

Reçu 2 exemplaires le 21-1-63

SEN 62
32

UNIVERSITÉ DE NANCY

FACULTÉ DES SCIENCES

✓ 27 cm. 46 ff
graph. tabl.

APPLICATION D'UNE NOUVELLE MÉTHODE NUMÉRIQUE DE QUADRATURE
AU CALCUL DES INTÉGRALES de FOURIER

THÈSE

pour l'obtention

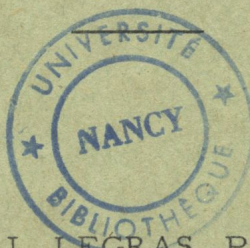
du DOCTORAT de SPÉCIALITÉ (Mathématiques 3ème Cycle)

15

Soutenue devant le Jury en Octobre 1962

par

Marie-Claude VALENTIN



Jury : MM. J. LEGRAS, Président.

M. DEPAIX)
Melle HUET) Examineurs

15 Octobre 62

CALCUL DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER
D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

THÈSE



POUR L'OBTENTION DU DOCTORAT
DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES (3^{ème} CYCLE)
SOUTENUE DEVANT LE JURY EN OCTOBRE 1962
PAR MADemoiselle Marie-Claude VALENTIN

JURY { M^r LEGRAS Président
M^r DEPAIX } Examineurs
M^{lle} HUET }

Doyen : M. ROUBAULT
Assesseur : M. AUBRY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT, DELSARTE, URION.

Professeurs honoraires : MM. GUTTON, CROZE, RAYBAUD, LAFFITTE, LERAY, JOLY, LAPORTE, EICHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, L. SCHWARTZ, DIEUDONNE, de MALLEMANN, LONGCHAMON, LETORT, DODE, GAUTHIER, GOUDET, OLMER, CORNUBERT, CHAPELLE, GUERIN, CHEVALLIER.

Maîtres de conférences honoraires : MM. RAUX, LIENHART.

PROFESSEURS

MM.			
URION	Chimie biologique	LIONS	M. M. P.
DELSARTE	Analyse supérieure	SUJNER	Physique expérimentale
ROUBAULT	Géologie	HILLY	Géologie
VEILLET	Biologie animale	LE GOFF	Génie chimique
ECHEVIN	Botanique	CHAPON	Chimie biologique
BARRIOL	Chimie théorique	HEROLD	Chimie industrielle
BIZETTE	Physique	SCHWARTZ	Exploitation minière
GUILLIEN	Electronique	GAYET	Physiologie
GIBERT	Chimie Physique	MANGENOT	Phytopathologie
HERVE	Calcul dif. et intég.	MALAPRADE	Chimie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	HADNI	Physique
DAVID	Chimie organique	DELAMARE-DEBOUTEVILLE	Zoologie
BOLFA	Minéralogie	BONVALET	Mécanique physique
NICLAUSE	Chimie	Mme ROIZEN	Physique
FAIVRE	Physique appliquée	KERN	Minéralogie
AUBRY	Chimie minérale	BASTICK	Chimie
DUVAL	Chimie	DUCHAUFOR	Pédologie
COPPEYS	Radiogéologie	NEEL	Chimie industrielle
FRUHLING	Physique		organique

MAITRES DE CONFÉRENCES

MM.			
WERNER	Botanique	VUILLAUME	Psychophysiologie
GARNIER	Agronomie	PLAN	Mécanique physique
REGNIER	Physico-chimie	Mme BASTICK	Chimie MPC (Epinal)
WEPPE	Minéralogie appliquée	GUDEFIN	Physique
BERNARD	Géologie	HORN	Physique
REYARD	Physique théorique et nucl.	CERF	Mathématiques gén. ^{les}
CONDE	Zoologie	FRENTZ	Biologie animale
GOSSE	Génie chimique	Mme HERVE	Math. (propédeutique)
CHAMPIER	Physique	AUROUZE	Paléontologie
GAY	Chimie biologique	FELDEN	Physique M.P.C.
ROCCI	Géologie		(Epinal)

CHARGÉS D'ENSEIGNEMENT

MM.			
MARI	Chimie (I.S.I.N.)	EYMARD	Math. (propédeutique)
LAFON	Physique (I.S.I.N.)	DANYSZ	Mécanique physique
			(I.S.I.N.)

Secrétaire Principal : M. CARON

Je tiens à exprimer à mon professeur
monsieur Jean Segras ma profonde reconnaissance
pour l'intérêt constant, les précieux conseils et
l'amicale sollicitude qu'il a bien voulu me
témoigner au cours de ce travail.

Je prie Messieurs les Professeurs composant
le Jury d'accepter l'expression de ma respectueuse
gratitude.

Je remercie les Secrétaires du Centre et
tous mes camarades de leur aide si sympathique,
en particulier mon amie madame Giannesini
qui a eu l'amabilité de me faire bénéficier de
ses propres recherches.

INTRODUCTION

Pour calculer le nombre représenté par l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x) dx$$

on distingue habituellement deux familles de méthodes :

— Les méthodes mathématiques dites "algébriques" : recherche de la primitive, développement de la fonction $f(x)$ en séries entières, intégration dans le plan complexe, dérivation ou intégration sous le signe $\int \dots$

— Et les méthodes numériques lorsque les précédentes se sont révélées insuffisantes ou lorsque toutes les données sont numériques.

- Ces dernières : méthodes de COTES, de GAUSS ou autres consistent d'abord à interpoler la fonction $f(x)$ par un polynôme $P_n(x)$ et à remplacer ensuite le calcul de $\int_a^b f(x) dx$ par celui de $\int_a^b P_n(x) dx$.

- Elles donnent des résultats satisfaisants, si la courbe de $f(x)$ est "suffisamment régulière" pour que son approximation par le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ soit bonne. Si la courbe possède des dérivées infinies il est difficile d'approcher correctement la fonction par un polynôme autour des points à tangente infinie. Ainsi fait-on appel à la méthode de GAUSS généralisée pour calculer les intégrales de la forme $\int_{-1}^{+1} f(x) \sqrt{1-x^2} dx$; $\int_0^1 f(x) \log x dx \dots$,

$f(x)$ étant régulière mais les produits $f(x) \sqrt{1-x^2}$; $f(x) \log x \dots$, possédant des dérivées infinies aux bornes d'intégration.

- Plus généralement, nous allons avoir à calculer des intégrales de la forme $\int_a^b k(x) f(x) dx$; $k(x)$ étant le "noyau", fonction qui sera définie par une expression mathématique, et $f(x)$ étant une "fonction numérique", donnée non par une écriture mathématique mais par ses valeurs numériques à différentes abscisses x .

- Les intégrales de cette forme sont bien une généralisation des précédentes, puisqu'il suffit de prendre le noyau identique à 1 ($k \equiv 1$) pour retrouver les intégrales définies. De plus, remarquons que nous pourrions poser $k(x) f(x) = F(x)$ pour revenir au cas $\int_a^b F(x) dx$ exposé ci-dessus, mais qu'alors, nous aurions une "perte" d'information puisque l'expression mathématique de $k(x)$ est beaucoup plus riche en information que ses valeurs numériques en un nombre fini de points, ce qui entraînerait une perte de précision.

- Dans la méthode que nous allons présenter, nous commencerons comme dans les autres méthodes numériques par interpoler la fonction $f(x)$ par un polynôme, c'est pourquoi le début de notre exposé portera

sur la représentation des polynômes de LAGRANGE sous une forme modernisée : "Les Matrices de LAGRANGE". Ensuite nous montrerons comment calculer l'intégrale générale $\int^b_k(x) f(x) dx$ par interpolations successives sur des arcs se chevauchant. Et nous appliquerons cette méthode au calcul des coefficients de séries de FOURIER et à celui de la Transformée de FOURIER d'une fonction numérique.

1^{er} CHAPITRE —Les Matrices de LAGRANGEPolynômes de LAGRANGE

On appelle polynôme de LAGRANGE d'ordre i $L_i(x)$ le polynôme de degré n :

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

tel que : $L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Interpolier la fonction $f(x)$ définie en $(n+1)$ points $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ prenant les valeurs $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots, f_n$ en ces points, c'est trouver un polynôme $P_n(x)$ tel que

$$P_n(x_i) = f(x_i) = f_i \quad i=0, 1, \dots, n$$

l'expression $f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots + f_i L_i(x) + \dots + f_n L_n(x) = P_n(x)$ est exactement un polynôme de degré n qui prend aux points $x_0, \dots, x_i, \dots, x_n$ les valeurs $f_0, \dots, f_i, \dots, f_n$, c'est donc le polynôme d'interpolation de $f(x)$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

On montre aisément qu'il est unique.

Matrices de LAGRANGE

Chaque polynôme de LAGRANGE $L_i(x)$ peut être mis sous la forme :

$$L_i(x) = B_0^i + B_1^i x + \dots + B_j^i x^j + \dots + B_n^i x^n.$$

Formons la matrice

$$|L_n| = \begin{vmatrix} B_0^0 & B_1^0 & \dots & B_j^0 & \dots & B_n^0 \\ B_0^1 & B_1^1 & \dots & B_j^1 & \dots & B_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_0^i & B_1^i & \dots & B_j^i & \dots & B_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_0^n & B_1^n & \dots & B_j^n & \dots & B_n^n \end{vmatrix}$$

où les éléments de la colonne i sont les coefficients du polynôme de LAGRANGE d'ordre i .

Montrons que nous pouvons alors écrire $P_n(x)$ sous la forme d'un double produit de matrices : $|x|' |L_n| \{f\}$

où $|x|'$ est la matrice ligne $|1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^i \ \dots \ x^n|$

et $\{f\}$ la matrice colonne $\begin{vmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix}$

En effet :

$$|x|' |L_n| = |1 \ x \ \dots \ x^i \ \dots \ x^n| \begin{vmatrix} B_0^0 & B_0^1 & \dots & B_0^i & \dots & B_0^n \\ B_j^0 & B_j^1 & \dots & B_j^i & \dots & B_j^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_n^0 & B_n^1 & \dots & B_n^i & \dots & B_n^n \end{vmatrix} = |L_0(x) L_1(x) \dots L_i(x) \dots L_n(x)|$$

$$\text{et } |L_0(x) L_1(x) \dots L_i(x) \dots L_n(x)| \begin{vmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \dots + f_i L_i(x) + \dots + f_n L_n(x)$$

Donc
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x) = |x|' |L_n| \{f\}$$

Remarque : Le produit $|L_n| \{f\}$ met en évidence les coefficients A_i du polynôme $P_n(x)$

$$|L_n| \{f\} = \begin{vmatrix} B_0^0 & B_0^1 & \dots & B_0^i & \dots & B_0^n \\ B_j^0 & B_j^1 & \dots & B_j^i & \dots & B_j^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_n^0 & B_n^1 & \dots & B_n^i & \dots & B_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_0^0 f_0 + B_0^1 f_1 + \dots + B_0^i f_i + \dots + B_0^n f_n \\ B_j^0 f_0 + B_j^1 f_1 + \dots + B_j^i f_i + \dots + B_j^n f_n \\ \vdots \\ B_n^0 f_0 + B_n^1 f_1 + \dots + B_n^i f_i + \dots + B_n^n f_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

et $P_n(x) = |x|' |L_n| \{f\} = |x|' \{A\} = A_0 + A_1 x + \dots + A_i x^i + \dots + A_n x^n$

— Les éléments de la matrice $|A|$ sont bien les coefficients du polynôme d'interpolation.

Calcul des Matrices de LAGRANGE.

Lorsque nous choisissons $x_0 = 0$; $x_1 = 1$; $\dots$ $x_i = i$; $\dots$ $x_n = n$ comme points d'interpolation, nous obtenons la matrice "régulière" de LAGRANGE L_n

Si les points d'interpolation sont régulièrement espacés, équidistants les uns des autres tels que $x_i - x_{i-1} = h$

D'où $x_0 = 0$; $x_1 = h$; $\dots$ $x_i = ih$; $\dots$ $x_n = nh$.

