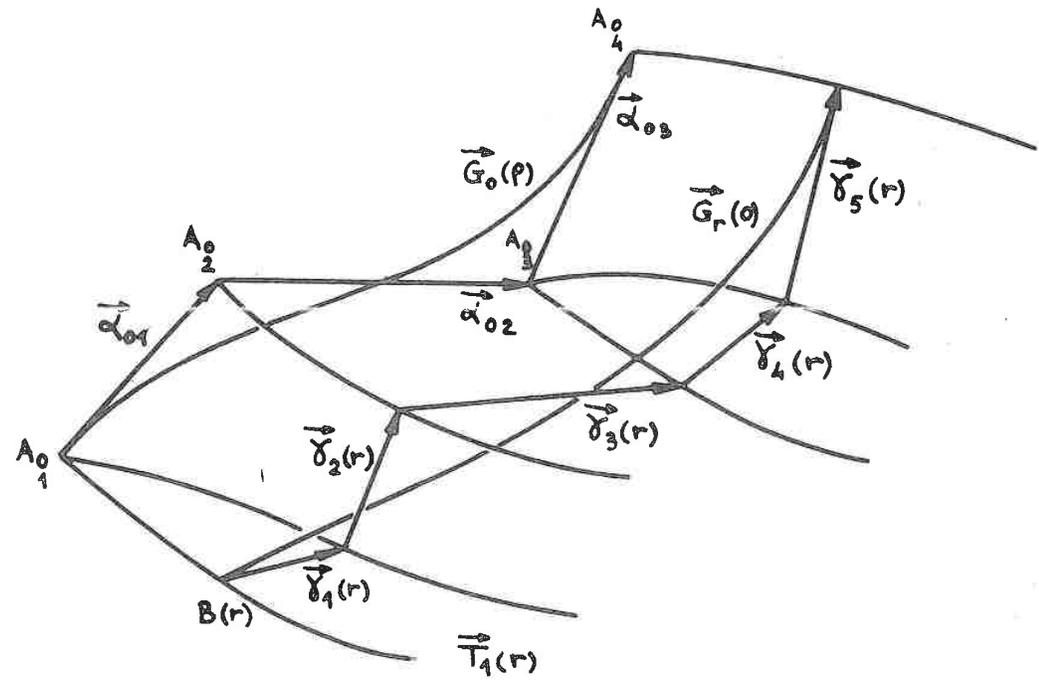


Figure 8

Montrons que si  $\vec{G}_r(\rho)$  est réellement de degré 5, alors il en est de même pour  $\vec{G}_0(\rho)$ , ce qui entraîne que les points  $A_0$  et  $A_3$  sont des points "doubles".

En effet, supposons que  $\vec{G}_0(\rho)$  soit du 3ème degré :

$$(8.1) \quad \vec{G}_0(\rho) = \alpha_{01} \cdot \psi_1 + \alpha_{02} \cdot \psi_2 + \alpha_{03} \cdot \psi_3 \quad \text{en prenant } A_0 \text{ comme origine.}$$

Pour toute valeur de  $r \neq 0$ , on obtient sur chaque directrice un point qui est un sommet du polygone caractéristique  $\Delta(r)$  formé des vecteurs notés  $\vec{\gamma}_1(r), \vec{\gamma}_2(r), \dots, \vec{\gamma}_5(r)$ .

Ainsi  $\vec{G}_r(\rho)$  s'écrit nécessairement :

$$(8.2) \quad \vec{G}_r(\rho) = \vec{B} + \vec{\gamma}_1(r) \cdot \psi_1 + \vec{\gamma}_2(r) \cdot \psi_2 + \vec{\gamma}_3(r) \cdot \psi_3 + \vec{\gamma}_4(r) \cdot \psi_4 + \vec{\gamma}_5(r) \cdot \psi_5$$

en admettant implicitement que cette forme est irréductible quel que soit  $r$ , c'est-à-dire que les  $\vec{\gamma}_j(r)$  ne vérifient pas les deux dernières égalités de (7.9), auquel cas  $\vec{G}_r(\rho)$  serait de degré 3 et non 5 et on pourrait toujours trouver les directrices définissant les déplacements des 4 sommets minimaux du polygone. Chaque sommet  $A_0$  ne serait alors origine que d'une seule directrice.

Dans le cas où  $\vec{G}_r(\rho)$  est une forme irréductible, donnée par (8.2) on voit qu'à la limite, lorsque  $r \rightarrow 0$ , on doit avoir

$$\vec{G}_0(\rho) = \vec{\gamma}_1(0) \cdot \psi_1 + \vec{\gamma}_2(0) \cdot \psi_2 + \vec{\gamma}_3(0) \cdot \psi_3 + \vec{\gamma}_4(0) \cdot \psi_4 + \vec{\gamma}_5(0) \cdot \psi_5$$

qui doit se confondre avec (8.1). Or lorsque  $r$  tend vers zéro,  $\vec{\gamma}_1(o)$  et  $\vec{\gamma}_4(o)$  tendent vers zéro et  $\vec{\gamma}_2(o)$ ,  $\vec{\gamma}_3(o)$ ,  $\vec{\gamma}_5(o)$  vers  $\vec{\alpha}_{o1}$ ,  $\vec{\alpha}_{o2}$ ,  $\vec{\alpha}_{o3}$  respectivement.

La nullité des termes en  $\rho^4$  et  $\rho^5$  qui résulte de la confusion de (8.1) et (8.2) pour  $r = 0$  entraîne immédiatement

$$(8.3) \quad \vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2, \quad \vec{\alpha}_3 = -2 \vec{\alpha}_1 = -2 \vec{\alpha}_2$$

ce qui n'a aucun sens.

Ainsi  $\vec{G}_o(\rho)$  doit être du 5ème degré, de la forme

$$\vec{G}_o(\rho) = \sum \vec{\gamma}_j(o) \cdot \rho_j^5$$

avec  $\vec{\gamma}_1(o) = \vec{\gamma}_4(o) = 0$  et  $\vec{\gamma}_2(o) = \vec{\alpha}_{o1}$ ,  $\vec{\gamma}_3(o) = \vec{\alpha}_{o2}$ ,  $\vec{\gamma}_5(o) = \vec{\alpha}_{o3}$

Cet exemple montre que le nombre maximum  $p+1$  de directrices étant choisi ou imposé, la génératrice doit nécessairement être de degré  $p$ .

Remarque.

Cependant, il peut arriver qu'elle soit pour certaines valeurs particulières  $r_o$  de  $r$  d'un degré inférieur à  $p$ , il suffit pour cela, en se basant sur l'exemple précédent, que les vecteurs  $\vec{\gamma}_j(r_o)$  vérifient les deux dernières relations de (7.9).

D'une façon plus générale, avec

$$G_r(\rho) = \sum_{j=0}^p \vec{\gamma}_j(r) \cdot \rho_j^p = \sum_{j=0}^p \vec{b}_{oj}(r) \cdot \rho_j^p$$

et 
$$\left[ \vec{b}_{o_j}(r) \right] = [X_p] \times \left[ \vec{\gamma}_j(r) \right]$$
, il est possible que

les coefficients des termes de plus haut degré soient nuls,  $\vec{b}_{o_p}(r_0)$  et  $\vec{b}_{o_{p-1}}(r_0)$  par exemple. La génératrice  $\vec{G}_{r_0}(p)$  est, pour cette valeur de  $r$ , de degré  $p-2$ .

En particulier pour  $r_0 = 0$ ,  $\vec{G}_0(p)$  peut être de degré réel inférieur à  $p$  mais son polygone caractéristique possède nécessairement, d'après ce qui précède  $(p+1)$  sommets distincts dont chacun est l'origine d'un seul vecteur  $\vec{a}_{k+1}$ .  $\vec{G}_0(p)$  peut être de degré  $m < p$  et la génératrice immédiatement voisine de degré  $p$ .

En résumé, on pourra dans tous les cas, raisonner comme si chaque sommet  $A_k$  de  $\Delta_k$  n'est l'origine que d'un seul vecteur  $\vec{a}_{k+1}$ , même dans le cas où  $\alpha_{k+1} = 0$ , c'est-à-dire où  $A_k$  et  $A_{k+1}$  sont confondus.

Ainsi pour la suite, on supposera la surface "normalisée" c'est-à-dire avec toutes les directrices transformées en courbes de degré  $n$  correspondant au plus haut degré de toutes les courbes  $\vec{T}_j$  et tous les polygones  $\Delta_k$  composés de  $(p+1)$  sommets distincts ou confondus.

#### VIII-2 Nouvelle formulation des surfaces Unisurf - Expression locale.

Compte-tenu des transformations préalables précédentes l'expression (1.4) d'un point de la surface s'écrit :

$$\vec{OP} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \cdot \frac{f_i(r)}{1} + \sum_{j=0}^p \alpha_{o_j} \cdot \frac{\gamma_j(p)}{p} + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^m (\vec{a}_i - \vec{a}_{j+1}) \frac{f_i(r)}{m} \cdot \frac{\gamma_j(p)}{p}$$

ou

$$(8.4) \quad \vec{OP} = \sum_{j=0}^p \vec{\alpha}_{0j} \cdot \varphi_j^p(\rho) + \sum_{j=0}^p \sum_{i=1}^n (\vec{a}_{i,j+1} - \vec{a}_{i,j}) \varphi_i^p(r) \cdot \varphi_j^p(\rho)$$

en adoptant la convention  $\vec{a}_{i,0} = \vec{0}$ ,  $\forall i$  pour  $n \geq i \geq 1$ .

En ordonnant par rapport aux puissances de  $r$  et de  $\rho$ , cette expression devient

$$(8.5) \quad \vec{OP} = \sum_{i=0, j=0}^{n, p} \vec{b}_{i,j} \cdot r^i \cdot \rho^j$$

où  $\vec{b}_{i,j}$  désigne le vecteur en facteur de  $r^i \cdot \rho^j$ .

#### Expression locale.

L'expression limitée au deuxième ordre de la surface au voisinage du point  $P_0$ , défini pour  $\rho = \rho_0$ , de  $\vec{G}_0(\rho)$  est :

$$(8.6) \quad \vec{OP} = \vec{OP}_0 + dr \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} + d\rho \frac{\partial \vec{P}}{\partial \rho} + \frac{dr^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial r^2} + \frac{d\rho^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial \rho^2} + dr \cdot d\rho \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial \rho \partial r}$$

pour  $r = 0$  et  $\rho = \rho_0$ .

D'après (8.5) on a immédiatement (on rappelle aussi la notation utilisée précédemment) :

(Page suivante)

$$(8.7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial r} = \vec{T}_D = \sum_{j=0}^p \vec{b}_{1j} \cdot \rho_0^j \\ \frac{\partial P}{\partial \rho} = \vec{T}_G = \sum_{j=0}^p j \cdot \vec{b}_{0j} \cdot \rho_0^{j-1} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \vec{\Gamma}_D = 2 \sum_{j=0}^p \vec{b}_{2j} \cdot \rho_0^j \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} = \vec{\Gamma}_G = \sum_{j=0}^p j \cdot (j-1) \cdot \vec{b}_{0j} \cdot \rho_0^{j-2} = \frac{d\vec{T}_G}{d\rho} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial r \cdot \partial \rho} = \vec{\Omega} = \sum_{j=0}^p j \cdot \vec{b}_{1j} \cdot \rho_0^{j-1} = \frac{d\vec{T}_D}{d\rho} \end{array} \right.$$

Calcul des  $\vec{b}_{0j}, \vec{b}_{1j}, \vec{b}_{2j}$  —

Pour  $b_{0j}$ , en utilisant la notation du paragraphe 7.1, on a

$$(8.8) \quad [\vec{b}_{0j}] = [X_p] \times [\vec{\alpha}_{0j}]$$

En remarquant que seules  $f_{1n}$  et  $f_{2n}$  ont des termes du 1er et du 2ème degré en  $r$  de la forme (d'après 2.1)

$$f_{1n} = nr - \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot r^2$$

$$f_{2n} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} r^2$$

on obtient avec (8.4) et (8.5)

$$(8.9) \quad [\vec{b}_{1j}] = n [X_p] \times [\vec{\delta}_j]$$

$$(8.10) \quad \text{et} \quad \vec{b}_{2j} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} [X_p] \times [\vec{\delta}_{2j} - \vec{\delta}_{1j}]$$

$$(8.11) \quad \text{avec} \quad \vec{\delta}_{1j} = \vec{a}_{1j+1} - \vec{a}_{1j} \quad , \quad \vec{\delta}_{2j} = \vec{a}_{2j+1} - \vec{a}_{2j} \quad ,$$

$[\vec{\delta}_{1j}]$  et  $[\vec{\delta}_{2j}]$  désignant les vecteurs de l'espace  $[R^3]^{p+1}$  dont chaque composante  $\vec{\delta}_{1j}$  ou  $\vec{\delta}_{2j}$  est un vecteur de l'espace  $[R^3]$ .

Ainsi la matrice  $[X_p]$  étant connue, le calcul numérique des vecteurs  $[\vec{b}_{0j}]$ ,  $[\vec{b}_{1j}]$  et  $[\vec{b}_{2j}]$  ne présente aucune difficulté.

#### Remarque.

On peut aussi écrire :

$$(8.12) \quad \vec{T}_D = n \cdot \sum_{j=0}^p \vec{\delta}_{1j} \cdot \varphi_j(p_0) = \sum_{j=0}^p \vec{b}_{1j} \cdot p^j$$

#### IX - Conditions généralisées de raccordement au premier ordre.

On cherche à raccorder au premier ordre le carreau de surface  $S'$  ayant la génératrice  $\vec{G}_0(p)$  commune avec  $S$ . Les vecteurs relatifs à  $S'$  sont notés  $\vec{b}'_{0j}$ ,  $\vec{b}'_{1j}$ ,  $\vec{b}'_{2j}$ ,  $\vec{T}'_D$ ,  $\vec{T}'_D$ ,  $\vec{\Omega}'$ .

Nous avons montré dans la première partie que les conditions les plus générales de raccordement au 1er ordre sont :

$$(9.1) \quad \vec{T}'_D = \lambda \cdot \vec{T}_G + \mu \cdot \vec{T}_D \quad \text{avec} \quad \mu = \text{cste} \quad \text{et} \quad \lambda \quad \text{une forme}$$

linéaire en  $\rho$ , dans la mesure où  $S$  et  $S'$  étaient définies par  $(p+1)$  directrices.

En fait, grâce à la nouvelle formulation, il est possible de laisser au projecteur le libre choix de la variation de  $\vec{T}'_D$  le long de  $\vec{G}_o(\rho)$ , ce qui présente un avantage considérable pour agir à volonté sur la forme de l'élément  $S'$  qui doit se raccorder à  $S$ .

