UNIVERSITE DE NANCY FACULTE DES SCIENCES

mathématiques

UN PROBLEME DE PROGRAMMATION NON LINEAIRE: REALISATION PRATIQUE DE LA METHODE DU "MINIMAX".

SCN 61/17

THESE

PRESENTEE A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE NANCY
POUR L'OBTENTION
DU DOCTORAT DE SPECIALITE
MATHEMATIQUES 3e CYCLE

PAR MAURICE VARGAFTIG

17.6

ET SOUTENUE EN JUIN 1961
DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

UNIVERSITÉ NANCY BIBLIOTHÈQUE

jury MM. LEGRAS président
. HERVE examinateurs

UNIVERSITE DE NANCY FACULTE DES SCIENCES

UN PROBLEME DE PROGRAMMATION NON LINEAIRE : REALISATION PRATIQUE DE LA METHODE DU "MINIMAX"

UNIVERSITÉ NANCY BIBLIOTHÈQUE

PRÉSENTÉ par Maurice VARGAFTIG

VU et APPROUVE

NANCY le 8 JUIN 1961

Le Doyen de la Faculté
des Sciences :

M. ROUBAULT

VU et
PERMIS D'IMPRIMER
NANCY le 10 Juin 1961

Le Recteur

Président du Conseil de
l'Université de NANCY

P. IMBS

UNIVERSITE de NANCY - FACULTE des SCIENCES

Doyen : M. ROUBAULT
Assesseur : M. WAHL

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT, DELSARTE

Professeurs honoraires : MM. GUTTON, CROZE, RAYBAUD, LAFFITTE, LERAY, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, L. SCHWARTZ, DIEUDONNE, de MALLEMANN, LONGCHAMBON, LETORT, DODE, GAUTHIER, GOUDET, OLMER, CORNUBERT, CHAPELLE, GUERIN, CHEVALLIER, REMY.

Maîtres de conférences honoraires : MM. RAUX, LIENHART.

PROFESSEURS

MM.

URION	Chimie biologique		
DELSARTE	Analyse supérieure	FRUHLING	Physique
ROUBAULT	Géologie	LIONS	M.M.P.
VEILLET	Biologie animale	SUHNER	Physique exp.
ECHEVIN	Botanique	HILLY	Géologie
WAHL	Chimie Org. indust.	LE GOFF	Génie Chimique
BARRIOL	Chimie théorique	CHAPON	Chimie biologique
BIZETTE	Physique	HEROLD	Chimie indust.
GUILLIEN	Electronique	SCHWARTZ	Exploit. minière
GIBERT	Chimie Physique	GAYET	Physiologie
HERVE	Calcul diff. et Int.	MANGENOT	Phytopathologie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	MALAPRADE	Chimie
DAVID	Chimie organique	HADNI	Physique
BOLFA	Minéralogie	DELAMARE-DEBOUTEVILLE	Zoologie
NICLAUSE	Chimie	BONVALET	Mécanique Physique
FAIVRE	Physique appliquée	BRUHAT	Mathématiques géné.
AUBRY	Chimie minérale	Mme ROIZEN	Physique
DUVAL	Chimie	KERN	Minéralogie
COPPENS	Radiogéologie	BASTICK	Chimie

MAITRES de CONFERENCES

MM.

WERNER	Botanique	CLIN	Paléontologie
GARNIER	Agronomie	ROCCI	Géologie
REGNIER	Physico-chimie	WEISS	Physique M.P.C.
WEPPE	Minéralogie appli.	Mme BASTICK	Chimie M.P.C.
BERNARD	Géologie	VUILLAUME	Psychophysiologie
ARAGNOL	Mathématiques (prop.)	PLAN	Mathématiques
GAY	Chimie biologique	GUDEFIN	Physique
RENARD	Physique théo. et nuc.	MARI	Chimie I.S.I.N.
CONDE	Zoologie	LAFON	Physique I.S.I.N.
GOSSE	Génie chimique	HORN	Physique
CHAMPIER	Physique	PIERRET	Maître de conf. adj.

Secrétaire Principal : M. CARON

Ce n'est pas céder à l'usage mais exprimer mes sentiments les plus profonds que de remercier mes maîtres pour les travaux dont je rends compte ici.

Et tout d'abord ma reconnaissance va à Monsieur le Professeur LEGRAS dont l'autorité et la bienveillante attention ont encouragé mes efforts,

et à Monsieur le Professeur D. J. WILDE qui par ses conseils constants et sa sympathie a guidé mon travail.

Mes remerciements vont également à Messieurs les Professeurs qui m'ont fait l'honneur de composer mon jury.

-- INTRODUCTION --

-o-o-o-

Le présent mémoire est consacré à la réalisation pratique d'un problème de programmation non linéaire applicable à l'Analyse Opérationnelle.

La solution du problème, due à Monsieur le Professeur Douglass. J. Wilde, a été l'objet d'un article dans le "Journal de la Société Américaine de Recherche Opérationnelle" sous le titre :

"Comment rendre minimax une fonction quadratique par morceaux apparaissant dans la planification de la production." ?

("The Journal of the Operations Research Society of America". Septembre-Octobre 1960 - page 652)

Dans le Chapître I, quelques aspects théoriques de l'algorithme proposé ont été développés.
Le deuxième Chapître est consacré à la réalisation pratique proprement dite tandis que le troisième fait état des résultats.

-o-o-o-o-o-o-o-

.../...

CHAPITRE I - ASPECTS THÉORIQUES du PROBLEME - METHODE de RÉSOLUTION

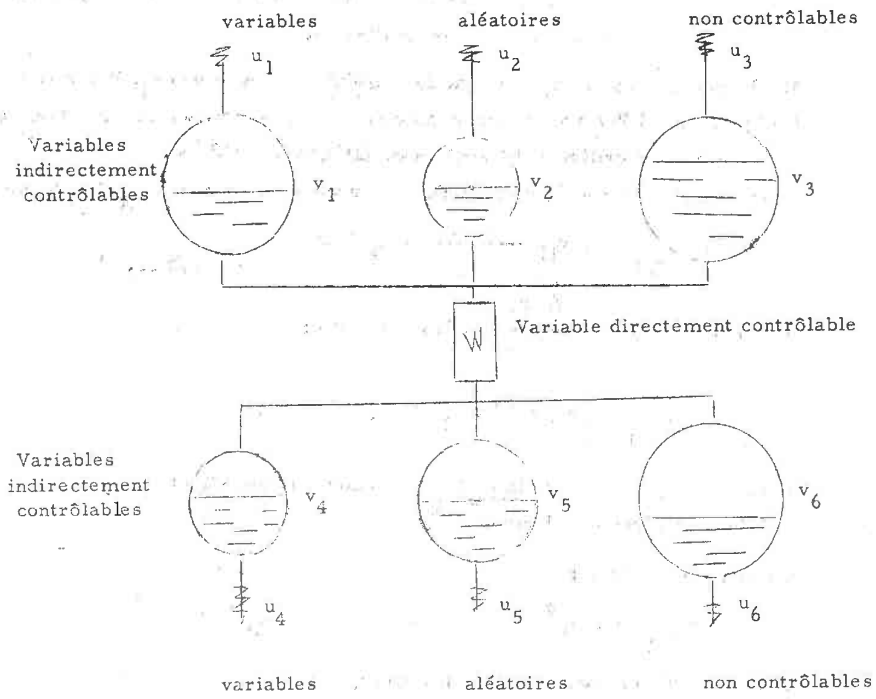
-o-o-o-

- Soit un système physique ou économique possédant :

J variables aléatoires dites d'entrée n_j $(1 \leq j \leq J)$;

une seule variable w directement contrôlable et que l'on peut ajuster à volonté.

I variables critiques dites de sortie V_i $(1 \leq i \leq J)$ supposées fonctions linéaires de w et des u_j.



-- Figure 1 --

.../...

- La figure 1 représente un tel système où :
  les 6 variables u_j sont les quantités offertes de certains produits ;
  les 6 variables v_i sont les niveaux dans les différents réservoirs.

On suppose que chaque variable aléatoire u_j est une variable de Gauss possédant une valeur moyenne $\overline{u}_j$ et un écart-type τ_j.

On appellera $\overline{v}_i$ la valeur moyenne de la variable v_i et σ_i son écart-type ;
$\overline{w}$ la valeur moyenne de la seule variable que l'on contrôle directement, σ_w son écart-type.

De l'hypothèse que les v_i sont fonctions linéaires de w et des u_j, il ressort aisément que si l'on fixe la valeur moyenne de w, soit $\overline{w}$, les valeurs moyennes $\overline{v}_i$ des variables critiques de sortie sont également vérifiées.

Posant $\Delta x = x - \overline{x}$, on peut alors trouver des constantes c_{ij} et a_i telles

$$\Delta v_i = \left(\sum_{j=1}^{J} a_i c_{ij} \frac{\Delta u_j}{\tau_j} \right) - a_i \Delta w \qquad (i = 1, 2, \ldots I)$$

Si l'on définit $u_j^* = \dfrac{\Delta u_j}{\tau_j}$, il vient alors :

$$\Delta v_i = \left(\sum_{j=1}^{J} a_i c_{ij} u_j^* \right) - a_i \Delta w . \qquad (1)$$

Supposons maintenant que la variable directement contrôlable w soit fonction linéaire des variables d'entrée u_j^*.

On peut alors écrire :

$$\Delta w = \sum_{j=1}^{J} p_j \cdot u_j^* \qquad (2)$$

où les p_j sont des constantes à déterminer.

.../...

L'équation (2) peut être appelée la "réponse de contrôle", car elle représente la réaction de la variable contrôlée directement aux fluctuations des variables incontrôlables d'entrée.

Reportant (2) dans (1)

$$\Delta v_i = \left(\sum_{j=1}^{J} a_i c_{ij} u_j^* \right) - a_i \sum_{j=1}^{J} p_j u_j^* = a_i \sum_{j=1}^{J} (c_{ij} - p_j) u_j^* \qquad (i = 1, 2, \ldots, I)$$

Soit $\Delta v_i = a_i \sum_{j=1}^{J} [c_{ij} - p_j] u_j^* \qquad i = 1, 2, \ldots I \qquad (3)$

Elevons au carré les deux membres de l'équation 3 :

$$(\Delta v_i)^2 = a_i^2 \left[\sum_{j=1}^{J} (c_{ij} - p_j) u_j^* \right]^2$$

et prenons l'espérance mathématique des deux membres :

$$E\left[(\Delta v_i)^2\right] = E\left[a_i^2 \left(\sum_{j=1}^{J} (c_{ij} - p_j) u_j^* \right)^2 \right]$$

$$E\left[(\Delta v_i)^2\right] = a_i^2 E\left[\sum_{j=1}^{J} (c_{ij} - p_j)^2 u_j^{*2} \right] + 2 a_i^2 E\left[\sum_{k \neq l} (c_{ik} - p_k)(c_{il} - p_l) u_k^* u_l^* \right]$$

$$\sigma_i^2 = a_i^2 \sum_{j=1}^{J} (c_{ij} - p_j)^2 E(u_j^{*2}) + 2 a_i^2 \sum_{k \neq l} (c_{ik} - p_k)(c_{il} - p_l) E(u_k^* u_l^*)$$

Supposons, afin de simplifier le problème, que les variables d'entrée u_j soient stochastiquement indépendantes.

alors $E(u_k^* u_l^*) = 0$ pour tout k différent de l.

D'autre part :

$$E(u_j^{*2}) = E\left[\frac{u_j - \overline{u}_j}{\tau_j} \right]^2 = \frac{E\left[u_j - \overline{u}_j\right]^2}{\tau_j^2} = \frac{\tau_j^2}{\tau_j^2} = 1 \quad \forall j.$$

ce qui est normal puisque u_j^* est une variable centrée, réduite.

Finalement :

$$\boxed{\sigma_i^2 = a_i^2 \sum_{j=1}^{J} [c_{ij} - p_j]^2} \qquad (4) \qquad l = w, 1, 2, \ldots, J$$

.../...

Les v_i étant fonctions linéaires des variables u_j normales sont elles-mêmes normales.

Les J + 1 équations expriment la variance des variables critiques v_j et de w en fonction de la "réponse de contrôle". Dans le cas de σ_w^2, les c_{wj} sont nuls quelque soit j.

Il est raisonnable de penser que certaines valeurs des variables critiques sont plus désirables que d'autres.

Dans la majorité des cas, l'ensemble des valeurs désirables pour chaque variable critique forme un intervalle continu que l'on appellera "intervalle ou bande de contrôle".

Les limites des bandes de contrôle ne doivent pas être considérées comme intransgressables dans la mésure où l'on doit considérer les valeurs appartenant à la bande de contrôle souhaitables et non interdites.

S'il arrive que la bande de contrôle pour une variable v_i n'est pas symétrique par rapport à sa valeur moyenne, on simplifiera le problème en considérant une bande de contrôle plus petite mais symétrique. Ainsi, si la limite la plus proche pour v_i est distante de h_i unités de la valeur moyenne $\bar{v}_i$, on considérera l'intervalle $|v_i - \bar{v}_i| < h_i$.

Le quotient $\frac{h_i}{\sigma_i}$, nombre d'écarts-types contenu dans la bande de contrôle de la variable v_i, détermine la probabilité pour la variable v_i d'appartenir à sa bande de contrôle.

La simplification qui néglige une partie de la queue de la Distribution de Gauss est d'autant plus justifiée que la probabilité pour une variable v_i d'être dans sa bande de contrôle croît.

De façon générale, la probabilité de garder v_i dans sa bande de contrôle est proportionnelle à $\frac{h_i}{\sigma_i}$, et l'égalité (4) donne :

.../...

$$\frac{\sigma_i^2}{h_i^2} = \frac{k_i^2}{h_i^2} \sum_{j=1}^{J} \left[c_{ij} - p_j\right]^2$$

ou en posant $k_i = \frac{a_i}{h_i}$

$$\frac{\sigma_i^2}{h_i^2} = k_i^2 \sum_{j=1}^{J} \left[c_{ij} - p_j\right]^2 \qquad i = w, 1, 2, .. I$$

Chercher à rendre maximum la fonction $\max_{i,w} \left(\frac{h_i^2}{\sigma_i^2}\right)$, c'est rendre minimum l'expression inverse soit $\max_{i,w} \left(\frac{\sigma_i^2}{h_i^2}\right)$

<u>Définition</u> : On appelle "Constantes "Minimax" de Contrôle" l'ensemble de valeurs particulières de p_j (j = 1, 2, ... J) qui rend minimum l'expression $\max_{i,w} \left(\frac{\sigma_i^2}{h_i^2}\right)$.

Pour obtenir la valeur de cette fonction $\max_{i,w} \left(\frac{\sigma_i^2}{h_i^2}\right)$ pour une suite quelconque de p_j, on calcule les expressions $\frac{\sigma_i^2}{h_i^2}$ à l'aide des formules :

$$\frac{\sigma_i^2}{h_i^2} = k_i^2 \sum_{j=1}^{J} (c_{ij} - p_j)^2$$ et l'on choisit la plus grande.

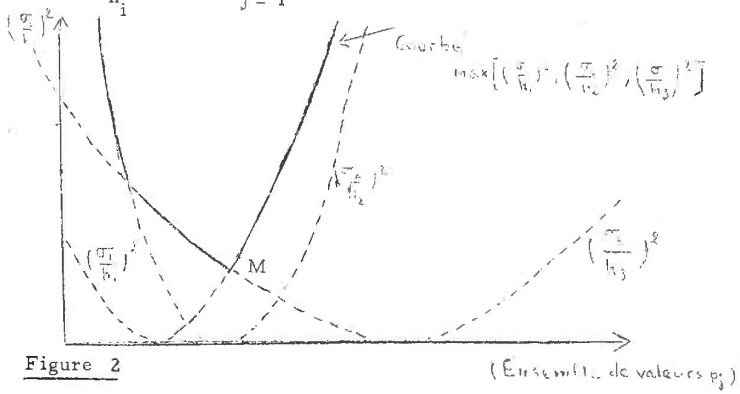


Figure 2

La fonction est quadratique par morceaux, chaque morceau étant une partie des diverses fonctions quadratiques définies semi-positives :

$$\frac{\sigma_i^2}{h_i^2} = k_i^2 \sum_{y=1}^{J} (c_{ij} - p_j)^2$$

La figure 2 montre la fonction $\max_{i,} \left(\frac{\sigma_i^2}{h_i^2}\right)$ en traits continus.

Le minimum de cette fonction est atteint au point M.

En un nombre fini de points, y compris le minimum cherché, la fonction $\max_{i,w} \left(\frac{\sigma_i^2}{h_i^2}\right)$ a ses dérivées premières et secondes discontinues ce qui empêche l'emploi du calcul différentiel pour la résolution du problème.

La "réponse minimax" c'est-à-dire l'expression : $\Delta w = \sum_{j=1}^{J} p_j u^*_j$

où les p_j sont les constantes "minimax" de contrôle rend maximum la plus petite probabilité de garder chaque variable à l'intérieur de sa bande de contrôle.

Cette probabilité est une limite inférieure de la probabilité maximum de garder toutes les variables à l'intérieur de leurs bandes respectives.

.../...

ALGORITHME PROPOSÉ POUR RENDRE MINIMA LA FONCTION QUADRATIQUE PAR MORCEAUX

-o-o-o-o-

I - PROPRIETES de la SOLUTION :

A - Interprétation Géométrique :

Soit I l'ensemble d'indices (w, 1, 2, .., I) et soit un espace euclidien à J dimensions.

On peut alors considérer les vecteurs $\vec{c}_i$ et $\vec{p}$ dans cet espace tels que :

$\vec{c}_i : (c_{i,1} ; c_{i,2} ; \dots c_{i,J})$ pour tout $i \in I$

$\vec{p} : (p_1, p_2, \dots p_J)$

Les équations $\frac{\sigma_i^2}{h_i^2} = k_i^2 \sum_{j=1}^{j=J} (c_{ij} - p_j)^2$ peuvent s'écrire sous forme vectorielle comme il suit : $\frac{\sigma_i^2}{h_i^2} = k_i^2 \, |\vec{c}_i - \vec{p}_j|^2$ pour tout $i \in I$;

la quantité $|\vec{c}_i - \vec{p}|^2$ représente en effet le carré du module de la différence de deux vecteurs appartenant à un espace euclidien de dimension J, et l'on a

$$|\vec{c}_i - \vec{p}|^2 = \sum_{j=1}^{J} [c_{ij} - p_j]^2$$

Remarquons que c_w : (0 ; 0 ; ....., 0) est donc un vecteur qui a toutes ses composantes nulles : c'est l'origine.

On a défini plus haut les "constantes minimax" de contrôle comme l'ensemble de valeurs rendant minimum l'expression :

$$\dots\dots \quad \max_{i,w} \frac{\sigma_i^2}{h_i^2} = \max_{i,w} k_i^2 \sum_{j=1}^{J} [c_{ij} - p_j]^2$$

.../...

Appelons alors $\vec{p}^*$ le vecteur qui admet pour composantes les "constantes minimax de contrôle".

On peut alors écrire que $\vec{p}^*$ est tel que : $\max_i \left(k_i^2 |\vec{c}_i - \vec{p}^*|^2\right) = \min_p \max_i \left(k_i^2 |\vec{c}_i - \vec{p}|^2\right)$

Définition : On dira que $\vec{p}^*$ est le vecteur "minimax".

Le vecteur cherché $\vec{p}^*$ apparaît ainsi comme étant le vecteur de l'espace euclidien à J dimensions, R^J, qui rend minimum la plus grande valeur de k_i fois la distance de $\vec{p}^*$ à $\vec{c}_i$.

On peut définir la distance :

$$d_i(\vec{p}) \quad k_i^2 |\vec{c}_i - \vec{p}|^2$$

Ainsi $\max_{i,w} d_j(p^*) = \min_p \max_i d_i(\vec{p})$

B - Espaces affins - Vecteurs associés - Solutions de base :

Soit A un sous-ensemble de I : A C I.

Définition : Les vecteurs $\vec{c}_i$ pour tout $i \in A$ sont dits associés à A.

On peut choisir parmi les vecteurs $\vec{c}_i$ associés à A un vecteur $\vec{c}_h$ comme point initial.

Définition A : Les vecteurs associés à A sont affinement indépendants si et seulement si les vecteurs $(\vec{c}_i - \vec{c}_h)$ pour tout i dans A, sauf h, sont linéairement indépendants.

En d'autres termes : il est impossible de trouver des λ_i non tous nuls tels que $\sum \lambda_i [\vec{c}_i - \vec{c}_h] = 0$

Définition : Tout vecteur $\vec{p}$ est dit engendré par les vecteurs associés si $(p - \vec{c}_h)$ est une combinaison linéaire des $[\vec{c}_i - \vec{c}_h]$.

.../...

L'ensemble des vecteurs engendrés par les vecteurs associés forment un espace vectoriel affin qui est un sous-espace de l'espace euclidien R^J. Cet espace vectoriel affin ne contient pas nécessairement l'origine de R^J.

La définition A est équivalente à la condition suivante : tout vecteur $\vec{p}$ engendré par les vecteurs associés s'écrit d'une manière et d'une seule :

$$\vec{p} = \sum_{i \in A} \beta_i c_i \qquad \text{où} \quad \sum_{i \in A} \beta_i = 1$$

Définition : Les constantes β_i sont appelées coordonnées barycentriques de $\vec{p}$.

Tout ensemble de vecteurs associés à un sous-ensemble A de I, et affinement indépendants, constitue une base affine ou plus simplement une base.

Tout vecteur engendré par les vecteurs de base et tel que $d_i[\vec{b}(A)] = d_j[\vec{b}(A)]$, pour tout i et j dans A, est dit solution de base associée à A.

Les vecteurs de toute base dont les coordonnées barycentriques sont positives constituent un simplex ; c'est-à-dire si les vecteurs $\vec{c}_i$ pour tout i dans A sont affinement indépendants, tout vecteur

$$\vec{s} = \sum_{i \in A} \vec{c}_i \quad ; \quad \sum_{i \in A} \beta_i = 1 \qquad \beta_i > 0 \text{ pour tout } i \in A$$

est dans le simplex S (A).

Au point de vue géométrique, les vecteurs $\vec{s}$ sont les points intérieurs de la généralisation à plusieurs dimensions d'un triangle.

La frontière du simplex S (A) étant l'ensemble des points pour lesquels au moins une des coordonnées barycentriques est nulle ne peut appartenir à S (A).

En Conséquence, S (A) est un ensemble ouvert.

.../...

C - Théorèmes fondamentaux :

Deux théorèmes suivent qui constituent le fondement de l'algorithme.

Le théorème 1 établit l'unicité de la solution cherchée et 3 conditions que tout vecteur minimax $\vec{p}^*$ doit satisfaire. Ces conditions sont suffisantes.

Théorème 1 : L'unique vecteur $\vec{p}^*$ est minimal si et seulment il possède les propriétés suivantes :

1°) p^* appartient à un simplex ouvert $S(A)^*$

2°) p^* est une solution de base pour les vecteurs associés à A^*, c'est-à-dire $p^* = b(A^*)$

3°) la fonction distance atteint son maximum pour les vecteurs associés à A^*, c'est-à-dire $d_j(\vec{p}^*) \geqslant d_k(\vec{p}^*)$ et ceci pour tout j dans A^* et tout k appartenant à l'ensemble complémentaire de A^* par rapport à I.

$d_j(\vec{p}^*) \geqslant d_k(\vec{p}^*)$ pour tout j dans A et touf k dans I mais non dans A.

Si l'on se souvient que, pour une solution de base associée à A^*, on a conservation de la distance, à savoir $d_j[\vec{p}^*(A)] = d_p[\vec{p}^*(A)]$ quelque soit j, k appartenant à A^*, et si l'on pose $d_j[\vec{p}^*(A)] = d(A^*)$ pour tout j dans A^*, alors la condition 3 s'écrit :

$d(A^*) \geqslant d_k(A^*)$ et ceci pour tout k appartenant dans l'ensemble complémentaire dans I de A^*

Le théorème 2 établit l'existence d'une solution finie, ce qui, à priori, n'était pas évident.

Théorème 2 : La fonction $\bar{f}(\vec{p}) = \max_j d_j(\vec{p})$ admet un minimum fini.

Elle atteint son minimum pour un vecteur $\vec{p}^*$ fini.

Ces deux théorèmes permettent de dégager les grandes lignes de l'algorithme :

.../...

En premier lieu nous savons que le vecteur $\vec{p}^*$ que nous cherchons d'une part existe, d'autre part est unique et fini, donc notre recherche a un sens.

En second lieu la condition 2 du théorème 1 indique que $\vec{p}^*$ est une des solutions de base positives.

Il suffit donc de calculer les solutions de base, de regarder si elles sont positives, puis de tester la condition 3.

L'algorithme exposé plus loin fait exactement ce travail mais réduit la longueur des calculs : il évite de calculer les solutions de base non positives et non réelles.

D - Calcul des Solutions de Base :

Puisque le vecteur minimax $\vec{p}^*$ est une solution de base, il nous faut donc savoir calculer les solutions de base associées à des ensembles de 2, 3, 4, 5 indices et plus.

CAS de DEUX INDICES

Soit A un ensemble de 2 indices f, g $A = \{f, g\}$

a) Le vecteur cherché satisfait d'abbrd à la condition 2 du théorème 1 :

Appelons $\vec{b}(f, g)$ tout vecteur vérifiant cette condition.

$$k_f^2 \, |\vec{b}(f, g) - \vec{c}_f|^2 = k_g^2 \, |\vec{b}(f, g) - \vec{c}_g|^2$$

Dans l'espace euclidien à J dimensions R^J, le point $\vec{b}(f, g)$ apparaît comme appartenant au lieu dont le rapport des distances à deux points fixes $\vec{c}_f$ et $\vec{c}_g$ est constant : $\frac{kg}{kf}$.

Ce lieu est en général une hypersphère.

(cf : par exemple, "Roux et Miellou" Géométrie - Classe de seconde - p : 185.)