Le polynôme $P_n(x)$ peut s'écrire :

$$P_n(x) = \left| 1 \frac{x}{h} \frac{x^2}{h^2} \dots \frac{x^j}{h^j} \dots \frac{x^n}{h^n} \right| L_n \{f\}$$

- Un programme a été établi au Centre de Calcul de l'Université de NANCY, sur I.B.M. 650 pour calculer les coefficients des polynômes $L_i(x)$, quelles que soient les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ pour lesquelles nous voulons interpoler la fonction.

- Posons : $R_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_i)\dots(x-x_n)$

soit : $S_i(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{x-x_i}$ alors $L_i(x) = \frac{S_i(x)}{S_i(x_i)}$

$S_i(x)$, étant un quotient exact, il s'introduit des erreurs de chute importantes lors du calcul sur ordinateur.

La méthode a donc consisté à calculer pour chaque polynôme $L_i(x)$, le polynôme $S_i(x) = (x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)$ puis à normaliser.

Résultats des matrices de LAGRANGE régulières pour les premières valeurs de n .

$$|L_2| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad L_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} \quad L_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{25}{12} & 4 & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{35}{24} & -\frac{13}{3} & \frac{19}{4} & -\frac{7}{3} & \frac{11}{24} \\ -\frac{5}{12} & \frac{3}{2} & -2 & 7 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{vmatrix}$$

$$|L_5| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{137}{60} & 5 & -5 & \frac{10}{3} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{15}{8} & -\frac{77}{12} & \frac{107}{12} & -\frac{13}{2} & \frac{61}{24} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{72}{24} & \frac{71}{24} & -\frac{59}{12} & \frac{49}{12} & -\frac{41}{24} & -\frac{7}{24} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{12} & \frac{13}{12} & -1 & \frac{11}{24} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{120} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{120} \end{vmatrix}$$

Propriétés.

Les matrices L_n sont les inverses des matrices de VAN DER MOND V_n . D'après la définition des polynômes $L_i(x)$

6

le produit $|V_n| |L_n| = |I|$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0^1 & 0^2 & \dots & 0^j & \dots & 0^n \\ 1 & 1^1 & 1^2 & \dots & 1^j & \dots & 1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & h^1 & h^2 & \dots & h^j & \dots & h^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & n^1 & n^2 & \dots & n^j & \dots & n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_0^0 & B_0^1 & \dots & B_0^j & \dots & B_0^n \\ B_1^0 & B_1^1 & \dots & B_1^j & \dots & B_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_j^0 & B_j^1 & \dots & B_j^j & \dots & B_j^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_n^0 & B_n^1 & \dots & B_n^j & \dots & B_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Dérivation Nous avons écrit précédemment :

$$P_n(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_j x^j + \dots + A_n x^n$$

ce qui entraîne : $P'_n(x) = A_1 + 2A_2 x + \dots + jA_j x^{j-1} + \dots + nA_n x^{n-1}$
 soit, sous forme matricielle :

$$\frac{d P_n}{d x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 & \dots & j x^{j-1} & \dots & n x^{n-1} \end{vmatrix} \{A\} = \left(\frac{d}{d x} |x|' \right) |L_n| \{f\}$$

La matrice ligne en x est simplement obtenue par dérivation terme à terme de la matrice $|x|' = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^j & \dots & x^n \end{vmatrix}$, le produit $\{A\} = |L_n| \{f\}$ reste inchangé.

de même $\frac{d^k P_n}{d x^k} = \left(\frac{d^k}{d x^k} |x|' \right) |L_n| \{f\}$

Intégration

Nous avons :

$$\int_0^x P_n(u) du = A_0 x + \frac{A_1}{2} x^2 + \frac{A_2}{3} x^3 + \dots + \frac{A_j}{j+1} x^{j+1} + \dots + \frac{A_n}{n+1} x^{n+1}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\int_0^x P_n(u) du = \begin{vmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \dots & \frac{x^{j+1}}{j+1} & \dots & \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{vmatrix} \{A\} = \begin{vmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^{j+1}}{j+1} & \dots & \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{vmatrix} |L_n| \{f\}$$

La matrice ligne en x est obtenue par intégration terme à terme de la matrice $|x|' = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^j & \dots & x^n \end{vmatrix}$, le produit $\{A\} = |L_n| \{f\}$ reste inchangé.

Applications.

— Calculer les valeurs de l'expression $Y(x) = f''(x) - a(x)f(x)$

$f(x)$ donnée par ses valeurs $f_0; f_1; f_2; f_3$ aux points $0; h; 2h; 3h$.
 Soit $P_3(x)$ le polynôme d'interpolation de $f(x)$ de degré 3.

$$P_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{x}{h} & \frac{x^2}{h^2} & \frac{x^3}{h^3} \end{vmatrix} |L_3| \{f\}$$

Nous avons alors :

$$P_3''(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{h^2} & \frac{6x}{h^3} \end{vmatrix} |L_3| \{f\}$$

$$\text{et } a(x) P_3(x) = \begin{vmatrix} a(x) & \frac{x}{h} a(x) & \frac{x^2}{h^2} a(x) & \frac{x^3}{h^3} a(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_3 \end{vmatrix} \{f\}$$

$$\text{d'où } Y(x) = \begin{vmatrix} -a(x) & -\frac{x}{h} a(x) & \frac{2-x^2}{h^2} a(x) & \frac{6x-x^3}{h^3} a(x) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_3 \end{vmatrix} \{f\}$$

$$\text{pour } x = x_i \quad Y(x_i) = \begin{vmatrix} E_i^0 & E_i^1 & E_i^2 & E_i^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_3 \end{vmatrix} \{f\}$$

$$\text{En posant } E_i^0 = -a(x_i); E_i^1 = -\frac{x_i}{h} a(x_i); E_i^2 = \frac{2-x_i^2}{h^2} a(x_i); E_i^3 = \frac{6x_i-x_i^3}{h^3} a(x_i)$$

Pour différentes valeurs de $x : x_0; x_1; \dots x_i; \dots x_n$

$$\{Y\} = \begin{vmatrix} Y(x_0) \\ Y(x_i) \\ Y(x_n) \end{vmatrix} \quad \text{et en posant } E = \begin{vmatrix} E_0^0 & E_0^1 & E_0^2 & E_0^3 \\ E_i^0 & E_i^1 & E_i^2 & E_i^3 \\ E_n^0 & E_n^1 & E_n^2 & E_n^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{nous avons } \boxed{\{Y\} = |E| \begin{vmatrix} L_3 \end{vmatrix} \{f\}}$$

— calcul de $I = \int_h^{2h} f(x) dx$

$f(x)$ donnée par $f_0; f_1; f_2; f_3$ aux points $0; h; 2h; 3h$. Comme précédemment approchons $f(x)$ par le polynôme d'interpolation $P_3(x)$ de degré 3.

$$\text{Nous avons, } I_3 = \int_h^{2h} P_3(x) dx = \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & J_2 & J_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_3 \end{vmatrix} \{f\}$$

$$J_0 = \int_h^{2h} 1 dx$$

$$J_1 = \int_h^{2h} \frac{x}{h} dx$$

$$J_2 = \int_h^{2h} \frac{x^2}{h^2} dx$$

$$J_3 = \int_h^{2h} \frac{x^3}{h^3} dx$$

$$\text{Nous voyons que } J_0 = h; J_1 = \frac{3h}{2}; J_2 = \frac{7h}{3}; J_3 = \frac{15h}{4}$$

$$\text{Soit } \int_h^{2h} P_3(x) dx = \begin{vmatrix} h & \frac{3h}{2} & \frac{7h}{3} & \frac{15h}{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_3 \end{vmatrix} \{f\}$$

$$\text{ou } I_3 = \begin{vmatrix} h & \frac{3h}{2} & \frac{7h}{3} & \frac{15h}{4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix}$$

et

$$\boxed{I_3 = \frac{h}{24} (-f_0 + 13f_1 + 13f_2 - f_3)}$$

Les Méthodes Composites d'IntégrationLes méthodes usuelles d'intégration.

Elles peuvent remplacer la fonction $f(x)$ par un seul polynôme sur tout l'intervalle d'intégration, ce qui donne des résultats satisfaisants lorsque cet intervalle n'est pas trop grand, mais ce qui, dans le cas contraire, même lorsqu'on augmente le degré du polynôme d'approximation, introduit souvent des erreurs trop importantes.

On partage l'intervalle d'intégration en intervalles partiels et interpoler $f(x)$ sur chacun de ceux-ci, ce qui fait jouer un rôle particulier et arbitraire aux points de coupe; en effet nous approchons ainsi la fonction $f(x)$ par une fonction dont les dérivées sont discontinues à chaque jonction, d'où une baisse de la qualité de l'approximation.

La méthode composite

consiste à interpoler la fonction $f(x)$ par un polynôme de LAGRANGE de degré p sur un arc p fois plus grand que celui sur lequel nous calculerons une intégrale partielle.

Ainsi par exemple, nous approcherons la fonction $f(x)$ sur l'arc EF (fig. 1) par le polynôme de degré 5 : $P_5(x)$ passant par les points $CDEFGH$, et nous considérerons comme la contribution dans l'intégrale totale.

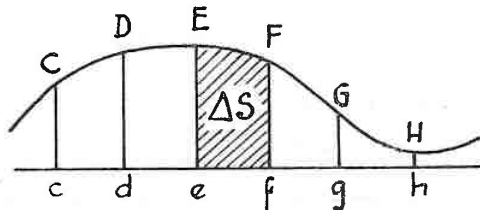


fig. 1

$\int_a^b k(x) f(x) dx$
de l'intégrale partielle ΔS sur l'intervalle ef la valeur approchée

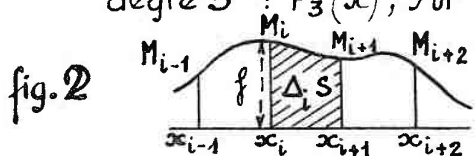
$$\Delta S = \int_e^f k(x) P_p(x) dx$$

avec ici $p = 5$

Nous pouvons évidemment prendre pour p différentes valeurs, en général impaires pour des raisons de symétrie, sauf aux extrémités lorsque la fonction n'est pas connue en dehors de l'intervalle d'intégration.

Méthode composite ordinaire.

Soit à calculer l'intégrale $I = \int_a^b f(x) dx$ en posant $h(x) = 1$.
Partageons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles partiels égaux à h ($h = \frac{b-a}{n}$) et approchons la fonction $f(x)$ par le polynôme de degré 3 : $P_3(x)$, sur chacun de ceux-ci.



Soit $[x_i = a + ih; x_{i+1} = a + (i+1)h]$ un de ces intervalles $f(x)$ est donnée aux points $x_{i-1}; x_i; x_{i+1}; x_{i+2}$ par ses valeurs $f_{i-1}; f_i; f_{i+1}; f_{i+2}$ (cf. fig. 2)

Alors $\Delta_i S$, $\Delta_i S$ étant égal à $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ ou à $\int_h^{2h} f(x_{i-1} + t) dt$ par le changement de variable $t = x - x_{i-1}$, est approchée par l'intégrale $\int_h^{2h} P_3(t) dt$; $P_3(t)$ prenant bien les valeurs $f_{i-1}; f_i; f_{i+1}; f_{i+2}$ aux points $t = 0; h; 2h; 3h$.

$$\text{Soit } \Delta_i S = h [\beta_0 f_{i-1} + \beta_1 f_i + \beta_2 f_{i+1} + \beta_3 f_{i+2}]$$

$$\text{avec } \beta_0 = \beta_3 = -\frac{1}{24} \quad \text{et} \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{13}{24}$$

d'après ce que nous avons vu au 1^{er} chapitre (2^e application)
Supposons la fonction $f(x)$ connue en dehors de l'intervalle d'intégration, prenant les valeurs $f_{-1}; f_0; f_1; \dots; f_i; \dots; f_n; f_{n+1}$ aux points $a-h; a; a+h; \dots; a+ih; \dots; b; b+h$.