Ainsi, supposons que l'on désire réaliser :

$$(9.2) \quad \vec{T}'_D = h(\rho) \vec{T}_G + l(\rho) \vec{T}_D$$

où  $h(\rho)$  et  $l(\rho)$  sont des polynômes en  $\rho$  de degré  $h$  et  $l$ , et les expressions  $h(\rho) \vec{T}_G$  et  $l(\rho) \vec{T}_D$  de degré  $(h+p-1)$  et  $(l+p)$  en  $\rho$ . Supposons, ce qui n'enlève rien à la suite

$$(9.3) \quad e = h + p - 1 > l + p.$$

On peut toujours les mettre sous la forme

$$(9.3) \quad \vec{G} = h(\rho) \cdot \vec{T}_G = \sum_{j=0}^e \vec{g}_j \rho^j$$

$$(9.4) \quad \vec{D} = l(\rho) \cdot \vec{T}_D = \sum_{j=0}^e \vec{d}_j \rho^j \quad \text{avec } \vec{d}_j = \vec{0} \text{ pour } e \geq j > l+p$$

Ainsi, en reportant ces expressions dans (9.2),  $\vec{T}'_D$  est nécessairement de degré  $e$ , et on a

$$\vec{T}'_D = \vec{G} + \vec{D}$$

$$(9.5) \quad \text{d'où} \quad \vec{T}'_D = \sum_{j=0}^e \vec{b}'_{1j} \cdot \rho^j = \sum_{j=0}^e \vec{g}_j \cdot \rho^j + \sum_{j=0}^e \vec{d}_j \cdot \rho^j$$

ce qui fournit les vecteurs  $\vec{b}'_{1j}$

$$(9.6) \quad \vec{b}'_{1j} = \vec{g}_j + \vec{d}_j \quad \text{pour } e \geq j \geq 0$$

et constitue les conditions de raccordement généralisées au 1er ordre.

Il reste à en déduire les coordonnées des sommets du polygone  $\Delta'_1$ .

L'expression (9.6) permet de former le vecteur  $[\vec{b}'_{1j}]$  de l'espace  $[\mathbb{R}^3]^{e+1}$ , d'où, avec (8.9)

$$(9.7) \quad [\vec{\delta}'_1] = \frac{1}{q} [X_e]^{-1} \times [\vec{b}'_{1j}] \quad \text{avec} \quad \vec{\delta}'_1 = \vec{a}'_{1j} - \vec{a}'_{j+1}$$

où  $q$  est le nombre maximum (supposé ou connu) de vecteurs des directrices de  $S'$ .

Chaque vecteur  $\vec{a}'_j$  est issu d'un sommet  $A'_j$  du polygone  $\Delta'_0$  composé de  $e$  vecteurs  $\vec{\gamma}_{0j}$  obtenus comme on l'a vu au paragraphe 7.2 en élevant  $\vec{G}_0(P)$  au degré  $e$  (figure 9).

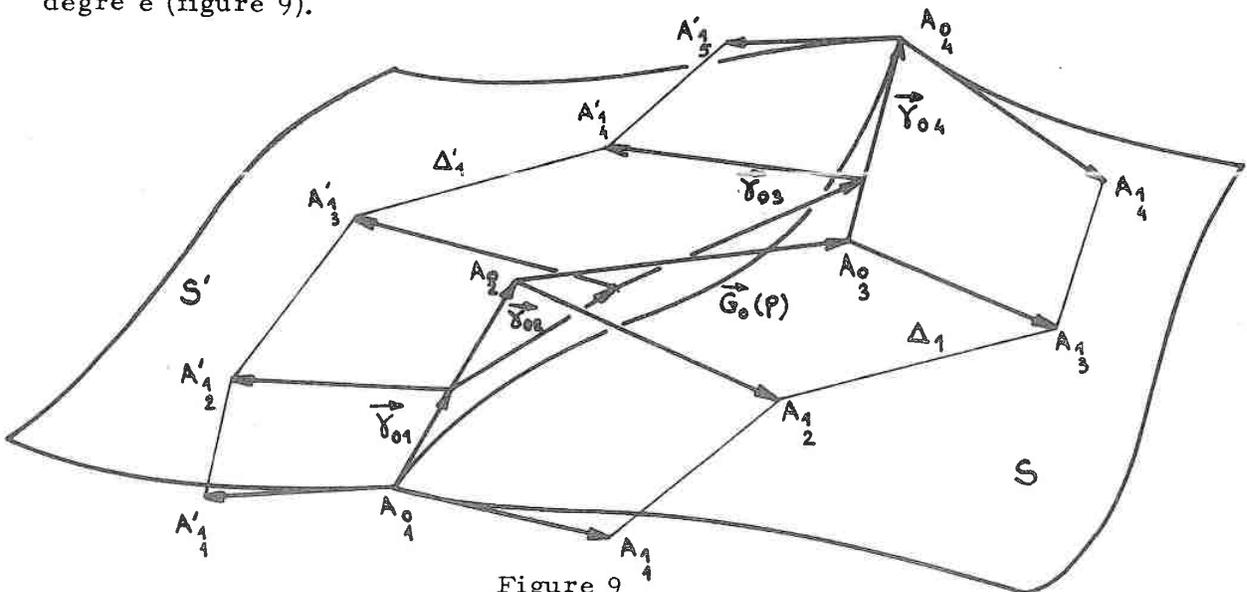


Figure 9

Le premier point  $A'_1$  de  $\Delta'_1$  est obtenu, pour  $\rho = 0$ , par

$$\vec{b}'_{10} = \vec{g}_0 + \vec{d}_0$$

or  $\vec{g}_0 = h(0) \cdot p \cdot \vec{\alpha}_{01}$  et  $\vec{d}_0 = l(0) \cdot n \cdot \vec{a}'_1$

On remarque que  $\vec{s}'_1 = \frac{1}{q} \vec{b}'_{10}$ , ce qui donne

$$(9.8) \quad \vec{a}'_1 = \vec{s}'_1 = \frac{1}{q} [p \cdot h(0) \cdot \vec{\alpha}_{01} + n \cdot l(0) \cdot \vec{a}'_1]$$

De même pour  $\vec{a}'_{e+1}$ , on a

$$(9.9) \quad \vec{a}'_{e+1} = \frac{1}{q} [p \cdot h(1) \cdot \vec{\alpha}_{0p} + n \cdot l(1) \cdot \vec{a}'_{p+1}]$$

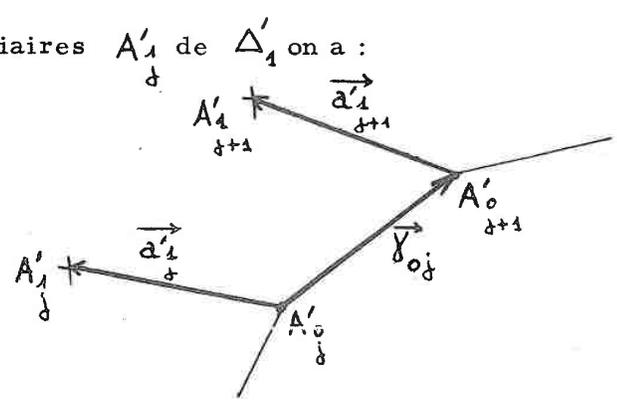
En agissant sur les valeurs  $h(0)$ ,  $l(0)$  et  $h(1)$ ,  $l(1)$ , on peut modifier la direction des bords de  $S'$ .

Pour les points intermédiaires  $A'_j$  de  $\Delta'_1$  on a :

$$\vec{A}'_{j+1} = \vec{A}'_j - \vec{a}'_j + \vec{a}'_{j+1} + \vec{\gamma}_{0j}$$

soit

$$(9.10) \quad \vec{A}'_{j+1} = \vec{A}'_j + \vec{\delta}'_j + \vec{\gamma}'_{0j}$$



ce qui permet de calculer de proche en proche les coordonnées des  $e+1$  sommets de  $\Delta'_1$ .

Ainsi le carreau  $S'$  est de degré  $q$  en  $r$ ,  $e$  en  $\rho$  bien que  $\vec{G}_0(\rho)$  soit de degré  $p < e$ , comme cela est possible compte-tenu de la remarque du paragraphe

VIII - 1 ; l'expression d'un point P' de S' est donc

$$\overrightarrow{OP'} = \sum_{i=0, j=0}^{q, e} \overrightarrow{b_{i,j}} \cdot r^i \cdot \rho^j$$

avec  $\overrightarrow{b_{0j}} = \overrightarrow{b_{0j}}$  ( $\overrightarrow{G_0}(e)$  courbe commune) et  $\overrightarrow{b_{1j}}$  déterminés par (9.6) ;  
les  $\overrightarrow{b_{2j}}$  seront fixés par le raccordement au deuxième ordre.

#### X - Conditions généralisées de raccordement au 2ème ordre.

Les conditions de raccordement au deuxième ordre (5.19) restent valables en remplaçant simplement  $\lambda$  et  $\mu$  par  $h(\rho)$  et  $\ell(\rho)$  respectivement, soit :

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Omega}' &= \ell(\rho) \cdot \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Omega} + h(\rho) \cdot \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Gamma_C} \\ \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Gamma_D}' &= \ell^2(\rho) \cdot \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Gamma_D} + h^2(\rho) \cdot \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Gamma_C} + 2 \cdot \ell(\rho) \cdot h(\rho) \cdot \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Omega} \end{aligned}$$

La première condition traduit le raccordement au premier ordre et est toujours vérifiée par  $\overrightarrow{T_D}' = h(\rho) \cdot \overrightarrow{T_C} + \ell(\rho) \cdot \overrightarrow{T_D}$  quels que soient les polynômes  $h(\rho)$  et  $\ell(\rho)$ . En effet, la dérivée de cette expression s'écrit :

$$(10.2) \quad \overrightarrow{\Omega}' = h(\rho) \cdot \overrightarrow{\Gamma_C} + \ell(\rho) \cdot \overrightarrow{\Omega} + h'(\rho) \cdot \overrightarrow{T_C} + \ell'(\rho) \cdot \overrightarrow{T_D}$$

qui multipliée scalairement par  $\overrightarrow{N}$  donne

$$(10.3) \quad \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Omega}' = h(\rho) \cdot \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Gamma_C} + \ell(\rho) \cdot \overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{\Omega}$$

les produits scalaires  $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{T_C}$  et  $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{T_D}$  étant nuls.

Le cas particulier  $\vec{\Omega}' = \ell(\rho) \cdot \vec{\Omega} + h(\rho) \cdot \vec{\Gamma}_G$  entraîne

$$(10.4) \quad \ell'(\rho) = h'(\rho) = 0$$

soit  $\ell(\rho)$  et  $h(\rho)$  indépendants de  $\rho$ , cas qui a été traité directement dans la première partie.

Le nouveau formalisme permet de traiter le problème avec  $h(\rho)$  et  $\ell(\rho)$  polynômes de degré quelconque en  $\rho$ . Cependant, pour la deuxième condition, parmi l'infinité de solutions possibles, on choisit d'étudier

$$(10.5) \quad \vec{\Gamma}'_D = \ell^2(\rho) \cdot \vec{\Gamma}_D + h^2(\rho) \cdot \vec{\Gamma}_G + 2 \cdot \ell(\rho) \cdot h(\rho) \cdot \vec{\Omega}$$

qui permet de traiter la majorité des cas de raccordement.

Les termes  $\ell^2(\rho)$ ,  $h^2(\rho)$ ,  $2\ell(\rho)h(\rho)$  sont des polynômes de degré  $2\ell$ ,  $2h$  et  $h+\ell$  respectivement ; on les notera  $P_1(\rho)$ ,  $P_2(\rho)$  et  $P_3(\rho)$ .

La condition (10.5) s'écrit alors, avec les expressions de  $\vec{\Gamma}_G$ ,  $\vec{\Gamma}_D$  et  $\vec{\Omega}$ ,

$$(10.6) \quad \vec{\Gamma}'_D = P_1(\rho) \cdot 2 \sum_{j=0}^p \vec{b}_{2j} \cdot \rho^j + P_2(\rho) \sum_{j=0}^p j \cdot (j-1) \cdot \vec{b}_{0j} \cdot \rho^{j-2} + P_3(\rho) \sum_{j=0}^p j \cdot \vec{b}_{1j} \cdot \rho^{j-1}$$

En développant chaque terme par rapport aux puissances croissantes de  $\rho$  et en regroupant, on obtient :

$$(10.7) \quad \vec{\Gamma}'_D = \sum_{j=0}^f \vec{p}_j \cdot \rho^j$$

où  $f$  désigne le nombre le plus grand de  $2\ell+p$ ,  $2h+p$  ou  $h+\ell+p$ .

L'expression littérale des  $\vec{p}_j$  n'a aucun intérêt, l'opération de développement et de regroupement étant facile avec des valeurs numériques sur un ordinateur.

$\vec{\Gamma}'_D$  est donc de degré  $q$ , de la forme  $\vec{\Gamma}' = 2 \sum_{j=0}^q \vec{b}'_{2j} \cdot \rho^j$  d'après (8.7), ce qui avec (10.7) entraîne immédiatement :

$$(10.8) \quad \vec{b}'_{2j} = \frac{1}{2} \vec{p}_j$$

ce qui permet de connaître le vecteur  $[\vec{b}'_{2j}]$  de l'espace  $[R^3]^{q+1}$

Il est nécessaire d'élever au préalable  $G_o(\rho)$  au degré  $q$ , de calculer alors les  $q+1$  vecteurs  $\vec{s}'_j$  par

$$[\vec{s}'_j] = \frac{1}{q} [X_q]^{-1} [\vec{b}'_{1j}]$$

le vecteur  $[\vec{b}'_{1j}]$  étant complété par des zéros jusqu'au rang  $q$ , ce qui fixe les  $q+1$  sommets du polygone  $\Delta'_1$  comme on l'a déjà vu.

Le vecteur  $[\vec{b}'_{2j}]$  étant connu par (10.8) on peut déduire (d'après 8.10)

$$(10.9) \quad [\vec{s}'_2 - \vec{s}'_1] = \frac{2}{q \cdot (q-1)} [X_q]^{-1} [\vec{b}'_{2j}]$$

d'où l'on tire

$$(10.10) \quad [\vec{s}'_2] = \frac{2}{q \cdot (q-1)} [X_q]^{-1} [\vec{b}'_{2j}] - [\vec{s}'_1]$$

On en déduit alors successivement, d'après (8.11)

$$\overline{a'}_1 = \overline{s'}_0 \quad \text{puisque } \overline{a'}_0 = 0 \quad \text{ce qui fixe le}$$

premier point  $A'_{12}$  de  $\Delta'_2$  par

$$(10.11) \quad \overrightarrow{A'_{12}} = \overrightarrow{A'_{14}} + \overrightarrow{a'_{12}}$$

puis, d'une façon générale

$$(10.12) \quad \overrightarrow{A'_{12}} = \overrightarrow{A'_{1j}} + \overrightarrow{s'_{1j}}$$

fournissant ainsi les coordonnées des  $j+1$  sommets de  $\Delta'_2$ .

#### CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE.

La mise en évidence des puissances des paramètres  $\rho$  et  $r$  dans l'expression des surfaces  $S$  et  $S'$  permet de généraliser la notion de Surface Unisurf et d'élever à volonté leur degré en complétant simplement la matrice des vecteurs  $\overrightarrow{b}_{ij}$  par des zéros.

Le raccordement au 1er et au 2ème ordre qui ne fait intervenir que les  $\overrightarrow{b}_{1j}$ ,  $\overrightarrow{b}_{2j}$  et  $\overrightarrow{b}_{1j}$  et  $\overrightarrow{b}_{2j}$ , s'exprime alors très facilement par (9.6) et (10.8), quelles que soient les lois de variations  $h(\rho)$  et  $l(\rho)$  des projections de  $\overrightarrow{T}'_D$  sur  $\overrightarrow{T}_D$  et  $\overrightarrow{T}_C$ .