.../...

Cette hypersphère se dégénère en un hyperplan dans le cas où $k_f = k_g$. Cet hyperplan est perpendiculaire au segment $\vec{c_f}$, $\vec{c_g}$, en son milieur I comme le montre la figure 3.

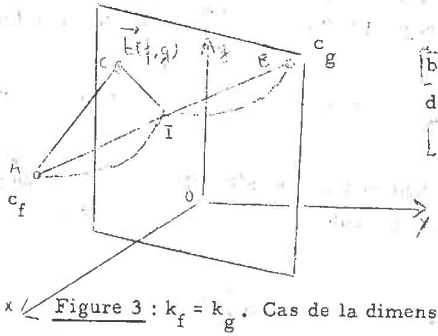


Figure 3 : $k_f = k_g$. Cas de la dimension 3

Tout point $\vec{b}(f.\ g)$ de l'hyperplan est tel que :

$$\left[\vec{b}(f.\ g) - \vec{c_f}\right] = \left[\vec{AC}\right] = \left[\vec{AI} + \vec{IC}\right]$$

d'où :

$$\left[\vec{AC}\right] . \left[\vec{AB}\right] = \left[\vec{AI} + \vec{IC}\right]\left[\vec{AB}\right]$$

$$= \vec{AI} . \vec{AB} + \vec{IC} . \vec{AB}$$

$$= \vec{AI} . \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} . \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{1}{2}$$

d'où l'on obtient la relation :

$$(1) \quad \boxed{\left[\vec{b}(f.\ g) - \vec{c_f}\right]\left[\vec{c_g} - \vec{c_f}\right] = \frac{1}{2}\left|\vec{c_g} - \vec{c_f}\right|^2}$$

Dans le cas où k_f est différent k_g, le lieu est une hypersphère dont il nous faut trouver le rayon et le centre : $r(f.\ g)$, $\vec{q}(f.\ g)$

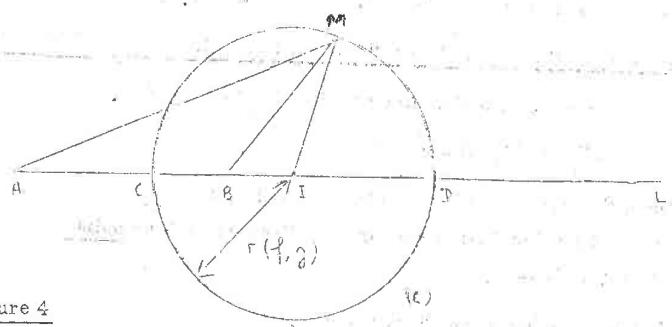


Figure 4

.../...

Nous raisonnerons dans un plan passant par la droite L qui porte le segment (c_f, c_g). Ce plan P qui est le plan de figure, coupe l'hypersphère suivant un cercle (C).

Appelons A et B les points $\vec{c_f}$ et $\vec{c_g}$; L, la droite qui porte A et B. Soient C et D les intersections de la droite L et du cercle (C). Soit I le point représentatif de $\vec{q}(f,g)$.

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -k \quad \text{et} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = +k \quad \text{où } k = \frac{k_g}{k_f} > 0, \neq 1.$$

Les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B dans le rapport k.

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -k \text{ d'où } \frac{\overline{CA}}{-k} = \frac{\overline{CB}}{1} = \frac{\overline{CB} - \overline{CA}}{1+k} = \frac{\overline{AB}}{1+k} \text{ il vient } \overline{CA} = -k\frac{\overline{AB}}{1+k}$$

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k \text{ d'où } \frac{\overline{DA}}{k} = \frac{\overline{DB}}{1} = \frac{\overline{DB} - \overline{DA}}{1-k} = \frac{\overline{AB}}{1-k} \text{ il vient } \overline{DA} = k.\frac{\overline{AB}}{1-k}$$

d'où :

$$\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{AB}\left[\frac{-k}{1+k} - \frac{k}{1-k}\right] = \frac{-2k}{1-k^2}\overline{AB}$$

Le rayon $r(f,g)$ est donc donné par $\frac{|\overline{CD}|}{2}$

$$r(f,g) = \frac{k}{|1-k^2|}\left|\vec{c_f} - \vec{c_g}\right| = \frac{kf.\ kg}{k^2f - k^2g}\left|\vec{c_f} - \vec{c_g}\right|$$

$$\boxed{r(f,g) = \frac{k_f\ k_g}{k_f^2 - k_g^2}\left|\vec{c_f} - \vec{c_g}\right|}$$

Soit O l'origine de l'espace R^j, écrivons $\vec{OI} = \alpha . \vec{OA} + \beta . \vec{OB}$ où α et β sont à déterminer et exprimons que le point I est porté par la droite AB.

$$\vec{AI} = \vec{AO} + \vec{OI} = \vec{AO} + \alpha . \vec{OA} + \beta . \vec{OB} = \vec{AO} + \alpha . \vec{OA} + \beta\left[\vec{OA} + \vec{AB}\right]$$

$$\vec{AI} = \vec{AO}\left[1 - \alpha - \beta\right] + \beta . \vec{AB} \qquad (1)$$

1°) L'origine 0 n'est pas sur la droite AB :

De façon générale, $\vec{AI}$, étant porté par $\vec{AB}$, on peut écrire d'une manière et d'une seule : $\vec{AI} = \rho . \vec{AB}$.

.../...

Identifiant (1) et (2), il vient $\left[1 - \alpha - \beta\right] = 0$

$$\alpha + \beta = 1$$

2°) L'origine 0 appartient à la droite AB :

Alors la relation $\overrightarrow{0I} = \alpha . \overrightarrow{0A} + \beta . \overrightarrow{0B}$ exprime en elle-même que le point I est porté par la droite AB. Mais l'on peut toujours écrire d'une manière et d'une seule $\overrightarrow{AI} = \rho . \overrightarrow{AB}$ d'où il vient encore $\alpha + \beta = 1$.

Ainsi dans tous les cas $\alpha + \beta = 1 \longrightarrow \beta = 1 - \alpha$

$\overrightarrow{0I} = \alpha . \overrightarrow{0A} + \beta . \overrightarrow{0B} = \alpha \overrightarrow{0A} + (1 - \alpha) \overrightarrow{0B} = \alpha \left[\overrightarrow{0A} - \overrightarrow{0B}\right] + \overrightarrow{0B}$

$\overrightarrow{0I} = \alpha . \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{0B}$

Mais $\overrightarrow{0I} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AC} + \dfrac{\overrightarrow{CD}}{2} = \overrightarrow{0A} + \dfrac{k}{1+k} \overrightarrow{AB} - \dfrac{k}{1-k^2} \overrightarrow{AB} = \alpha . \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{0B}$

d'où :

$$\alpha . \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{0A} - \overrightarrow{0B}) + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{AB} - \frac{k}{1-k^2} \overrightarrow{AB}$$

$$\alpha \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} \left[1 - \frac{k}{1+k} + \frac{k}{1-k^2}\right] = \frac{\overrightarrow{BA}}{1-k^2}$$

Les points A et B n'étant pas confondus : $\alpha = \dfrac{1}{1-k^2} = \dfrac{k^2_f}{k^2_f - k^2_g}$

et $\beta = 1 - \alpha = 1 - \dfrac{1}{1-k^2} = - \dfrac{k^2}{1-k^2} = - \dfrac{k^2_g}{1-k^2}$

D'où finalement : $\boxed{\vec{q}\,(f, g) = \dfrac{k^2_f}{k^2_f k^2_g} \vec{c}_f - \dfrac{k^2_g}{k^2_f - k^2_g} \vec{c}_g}$

L'équation de l'hypersphère s'écrit :

$$\left| \vec{b}\,(f, g) - \vec{q}\,(f, g) \right|^2 = r^2 (f, g)$$

.../...

b) Le vecteur cherché vérifie la condition 1 du théorème :

Définition : Tout vecteur satisfait les conditions 1 et 2 du théorème 1 pour un ensemble A est dit solution de base positive, notée $\vec{b}^+ (A)$.

$$\vec{b}^+(A) = \sum_{i \in A}' \beta_i \vec{c}_i \qquad \sum_{i \in A} \beta_i = 1 \qquad \beta_i > 0 \ , \ i \in A$$

Ces conditions définissent de façon unique la solution de base pour tout ensemble A de deux éléments f, g.

D'après l'interprétation géométrique énoncée plus haut, les conditions équivalent à dire que le point cherché appartient au segment $(\vec{c}_f . \vec{c}_g)$.

Le point b^+ appartient ainsi à l'intersection de l'hypersphère et du segment $(c_f . c_g)$.

Ce point existe toujours dans le cas d'un ensemble A de deux éléments.

$$\overrightarrow{0C} = \alpha . \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{0B} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{CA}$$

$$\alpha . \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{0A} - \overrightarrow{0B}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} \left[\frac{1-k}{1+k} \right]$$

$$\alpha . \overrightarrow{BA} = \left(\frac{1}{1+k}\right) . \overrightarrow{BA}$$

Les points B et A étant distincts : $\alpha = \dfrac{1}{1+k} = \dfrac{k_f}{k_f + k_g}$ et $\beta = + \dfrac{k_g}{k_f + k_g}$

$$\boxed{\vec{b}^+ (f, g) = \frac{k_f}{k_f + k_g} \vec{c}_f + \frac{k_g}{k_f + k_g} \vec{c}_g}$$

.../...

II - CAS de TROIS INDICES

Soit A un ensemble de 3 indices f , g , h .

On ne peut affirmer l'existence de solutions de base b (f , g , h) et encore moins celle d'une solution de base positive.

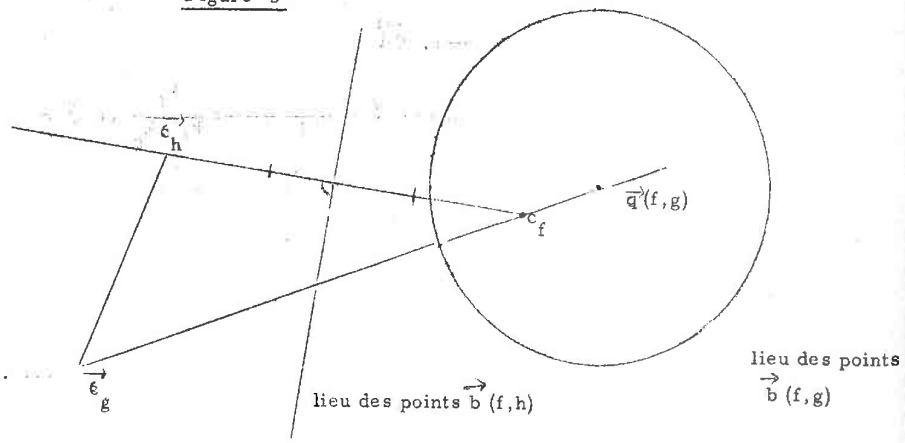
Le lieu des solutions de base peut être interprété comme l'intersection, si elle existe, des lieux de solutions de base $\vec{b}$ (f , g) et $\vec{b}$ (f , h).

Mais, même s'il existe des solutions de base, il n'est pas certain que l'on puisse en trouver à l'intérieur du simplex S (A), c'est-à-dire que l'existence d'une solution de base n'est pas établie.

Si les lieux de $\vec{b}$ (f , g) et $\vec{b}$ (f , h) sont des hyperplans, alors l'intersection existe toujours : c'est un hyperplan de dimension de une unité inférieure à la dimension des lieux de $\vec{b}$ (f , g) ou $\vec{b}$ (f , h).

Si au moins un des lieux de $\vec{b}$ (f , g) et $\vec{b}$ (f , h) est une hypersphère, on ne peut affirmer queces lieux se coupent ainsi que le montre la figure qui suit :

Figure 5



Exemple : $k_f = k_h \geqslant k_g$

.../...

Exemple : $k_f = k_h > k_g$.

Il est à noter que la non existence de solutions de base positives pour certains ensembles d'indices est appréciable en ce sens qu'elle réduit le nombre de vecteurs à examiner dans la recherche de la solution "minimax" $\vec{p}^*$.

Supposons que $\vec{b}^+$ (A) existe $\vec{b}^+ (A) = \sum_{i \in A} \beta_i \vec{c}_i \qquad \sum_{i \in A} \beta_i = 1$

On peut alors écrire : $\vec{b}^+ (A) - \vec{c}_f = \sum_{i \in A} \beta_i \vec{c}_i - \vec{c}_f = \sum_{i \in A} \beta_i \vec{c}_i - \sum_{i \in A} \beta_i \vec{c}_f$

$$\boxed{b^+ (A) - \vec{c}_f = \sum_{i \in A} \beta_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right]} \qquad (2)$$

Déterminer $\vec{b}^+$ (A) cela revient à déterminer les constantes β_i dont le nombre est égal au nombre d'indices de l'ensemble A.

Si l'on revient à l'équation (1) établie dans le cas de deux indices f et g et $k_f = k_g$

$$\left[b^+ (A) - \vec{c}_f\right] \cdot \left[\vec{c}_g - \vec{c}_f\right] = \frac{1}{2} \left|\vec{c}_g - \vec{c}_f\right|^2 \qquad (1)$$

$$\boxed{\sum_{i \in A} \beta_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \cdot \left[\vec{c}_j - \vec{c}_f\right] = \frac{1}{2} \left|\vec{c}_j - \vec{c}_f\right|^2} \qquad (3)$$

Ce résultat est en tout point général, il est valable pour tout indice j dans A tel que $k_j = k_f$.

Dans le cas où tous les k_i sont égaux, cas dit linéaire, nous avons assez d'équations pour déterminer tous les β_i pour $i \neq f$.

En effet, les diverses équations forment alors un système de (n - 1) équations indépendantes à (n - 1) inconnues, système qui admet une solution unique.

Il reste donc à déterminer β_f . A cet effet, on écrit que : $\beta_f = 1 - \sum_{\substack{i \in A \\ i \neq f}} \beta_i$

.../...

Ainsi, dans le cas linéaire, il existe toujours une solution de base et une seule.

Cette solution peut ou non être une solution de base positive.

Revenons au cas où $k_h \neq k_f$ dans le cas d'un ensemble de 3 indices.

Le lieu des solutions $\vec{b}(f.\ h)$ est une hypersphère que nous supposerons de dimension n.

Le lieu des solutions $\vec{b}(f.\ g)$ est une hypersphère ou un hyperplan suivant que $k_f \neq k_g$ ou non.

L'intersection sera une hypersphère (S) de dimension (n - 1), de centre $\vec{q}(A)$ et de rayon r (A).

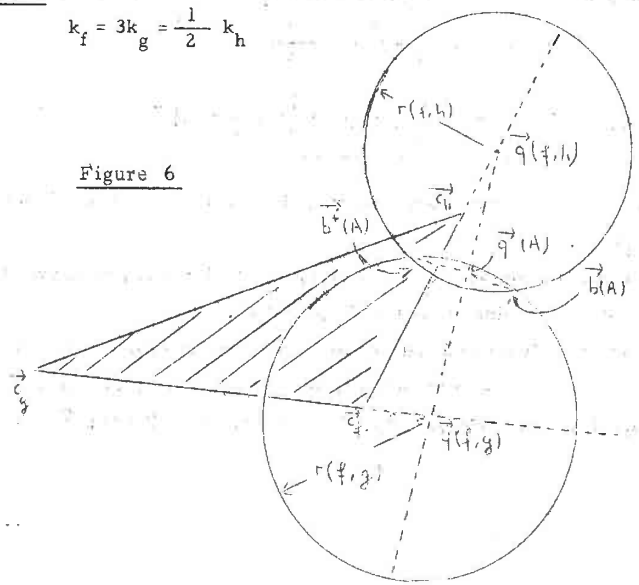
Ecrivant que le point $\vec{b}(A)$, solution de base pour 3 indices, appartient à (S), il vient :

$$\boxed{\left|\vec{b}(A) - \vec{q}(A)\right| = r^2(A)} \qquad (4)$$

Exemple 3 :

$$k_f = 3k_g = \frac{1}{2}\ k_h$$

Figure 6



.../...

L'équation (4) ne définit pas complètement le lieu cherché (S).

Il nous faut déterminer ce lieu dans l'espace : on exprime que la ligne joignant les centres $\vec{q}(f.\ g)$ et $\vec{q}(A)$ est perpendiculaire à l'hyperplan (P) contenant (S).

Soit :

$$\left[\vec{b}(A) - \vec{q}(A)\right] . \left[\vec{q}(f.\ g) - \vec{q}(A)\right] = 0$$

$$\left[(\vec{b}(A) - \vec{c}_f) - (\vec{q}(A) - \vec{c}_f)\right] . \left[\vec{q}(f.\ g) - \vec{q}(A)\right] = 0$$

$$\left[\vec{b}(A) - \vec{c}_f\right] . \left[\vec{q}(f.\ g) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A) - \vec{c}_f\right] . \left[\vec{q}(f.\ g) - \vec{q}(A)\right]$$

$$\boxed{\sum_{i \in A} \beta_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(f.\ g) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A) - \vec{c}_f\right] . \left[\vec{q}(f.\ g) - \vec{q}(A)\right] \quad \text{valable pour tout } j \in A \text{ tel que } k_j \neq k_f} \qquad (5)$$

Cette dernière relation est absolument générale, on peut l'écrire chaque fois que j dans A est tel que $k_j \neq k_f$.

Cette équation, associée à $\sum_{i \in A} \beta_i = 1$ (6), forme un système de deux équations linéaires, liant les 3 inconnues β_f, β_g, β_h.

Eliminant deux des 3 inconnues en fonction de la 3ème grâce à (5) et (6) et reportant les valeurs dans (4), on obtient une équation du second degré à une inconnue que l'on résoud.

Cette équation peut avoir deux racines réelles distinctes, une racine double ou deux racines complexes, selon qu'il y a deux, un ou aucun point d'intersection.

D'après l'unicité de la solution cherchée $b^+(A)$, il ne peut y avoir plus d'une racine conduisant à une solution de base positive.

De façon tout à fait générale, les équations (1) et (5) permettent d'éliminer toutes les inconnues sauf une dans l'équation (4) que l'on résoud alors.

.../...

Déterminons $\vec{q}(A)$ et $r^2(A)$.

Le point $\vec{q}(A)$ est sur le segment joignant $\vec{q}(f, g)$ et $\vec{q}(f, h)$; on peut écrire :

(6) $\vec{q}(f, g, h) - \vec{q}(f, g) = \gamma(f, g, h) \left[\vec{q}(f, h) - \vec{q}(f, g)\right]$

où $\gamma(f, g, h)$ est une constante à déterminer dont la valeur dépend des positions relatives des points $\vec{c}_f$, $\vec{c}_g$, $\vec{c}_h$.

Le point $\vec{q}(f,g,h)$ étant la projection orthogonale sur l'hyperplan (P) de $\vec{q}(f,g)$ la relation de Pythagore donne :

$$r^2(f,g,h) + \left|\vec{q}(f,g,h) - \vec{q}(f,g)\right|^2 = r^2(f,g).$$

soit :

(7) $$r^2(f,g,h) = r^2(f,g) - j^2(f,g,h)\left|\vec{q}(f,h) - \vec{q}(f,g)\right|^2$$

De même le point $\vec{q}(f,g,h)$ étant la projection orthogonale sur (P) de $\vec{q}(f,h)$ il vient :

$$r^2(f,g,h) + \left[\vec{q}(f,g,h) - \vec{q}(f,h)\right]^2 = r^2(f,h)$$

$$r^2(f,g,h) + \left[(\vec{q}(f,g) - \vec{q}(f,h)) - (\vec{q}(f,g) - \vec{q}(f,g,h))\right]^2 = r^2(f,h)$$

$$r^2(f,g,h) + \left[\vec{q}(f,h) - \vec{q}(f,g)\right]^2 \left[1 - \gamma(f,g,h)\right]^2 = r^2(f,h)$$

(8) $$r^2(f,g,h) = r^2(f,h) - \left[1 - \gamma(f,g,h)\right]^2 \left|\vec{q}(f,h) - \vec{q}(f, g)\right|^2$$

Eliminant $r^2(f,g,h)$ entre (7) et (8) on obtient :

(9) $$\boxed{\gamma(f,g,h) = \frac{r^2(f,g) - r^2(f,h) + \left|\vec{q}(f,h) - \vec{q}(f,g)\right|^2}{2\left|\vec{q}(f,h) - \vec{q}(f,g)\right|^2}}$$

(9) permet de calculer $\gamma(f,g,h)$ d'où $\vec{q}(f,g,h)$ grâce à (6) et $r^2(f,g,h)$ grâce à (7).

.../...

e) L'algorithme proprement dit :

Nous avons vu que les théorèmes 1 et 2 garantissent et l'existence et l'unicité de la solution cherchée $\vec{p}^*$.

Cette solution faisant partie des solutions de base positives, il suffit de les examiner toutes et de les tester.

L'algorithme qui suit évitant de calculer les solutions de base non positives et complexes réduit sensiblement les calculs.

Soit un sous-ensemble A de I.

Définition : Le vecteur $\vec{S}(A)$ est "subminimax" pour A si et seulement si pour un sous-ensemble B de A.

1°) $\vec{S}(A)$ est une solution de base positive, c'est-à-dire $\vec{S}(A) = \vec{b}^+(B)$

2°) La fonction distance atteint son maximum pour tous les vecteurs associés à B.

En d'autres termes $d(B) \geqslant d_j(B)$ pour j appartenant à A mais non à B.

L'existence et l'unicité du vecteur $\vec{S}(A)$ résultentde la simple application des théorèmes 1 et 2 au sous-ensemble.

Proposition : Tout sous-ensemble A de I admet un vecteur "subminimax" et un seul.

Selon lescas, il est vrai ou faux que $\vec{S}(A) = \vec{b}^+(A)$, mais $\vec{S}(I) = \vec{S}(A^*) = \vec{p}^*$.

L'algorithme, partant d'un ensemble de 2 indices nommés (1,2) introduit, si besoin est, de nouveaux indices nommés 3,4,5 ... etc.

A chaque fois qu'un indice nouveau est introduit, nous dirons que nous passons à une nouvelle étape : ainsi l'étape 1 est (1,2)

l'étape 2 est (1,2,3).

.../...

Ces ensembles seront appelés A_n où n est le nombre d'indices qu'ils comportent par exemple, $A_2 = (1,2)$; $A_3 = (1,2,3)$; $A_4 = (1,2,3,4)$.

Nous serons amenés à considérer les sous-ensembles des A_n, obtenus en éliminant un ou plusieurs indices.

Tout sous-ensemble à p éléments de A_n sera appelé A_n^p ; plus précisément on appellera $A_n^{p,i}$ le sous-ensemble à p éléments de A_n, obtenu en supprimant le $i^{ème}$ indice.

exemple : $A_3 = (1,2,3)$, $A_3^{2,3} = (1,2)$, $A_3^{2,2} = (1,3)$, $A_3^{2,1} = (2,3)$

Enfin le $t^{ième}$ indice de tout ensemble $A_n^{p,i}$ sera appelé i_p^t.

exemple : $A_3^{2,3} = (1,2)$, $i_2^2 = 2$, $i_2^1 = 1$

Le processus de recherche est le suivant :

Supposons que nous nous proposons de calculer $\vec{S}(A_n)$.

On ne cherche pas à calculer $\vec{b}^+(A_n)$ avant d'avoir examiné les fonctions "distance" pour tous les vecteurs $\vec{S}(A_n^{n-1})$, car il peut arriver que l'un d'entre eux, par exemple $\vec{S}(A_n^{n-1,1})$ soit "subminimax" pour A_n.

Dans ce dernier cas, $\vec{S}(A_n) = \vec{S}(A_n^{n-1,1})$ et il est inutile de considérer $\vec{b}^+(A_n)$ qui n'existe pas d'après le théorème 1. D'autre part, si aucun sous-ensemble (A_n^{n-1}) de A_n n'engendre un vecteur "subminimax" pour (A_n) alors on peut affirmer, d'après le théorème 2, que $\vec{b}^+(A_n)$ existe et l'on a :

$$\vec{S}(A_n) = b^+(A_n)$$

On peut alors calculer $b^+(A_n)$ en toute sécurité.

Ainsi l'algorithme procède de la façon suivante :

Etant donné un ensemble quelconque A, d'au moins trois indices, on regarde s'il n'existe aucun sous-ensemble engendrant $\vec{S}(A)$. Si oui, c'est donc que le vecteur $\vec{b}^+(A)$ existe : on le calcule. Dans le cas contraire, on passe à l'étude de

.../...

l'ensemble suivant.

La restriction "au moins 3 indices" est due au fait que tout ensemble A de deux indices admet une solution de base positive : on a toujours $\vec{S}(A) = \vec{b}^+(A)$.

Pour résoudre complètement le problème, il faut définir un ordre de recherche des solutions de base.

On commence par calculer la fonction distance $d_{(i,j)}$ pour tout couple d'indices $\{i,j\}$. Dans ce but, il n'est pas nécessaire de déterminer toutes les solutions de base $\vec{b}^+(i,j)$, car :

$$d_{(i,j)} = k_i^2 \left| \vec{b}^+(i,j) - \vec{c}_i \right|^2 = k_i^2 \left| \frac{k_i \vec{c}_i + k_j \vec{c}_j}{k_i + k_j} - \vec{c}_i \right|^2$$

$$d(i,j) = \left[\frac{k_i . k_j}{k_i + k_j} \right]^2 \left| \vec{c}_i - \vec{c}_j \right|^2$$

Il est raisonnable de penser que les indices f et g rendant maximum le fonction "distance" font partie de l'ensemble minimax A^* puisqu'ils correspondent à deux vecteurs $\vec{c}_f$ et $\vec{c}_g$ les plus "éloignés" l'un de l'autre : l'algorithme les prend comme points de départ :

f et g sont tels que :

$$\left[\frac{k_f . k_g}{k_f + k_g} \right]^2 \left| \vec{c}_f - \vec{c}_g \right|^2 = \max_{i \neq j} \left[\frac{k_i \; k_j}{k_i + k_j} \right]^2 \left| \vec{c}_i - \vec{c}_j \right|^2$$

f est identifié à 1 ; g à 2 ; $f \equiv 1$; $g \equiv 2$.