Nous avons (cf. fig 3) :

$$I = \Delta_0 S + \Delta_1 S + \dots + \Delta_i S + \dots + \Delta_{n-1} S.$$

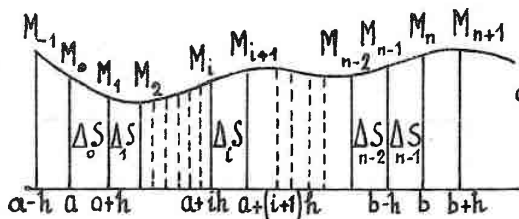


fig. 3

$$\text{et } \begin{cases} \frac{1}{h} \Delta_0 S = \beta_0 f_{-1} + \beta_1 f_0 + \beta_2 f_1 + \beta_3 f_2 \\ \frac{1}{h} \Delta_i S = \beta_0 f_{i-1} + \beta_1 f_i + \beta_2 f_{i+1} + \beta_3 f_{i+2} \\ \frac{1}{h} \Delta_{n-1} S = \beta_0 f_{n-2} + \beta_1 f_{n-1} + \beta_2 f_n + \beta_3 f_{n+1} \end{cases}$$

Soit en faisant la somme :

$$I = h \left\{ \beta_0 f_{-1} + (\beta_0 + \beta_1) f_0 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) f_1 + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) f_2 + \dots + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) f_i \right. \\ \left. \dots + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3) f_{n-2} + (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) f_{n-1} + (\beta_2 + \beta_3) f_n + \beta_3 f_{n+1} \right\}$$

$$\text{ou } \int_a^b f(x) dx = h \left\{ -\frac{f_{-1}}{24} + \frac{f_0}{2} + \frac{25f_1}{24} + f_2 + \dots + f_i + \dots + f_{n-2} + \frac{25f_{n-1}}{24} + \frac{f_n}{2} - \frac{f_{n+1}}{24} \right\}$$

La formule met en évidence les "effets d'extrémités" ou termes correctifs, les termes centraux ayant tous comme coefficient h .

Supposons que la fonction $f(x)$ n'est pas connue en dehors de l'intervalle d'intégration, nous aurons d'autres expressions pour les "effets d'extrémités".

Dans le cas précédent par exemple, si f_{-1} et f_{n+1} ne peuvent être connus, nous calculerons $\Delta_0 S$ et $\Delta_{n-1} S$ en interpolant la fonction $f(x)$ sur les arcs $\overline{M_0 M_1}$ et $\overline{M_{n-1} M_n}$ par un polynôme de degré 2 passant par les points M_0, M_1, M_2 et M_{n-2}, M_{n-1}, M_n (cf figure 3).

$$P_2(x) = \left| 1 \quad \frac{x}{h} \quad \frac{x^2}{h^2} \right| \left| L_2 \right| \{ f \}$$

$$\text{Ainsi } \Delta_0 S = \left| h \quad \frac{h}{2} \quad \frac{h}{3} \right| \left| L_2 \right| \{ f \}$$

$$\text{ou } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{h} \Delta_0 S = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \\ \frac{1}{h} \Delta_{n-1} S = \alpha_2 f_{n-2} + \alpha_1 f_{n-1} + \alpha_0 f_n \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \left| \alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \right| = \left| 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \right| \left| L_2 \right| \text{ ou } \left| 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \right| \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{5}{12} ; \alpha_1 = \frac{8}{12} ; \alpha_2 = -\frac{1}{12}$$

La contribution des autres $\Delta_i S$ ($i = 1; 2 \dots n-2$) restant identique, nous avons en définitive :

$$\int_a^b f(x) dx = h \left\{ \frac{3f_0}{8} + \frac{7f_1}{6} + \frac{23f_2}{24} + f_3 + \dots + f_i + \dots + f_{n-3} + \frac{23f_{n-2}}{24} + \frac{7f_{n-1}}{6} + \frac{3f_n}{8} \right\}$$

Cas d'une fonction symétrique :

Soit à calculer $\int_{-a}^{+a} f(x) dx$ avec $f(x) = f(-x)$

Dans le cas où $f(x)$ est connue en dehors de l'intervalle d'intégration nous avons, d'après la formule ci-dessus :

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = h \left\{ -\frac{f_{-1}}{24} + \frac{f_0}{2} + \frac{25f_1}{24} + f_2 + \dots + f_i + \dots + f_{n-2} + \frac{25f_{n-1}}{24} + \frac{f_n}{2} - \frac{f_{n+1}}{24} \right\}$$

mais ici $f_{-1} = f_{n+1}$; $f_0 = f_n$; $\dots$; $f_i = f_{-i}$ s'il y a un nombre pair d'intervalle partiels dans l'intervalle $[-a; +a]$

En posant donc $f'_0 ; f'_1 ; \dots ; f'_i ; \dots ; f'_m$; valeurs de la fonction $f(x)$ aux points $0 ; h ; \dots ; ih ; \dots ; a = mh$; $a + h = (m+1)h$, nous voyons que :

$$\int_{-a}^{+a} f(x) dx = 2h \left\{ \frac{f'_0}{2} + f'_1 + \dots + f'_i + \dots + f'_{m-2} + \frac{25f'_{m-1}}{24} + \frac{f'_m}{2} - \frac{f'_{m+1}}{24} \right\}$$

— Cas d'une fonction périodique.

Soit à calculer $\int_a^b f(x) dx$ avec $f(x)$ fonction périodique de période $[a, b]$.

La période entraîne que $f_{-1} = f_{n-1}$; $f_0 = f_n$; $f_1 = f_{n+1}$

$$\text{d'où } \int_a^b f(x) dx = h \left\{ \frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_i + \dots + f_{n-2} + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right\}$$

Seuls les termes "centraux" interviennent, quelque soit le degré du polynôme d'approximation. En effet, lorsqu'on intègre sur un intervalle de $2k$ périodes, presque tous les termes sont des termes centraux, mais chaque valeur de $f(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ se retrouvent k fois. Plus k est grand et moins interviennent les effets d'extrémités dans la valeur de l'intégrale. En effet : Nous nous rapprochons de la formule des trapèzes.

Remarque : nous pouvons augmenter le degré du polynôme d'approximation.

Ainsi si nous prenons $n=5$, il faut reprendre le calcul préliminaire.

$$\Delta_i S = \int_{2h}^{3h} P_5(x) dx = |J_0 J_1 J_2 J_3 J_4 J_5| |L_5| \{f\}.$$

$$\text{avec } J_0 = \int_{2h}^{3h} dx = h ; J_1 = \int_{2h}^{3h} \frac{x}{h} dx = \frac{5h}{2} ; J_2 = \int_{2h}^{3h} \frac{x^2}{h^2} dx = \frac{19h}{3} ;$$

$$J_3 = \int_{2h}^{3h} \frac{x^3}{h^3} dx = \frac{65h}{4} ; J_4 = \int_{2h}^{3h} \frac{x^4}{h^4} dx = \frac{211h}{5} ; J_5 = \int_{2h}^{3h} \frac{x^5}{h^5} dx = \frac{665h}{6}.$$

$$\Delta_i S = h (\beta_0 f_{i-2} + \beta_1 f_{i-1} + \beta_2 f_i + \beta_3 f_{i+1} + \beta_4 f_{i+2} + \beta_5 f_{i+3})$$

Si $L_{5,i}$ est la i colonne de L_5 nous avons

$$\beta_i = [J_0 J_1 J_2 J_3 J_4 J_5] [L_{5,i}] \quad \beta_i = \sum_{k=0}^{k=5} J_k B_k^i$$

$$\text{soit } \beta_0 = \beta_5 = \frac{11}{1440} ; \beta_1 = \beta_4 = -\frac{93}{1440} ; \beta_2 = \beta_3 = \frac{802}{1440}$$

Et dans le cas où $f(x)$ est connue en dehors de l'intervalle d'intégration par exemple.

$$\int_a^b f(x) dx = h \left\{ D_{-2} f_{-2} + D_{-1} f_{-1} + D_0 f_0 + D_1 f_1 + D_2 f_2 + f_3 + \dots + f_i + \dots + f_{n-3} + D_{n-2} f_{n-2} + D_{n-1} f_{n-1} + D_n f_n + D_{n+1} f_{n+1} + D_{n+2} f_{n+2} \right\}$$

avec les coefficients
symétriques
calculés comme
précédemment

$$\begin{cases} D_{-2} = D_{n+2} = \beta_0 = \frac{11}{1440} \\ D_{-1} = D_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 = -\frac{82}{1440} \\ D_0 = D_n = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \frac{1522}{1440} \\ D_2 = D_{n-2} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \frac{1429}{1440} \end{cases}$$

$$\text{et } D_i = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 1 \quad i = 3, 4, \dots, n-3.$$

Méthode composite généralisée.

Soit à calculer l'intégrale $I = \int_a^b k(x) f(x) dx$.

Nous allons refaire le même raisonnement que précédemment en respectant l'écriture mathématique du noyau $k(x)$.

Partageons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles partiels égaux à h ($h = \frac{b-a}{n}$).

Soit $[x_i = a + ih; x_{i+1} = a + (i+1)h]$ un de ces intervalles.

Pour calculer l'intégrale partielle $\Delta_i S$ sur cet intervalle nous savons que la fonction $f(x)$ est donnée aux points $x_{i-p}; \dots; x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+p+1}$; par ses valeurs $f_{i-p}; \dots; f_i; f_{i+1}; \dots; f_{i+p+1}$.

Effectuons le changement de variable qui à l'intervalle $[x_{i-p}; x_{i+p+1}]$ fait correspondre l'intervalle $[0; (2p+1)h]$ soit :

$$t = x - x_{i-p} = x - (i-p)h \quad dt = dx.$$

Nous pouvons approcher la fonction $f(x)$ par le polynôme de LAGRANGE de degré $2p+1$:

$$P_{2p+1}(t) = \left| 1 \quad \frac{t}{h} \quad \dots \quad \frac{t^j}{h^j} \quad \dots \quad \frac{t^{2p+1}}{h^{2p+1}} \right| L_{2p+1} \left\{ \left\{ f \right\} \right\} \text{ avec } \left\{ f \right\} = \begin{vmatrix} f_{i-p} \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{i+p+1} \end{vmatrix}$$

$P_{2p+1}(t) = f_{i-p}; \dots; f_i; f_{i+1}; \dots; f_{i+p+1}$; aux points $t = 0; \dots; ph; (p+1)h; \dots; (2p+1)h$.

grâce à ce changement de variable nous voyons qu'intervient la matrice régulière de LAGRANGE.

$$\text{Comme} \quad \Delta_i S = \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x) f(x) dx$$

$$\text{nous aurons ainsi} \quad \Delta_i S = \int_{ph}^{(p+1)h} k(t + x_{i-p}) f(t + x_{i-p}) dt$$

$$\text{D'où en remplaçant la fonction } f(t + x_{i-p}) \text{ par le polynôme } P_{2p+1}(t) \text{ défini ci-dessus}$$

$$\Delta_i S \simeq \int_{ph}^{(p+1)h} k(t + x_{i-p}) P_{2p+1}(t) dt.$$

En posant : $J_j^i = \int_{ph}^{(p+1)h} k(t + x_{i-p}) \frac{t^j}{h^j} dt$ $k(x)$ étant supposé tel que l'intégrale est calculable par méthode algébrique.