Ce formalisme fournit ainsi très rapidement des égalités vectorielles sans commune mesure avec la complexité des relations obtenues dans la 1ère partie. La difficulté est reportée au niveau de la construction des vecteurs

$\vec{g}_j$ ,  $\vec{d}_j$  et  $\vec{p}_j$ , c'est-à-dire dans le bon ordonnancement des différents coefficients de  $\rho^j$ , en particulier lors de la multiplication d'expressions entre elles.

L'écriture vectorielle et matricielle des expressions utilisées présente des avantages importants pour le traitement numérique de la méthode sur ordinateur.

Une mise en oeuvre sur calculateur CII 10070 est présentée dans le chapitre suivant.

---

$p \rightarrow u$        $i \rightarrow j$   
 $q \rightarrow v$        $j \rightarrow i$   
 $p \rightarrow m$

XI - Mise en oeuvre

XI-1 Expression matricielle d'un point P de la surface S

Le problème est d'exprimer (8.5)

$$\vec{OP} = \sum_{i=0, j=0}^{n, p} b_{ij} \cdot r^i \cdot \rho^j$$

sous une forme utilisable pour le traitement numérique sur ordinateur. Pour faciliter l'écriture des variables indicées les notations sont légèrement modifiées, les vecteurs  $\vec{a}_i$ , pour j variant de 1 à p+1, et i de 1 à n deviennent  $\vec{a}(j,i)$ , pour j variant de 0 à p. Une directrice  $\vec{T}_j$  est caractérisée par le polygone composé des vecteurs  $\vec{a}(j,i)$  de même indice j, issu du point  $A_j$  (figure 10).

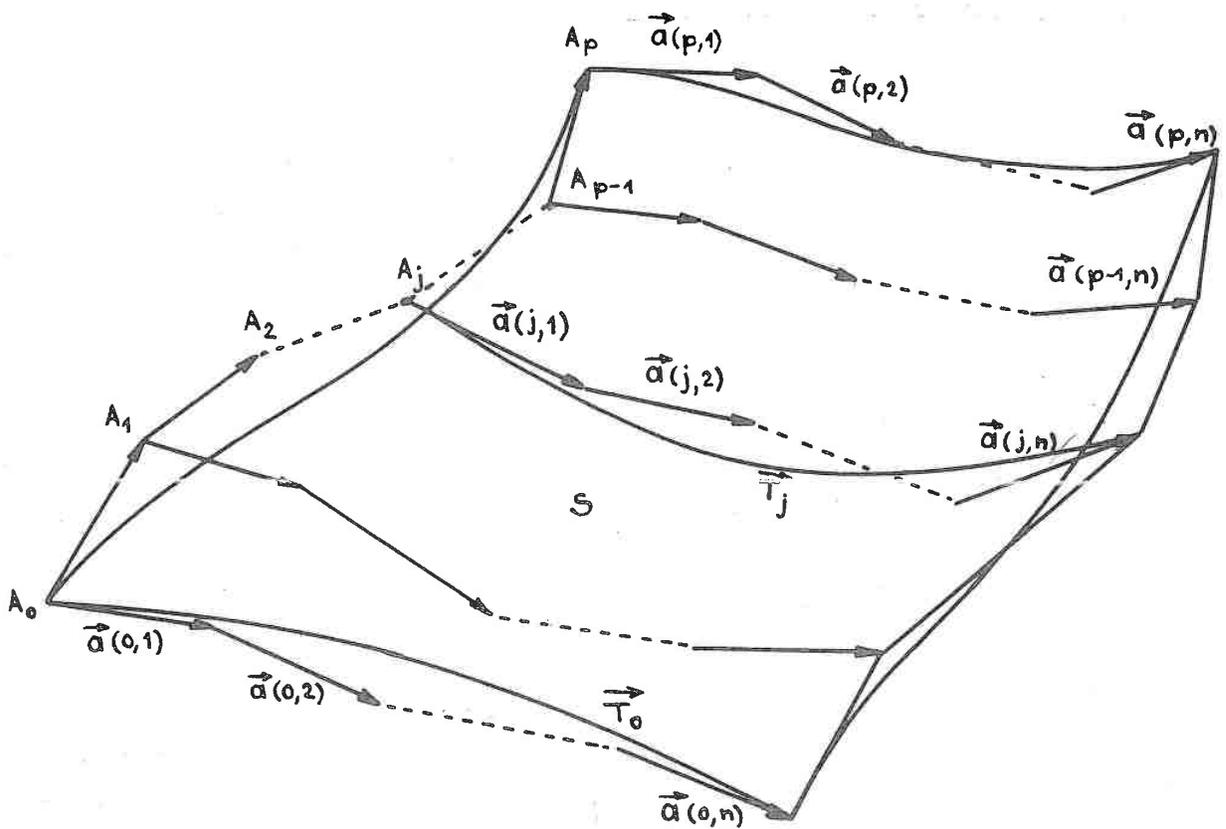


Fig 10

A une valeur donnée de  $r$  correspond un point  $A'_j$  sur chaque directrice  $\vec{T}_j$ , défini par le vecteur  $\vec{T}_j(r)$  issu du point  $A_j$ . Les  $p+1$  points  $A'_j$  constituent les sommets du polygone de la génératrice courante  $\vec{G}_r(\rho)$ , dont les vecteurs sont notés  $\vec{\alpha}'_j(r)$ , avec

$$(11.1) \quad \vec{\alpha}'_{j+1}(r) = \vec{T}_{j+1}(r) - \vec{T}_j(r) + \vec{\alpha}'_{j+1}, \text{ pour } j \text{ variant de } 0 \text{ à } p$$

$$(11.2) \quad \text{et} \quad \vec{T}_j(r) = \sum_{i=1}^n \vec{a}(j,i) \cdot f_{i,n}(r)$$

Ainsi le point P de la surface associé aux valeurs  $r$  et  $\rho$  des paramètres a pour expression

$$(11.3) \quad \vec{OP}(r, \rho) = \vec{A_0 A'_0} + \vec{G}_r(\rho) = \vec{A_0 A'_0} + \sum_{j=0}^p \vec{\alpha}'_{j+1}(r) \cdot \varphi_j(\rho)$$

$$(11.4) \quad \text{avec} \quad \varphi_j(\rho) = \sum_{k=j}^p x_{j,k} \cdot \rho^k \quad \text{et} \quad x_{j,k} = (-1)^{k-j} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{p}{(p-k)!(k-j)!(j-1)!}$$

comme on l'a vu dans le chapitre 7.

#### Construction des vecteurs $\vec{T}_j(r)$

L'expression des fonctions  $f_{i,n}(r)$  qui interviennent dans (11.2), identiques à (11.4) mais relatives au paramètre  $r$ , s'écrit sous forme matricielle :

$$(11.5) \quad f_{i,n}(r) = f(i,n) = [0, \dots, 0, x_{i,i}, \dots, x_{i,n}] \times \begin{bmatrix} r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^n \end{bmatrix}$$

On a alors pour  $\vec{T}_j(r)$

$$\vec{T}_j(r) = [\vec{a}(j,1), \vec{a}(j,2), \dots, \vec{a}(j,n)] \times \begin{bmatrix} f(1,n) \\ f(2,n) \\ \cdot \\ \cdot \\ f(n,n) \end{bmatrix}$$

d'où

$$\vec{T}_j(r) = [\vec{a}(j,1), \vec{a}(j,2), \dots, \vec{a}(j,n)] \times \begin{bmatrix} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n} \\ \cdot \\ x_{22}, \dots, x_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nn}, x_{nn} \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ r^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ r^n \end{bmatrix}$$

$$\vec{T}_j(r) = [\vec{a}(j,1), \vec{a}(j,2), \dots, \vec{a}(j,n)] \times [x_n] \times [r_n].$$

On en déduit le vecteur colonne  $\vec{T}$  composé de (p+1) éléments  $\vec{T}_j(r)$

$$(11.6) \quad \vec{T} = \begin{bmatrix} \vec{T}_0(r) \\ \vec{T}_1(r) \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{T}_p(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}(0,1), \vec{a}(0,2), \dots, \vec{a}(0,n) \\ \vec{a}(1,1), \vec{a}(1,2), \dots, \vec{a}(1,n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{a}(p,1), \vec{a}(p,2), \dots, \vec{a}(p,n) \end{bmatrix} \times [x_n] \times [r_n]$$

$$(11.7) \quad \text{noté } \vec{T} = [\vec{a}(j,i)] \times [x_n] \times [r_n]$$

Calcul des  $\vec{\alpha}'_j(r)$

Les expressions (11.1) et (11.7) permettent de calculer le vecteur de l'espace  $[\mathbb{R}^3]^p$  dont chaque composante est un vecteur  $\vec{\alpha}'_j(r)$  :

$$\vec{[\alpha']} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}'_1(r) \\ \vec{\alpha}'_2(r) \\ \vdots \\ \vec{\alpha}'_p(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\vec{a}(1,1) - \vec{a}(0,1)] , [\vec{a}(1,2) - \vec{a}(0,2)] , \dots , [\vec{a}(1,n) - \vec{a}(0,n)] \\ \text{-----} \\ [\vec{a}(j,i) - \vec{a}(j-1,i)] \\ \text{-----} \\ [\vec{a}(p,1) - \vec{a}(p-1,1)] , [\vec{a}(p,2) - \vec{a}(p-1,2)] , \dots , [\vec{a}(p,n) - \vec{a}(p-1,n)] \end{bmatrix} \times [x_m] \times [r_m] + [\vec{\alpha}]$$

$$(11.8) \quad \vec{[\alpha']} = [\vec{\delta}(j,i)] \times [x_m] \times [r_m] + [\vec{\alpha}]$$

$$(11.9) \quad \text{avec} \quad [\vec{\delta}(j,i)] = [\vec{a}(j,i)] - [\vec{a}(j-1,i)] \quad \text{et} \quad [\vec{\alpha}] \text{ désignant le vecteur de composantes } \vec{\alpha}'_j$$

Calcul de  $\sum_{j=0}^p \vec{\alpha}'_{j+1}(r) \cdot \varphi_j(r)$ .

Cette expression représente un vecteur de  $p+1$  composantes, noté  $\vec{[\alpha'']}$ , tel que

$$(11.10) \quad \vec{[\alpha'']} = [\rho_p]^T \times [x_p]^T \times [\vec{\alpha}']$$

Avec ces notations le point P de S a pour expression

$$(11.12) \quad \vec{OP}(r, \rho) = [\vec{a}(0,j)] \times [x_m] \times [r_m] + [\rho_p]^T \times [x_p]^T \times \{ [\vec{\delta}(j,i)] \times [x_m] \times [r_m] + [\vec{\alpha}] \}$$

En regroupant les termes on obtient

$$(11.13) \quad \vec{OP}(r, \rho) = [\rho_p]^T \times [x_p]^T \times \vec{A}_{p,m} \times [x_m] \times [r_m]$$

avec

$$(11.14) \quad [\rho_p] = \begin{bmatrix} 1 \\ \rho \\ \rho^2 \\ \vdots \\ \rho^p \end{bmatrix}, \quad [r_m] = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^m \end{bmatrix}, \quad \vec{A}_{p,m} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{a}(0,1) & \vec{a}(0,2) & \dots & \vec{a}(0,m) \\ \vec{\alpha}_1 & & & & \\ \vec{\alpha}_2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vec{\alpha}_p & & & & \end{bmatrix}$$

et  $[x_m]$  ou  $[x_p]$  désignant la matrice  $[X_m]^T$  ou  $[X_p]^T$  du chapitre 7, que l'on peut ainsi écrire d'une façon générale

$$(11.15) \quad [x_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & x_{11} & x_{12} & & & x_{1m} \\ & & & \dots & & \\ & & & x_{ii} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{im} \\ & 0 & & & & & & \\ & & & & & & & x_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } x_{11} = m, \quad x_{i,i} = \frac{m-i+1}{i} x_{i-1,i-1},$$

$$\text{et } x_{i,j} = -\frac{(j-1)(m-j+1)}{j(j-1)} x_{i,j-1}$$

XI-2 Expression des conditions de raccordement

En regroupant dans (11.13) les termes centraux selon

$$(11.16) \quad \vec{B}_{p,n} = [x_p]^T \times \vec{A}_{p,n} \times [x_n]$$

on obtient la matrice de  $p+1$  lignes et  $n+1$  colonnes dont l'élément  $\vec{b}_{i,j}$  de la  $i^{\text{ème}}$  colonne,  $j^{\text{ème}}$  ligne est le vecteur relatif à la puissance  $i$  du paramètre  $r$  et  $j$  du paramètre  $\rho$  qui apparaît dans l'expression (8.5)

$$\vec{OP} = \sum_{i=0, j=0}^{n, p} \vec{b}_{i,j} \cdot r^i \cdot \rho^j$$

Afin de mettre en évidence les termes de même puissance en  $r$ , donc les différentes colonnes de  $\vec{B}_{p,n}$ , on l'écrit :

$$(11.17) \quad \vec{B}_{p,n} = [\vec{B}_0, \vec{B}_1, \dots, \vec{B}_i, \dots, \vec{B}_n]$$

Les dérivées partielles première et seconde sont alors, pour  $r = 0$

$$(11.18) \quad \begin{aligned} \vec{T}_D &= \frac{\partial \vec{OP}}{\partial r} = [\rho]^T \times [\vec{B}_1] & \vec{T}_G &= \frac{\partial \vec{OP}}{\partial \rho} = [\rho']^T \times [\vec{B}_0] \\ \vec{\Gamma}_D &= \frac{\partial^2 \vec{OP}}{\partial r^2} = 2[\rho]^T \times [\vec{B}_2] & \vec{\Gamma}_G &= \frac{\partial^2 \vec{OP}}{\partial \rho^2} = [\rho'']^T \times [\vec{B}_0] \end{aligned}$$

$$\vec{\Omega} = [\rho']^T \times [\vec{B}_1]$$

avec  $[\rho']^T = [0, 1, 2\rho, 3\rho^2, \dots, p.\rho^{p-1}]$

et  $[\rho'']^T = [0, 0, 2, 6\rho, \dots, p.(p-1).\rho^{p-2}]$

Une surface  $S'$  étant caractérisée par une matrice

$$[\vec{B}'_{p,q}] = [\vec{B}'_0, \vec{B}'_1, \vec{B}'_2, \dots, \vec{B}'_q]$$

l'identité des vecteurs colonnes  $[\vec{B}'_0] = [\vec{B}_0]$  traduit que  $S$  et  $S'$  ont la génératrice  $\vec{G}_0(\rho)$  commune.