Calculant alors $\vec{b}^+(1,2) = \vec{b}^+(A)$, on regarde si $\vec{b}^+(1,2) = \vec{p}^*$.

Si l'on n'a pas cette dernière égalité c'est que nécessairement il existe au moins un indice h tel que : $d_h(A_2) > d(A_2)$

On choisit d'identifier à 3 l'indice h tel que : $d_h\left[\vec{b}^+(A_2)\right] = \max_{\substack{i \in I \\ i \notin A_2}} d_i\left[\vec{b}^+(A_2)\right]$

$h \equiv 3$.

.../...

On obtient ainsi un nouvel ensemble $A_3 = (1,2,3)$ dont on détermine le vecteur "subminimax" $\vec{S}(A_3)$.

- Si $\vec{S}(A_3) = \vec{S}(I)$ le problème est résolu : le vecteur cherché est $\vec{S}(A_3)$.
- Si $\vec{S}(A_3)$ n'est pas "subminimax" pour I on introduit un nouvel indice.

De façon générale le nième indice introduit est f tel que :

$$d_f\left[\vec{S}(A_{n-1})\right] = \max_{\substack{i \in I \\ i \notin A_{n-1}}} d_i\left[\vec{S}(A_{n-1})\right]$$

et on fait l'identification $f \equiv n$.

S'il existe plusieurs vecteurs $\vec{c}_i$ rendant maximum la fonction $d_i\left[\vec{S}(A_{n-1})\right]$, on en choisit arbitrairement un pour nouvel indice.

Soit, par exemple, un ensemble I de 4 indices. Supposant le cas le plus défavorable, à savoir $A^* = I$, les étapes du calcul sont les suivantes.

<u>Etape 1</u> : Déterminer les indices 1 et 2.

Calculer $\vec{b}^+(A_2) = \vec{b}^+(1,2)$.

<u>Etape 2</u> : Déterminer l'indice 3.

Ranger $A_3 = (1,2,3)$ Calculer $b^+(1,3)$, $b^+(2,3)$, $b^+(1,2,3)$.

<u>Etape 3</u> : Déterminer l'indice 4.

Ranger $A_4 = (1,2,3,4)$ Former $A_4^{3,3} = (1,2,4)$

Ranger $A_4^{3,3} = (1,2,4)$ Calculer $\vec{b}^+(1,4)$, $\vec{b}^+(2,4)$, $\vec{b}^+(1,2,4)$

Former $A_4^{3,2} = (1,3,4)$

Ranger $A_4^{3,2} = (1,3,4)$ Calculer $\vec{b}^+(3,4)$, $\vec{b}^+(1,3,4)$

Former $A_4^{3,1} = (2,3,4)$

Ranger $A_4^{3,1} = (2,3,4)$ Calculer $\vec{b}^+(2,3,4)$ - Prendre $A_4 = (1,2,3,4)$

Calculer $b^+(1,2,3,4)$.

Pour conclure, il faut noter qu'il est plus probable que quelques sous-ensembles engendreront des vecteurs "subminimax", et que, en conséquence, une recherche complète ne sera pas nécessaire.

.../...

CAS de QUATRE INDICES :

Soit A_k un ensemble de 4 indices (f,g,h,k). On peut toujours le considérer comme la réunion de deux ensembles, l'un de 3 indices, l'autre d'un seul indice.

$$A_k = (f,g,h) \cup (k) = A \cup (k).$$

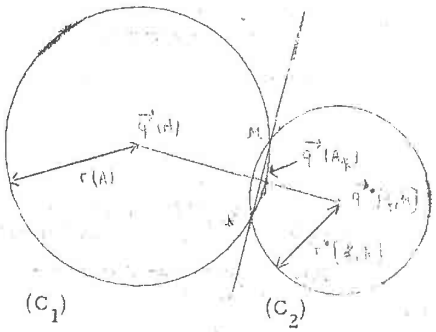
Considérons l'intersection du lieu des solutions de base pour l'ensemble A et des solutions de base de l'ensemble B = (f,k).

Dans l'espace engendré par les vecteurs de base relatifs à A_k, le lieu des solutions de base de A doit être situé dans un plan (P) perpendiculaire à toute ligne $\left[\vec{q}(f,j) - \vec{q}(A)\right]$, et ceci pour tout j dans A.

Ce lieu est un cercle (C_1) dans le plan (P), de centre $\vec{q}(A)$ et de rayon r (A).

Considérons maintenant l'hypersphère, lieu des solutions de base $\vec{b}(f,k)$ où seul f est dans A. Le point $\vec{b}(A_k)$ que nous cherchons, appartient au plan (P) : nous ne considérons ainsi que l'intersection (C_2) de l'hypersphère et de (P). Cette intersection est un cercle de centre $\vec{q}^*(f,k)$ et de rayon $r^*(f,k)$.

Figure 7



La figure ci-contre, où le plan (P) est le plan de la feuille, montre les cercles (C_1) et (C_2); le point $\vec{b}^+(A_k)$ cherché est l'un des deux points M et N, intersections de (C_1) et (C_2).

Le point $\vec{q}(A_k)$ est à l'intersection de la droite joignant les centres $\vec{q}(A)$ et $\vec{q}^*(f,k)$ de (C_1) et (C_2) respectivement et de la droite joignant les points M et N.

.../...

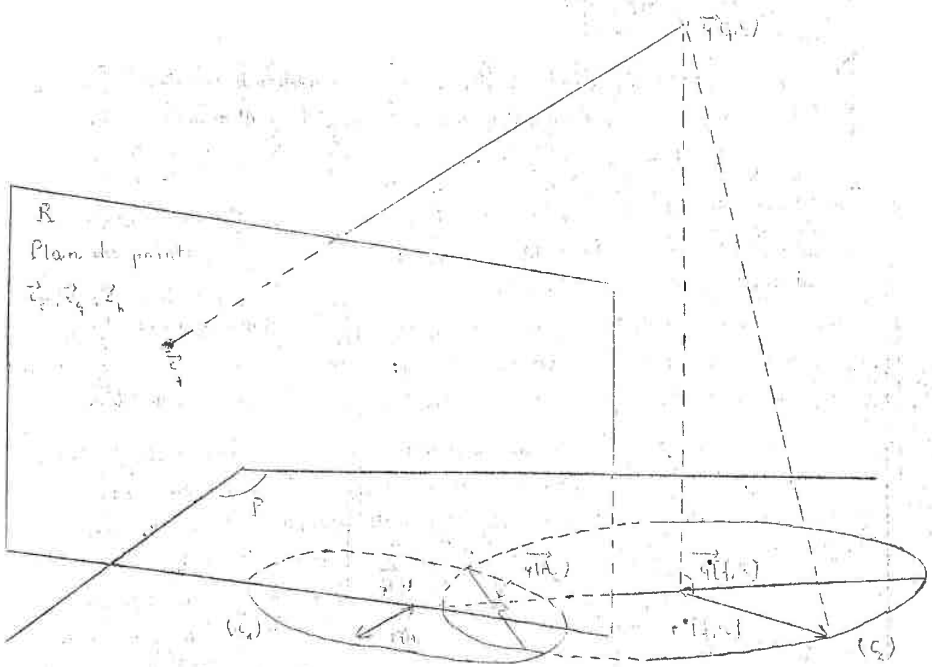


Figure 8

La figure ci-dessus est dans l'espace : les points $\vec{c}_f$, $\vec{c}_g$, $\vec{c}_h$ sont supposés dans le plan R.

Supposons connus $\vec{q}(A_k)$, $r(A_k)$ et $\vec{q}^{\,\bullet}(f,k)$ projection sur le plan (P) du centre de l'hypersphère, $\vec{q}(f,k)$, lieu des solutions $\vec{b}(f,k)$, et proposons-nous de déterminer $\vec{b}^{\,+}(A_k)$.

$$\vec{b}^{\,+}(A_k) = \sum_{i \in Ak} \gamma_i \, \vec{c}_i .$$

Il nous faut trouver 4 équations indépendantes liant les 4 inconnues γ_i.

.../....

Tout point du plan (P) a des coordonnées barycentriques vérifiant les relations suivantes :

(a) $\sum_{i \in Ak} \gamma_i = 1$

(b) $\sum_{i \in Ak} \gamma_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right]$

relation qui exprime que le plan (P) est perpendiculaire à la droite joignant $\vec{q}(A)$ et $\vec{q}(f,g)$. Remarquons quecette équation, valable si $k_g \neq k_f$, peut-être remplacée dans le cas contraire par :

(b') $\sum_{i \in Ak} \gamma_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right]\left[c_g - c_f\right] = \left[c_g - \vec{c}_f\right]^2$

Tout point du plan a deux degrés de liberté, ainsi que le montrent les équations (a) et (b).

Le point $\vec{b}^{\,+}(A_k)$ appartenant à (P) vérifie (a) et (b). Il faut maintenant le situer dans (P).

1°) <u>Le point $\vec{q}(A_k)$ est la projection sur le segment $\vec{q}(A)$, $\vec{q}^{\,\bullet}(f,k)$ de $\vec{b}^{\,+}(A_k)$.</u>

d'où la relation vectorielle :

$$\left[\vec{b}^{\,+}(A_k) - \vec{q}(A_k)\right] \cdot \left[\vec{q}(A_k) - \vec{q}(A)\right] = 0 .$$

soit :

$$\left[\vec{b}^{\,+}(A_k) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(A_k) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A_k) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(A_k) - \vec{q}(A)\right]$$

(c) $\sum_{i \in Ak} \gamma_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(A_k) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A_k) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(A_k) - \vec{q}(A)\right]$

2°) <u>Le point $\vec{b}^{\,+}(A_k)$ est distant de la quantité $r(A_k)$ du point $\vec{q}(A_k)$.</u>

(d) $\left|\vec{b}^{\,+}(A_k) - \vec{q}(A_k)\right|^2 = r^2(A_k)$

.../...

Les équations (a), (b), (c), (d) permettent de résoudre le problème : à l'aide des trois premières on détermine trois des inconnues en fonction de la quatrième et l'on porte ces valeurs dans (d). On obtient ainsi une équation du second degré à une seule inconnue que l'on résoud. On prend la racine qui donne naissance à des coordonnées barycentriques toutes positives. On a vu que une seule des racines peut convenir : il n'y a donc aucune ambiguité quant à son choix.

Détermination de $\vec{q}(A_k)$ et de la distance $r(A_k)$:

Le rayon $r'(f,k)$ du cercle (C_2) est tel que :

$$r'^2(f,k) = r^2(f,k) - \left|\vec{q}(f,k) - \vec{q}'(f,k)\right|^2$$

Si nous supposons connu le point $\vec{q}'(f,k)$, alors on peut calculer $r'^2(f,k)$.

Hypothèse : On connaît le point $\vec{q}'(f,k)$

Le point $\vec{q}(A_k)$ appartient à la droite définie par les points $\vec{q}(A)$ et $\vec{q}'(f,k)$ donc il existe une constante $\gamma(A_k)$ et une seule telle que :

$$\vec{q}(A_k) = \vec{q}(A) + \gamma(A_k)\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{q}(A)\right].$$

On définit, comme dans le cas de 3 indices, $\gamma(A_k)$ par les deux équations :

$$r^2(A_k) = r^2(A) - \gamma^2(A_k)\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{q}(A)\right]^2$$

$$r^2(A_k) = r'^2(f,k) - \left[1 - \gamma(A_k)\right]^2\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{q}(A)\right]^2$$

d'où il vient :

$$\gamma(A_k) = \frac{r^2(A) - \left[r'(f,k)\right]^2 + \left[\vec{q}(f,k) - \vec{q}(A)\right]^2}{2\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{q}(A)\right]^2}$$

Conclusion : Ainsi on pourra déterminer $\vec{q}(A_k)$ et $r(A_k)$ si l'on connaît le point $\vec{q}'(f,k)$, projection orthogonale sur (Γ) du point $\vec{q}(f,k)$.

On écrira que le vecteur $\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{q}(f,k)\right]$ est orthogonal à deux droites con-

.../...

concourantes du plan (P).

- l'une de ces droites est évidemment celle qui joint les points $\vec{b}^+(A)$ et $\vec{q}(A)$.
- l'autre doit être choisie le plus simplement possible. Elle sera issue de $\vec{b}^+(A)$.

Pour la déterminer, il nous faut choisir un autre point $\vec{b}'(A)$ dans le plan (P).

Il est clair que l'on peut toujours trouver un point $\vec{b}'(A)$ dans (P) satisfaisant à la condition suivante :

$\vec{b}'(A)$ n'est pas porté par la droite joignant $\vec{b}^+(A)$ et $\vec{q}(A)$.

Connaissant le point $\vec{b}'(A)$, on écrit que :

1°) $\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{q}(f,k)\right]$ est orthogonal à $\left[\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A)\right]$

$$\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{q}(f,k)\right]\left[\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A)\right] = 0$$

soit :

$$\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{c}_f\right].\left[\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A)\right] = \left[\vec{q}(f,k) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A)\right]$$

Posant :

$$\vec{q}'(f,k) = \sum_{i \in Ak} \varepsilon_i \vec{c}_i \text{ , il vient}$$

$$\text{(e)} \quad \sum_{i \in Ak} \varepsilon_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right]\left[\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A)\right] = \left[\vec{q}(f,k) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A)\right]$$

2°) $\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{q}(f,k)\right]$ est orthogonal à $\left[\vec{q}(A) - \vec{b}^+(A)\right]$

$$\left[\vec{q}'(f,k) - \vec{q}(f,k)\right]\left[\vec{q}(A) - \vec{b}^+(A)\right] = 0$$

d'où :

$$\text{(f)} \quad \sum_{i \in Ak} \varepsilon_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(A) - \vec{b}^+(A)\right] = \left[\vec{q}(f,k) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(A) - \vec{b}^+(A)\right]$$

Les équations (e) et (f) lient les 4 inconnues ε_f, ε_g, ε_h, ε_k.

Les deux autres équations permettant la résolution du problème sont (a) et (b) puisque le point $\vec{q}'(f,k)$ appartient au plan (P).

.../...

Conclusion générale de l'étape : "4 indices".

On peut déterminer $\vec{q}^{\,\cdot}(f,k)$, $r(f,k)$ et en déduire $\vec{q}(A_k)$ et $r(A_k)$.
Le problème de la recherche du point $\vec{b}^{\,+}(A_k)$ est résolu.

Choix du point $\vec{b}^{\,\prime}(A)$.

1°) Calculs préliminaires : Détails du calcul du point $\vec{b}^{\,+}(A)$, solution de base relative à un ensemble à 3 indices (f,g,h).

$$\vec{b}^{\,+}(A) = \sum_{i \in A} \beta_i \vec{c}_i$$

où les β_i sont tels que :

$$(a_1) \quad \sum_{i \in A} \beta_i = 1$$

$$(b_1) \quad \sum \beta_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right]$$

$$(d_1) \quad \left[\vec{b}(A) - \vec{q}(A)\right]^2 = r^2(A).$$

Ici il n'est pas question de plan (P), car le point cherché appartient au plan déterminé par les points $\vec{c}_f$, $\vec{c}_g$ et $\vec{c}_h$.

Considérons (a_1) et (b_1), on peut écrire :

$$(a'_1) \quad \beta_f + \beta_g + \beta_h = 1.$$

$$(b'_1) \quad \alpha_g^3 \beta_g + \alpha_h^3 \beta_h = \alpha_c^3$$

où
$$\alpha_g^3 \equiv \left[\vec{c}_g - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right]$$
$$\alpha_h^3 \equiv \left[\vec{c}_h - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right]$$
$$\alpha_c^3 \equiv \left[\vec{q}(A) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right]$$

.../...

De (b'_1) on tire β_g fonction de β_h.

$$\beta_g = -\frac{\alpha_h^3}{\alpha_g^3}\beta_h + \frac{\alpha_c^3}{\alpha_g^3}$$

soit (g) $\boxed{\beta_g = t_1 \beta_h + t_2}$ où $t_1 = -\dfrac{\alpha_h^3}{\alpha_g^3}$ et $t_2 = \dfrac{\alpha_c^3}{\alpha_g^3}$

(a'_1) permet alors de déterminer β_f fonction de β_h.

$$\beta_f = 1 - \beta_g - \beta_h = 1 - (t_1 \beta_h + t_2) - \beta_h.$$

$$\beta_f = -(1 + t_1) \cdot \beta_h + (1 - t_2)$$

(h) $\boxed{\beta_f = t_3 \beta_h + t_4}$ où $t_3 = -(1 + t_1)$ et $t_4 = (1 - t_2)$

Le point $\vec{b}^{\,+}(A)$ peut finalement s'écrire :

$$\vec{b}^{\,+}(A) = \left[t_3 \beta_h + t_4\right] \cdot \vec{c}_f + \left[t_1 \beta_h + t_2\right] \cdot \vec{c}_g + \beta_h \cdot \vec{c}_h$$

2°) Choix proprement dit de $\vec{b}^{\,\prime}(A)$ dans (P) :

Le point appartenant au plan (P), ses coordonnées barycentriques γ_i satisfont les relations (a) et (b) ou (a) et (b').

$$(a_2) \quad \sum_{i \in Ak} \gamma_i = 1$$

$$(b_2) \quad \sum_{i \in Ak} \gamma_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A) - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right]$$

soit :

$$(a'_2) \quad \gamma_f + \gamma_g + \gamma_h + \gamma_k = 1$$

$$(b'_2) \quad \alpha_g^3 \gamma_g + \alpha_h^3 \gamma_h + \alpha_k^4 \gamma_k = \alpha_c^3 \quad \text{où } \alpha_k^4 = \left[k - \vec{c}_f\right]\left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right]$$

.../...

Les coefficients α_g^3, α_h^3, α_c^3 sont bien les mêmes que ceux qui apparaissent dans le calcul de $\vec{b}^+(A)$. Seul apparaît un terme en γ_k dans chacune des équations. On peut donc utiliser la résolution du système (a'_1), (b'_1).

On a en effet :

$$\gamma_g = -\frac{\alpha_h^3}{\alpha_g^3}\ h + \frac{\alpha_c^3}{\alpha_g^3} - \frac{\alpha_h^4}{\alpha_g^3}\ \gamma_k$$

$$(g_1) \qquad \boxed{\gamma_g = t_1\ \gamma_h + t_2 - r\ \gamma_k} \qquad \text{où } r = \frac{\alpha_k^4}{\alpha_g^3}$$

$$\gamma_f = 1 - \gamma_g - \gamma_h - \gamma_k = 1 - \left[t_1\ \gamma_h + t_2 - r\ \gamma_k\right] - \gamma_h - \gamma_k$$

$$\gamma_f = -(1 + t_1)\ \gamma_h + (1 - t_2) + (r - 1)\ \gamma_k .$$

$$(h_1) \qquad \boxed{\gamma_f = t_3\ \gamma_h + t_4 + (r - 1)\ \gamma_k .}$$

Tout point du plan ayant deux degrés de liberté, on peut choisir des valeurs arbitraires de γ_h et γ_k. Nous les choisirons comme suit :

$$\gamma_h = 0 \qquad \gamma_k = \beta_h .$$

Ces valeurs définissent un point b' (A) du plan (P) grâce à (g_1) et (h_1). Les coordonnées barycentriques de ce point sont :

$$\begin{cases} \gamma_f = t_4 + (r - 1)\ \beta_h . \\ \gamma_g = t_2 - r\ \beta_h \\ \gamma_h = 0 \\ \gamma_k = \beta_h . \end{cases}$$

Evaluons alors le vecteur $\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A)$.

.../...

$$\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A) = \left[t_4 + (r - 1)\ \beta_h - t_3\ \beta_h - t_4\right]\ \vec{c}_f + \left[t_2 - r\ \beta_h - t_1\ \beta_h \quad t_2\right]\vec{c}_g$$
$$- \beta_h . \vec{c}_h + \beta_h . \vec{c}_k$$

$$\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A) = \left[r - 1 - t_3\right]\ \beta_h . \vec{c}_f - (r + t_1)\ \beta_h . \vec{c}_g - \beta_h . \vec{c}_h + \beta_h . \vec{c}_k$$

mais $r - 1 - t_3 = r - 1 + (1 + t_1) = r + t_1$

d'où finalement :

$$\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A) = \left[r + t_1\right] . \beta_h . \vec{c}_f - \left[r + t_1\right]\ \beta_h . \vec{c}_g - \beta_h . \vec{c}_h + \beta_k . \vec{c}_k$$

mais β_h est strictement positif, donc le vecteur $\vec{b}'(A) - \vec{b}^+(A)$ est colinéaire au vecteur $\vec{U}$.

$$\vec{U} = \left[r + t_1\right]\ \vec{c}_f - \left[r + t_1\right]\ \vec{c}_g - \vec{c}_h + \vec{c}_k$$

Ce vecteur n'a en général aucune raison d'être nul on colinéaire à $\left[\vec{q}^+(A) - \vec{q}(A)\right]$

Il présente l'avantage d'être relativement simple à calculer.

.../...

CAS de CINQ INDICES : et plus

Soit A_l un ensemble de 5 indices (f,g,h,k,l). On l'écrit sous la forme :

$$A_l = \{f,g,h,k\} \cup \{l\} = A_k \cup \{l\} .$$

1°) Equations liant les coordonnées barycentriques de tout point du plan (P).

(a) $$\sum_{i \in A_l} \gamma_i = 1.$$

(b) $$\sum_{i \in A} \gamma_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A) - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right].$$

(c) $$\sum_{i \in A_l} \gamma_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_k) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A_k) - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_k) - \vec{q}(A)\right].$$

(b) exprime l'orthogonalité du plan (P) à la droite $(\vec{q}(f,g), \vec{q}(A))$.

(c) exprime l'orthogonalité de (P) à la droite $(\vec{q}(A_k), \vec{q}(A))$.

Tout point du plan a, là encore, deux degrés de liberté.

2°) Equations permettant le calcul de $\vec{b}^{+}(A_l)$.

Les trois équations (a), (b), (c) sont valables.

(h) $$\sum_{i \in A_l} \gamma_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_l) - \vec{q}(A_k)\right] = \left[\vec{q}(A_l) - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_l) - \vec{q}(A_k)\right]$$

Cette relation exprime l'orthogonalité dans le plan (P), de $\left[\vec{b}^{+}(A_l) - \vec{q}(A_l)\right]$ et $\left[\vec{q}(A_l) - \vec{q}(A_k)\right]$.

(i) $$\left|\vec{b}^{+}(A_l) - \vec{q}(A_l)\right|^2 = r^2(A_l)$$

relation qui exprime que les points $\vec{b}^{+}(A_l)$ et $\vec{q}(A_l)$ sont distants de la quantité (A_l)

La résolution du cas de 5 indices suit, en tout point, celle du cas de 4 indices.

.../...

On considère l'intersection du lieu des solutions de base de A_k (cercle (C_1) dans un plan (P), de centre $\vec{q}(A_k)$ et rayon $r(A_k)$) et du lieu des solutions de base $\vec{b}^{+}(f,l)$, hypersphère (S) de centre $\vec{q}(f,l)$, rayon $r(f,l)$.

On s'intéresse toujours à l'intersection de (C_1) et de (C_2), cercle de centre $\vec{q}(f,l)$, rayon $r(f,l)$ découpé sur l'hypersphère (S) par le plan (P).

La détermination de $\vec{q}(A_l)$ et $r(A_l)$ démarque celle faite pour $\vec{q}(A_k)$ et $r(A_h)$ dans le cas de 4 indices.

Il faut connaître $\vec{q}(f,l)$ et $r(f,l)$ ce que l'on peut faire à l'aide des équations (e) et (f) généralisées au cas de 5 indices, et pour cela choisir un point $b'(A_l)$ du plan (P).

Généralisation : Dans le cas d'un ensemble A_n de n indices (f,g,... (n-1) n), on disposera du système d'équations suivant :

$$\sum_{i \in A_n} \alpha_i = 1$$

$$\sum_{i \in A_n} \alpha_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A) - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A)\right]$$

$$\sum_{i \in A_n} \alpha_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_k) - \vec{q}(A)\right] = \left[\vec{q}(A_k) - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_k) - \vec{q}(A)\right]$$

$$\sum_{i \in A_n} \alpha_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_l) - \vec{q}(A_k)\right] = \left[\vec{q}(A_l) - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_l) - \vec{q}(A_k)\right]$$

.....

$$\sum_{i \in A_n} \alpha_i \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_n) - \vec{q}(A_{n-1})\right] = \left[\vec{q}(A_n) - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(A_n) - \vec{q}(A_{n-1})\right]$$

$$\left|\vec{b}(A_n) - \vec{q}(A_n)\right|^2 = r^2(A_n).$$

Les (n-2) premières équations définissent tout point d'un plan (P), les deux dernières le particularisent.

On remarquera qu'à chaque étape (introduction d'un nouveau vecteur), le système R permettant le calcul de la solution de base se voit augmenté d'une nouvelle équation que chaque équation du système T déterminant le plan (P), a seulement un nouveau terme en plus, tous les autres étant demeurés invariants.

.../...

Ceci permet une simplification notable des calculs : pour résoudre le système T d'un ensemble, on utilise la résolution du système S de l'étape précédente.

Les calculs qui suivent montrent cette simplification dans le cas d'un ensemble de 5 indices.

Choix de $\overrightarrow{b'}(A)$ dans le cas d'un ensemble de 5 indices.

- Soit A_5 cet ensemble.