Nous pouvons écrire :

$$\Delta_i S \simeq \left| J_0^i \quad J_1^i \quad J_2^i \quad \dots \quad J_j^i \quad \dots \quad J_{2p+1}^i \right| L_{2p+1} \left\{ \left\{ f \right\} \right\}$$

ou

$$\Delta_i S \simeq \left| \beta_0^i \quad \beta_1^i \quad \beta_2^i \quad \dots \quad \beta_p^i \quad \beta_{p+1}^i \quad \dots \quad \beta_{2p+1}^i \right| \left\{ \left\{ f \right\} \right\}$$

$$\left| \beta_0^i \quad \beta_1^i \quad \dots \quad \beta_p^i \quad \beta_{p+1}^i \quad \dots \quad \beta_{2p+1}^i \right| = \left| J_0^i \quad J_1^i \quad \dots \quad J_{2p+1}^i \right| L_{2p+1}$$

ou encore $\Delta_i S = \beta_0^i f_{i-p} + \dots + \beta_p^i f_i + \beta_{p+1}^i f_{i+1} + \dots + \beta_{2p+1}^i f_{i+p+1}$
 - Supposons la fonction $f(x)$ connue en dehors de l'intervalle d'intégration prenant les valeurs $f_{-p}, f_{-p+1}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+p}, f_{n+p+1}$ aux points $a-ph, a-(p+1)h, \dots, a-h, a, a+h, \dots, b-h, b, b+h, \dots, b+ph, b+(p+1)h$

Nous avons (cf fig.3) $I = \sum_{j=0}^{i=n-1} \Delta_j S$

$$\text{avec } \begin{cases} \Delta_0 S = \beta_0^0 f_{-p} + \dots + \beta_p^0 f_0 + \dots + \beta_{2p+1}^0 f_{p+1} \\ \Delta_1 S = \beta_0^1 f_{-p+1} + \dots + \beta_p^1 f_1 + \dots + \beta_{2p+1}^1 f_{p+2} \\ \Delta_i S = \beta_0^i f_{i-p} + \dots + \beta_p^i f_i + \dots + \beta_{2p+1}^i f_{i+p+1} \\ \Delta_{n-1} S = \beta_0^{n-1} f_{n-p-1} + \dots + \beta_p^{n-1} f_{n-1} + \dots + \beta_{2p+1}^{n-1} f_{n+p} \end{cases}$$

Soit en faisant la somme

$$I = \sum_{k=-p}^{k=n+p} \gamma_k f_k$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_{-p} &= \beta_0^0 \\ \gamma_{-p+1} &= \beta_1^0 + \beta_0^1 \\ \gamma_{-1} &= \beta_{p-1}^0 + \dots + \beta_2^{p-3} + \beta_1^{p-2} + \beta_0^{p-1} \\ \gamma_0 &= \beta_p^0 + \beta_{p-1}^1 + \dots + \beta_2^{p-2} + \beta_1^{p-1} + \beta_0^p \\ \gamma_1 &= \beta_{p+1}^0 + \beta_p^1 + \beta_{p-1}^2 + \dots + \beta_2^{p-1} + \beta_1^p + \beta_0^{p+1} \\ \gamma_i &= \beta_{2p+1}^{i-p-1} + \beta_{2p}^{i-p} + \dots + \beta_{p+2}^{i-2} + \beta_{p+1}^{i-1} + \beta_p^i + \beta_{p-1}^{i+1} + \beta_{p-2}^{i+2} + \dots + \beta_2^{i+p-2} + \beta_1^{i+p-1} + \beta_0^{i+p} \\ \gamma_{n-1} &= \beta_{2p+1}^{n-p-2} + \beta_{2p}^{n-p-1} + \dots + \beta_{p+2}^{n-3} + \beta_{p+1}^{n-2} + \beta_p^{n-1} \\ \gamma_n &= \beta_{2p+1}^{n-p-1} + \beta_{2p}^{n-p} + \dots + \beta_{p+2}^{n-2} + \beta_{p+1}^{n-1} \\ \gamma_{n+1} &= \beta_{2p+1}^{n-p} + \beta_{2p}^{n-p+1} + \dots + \beta_{p+2}^{n-1} \\ \gamma_{n+p} &= \beta_{2p+1}^{n-1} \end{aligned}$$

- Si la fonction $f(x)$ n'est pas connue en dehors des limites d'intégration, nous interpolons $f(x)$ par des polynômes d'ordres moins élevés $P_k(x)$ ($k < 2p+1$) sur les premiers ($i < 2p-1$) et les derniers ($i > n-2p$) intervalles partiels d'intégration et par le polynôme d'ordre $2p+1$ sur les intervalles partiels centraux ($2p-1 \leq i \leq n-2p$).

Le principe de la méthode est conservé. Seules, comme dans la méthode composite ordinaire, changent les valeurs des premiers et des derniers coefficients des f_i .

Les γ_i sont alors remplacés par des Γ_i , ceux-ci en nombre inférieur aux précédents, pour un même pas h , puisque la fonction n'est définie que sur les n points compris entre a et b .

La valeur de l'intégrale devient alors :

$$\int_a^b k(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^n \Gamma_i f_i$$

Si la fonction $f(x)$ n'est pas aussi connue en dehors des limites d'intégration que ce que nous l'avons supposé dans le cas général, nous ferons de même, en utilisant au maximum notre connaissance de $f(x)$.

Si m est le nombre de points où $f(x)$ est donnée, donc aussi le nombre des Γ_i possibles; $n+1 \leq m \leq n+2p+1$; nous aurons.

$$\int_a^b k(x) f(x) dx = \sum_i \Gamma_i f_i \quad i \text{ prenant } m \text{ valeurs.}$$

Ainsi supposons que la fonction ne soit pas connue aux points $a-ph$; $a-(p-1)h$; et $a+(n+p-1)h$; $a+(n+p)h$. Ici $m = n+2p-3$

Pour calculer $\Delta_0 S$ et $\Delta_{n-1} S$ nous interpolons $f(x)$ par le polynôme $P_{2p-1}(t)$ et $\Delta_1 S$ et $\Delta_{n-2} S$ nous interpolons $f(x)$ par le polynôme $P_{2p}(t)$.

En effectuant le changement de variable :

pour les deux premières intégrales partielles $t = x - (i-p+2)h$ $i=0$ ou $n-1$ faisant correspondre l'intervalle $[0; (2p-1)h]$ à l'intervalle $[x_{i-p+2}; x_{i+p+1}]$ et pour les deux autres $t = x - (i-p+1)h$ $i=1$ ou $n-2$ faisant correspondre l'intervalle $[0; 2ph]$ à l'intervalle $[x_{i-p+1}; x_{i+p+1}]$

$$\text{alors: } P_{2p-1}(t) = \left| 1 \frac{t}{h} \dots \frac{t}{h} \dots \frac{t^{2p-1}}{h^{2p-1}} \right| L_{2p-1} \left\{ \begin{matrix} f \\ \end{matrix} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{matrix} f \\ \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} f_{i-p+2} \\ \vdots \\ f_{i+p+1} \end{vmatrix}$$

$$P_{2p}(t) = \left| 1 \frac{t}{h} \dots \frac{t}{h} \dots \frac{t^{2p}}{h^{2p}} \right| L_{2p} \left\{ \begin{matrix} f \\ \end{matrix} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{matrix} f \\ \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} f_{i-p+1} \\ \vdots \\ f_{i+p+1} \end{vmatrix}$$

$$\text{et pour } i=0 \text{ et } n-1 \quad \Delta_i S = \int_{ph}^{(n+1)h} k(t+x_{i-p+2}) P_{2p-1}(t) dt$$

$$\text{pour } i=1 \text{ et } n-2 \quad \Delta_i S = \int_{ph}^{(n+1)h} k(t+x_{i-p+1}) P_{2p}(t) dt$$

$$\text{pour } 2 \leq i \leq n-3 \quad \Delta_i S = \int_{ph}^{(n+1)h} k(t+x_{i-p}) P_{2p+1}(t) dt$$

le calcul se poursuit de la même manière que précédemment en respectant ces changements de variables dans le calcul des intégrales J_i^1 .

Nous obtenons des coefficients différents que les précédents pour $\Delta_0 S$; $\Delta_1 S$; $\Delta_{n-2} S$; $\Delta_{n-1} S$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_0 S = \alpha_2^0 f_{-p+2} + \dots + \alpha_p^0 f_0 + \dots + \alpha_{2p+1}^0 f_{p+1} \\ \Delta_1 S = \alpha_1^1 f_{-p+2} + \dots + \alpha_p^1 f_1 + \dots + \alpha_{2p+1}^1 f_{p+2} \\ \Delta_i S = \beta_0^i f_{i-p} + \dots + \beta_p^i f_i + \dots + \beta_{2p+1}^i f_{i+p+1} \\ \Delta_{n-2} S = \alpha_0^{n-2} f_{n-p-2} + \dots + \alpha_p^{n-2} f_{n-2} + \dots + \alpha_{2p}^{n-2} f_{n+p-2} \\ \Delta_{n-1} S = \alpha_0^{n-1} f_{n-p-1} + \dots + \alpha_p^{n-1} f_{n-1} + \dots + \alpha_{2p-1}^{n-1} f_{n+p-2} \end{array} \right.$$

d'où
$$I = \sum_{k=-p+2}^{k=n+p-2} \Gamma_k f_k$$

Γ_k étant la somme des coefficients de f_k dans les intégrales partielles $\Delta_i S$.

Remarques

Dans la méthode composite généralisée, les intégrales J_j^i ne sont pas indépendantes de i , alors qu'au contraire elles l'étaient dans la méthode ordinaire, le noyau étant identique à 1

$$(k(x) \equiv 1) : J_j^i = \int_{ph}^{(p+1)h} k(t + x_{i-2p+1}) \frac{t^j}{h^j} dt \text{ devenait}$$

$$\int_{ph}^{(p+1)h} \frac{t^j}{h^j} dt \text{ indépendant de } i$$

Nous ne pouvons donc pas à la main conduire jusqu'au bout le calcul numérique des δ_i . Par contre, il se prête bien au passage sur calculatrice, se faisant pas à pas, pour chaque valeur de i nous calculons les $2p+2$ valeurs des J_j^i puis les $2p+2$ valeurs des β_p^i correspondants; une fois que nous avons tous les β_p^i , $i=0; 1; \dots; n-2; n-1$; les δ_i en sont des combinaisons simples.

De plus, le noyau $k(x)$ étant fixé, les coefficients δ_i obtenus, ceux-ci sont indépendants de la fonction $f(x)$ donc valables pour des fonctions quelconques, suffisamment "régulières".

Il suffit que le nombre n d'intervalles partiels dont on partage l'intervalle d'intégration $[a, b]$ soit fixe.

Alors

$$\int_a^b k(x) f(x) dx = \sum_{i=-2p+1}^{n+2p-1} \delta_i f_i$$

3^{ème} CHAPITREApplication de la méthode composite généralisée ou calcul de la Transformée de FOURIER d'une fonction numériqueIntérêt de ce cas particulier.

Nous avons été conduit à envisager le cas d'une transformée de FOURIER en étudiant un problème physique particulier : la connaissance de la répartition spectrale de l'énergie donne des renseignements sur la structure des corps cristallisés. Or cette répartition d'énergie est la transformée de FOURIER d'une courbe obtenue par interférométrie ; et il est plus facile et plus rapide de déterminer expérimentalement la courbe interférométrique que la courbe spectrale ; il est donc intéressant pour le physicien de posséder un procédé de calcul numérique permettant de passer de la première à la seconde, s'il désire ensuite étudier la structure des corps cristallisés.

Définition

On appelle transformée de FOURIER d'une fonction $f(x)$, notée $\mathcal{F} f(y)$ ou $\hat{f}(y)$ l'intégrale "lorsqu'elle a un sens" :

$$\mathcal{F} f(y) = \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i xy} f(x) dx$$

Et on appelle transformée de FOURIER inverse de $f(x)$, notée $\bar{\mathcal{F}} f(y)$ l'intégrale :

$$\bar{\mathcal{F}} f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+2\pi i xy} f(x) dx$$

Lorsque la fonction $f(x)$ est paire, la transformée de FOURIER $\hat{f}(y)$ est paire et se réduit à $2 \int_0^{\infty} \cos 2\pi xy f(x) dx$

Lorsque $f(x)$ est impaire, $\hat{f}(y)$ se réduit à $2 \int_0^{\infty} \sin 2\pi xy f(x) dx$ et est impaire.