Le raccordement au premier ordre impose  $[\vec{B}'_1]$  dont les composantes  $\vec{b}'_{1j}$  sont données par (9.6) et le raccordement au deuxième ordre fournit les valeurs  $\vec{b}'_{2j}$  de  $[\vec{B}'_2]$  selon (10.8), ce qui détermine les 3 premières colonnes de  $[\vec{B}'_{p,q}]$  et donc les trois premières de  $[\vec{A}'_{p,q}]$  par

$$[\vec{A}'_0, \vec{A}'_1, \vec{A}'_2] = [x_\rho]^{-1} \times [\vec{B}'_0, \vec{B}'_1, \vec{B}'_2] \times [X]^{-1}$$

où  $[X]^{-1}$  représente la matrice composée des premiers éléments de  $[x_\rho]^{-1}$ , soit

$$[X]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/q & 1/q \\ 0 & 0 & 2/q.(q-1) \end{bmatrix}$$

ce qui détermine les vecteurs  $\alpha'_j$ ,  $a'(j,1)$ ,  $a'(j,2)$  pour  $j$  variant de 0 à  $f$ .

- EXEMPLES -

---

Le programme correspondant au formalisme précédent est donné en Annexe II pour des surfaces de degré 15 maximum en  $r$  ou en  $\rho$ . Les données d'entrée sont les coordonnées des points  $A_i$ , sommets des polygones caractéristiques de l'élément  $S$  et les  $j$  coefficients des polynômes  $h(\rho)$  et  $l(\rho)$ , ainsi que leur degré.

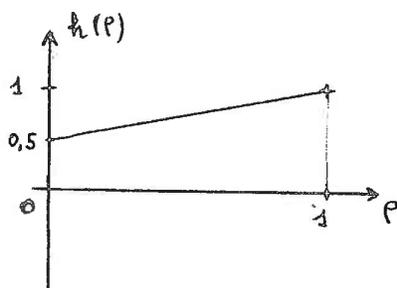
L'ordinateur fournit alors les coordonnées des trois premiers points  $A'_i$  des polygones des directrices de  $S'$  dont on pourrait déduire les composantes des vecteurs  $\vec{a}'_1$  et  $\vec{a}'_2$ .

Le sous-programme VERIF calcule les valeurs des rayons principaux de courbure relatifs à  $S$  et  $S'$  pour différentes valeurs de  $\rho$  le long de la génératrice commune  $G_o(\rho)$ .

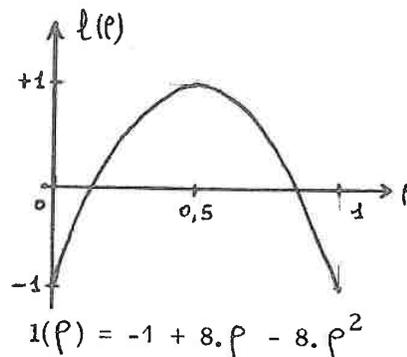
Pour ces essais, nous avons choisi deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , l'une à 3 côtés, l'autre à 4 côtés, représentées en perspectives figures 11 et 12, grâce à un programme de tracé, donné en Annexe III, écrit avec le souci de pouvoir l'intégrer facilement au programme précédent. Les coordonnées des points caractéristiques  $A'_i$  de ces surfaces sont indiqués dans les tableaux 4 et 5.

Pour chacune nous avons appliqué trois groupes de polynomes  $h(\rho)$  et  $l(\rho)$  :

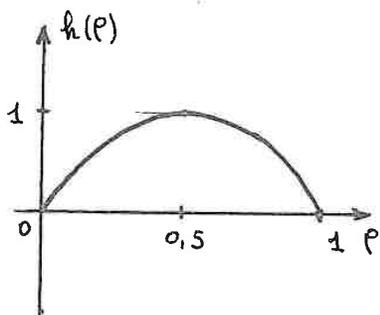
Groupe 1 :



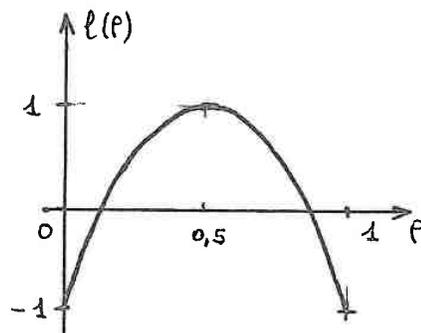
$$h(\rho) = 0,5 + 0,5\rho$$



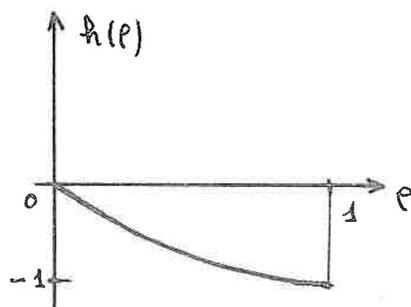
$$l(\rho) = -1 + 8.\rho - 8.\rho^2$$

Groupe 2 :

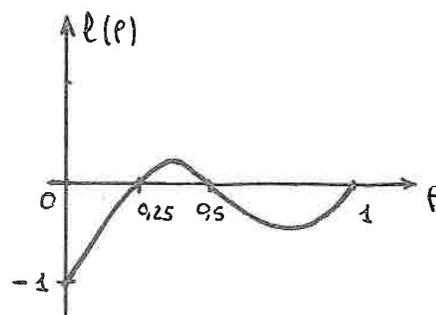
$$h(p) = 4p - 4p^2$$



$$l(p) = -1 + 8p - 8p^2$$

Groupe 3 :

$$h(p) = -p + 0.5p^2$$



$$l(p) = -1 + 7p - 14p^2 + 8p^3$$

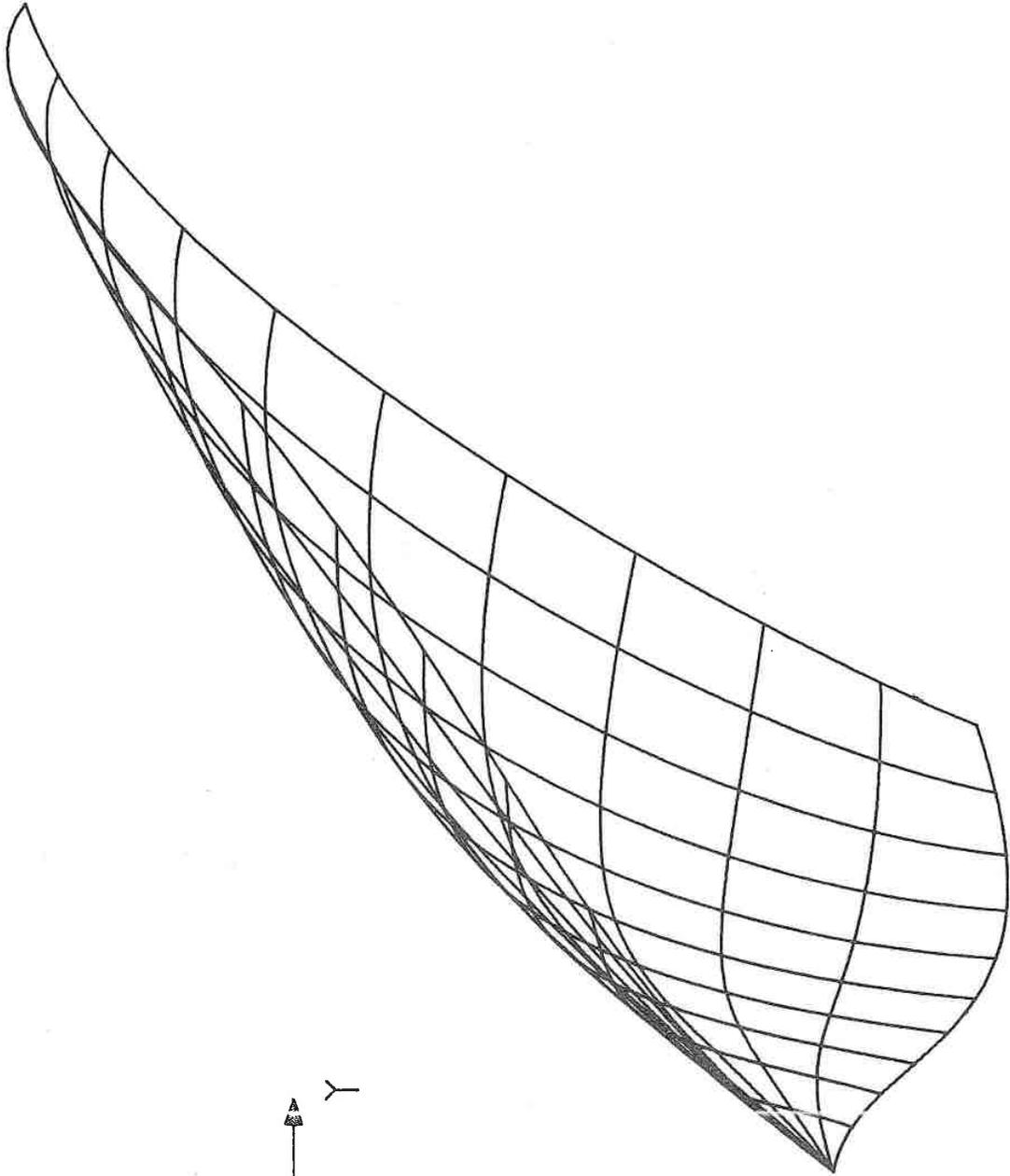
Les tableaux 6.1 , 6.2 , 6.3 et 8.1 , 8.2 , 8.3 donnent respectivement les coordonnées des premiers points  $A'_i$  des surfaces  $S'_1$  et  $S'_2$  , devant se raccorder au second ordre avec  $S_1$  et  $S_2$  , pour chaque groupe de lois de variation des projections de  $\vec{T}'_D$  sur  $\vec{T}'_G$  et  $\vec{T}'_D$  .

Les valeurs numériques des rayons principaux de courbure des surfaces  $S$  et  $S'$  ainsi obtenues, sont présentés dans les tableaux 7.1 , 7.2 , 7.3 pour  $S_1$  et 9.1 , 9.2 , 9.3 pour  $S_2$  .

On vérifie que les rayons de courbures sont de signes opposés lorsque  $\vec{T}_D$  et  $\vec{T}'_D$  sont de sens contraire ( $l(\rho)$  négatif) et que l'un des rayons principaux de courbure de  $S'$  s'annule lorsque  $l(\rho) = 0$ , comme c'est le cas avec le troisième groupe pour  $\rho = 0,5$  et  $\rho = 1$ .

Ces résultats numériques montrent que l'osculution entre  $S$  et  $S'$  est parfaitement réalisée aux erreurs de chute près, qui augmentent lorsque  $l(\rho)$  tend vers zéro.

\*\*\*



SURFACE UNISURF.

Figure 11 - Surface S<sub>1</sub>

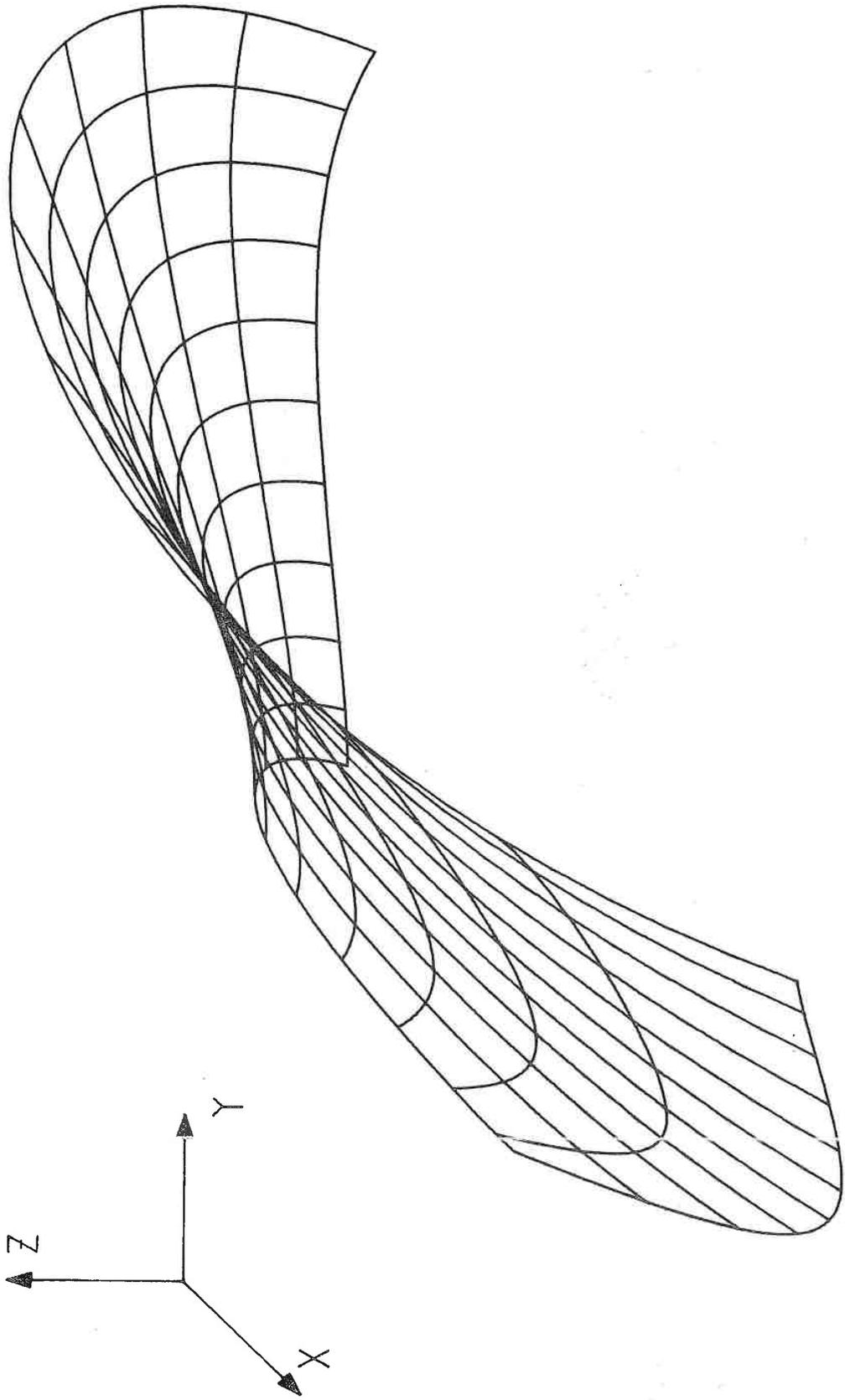


Figure 12 - Surface  $S_2$

SURFACE UNISURF.