1°) Etude du système R :

Ce système a permis le calcul de $\overrightarrow{b}^{+}(A_{n-1})$.

$$\sum_{i \in A4} \gamma_i = 1$$

$$\sum_{i \in A4} \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A_3)\right] = \left[\vec{q}(A_3) - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(f,g) - \vec{q}(A_3)\right]$$

$$\sum_{i \in A4} \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(f,h) - \vec{q}(A_3)\right] = \left[\vec{q}(A_3) - \vec{c}_f\right] \left[\vec{q}(f,h) - \vec{q}(A_3)\right]$$

soit, en se reportant aux notations définies plus haut :

$$\gamma_f + \gamma_g + \gamma_h + \gamma_k = 1$$

$$\alpha_g^3 \gamma_g + \alpha_h^3 \gamma_h + \alpha_k^4 \gamma_k = \alpha_c^3$$

$$\delta_g^4 \gamma_g + \delta_h^4 \gamma_h + \delta_k^4 \gamma_k = \delta_c^4$$

où $\delta_i^4 \left[\vec{c}_i - \vec{c}_f\right] \cdot \left[\vec{q}(f,h) - \vec{q}(A)\right]$ $\quad i = g, h, k, c$

On avait trouvé que les deux premières équations permettaient de calculer :

$$\gamma_g = t_1 \gamma_h + t_2 + r \gamma_k$$

$$\gamma_f = t_3 \gamma_h + t_4 + (r-1) \gamma_k$$

Reportant ces valeurs dans la dernière équation, il vient :

$$\boxed{\gamma_h = s_1 \gamma_k + s_2}$$

.../...

$$\text{où } s_1 = \frac{r\delta_g^4 - \delta_k^4}{\delta_g^4 t_1 + \delta_h^4} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{\delta_c^4 - \delta_g^4 t_2}{\delta_g^4 t_1 + \delta_h^4}$$

Il résulte que :

$$\gamma_g = t_1 (s_1 \gamma_k + s_2) + t_2 - r \gamma_k$$

$$\boxed{\gamma_g = s_3 \gamma_k + s_4}$$

où $s_3 = t_1 s_1 - r$ et $s_4 = t_1 s_2 + t_2$

et que :

$$\gamma_f = t_3 (s_1 \gamma_k + s_2) + t_4 + (r-1) \gamma_k$$

$$\boxed{\gamma_f = s_5 \gamma_k + s_6}$$

où $s_5 = t_3 s_1 + r - 1$ et $s_6 = t_3 s_2 + t_2$

2°) Etude du système T :

On obtient le système suivant :

$$\alpha_f + \alpha_g + \alpha_h + \alpha_k + \alpha_\ell = 1$$

$$\alpha_g^3 \gamma_g + \alpha_h^3 \gamma_h + \alpha_k^4 \gamma_k + \alpha_\ell^5 \gamma_\ell = \alpha_c^3$$

$$\delta_g^4 \gamma_g + \delta_h^4 \gamma_h + \delta_k^4 \gamma_k + \delta_\ell^5 \gamma_\ell = \delta_c^4$$

On peut écrire les deux premières équations sous la forme suivante :

$$\gamma_f + \gamma_g + \gamma_h + \gamma_k = 1 - \gamma_\ell.$$

$$\alpha_g^3 \gamma_g + \alpha_h^3 \gamma_h + \alpha_k^4 \gamma_k = \alpha_c^3 - \alpha_\ell^5 \gamma_\ell.$$

.../...

soit : $\gamma_g = t_1 \gamma_h + t_2 - r\,\gamma_k - u\,\gamma_\ell$

où $u = \dfrac{\alpha_\ell^{\,5}}{\alpha_g^{\,3}}$

et $\gamma_f = t_3\,\gamma_h + t_4 + (r-1)\,\gamma_k + (u-1)\,\gamma_\ell$.

On reporte ces valeurs de γ_f et γ_g dans la dernière équation, ce qui permet de calculer γ_h en fonction de γ_k et γ_ℓ :

$$\gamma_h = \frac{r\,\delta_g^{\,4} - \delta_k^{\,4}}{\delta_g^{\,4}\,t_1 + \delta_h^{\,4}}\,\gamma_k + \frac{\delta_c^{\,4} - \delta_g^{\,4}\,t_2}{\delta_g^{\,4}\,t_1 + \delta_h^{\,4}} + \frac{u\,\delta_g^{\,4} - \delta_\ell^{\,5}}{\delta_g^{\,4}\,t_1 + \delta_h^{\,4}}\,\gamma_\ell$$

soit : $\boxed{\gamma_h = s_1\,\gamma_k + s_2 + v\,\gamma_\ell}$

où $v = \dfrac{u\,\delta_g^{\,4} - \delta_\ell^{\,5}}{\delta_g^{\,4}\,t_1 + \gamma_h^{\,4}}$

Alors : $\gamma_g = t_1\,(s_1\,\gamma_k + s_2 + v\,\gamma_\ell) + t_2 - r\,\gamma_k - u\,\gamma_\ell$.

$$\boxed{\gamma_g = s_3\,\gamma_k + s_4 + (t_1 v - u)\,\gamma_\ell}$$

et $\gamma_f = t_3\,(s_1\,\gamma_k + s_2 + v\,\gamma_\ell) + t_4 + (r-1)\,\gamma_k + (u-1)\,\gamma_\ell$.

$$\gamma_f = s_5\,\gamma_k + s_6 + (t_3 v + u - 1)\,\gamma_\ell$$

On détermine le point $\vec{b}'(A_5)$ en posant :

$\gamma_k = 0 \qquad \gamma_\ell = \gamma_h$ (coordonnée barycentrique en h de $\vec{b}^{\,+}(A_4)$)

.../...

Les coordonnées barycentriques de $\vec{b}'(A_5)$ sont ainsi :

$$\tau_f = s_6 + \left[t_3 v + u - 1\right]\gamma_h$$
$$\tau_g = s_4 + \left[t_1 v - u\right]\gamma_h$$
$$\tau_h = s_2 + v\,\gamma_h$$
$$\tau_k = 0$$
$$\tau_\ell = \gamma_h$$

Evaluons $\vec{b}'(A_5) - \vec{b}^{\,+}(A_4)$.

$\vec{b}'(A_5) - \vec{b}^{\,+}(A_4) = \left[t_3 v + u - 1 - s_5\right] . \gamma_k . \vec{c_f} + \left[t_1 v - u - s_3\right]\gamma_k \vec{c_g} + \left[v - s_1\right]\gamma_k . \vec{c_h} - \gamma_k . \vec{c_k} + \gamma_k . \vec{c_\ell}$.

Remarquant que : * γ_h est strictement positif

* $t_1 v - u - s_3 = t_1 v - u - t_1 s_1 + r$

$= t_1 (v - s_1) - (u - r) = - m$

* $t_3 v + u - 1 - s_5 = t_3 v + u - 1 - t_3 s_1 - r + 1$

$= t_3 (v - s_1) + u - r = - (1 + t_1)(v - s_1) + u - r$

$= - t_1 (v - s_1) - (v - s_1) + (u - r)$

$= m + n$

où $m = - t_1 (v - s_1) + (u - r)$

$n = - (v - s_1)$

Il résulte que le vecteur $\vec{b}'(A_5) - \vec{b}^{\,+}(A_4)$ est colinéaire au vecteur $\vec{V}$:

$$\boxed{\vec{V} = \left[m + n\right]\vec{c_f} - m\,\vec{c_g} - n . \vec{c_h} - \vec{c_k} + \vec{c_\ell}}$$

.../...

CHAPITRE - II -

APPLICATION PRATIQUE

-o-o-o-

I - GÉNÉRALITÉS .-

Le chapître précédent, consacré à l'exposé de l'algorithme et à quelques aspects du problème qu'il permet de résoudre, propose une suite de calculs somme toute simples eu égard à une démarche logique assez complexe. En général, un ordinateur peut effectuer facilement des calculs même longs et complexes mais perd totalement cette aisance lorsqu'il s'agit de prendre des décisions logiques.

Tout ordinateur possède certains ordres logiques élémentaires tels :

"cette quantité est-elle négative ? "

"cette quantité est-elle nulle ? "

"y-a-t-il un 9 en une certaine position d'une mémoire ? "

ordres qui permettent d'aiguiller le calcul dans une voie ou une autre suivant la nature des réponses.

Par contre, pour déterminer les vecteurs $\vec{c_f}$ et $\vec{c_g}$ tels que :

$$\left[\frac{k_f - k_g}{k_f + k_g}\right]^2 \left|c_f - c_g\right|^2 = \max_{i \neq j \in I} \left[\frac{k_i \cdot k_j}{k_i + k_j}\right]^2 \left|c_i - c_j\right|^2$$

soit $d(f, g) = \max_{i \neq j \in I} d(i,j)$

.../...

l'ordinateur calculant les diverses quantités d (i,j) relatives aux indices distincts i et j, les comparera deux à deux alors qu'un opérateur déterminera les indices f et g cherchés à la simple lecture des d (i,j).

De même, étant donnés deux ensembles, l'un de n, l'autre de (n-1) indices pris parmi les n, par exemple (I,2,3,4) et (1,3,4), il faut un véritable programme pour faire comprendre à l'ordinateur quel indice différencie ces deux ensembles. Ce programme envisageant évidemment tous les cas possibles, suit la démarche de notre pensée qui, elle, résoud le problème de façon quasi instantanée.

L'idée essentielle de l'algorithme est, on l'a vu, de trouver le vecteur subminimax de l'ensemble total I. Dans cette recherche, on crée et manipule des ensembles d'indices qui, s'ils ont plus de deux éléments, sont décomposés en sous-ensembles dont on étudie d'abord les subminimax. On peut être ainsi amené à considérer un ensemble dont on a déjà calculé le subminimax. Par exemple, on calcule au début $\vec{b}^{+}(1,2)$ mais l'étude de (1,2,4) exige à nouveau l'étude de $\vec{b}^{+}(1,2)$.

On ne peut raisonnablement concevoir un programme qui, ayant étudié un ensemble, reprocèderait à son étude peu après.

L'algorithme, par ailleurs, ne demande de calculer la solution de base positive d'un ensemble qu'après s'être assuré que cette solution existe : en d'autres termes que si et seulement si l'ensemble considéré n'admet pas de subminimax. (autre que sa solution de base).

Ainsi se trouvent dégagés deux traits essentiels du programme, faire comprendre à l'ordinateur :

que telle étude a déjà été faite d'une part,

que telle étude ne doit pas être entreprise d'autre part.

.../...

A chaque fois que l'on étudie un ensemble d'indices, il faut garder un certain nombre d'informations qui sont :

- "l'étude a été faite"
- "les résultats de cette étude".

C'est l'exploitation de ces données qui permettra à l'ordinateur de prendre une décision quant à la suite des calculs.

A chaque étape du calcul (introduction d'un nouvel indice), il faut, en outre, faire en quelque sorte la synthèse des informations déjà obtenues. Les résultats de cette synthèse doivent être consultés par la suite et doivent, en conséquence, être conservés.

Une difficulté apparaît lorsqu'il s'agit d'exploiter les informations dont il vient d'être question : l'ordinateur ne peut, à priori, savoir où les prendre. Il est alors apparu nécessaire de faire correspondre une mémoire bien définie à chaque ensemble d'indices, mémoire où l'on emmagasinera tous les renseignements relatifs à cet ensemble.

Cette correspondance, pour être efficace, doit être telle qu'à deux ensembles distincts correspondent deux mémoires distinctes.

Numéroter les ensembles d'indices en affectant un numéro et un seul à un ensemble donné, c'est réaliser la correspondance cherchée. En effet, à chaque numéro il est facile de faire correspondre une mémoire bien déterminée.

.../...

Une numérotation évidente est la suivante :

à chaque ensemble (f,g,h,k,... ,l) on fait correspondre le nombre f,g,h,k,.. ,l.

Par exemple, à (1,2) correspond le nombre 12, à (1,2,3,4,5) le nombre 12.345.

Etant donné un ensemble initial de n vecteurs, on peut être, dans le cas le plus défavorable, amené à calculer la solution de base positive pour un ensemble de n indices. Cet ensemble peut être décomposé en sous-ensembles distincts de (n - 1), (n - 2), ... 3,2 indices.

$$\text{Soit } C_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } n \geqslant p \end{cases}$$

Ce nombre de sous-ensembles dinstincts de (n - 1), (n-2), .. 3, 2 indices est égal à :

$$\rho = C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1}$$

Il peut être évalué plus simplement.

En effet, on a la relation :

$$(x+1)^n = C_n^o x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-2} x + C_n^{n-1} x + C_n^n.$$

Faisant x = 1, il vient :

$$2^n = 1 + C_n^1 + \left[C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1}\right] + 1$$

d'où $\boxed{\rho = 2^n - (n+2)}$

Pour commenter clairement la numérotation énoncée plus haut, nous utiliserons la terminologie suivante :

.../...

Définition 1 : Etant donné un ensemble I de n indices, on appellera image de I l'ensemble des $2^n - (n+1)$ nombres qui numérotent et l'ensemble I lui-même et ses sous-ensembles distincts de (n - 1), (n - 2), ..., 3 et 2 indices.

Définition 2 : Soient i et j, $i < j$, deux nombres entiers. On appellera N_{ij} l'ensemble de tous les nombres entiers t tels que $i \leqslant t \leqslant j$.
N_{ij} est un sous-ensemble formé de l'ensemble N des nombres entiers.

L'image d'un ensemble I est la réunion de certains nombres pris parmi l'ensemble des entiers. Soient m le plus petit et n le plus grand de ces nombres.

On remarque que si tout élément de l'image de I appartient bien à $N_{m,n}$ en revanche tout élément de $N_{m,n}$ n'appartient pas nécessairement à l'image de I.
En terme mathématique, l'image de I et l'ensemble $N_{m,n}$ ne peuvent être identifiés.

Du point de vue réalisation sur ordinateur de la correspondance ensemble-mémoire, la numérotation donne naissance à deux possibilités.

1ère Possibilité :

On sait que les mémoires d'un ordinateur sont numérotées, le numéro constitue l'adresse de la mémoire.

On peut concevoir alors la correspondance suivante :
le nombre correspondant à chaque ensemble d'indices constitue l'adresse de la mémoire.

.../...

Par exemple, la mémoire 12 correspond à l'ensemble (1,2), la mémoire 134 à l'ensemble (1,3,4). L'inconvénient de cette correspondance est que le nombre des mémoires d'un ordinateur est limité : ainsi une 650 I. B. M. n'a que 2000 mémoires, numérotées de 0 à 1999, la mémoire 12.345 correspondant à (1,2,3,4,5) n'existe pas.

On peut imaginer un programme qui affecterait une mémoire réelle bien déterminée à un ensemble correspondant normalement à une mémoire qui n'existe pas. Les adresses possibles seraient inchangées.

Un tel programme a été écrit pour le cas d'un ensemble I de 5 indices et ordinateur 650 I. B. M. En effet, toutes les adresses sont possibles sauf 2345 correspondant à (2,3,4,5) et 12345 correspondant à (1,2,3,4,5) respectivement. Ce programme fournit l'adresse de la mémoire cherchée : il ne change pas les adresses possibles et fait correspondre des mémoires A et B distinctes aux ensembles (2,3,4,5) et (1,2,3,4,5).

2ème Possibilité :

On range tous les nombres constituant l'image de I par ordre de grandeur croissant à partir d'une mémoire connue A.

Par exemple :	1200000000	en A
	1230000000	en (A + 1)
	1234000000	en (A + 2)
	1234500000	en (A + 3)
	1240000000	en (A + 4)

.....

On fait correspondre à l'ensemble (f,g,h, ... l) contenu en (A + r) la mémoire (B + r) où B se déduit aisément de A par une relation de la forme :

B = A + nombre entier.

.../...

On construit un programme qui, étant donné le nombre f g h ... l consulte le contenu de toutes les mémoires à partir de (A). La consultation s'arrête dès que l'on rencontre la valeur f g h ... l. Un compteur de boucles permet alors de déterminer le nombre "r", d'où l'adresse B + r de la mémoire cherchée.

Ce programme est facile à rédiger car il se prête à bouclage. Il est peu encombrant en lui-même mais nécessite une double bande de mémoires ; celle des mémoires A, celle des mémoires B.

La 650 I. B. M. fait automatiquement et instantanément le travail du programme qui vient d'être proposé et ce, grâce à un ordre interne dit : "consultation de table". C'est cet ordre qui a été utilisé.

Rappelons les définitions suivantes :
Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Cette application fait correspondre à tout élément x de E un élément y de F, appelé image de x.

1) f est biunivoque si tout élément de F est image d'au plus un élément de E.

Ce qui est équivalent à dire qu'à deux éléments distincts de E correspondent deux éléments distincts de F.

2°) f est surjective si tout élément de F est image d'au moins un élément de E.

3°) Une application biunivoque et surjective de E dans F est appelée application de E sur F.

Nous avons vu que tout élément de l'ensemble $N_{m,n}$ n'est pas nécessairement image d'un ensemble d'indices : il existe au fond une application biunivoque mais non surjective de l'ensemble image de I dans $N_{m,n}$.

.../...

Une numérotation a été trouvée qui, étant donné un ensemble I de n indices, définit une application de l'image de I sur l'ensemble $N_{i,j}$ défini par $i = 1$ et $j = 2^n - (n + 1)$.

Tout ensemble d'indices correspond alors à un seul nombre de l'intervalle $(1, 2^n - (n + 1))$ et tout nombre de cet intervalle est image d'un seul ensemble d'indices.

Cette numérotation quoique compliquée, peut être intéressante en ce sens qu'elle définit un ensemble de nombres consécutifs dont chacun est image d'un ensemble d'indices et d'un seul.

Elle permet d'identifier l'ensemble image de I et $N_{i,j}$: c'est la raison qui nous pousse à la développer.

.../...

NUMEROTATION des ENSEMBLES d'INDICES

-o-o-o-o-

I - INTRODUCTION. -

Le tableau 1 montre les différents ensembles d'indices qu'il faut considérer dans le cas d'un ensemble initial I de 6 éléments.

Ce tableau expose le cas le plus défavorable à savoir celui où il n'y a aucun subminimax, ce qui n'est pas absurde dans la mesure où un programme doit faire face à toutes les éventualités.

Nous numéroterons les ensembles à la suite les uns des autres au fur-et-à-mesure qu'ils se présenteront. Toutefois, un même ensemble pouvant revenir plusieurs fois on lui affectera un numéro la première fois qu'on le rencontrera formellement.

II - La NUMEROTATION proprement dite. -

A priori, on peut numéroter les ensembles de plusieurs façons. Nous considérons :

A - La numérotation par catégories, c'est-à-dire que l'on range les ensembles ayant un même nombre d'indices à la suite les uns des autres.

B - La numérotation de tous les ensembles à la suite les uns des autres sans considération du nombre d'indices.

.../...

TABLEAU 1

Ensembles à :	2 indices	3 indices	4 indices	5 indices	6 indices
Etape n° 1	$(1,2)_1$				
Etape n° 2	$(1,3)_2$ $(2,3)_3$	$(1,2,3)_4$			
Etape n° 3	$(1,4)_5$ $(2,4)_6$ $(3,4)_8$	$(1,2,4)_7$ $(1,3,4)_9$ $(2,3,4)_{10}$	$(1,2,3,4)_{11}$		
Etape n° 4	$(1,5)_{12}$ $(2,5)_{13}$ $(3,5)_{15}$ $(4,5)_{19}$	$(1,2,5)_{14}$ $(1,3,5)_{16}$ $(2,3,5)_{17}$ $(1,4,5)_{20}$ $(2,4,5)_{21}$ $(3,4,5)_{23}$	$(1,2,3,5)_{18}$ $(1,2,4,5)_{22}$ $(1,3,4,5)_{24}$ $(2,3,4,5)_{25}$	$(1,2,3,4,5)_{26}$	
Etape n° 5	$(1,6)_{27}$ $(2,6)_{28}$ $(3,6)_{30}$ $(4,6)_{34}$ $(5,6)_{42}$	$(1,2,6)_{29}$ $(1,3,6)_{31}$ $(2,3,6)_{32}$ $(1,4,6)_{35}$ $(2,4,6)_{36}$ $(3,4,6)_{38}$ $(1,5,6)_{43}$ $(2,5,6)_{44}$ $(3,5,6)_{46}$ $(4,5,6)_{50}$	$(1,2,3,6)_{33}$ $(1,2,4,6)_{37}$ $(1,3,4,6)_{39}$ $(2,3,4,6)_{40}$ $(1,2,5,6)_{45}$ $(1,3,5,6)_{47}$ $(2,3,5,6)_{48}$ $(1,4,5,6)_{51}$ $(2,4,5,6)_{52}$ $(3,4,5,6)_{54}$	$(1,2,3,4,6)_{41}$ $(1,2,3,5,6)_{49}$ $(1,2,4,5,6)_{53}$ $(1,3,4,5,6)_{55}$ $(2,3,4,5,6)_{56}$	$(1,2,3,4,5,6)_{57}$

A - Numérotation par catégorie :

De façon générale, étant donné un ensemble de r indices $(a_1, a_2, \dots a_r)$ on appellera q le rang de cet ensemble, calculé en numérotant tous les ensembles de r indices de l'étape n° $(a_r - 1)$ au fur-et-à-mesure qu'on les étudie.

1°) Ensembles de 2 indices :

Soit (a,b) un ensemble de deux indices.

(a,b) apparaît au cours de l'étape n° (b - 1), étape au début de laquelle on introduit l'indice b.

- Au cours de cette étape, (a,b) est le $q^{\text{ième}}$ ensemble de deux indices à être étudié, où q = a.
- Avant cette étape, on a étudié C_{b-1}^{2} ensembles distincts de 2 indices.

Ainsi, en numérotant tous les ensembles de 2 indices à la suite les uns des autres, le rang p de (a,b) est :

$$\boxed{p(a,b) = C_{b-1}^{2} + a} \qquad \text{où } C_{b-1}^{2} = 0 \text{ si } b < 3.$$

Exemples :

$p(1,2) = 0 + 1 = 1$

$p(3,4) = C_3^2 + 3 = 6$

$p(2,6) = C_5^2 + 2 = 10 + 2 = 12.$

2°) Ensembles de 3 indices :

Soit (a,b,c) un tel ensemble.

(a,b,c) apparaît, pour la première fois, comme ensemble de 3 indices de l'étape n° (c - 1), au début de laquelle on introduit l'indice c.

- Au cours de cette étape, c'est le $q^{\text{ième}}$ ensemble de 3 indices à être calculé.

.../...

Nous allons déterminer ce nombre q.

Si l'on remarque que :

- à chaque ensemble de 3 indices (a,b,c) correspond un ensemble et un seul de 2 indices (a,b), obtenu en éliminant l'indice le plus à droite donc l'indice le plus élevé.
- cet ensemble (a,b) ainsi déterminé est étudié avant (a,b,c).
- ainsi le nombre total d'ensembles de 2 indices étudiés avant (a,b) est égal au nombre d'ensembles de 3 indices étudiés avant (a,b,c) au cours de l'étape n° (c - 1).

Il résulte que le rang q (a,b,c) calculé depuis le début de l'étape n° (c - 1) est égal au rang p (a,b) calculé en rangeant tous les ensembles de 2 indices à la suite les uns des autres.

$$q(a,b,c) = p(a,b) = C_{b-1}^{2} + a.$$

- Avant cette étape, on a étudié C_{c-1}^{3} ensembles distincts de 3 indices.

d'où finalement : $p(a,b,c) = q(a,b,c) + C_{c-1}^{2} = p(a,b) + C_{c-1}^{2}$

$$\boxed{p(a,b,c) = C_{c-1}^{3} + C_{b-1}^{2} + a.}$$

où $C_{c-1}^{3} = 0$ si $c < 4$ et $C_{b-1}^{2} = 0$ si $b < 3$.

Exemples :

$p(1,3,4) = C_3^3 + C_2^2 + 1 = 3$

$p(2,4,5) = C_4^3 + C_3^2 + 2 = 9$

$p(4,5,6) = C_5^3 + C_4^2 + 4 = 20.$

3°) Ensembles de 4 indices :

Soit (a,b,c,d) un tel ensemble. Il apparaît la première fois au cours de l'étape n° (d - 1).

.../...

- Au cours de cette étape, c'est le $q^{\text{ième}}$ ensemble de 4 indices à être étudié.

On remarque que :

- à chaque ensemble de 4 indices (a,b,c,d) correspond un ensemble et un seul de 3 indices (a,b,c) obtenu en éliminant l'indice le plus à droite de (a,b,c,d).
- cet ensemble (a,b,c) ainsi défini est étudié avant (a,b,c,d)
- le nombre total d'ensembles de 3 indices étudiés avant (a,b,c) est égal au nombre d'ensembles de 4 indices étudiés avant (a,b,c,d) au cours de l'étape n° (d - 1).

d'où il vient : $q(a,b,c,d) = p(a,b,c) = C_{c-1}^{3} + C_{b-1}^{2} + a$.

- Avant cette étape C_{d-1}^{4} ensembles distincts de 4 indices ont été étudiés.

Finalement : $p(a,b,c,d) = q(a,b,c,d) + C_{d-1}^{4} = p(a,b,c) + C_{d-1}^{4}$.

$$\boxed{p(a,b,c,d) = C_{d-1}^{4} + C_{c-1}^{3} + C_{b-1}^{2} + a}$$

où $C_{d-1}^{4} = 0$ si $d < 5$; $C_{c-1}^{3} = 0$ si $c < 4$; $C_{b-1}^{2} = 0$ si $b < 3$.

<u>Exemples</u> :

$$p(1,2,3,4) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$$
$$p(1,3,4,5) = C_4^4 + C_3^3 + C_2^2 + 1 = 4$$
$$p(2,4,5,6) = C_5^4 + C_4^3 + C_3^2 + 2 = 14$$

4°) <u>Généralisation à un ensemble de r indices</u> :

Soit un ensemble de (r - 1) indices : $(b_1, b_2, \dots b_{r-1})$ et supposons que son rang p est donné par la relation :

.../...

$$p(b_1, b_2, \dots b_{r-1}) = \sum_{i=2,\dots r-1} C_{b_i - 1}^{i} + b_1 . \qquad \text{si } i < j.$$

$$\text{où } C_i^j = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{i!}{j!\,(i-j)!} \end{cases} \quad \text{si } i \geqslant j.$$

On vient de voir que cette relation est valable dans le cas d'ensembles de 2,3,4 indices.