Lorsqu'il s'agit de la répartition spectrale de l'énergie, la fonction qui nous est donnée est paire.

Rappel de quelques propriétés. (Cf. le cours de M.M.P de M^r SCHWARTZ et de M^r LIONS)

—— Définissons un espace $\mathcal{S}$ comme l'ensemble des fonctions qui à x font correspondre $f(x)$, fonctions indéfiniment différentiables, telles que $f(x)$ et $D^n f(x)$, quel que soit n , satisfassent aux deux conditions :

—— Elles sont continues.

—— Quel que soit le polynôme $\varphi(x)$, $|\varphi(x) D^n f(x)| \leq C_{q,f}$.

et de $f(x)$. $C_{q,f}$ étant une constante appartenant à $\mathbb{R}$ dépendant de $\varphi(x)$

—— Alors cet espace $\mathcal{S}$ existe bien et est un espace vectoriel sur lequel on peut définir une topologie, c'est à dire que $f_i(x)$ tend vers $f(x)$ dans $\mathcal{S}$ si, quels que soient n et le polynôme $\varphi(x)$, $\varphi(x) D^n f_i(x)$ tend vers $\varphi(x) D^n f(x)$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Nous avons aussi la propriété suivante : si la fonction $f(x)$ appartient à $\mathcal{S}$, $x^n f(x)$ tend vers zéro lorsque $|x|$ tend vers l'infini.

De plus, si f appartient à $\mathcal{S}$, nous avons $\mathcal{F}f$ qui appartient à $\mathcal{S}$; et si f_i tend vers zéro dans $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{F}f_i$ tend aussi vers zéro dans $\mathcal{S}$; c'est à dire que la transformée de FOURIER $\mathcal{F}$ définit une application linéaire et continue de $\mathcal{S}$ dans lui-même.

Remarque : nous avons les mêmes propriétés pour $\mathcal{F}f$ que pour $\mathcal{F}^2 f$.

Théorème d'inversion de FOURIER. On démontre que l'application $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur lui-même, d'inverse l'application $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$

soit : si φ appartient à $\mathcal{S}$, ce qui entraîne que $\Psi, \Psi = \mathcal{F}\varphi$, appartient à $\mathcal{S}$, alors nous avons $\varphi = \mathcal{F}\Psi$, la solution étant unique.

Cas d'une fonction numérique.

Une fonction numérique, même si nous la prenons telle que $x^n f(x)$ tende vers zéro lorsque $|x|$ tend vers l'infini, est toujours définie par un nombre fini de termes, par une table de valeurs données sur un intervalle qui ne peut pas tendre vers l'infini. Nous ne pouvons donc prendre pour intervalle sur x , qu'un intervalle réduit $[-L; +L]$ et non l'intervalle $]-\infty; +\infty[$.

Nous supposons alors la fonction $f(x)$ comme appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{D}$, ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à support compact, lui-même contenu dans $\mathcal{S}$ et dense dans celui-ci.

Donc la fonction $f(x)$ sera définie sur $[-L, +L]$ nulle en dehors et tendant vers zéro lorsque $|x|$ tend vers L .

Nous avons choisi un intervalle $[-L; +L]$ et non un intervalle quelconque $[a, b]$, parce que nous n'étudierons la transformée de FOURIER que sous les deux aspects où elle peut se réduire:

— La fonction $f(x)$ est paire, $\mathcal{F}f(y) = 2 \int_0^{\infty} \cos 2\pi xy f(x) dx$ si $f(x)$ tend vers zéro lorsque $|x|$ tend vers L approchée par $2 \int_0^L \cos 2\pi xy f(x) dx$

— La fonction $f(x)$ est impaire, $\mathcal{F}f(y) = 2 \int_0^{\infty} \sin 2\pi xy f(x) dx$ dans les mêmes conditions approchée par $2 \int_0^L \sin 2\pi xy f(x) dx$

Dans le cas général, si la fonction $f(x)$ est quelconque nous pouvons la décomposer et la mettre sous la forme:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x), \text{ fonction paire } f_1(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)].$$

$$f_2(x), \text{ fonction impaire } f_2(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)].$$

Dans le cas du problème physique, la fonction $f(x)$ est donnée par enregistrement graphique: La valeur de L correspondra alors aux limites de capacité de l'appareil d'enregistrement, et aussi à la limite en dehors de laquelle le physicien peut admettre sans erreur notable que la fonction $f(x)$ est nulle.

Application de la méthode composite à l'intégrale de FOURIER.

Soit à calculer les transformées de FOURIER

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi xy dx \\ \text{ou } \hat{g}(y) &= \int_0^{\infty} g(x) \sin 2\pi xy dx \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{approchées respectivement} \\ \text{par les expressions:} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(y) = \int_0^L f(x) \cos 2\pi xy dx \\ \hat{g}(y) = \int_0^L g(x) \sin 2\pi xy dx \end{array} \right.$$

La fonction transformée de FOURIER est une fonction continue en y , cette variable y pouvant tendre vers l'infini. Comme précédemment, en calcul numérique, nous sommes obligés de couper l'intervalle de définition de y , de le réduire de $]-\infty; +\infty[$ à un intervalle $[-M; +M]$; M symétrique de $-M$ par rapport à zéro, puisque la fonction étant paire (ou impaire), sa transformée l'est également.

Nous introduisons ainsi une nouvelle limitation dans les calculs; en effet, bien que l'hypothèse selon laquelle la fonction $f(x)$ appartient à l'espace D ait été faite, la transformée de FOURIER de cette fonction n'appartient absolument pas, dans le cas général à l'espace D , mais bien seulement à l'espace $\mathcal{F}$.

Nous interpolons d'abord les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ par un polynôme de degré 3 : $P_3(x)$ (p de la théorie générale = 1), l'intervalle $[0; L]$ étant divisé en n intervalles partiels de pas h ($L = nh$).

Nous diviserons en même temps en m parties égales ou non, l'intervalle $[0; M]$ et nous calculerons les coefficients α_i qui dépendent de y , en chacun des points ainsi trouvés y_j , $j = 0, 1, \dots, m$.

En posant $\alpha_i(y_j) = c_j^i$ pour le cas d'une fonction paire et d_j^i pour celui d'une fonction impaire, la transformée de FOURIER sera alors définie par les valeurs

$$\hat{f}_j = \hat{f}(y_j) = 2 \sum_{i=-1}^{n+1} \alpha_i(y_j) f_i.$$

soit $\boxed{\{\hat{f}\} = 2|C|\{f\}}$ avec $\{\hat{f}\} = \begin{bmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_m \end{bmatrix}$ et $\{f\} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

ou $\boxed{\{\hat{g}\} = 2|D|\{g\}}$ avec $\{\hat{g}\} = \begin{bmatrix} \hat{g}_0 \\ \hat{g}_1 \\ \vdots \\ \hat{g}_m \end{bmatrix}$ et $\{g\} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$

Calcul des c_j^i et des d_j^i : pour un point y_j nous avons,

$$\Delta_i S(y_j) = |J_0^i(y_j) J_1^i(y_j) J_2^i(y_j) J_3^i(y_j)| |L_3| \begin{vmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{vmatrix} \text{ ou } |\beta_0^i(y_j) \beta_1^i(y_j) \beta_2^i(y_j) \beta_3^i(y_j)| \begin{vmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{vmatrix}$$

avec $J_0^i(y_j) = \int_h^{2h} \cos 2\pi y_j (t + x_{i-1}) dt$; $J_1^i(y_j) = \int_h^{2h} \frac{t}{h} \cos 2\pi y_j (t + x_{i-1}) dt$.

$J_2^i(y_j) = \int_h^{2h} \frac{t^2}{h^2} \cos 2\pi y_j (t + x_{i-1}) dt$; $J_3^i(y_j) = \int_h^{2h} \frac{t^3}{h^3} \cos 2\pi y_j (t + x_{i-1}) dt$

dans le cas où la fonction $f(x)$ est paire.

et $\Delta_i S(y_j) = |\overline{J_0^i(y_j)} \overline{J_1^i(y_j)} \overline{J_2^i(y_j)} \overline{J_3^i(y_j)}| |L_3| \begin{vmatrix} g_{i-1} \\ g_i \\ g_{i+1} \\ g_{i+2} \end{vmatrix} \text{ ou } |\overline{\beta_0^i(y_j)} \overline{\beta_1^i(y_j)} \overline{\beta_2^i(y_j)} \overline{\beta_3^i(y_j)}| \begin{vmatrix} g_{i-1} \\ g_i \\ g_{i+1} \\ g_{i+2} \end{vmatrix}$

avec $\overline{J_0^i(y_j)} = \int_h^{2h} \sin 2\pi y_j (t + x_{i-1}) dt$; $\overline{J_1^i(y_j)} = \int_h^{2h} \frac{t}{h} \sin 2\pi y_j (t + x_{i-1}) dt$.

$\overline{J_2^i(y_j)} = \int_h^{2h} \frac{t^2}{h^2} \sin 2\pi y_j (t + x_{i-1}) dt$; $\overline{J_3^i(y_j)} = \int_h^{2h} \frac{t^3}{h^3} \sin 2\pi y_j (t + x_{i-1}) dt$

dans le cas où la fonction $f(x)$ est impaire.

Posons : $2\pi y_j = z(j)$ z dépend donc de j , mais nous le noterons simplement z pour simplifier l'écriture des calculs

$$\begin{aligned} \cos zh &= a & \sin zh &= b \\ \cos 2zh &= c & \sin 2zh &= d \\ \cos 2zh - \cos zh &= r & \sin 2zh - \sin zh &= \delta \end{aligned}$$

$$J_0^i = \int_h^{2h} \cos z(t+x_{i-1}) dt = \left[\frac{\sin z(t+x_{i-1})}{z} \right]_h^{2h} = \frac{\sin z(2h+x_{i-1}) - \sin z(h+x_{i-1})}{z}$$

$$= \frac{1}{z} \left[\sin 2zh \cos zx_{i-1} + \cos 2zh \sin zx_{i-1} - \sin zh \cos zx_{i-1} - \cos zh \sin zx_{i-1} \right]$$

$$J_0^i = \frac{1}{z} (\delta \cos zx_{i-1} + r \sin zx_{i-1})$$

$$\overline{J}_0^i = \int_h^{2h} \sin z(t+x_{i-1}) dt = \left[-\frac{\cos z(t+x_{i-1})}{z} \right]_h^{2h} = -\frac{\cos z(2h+x_{i-1}) - \cos z(h+x_{i-1})}{z}$$

$$= -\frac{1}{z} [\cos 2zh \cos zx_{i-1} - \sin 2zh \sin zx_{i-1} - \cos zh \cos zx_{i-1} + \sin zh \sin zx_{i-1}]$$

$$\overline{J}_0^i = \frac{1}{z} (-r \cos zx_{i-1} + \delta \sin zx_{i-1})$$

$$J_1^i = \frac{1}{h} \int_h^{2h} t \cos z(t+x_{i-1}) dt = \frac{1}{h} \left[t \frac{\sin z(t+x_{i-1})}{z} \right]_h^{2h} - \frac{1}{zh} \int_h^{2h} \sin z(t+x_{i-1}) dt$$

$$= \frac{1}{z} [\sin z(2h+x_{i-1}) - \sin z(h+x_{i-1})] + \frac{1}{z} \sin z(2h+x_{i-1}) - \frac{1}{zh} \overline{J}_0^i$$