SURFACE S<sub>1</sub>  
\*\*\*\*\*

N = 4 , P = 4

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 0, j):

.0000	2.0000	2.0000	-4.0000	-5.0000
.0000	-3.0000	-7.0000	-11.0000	-15.0000
.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 1, j):

.0000	-1.0000	-3.0000	-4.0000	-5.0000
2.0000	-5.0000	-11.0000	-8.0000	-15.0000
5.0000	7.0000	9.0000	5.0000	.0000

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 2, j):

-7.0000	-6.0000	-5.0000	-4.0000	-5.0000
4.0000	-4.0000	-7.0000	-10.0000	-15.0000
12.0000	14.0000	14.0000	8.0000	.0000

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 3, j):

-10.0000	-9.0000	-8.0000	-7.0000	-5.0000
7.0000	2.0000	-6.0000	-10.0000	-15.0000
15.0000	16.0000	10.0000	6.0000	.0000

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 4, j):

-12.0000	-10.0000	-7.0000	-6.0000	-5.0000
10.0000	7.0000	.0000	-7.0000	-15.0000
15.0000	20.0000	5.0000	10.0000	.0000

TABLEAU 4 -  
Coordonnées des points A<sub>j</sub> qui composent S<sub>1</sub>

SURFACE S<sub>2</sub>  
 \*\*\*\*\*

N = 4 , P = 4

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 0, J):

10.0000	2.0000	8.0000	40.0000	80.0000
45.0000	47.0000	45.0000	30.0000	40.0000
20.0000	34.0000	48.0000	65.0000	45.0000

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 1, J):

12.0000	9.0000	15.0000	44.0000	78.0000
38.0000	37.0000	32.0000	32.0000	35.0000
26.0000	37.0000	45.0000	55.0000	43.0000

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 2, J):

16.0000	13.0000	21.0000	48.0000	77.0000
30.0000	28.0000	22.0000	20.0000	22.0000
28.0000	37.0000	43.0000	46.0000	38.0000

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 3, J):

20.0000	17.0000	24.0000	52.0000	75.0000
17.0000	17.0000	17.0000	17.0000	17.0000
28.0000	34.0000	41.0000	41.0000	35.0000

POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A( 4, J):

20.0000	17.0000	24.0000	52.0000	52.0000
10.0000	10.0000	10.0000	10.0000	10.0000
28.0000	34.0000	41.0000	41.0000	41.0000

TABLEAU 5 -

Coordonnées des points A<sub>i</sub> qui composent S<sub>2</sub>

3

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A'(0, J)$ :

.000	-2.000	-3.750
.000	4.000	12.333
.000	2.500	2.833

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A'(1, J)$ :

.000	.188	-0.625
1.000	4.125	8.479
2.500	4.687	7.792

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A'(2, J)$ :

-1.500	-3.982	-10.509
2.000	-0.054	-8.107
5.429	9.804	15.473

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A'(3, J)$ :

-3.714	-7.054	-12.256
3.071	-3.670	-17.083
8.357	14.393	22.762

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A'(4, J)$ :

-6.057	-8.643	-7.851
4.257	-3.414	8.071
10.957	16.907	19.005

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A'(5, J)$ :

-8.143	-10.009	-9.554
5.571	1.036	-11.086
13.000	17.848	8.583

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A'(6, J)$ :

-9.786	-11.482	-9.705
7.000	7.304	14.321
14.357	18.482	8.152

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A'(7, J)$ :

-11.000	-12.750	-13.208
8.500	12.312	20.208
15.000	18.125	50.542

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A'(8, J)$ :

-12.000	-16.000	-20.667
10.000	16.000	12.667
15.000	10.000	-28.667

TABLEAU 6.1 - Points de  $S'_1$  obtenue avec le groupe 1

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A_i(0, J)$ :

.000	-2.000	-6.000
.000	3.000	5.000
.000	.000	.000

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A_i(1, J)$ :

.000	1.500	9.500
1.000	4.000	14.333
2.500	4.000	2.833

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A_i(2, J)$ :

-1.500	-4.571	-20.643
2.000	.357	-9.762
5.429	11.286	21.667

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A_i(3, J)$ :

-3.714	-9.071	-15.571
3.071	-2.857	-20.310
8.357	16.786	28.619

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A_i(4, J)$ :

-6.057	-10.514	-7.138
4.257	-2.400	14.319
10.957	18.714	17.386

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A_i(5, J)$ :

-8.143	-10.643	-10.762
5.571	1.857	-3.881
13.000	18.214	8.238

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A_i(6, J)$ :

-9.786	-10.857	-8.095
7.000	7.357	8.881
14.357	17.571	12.262

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A_i(7, J)$ :

-11.000	-11.500	-14.833
8.500	11.000	15.333
15.000	17.000	40.167

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS  $A_i(8, J)$ :

-12.000	-14.000	-15.000
10.000	13.000	12.000
15.000	10.000	-15.000

TABLEAU 6.2 - Points de  $S_1$  obtenus avec le groupe 2

DEGRE DE ( $S_1$ ): 10

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 0, J):

.000	-2.000	-6.000
.000	3.000	5.000
.000	.000	.000

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 1, J):

.000	.600	1.600
.800	3.100	5.533
2.000	.700	-.067

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 2, J):

-.933	-.422	.289
1.600	1.267	.578
4.267	3.100	1.533

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 3, J):

-2.433	-1.546	-1.083
2.433	.192	-2.456
6.600	5.508	4.711

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 4, J):

-4.200	-2.610	-1.158
3.324	.926	1.702
8.833	7.405	5.691

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 5, J):

-6.000	-4.054	-2.385
4.286	3.060	-2.397
10.833	8.990	6.362

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 6, J):

-7.667	-5.895	-3.584
5.324	5.450	7.563
12.500	10.555	8.481

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 7, J):

-9.100	-7.771	-6.033
6.433	7.108	8.492
13.767	12.000	11.192

TABLEAU 6.3 - Points de  $S'_1$  obtenue avec le groupe 3  
(début)

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 8, J):

-10.267	-9.378	-7.591
7.600	7.833	8.630
14.600	12.844	6.993

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 9, J):

-11.200	-10.650	-9.300
8.800	8.200	8.450
15.000	13.050	11.900

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A(10, J):

-12.000	-11.000	-9.750
10.000	8.500	7.000
15.000	15.000	14.250

VALEURS DES RAYONS DE COURBURE:  
\*\*\*\*\*

PREUR P0 VARIANT DE .10 A 1 AVEC UN PAS DE .10

R1=	R1'	D1=	R2=	R2'	D2=
286.2940712	-286.2940712	.8D-13	-4.9681624	4.9681624	.3D-14
-66.9243819	-66.9243819	.3D-13	-14.1581944	-14.1581944	.4D-14
-49.8881833	-49.8881833	.1D-14	-31.6053187	-31.6053187	.4D-14
-63.0516436	-63.0516436	.1D-13	-37.8950943	-37.8950943	.2D-14
-157.6229358	-157.6229358	.3D-13	-25.8495836	-25.8495836	.1D-13
214.5155556	214.5155556	.2D-12	-16.3276335	-16.3276335	.2D-13
37.4529988	37.4529988	.7D-13	-10.3191097	-10.3191097	.8D-13
12.6738887	12.6738887	.7D-12	-7.4080664	-7.4080664	.8D-12
-7.7693162	7.7693162	.1D-11	5.7297568	-5.7297568	.9D-12
-17.8521167	17.8521167	.2D-12	4.1204198	-4.1204198	.1D-12

TABLEAU 7.1 - Valeurs des rayons principaux  
de courbure de  $S_1$  et  $S'_1$ , obtenue  
avec le groupe 1.

VALEURS DES RAYONS DE COURBURE:  
 \*\*\*\*\*

POUR 24 VARIANT DE .10 A 1 AVEC UN PAS DE: .10

R1=	R1'=	D1=	R2=	R2'=	D2=
286.2940712	-286.2940712	.2D-13	-4.9681624	4.9681624	.1D-14
-66.9243819	-66.9243819	.1D-12	-14.1581944	-14.1581944	.7D-14
-49.8881833	-49.8881833	.4D-14	-31.6053187	-31.6053187	.6D-14
-63.0516436	-63.0516436	.3D-14	-37.8950943	-37.8950943	.4D-14
-157.6229358	-157.6229358	.7D-13	-25.8495836	-25.8495836	.3D-14
214.5156556	214.5156556	.2D-12	-16.3276335	-16.3276335	.3D-14
37.4529988	37.4529988	.1D-12	-10.3191097	-10.3191097	.8D-13
12.6738887	12.6738887	.7D-12	-7.4080664	-7.4080664	.7D-12
-7.7693162	7.7693162	.9D-12	5.7297568	-5.7297568	.5D-12
-17.8521167	17.8521167	.3D-13	4.1204198	-4.1204198	.1D-13

TABLEAU 7.2 - Valeurs des rayons principaux  
 de courbure de  $S_1$  et  $S'_1$ , obtenue  
 avec le groupe 2.

VALEURS DES RAYONS DE COURBURE:  
 \*\*\*\*\*

POUR R0 VARIANT DE \*10 A 1 AVEC UN PAS DE: \*10

R1=	R1'	D1=	R2=	R2'	O2=
286.2940712	-286.2940712	.2D-14	-4.9681624	4.9681624	.5D-15
-66.9243819	66.9243819	.6D-13	-14.1581944	14.1581944	.1D-14
-49.8881833	-49.8881833	.8D-12	-31.6053187	-31.6053187	.2D-12
-63.0516436	-63.0516436	.3D-12	-37.8950943	-37.8950943	.3D-12
-157.6229358	84.0563559	.5D 00	-25.8495836	*.0000000	.1D 01
214.5156556	-214.5156556	.4D-11	-16.3276335	16.3276335	.1D-11
37.4529988	-37.4529988	.1D-11	-10.3191097	10.3191097	.7D-12
12.6738887	-12.6738887	.1D-11	-7.4080664	7.4080664	.9D-12
-7.7693162	7.7693162	.8D-11	5.7297568	-5.7297568	.6D-11
-17.8521167	-4.9384544	.7D 00	4.1204198	*.0000000	.1D 01

TABLEAU 7.3 - Valeurs des rayons principaux  
 de courbure de  $S_1$  et  $S'_1$ , obtenue  
 avec le groupe 3.

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 0, J):

10.000	19.000	35.833
45.000	39.500	33.750
20.000	9.000	1.000

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 1, J):

11.000	10.000	-5.333
41.500	38.875	39.188
23.000	27.125	28.625

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 2, J):

12.429	10.500	19.214
37.786	33.339	25.429
25.143	36.643	48.714

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 3, J):

14.143	12.786	22.536
33.571	25.991	9.696
26.571	40.464	44.179

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 4, J):

15.971	14.886	37.531
28.786	19.421	-1.161
27.429	39.814	36.371

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 5, J):

17.714	17.000	26.940
23.571	14.286	12.188
27.857	36.232	43.661

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 6, J):

19.143	19.357	16.964
18.286	9.589	2.696
28.000	31.857	31.429

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 7, J):

20.000	21.500	10.500
13.500	4.687	-3.625
28.000	28.000	29.500

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 8, J):

20.000	23.000	32.000
10.000	3.000	2.000
28.000	22.000	17.000

TABLEAU 8.1 - Points de  $S'_2$  obtenus avec le groupe 1.

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 0, J):

10.000	18.000	40.000
45.000	43.000	37.000
20.000	6.000	-8.000

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 1, J):

11.000	9.500	-15.167
41.500	39.500	45.500
23.000	27.500	34.500

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 2, J):

12.429	11.071	26.310
37.786	31.929	21.500
25.143	37.929	49.500

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 3, J):

14.143	14.214	28.190
33.571	22.714	-3.286
26.571	41.429	41.786

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 4, J):

15.971	16.414	38.781
28.786	15.214	-9.386
27.429	40.114	30.700

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 5, J):

17.714	17.714	26.929
23.571	11.214	10.571
27.857	36.071	41.857

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 6, J):

19.143	18.714	14.786
18.286	10.143	2.286
28.000	31.643	37.714

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 7, J):

20.000	20.000	10.000
13.500	10.000	6.500
28.000	28.000	27.000

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 8, J):

20.000	23.000	36.000
10.000	10.000	10.000
28.000	22.000	17.000

TABLEAU 8.2 - Points de  $S_2^1$  obtenue avec le groupe 2.

DEGRE DE ( $S'_2$ ): 10

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 0, J):

10.000	18.000	40.000
45.000	43.000	37.000
20.000	6.000	-8.000

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 1, J):

10.800	11.000	4.933
42.200	43.500	45.600
22.400	18.800	13.200

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 2, J):

11.867	10.422	10.489
39.267	41.100	43.356
24.267	25.044	27.378

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 3, J):

13.133	11.492	9.111
36.067	37.954	39.750
25.667	27.450	28.400

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 4, J):

14.524	12.871	13.221
32.538	35.093	36.608
26.667	27.595	28.124

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 5, J):

15.952	14.456	11.354
28.690	32.444	37.137
27.333	26.722	27.726

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 6, J):

17.324	16.262	14.467
24.605	29.410	32.714
27.733	25.833	22.114

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A'( 7, J):

18.533	18.075	18.283
20.433	25.588	31.167
27.933	25.483	21.850

TABLEAU 8.3 - (Début) Points de  $S'_2$  obtenue avec le groupe 3.

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 8, J):

18.467	19.533	21.033
16.400	21.256	27.061
28.000	25.667	22.533

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A( 9, J):

20.000	20.300	19.800
12.200	17.200	22.550
28.000	26.200	24.300

POINTS QUI COMPOSENT LES PREMIERS VECTEURS A(10, J):

20.000	20.000	19.000
10.000	13.500	18.500
28.000	28.000	28.000

VALEURS DES RAYONS DE COURBURE:  
 \*\*\*\*\*

POUR R0 VARIANT DE .10 A 1 AVEC UN PAS DE .10

R1=	R1'	D1=	R2=	R2'	D2=
107.4902921	-107.4902921	.3D=14	-36.5342840	36.5342840	.8D=14
94.8940733	94.8940733	.2D=14	-31.3534156	-31.3534156	.8D=15
91.1654206	91.1654206	.2D=15	-25.7039654	-25.7039654	.2D=14
90.2156111	90.2156111	.1D=15	-20.3552883	-20.3552883	.1D=14
88.5428381	88.5428381	.9D=15	-15.8199267	-15.8199267	.2D=15
83.5470878	83.5470878	.5D=15	-12.2561964	-12.2561964	.3D=13
73.3348520	73.3348520	.1D=14	-9.6230964	-9.6230964	.5D=13
57.3653690	57.3653690	.2D=13	-7.8185188	-7.8185188	.7D=13
37.4576049	-37.4576049	.8D=14	-6.7525341	6.7525341	.3D=12
2.8447921	-18.2612218	.1D 00	-6.3887656	6.3887656	.8D=13

TABLEAU 9.1 - Valeurs des rayons principaux  
 de courbure de  $S_2$  et  $S'_2$  obtenue  
 avec le groupe 1.

VALEURS DES RAYONS DE COURBURE:  
 \*\*\*\*\*

POUR R9 VARIANT DE .10 A 1 AVEC UN PAS DE: .10

R1=	R1'	D1=	R2=	R2'	D2=
107.4902521	-107.4902921	.10-14	-36.5342840	36.5342840	.30-15
94.8940733	94.8940733	.40-15	-31.3534156	-31.3534156	.10-13
91.1654206	91.1654206	.20-15	-25.7039654	-25.7039654	.40-15
90.2156111	90.2156111	.20-15	-20.3552883	-20.3552883	.50-14
88.5428381	88.5428381	.90-15	-15.8199267	-15.8199267	.90-14
83.5470878	83.5470878	.30-15	-12.2561964	-12.2561964	.10-13
73.3348520	73.3348520	.20-14	-9.6230964	-9.6230964	.20-13
57.3653690	57.3653690	.40-14	-7.8185188	-7.8185188	.30-12
37.4576049	-37.4576049	.50-14	-6.7525341	6.7525341	.50-12
27.8447921	-18.2631801	.10 00	-6.3887657	6.3887657	.20-12

TABLEAU 9.2 - Valeurs des rayons principaux  
 de courbure de  $S_2$  et  $S'_2$  obtenue  
 avec le groupe 2.