Nous allons montrer qu'elle est générale, et ce grâce à un raisonnement par récurrence.

On suppose donc la relation valable pour un ensemble de (r-1) indices, on va montrer qu'elle l'est pour un ensemble de r indices.

Soit donc un ensemble de r indices $(a_1, a_2, a_3 \dots a_r)$. Cet ensembleapparaît le première fois au cours de l'étape n° $(a_r - 1)$.

- Au cours de cette étape, c'est le $q^{\text{ième}}$ ensemble de r indices à être étudié.

Utilisant à nouveau la remarque suivante :

- à l'ensemble $(a_1, a_2, \dots a_r)$ correspond un ensemble unique $(a_1, a_2, \dots a_{r-1})$ obtenu en éliminant l'indice le plus à droite de $(a_1, a_2, \dots a_r)$.
- cet ensemble $(a_1, a_2, \dots a_{r-1})$, ainsi défini, est étudié avant $(a_1, a_2, \dots a_f)$.
- le nombre total d'ensembles de (r-1) indices étudiés avant $(a_1, a_2, \dots a_{r-1})$ est égal au nombre d'ensembles de r indices étudiés avant $(a_1, a_2, \dots a_r)$ au cours de l'étape n° $(a_r - 1)$.

Il résulte que : $q(a_1, a_2, \dots a_r) = p(a_1, a_2, \dots a_{r-1})$.

.../...

La formule étant supposée vraie pour un ensemble de (r-1) indices, on peut écrire :

$$p(a_1, a_2, \dots a_{r-1}) = \sum_{i=2,\dots r-1} C^{i}_{a_i - 1} + a_1$$

- Avant cette étape $C^{r}_{a_r - 1}$ ensembles de r indices ont été étudiés.

Il vient donc :

$$p(a_1, a_2, \dots a_r) = q(a_1, a_2, \dots a_r) + C^{r}_{a_r - 1}$$

$$p(a_1, a_2, \dots a_r) = p(a_1, a_2, \dots a_{r-1}) + C^{r}_{a_r - 1}$$

$$= \sum_{i=2,\dots r-1} C^{i}_{a_i - 1} + a_1 + C^{r}_{a_r - 1}$$

$$\boxed{p(a_1, a_2, \dots a_r) = \sum_{i=2,\dots r} C^{i}_{a_i - 1} + a_1 \quad \text{où : } C^{j}_{i} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \dfrac{i!}{j!\,(c-j)!} & \text{si } i \geqslant j \end{cases}}$$

La formule est vraie pour un ensemble de r indices si elle l'est pour un de (r-1) indices ; étant vérifiée pour r = 2,3,4, elle est toujours vérifiée.

Remarquons pour conclure que cette numérotation revient, sur le tableau 1, à numéroter les ensembles par colonne.

B - Numérotation de tous les ensembles à la suite les uns des autres sans considération du nombre d'indices :

Soit un ensemble quelconque de r indiees tel que le crée l'algorithme.

Il est de la forme : $A_o = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_r)$

.../...

Les indices a_i sont des nombres entiers vérifiant les inégalités suivantes :

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{r-1} < a_r \leqslant r.$$

Nous examinerons tout d'abord le cas où le dernier indice de l'ensemble A_o, soit a_r, est égal au nombre d'indices r. Ce fait particulier facilite la détermination du rang $R(A) = R(a_1, a_2, \dots a_r)$.

1°) Cas où $a_r = r$:

Les a_i étant r nombres entiers vérifiant les inégalités $1 \leqslant a_1 < a_2 < \dots < a_{r-1} < a_r \leqslant r$ et puisque $a_r = r$,

on a nécessairement : $a_i = a_{i-1} + 1$ avec $a_o = 0$.

relation valable pour $i = 1, 2, \dots r$.

L'ensemble A_o s'écrit donc $A_o \equiv (1, 2, 3, 4, \dots r-1, r)$.

C'est le dernier ensemble de l'étape n° (r - 1) ou encore le premier ensemble de r indices à être étudié par l'algorithme.

Déterminer le rang R (1,2,... r) revient à énumérer tous les ensembles distincts de 2,3,... (r-1) indices étudiés avant (1,2,... r).

Ainsi : $R(1, 2, 3, \dots r) = C^{2}_{r} + C^{3}_{r} + C^{4}_{r} + \dots + C^{r-1}_{r} + C^{r}_{r}$.

$$\boxed{R(1, 2, 3, \dots r) = 2^r - (r + 1)}$$

Exemples :

r = 2	R (1,2)	$= (2)^2 - 3 = 1$
r = 4	R (1,2,3,4)	$= (2)^4 - 5 = 11$
r = 6	R (1,2,3,4,5,6)	$= (2)^6 - 7 = 57$.

.../...

2°) Cas Général :

L'idée directrice, dans la recherche du rang R $(a_1, a_2, \dots a_r)$ est la suivante :

on énumère tous les ensembles étudiés avant $(a_1, a_2, \dots a_r)$,

- les ensembles de $r, (r-1); (r-2), \dots 2$ indices d'une part,
- les ensembles de $(r+1), (r+2), \dots a_r$ indices d'autre part.

A cet effet, il convient de bien remarquer la façon dont opère l'algorithme : avant d'étudier l'ensemble B_p de p indices, on étudie dans l'ordre les ensembles de (p-1) indices suivants.

$$B_p^{p-1,1} \; ; \; B_p^{p-1,2} \; ; \dots\dots ; \; B_p^{p-1,k} \; ; \dots\dots ; \; B_p^{p-1,p-2}$$

où, rappelons-le, l'ensemble $B_p^{p-1,k}$ est obtenu à partir de B_p en éliminant le $k^{ième}$ indice à partir de la droite.

a) Enumération des ensembles de plus de r indices étudiés avant A_o :

L'ensemble considéré $A_o = (a_1, a_2, \dots a_r)$ peut être interprété comme sous-ensembles de r indices de $m = a_r - r$ ensembles $A_1, A_2, \dots A_i, \dots A_m$ où le dernier ensemble A_m est $A_m = (1, 2, 3, 4, \dots (a_r - 1), a_r)$.

Chaque ensemble A_i a un nombre $(r + i)$ d'indices parmi lesquels figurent les $(r + i - 1)$ de l'ensemble A_{i-1}. L'ensemble A_1 est obtenu, à partir de A_o, de la manière suivante :

si $a_1 \neq 1$ $\quad A_1 = (1, a_1, a_2, \dots a_r)$

si $a_1 = 1$; $a_2 \neq 2$ $\quad A_1 = (a_1, 2, a_2, \dots a_r) \equiv (1, 2, a_3, \dots a_r)$

si $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 \neq 3$ $\quad A_1 = (a_1, a_2, 3, a_4, \dots a_r)$

$\equiv (1, 2, 3, a_4, \dots a_r)$

.../...

si $a_i = \begin{cases} i \text{ pour } i < j \\ \neq j \text{ pour } i = j \end{cases}$ $\quad A_1 = (a_1, a_2, a_3, \dots a_{j-1}, j, a_{j+1}, \dots a_r)$

$\equiv (1, 2, 3, \dots (j-1), j, a_{j+1}, \dots a_r)$

Chaque ensemble A_i est obtenu à partir de A_{i-1} exactement de la même façon.

Nous appellerons S_i le rang de l'ensemble A_i compté par catégorie : en d'autres termes A_i est le S_i ième ensemble de (r+i) indices introduit par l'algorithme.

Le nombre d'ensembles de $(r+1), (r+2), \dots (r+i), \dots, a_r$ indices, étudiés avant A_o, est, si l'on remarque que tous les A_i sont après A_o :

$$S = (s_1 - 1) + (s_2 - 2) + (s_3 - 3) + \dots + (s_m - 1)$$

$$S = \sum_{i=1,\dots m} S_i - m$$

$$\boxed{S = \sum_{i=1,\dots m} S_i + r - a_r}$$

b) Enumération des ensembles d'au plus r indices étudiés avant A_o :

Se référant toujours à la façon dont opère l'algorithme, il apparaît que :

le dernier ensemble de (r-1) indices étudié avant $A_o = (a_1, \dots a_r)$ est :

$$B_1 = (a_2, a_3, a_4, \dots a_r)$$

le dernier ensemble de (r-2) indices étudié avant A_o est :

$$B_2 = (a_3, a_4, \dots, a_r)$$

.....

le dernier ensemble de (r-i) indices étudié avant A_o est :

$$B_{r-i} = (a_{i+1}, a_{i+2}, \dots a_r)$$

.....

le dernier ensemble de 2 indices étudié avant A_o est :

$$B_{r-2} = (a_{r-1}, a_r)$$

.../...

Nous appellerons t_i le rang de l'ensemble B_i compté par catégorie : en d'autres termes B_i est le t_i ième ensemble de $(r-i)$ indices introduit par l'algorithme.

Le nombre d'ensembles de $(r-1)$, $(r-2)$ ... $(r-i)$, ... 2 indices, étudiés par l'algorithme avant A_o, est, si l'on remarque que :

— tous les B_i le sont avant A_o.

— Il faut compter les ensembles de r indices étudiés avant A_o (on appellera t_o, le rang de A_o, compté par catégorie) :

$$T = t_o + t_1 + t_2 + \dots t_{r-2}$$

$$T = \sum_{j=0,\dots r-2} t_j$$

Conclusion Générale . -

Le rang cherché $R(a_1, a_2, \dots a_r) = S + T$.

$$(\tau) \quad \boxed{R(A_o) = R(a_1, a_2, \dots a_r) = \sum_{i=1,\dots (a_r - r)} S_i + \sum_{j=0,\dots r-2} b_j + r - a_r}$$

Rappelons que les s_i et t_j sont donnés par la relation établie plus haut : par exemple, posant $s_i = p(b_1, b_2, \dots b_{r+i})$, il vient :

$$S_i = \sum_{k=2,\dots (r+i)} C_{b_k - 1}^{k} + b_1 \qquad \text{où } C_m^n = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!} & \text{si } m \geqslant n \end{cases}$$

Remarquons enfin que la relation τ est absolument générale : elle est valable en particulier dans le cas où l'ensemble A_o est de la forme $(1, 2, \dots r-1, r)$ ainsi que le montrera l'exemple 1.

.../...

Exemple 1 : Proposons nous de déterminer le rang de l'ensemble $A_o = (1, 2, 3, 4, \dots r-1, r)$ par la formule générale.

Ensembles A_i : Il y en a $a_r - r = r - r = 0$. Ainsi il n'existe aucun ensemble A_i. La formule s'écrit :

$$R(1, 2, 3, \dots, r) = \sum_{j=0,\dots r-2} t_j$$

Ensembles A_o et B_i :

$$t_o = p(1, 2, 3, \dots r) = 1 + C_2^2 + C_2^3 + \dots + C_{r-1}^r$$

$$t_1 = p(2, 3, \dots r) = 2 + C_2^2 + C_3^3 + \dots + C_{r-1}^{r-1}$$

$$t_2 = p(3, 4, \dots r) = 3 + C_3^2 + C_4^3 + \dots$$

.....

$$t_{r-2} = p(r-1, r) = (r-1) + C_{r-1}^2$$

Associons les termes comme suit :

$$1 = 1$$

$$2 + C_2^2 = 1 + 2$$

$$3 + C_3^2 + C_3^3 = 3 + 2^3 - (1 + C_3^1) = 3 + 2^3 - 4$$

$$4 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 2^4 - (1 + C_4^1) = 4 + 2^4 - 5$$

.....

$$(r-1) + C_{r-1}^2 + C_{r-1}^3 + C_{r-1}^4 + \dots + C_{r-1}^{r-1} = (r-1) + 2^r - (1 + C_{r-1}^1) = (r-1) + 2^{r-1} - r$$

Il vient :

$$R(1,2,3 \ldots r) = 1 + 1 + 2 + 3 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{r-1} - r$$
$$= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2^{r-1} - r$$

On obtient ainsi les r premiers termes d'une série géométrique de raison 2 dont le premier terme est 2^0. Sa somme est :

$$2^0 \cdot \frac{2^r - 1}{2 - 1} = 2^r - 1$$

d'où finalement :

$$R(1,2,3,\ldots r) = 2^r - 1 - r = 2^r - (r+1)$$

c'est bien la relation obtenue directement.

Exemple 2 : Déterminer R (1,3,6)

$r = 3 \quad a_r = 6$. Il existe $6 - 3 = 3$ ensembles A_i

Ensembles A_i :

$s_1 = p(1,2,3,6) \quad = 1 + 0 + 0 + 6_5^4 = 1 + 5 = 6$

$s_2 = p(1,2,3,4,6) \quad = 1 + 0 + 0 + 0 + C_5^5 = 1 + 1 = 2$

$s_3 = p(1,2,3,4,5,6) = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$

d'où : $\sum_{i=1,2,3} s_i = 6 + 2 + 1 = 9$.

Ensembles B_i et A_o :

$t_o = p(1,3,6) = 1 + C_2^2 + C_5^3 = 1 + 1 + 10 = 12$

$t_1 = p(3,6) = 3 + C_5^2 = 3 + 10 = 13$

$\sum_{j=0;1} t_j = 12 + 13 = 25$

$r - a_r = -3$

Il vient finalement : $R(1,3,6) = 9 + 25 - 3 = 31$.

C'est bien le numéro qu'indique le tableau 1.

.../...

Conclusion Générale sur la Numérotation.

La formule (τ) a le désavantage d'être assez lourde mais a l'avantage d'affecter des numéros qui se suivent aux divers ensembles.

Dans le cas d'un ensemble I de 6 éléments, la formule permet de définir l'intervalle (1,2,.... 57) possédant les propriétés suivantes :

- à deux ensembles d'indices distincts, créés au cours de l'étude de la solution, correspondent 2 entiers distincts de l'intervalle ;
- tout entier de l'intervalle est image d'un ensemble.

Du point de vue calcul sur ordinateurs, il suffirait de réserver une seule bande de mémoires. Le programme en lui-même serait assez compliqué mais réalisable.

II - LE PROGRAMME PROPREMENT DIT. -

Le programme résoud le problème de recherche du minimax dans les conditions suivantes :

- le nombre n de vecteurs est au plus égal à 5.
- la dimension de l'espace euclidien dans lequel on travaille est au plus égale à 5.

C'est la capacité de l'ordinateur 650 I. B. M. qui est à l'origine de ces limitations. Les mémoires sont en effet presque toutes occupées par un tel programme : il est même nécessaire d'avoir un programme distinct qui calcule la solution de base relative à un ensemble de 5 indices.

L'utilisation du programme est relativement simple : on fournit un certain nombre de données qui sont :

- le nombre n de vecteurs ;
- la dimension r de l'espace ;
- les vecteurs.

L'ordinateur donne alors la solution du problème. Au cours de la recherche du minimax, quelques résultats intermédiaires sont perforés qui permettent de se rendre compte des différentes phases du calcul, ce sont :

- les indices (premières composantes des vecteurs auxquels ils correspondent) au fur-et-à-mesure qu'ils s'introduisent ;
- les différentes solutions de base positive qui ont été calculées et étudiées avant l'obtention du subminimax.

.../...

Le programme a été initialement écrit en langage symbolique PASØ, de façon à optimiser le temps de calcul. Il est assemblé en n mots par carte.

Au lieu de suivre la position de la virgule tout au long du programme, on utilise le procédé dit de "virgule flottante". On affecte à chaque nombre une "caractéristique" et une "mantisse". C'est la caractéristique qui permet de déterminer la position de la virgule. Certains ordinateurs sont dotés de la virgule flottante automatique ; en d'autres termes, l'ordinateur possède des ordres internes qui effectuent certaines opérations élémentaires sur des nombres écrits en virgule flottante.

Ne disposant pas de la virgule flottante automatique, on a fait appel à des programmes qui réalisent ces opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée.

Ces programmes utilisent la virgule flottante flair qui s'obtient de la façon suivante :

tout nombre est ecrit sous la forme :

$$(0\,,\ \underbrace{xxxxxxxx}_{8\ \text{décimales}})\ .\ 10^{\alpha}\ .$$

où α est un nombre entier, positif, négatif ou nul.

- la caractéristique est : $(50 + \alpha)$
- la mantisse est constituée par les huit décimales.

La nécessité de la virgule flottante apparaît d'autant mieux qu'un programme écrit en virgule simple limite le champ des valeurs de chaque variable, ce que que nous ne pouvons concevoir dans le problème qui nous intéresse.

Un organigramme général du programme est donné à la page suivante. Il permet de suivre les différentes étapes de la recherche.

.../...

On peut distinguer deux grandes parties :

- une première partie logique ;
- une seconde partie consacrée aux calculs effectifs des solutions de base d'ensembles de 2,3,4 et 5 indices.

Nous examinerons successivement la partie logique et celle consacrée aux calculs.

Remarquons, avant, qu'à des stades différents de la recherche du minimax on a besoin de calculer des expressions analogues ou de réaliser des processus logiques semblables.

Afin d'éviter les répétitions dans le programme, on utilise des "sous-programmes". Ce sont des programmes qui effectuent un travail bien déterminé et que l'on peut utiliser où l'on veut au cours du calcul. Ils supposent les données en certains endroits et possèdent un ordre de sortie variable, d'où leur vient cette faculté d'adaptation à des moments différents du calcul.

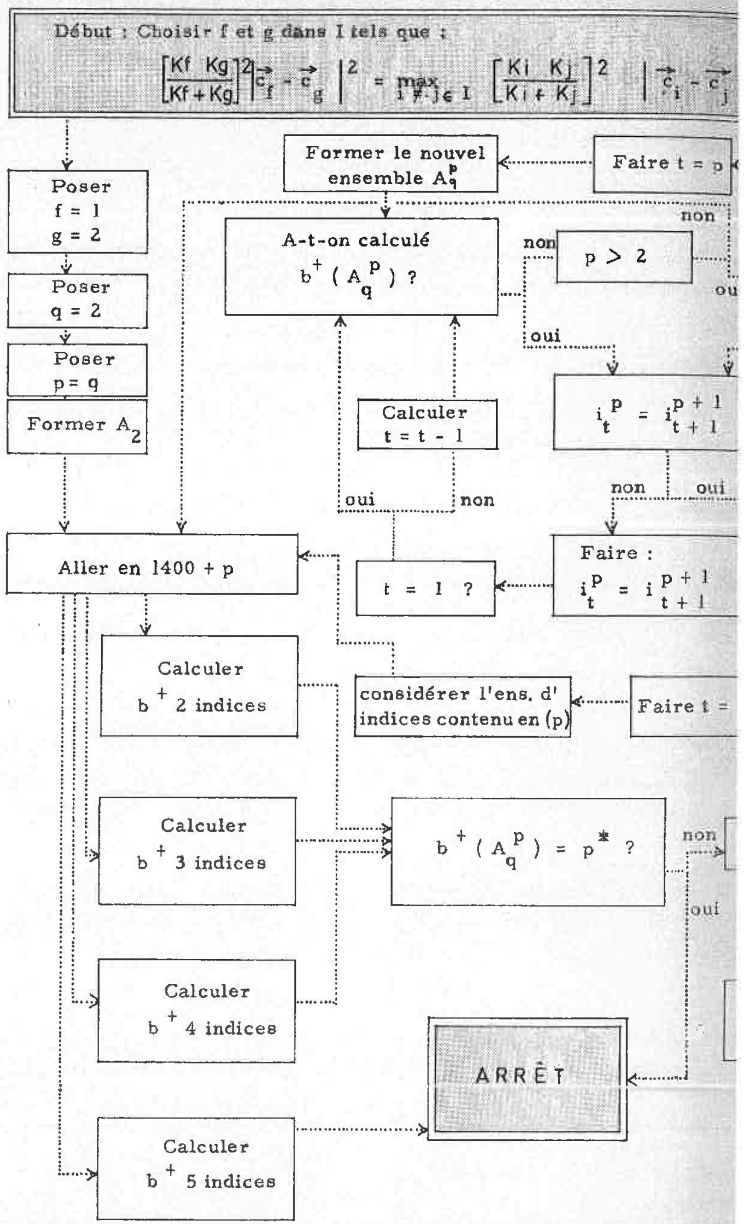
Nous examinerons successivement les parties logique et de calculs.

A - PARTIE LOGIQUE

1°) Idée Générale :

Nous allons, dans ce premier paragraphe, envisager certaines situations créées par l'algorithme, et déterminer ce qu'il convient de faire en de telles circonstances. Le second paragraphe montrera la réalisation de cette partie logique.

.../...



olutions de

ée aux

inimax or

rocessus

e des "sous-

n déterminé

t les données

eur vient

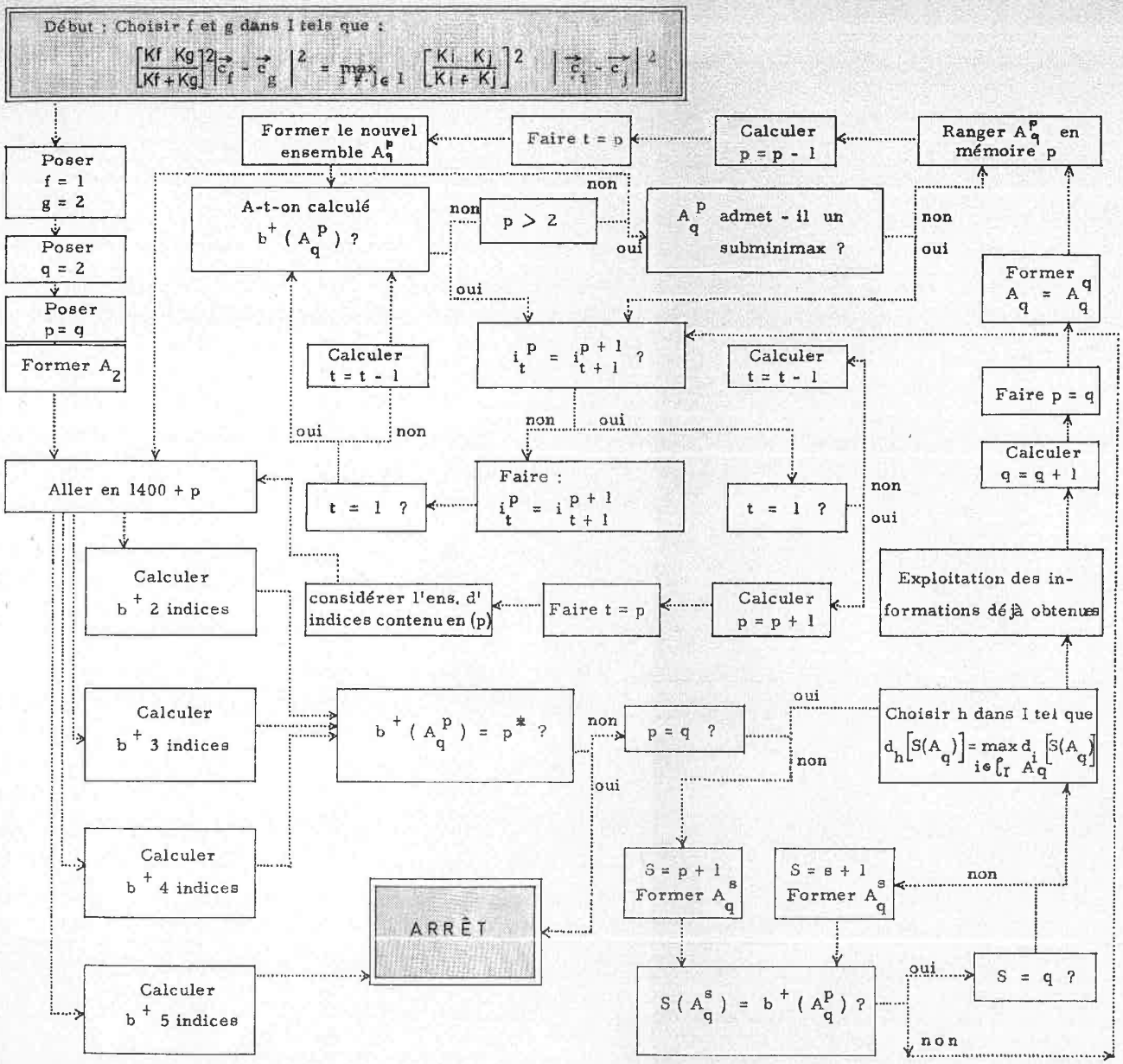
le calculs,

situation

de telles

e partie

.../...



Situation 1 : On considère un ensemble d'indices A.

Avant d'entreprendre le calcul de la solution de base positive $\vec{b}^{+}(A)$, il faut s'assurer de son existence.

On commence donc par se poser la question suivante :

question 1 :

"Le calcul de $\vec{b}^{+}(A)$ a-t-il déjà été effectué ? "

- Si oui, il n'y a aucune ambiguité : on considère un autre ensemble d'indices.
- Si non, on ne peut procéder directement au calcul sauf pour des ensembles de 2 indices.
  En effet, $\vec{b}^{+}(A)$ existe si et seulement si A n' admet pas de subminimax, et l'on a vu qu'un ensemble de 2 indices admet toujours une solution de base positive.

Ainsi, dans le cas d'une réponse négative à la question 1 et d'un ensemble de plus de 2 indices, on se pose la question 2.

"L'ensemble A admet-il un subminimax ? "

- Si oui, on considère un autre ensemble d'indices. Il est vain, en effet, de calculer la solution de base de A qui ne peut être positive et qui par conséquent ne peut être le vecteur minimax cherché.
- Si non, on sait que $\vec{b}^{+}(A)$ existe qui peut éventuellement être le vecteur minimax p^{*}. On procède à son calcul.

Situation 2 : Réponses négatives aux questions 1 et 2.

On range A_n^p et l'on forme le sous-ensemble de A_n^p obtenu en éliminant l'indice le plus à droite de A_n^p.