$$= \frac{1}{z} (\sin 2zh \cos zx_{i-1} + \cos 2zh \sin zx_{i-1}) + J_0^i - \frac{1}{zh} \overline{J}_0^i$$

$$J_1^i = \frac{1}{z} \left[\cos zx_{i-1} \left(d + \delta + \frac{r}{zh} \right) + \sin zx_{i-1} \left(c + r - \frac{\delta}{zh} \right) \right]$$

$$\overline{J}_1^i = \frac{1}{h} \int_h^{2h} t \sin z(t+x_{i-1}) dt = \frac{1}{h} \left[-t \frac{\cos z(t+x_{i-1})}{z} \right]_h^{2h} + \frac{1}{zh} \int_h^{2h} \cos z(t+x_{i-1}) dt$$

$$= -\frac{1}{z} [\cos z(2h+x_{i-1}) - \cos z(h+x_{i-1})] - \frac{1}{z} \cos z(2h+x_{i-1}) + \frac{1}{zh} J_0^i$$

$$= -\frac{1}{z} (\cos 2zh \cos zx_{i-1} - \sin 2zh \sin zx_{i-1}) + \overline{J}_0^i + \frac{1}{zh} J_0^i$$

$$\overline{J}_1^i = \frac{1}{z} \left[\cos zx_{i-1} \left(-c - r + \frac{\delta}{zh} \right) + \sin zx_{i-1} \left(d + \delta + \frac{r}{zh} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 J_2^i &= \frac{1}{h^2} \int_h^{2h} t^2 \cos z(t+x_{i-1}) dt = \frac{1}{h^2} \left[t^2 \frac{\sin z(t+x_{i-1})}{z} \right]_h^{2h} - \frac{2}{zh^2} \int_h^{2h} t \sin z(t+x_{i-1}) dt. \\
 &= \frac{3}{z} \left[\sin z(2h+x_{i-1}) \right] + J_0^i - \frac{2}{zh} \bar{J}_1^i. \\
 &= \frac{3}{z} (\sin 2zh \cos zx_{i-1} + \cos 2zh \sin zx_{i-1}) + J_0^i - \frac{2}{zh} \bar{J}_1^i
 \end{aligned}$$

$$\bar{J}_2^i = \frac{1}{z} \left[\cos zx_{i-1} \left\{ 3d + \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) \delta + \frac{2(r+c)}{zh} \right\} + \sin zx_{i-1} \left\{ 3c + \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) r - \frac{2(\delta+d)}{zh} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_2^i &= \frac{1}{h^2} \int_h^{2h} t^2 \sin z(t+x_{i-1}) dt = \frac{1}{h^2} \left[-t^2 \frac{\cos z(t+x_{i-1})}{z} \right]_h^{2h} + \frac{2}{zh^2} \int_h^{2h} t \cos z(t+x_{i-1}) dt. \\
 &= -\frac{3}{z} \left[\cos z(2h+x_{i-1}) \right] + \bar{J}_0^i + \frac{2}{zh} J_1^i. \\
 &= -\frac{3}{z} (\cos 2zh \cos zx_{i-1} - \sin 2zh \sin zx_{i-1}) + \bar{J}_0^i + \frac{2}{zh} J_1^i
 \end{aligned}$$

$$\bar{J}_2^i = \frac{1}{z} \left[\cos zx_{i-1} \left\{ -3c - \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) r + \frac{2(\delta+d)}{zh} \right\} + \sin zx_{i-1} \left\{ 3d + \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) \delta + \frac{2(r+c)}{zh} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 J_3^i &= \frac{1}{h^3} \int_h^{2h} t^3 \cos z(t+x_{i-1}) dt = \frac{1}{h^3} \left[t^3 \frac{\sin z(t+x_{i-1})}{z} \right]_h^{2h} - \frac{3}{zh^3} \int_h^{2h} t^2 \sin z(t+x_{i-1}) dt. \\
 &= \frac{7}{z} \left[\sin 2zh \cos zx_{i-1} + \sin zx_{i-1} \cos 2zh \right] + J_0^i - \frac{3}{zh} \bar{J}_2^i \\
 &= \frac{1}{z} \left[\cos zx_{i-1} \left\{ 7d + \delta + \frac{3}{zh} \left(3c + \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) r - \frac{2(\delta+d)}{zh} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sin zx_{i-1} \left\{ 7c + r - \frac{3}{zh} \left(3d + \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) \delta + \frac{2(r+c)}{zh} \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3^i &= \frac{1}{z} \left[\cos zx_{i-1} \left\{ \delta \left(1 - \frac{6}{z^2 h^2}\right) + d \left(7 - \frac{6}{z^2 h^2}\right) + \frac{1}{zh} \left(9c + 3r \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sin zx_{i-1} \left\{ r \left(1 - \frac{6}{z^2 h^2}\right) + c \left(7 - \frac{6}{z^2 h^2}\right) - \frac{1}{zh} \left(9d + 3\delta \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_3^i &= \frac{1}{h^3} \int_h^{2h} t^3 \sin z(t+x_{i-1}) dt = \frac{1}{h^3} \left[-t^3 \frac{\cos z(t+x_{i-1})}{z} \right]_h^{2h} + \frac{3}{zh^3} \int_h^{2h} t^2 \cos z(t+x_{i-1}) dt. \\
 &= -\frac{7}{z} \left[\cos 2zh \cos zx_{i-1} - \sin 2zh \sin zx_{i-1} \right] + \bar{J}_0^i + \frac{3}{zh} J_2^i. \\
 &= \frac{1}{z} \left[\cos zx_{i-1} \left\{ -7c - r + \frac{3}{zh} \left(3d + \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) \delta + \frac{2(r+c)}{zh} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sin zx_{i-1} \left\{ 7d + \delta + \frac{3}{zh} \left(3c + \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) r - \frac{2(\delta+d)}{zh} \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_3^i &= \frac{1}{z} \left[\cos zx_{i-1} \left\{ -r \left(1 - \frac{6}{z^2 h^2}\right) - c \left(7 - \frac{6}{z^2 h^2}\right) + \frac{1}{zh} \left(9d + 3\delta \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \sin zx_{i-1} \left\{ \delta \left(1 - \frac{6}{z^2 h^2}\right) + d \left(7 - \frac{6}{z^2 h^2}\right) + \frac{1}{zh} \left(9c + 3r \left(1 - \frac{2}{z^2 h^2}\right) \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Propriétés des J^i

$$\text{si nous posons } \left\{ \begin{array}{l} J_0^i = A_0 \cos z x_{i-1} + B_0 \sin z x_{i-1} \\ J_1^i = A_1 \cos z x_{i-1} + B_1 \sin z x_{i-1} \\ J_2^i = A_2 \cos z x_{i-1} + B_2 \sin z x_{i-1} \\ J_3^i = A_3 \cos z x_{i-1} + B_3 \sin z x_{i-1} \end{array} \right.$$

$$\text{alors } \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_0^i = -B_0 \cos z x_{i-1} + A_0 \sin z x_{i-1} \\ \bar{J}_1^i = -B_1 \cos z x_{i-1} + A_1 \sin z x_{i-1} \\ \bar{J}_2^i = -B_2 \cos z x_{i-1} + A_2 \sin z x_{i-1} \\ \bar{J}_3^i = -B_3 \cos z x_{i-1} + A_3 \sin z x_{i-1} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} (J_0^i)^2 + (\bar{J}_0^i)^2 = (A_0)^2 + (B_0)^2 = h \\ (J_1^i)^2 + (\bar{J}_1^i)^2 = (A_1)^2 + (B_1)^2 = \frac{3h}{2} \\ (J_2^i)^2 + (\bar{J}_2^i)^2 = (A_2)^2 + (B_2)^2 = \frac{7h}{3} \\ (J_3^i)^2 + (\bar{J}_3^i)^2 = (A_3)^2 + (B_3)^2 = \frac{15h}{4} \end{array} \right.$$

Les intégrales J^i étant calculées, pour une valeur de i , les coefficients β^i résultant du produit de deux matrices.

$$\begin{vmatrix} \beta_0^i & \beta_1^i & \beta_2^i & \beta_3^i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_0^i & J_1^i & J_2^i & J_3^i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

Puis ceux-ci calculés pour $i = -1; 0; \dots; n; n+1$, nous en déduisons les coefficients.

$$\begin{aligned} \gamma_i(y_j): \quad \gamma_{-1} &= \beta_0^0 \\ \gamma_0 &= \beta_0^1 + \beta_1^0 \\ \gamma_1 &= \beta_0^2 + \beta_1^1 + \beta_2^0 \\ \gamma_2 &= \beta_0^3 + \beta_1^2 + \beta_2^1 + \beta_3^0 \\ \gamma_i &= \beta_0^{i+1} + \beta_1^i + \beta_2^{i-1} + \beta_3^{i-2} \\ \gamma_{n-1} &= \beta_1^{n-1} + \beta_2^{n-2} + \beta_3^{n-3} \\ \gamma_n &= \beta_2^{n-1} + \beta_3^{n-2} \\ \gamma_{n+1} &= \beta_3^{n-1} \end{aligned}$$

qui nous donnent une ligne de la matrice $\mathcal{C}$ (ou de la matrice $\mathcal{D}$)

$$\delta_i(y_j) = C_i^j \text{ (ou } d_i^j \text{)}$$

En faisant varier y_j nous obtenons alors tous les termes de $\mathcal{C}$ (ou de $\mathcal{D}$)

Un programme a été rédigé pour construire les matrices $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ une fois pour toutes avec des données précises pour L, M, n et m .

La durée du calcul dépend uniquement des valeurs de n et de m . Elle croît proportionnellement à la fois à n et à m . Ainsi sur ordinateur I.B.M. 650, il a fallu 4 fois plus de temps en prenant $n = m = 160$ qu'en prenant $n = m = 80$.

Ensuite un autre programme permet de faire le produit des deux matrices $|2\mathcal{C}|$ et $\{f\}$ (ou $|2\mathcal{D}|$ et $\{g\}$) rapidement quelles que soient les fonctions f et g . Il faut trente minutes pour l'exécuter lorsque la fonction $f(x)$ et sa transformée sont définies sur 163 points ($n = m = 160$) temps de lecture compris.

Calcul d'erreur.

La première erreur qui s'introduit dans cette méthode provient de ce que nous coupons l'intervalle de définition de la fonction $f(x)$ de $]-\infty; +\infty[$ à $[-L; +L]$ et elle est égale à l'intégrale $2 \int_L^\infty f(x) \cos 2\pi xy \, dx$ (ou à $2 \int_L^\infty g(x) \sin 2\pi xy \, dx$).