VALEURS DES RAYONS DE COURBURE:  
 \*\*\*\*\*

POUR RA VARIANT DE .10 A 1 AVEC UN PAS DE .10

R1=	R1'=	D1=	R2=	R2'=	D2=
107.4902921	-107.4902921	.50=15	-36.5342840	36.5342840	.10=15
94.8940733	-94.8940733	.10=13	-31.3534156	31.3534156	.80=13
91.1654206	91.1654206	.10=13	-25.7039654	-25.7039654	.80=12
90.2156111	90.2156111	.20=14	-20.3552883	-20.3552883	.10=11
88.5428381	1054.4547262	.10=02	-15.8199267	.0000000	.10=01
83.5470878	-83.5470878	.20=13	-12.2561964	12.2561964	.30=11
73.3348520	-73.3348520	.20=13	-9.6230964	9.6230964	.10=11
57.3653690	-57.3653690	.50=13	-7.8185188	7.8185188	.30=11
37.4576049	-37.4576049	.80=14	-6.7525341	6.7525341	.70=12
20.8447921	-22.7560056	.90=01	-6.3887656	.0000000	.10=01

TABLEAU 9.3 - Valeurs des rayons principaux  
 de courbure de  $S_2$  et  $S'_2$  obtenue  
 avec le groupe 3.

\*\*\*\*\*  
 \* CONCLUSION \*  
 \*\*\*\*\*

Le procédé Unisurf apporte, par l'emploi de vecteurs dont la signification géométrique est particulièrement claire, une représentation schématique très condensée spécialement intéressante pour la création et la définition numérique de courbes et de surfaces paramétriques. Ainsi un élément de surface est caractérisé par un nombre limité de points  $A_j$ , sommets des polygones caractéristiques formés des vecteurs  $\vec{\alpha}_j$  et  $\vec{a}_j$ .

Entre les points extrêmes qui seuls appartiennent à la surface, les fonctions de Bézier assurent une interpolation modulée, en quelque sorte, par les points intermédiaires qui cependant ne constituent pas des points de passage obligés.

Après avoir établi les conditions sur les dérivées partielles premières et secondes pour assurer l'identité des indicatrices de courbure de deux surfaces biparamétriques  $S$  et  $S'$ , nous avons appliqué ces résultats dans le cas de la définition Unisurf pour établir leur condition de raccordement au deuxième ordre.

Sous cette forme Unisurf, même en ne considérant que deux éléments de même degré suivant le paramètre  $\rho$ , les calculs effectués dans la première partie avec les vecteurs  $\vec{\alpha}_j$  et  $\vec{a}_j$  sont longs et laborieux. Les propriétés des fonctions de Bézier et de leurs dérivées successives pour la valeur zéro du paramètre  $r$  éliminent dans le développement limité de la surface les vecteurs  $\vec{a}_j$  d'indice  $i > 2$ .

Les conditions de raccordement imposent ainsi les premiers vecteurs de  $S'$ ,  $\vec{a}'_1$  et  $\vec{a}'_2$ , qui dépendent respectivement de 3 et 8 vecteurs de  $S$  par l'intermédiaire de coefficients assez peu maniables. La solution correspond à une variation linéaire en  $\rho$  de la projection de la dérivée partielle  $\vec{T}'_p$  de  $S'$  par rapport à  $r$  sur la dérivée partielle  $\vec{T}_e$  de  $S$  par rapport à  $\rho$ , ce qui n'offre que des possibilités limitées pour le choix de la forme du carreau  $S'$ .

La mise en évidence, dans la deuxième partie, des puissances successives des paramètres  $r$  et  $\rho$  nous a conduit pour la surface à l'expression très générale

$$\vec{OP} = \sum_{i=0, j=0}^{n, p} \vec{b}_{i,j} \cdot r^i \cdot \rho^j$$

où les vecteurs  $\vec{b}_{i,j}$ , sans alors aucune signification géométrique, forment les éléments d'une matrice  $[\vec{B}_{i,j}]$  dont chaque colonne d'indice  $i$  est composée des  $p+1$  vecteurs en facteur du terme  $r^i$ . L'élément de surface  $S'$  étant caractérisé par une matrice analogue  $[\vec{B}'_{i,j}]$ , le raccordement à un degré donné avec  $S$  en détermine un nombre fini de colonnes. Le contact entre  $S$  et  $S'$  se traduit ainsi par l'identité des premières colonnes  $[\vec{B}_{0,j}] = [\vec{B}'_{0,j}]$ , tandis que les raccordements tangentiel et au deuxième ordre imposent successivement  $[\vec{B}'_{1,j}]$  et  $[\vec{B}'_{2,j}]$ .

Nous obtenons ainsi des conditions généralisées de raccordement entre deux surfaces biparamétriques quels que soient les degrés en  $\rho$  de  $S$  et  $S'$  et pour toute loi polynomiale de variation des projections

de  $\vec{T}_D'$  sur  $\vec{T}_C$  et  $\vec{T}_D$ . Ces résultats offrent donc des possibilités illimitées pour la forme à donner au carreau  $S'$ , toute fonction étant approchée par un polynôme.

On peut envisager une généralisation du raccordement à l'ordre  $m > 2$  qui fournirait la  $m^{\text{ième}}$  colonne de  $[\vec{B}'_{i,j}]$  dans la mesure où la relation

$$[\vec{B}'_{m,j}] = f [\vec{B}_{0,j}; \vec{B}_{1,j}; \dots; \vec{B}_{m,j}]$$

serait connue.

Bien que ce cas n'ait que peu de chances de se présenter industriellement dans un avenir proche, il entre dans les préoccupations du CUCN et du LEA de l'examiner de manière approfondie, et de résoudre le problème des erreurs de chute dues au degré de plus en plus élevé des expressions polynomiâles intervenant dans les calculs. Par ailleurs, il faudra envisager une extension aux expressions Unisurf triparamétriques où le troisième paramètre pourra par exemple tenir compte du rayon de l'outil ou de son inclinaison pour l'usinage des surfaces sur Machines outils à Commande Numérique.

\* \* \*  
\*

## BIBLIOGRAPHIE

\* \* \* \*

- [ 1 ] S. A. COONS - Surfaces for computer - aided design of space Forms  
MIT. Project MAC, MAC TR 41, June 67.
- [ 2 ] P. BEZIER - Procédé de définition numérique des courbes et surfaces  
non mathématiques - Système Unisurf,  
Automatisme - Dunod - Tome XIII n° 5- mai 1968 -  
p. 189-196.
- [ 3 ] P. BEZIER - Emploi des machines à Commande Numérique.  
Masson et Cie - Eyrolles - Paris 1970 - p. 115-130  
et p. 157-176.
- [ 4 ] P. BEZIER - Numerical control - Mathematics and applications.  
Wiley (G. B.) 1972.
- [ 5 ] R. FORREST - Définition des Surfaces - Ingénieurs de l'automobile -  
XL IV, 10, 1971, p. 521-527.
- [ 6 ] B. CHEMLA - Système conversationnel de détermination mathématique  
de courbes et surfaces - thèse de 3ème cycle -  
Université Paris VII - Novembre 1971.
- [ 7 ] M. VERON - J. P. MUSSE - Génération numérique de courbes -  
Mécanique - matériaux - électricité - n° 270-271 -  
1972 - p. 16-19.
- [ 8 ] R. FORREST - Interpolation and approximation by Bézier Polyno-  
miale - Cambridge University (G. B.) C. A. D.  
Group document N° 45 , octobre 1970.
- [ 9 ] GOURSAT - Analyse mathématique - Gauthier Villars -  
tome I; 1933 ; p. 588-602.
- [ 10 ] D. VERNET - Expression mathématique des formes - Système  
Unisurf - Ingénieurs de l'automobile , XLIV, 10, 1971,  
p. 509-520.
-

## RACCORDEMENT DE DEUX SURFACES UNISURF.

```

1:      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
2:      COMMON /THVE/F(10),P
3:      DIMENSION T(100,2),TP(100,2)
4:      INTEGER P,Q
5:      DOUBLE PRECISION KAK,LDA,LDD,MU
6:      DIMENSION ALPHA(3,2,10),A(2,3,2,11),APRIM(2,3,2,11),D(3),R(4)
7:      READ(105,1000) N,P,Q
8:      READ(105,1001) LDA,MU,PAS
9:      READ(105,1002) ((ALPHA(I,1,K),I=1,3),K=1,P+1)
10:     READ(105,1003) (((A(I,J,2,K),J=1,3),I=1,2),K=1,P+1)
11:     DO6 J=1,P
12:     DO6 I=1,3
13:     6 ALPHA(I,2,J)=ALPHA(I,1,J+1)-ALPHA(I,1,J)
14:     DO7 J=1,P+1
15:     DO7 I=1,3
16:     7 A(1,I,1,J)=ALPHA(I,1,J)+A(1,I,2,J)
17:     DO8 J=1,P+1
18:     DO8 I=1,3
19:     * A(2,I,1,J)=A(1,I,1,J)+A(2,I,2,J)
20:     C-----CONSTRUCTION DES A PRIME(1,J)
21:     BB=MU*N/Q
22:     AB=LDA*P/Q
23:     DO1 I=1,3
24:     APRIM(1,I,2,1)=AB*ALPHA(I,2,1)+BB*A(1,I,2,1)
25:     1 APRIM(1,I,1,1)=ALPHA(I,1,1)+APRIM(1,I,2,1)
26:     DO2 K=2,P+1
27:     DO2 I=1,3
28:     APRIM(1,I,2,K)=(K-1)/P*AB*ALPHA(I,2,K-1)+(P-K+1)/P*AB*ALPHA(I,2,
29:     1K)+BB*A(1,I,2,K)
30:     2 APRIM(1,I,1,K)=ALPHA(I,1,K)+APRIM(1,I,2,K)
31:     C-----CONSTRUCTION DES A PRIME(2,J)
32:     C1=BB**2*Q*(N-1)/N/(Q-1)
33:     C2=2*LDA*BB/(Q-1)
34:     C3=BB-C1
35:     C4=LDA**2/(Q-1)/Q
36:     C5=LDA/P
37:     DO3 J=1,P+1
38:     D(3)=C2*(P-J+1)
39:     D(2)=C3+C2*(2*J-2-P)
40:     D(1)=-C2*(J-1)
41:     R(4)=C4*(P-J+1)*(P-J)
42:     R(3)=(P-J+1)*(C4*(3*J-2-P)+C5)
43:     R(2)=(J-1)*(C4*(3*J-4-2*P)+C5)
44:     R(1)=-C4*(J-2)*(J-1)
45:     DO3 I=1,3
46:     C-----CALCUL DES BI ALPHA K
47:     BIJ=0
48:     DO4 K=1,4
49:     IF(J+K-3.LE.0.OR.J+K-3.GT.P)GO TO 4
50:     BIJ=BIJ+R(K)*ALPHA(I,2,J+K-3)
51:     4 CONTINUE
52:     C-----CALCUL DES D(J,A,1,K)
53:     DIJ=0
54:     DO5 K=1,3
55:     IF(J+K-2.LE.0.OR.J+K-2.GT.P+1)GO TO 5
56:     DIJ=DIJ+D(K)*A(1,I,2,J+K-2)
57:     5 CONTINUE
58:     C-----CALCUL DE K,J A,2,J
59:     KAK=C1*A(2,1,2,J)

```

## RACCORDEMENT DE DEUX SURFACES UNISURF.

```

60: C----FINALEMENT
61:   APRIM(2,I,2,J)=BJK+DJK+KAK
62:   3 APRIM(2,I,1,J)=APRIM(1,I,1,J)+APRIM(2,I,2,J)
63:   WRITE(108,200)
64:   WRITE(108,107) LDA,MU,PAS,N,P,Q
65:   WRITE(108,100)
66:   WRITE(108,101)((ALPHA(I,J,K),I=1,3),J=1,2),K=1,P)
67:   WRITE(108,102)
68:   WRITE(108,101)((A(1,I,J,K),I=1,3),J=1,2),K=1,P+1)
69:   WRITE(108,103)
70:   WRITE(108,101)((A(2,I,J,K),I=1,3),J=1,2),K=1,P+1)
71:   WRITE(108,104)
72:   WRITE(108,105)
73:   WRITE(108,101)((APRIM(1,I,J,K),I=1,3),J=1,2),K=1,P+1)
74:   WRITE(108,106)
75:   WRITE(108,101)((APRIM(2,I,J,K),I=1,3),J=1,2),K=1,P+1)
76:   F(1)=1
77:   DO9 I=2,10
78:   9 F(I)=I*F(I-1)
79:   CALL VERIF(A,ALPHA,T,PAS,N)
80:   CALL VERIF(APRIM,ALPHA,TP,PAS,Q)
81:   M=1/PAS
82:   WRITE(108,152)PAS,PAS
83:   WRITE(108,151)
84:   DO10 I=1,M
85:   AA=DABS(T(I,1))-DARS(TP(I,1))
86:   BB=DABS(T(I,2))-DARS(TP(I,2))
87:   WRITE(108,150) T(I,1),TP(I,1),AA,T(I,2),TP(I,2),BB
88:   10 CONTINUE
89:   STOP
90:   100 FORMAT(//20X,$@BRIGINE DES 'ALPHA'.$,31X,$@COMPONENTES DES 'ALPHA'$.
91:   1$/)
92:   101 FORMAT(25X,$X0$,12X,$Y0$,12X,$Z0$,20X,$X$,13X,$Y$,13X,$Z$/
93:   111(20X,3(F10.4,4X),8X,3(F10.4,4X)/))
94:   102 FORMAT(//20X,$@EXTREMITES DES A(1,I)$.,$,27X,$@COMPONENTES DES A(1,
95:   1I)$.$/)
96:   103 FORMAT(//20X,$@EXTREMITES DES A(2,I)$.,$,27X,$@COMPONENTES DES A(2,
97:   1I)$.$/)
98:   104 FORMAT(1H1,5/5X$RESULTATS$/5X,9(1H*)/
99:   145X,$VECTEURS DE LA SURFACE S'$.$/45X,26(1H*)/)
100:   105 FORMAT(//20X,$@EXTREMITES DES A'(1,I)$.,$,26X,$@COMPONENTES DES A'(1,I)
101:   1.$/)
102:   106 FORMAT(///20X,$@EXTREMITES DES A'(2,I)$.,$,26X,$@COMPONENTES DES A'(2,
103:   1I)$.$/)
104:   107 FORMAT(20X,$LDA=$,F5.2,22X,$MU=$,F5.2,22X,$PAS=$,F5.2//20X,$N=$,I3
105:   1,26X,$P=$,I3,26X,$Q=$,I3//)
106:   150 FORMAT((12X,2(2(F15.9,3X),D7.1,3X)/))
107:   151 FORMAT(15X,$ R1=$,13X,$ R1'=$,11X,$D1=$,10X,$ R2=$,11X,$ R2'=$
108:   1,10X,$D2=$/)
109:   152 FORMAT(1H1,5/45X,$VALEURS DES RAYONS DE COURBURE:$/45X,31(1H*)//
110:   130X,$@R0 VARIANT DE $,F3.2,$ A 1 AVEC UN PAS DE:$/F5.2//)
111:   200 FORMAT($1$,//45X,$VECTEURS DE LA SURFACE S'$/45X,25(1H*)/)
112:   1000 FORMAT(3I)
113:   1001 FORMAT(3D)
114:   1002 FORMAT(3D)
115:   1003 FORMAT(6D)
116:   END