On considère ce nouvel ensemble et l'on se trouve alors dans la situation 1.

.../...

Situation 3 : Réponses : positive à la question 1 , ou
négative à la question 1 et positive à la question 2.

On introduit un nouvel ensemble d'indices B. Pour le déterminer on compare l'ensemble A_n^p que l'on vient de considérer à l'ensemble A_1 d'où il est issu.

Situation 4 : On vient de procèder au calcul effectif de $\vec{b}^+(A_n^p)$.

On se demande alors : (question 3).

"Le vecteur $\vec{b}^+(A_n^p)$ est-il le vecteur minimax $\vec{p}^*$ cherché ?"

Remarquons, une fois encore, que : le vecteur minimax est une des solutions de base positive.

une seule solution de base positive entraînera une réponse affirmative à la question 3.

- Si oui, le problème est résolu. $\vec{p}^* \equiv \vec{b}^+(A_n^p)$
- Si non, deux cas seprésentent.

  * A_n^p est le dernier ensemble d'une étape, c'est-à-dire que le nombre d'indices de A_n^p est égal au nombre d'indices déjà introduits.

    On introduit un nouvel indice (cf. situation 5)

  * Le nombre d'indices de A_n^p est inférieur au nombre d'indices déjà introduits.

On a vu que A_n^p apparaît comme sous-ensemble des ensembles $A_1, A_2, \ldots A_m$. (cf. la définition d'untel ensemble à la rubrique "Numérotation des ensembles").

On se pose la question suivante, question 4 :

"$\vec{b}^+(A_n^p)$ est-il subminimax pour l'ensemble A_i" ?

.../...

d'abord pour $A_i \equiv A_1$:

- Si oui, on se pose la question 4 pour $A_i \equiv A_2$.
- Si non, on passe à la considération d'un autre ensemble d'indices (situation 3).

Tant que l'on obtient une réponse positive à la question 4, on se repose cette même question. Ainsi, si l'on vient de s'interroger sur l'ensemble A_i, on s'interroge sur A_{i+1}. Si l'on répond par l'affirmative à :

"$\vec{b}^+(A_n^p)$ est-il subminimax pour A_m" ?

on introduit un nouvel indice (cf. situation 5).

Situation 5 : On décide d'introduire un nouvel indice.

Si l'on a déjà introduit un nombre q d'indices, on identifie le nouvel indice $h \equiv q + 1$.

h est tel que : $d_n\left[\vec{s}(A_q)\right] = \max\limits_{\substack{j \in I \\ j \notin A}} d_j\left[\vec{s}(A_q)\right]$

où $A_q \equiv (1,2,3,4,\ldots q-1, q)$.

$\vec{s}(A_q)$ est le subminimax de l'ensemble A_q. On notera qu'il peut arriver que $\vec{s}(A_q) \equiv \vec{b}^+(A_q)$.

Situation 6 : On vient d'introduire un nouvel indice h.

Il faut avant toute chose, exploiter les informations déjà obtenues.

La nécessité de ce travail est justifiée par le fait suivant :

s'il est certain qu'une solution de base $\vec{b}^+(A_n^p)$ déjà calculée n'engendre pas le minimum $\vec{p}^*$, il n'est, par contre, pas du tout certain que cette solution ne soit pas subminimax pour l'ensemble d'indices $A_n^p \cup \{h\}$

.../...

Or, l'on va peut-être être amené à considérer cet ensemble, donc à répondre à la question 2. (cf. situation 1).

Donc, étant donné une solution de base $\vec{b}^{+}(A_n^p)$ déjà calculée, on se pose cette question, question 5 :

"Le vecteur $\vec{b}^{+}(A_n^p)$ est-il subminimax pour l'ensemble $A_n^p \cup \{h\}$?"

On répond à cette question en considérant les résultats de l'étude de $\vec{b}^{+}(A_n^p)$, étude réalisée dans le but de répondre à la question 3.

Remarquons que l'exploitation des données obtenues en vue de la réponse à la question 5 ne peut se faire avant l'introduction du nouvel indice h. Avant cette introduction les ensembles $\{A_n^p\} \cup \{h\}$ ne sont en effet pas définis.

2°) Réalisation :

A chacun des 26 ensembles d'indices susceptibles d'être examinés, on affecte une mémoire à laquelle on pourra se référer grâce à l'ordre "consultation de table" (cf. Chapître II, "Généralités", "seconde possibilité").

Numérotons les positions de toute mémoire comme suit :

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Nous allons énoncer un certain nombre de conventions qui vont permettre d'exprimer divers états. Considérons la mémoire correspondant à l'ensemble A_n^p.

- La position 9 indique si :

  * il y a un 8 : que l'ensemble a déjà été calculé.
  * il y a un 9 : que l'ensemble n'a pas encore été calculé.

.../...

- La position 8 indique si :

  * il y a un 8 : que l'ensemble admet un subminimax.
  * il y a un 9 : que l'ensemble n'admet pas de subminimax.

- La position 4 correspond au vecteur $\vec{c}^{1}$ rangé le premier à partir de la mémoire 1700.

Elle indique si :

* il y a un 8 : que $d\left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right] \leq d^1\left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right]$
* il y a un 9 : que $d\left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right] > d^1\left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right]$

où $d^1\left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right] = \left[k^1\right]^2 \left|\vec{b}^{+}(A_n^p) - \vec{c}^{1}\right|^2$

$d\left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right]$ est la valeur de l'expression.

$d_j\left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right] = k_j^2 \left|\vec{b}^{+}(A_n^p) - \vec{c}_j\right|$, calculée pour le vecteur $\vec{c}_j$ correspondant à l'indice j pris arbitrairement dans A_n^p. On a vu, en effet, que cette quantité est invariarte pour tous les vecteurs correspondants à des indices de A_n^p.

Les positions 3, 2, 1, 0 jouent le même rôle que la position 4. Elles correspondent aux vecteurs $\vec{c}^{2}$, $\vec{c}^{3}$, $\vec{c}^{4}$, $\vec{c}^{5}$ rangés les deuxième, troisième, quatrième et cinquième respectivement.

Remarquons que si $\vec{c}^{i}$ (i = 1, 2, 3, 4, 5) correspond à un indice de A_n^p, on a alors l'égalité :

$$d^{*}\left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right] = d^{i}\left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right]$$

et, dans ce cas, d'après ce qui précède il faudrait mettre un 8 en position (5 - i). En fait cela n'est pas nécessaire car le contenu de la position (5 - i) n'est consulté, par la suite, que si le vecteur $\vec{c}^{i}$ ne correspond à aucun indice de A_n^p.

.../...

L'ordinateur, au début du programme, envoie la quantité 9 . 9 . 0 . 0 . 0 . 9 . 9 . 9 . 9 . 9 . dans toute mémoire correspondant à un ensemble d'indice.
Soustraire 1 en une position bien déterminée revient alors à mettre un 8 en cette position.

L'ordre créé par l'algorithme en identifiant les indices n'est pas celui - arbitraire - qui permet de ranger les vecteurs à partir de la mémoire 1700.
Afin de rendre l'ordinateur capable de déterminer les vecteurs qui interviennent dans le calcul d'une solution de base $\vec{b}^{+}$ (i, j, k), par exemple :

à chaque fois que l'on introduit un nouvel indice identifié à i, on met en (1826 + i) la première composante du vecteur qui lui correspond.

Le choix de la bande 1827 - 1831 est dû à des considérations de commodité : ce sont des mémoires de sortie dont on peut - directement - perforer le contenu.

Tout au long du programme l'ensemble d'indices sur lequel on travaille directement se trouvera placé en une mémoire indice "ANP", positionné comme suit :

f g h i j 0 0 0 0 0.

Après choix des vecteurs initiaux on introduit en ANP le premier ensemble 1 2 0 0 0 0 0 0 0 0.

De façon générale, on appellera :

r	:	la dimension de l'espace	00 .... 0 r
n	:	le nombre total de vecteurs	00 .... 0 n
q	:	le nombre d'indices déjà introduits	00 .... 0 q
p	:	le nombre d'indices de A_n^p	00 .... 0 p.

Rappelons, enfin, que :

la première composante du vecteur $\vec{c}^{1}$ rangé le premier est 1700.
la première composante du vecteur $\vec{c}^{2}$ rangé le 2ème est (1700 + r + 1) etc..

.../...

Un certain nombre de sous-programmes ont été rédigés qui vont être commentés.

Sous-Programme 1 :

Il calcule dans un espace euclidien de dimension r, la distance de deux vecteurs, soit :

$$\left|\vec{c}_i - \vec{c}_j\right|^2 = \sum_{k=1}^{r} \left[c_{i,k} - c_{j,k}\right]^2$$

* Utilisation : On met :

- en 8001 (distributeur) l'ordre de sortie.
- en 8002 (accumulateur droit) 00 . (xxxx). (xxxx) où
  A B
  A est l'adresse de la première composante du vecteur $\vec{c}_i$,
  B l'adresse de la première composante du vecteur $\vec{c}_j$.
- en 8003 (accumulateur gauche) 00 . 0000 . 0000 .

* Résultat : Après le calcul, il y a :

- en 8002 $\left|\vec{c}_i - \vec{c}_j\right|^2$
- en 8003 00 . 0000 . 0000 .

Ce sous-programme ne nécessite aucune remarque particulière si ce n'est que le test porte sur la dimension r de l'espace, dimension qui est une donnée du problème.

Sous-Programme 2 :

Il calcule l'expression : $d_j \left[\vec{b}^{+}(A_n^p)\right] = k^2_j \left|\vec{b}^{+}(A_n^p) - \vec{c}_j\right|^2$.

Ce sous-programme fait appel au précédent.

* Utilisation : On met :

- en 8001 l'ordre de sortie.
- en 8002 00 . (xxxx) . (xxxx) .
  A B

... ...

.../...

A est l'adresse de la première composante de $\overrightarrow{b}^{+}(A_n^{\,p})$

B celle de la première composante de $\overrightarrow{c_j}$.

* Résultat : Après le calcul, il y a :

- en 8002 $d_j\left[\overrightarrow{b}^{+}(A_n^{\,p})\right]$
- en 8003 00 . 0000 . 0000.

On notera simplement qu'ici l'ordre des vecteurs est essentiel : il n'y a plus la symétrie de l'expression $\left|\overrightarrow{c_i} - \overrightarrow{c_j}\right|^2$.

Sous-Programme 3 :

Il isole une position bien déterminée d'une mémoire parmi les positions 9, 8, 7, 6, 5.

* Utilisation : On met :

- en 8001 l'ordre de sortie.
- en 8002 00 . (xxxx) . 0000 où
  A
  A est l'adresse de la mémoire considérée.
- en 8003 00 . 0000 . 000 t . où
  t détermine la position à isoler comptée à partir de la gauche de la mémoire. On aura t = 1, 2, 3, 4, 5 pour les positions 9, 8, 7, 6, 5 respectivement.

* Résultat : A la fin, on trouve :

- en 8002 00 . 0000 . 0000
- en 8003 x0 . 0000 . 000t où
  x est le contenu de la position t de la mémoire A.

.../...

L'utilité de ce sous-programme est justifiée par la remarque suivante : l'algorithme, afin de former un nouvel ensemble, compare les indices de $A_n^{\,p}$ et ceux de l'ensemble A_1 d'où $A_n^{\,p}$ est issu. Ce sous-programme permet d'isoler l'indice voulu.

Sous-Programme 4 :

Soit un ensemble I de p indices et I' un ensemble de (p - 1) indices pris parmi les p. Ce sous-programme détermine l'indice k de I qui manque dans I'.

* Utilisation : On met :

- en 8001 l'ordre de sortie
- en 8002 00 . (xxxx) . 0000 où
  B
  B est l'adresse de la mémoire contenant I'.
- en 8003 00 . (xxxx) . 0000 où
  A
  A est l'adresse de la mémoire contenant I.
- en une mémoire "ALPHA" le nombre p d'indices de I' positionné ainsi :
  00 . 0000 . 000 p .

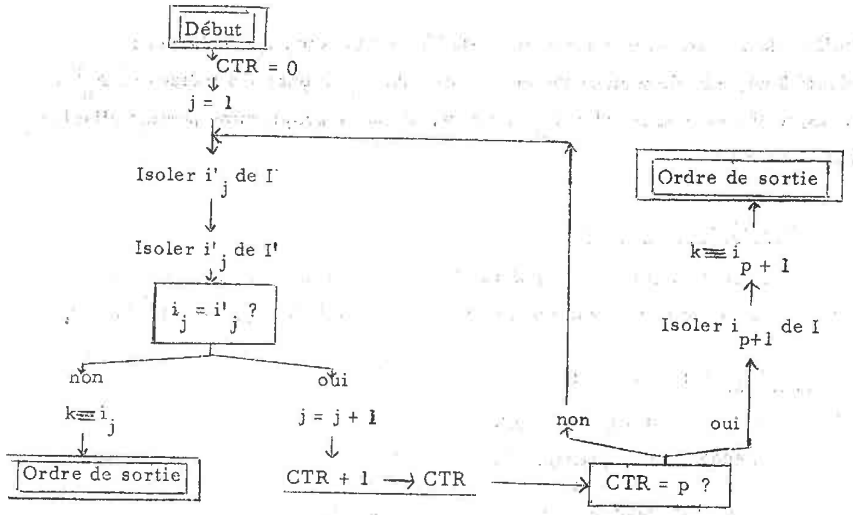
* Résultat : On trouve à la fin :

- en 8002 00 . 0000 . 0000
- en 8003 k0 . 0000 . 0000 .

* Méthode :

On compare les premiers indices i_1 et i'_1 de I et I'. S'ils diffèrent, c'est donc que $k \equiv i_1$. Sinon, on compare i_2 et i'_2. S'il y a égalité des p premiers indices de I et I', on peut alors affirmer que $k \equiv i_{p+1}$.

(cf. organigramme 1, page suivante) .../...



On utilise ce sous-programme dans la réponse à la question 4. On doit alors comparer A_n^p et A_1 par exemple. Il permet de déterminer la position que l'on doit considérer dans la mémoire correspondant à A_n^p. Suivant qu'il y a un 8 ou 9 en cette position, $\vec{b}^+ (A_n^p)$ est ou n'est pas subminimax pour A_1.
On l'utilise aussi au début du calcul d'une solution de base relative à des ensembles de 4 et 5 indices.

Sous-Programme 5 :

Il permet, étant donné un 9 en une certaine position d'une mémoire de lo remplacer par un 8.

* Utilisation : On met :

- en 8001 l'ordre de sortie.
- en 8002 00 . 0000 . 000 t où

.../...

t est la position considérée. t = i pour la position i.

- en 8003 contenu de la mémoire.

* Résultat : A la fin, on trouve :

- en 8002 le nouveau contenu.
- en 8003 00 . 0000 . 0000 .

Ce sous-programme est employé dans la codification des résultats des diverses études entreprises.

a) Programme déterminant les indices f et h tels que $d(f,h) = \max_{i \neq j \in I} d(i,j)$

(cf. Organigramme 2)

Le résultat est en "RESERVE" sous la forme 00 . (xxxx) . (xxxx) . où
A B
A et B sont les adresses des premières composantes des vecteurs $\vec{c}_f$ et $\vec{c}_g$.

La méthode est celle qu'indique l'organigramme.

Le but cherché est de déterminer les premières composantes des vecteurs rendant maxima la fonction d (i, j).

La logique est la suivante, on associe :

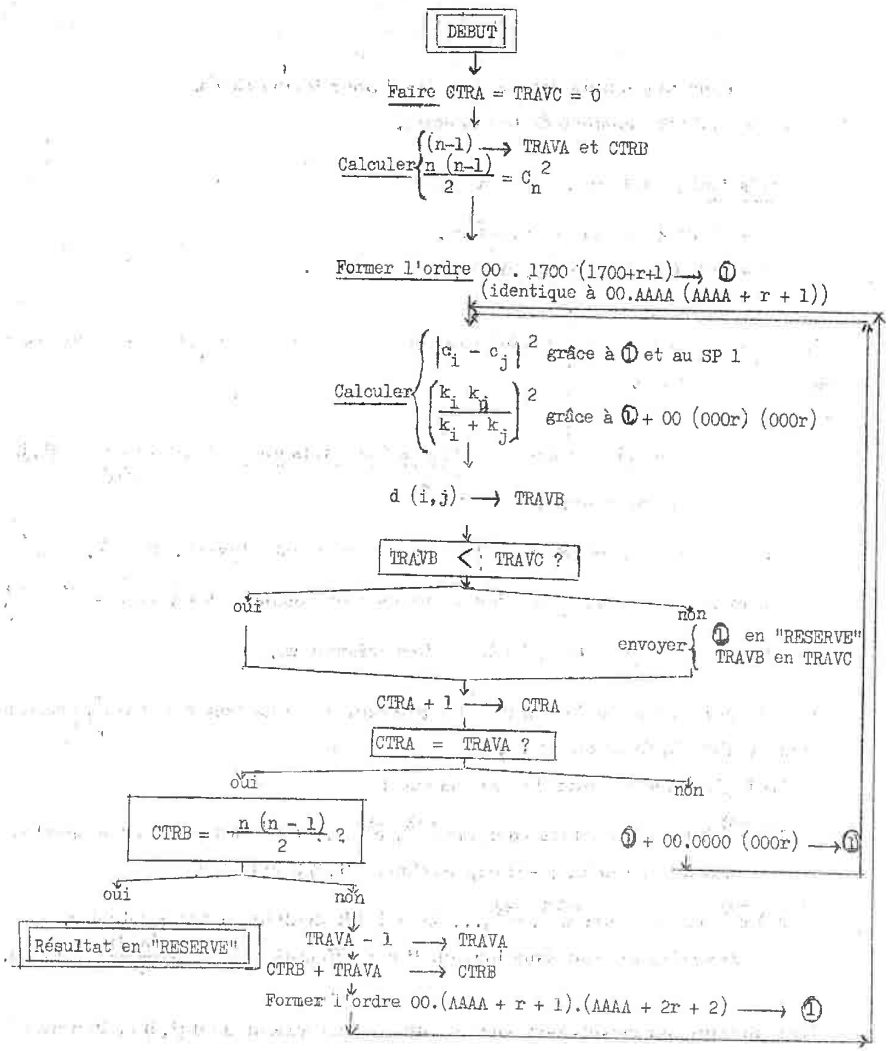
1°) $\vec{c}^1$ à tous les autres vecteurs $\vec{c}^2, \vec{c}^3, \ldots$ Cela fait, si n est le nombre total de vecteurs, (n-1) expressions d (i, j) à calculer.

2°) $\vec{c}^2$ aux vecteurs $\vec{c}^3, \vec{c}^4, \ldots$, ce qui fait (n-2) quantités à calculer.

On arrête le processus lorsque l'on a effectué $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ calculs.

On détermine au fur-et-à-mesure la plus grande valeur de d (i, j) et l'on prend soin de placer en lie" sur les vecteurs qui l'engendrent.
Il y a en effet C_n^2 façons distinctes d'associer n éléments deux à deux.

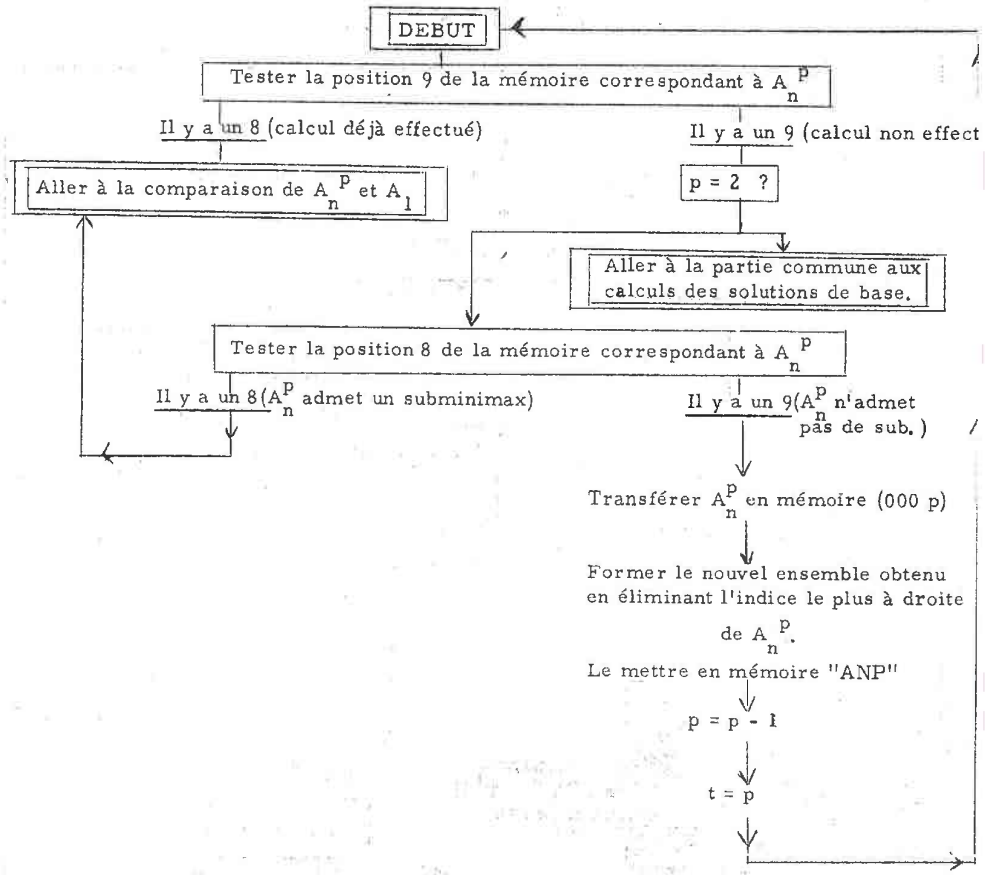
.../...



ORGANIGRAMME 2

b) Programme rélaisant les réponses aux situations 1 et 3. (cf. organigramme 3)

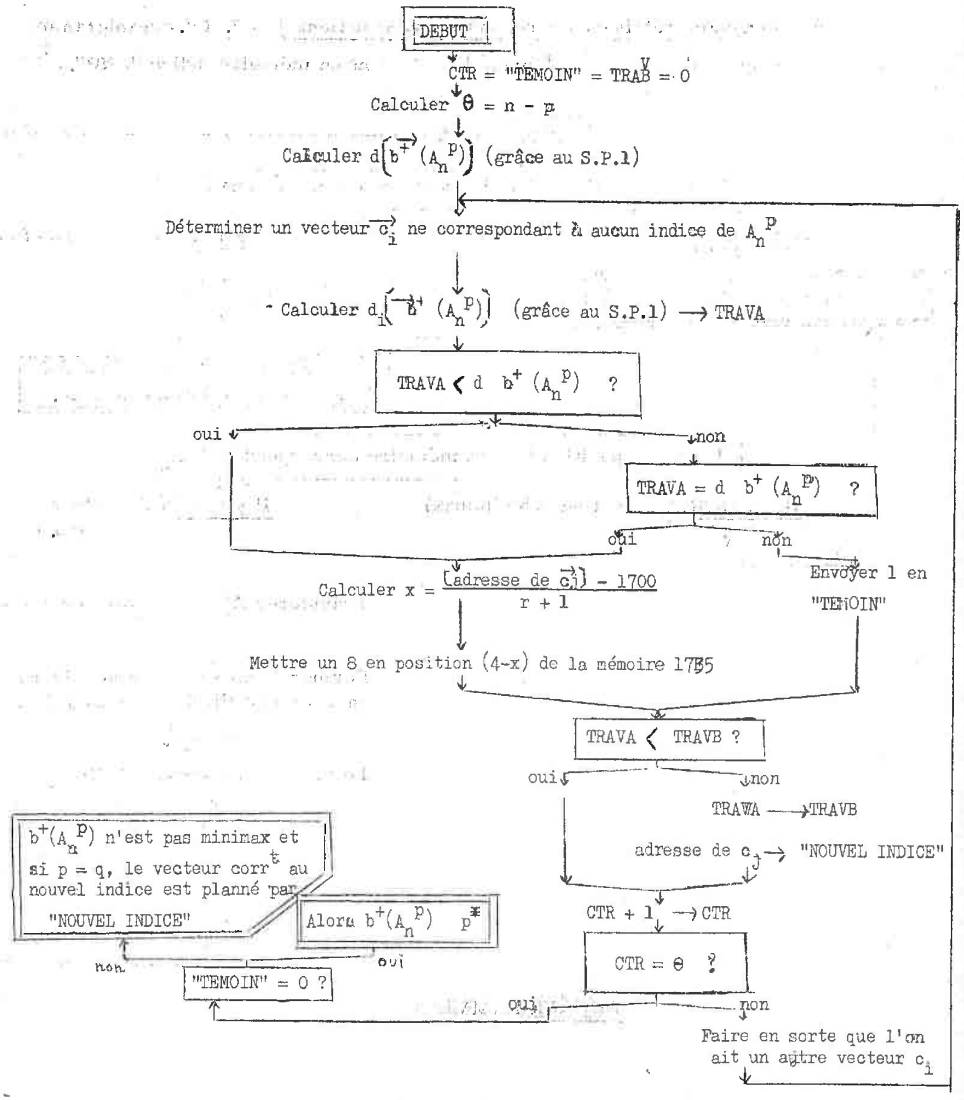
Il suppose l'ensemble A_n^p placé initialement en mémoire indice "ANP".



ORGANIGRAMME 3

c) Programme étudiant une solution de base que l'on vient de calculer.