Nous savons que (cf cours de M.M.P. déjà cité): Plus la fonction $f(x)$ est dérivable (avec des dérivées sommables) et décroissante à l'infini, plus alors sa transformée de FOURIER est aussi à la fois décroissante à l'infini et dérivable (avec des dérivées bornées).

$$\text{En effet nous pouvons écrire : } (2\pi y)^m \hat{f}(y) = \mathcal{F} f^{(m)}$$

$$\text{ce qui entraîne la majoration : } |2\pi y|^m |\hat{f}(y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(x)| \, dx$$

$$\text{et } \hat{f}^{(m)}(y) = \mathcal{F} [(-2\pi i x)^m f(x)]$$

$$\text{ce qui entraîne la majoration : } |\hat{f}^{(m)}(y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi x)^m |f(x)| \, dx.$$

Nous avons de même :

$$\int_L^A \cos 2\pi xy \, f(x) \, dx = \left[\frac{\sin 2\pi xy}{2\pi y} f(x) \right]_L^A - \int_L^A \frac{\sin 2\pi xy}{2\pi y} f'(x) \, dx.$$

Faisons tendre A vers l'infini, lorsque x tend vers l'infini, $f(x)$ tend vers zéro, donc le $[]$ aussi.

$$\text{soit } 2 \int_L^\infty \cos 2\pi xy f(x) dx \approx -2 \frac{\sin 2\pi Ly}{2\pi y} f(L) - 2 \int_L^\infty \frac{\sin 2\pi y}{2\pi y} f'(x) dx$$

Si nous posons $\varepsilon \hat{f}(y)$ (ou ε^1 pour simplifier), l'erreur ainsi commise sur la valeur de la transformée : $\varepsilon^1 = 2 \int_L^\infty \cos 2\pi xy f(x) dx$,

nous avons :

$$|\pi y| |\varepsilon^1| \leq |f(L)| + \int_L^\infty |f'(x)| dx.$$

Plus généralement

$$\int_L^A \cos 2\pi xy f(x) dx = \left[\frac{\sin 2\pi xy}{2\pi y} f(x) \right]_L^A - \int_L^A \frac{\sin 2\pi xy}{2\pi y} f'(x) dx \text{ s'écrit}$$

$$\left[\frac{\sin 2\pi xy}{2\pi y} f(x) \right]_L^A - \left[\frac{\cos 2\pi xy}{(2\pi y)^2} f'(x) \right]_L^A - \int_L^A \frac{\cos 2\pi xy}{(2\pi y)^2} f''(x) dx$$

en faisant tendre A vers l'infini comme ci-dessus :

$$\text{soit } \left| \frac{\varepsilon^1}{2} \right| \leq \frac{|f(L)|}{|2\pi y|} + \frac{|f'(L)|}{(2\pi y)^2} + \int_L^\infty \frac{|f''(x)|}{(2\pi y)^2} dx$$

et ainsi de suite, à l'ordre m :

$$\boxed{|2\pi y|^m \cdot \left| \frac{\varepsilon^1}{2} \right| \leq |2\pi y|^{m-1} |f(L)| + |2\pi y|^{m-2} |f'(L)| + \dots + |f^{(m-1)}(L)| + \int_L^\infty |f^{(m)}(x)| dx}$$

Nous trouvons une majoration analogue en partant de l'intégrale

$$2 \int_L^{+\infty} \sin 2\pi xy f(x) dx.$$

Donc plus la fonction $f(x)$ est dérivable et décroissante à l'infini, plus cette première erreur est faible.

Remarquons que cette erreur est plus considérable pour les valeurs de y voisines de zéro que pour les "zones moyennes" de y . Ce qui nous donne une majoration pour y .

Ainsi, si nous désirons par exemple $|\varepsilon^1|$ inférieur à une valeur donnée ε_0 , d'après la 1^{ère} formule ci-dessus, ceci entraîne

$$\boxed{|y| \geq \frac{1}{\pi \varepsilon_0} \left[|f(L)| + \int_L^\infty |f'(x)| dx \right]}$$

Les autres erreurs se produisent sur le calcul lui-même de l'intégrale $\int_0^1 f(x) \cos 2\pi xy dx$ (ou $\int_0^1 g(x) \sin 2\pi xy dx$).

Ce sont < soit des erreurs de chute.

< soit des erreurs dues à l'approximation de la fonction $f(x)$ par un polynôme $P_{2n+1}(x)$, ici $P_3(x)$. Cette erreur est proportionnelle à la dérivée $(2n+2)^{\text{ième}}$ de la fonction $f(x)$ et à la puissance $(2n+3)^{\text{ième}}$ du pas h . (Remarquons que si le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ de la fonction $f(x)$ était de degré pair ($n=2n$), cette erreur serait proportionnelle également à la dérivée $(2n+2)^{\text{ième}}$ de f).

En effet nous intégrons ce polynôme $P_3(x)$ multiplié par la quantité $(\cos 2\pi xy)$ sur l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, soit l'intervalle $[h; 2h]$ par changement de variable.

Posons $\Phi(x) = \int_{\mu}^{\infty} f(x) \cos 2\pi xy dx$, intégrale vraie $\mu \in [h; 2h]$;
alors $\Phi(\mu) = 0$
Sur l'intervalle $[h; 2h]$ l'intégrale $\Phi(x)$ est approchée par l'expression.

$$\sum_{k=0}^3 h \alpha_k^i f_k^i ; h \alpha_k^i = \beta_k^i$$

Nous pouvons donc évaluer l'erreur ϵ_i

$$|\epsilon_i| \leq \Phi(\mu + \frac{h}{2}) - \Phi(\mu - \frac{h}{2}) - h [\alpha_0^i f(\mu - \frac{3h}{2}) + \alpha_1^i f(\mu - \frac{h}{2}) + \alpha_2^i f(\mu + \frac{h}{2}) + \alpha_3^i f(\mu + \frac{3h}{2})]$$

Formons les développements successifs:

$$\left\{ \Phi(\mu + \frac{h}{2}) - \Phi(\mu - \frac{h}{2}) = h \Phi'(\mu) + \frac{h^3}{2^2 3!} \Phi'''(\mu) + \frac{h^5}{2^4 4!} \Phi^{(5)}(\theta_1) = h f(\mu) + \frac{h^3}{2^2 3!} f''(\mu) + \frac{h^5}{2^4 4!} f^{(4)}(\theta_1) \right.$$

avec $\theta_1 \in [h; 2h]$

$$\left\{ f(\mu - \frac{3h}{2}) = f(\mu) - \frac{3h}{2} f'(\mu) + \frac{3^2 h^2}{2^2 2!} f''(\mu) - \frac{3^3 h^3}{2^3 3!} f'''(\mu) + \frac{3^4 h^4}{2^4 4!} f^{(4)}(\theta_2) \text{ avec } \theta_2 \in [0; 3h]. \right.$$

$$\left\{ f(\mu + \frac{3h}{2}) = f(\mu) + \frac{3h}{2} f'(\mu) + \frac{3^2 h^2}{2^2 2!} f''(\mu) + \frac{3^3 h^3}{2^3 3!} f'''(\mu) + \frac{3^4 h^4}{2^4 4!} f^{(4)}(\theta_2) \right. \quad "$$

$$\left\{ f(\mu - \frac{h}{2}) = f(\mu) - \frac{h}{2} f'(\mu) + \frac{h^2}{2^2 2!} f''(\mu) - \frac{h^3}{2^3 3!} f'''(\mu) + \frac{h^4}{2^4 4!} f^{(4)}(\theta_3) \text{ avec } \theta_3 \in [0; 3h] \right.$$

$$\left\{ f(\mu + \frac{h}{2}) = f(\mu) + \frac{h}{2} f'(\mu) + \frac{h^2}{2^2 2!} f''(\mu) + \frac{h^3}{2^3 3!} f'''(\mu) + \frac{h^4}{2^4 4!} f^{(4)}(\theta_3) \right. \quad "$$

Mais les α_k^i dépendent de i - Essayons d'avoir cependant une évaluation numérique de notre erreur.

$|\cos 2\pi xy| \leq 1$, ce qui entraîne $\alpha_k^i \leq \alpha_k$, α_k étant les coefficients intervenant dans la méthode composite ordinaire lorsque le noyau $k(x)$ est identique à 1 soient $\alpha_0 = \alpha_3 = -\frac{1}{24}$ (cf p. 7 et 9)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{13}{24}$$

Si nous supposons de plus que la fonction $f(x)$ est suffisamment régulière pour que sa dérivée d'ordre 4 aux divers points θ soit majorée par $f^{(4)}(\xi_i)$, ξ_i appartenant à l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, nous avons en effectuant les calculs :

$$|\epsilon_i| \leq h f(\mu) \left[1 - 2(\alpha_0 + \alpha_1) \right] + h^3 f''(\mu) \left[\frac{1}{24} - \left(-\frac{9}{4} \alpha_0 + \frac{1}{4} \alpha_1 \right) \right] + h^5 f^{(4)}(\xi_i) \left[\frac{1}{16 \times 24} + \left| \frac{81}{8 \times 24} \alpha_0 \right| + \left| \frac{1}{8 \times 24} \alpha_1 \right| \right]$$

$$\text{où } 1 - 2(\alpha_0 + \alpha_1) = 0$$

$$\frac{1}{24} - \left(-\frac{9}{4} \alpha_0 + \frac{1}{4} \alpha_1 \right) = \frac{1}{24} - \left(-\frac{9}{4 \times 24} + \frac{13}{4 \times 24} \right) = \frac{1}{24} - \frac{4}{4 \times 24} = 0$$

$$\frac{1}{16 \times 24} + \left| \frac{81}{8 \times 24} \alpha_0 \right| + \left| \frac{1}{8 \times 24} \alpha_1 \right| = 0,023$$

$$\text{soit } \epsilon_i \leq 0,023 h^5 f^{(4)}(\xi_i)$$

Si nous posons ϵ^0 , erreur totale commise sur l'intégrale $2 \int_0^L f(x) \cos 2\pi xy \, dx$ nous avons donc :

$$|\epsilon^0| \leq \sum_{i=1}^{n+1} 0,046 h^5 f^{(4)}(\xi_i) \quad \xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$$

Par contre, si nous approchons la fonction $F(x) = \cos 2\pi xy f(x)$ par un polynôme $P_{2n+1}(x)$; ici $P_3(x)$, nous obtenons une majoration analogue pour $|\epsilon^0|$ mais où intervient la dérivée 4^{ème} de $F(x)$.

Par le même calcul, les α_k^i étant alors strictement égaux aux α_k .

$$\epsilon_i \leq h^5 \left[\frac{1}{16 \times 24} F^{(4)}(\theta_1) + \left| \frac{81}{8 \times 24} \alpha_0 \right| F^{(4)}(\theta_2) + \left| \frac{1}{8 \times 24} \alpha_1 \right| F^{(4)}(\theta_3) \right]$$

$$\theta_1 \in [h; 2h] \quad ; \quad \theta_2 \text{ et } \theta_3 \in [0; 3h]$$

Les coefficients de $F; F'; F''; F'''$, s'annulent comme précédemment.