```

```

1:      SUBROUTINE   VERIF(A,ALPHA,T,PAS,L)
2:      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-7)
3:      COMMON /THVE/F(10),P
4:      DIMENSION ALPHA(3,2,10),A(2,3,2,11)
5:      INTEGER P
6:      DIMENSION TG(3),TD(3),GMAG(3),GMAD(3),BMGA(3),T(100,2)
7:      DOUBLE PRECISION N(3),K1,K2,N2
8:      PHI=0
9:      M=1/PAS
10:     DO1 I=1,M
11:     PHI=PHI+PAS
12:     DO2 J=1,3
13:     2 TG(J)=TD(J)=GMAG(J)=GMAD(J)=BMGA(J)=N(J)=0
14:     DO3 J=1,P
15:     DO3 K=1,3
16:     TG(K)=ALPHA(K,2,J)*P*CB(P-1,J-1) *PHI**(J-1)*(1-PHI)**(P
17:     1-J)+TG(K)
18:     GMAG(K)=GMAG(K)+ALPHA(K,2,J)*P*CB(P-1,J-1) *PHI**(J-2)*(1-
19:     1PHI)**(P-J-1)*(J-1+PHI=PHI*P)
20:     3 CONTINUE
21:     DO4 J=1,P+1
22:     DO4 K=1,3
23:     TD(K)=TD(K)+A(1,K,2,J)*CB(P,J-1) *PHI**(J-1)*(1-PHI)**(P
24:     1-J+1)
25:     GMAD(K)=GMAD(K)+(A(2,K,2,J)-A(1,K,2,J))*CB(P,J-1) *PHI**
26:     1(J-1)*(1-PHI)**(P-J+1)
27:     IF(J.EQ.P+1) GO TO 23
28:     BMGA(K)=BMGA(K)+A(1,K,2,J)*P*CB(P-1,J-1) *PHI**(J-2)*(1-PH
29:     1I)**(P-J)*((J-1)*(1-PHI) / (P-1+1)=PHI)
30:     4 CONTINUE
31:     DO5 K=1,3
32:     TD(K)=L*TD(K)
33:     GMAD(K)=L*(L-1)*GMAD(K)
34:     5 BMGA(K)=L*BMGA(K)
35:     CALL PVECT(TG,TD,N(1),N(2),N(3),N2)
36:     CALL PSCAL(TG,TG,E)
37:     CALL PSCAL(TG,TD,FF)
38:     CALL PSCAL(TD,TD,G)
39:     CALL PSCAL(N,GMAG,D)
40:     CALL PSCAL(N,BMGA,DP)
41:     CALL PSCAL(N,GMAD,DPP)
42:     AA=DP*G-DPP*FF
43:     B=D*G-DPP*E
44:     C=D*FF-DP*E
45:     DLTA=B**2-4*AA*C
46:     RAC=DSQRT(DLTA)
47:     K1=(-B+RAC)/2/AA
48:     K2=(-B-RAC)/2/AA
49:     P1=(D+2*DP*K1+DPP*K1*K1)/(E+2*FF*K1+G*K1*K1)/N2
50:     P2=(D+2*DP*K2+DPP*K2*K2)/(E+2*FF*K2+G*K2*K2)/N2
51:     P3=DABS(P1)
52:     P4=DABS(P2)
53:     IF(P3.GT.P4) T(I,1)=1/P2,T(I,2)=1/P1,GO TO 1
54:     T(I,1)=1/P1
55:     T(I,2)=1/P2
56:     1 CONTINUE
57:     RETURN
58:     23 BMGA(K)=BMGA(K)+A(1,K,2,J)*P*PHI**(P-1)
59:     GO TO 4
60:     END

```

## RACCORDEMENT DE DEUX SURFACES UNISURF.

```
1: SUBROUTINE PVECT(V1,V2,X,Y,Z,RP)
2: IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,9-7)
3: DIMENSION V1(3),V2(3)
4: X=V1(2)*V2(3)-V1(3)*V2(2)
5: Y=V1(3)*V2(1)-V1(1)*V2(3)
6: Z=V1(1)*V2(2)-V1(2)*V2(1)
7: A2=Y*X+Y*Y+Z*Z
8: A2=Y*X+Y*Y+Z*Z
9: R2=DSQRT(A2)
10: RETURN
11: END
```

## RACCORDEMENT DE DEUX SURFACES UNISURF.

```
1: SUBROUTINE PSCAL(V1,V2,R)
2: IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,9-7)
3: DIMENSION V1(3),V2(3)
4: R=V1(1)*V2(1)+V1(2)*V2(2)+V1(3)*V2(3)
5: RETURN
6: END
```

## RACCORDEMENT DE DEUX SURFACES UNISURF.

```
1: DOUBLE PRECISION FUNCTION CB(IN,IP)
2: IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,9-7)
3: COMMON /THVE/F(10),P
4: IF(IP.EQ.0.OR.IN.EQ.IP) GO TO 1
5: CB=F(IN)/F(IP)/F(IN-IP)
6: RETURN
7: 1 CB=1
8: RETURN
9: END
```

```

1:      SUBROUTINE ESSAI
2:      C-DECLARATION.
3:      COMMON/THEVE/AR(0:15,0:15)
4:      INTEGER E,P,Q,H,H2
5:      DIMENSION PT(3,0:15,0:15),PPT(3,0:15,0:15)
6:      DIMENSION AA(3,0:15,0:15),B(3,0:15,0:15)
7:      DIMENSION AC(0:15,0:15),ABP(0:15,0:15),ACP(0:15,0:15)
8:      DIMENSION TD(0:15),TG(0:15),GAMD(0:15),GAMG(0:15),GMGA(0:15)
9:      DIMENSION CP(0:15,0:15),CN(0:15,0:15),CNT(0:15,0:15)
10:     DIMENSION CEI(0:15,0:15),CORI(0:2,0:2),CET(0:15,0:15)
11:     DIMENSION AH(0:15),EL(0:15),EL2(0:15),AH2(0:15),HL(0:15)
12:     DIMENSION ATG(0:15),ATD(0:15)
13:     DIMENSION G2(0:15),D2(0:15),B2(0:15)
14:     DIMENSION AP(3,0:15,0:15),T(30,2),TP(30,2)
15:     C-LECTURE DES POINTS QUI COMPOSENT LA SURFACE (S).
16:     READ(105,1)N,P
17:     1  FORMAT(2I)
18:     READ(105,2)((PT(I,J,K),I=1,3),K=0,P),J=0,N)
19:     2  FORMAT(3F)
20:     C-IMPRESSIION DES POINTS DE (S).
21:     WRITE(108,13)
22:     13  FORMAT(1H1, //2X, #SURFACE S. #/2X, 10(1H*))//
23:     DO 100 J=0,N
24:     WRITE(108,4)J
25:     DO 100 I=1,3
26:     100 WRITE(108,3)(PT(I,J,K),K=0,P)
27:     3  FORMAT(10X,15(F9.4,4X))
28:     4  FORMAT(//5X, #POINTS QUI COMPOSENT LES VECTEURS A($,I2,$,J):$/)
29:     C-CONSTRUCTION DE CP,CN,CNT.
30:     CALL CONST(P,CP)
31:     CALL CONST(N,CN)
32:     CALL TRANSP(CN,N,CNT)
33:     C-CONSTRUCTION DE LA MATRICE GRAND A.
34:     DO 101 I=1,3
35:     DO 102 J=1,N
36:     102 AA(I,J,0)=PT(I,J,0)-PT(I,J-1,0)
37:     DO 103 K=1,P
38:     103 AA(I,0,K)=PT(I,0,K)-PT(I,0,K-1)
39:     DO 101 J=1,N
40:     DO 101 K=1,P
41:     101 AA(I,J,K)=PT(I,J,K)+PT(I,J-1,K-1)-PT(I,J,K-1)-PT(I,J-1,K)
42:     C-LECTURE DU DEGRE D DE (S').
43:     READ(105,6)D
44:     6  FORMAT(I)
45:     C-LECTURE DES POLYNOMES H ET L.
46:     READ(105,5)H,(AH(I),I=0,H)
47:     READ(105,5)L,(EL(I),I=0,L)
48:     5  FORMAT(I /15F)
49:     C-DETERMINATION DE E DEGRE DE (S').
50:     E=AMAX0(2*L+N,2*H+N-2,H+L+N-1)
51:     C-CALCUL DE CEI ET CORI.
52:     CALL CONST(E,CEI)
53:     CALL MATINV(CEI,E,CFI)
54:     CALL TRANSP(CFI,E,CEI)
55:     CORI(1,2)=1./Q
56:     CORI(1,1)=1./Q
57:     CORI(0,0)=1
58:     CORI(2,2)=2./Q/(Q-1)
59:     C-CALCUL DES POLYNOMES NECESSAIRES A L'ECRIURE

```

```

60: C-DEFINITION DES CONDITIONS DE RACCORDEMENT.
61: CALL PRPBPLY(EL,L,EL,L,FL2,L2)
62: CALL PRPBPLY(AH,H,AH,H,AH2,H2)
63: CALL PRPBPLY(EL,I,AH,H,HL,LH)
64: DO 104 J=0,LH
65: 104 EL(I)=2*HL(I)
66: C-CONDITIONS DE RACCORDEMENT AU PREMIER ET DEUXIEME ORDRE.
67: DO 105 I=1,3
68: DO 200 JJ=0,15
69: DO 200 KK=0,15
70: 200 ABP(JJ,KK)=AB(JJ,KK)=AC(JJ,KK)=0
71: DO 106 J=0,N
72: DO 106 K=0,P
73: 106 AB(I,J,K)=AA(I,J,K)
74: CALL MUL(CNT,N,N,AB,N,P,AC,15,15)
75: CALL MUL(AC,N,P,CP,P,P,AB,15,15)
76: DO 305 IU=0,N
77: DO 305 IY=0,2
78: 305 R(I,IU,IY)=AR(IU,IY)
79: CALL TGE(TG,N)
80: CALL TDF(TD,N)
81: CALL PRPBPLY(AH,H,TG,N,ATG,NTG)
82: CALL PRPBPLY(EL,L,TD,N,ATD,NTD)
83: CALL SBMPPLY(ATG,NTG,ATD,NTD)
84: CALL GAMDE(GAMD,N)
85: CALL GAMGE(GAMG,N)
86: CALL BMGAE(BMGA,N)
87: CALL PRPBPLY(AH2,H2,GAMG,N,G2,NH2)
88: CALL PRPBPLY(EL2,L2,GAMD,N,D2,NL2)
89: CALL PRPBPLY(HL,LH,BMGA,N,B2,NLH)
90: CALL SBMPPLY(G2,NH2,D2,NL2)
91: CALL SBMPPLY(G2,NH2,B2,NLH)
92: DO 107 J=0,N
93: 107 ABP(J,0)=AR(J,0)
94: DO 108 J=0,NTG
95: 108 ABP(J,1)=ATG(J)
96: DO 109 J=0,NH2
97: 109 ABP(J,2)=G2(J)/2.
98: DO 114 J=0,E
99: DO 114 K=0,2
100: 114 AP(I,J,K)=ABP(J,K)
101: CALL MUL(CEI,E,E,AP,E,2,ACP,15,15)
102: CALL MUL(ACP,E,2,CORI,2,2,AP,15,2)
103: C-CALCUL DES PREMIERS POINTS DE LA SURFACE (S').
104: PPT(I,0,0)=PT(I,0,0)
105: DO 110 J=1,E
106: 110 PPT(I,J,0)=ABP(J,0)+PPT(I,J-1,0)
107: DO 111 K=1,2
108: 111 PPT(I,0,K)=ABP(0,K)+PPT(I,0,K-1)
109: DO 112 J=1,E
110: DO 112 K=1,2
111: 112 PPT(I,J,K)=ABP(J,K)-PPT(I,J-1,K-1)+PPT(I,J,K-1)+PPT(I,J-1,K)
112: 105 CONTINUE
113: C-IMPRESION DE POINTS QUI CARACTERISENT LA SURFACE (S').
114: WRITE(108,7) AH(0), AH(1), (AH(I),I,I=2,H)
115: 7 FORMAT(//5X,$PBLYNOME H:$/
116: 110X,$H(X)=$,F6.2,$ +$,F6.2,$ X +$,13(F6.2,$ X**$,I2,$ +$))
117: WRITE(108,8) EL(0), EL(1), (EL(I),I,I=2,L)
118: 8 FORMAT(//5X,$PBLYNOME L:$/

```

```

119:      110X,4L(X)=S,F6.2,$ +$,F6.2,$ X +$,13(F6.2,$ X**$,I2,$ +$))
120:      WRITE(108,14)
121: 14   FORMAT(1H1//2X,$SURFACE S'=$/2X,11(1H*))//
122:      WRITE(108,9) E
123: 9   FORMAT(/5X,$DEGRE DE (S'):$,I2/)
124:      DO 113 J=0,E
125:      WRITE(108,10)J
126:      DO 113 I=1,3
127: 113  WRITE(108,11)(PPT(I,J,K),K=0,2)
128: 10   FORMAT(/5X,$POINTS QUI COMPRENT LES PREMIERS VECTEURS A'($,I2,$
129: 11)J):$//)
130: 11   FORMAT(10X,3(F9.3,4X))
131:      PAS=0.1
132:      CALL VERIF (H ,N,T,PAS)
133:      CALL VERIF (AP,E,TP,PAS)
134:      M=1/PAS
135:      WRITE(108,152)PAS,PAS
136:      WRITE(108,151)
137: 152  FORMAT(1H1,5/45X,$VALEURS DES RAYONS DE COURBURE:$/45X,31(1H*))//
138: 135X,$POUR R0 VARIANT DE $,F4.2,$ A 1 AVEC UN PAS DE:$,F4.2//)
139:      DO14 I=1,M
140:      AF=(ABS(T(I,1))- ABS(TP(I,1)))/ABS(T(I,1))
141:      BR=(ABS(T(I,2))- ABS(TP(I,2)))/ABS(T(I,2))
142:      WRITE(108,150) T(I,1),TP(I,1),AF,T(I,2),TP(I,2),BB
143: 14   CONTINUE
144: 150  FORMAT((12X,2(2(F15.7,3X),D6.1,3X )//))
145: 151  FORMAT(15X,$ R1=$,13X,$ R1'=$,11X,$D1=$,10X,$ R2=$,11X,$ R2'=$
146: 1,10X,$D2=$//)
147:      RETURN
148:      END