(permet de répondre à la question 3) (cf. organigramme 4)



ORGANIGRAMME 4

Ce programme suppose :

- le contenu de la mémoire correspondant à A_n^p en mémoire 1735.
- les adresses des premières composantes des vecteurs correpondant aux indices de A_n^p rangés de la façon suivante :

si $A_n^p = (f, g, h, \ldots)$:

en 1730	adresse de $\vec{c_f}$	00 . 0000 . (xxxx) .
en 1731	adresse de $\vec{c_g}$	"
en 1732	adresse de $\vec{c_h}$	"

Il a été jugé préférable de déterminer parallèlement à l'étude de $(\vec{b}^+ (A_n^p)$, la quantité :

$$\max_{\substack{j \in I \\ j \notin A_n^p}} d_j \left[\vec{b}^+ (A_n^p) \right]$$

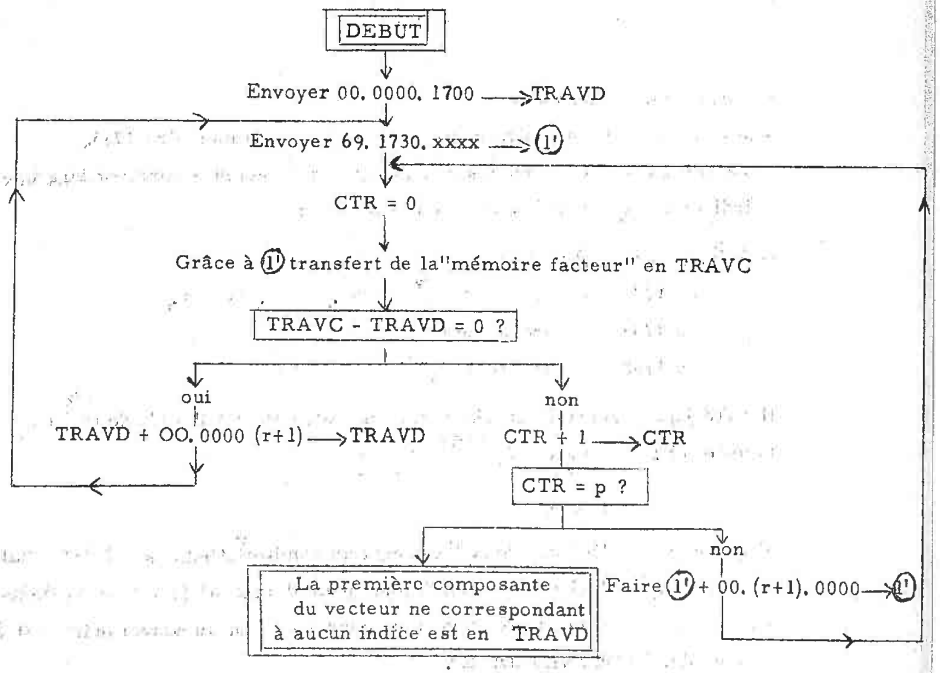
Si le nombre p d'indices de A_n^p est égal au nombre q d'indices déjà introduits, ou si $\vec{b}^+ (A_n^p)$ s'avère être subminimax pour l'étape n° (q - 1) alors l'adresse de la première composante du vecteur correspondant au nouvel indice est dans la mémoire "NOUVEL INDICE".

La détermination d'un vecteur $\vec{c_i}$ ne correspondant à aucun indice est relativement compliquée. (cf. organigramme 5).

Le processus logique en est le suivant; on compare la quantité ρ : 1700 à toutes les adresses des vecteurs correspondant aux indices de A_n^p. Si ρ diffère de toutes les adresses, alors le vecteur ρ ne correspond pas à un indice de A_n^p.

Si ρ est égal à une adresse et ce, quelle que soit cette adresse, on fait ρ + (r + 1); on recommence la comparaison avec cette nouvelle valeur.

.../...



ORGANIGRAMME 5

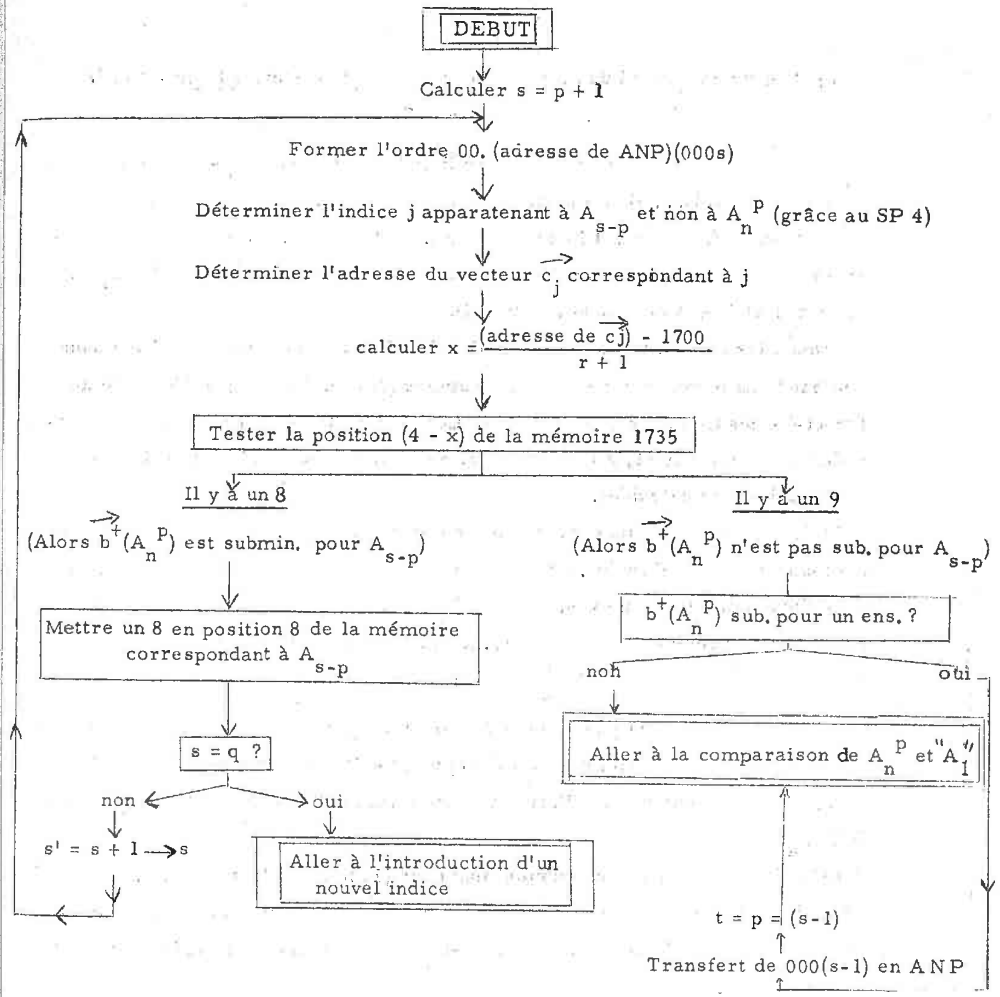
Ajoutons pour conclure ce paragraphe que dans l'organigramme 4, si CTR diffère de θ, on va à la branche "oui" du test "TRAVC - TRAVD = 0 ?"

d) Programme permettant de répondre à la question 4. (cf. organigramme 6).

Ce programme suppose le contenu de la mémoire correspondant à A_n^p en 1735.

Il exploite les informations recueillies lors de l'étude de A_n^p.

.../...



ORGANIGRAMME 6

e) Programme introduisant le nouvel indice et répondant à la question 5.

(cf. organigramme 7)

Supposons que l'on vienne de finir l'étude de l'étape n°(q - 1) et soit $\vec{s}(A_q) = \vec{s}(1,2,3,\ldots q)$ le subminimax de cette étape.

On identifie le nouvel indice h à q + 1. h $\equiv$ (q + 1). La première composante du vecteur qui lui correspond est en mémoire "NOUVEL INDICE", dont on transfert le contenu en 1826 + (q + 1).

On range les ensembles dont on calcule effectivement la solution de base dans une bande de mémoires consécutives commençant en AAAA $\equiv$ 1835, et ce au fur-et-à-mesure qu'ils se présentent. Cela est réalisable grâce à un ordre variable qui permet ainsi, à tout moment, de connaître le nombre de solutions de base réellement calculées.

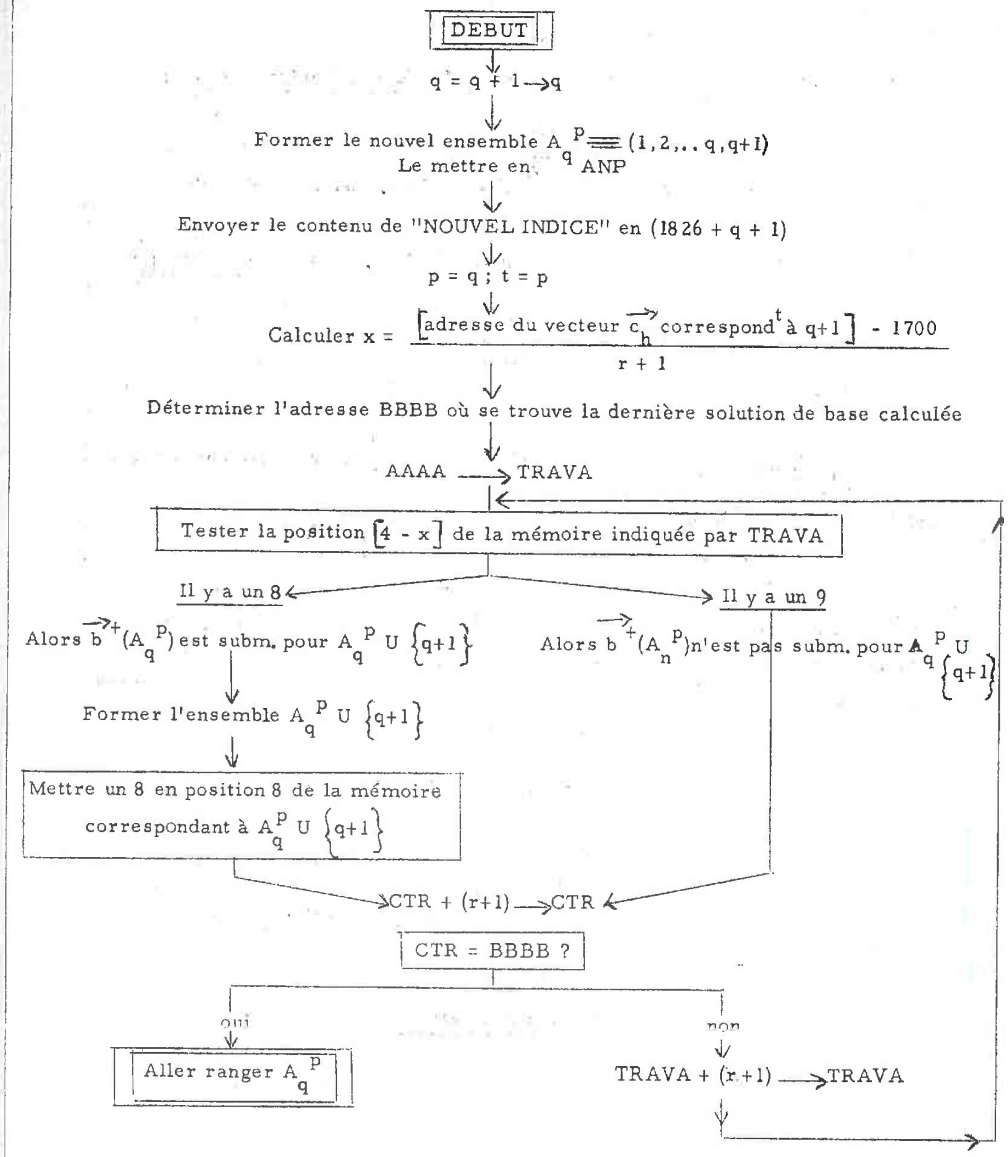
Afin de répondre à la question 5, on teste la position affectée au vecteur correspondant au nouvel indice. On est ainsi amené à considérer une même position d'une suite de mémoires. Selon qu'il y a un 8 ou un 9, la solution de base relative à l'ensemble A_q^p = (f,g,h..), contenu dans la mémoire, est ou n'est pas subminimax pour $A_q^p \cup \{q+1\}$.

Ce programme ne tient pas compte de certaines particularités à savoir qu'il est impossible que le subminimax de l'étape n° (q - 1) soit subminimax pour l'étape n° q. C'est la façon même d'introduire un nouvel indice qui exclut cette possibilité.

Ainsi $\vec{b}^+(1,2)$ ne peut être subminimax pour $(1,2) \cup \{3\} \equiv (1,2,3)$.

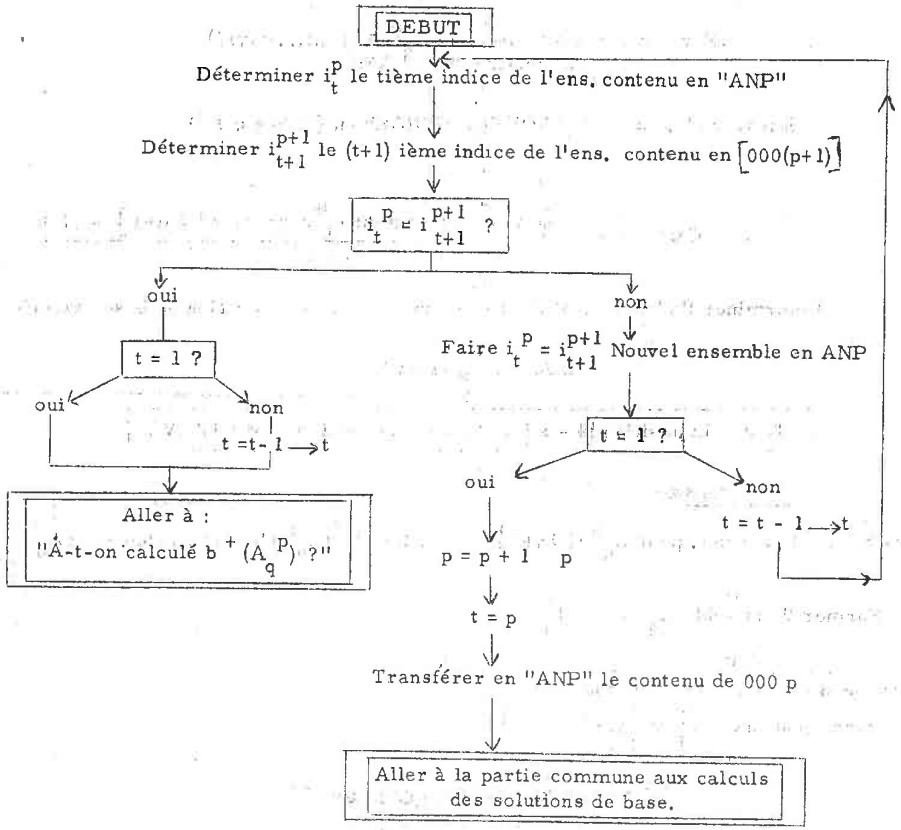
Afin d'éviter trop de lourdeur dans le programme, on a négligé de telles considérations ; ce qui est d'autant plus justifié que le temps nécessaire à un test est très court.

.../...



ORGANIGRAMME 7

f) Programme comparant les ensembles d'indices (organigramme 8) :



ORGANIGRAMME 8

B - CALCUL DES SOLUTIONS DE BASE. -

Immédiatement avant de passer au calcul effectif d'une solution de base d'un ensemble $A_q^p \equiv (f,g,h,\ldots)$, l'ordinateur déroule un ensemble d'ordres communs aux ensembles de 2,3,4,5 indices.

- On transfert le contenu de la mémoire correspondant à A_q^p en mémoire 1735.

- On prépare l'ordre de transfert de la mémoire 1735 en mémoire correspondant à A_q^p.

- Enfin, on se rend en (1400 + p) où p est le nombre d'indices de l'ensemble.

On place alors les adresses des premières composantes des "vecteurs de base" (ceux qui correspondent aux indices de l'ensemble considéré) en 1730, 1731,... 1735. L'ordinateur les utilisera pour le calcul.

On a fait appel à divers sous-programmes que nous allons commenter.

Sous-Programme 6 :

Il range les adresses des vecteurs de base en 1730,31,..etc.

Il suppose l'ensemble en mémoire indice "ANP" et le nombre d'indices p en mémoire P.

Sous-Programme 7 :

Il calcule le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans un espace euclidien de dimension r.

* Utilisation : Mettre en :

- en 8001 : l'ordre de sortie
- en 8002 : 00 (xxxx) (xxxx)
  A B

.../...

où A est l'adresse de la 1ère composante du vecteur $\vec{a}$

B est l'adresse de la 1ère composante du vecteur $\vec{b}$

- en 8003 00 . 0000 . 0000 .

* Résultat : A la fin du calcul, on trouve :

- en 8002 $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- en 8003 00 . 0000 . 0000

Ce sous-programme est très utile, c'est lui qui permet le calcul des coefficients des équations (b), (b'), (c), etc...

Sous-Programme 8 :

Il calcule l'expression $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{c_i}$ où

- les $\vec{c_i}$ sont des vecteurs dans un espace de dimension r.
- les α_i sont des coefficients numériques donnés.
- le nombre de vecteurs est k.

* Utilisation : On range :

les premières composantes des vecteurs $\vec{c_i}$ dans des mémoires consécutives à partir de AAAA, .

les coefficients correspondants : α_i dans des mémoires consécutives à partir de BBBB. Le nombre d'indices k en mémoire K.

La dimension r est supposée en mémoire R.

* Entrée : On met :

- en 8001 l'ordre de sortie.
- en 8002 00 . BBBB . AAAA . où

AAAA et BBBB déterminent les boucles précédemment définies.

- en 8003 00 . CCCC . 0000 où

CCCC définit la bande de mémoires où l'on veut placer le vecteur résultat.

.../...

Ce sous-programme a de multiples applications: il facilite le calcul des solutions de base connaissant les coordonnées barycentriques ; on l'utilise pour déterminer la différence de deux vecteurs, ect...

Sous-Programme 9 :

Calcule l'expression $\vec{q}(f,g) = \frac{k_f^2}{k_f^2 - k_g^2} \vec{c_f} - \frac{k_g^2}{k_f^2 - k_g^2} \vec{c_g}$

ainsi que $r^2(f,g) = \left[\frac{k_f \, k_g}{k_f^2 - k_g^2}\right]^2 \left|\vec{c_f} - \vec{c_g}\right|^2$

Il emploie le sous-programme 7.

* Utilisation : On met :

- en 8001 l'ordre de sortie
- en 8002 00 . FFFF . GGGG . où

FFFF et GGGG définissent les vecteurs $\vec{c_f}$ et $\vec{c_g}$ respectivement.

- en 8003 00 . CCCC . 0000

CCCC est l'adresse du résultat.

Le vecteur $\vec{q}(f,g)$ est ainsi placé à partir de (CCCC) tandis que la quantité $r^2(f,g)$ se trouve rangée en (CCCC + r).

Sous-Programme 10 :

Il détermine le vecteur $\vec{q}(f,g,h) = \vec{q}(f,g) + \gamma(f,g,h)\left[\vec{q}(f,h) - \vec{q}(f,g)\right]$

et la quantité $r^2(f,g,h) = r^2(f,g) + \left|\vec{q}(f,h) - \vec{q}(f,g)\right|^2$.

Il emploie les sous-programmes 1 et 8 et détermine d'abord la constante $\gamma(f,g,h)$ grâce à la formule (). (cf. Calcul des Solutions de base de 3 indices).

.../...

* Utilisation : On met :

- en 8001 l'ordre de sortie
- en 8002 00 . (AAAA) . (BBBB) . où

AAAA et BBBB définissent les vecteurs $\vec{q}(f,g)$ et $\vec{q}(f,h)$ respectivement.

- en 8003 00 . CCCC . 0000 où

CCCC est l'adresse du résultat.

La quantité $r^2(f,g,h)$ est placée en mémoire 1801 pour des raisons de commodité.

Quatre Programmes calculent les solutions de base :

a) Solution de base d'un ensemble de 2 indices :

On détermine simplement : $\vec{b}^+(f,g) = \frac{k_f}{k_f + k_g}\vec{c}_f + \frac{k_g}{k_f + k_g}$

b) Solution de base d'un ensemble de 3 indices :

On suppose les vecteurs de base affectés de coefficients k_i distincts.

Le détail des calculs est donné au Chapître I, "3 indices".

c) Solution de base d'un ensemble de 5 indices :

Le détail des formules est donné au Chapître I.

On notera seulement que pour le calcul d'une solution de base de 4 indices $\vec{b}^+(A_4)$, on considère $A_4 = (A_3) \cup \{i\}$ où A_3 est le dernier sous-ensemble à 3 indices de A_4 dont on a effectivement calculé la solution de base.

-o-o-o-o-

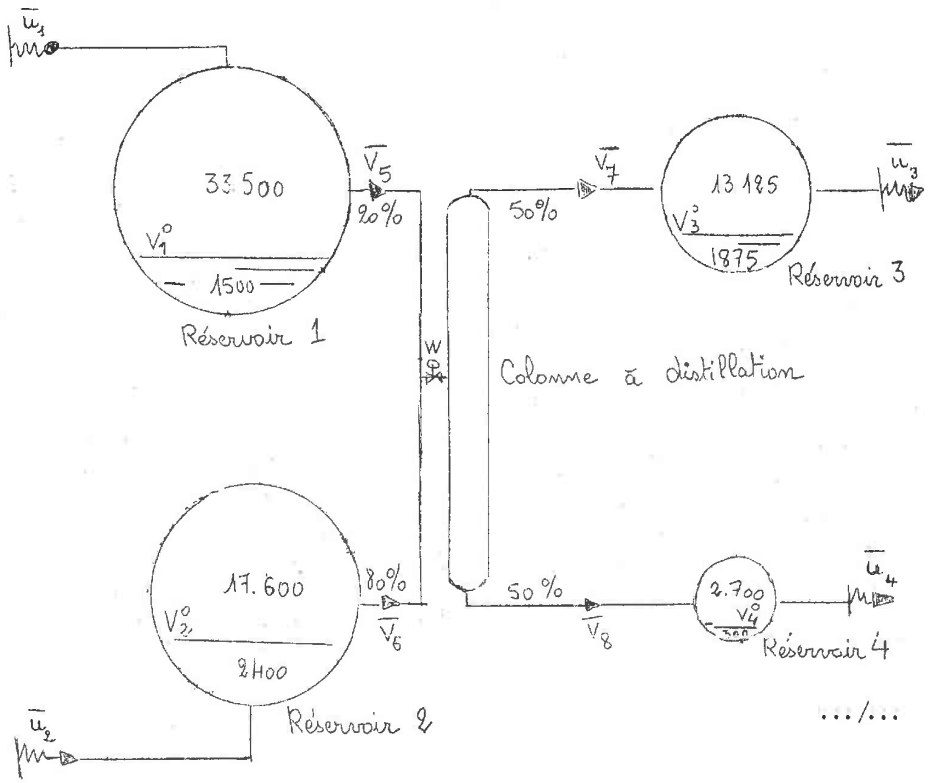
.../...

CHAPITRE III - EXEMPLES NUMERIQUES -

-o-o-o-o-

EXEMPLE I : Colonne à distillation.

Considérons le système suivant, dit système 1. Il est représenté sous la figure ci-dessous.



.../...

Soit une colonne à distillation dont le débit d'alimentation est $\overline{W}$. On contrôle directement ce débit.

Les variables non contrôlables sont :

- le débit $\overline{u}_1$ d'entrée du produit 1 dans le réservoir 1.
- le débit $\overline{u}_2$ d'entrée du produit2 dans le réservoir 2.
- le débit $\overline{u}_3$ de sortie du produit fabriqué 3 (provenant du réservoir 3).
- le débit $\overline{u}_4$ de sortie du produit fabriqué 4 (provenant du réservoir 4).

Ces quantités sont aléatoires. On les suppose normales, (de Gauss), possédant une moyenne et un écart-type connus.

Les variables indirectement contrôlables sont :

- les niveaux v_1, v_2, v_3, v_4 dans les réservoirs 1,2,3,4 respectivement.
- les débits $\overline{v}_5, \overline{v}_6, \overline{v}_7, \overline{v}_8$ à la sortie des réservoirs 1,2,3,4 respectivement.

On suppose que ces 8 variables indirectement contrôlables, de même que le débit contrôlable $\overline{W}$, sont toutes critiques.

En d'autres termes, on considérera que le système opère de façon satisfaisante si et seulement si chacune de ces variables restent entre certaines limites.

On supposera que :

- le débit $\overline{W}$ est constitué pour un quart par le débit v_5, pour trois quarts par v_6.
- pour chaque unité distillée, on fabrique une demie unité de produit 3, une demie unité de produit 4.
- il n'y a pas d'accumulation nette dans les réservoirs.

La figure montre le système à l'instant initial. Nous voulons connaître son état après 30 jours de marche. L'unité de temps pour les débits est un jour.

.../...

Mise en équation du système :

On écrit :

- l'équilibre du système de part et d'autre de chaque réservoir ce qui donne 4 équations.
- les hypothèses relatives au débit $\overline{W}$ et aux proportions de produits 3 et 4 fabriqués.

Appelant $v_1^o, v_2^o, v_3^o, v_4^o$ les niveaux des réservoirs à l'instant initial, il vient :

$$(1) \quad (v_1 - v_1^o) - 30\,\overline{u}_1 + 30\,\overline{v}_5 = 0$$

$$(2) \quad (v_2 - v_2^o) - 30\,\overline{u}_2 + 30\,\overline{v}_6 = 0$$

$$(3) \quad (v_3 - v_3^o) - 30\,\overline{v}_7 + 30\,\overline{u}_3 = 0$$

$$(4) \quad (v_4 - v_4^o) - 30\,\overline{v}_8 + 30\,\overline{u}_4 = 0$$

$$(5) \quad -\overline{v}_5 + 0{,}2\,\overline{W} = 0$$

$$(6) \quad -\overline{v}_5 - v_6 + \overline{W} = 0$$

$$(7) \quad \overline{v}_7 - 0{,}5\,\overline{W} = 0$$

$$(8) \quad \overline{v}_7 + \overline{v}_8 - \overline{W} = 0.$$

On posera :

$$(v_1 - v_1^o) \equiv \Delta v_1 \qquad (\overline{u}_1 - \overline{u}_1^o) \equiv \Delta \overline{u}_1$$

$$(v_2 - v_2^o) \equiv \Delta v_2 \qquad (\overline{u}_2 - \overline{u}_2^o) \equiv \Delta \overline{u}_2$$

$$(v_3 - v_3^o) \equiv \Delta v_3 \qquad (\overline{u}_3 - \overline{u}_3^o) \equiv \Delta \overline{u}_3$$

$$(v_4 - v_4^o) \equiv \Delta v_4 \qquad (\overline{u}_4 - \overline{u}_4^o) \equiv \Delta \overline{u}_4$$

$$\Delta\overline{v}_5\,(\overline{v}_5 - \overline{v}_5^o)\,; \quad \Delta\overline{v}_6 \equiv (\overline{v}_6 - \overline{v}_6^o)\,; \quad \Delta\overline{v}_7 \equiv (\overline{v}_7 - \overline{v}_7^o)\,; \quad \Delta\overline{v}_8 \equiv (\overline{v}_8 - \overline{v}_8^o)\,;$$

et $\Delta\overline{W} = (\overline{W} - \overline{W}^o)$.

.../...

On notera puisqu'il n'y a pas d'accumulation nette dans le système que les moyennes des niveaux dans les réservoirs coïncident avec leurs valeurs initiales,

Les équations (1) à (8) s'écrivent :

$$(9)\quad \Delta v_1 - 30\,\Delta\overline{u}_1 + 30\,\Delta\overline{v}_5 = 0$$

$$(10)\quad \Delta v_2 - 30\,\Delta\overline{u}_2 + 30\,\Delta\overline{v}_6 = 0$$

$$(11)\quad \Delta v_3 - 30\,\Delta\overline{v}_7 + 30\,\Delta\overline{u}_3 = 0$$

$$(12)\quad \Delta v_4 - 30\,\Delta\overline{v}_8 + 30\,\Delta\overline{u}_4 = 0$$

$$(13)\quad \Delta v_5 + 0{,}2\,\Delta\overline{w} = 0$$

$$(14)\quad -\Delta\overline{v}_5 - \Delta\overline{v}_6 + \Delta\overline{w} = 0$$

$$(15)\quad \Delta\overline{v}_7 - 0{,}5\,\Delta\overline{w} = 0$$

$$(16)\quad \Delta\overline{v}_7 - \Delta\overline{v}_8 - \Delta\overline{w} = 0$$

D'après l'hypothèse que nous avons faite au Chapître I, il existe une relation linéaire entre w et les u_i ; soit :

$$(17)\quad \Delta\overline{w} = p_1 \cdot \frac{\Delta\overline{u}_1}{\sigma_1} + p_2 \cdot \frac{\Delta\overline{u}_2}{\sigma_2} + p_3 \cdot \frac{\Delta\overline{u}_3}{\sigma_3} + p_4 \cdot \frac{\Delta\overline{u}_4}{\sigma_4}$$

où σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 sont les écarts-types des $\overline{u}_i$.

Substituant (4) dans les équations (9),... (16), il vient :

$$(18)\quad \Delta v_1 = 30\left[\left(1 - 0{,}2\,\frac{p_1}{\sigma_1}\right)\cdot\Delta\overline{u}_1 - 0{,}2\,\frac{p_2}{\sigma_2}\cdot\Delta\overline{u}_2 - 0{,}2\cdot\frac{p_3}{\sigma_3}\,\Delta\overline{u}_3 - 0{,}2\,\frac{p_4}{\sigma_4}\,\Delta\overline{u}_4\right]$$

$$(19)\quad \Delta v_2 = 30\left[-0{,}8\,\frac{p_1}{\sigma_1}\,\Delta\overline{u}_1 + \left(1 - 0{,}8\,\frac{p_2}{\sigma_2}\right)\Delta\overline{u}_2 - 0{,}8\,\frac{p_3}{\sigma_3}\,\Delta\overline{u}_3 - 0{,}8\,\frac{p_4}{\sigma_4}\,\Delta\overline{u}_4\right]$$

$$(20)\quad \Delta v_3 = 30\left[0{,}5\,\frac{p_1}{\sigma_1}\,\Delta\overline{u}_1 + 0{,}5\,\frac{p_2}{\sigma_2}\,\Delta\overline{u}_2 - \left(1 - 0{,}5\,\frac{p_3}{\sigma_3}\right)\Delta\overline{u}_3 + 0{,}5\,\frac{p_4}{\sigma_4}\,\Delta\overline{u}_4\right]$$

.../...

$$(21)\quad v_4 = 30\left[0{,}5\,\frac{p_1}{\sigma_1}\,\Delta\overline{u}_1 + 0{,}5\,\frac{p_2}{\sigma_2}\,\Delta\overline{u}_2 + 0{,}5\,\frac{p_3}{\sigma_3}\,\Delta\overline{u}_3 - \left(1 - 0{,}5\,\frac{p_4}{\sigma_4}\right)\Delta\overline{u}_4\right]$$

$$(22)\quad \overline{v}_5 = 0{,}2\left[\frac{p_1}{\sigma_1}\,\Delta\overline{u}_1 + \frac{p_2}{\sigma_2}\,\Delta\overline{u}_2 + \frac{p_3}{\sigma_3}\,\Delta\overline{u}_3 + \frac{p_4}{\sigma_4}\,\Delta\overline{u}_4\right]$$

$$(23)\quad \overline{v}_6 = 0{,}8\left[\frac{p_1}{\sigma_1}\,\Delta\overline{u}_1 + \frac{p_2}{\sigma_2}\,\Delta\overline{u}_2 + \frac{p_3}{\sigma_3}\,\Delta\overline{u}_3 + \frac{p_4}{\sigma_4}\,\Delta\overline{u}_4\right]$$

$$(24)\quad \overline{v}_7 = 0{,}5\left[\frac{p_1}{\sigma_1}\,\Delta\overline{u}_1 + \frac{p_2}{\sigma_2}\,\Delta\overline{u}_2 + \frac{p_3}{\sigma_3}\,\Delta\overline{u}_3 + \frac{p_4}{\sigma_4}\,\Delta\overline{u}_4\right]$$

$$(25)\quad \overline{v}_8 = 0{,}5\left[\frac{p_1}{\sigma_1}\,\Delta\overline{u}_1 + \frac{p_2}{\sigma_2}\,\Delta\overline{u}_2 + \frac{p_3}{\sigma_3}\,\Delta\overline{u}_3 + \frac{p_4}{\sigma_4}\,\Delta\overline{u}_4\right]$$

Soient ρ_{vi} et ρ'_{vi} les limites de l'intervalle souhaitable pour la variable v_i.

Appelons $h_{vi} = \min(\rho_{vi}, \rho'_{vi})$ et $h'_{vi} = \max(\rho_{vi}, \rho'_{vi})$.

Elevons les équations (17),(18),... (25) au carré. Prenons l'espérance mathématique des deux membres. Divisant enfin chaque équation par h_{vi}, on peut écrire si σ_{vi} est l'écart-type de la variable v_i :

$$(26)\quad \frac{\sigma^2_{v1}}{h_{v1}} = \left[\frac{6}{h_{v1}}\right]^2 \left\{(5\,\sigma_1 - p_1)^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right\}$$

$$(27)\quad \frac{\sigma^2_{v2}}{h^2_{v2}} = \left[\frac{24}{h_{v2}}\right]^2 \left\{p_1^2 + (1{,}25\,\sigma_2 - p_2)^2 + p_3^2 + p_4^2\right\}$$

$$(28)\quad \frac{\sigma^2_{v3}}{h^2_{v3}} = \left[\frac{15}{h_{v3}}\right]^2 \left\{p_1^2 + p_2^2 + (2\,\sigma_3 - p_3)^2 + p_3^2 + p_4^2\right\}$$

$$(29)\quad \frac{\sigma^2_{v4}}{h^2_{v4}} = \left[\frac{15}{h_{v4}}\right]^2 \left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + (2\,\sigma_4 - p_4)^2\right\}$$

$$(30)\quad \frac{\sigma^2_{v5}}{h^2_{v5}} = \left[\frac{0{,}2}{h_{v5}}\right]^2 \left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right\}$$

.../...

$$(30)\quad \frac{\sigma^2_{v5}}{h^2_{v5}} = \left[\frac{0,2}{h_{v5}}\right]^2 \left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right\}$$

$$(31)\quad \frac{\sigma^2_{v6}}{h^2_{v6}} = \left[\frac{0,8}{h_{v6}}\right]^2 \left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right\}$$

$$(32)\quad \frac{\sigma^2_{v7}}{h^2_{v7}} = \left[\frac{0,5}{h_{v7}}\right]^2 \left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right\}$$

$$(33)\quad \frac{\sigma^2_{v8}}{h^2_{v8}} = \left[\frac{0,5}{h_{v8}}\right]^2 \left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2\right\}$$

$$(34)\quad \frac{\sigma^2_{w}}{h^2_{w}} = \left[\frac{1}{h_{w}}\right] \left\{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 .\right\}$$

Les spécifi cations du système sont données par le tableau 2 .

Nous nous proposons de déterminer les constantes p_1, p_2, p_3, p_4, telles que, pour 30 jours de marche du système, chaque variable critique reste entre ses limites.

Nous examinerons la méthode de "Recherche du minimax" telle qu'elle est développée dans le présent mémoire.

Nous considérerons aussi la méthode dite des "Moindres Carrés Pondérés" et ce afin d'avoir un élément de comparaison.

① Recherche du Subminimax :

La dimension r de l'espace euclidien dans lequel on travaille est 4 (nombre de variables non contrôlables).

Le nombre de vecteurs (cf. tableau 3) est, à priori, égal à 9. (nombre de variables contrôlables directement ou indirectement).

En fait, on remarquera que les vecteurs $\vec{c}_5$, $\vec{c}_6$, $\vec{c}_7$, $\vec{c}_8$ et $\vec{c}_w$ ont des composantes égales. Il suffit alors de considérer le seul vecteur $\vec{c}_8$ dont la constante b_i est la plus grande ;

.../...

SPÉCIFICATIONS du SYSTÈME

Variable	valeur moyenne	valeur initiale	limite inférieure ℓ_i	limite supérieure ℓ'_i	min (ℓ_i, ℓ'_i)	Ecart-type
Débit d'entrée u_1	3400					100
Débit d'entrée u_2	5600					100
Débit de sortie u_3	3000					100
Débit de sortie u_4	6000					100
Quantité de produit (réservoirl) v_1		1500	35 000	0	1500	
Quantité de produit (réservoir 2) v_2		17600	20 000	0	2400	
Quantité de produit (réservoir 3) v_3		1875	15 000	0	1875	
Quantité de produit (réservoir 4) v_4		300	3 000	0	300	
Débit v_5	1620		2 120	1000	500	
Débit v_6	6480		9 000	4780	1700	
Débit v_7	4050		6 000	2950	1100	
Débit v_8	4050		5 050	2000	1000	
Débit w	8100		10 350	6000	2100	

... ...

-- TABLEAU 2 --

en effet, quelque soit le vecteur $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ on aura :

$$\frac{\sigma^2_{v8}}{h^2_{v8}} > \frac{\sigma^2_{w}}{h^2_{w}} > \frac{\sigma^2_{v7}}{h^2_{v7}} > \frac{\sigma^2_{v6}}{h^2_{v6}} > \frac{\sigma^2_{v5}}{h^2_{v5}}$$

on a donc n = 5.

Vecteur	Constante k_i	1ère Composante	2ème Composante	3ème Composante	4ème Composante
$\vec{c_1}$	$4.\ 10^{-3}$	500	0,00	0	0,00
$\vec{c_2}$	10^{-2}	0,00	125,00	0	0,00
$\vec{c_3}$	$8.\ 10^{-3}$	0,00	0,00	200	0,00
$\vec{c_4}$	$5.\ 10^{-2}$	0,00	0,00	0,00	200
$\vec{c_5}$	$4.\ 10^{-4}$	0,00	0,00	0,00	0,00
$\vec{c_6}$	$4{,}44.\ 10^{-4}$	0,00	0,00	0,00	0,00
$\vec{c_7}$	$4{,}54.\ 10^{-4}$	0,00	0,00	0,00	0,00
$\vec{c_8}$	$5\ .\ 10^{-4}$	0,00	0,00	0,00	0,00
$\vec{c_w}$	$4{,}76.\ 10^{-4}$	0,00	0,00	0,00	0,00

-- Tableau 3 --

On a considéré les vecteurs : $\vec{c_1} \equiv \vec{c}^1$ (rangé le premier sur l'ordinateur) en 1700, 1701, 1702, 1703, k_1 en 1704) ; $\vec{c_2} \equiv \vec{c}^2$ (de 1705 à 1709) ; $\vec{c_3} \equiv \vec{c}^3$ (de 1710 à 1714) ; $\vec{c_4} \equiv \vec{c}^4$ (de 1715 à 1720) ; $\vec{c_5} \equiv \vec{c}^5$ (de 1720 à 1725).

L'ordinateur a introduit d'abord les indices 1 et 2 correspondant à $\vec{c}^4$ et $\vec{c}^1$ puis 3 correspondant à $\vec{c}^2$, enfin 4 relatif à $\vec{c}^3$. Le vecteur minimax cherché est :

$$\vec{p}^* \equiv (19{,}28\ ;\ 10{,}24\ ;\ 9{,}044\ ;\ 166{,}8)$$

.../...

Avant de trouver la solution $\vec{p}^* = \vec{b}^+(1,2,3,4)$ les solutions de base qui ont été calculées sont relatives aux ensembles (1,2) ; (1,3) ; (1,2,3) ; (1,4) ; (2,4) ; (1,2,4) (3,4) ; (1,3,4) ; (2,3,4).

On remarquera qu'il n'a pas été nécessaire d'introduire un cinquième indice.

Le temps de calcul est inférieur à 5 minutes.

Le vecteur $\vec{p}^*$ étant trouvé, on a calculé les probabilités pour chaque variable d'être à l'intérieur de la bande qui lui est assignée.

Variable	$\frac{h_i \min}{\sigma_i}$	$\frac{h_i \max}{\sigma_i}$	Probabilité d'être à l'intérieur de la motié inférieure	la moitié supérieure	total	Probabilité d'être à l'extérieur de la bande
v_1	0,491	10,9	0,188	0,500	∿ 0,688	∿ 0,31
v_2	0,491	3,60	0,188	0,500	∿ 0,688	∿ 0,31
v_3	0,491	3,43	0,188	0,500	∿ 0,688	∿ 0,31
v_4	0,491	4,42	0,188	0,500	∿ 0,688	∿ 0,31
$\bar{v}_5$	14,8	18,4	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
$\bar{v}_6$	13,3	18,7	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
$\bar{v}_7$	13,0	23,1	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
$\bar{v}_8$	11,8	24,3	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
$\bar{w}$	12,4	13,3	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
Produit des Probabilités					∿ 0,224	

Tableau des Probabilités " minimax"

On remarque que les 4 variables v_1, v_2, v_3, v_4 ont une même probabilité d'être à l'extérieur de leur bande ; c'est normal car la solution de base est relative aux 4 vecteurs correspondants.

(2) Méthode des moindres carrés pondérés :

On rend minima la somme des quantités $\frac{\sigma_i^2}{h_i^2}$.

Pour avoir la composante p_i du vecteur $\vec{p}$, on égale à zéro la dérivée partielle de la somme par rapport à p_i.

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \sum_i \frac{\sigma_{vi}^2}{h_{vi}^2} = 2 \left\{ - k_1 (500 - p_1) + k_2 p_1 + \dots + k_w p_1 \right\}$$

d'où : $p_1 = \frac{500\, k_1}{\sum_i k_i} = 2,692$ $\qquad p_2 = 125 \frac{k_2}{\sum_i k_i} = 16,82$

$p_3 = 200 \frac{k_3}{\sum_i k_i} = 21,54$ $\qquad p_4 = 200 \frac{k_4}{\sum_i k_i} = 13,46$

Grâce à ce vecteur, on peut former un tableau de probabilités. (cf. tableau 5, page suivante).

Conclusions sur les deux méthodes :

Appelons $p_t(v_i)$ la probabilité totale que la variable v_i appratienne à la bande qui lui est assignée, P la probabilité que toutes les variables appartiennent à leurs bandes.

Une limite supérieure de P est donnée par la plus petite des quantités $p_t(v_i)$.

$$P \leq \min_{i=1,2,\dots,w} p_t(v_i)$$

Une limite inférieure de P est donnée par le produit des quantités $p_t(v_i)$ (cas où toutes les variables seraient réellement indépendantes, ce qui n'est pas réalisé

.../...

Variable	$\frac{h_i \text{ min}}{\sigma_i}$	$\frac{h_i \text{ max}}{\sigma_i}$	Probabilité d'être à l'intérieur de : la 1/2 bande inférieure	la 1/2 bande supérieure	total	Probabilité d'être à l'extérieur de la bande
v_1	0,501	11,2	0,191	0,500	∿0,691	∿ 0,31
v_2	0,899	6,59	0,314	0,500	∿0,814	∿ 0,19
v_3	0,695	4,86	0,255	0,500	∿0,755	∿ 0,25
v_4	0,106	0,954	0,041	0,328	∿0,368	∿ 0,63
$\overline{v}_5$	81,7	101	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
$\overline{v}_6$	73,5	103	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
$\overline{v}_7$	71,9	127	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
$\overline{v}_8$	65,3	134	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
$\overline{w}$	68,6	73,5	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
Produit des Probabilités					∿0,167	

5 - Tableau des Probabilités (moindre carrés pondérés)

.../...

généralement en pratique).

On peut donc écrire :

$$\prod_{i=1,2,\ldots,w} p_t(v_i) \leqslant P \leqslant \min_{i=1,2,\ldots,w} p_t(v_i)$$

Appelant P (minimax) la quantité P donnée par la méthode du minimax, P (moindres carrés pondérés) celle donnée par la méthode des moindres carrés pondérés, on trouve :

$$0,224 \leqslant P \text{ (minimax)} \leqslant 0,688$$

et

$$0,167 \leqslant P \text{ (moindres carrés pondérés)} \leqslant 0,368$$

La conclusion apparaît alors nettement : la méthode du "minimax" donne des résultats sensiblement meilleurs que celle des "moindres carrés pondérés".

La méthode des "moindres carrés pondérés" a, il faut le reconnaître, l'avantage d'être plus simple que l'autre. Elle donne d'assez bons résultats, mais il convient cependant de remarquer que les probabilités auxquelles elle aboutit sont inégalement réparties. Ainsi la variable v_4 - quantité de produit 4 dans le réservoir 4 - a environ 63 % de chance d'être à lextérieur de sa bande alors que les autres variables ont des probabilités convenables.
Avec la méthode du "minimax", cette même variable v_4 n'a que 31 % de chance d'être à l'extérieur de sa bande, ce qui constitue un gain sensible.

La méthode du "minimax", en rendant minima la moins bonne des quantités : "Probabilité que la variable v_i appartienne à sa demie bande inférieure" a un effet qui porte sur toutes les variables v_i. Cet effet est global alors que la méthode des "moindres carrés pondérés" semble favoriser certaines variables au détriment des autres.

.../...

Pour faire une analyse complète du problème, il convient de regarder ce que devient le système dans le cas où :

- w est fixé à sa valeur moyenne; c'est-à-dire qu'il n'y a pas de contrôle d'une part.
- ou le niveau v_4 est maintenu constant à sa valeur initiale d'autre part.

Ces deux cas sont fréquents dans l'industrie. Le réservoir v_4 est la source principale des ennuis : on le conçoit fort bien puisque le niveau dans ce réservoir est la variable astreinte aux plus fortes conditions. Il est naturel de considérer l'état du système lorsqu'on laisse v_4 constant.

③ Le débit w est fixé à sa valeur moyenne :

Le tableau des probabilités correspondantes est le tableau 6.
Dans ce cas : $0,141 \leqslant P \leqslant 0,356$

C'est là un résultat moins bon que ceux qui précèdent. Ce n'est pas étonnant puisqu'il n'y a pas de contrôle.

④ Le niveau 4 est fixé à sa valeur initiale :

Le tableau 7 montre les probabilités correspondantes et l'on trouve :

$$0,298 \leqslant P \leqslant 0,661$$

On remarquera que ce résultat est un des meilleurs de ceux que nous avons obtenus jusqu'ici. En fixant le niveau 4 - cause d'ennuis - on a augmenté la probabilité que toutes les variables appartiennent à leurs bandes respectives.

.../...

Variable	$\frac{h_i \text{ min}}{\sigma_i}$	$\frac{h_i \text{ max}}{\sigma_i}$	Probabilité d'être à l'intérieur de : la 1/2 bande inférieure	la 1/2 bande supérieure	total	Probabilité d'être à l'extérieur de la bande
v_1	0,500	11,1	0,191	0,500	∿ 0,691	∿ 0,31
v_2	0,800	5,86	0,288	0,500	∿ 0,788	∿ 0,21
v_3	0,625	4,37	0,232	0,500	∿ 0,732	∿ 0,27
v_4	0,100	0,900	0,040	0,316	∿ 0,356	∿ 0,65
$\overline{v_5}$	∞	∞	0,500	0,500	1	0
$\overline{v_6}$	∞	∞	0,500	0,500	1	0
$\overline{v_7}$	∞	∞	0,500	0,500	1	0
$\overline{v_8}$	∞	∞	0,500	0,500	1	0
$\overline{w}$	∞	∞	0,500	0,500	1	0
Produit des Probabilités					∿ 0,141	

6 - Tableau des Probabilités - $\overline{w}$ fixé -

.../...

Variable	$\frac{h_i \text{ min}}{\sigma_i}$	$\frac{h_i \text{ max}}{\sigma_i}$	Probabilité d'être à l'intérieur de : la 1/2 bande inférieure	la 1/2 bande supérieure	total	Probabilité d'être à l'extérieur de la bande
v_1	0,464	10,36	0,177	0,500	∿ 0,677	∿ 0,22
v_2	0,423	3,10	0,162	0,499	∿ 0,661	∿ 0,34
v_3	0,441	3,09	0,170	0,498	∿ 0,668	∿ 0,33
v_4	∞	∞	0,500	0,500	1	0
v_5	12,5	15,5	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
v_6	11,25	15,7	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
v_7	11,0	19,5	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
v_8	10,0	20,5	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
w	10,5	11,2	0,500	0,500	∿ 1	∿ 0
Produit des Probabilités					∿ 0,298	

7 - Tableau des Probabilités - v_4 fixé -

Conclusion Générale de l'exemple 5 . -

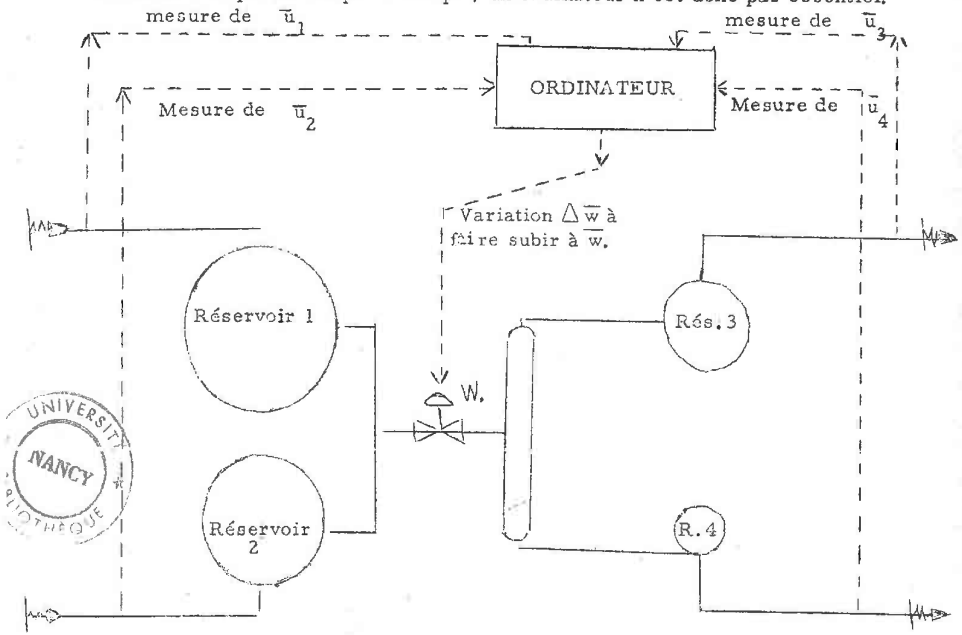
La méthode "minimax" donne de bons résultats, meilleurs que les autres procédés semble-t-il.

Etant donné le vecteur p^* calculé, on évalue facilement la variation w de w due aux fluctuations des variables aléatoires u_1, u_2, u_3, u_4 grâce à la relation :

$$\Delta \overline{w} = p_1 \frac{\Delta \overline{u}_1}{\sigma_1} + p_2 \frac{\Delta \overline{u}_2}{\sigma_2} + p_3 \frac{\Delta \overline{u}_3}{\sigma_3} + p_4 \frac{\Delta \overline{u}_4}{\sigma_4}$$

On peut concevoir ainsi le système suivant : des appareils mesurent $\Delta \overline{u}_1$, $\Delta \overline{u}_2$, $\Delta \overline{u}_3$, $\Delta \overline{u}_4$, transmettent les valeurs à un ordinateur qui calcule la variation $\Delta \overline{w}$ à faire subir à $\overline{w}$ afin de maintenir constantes les probabilités $p_t(v_i)$. $\Delta \overline{w}$ est transmis à un appareil qui porte $\overline{w}$ à sa nouvelle valeur.

Remarquons, pour finir, que le plan étant prévu pour 30 jours on . : peut faire le calcul de $\Delta \overline{w}$ que de temps en temps ; un ordinateur n'est donc pas essentiel.



UNIVERSITÉ NANCY BIBLIOTHÈQUE