```

```
1:      SUBROUTINE TDE(A,N)
2:      COMMON/THEVE/AR(0:15,0:15)
3:      DIMENSION A(0:15)
4:      DO 1 J=0,N
5:      1 A(J)=AR(J,1)
6:      RETURN
7:      END
```

```
1:      SUBROUTINE TGE(A,N)
2:      COMMON/THEVE/AR(0:15,0:15)
3:      DIMENSION A(0:15)
4:      DO 1 J=0,N-1
5:      1 A(J)=AR(J+1,0)*(J+1)
6:      A(N)=0
7:      RETURN
8:      END
```

```
1:      SUBROUTINE GAMDE(A,N)
2:      COMMON/THEVE/AR(0:15,0:15)
3:      DIMENSION A(0:15)
4:      DO 1 J=0,N
5:      1 A(J)=AR(J,2)*2
6:      RETURN
7:      END
```

```
1:      SUBROUTINE GAMGE(A,N)
2:      COMMON/THEVE/AR(0:15,0:15)
3:      DIMENSION A(0:15)
4:      DO 1 J=0,N-2
5:      1 A(J)=AR(J+2,0)*(J+1)*(J+2)
6:      A(N-1)=0
7:      A(N)=0
8:      RETURN
9:      END
```

```
1:      SUBROUTINE BMGAE(A,N)
2:      COMMON/THEVE/AR(0:15,0:15)
3:      DIMENSION A(0:15)
4:      DO 1 J=0,N-1
5:      1 A(J)= (J+1)*AR(J+1,1)
6:      A(N)=0
7:      RETURN
8:      END
```

```
1: SUBROUTINE PVECT(V1,V2,X,Y,Z,RP)
2: DIMENSION V1(3),V2(3)
3: X=V1(2)*V2(3)-V1(3)*V2(2)
4: Y=V1(3)*V2(1)-V1(1)*V2(3)
5: Z=V1(1)*V2(2)-V1(2)*V2(1)
6: AP=X*X+Y*Y+Z*Z
7: RP= SQRT(AP)
8: RETURN
9: END
```

```
1: SUBROUTINE PSCAL(V1,V2,R)
2: DIMENSION V1(3),V2(3)
3: R=V1(1)*V2(1)+V1(2)*V2(2)+V1(3)*V2(3)
4: RETURN
5: END
```

```
1: SUBROUTINE PRPBLY(T1,N1,T2,N2,T3,N3)
2: DIMENSION T1(0:N1),T2( 0:N2),T3(0:15 ),RES(0:7 ,0:7 )
3: CALL MUL(T1,N1,0,T2,0,N2,RES,7,0)
4: CALL SDIA(RES,7 ,T3)
5: N3=N1+N2
6: RETURN
7: END
```

```
1: SUBROUTINE SOMPBY(A1,N1,A2,N2)
2: DIMENSION A1( 0:15),A2( 0:N2)
3: M=N1
4: N=N2 ;L=0
5: IF(M.GT.N) N=N1;M=N2;L=1
6: N1=N
7: DO 2 J=0,M
8:   2 A1(J)=A1(J)+A2(J)
9:   IF(L.EQ.1) RETURN
10:  DO 1 J=M+1,N
11:   1 A1(J)=A2(J)
12: RETURN
13: END
```

```

1:   SUBROUTINE MUL(A1,N1,M1,A2,N2,M2,A3,K1,K2)
2:   DIMENSION A1(0:K1,0:M1),A2(0:K2,0:M2),A3(0:K1,0:M2)
3:   IF(M1.NE.N2) GO TO 1
4:   DO 2 I=0,N1
5:   DO 2 J=0,M2
6:   S=0
7:   DO 3 K=0,M1
8:   3 S=S+A1(I,K)*A2(K,J)
9:   2 A3(I,J)=S
10:  RETURN
11:  1 WRITE(108,100)
12: 100 FORMAT(/10X,$ERREUR MUL,M1.NE.N2$/)
13:  RETURN
14:  END

```

```

1:   SUBROUTINE MATINV(A,N,X)
2:   DIMENSION A(0:15,0:N),X(0:15,0:N)
3:   DO 1 I=0,N
4:   DO 1 J=0,N
5:   1 X(I,J)=0
6:   DO 2 I=0,N
7:   2 X(I,I)=1/A(I,I)
8:   DO 3 JA=1,N
9:   I=0
10:  DO 3 J=JA,N
11:  S=0
12:  DO 4 K=J,I+1,-1
13:  4 S=S-A(I,K)*X(K,J)
14:  X(I,J)=S*X(I,I)
15:  3 I=I+1
16:  RETURN
17:  END

```

```

1:   SUBROUTINE SODIA(R,N,T)
2:   DIMENSION R(0:N,0:N),T(0:15)
3:   L=0
4:   DO 1 I=0,N
5:   S=0
6:   DO 2 K=0,I
7:   2 S=S+R(I-K,K)
8:   T(L)=S
9:   1 L=L+1
10:  DO 3 I=1,N
11:  S=0
12:  DO 4 K=0,N-I
13:  4 S=S+R(I+K,N-K)
14:  T(L)=S
15:  3 L=L+1
16:  DO 5 I=0,N
17:  DO 5 J=0,N
18:  5 R(I,J)=0
19:  RETURN
20:  END

```

```

1:   SUBROUTINE TRANSP(C,N,CP)
2:   DIMENSION C(0:15,0:15),CP(0:15,0:15)
3:   DO 1 I=0,N
4:   DO 1 J=0,N
5:   1 CP(I,J)=C(J,I)
6:   RETURN
7:   END

```

```

1:      SUBROUTINE VERIF(A,P,T,PAS)
2:      INTEGER P
3:      DIMENSION A(3,0:15,0:15),T(30,2)
4:      DIMENSION TD(3),TG(3),GMAG(3),BMGA(3),GMAD(3)
5:      REAL N2,K1,K2,N(3)
6:      RB=0
7:      M=1/PAS
8:      DO 1 I=1,M
9:      RB=RB+PAS
10:     DO 2 J=1,3
11:     2   TG(J)=TD(J)=GMAG(J)=BMGA(J)=GMAD(J)=N(J)=0
12:     DO 5 K=1,3
13:     DO 3 J=1,P
14:     TG(K)=TG(K)+J*RB**(J=1)*A(K,J,0)
15:     3   BMGA(K)=BMGA(K)+J*RB**(J=1)*A(K,J,1)
16:     DO 4 J=0,P
17:     GMAD(K)=GMAD(K)+2*RB**(J)*A(K,J,2)
18:     4   TD(K)=TD(K)+RB**J*A(K,J,1)
19:     DO 5 J=2,P
20:     5   GMAG(K)=GMAG(K)+J*(J=1)*RB**(J=2)*A(K,J,0)
21:     CALL PVECT(TG,TD,N(1),N(2),N(3),N2)
22:     CALL PSCAL(TG,TG,E)
23:     CALL PSCAL(TG,TD,FF)
24:     CALL PSCAL(TD,TD,G)
25:     CALL PSCAL(N,GMAG,D)
26:     CALL PSCAL(N,BMGA,DP)
27:     CALL PSCAL(N,GMAD,DPP)
28:     AA=DP*G=DPP*FF
29:     B=D*G=DPP*E
30:     C=D*FF=DP*E
31:     DLTA=B**2=4*AA*C
32:     RAC=SQRT(DLTA)
33:     K1=(-B+RAC)/2/AA
34:     K2=(-B-RAC)/2/AA
35:     P1=(D+2*DP*K1+DPP*K1*K1)/(E+2*FF*K1+G*K1*K1)/N2
36:     P2=(D+2*DP*K2+DPP*K2*K2)/(E+2*FF*K2+G*K2*K2)/N2
37:     P3=ABS(P1)
38:     P4=ABS(P2)
39:     IF(P3>GT,P4) T(I,1)=1/P2;T(I,2)=1/P1;GO TO 1
40:     T(I,1)=1/P1
41:     T(I,2)=1/P2
42:     1   CONTINUE
43:     RETURN
44:     END

```

```

1:      SUBROUTINE CONST(L,C)
2:      DIMENSION C(0:15,0:15)
3:      C(0,0)=1
4:      A=1
5:      DO 1 I=1,L
6:      C(I,I)=(L-I+1)/I*A
7:      DO 2 K=I+1,L
8:      2   C(I,K)=- (K-1)*(L-K+1)/(K-I)/K*C(I,K-1)
9:      1   A=C(I,I)
10:     RETURN
11:     END

```

```

1:      SQARHUTINE DESSIN
2:      INTEGER N,P,C
3:      DIMENSION A(3,0:15,15),ALPHA(3,15),PT(3,0:15,0:15)
4:      DIMENSION CP(0:15,0:15),      CNT(0:15,0:15)
5:      DIMENSION CN(0:15,0:15)
6:      DIMENSION AA(3,0:15,0:15),AR(0:15,0:15),AC(0:15,0:15)
7:      DIMENSION PH(0:15),FCP(3),PHI(3:15),RA(0:15)
8:      C--LECTURE
9:      READ(105,3)C1,C2,C3,C4,F1
10:     3  FERRAT(5F)
11:     READ(105,1),P
12:     1  FERRAT(2I)
13:     READ(105,2)((PT(I,J,K),I=1,3),K=0,P),J=0,N)
14:     2  FERRAT(2F)
15:     C--CALCUL DES A
16:     DO 100 I=1,3
17:     DO 100 J=0,N
18:     DO 100 K=1,P
19:     100 A(I,J,K)=PT(I,J,K)-PT(I,J,K-1)
20:     WRITE(108,1502)
21:     DO 201 J=0,N
22:     DO 201 K=1,P
23:     201  WRITE(108,1500)(A(I,J,K),I=1,3)
24:     1502 FERRAT(//10X,##$#/)
25:     C--CALCUL DES ALPHA
26:     DO 101 I=1,3
27:     DO 101 J=1,N
28:     101  ALPHA(I,J)=PT(I,J,0)-PT(I,J-1,0)
29:     WRITE(108,1501)
30:     1501 FERRAT(//10X,##ALPHA#/)
31:     DO 200 J=1,N
32:     200  WRITE(108,1500)(ALPHA(I,J),I=1,3)
33:     1500 FERRAT(10X,3(F10.4,2X))
34:     C--CONSTRUCTION DE CP ET CN
35:     CALL CNST(P,CP)
36:     CALL CNST(N,CN)
37:     CALL TRANSP(CN,N,CNT)
38:     C--CONSTRUCTION DE LA MATRICE GRAND A
39:     DO 102 I=1,3
40:     DO 102 J=1,N
41:     102  AA(I,J,0)=ALPHA(I,J)
42:     DO 103 I=1,3
43:     DO 103 K=1,P
44:     103  AA(I,0,K)=A(I,0,K)
45:     DO 104 I=1,3
46:     DO 104 J=1,N
47:     DO 104 K=1,P
48:     104  AA(I,J,K)=A(I,J,K)-A(I,J-1,K)
49:     C--CALCUL DE GRAND C
50:     DO 105 I=1,3
51:     DO 115 J=0,N
52:     DO 115 K=0,P
53:     115  AR(J,K)=AA(I,J,K)
54:     CALL MUL(CNT,N,N,AR,N,P,AC,15,15)
55:     CALL MUL(AC,N,P,CP,P,P,AB,15,15)
56:     DO 105 J=0,N
57:     DO 105 K=0,P
58:     105  AA(I,J,K)=AB(J,K)
59:     C--CALCUL DU PRINT P

```

```

60:      CALL PLBT(0.,0.,2)
61:      CALL PLBT(C3,0.,2)
62:      CALL PLBT(C3,C4,2)
63:      CALL PLBT(0.,C4,2)
64:      CALL PLBT(0.,0.,2)
65:      CALL ARSHD(4.,14.,2.,12.,0.4,0.,16)
66:      CALL ARSHD(4.,14.,4.,17.,0.4,0.,16)
67:      CALL ARSHD(4.,14.,7.,14.,0.4,0.,16)
68:      CALL SYMBBL(7.,13.,0.5,1HY,0.,1)
69:      CALL SYMBBL(4.5,16.5,0.5,1HZ,0.,1)
70:      CALL SYMBBL(2.5,11.5,0.5,1HX,0.,1)
71:      CALL SYMBBL(2.,1.5,1.,16HSURFACE UNISURF.,0.,16)
72:      CALL PLBT(C1,C2,3)
73:      P1=0.1
74:      P2=0.02
75:      N1=1./P1+0.5
76:      N2=1./P2+0.5
77:      PA1=0;PA2=0
78:      DO 177 I1=0,N1
79:      PHI(0)=1
80:      DO 108 K=1,P
81:      105 PHI(K)=PHI(K-1)*PA1
82:      DO 107 I2=0,N2
83:      R0(0)=1
84:      DO 109 J=1,N
85:      105 R0(J)=R0(J-1)*PA2
86:      DO 110 I=1,3
87:      DO 111 J=0,N
88:      DO 111 K=0,P
89:      111 AR(J,K)=AA(I,J,K)
90:      CALL MUL(R0,0,N,AR,N,P,RA,0,15)
91:      CALL MUL(RA,0,P,PHI,P,0,T1,0,15)
92:      110 FCR(I)=T1
93:      C--TRACE
94:      XE=FCR(2)-ECR(1)*SQRT(2)/2
95:      YF=FCR(3)-ECR(1)*SQRT(2)/2
96:      XF=XE/E1+C1
97:      YF=YF/E1+C2
98:      IF (YE.LT.0.OR.YE.GT.C4) GO TO 107
99:      IF (XE.LT.0.OR.XE.GT.C3) GO TO 107
100:      IF (I2.EQ.0) GO TO 120
101:      CALL PLBT(XE,YF,2)
102:      GO TO 107
103:      120 CALL PLBT(XE,YF,3)
104:      107 PA2=PA2+P2
105:      PA2=0
106:      177 PA1=PA1+P1
107:      PA2=0;PA1=0
108:      CALL PLBT(C1,C2,3)
109:      DO 167 I1=0,N1
110:      R0(0)=1
111:      DO 129 J=1,N
112:      129 R0(J)=R0(J-1)*PA1
113:      DO 127 I2=0,N2
114:      PHI(0)=1
115:      DO 128 K=1,P
116:      128 PHI(K)=PHI(K-1)*PA2
117:      DO 140 I=1,3
118:      DO 121 J=0,N

```

```
119:      DS 121 K=0,P
120:      121 AR(J,K)=AA(I,J,K)
121:      CALL MUL(R9,0,N,AB,N,P,RA,0,15)
122:      CALL MUL(RA,0,P,PHI,P,0,T1,0,15)
123:      140 FCR(I)=T1
124:      C--TRACE
125:      XF=FCR(2)-ECR(1)*SQRT(2)/2
126:      YF=FCR(3)-ECR(1)*SQRT(2)/2
127:      XF=XE/E1+C1
128:      YF=YE/E1+C2
129:      IF (XE.LT.0.0R.XE.GT.C3) GO TO 127
130:      IF (YE.LT.0.0R.YE.GT.C4) GO TO 127
131:      IF(12.EQ.0) GO TO 130
132:      CALL PL0T(XE,YE,2)
133:      GO TO 127
134:      130 CALL PL0T(XE,YE,3)
135:      127 PA2=PA2+P2
136:      PA2=0
137:      167 PA1=PA1+P1
138:      RETURN
139:      END
```

Avec les sous-programmes

SUBROUTINE CONST

SUBROUTINE MUL

SUBROUTINE TRANSP

identiques à ceux de l'Annexe II .



NOM DE L'ETUDIANT : VERON Michel

Nature de la thèse : Doctorat ès Sciences Physiques

Vu, Approuvé

et permis d'imprimer

NANCY, le 23.1.73

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY I



J.R. HELLUY