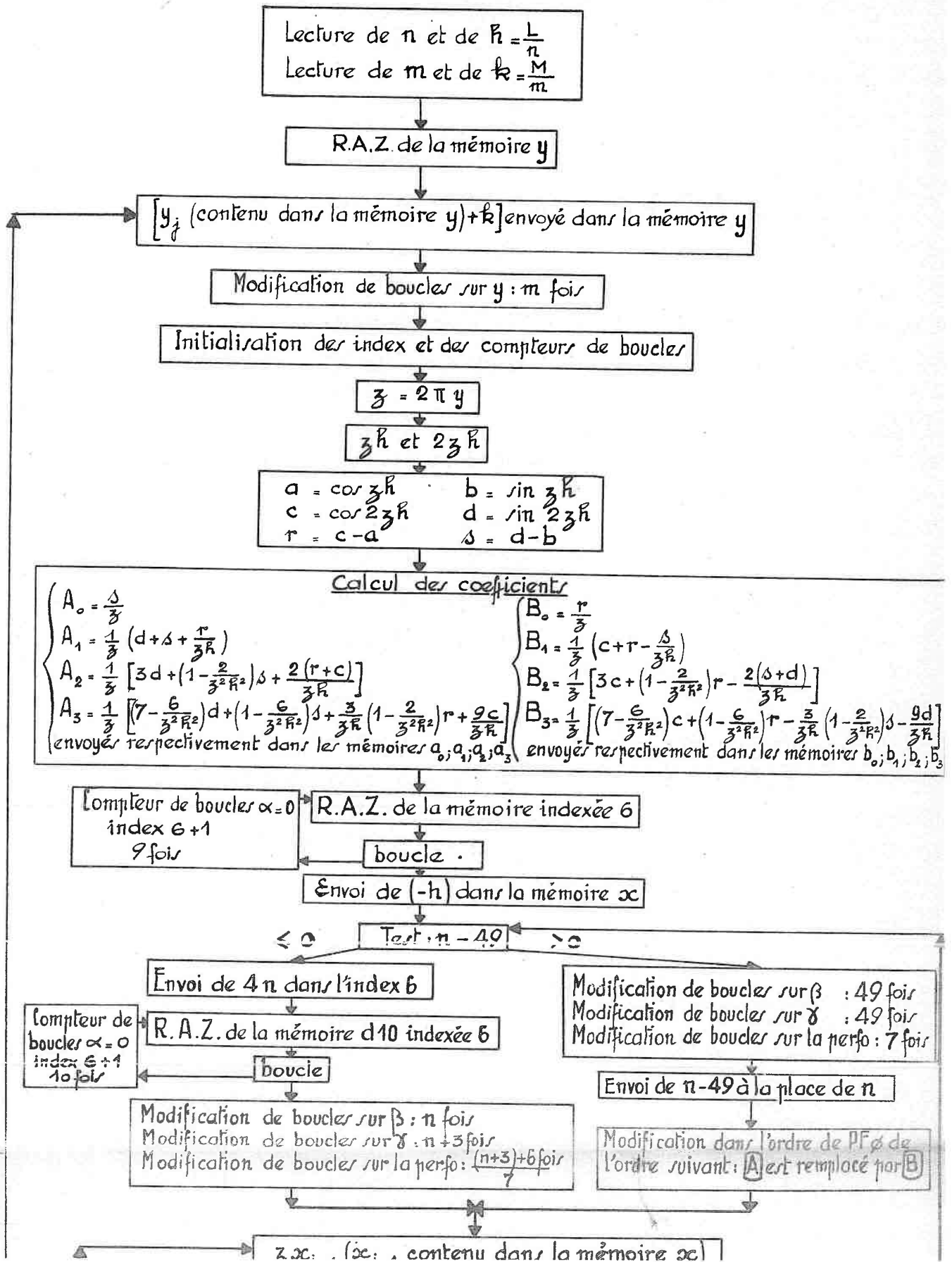
$$\text{or } F^{(4)}(x) = \cos 2\pi xy f^{(4)}(x) - 4(2\pi y) \sin 2\pi xy f'''(x) - 6(2\pi y)^2 \cos 2\pi xy f''(x) + 4(2\pi y)^3 \sin 2\pi xy f'(x) + (2\pi y)^4 \cos 2\pi xy f(x).$$

Il s'y introduit les dérivées d'ordre 1; 2; 3 et 4 de f et la valeur de la fonction elle-même, ce qui majore considérablement l'erreur, le terme $(2\pi y)^4 \cos 2\pi xy f(x)$ par exemple, étant infiniment grand par rapport à $\cos 2\pi xy f^{(4)}(x)$ pour $|y| > \frac{1}{2h}$.

L'erreur est alors du même ordre de grandeur que la fonction elle-même, alors que précédemment elle était de l'ordre d'un infiniment petit d'ordre 4 par rapport à celle-ci.

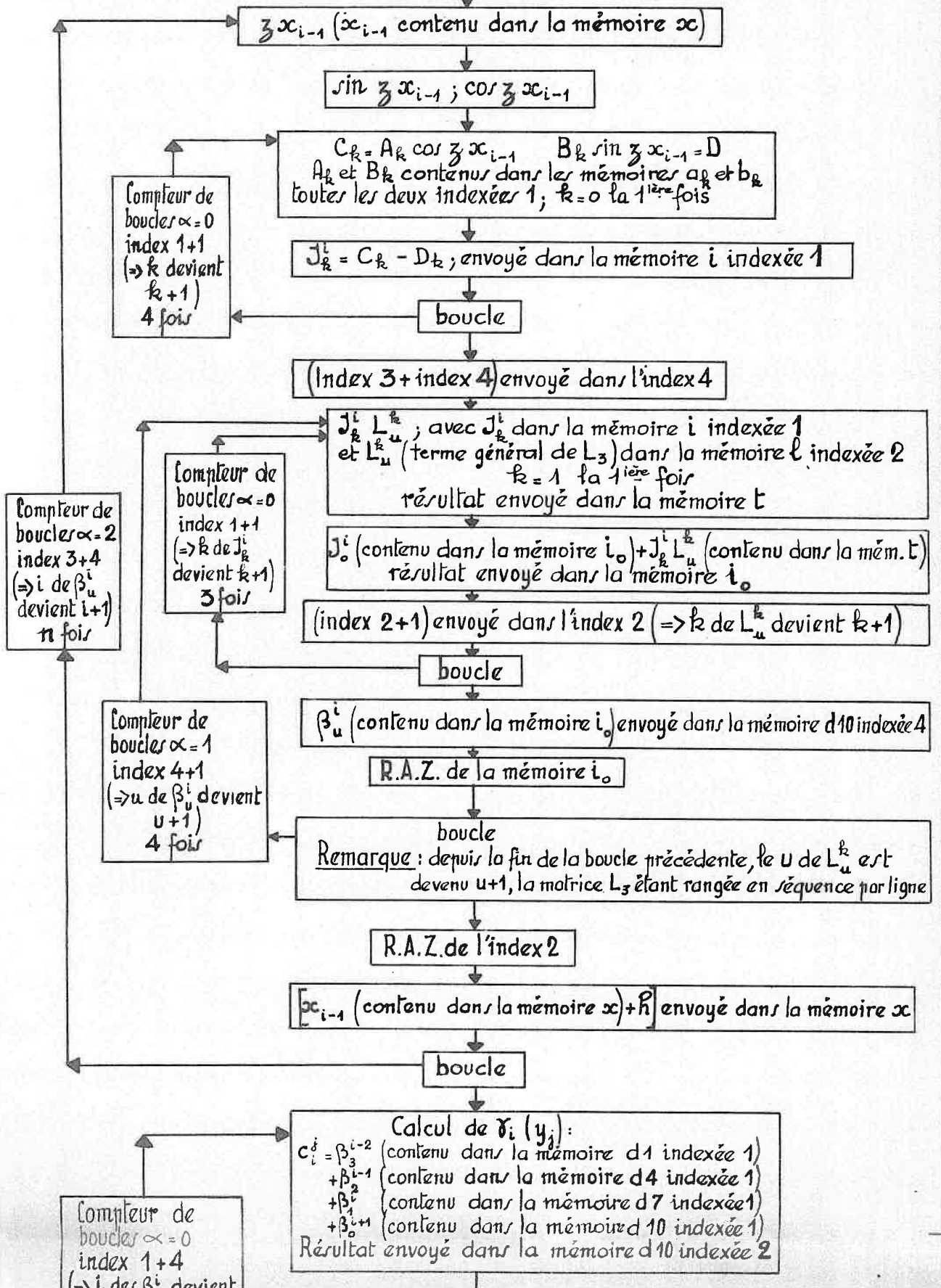
ORGANIGRAMME GÉNÉRAL DU PROGRAMME CALCULANT LA MATRICE C.

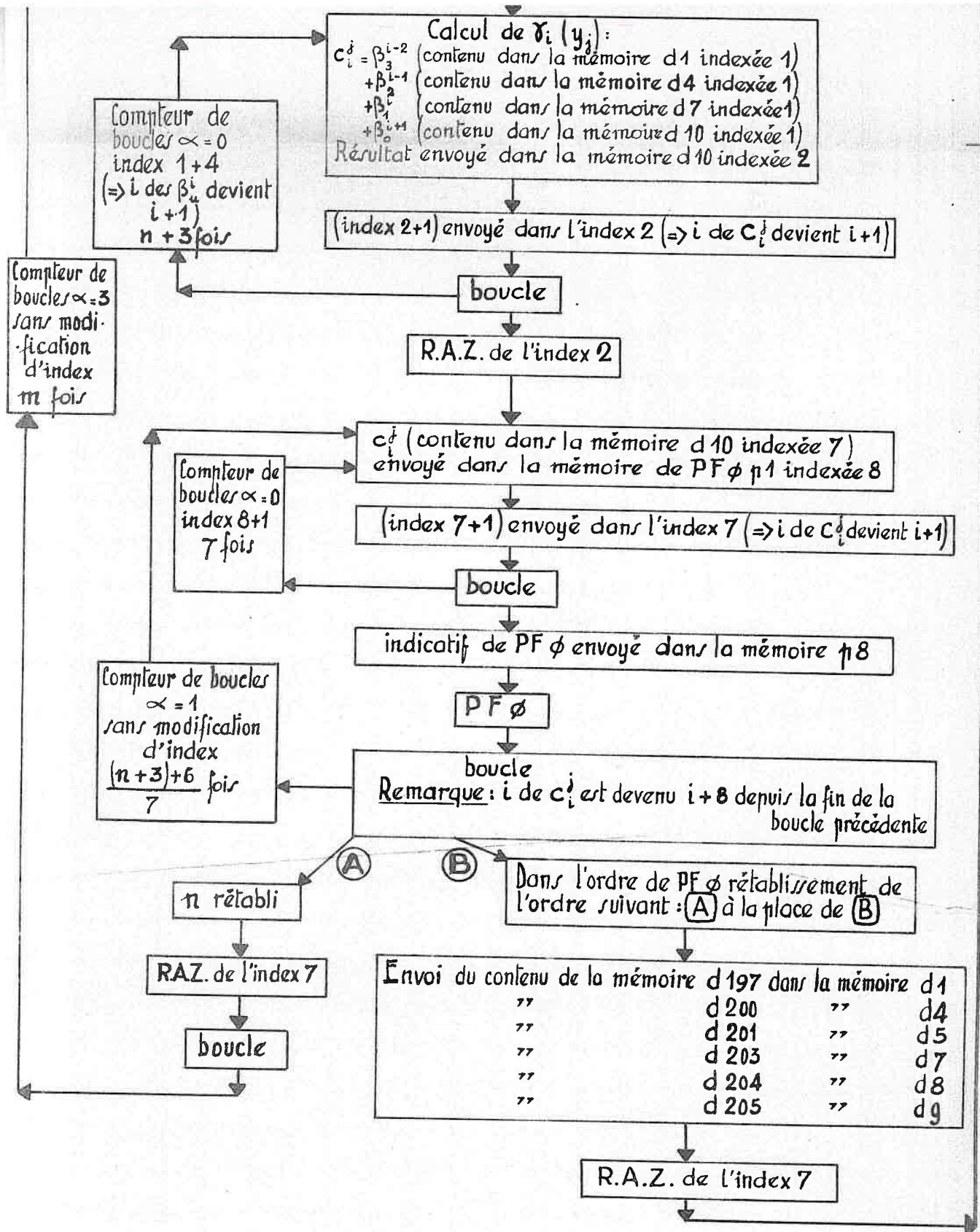
Programme écrit en C.D.P. VFX, nous ne disposons que de 1.000 mémoires pour l'écriture du programme et la mise en place des données et des résultats.



Modification de boucles sur β : n fois
 Modification de boucles sur γ : n+3 fois
 Modification de boucles sur la perfo: $\frac{(n+3)+6}{7}$ fois

Modification dans l'ordre de PF ϕ de l'ordre suivant: A est remplacé par B





RésultatsA - Les Séries de FOURIER.

Nous pouvons développer une fonction $f(x)$, périodique de période T , définie sur un intervalle $[a, a+T]$ en série de FOURIER :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

ω pulsation associée à la période T . $\omega = \frac{2\pi}{T}$

- cette série est convergente et représente la fonction $f(x)$ si celle-ci est continue
- et est à variation bornée dans l'intervalle période.

Elle est absolument et uniformément convergente si la fonction est deux fois continuellement différentiable.

Nous avons : $c_k = c_k(f) = \int_a^{a+T} f(x) e^{-ik\omega x} \frac{dx}{T}$

Nous pouvons également écrire :

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

avec les relations :

$$a_0 = c_0$$

$$\begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = i(c_k - c_{-k}) \end{cases} \quad k > 0$$

ou

$$\begin{cases} c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \end{cases}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \int_a^{a+T} f(x) \frac{dx}{T} \\ k > 0 \quad \begin{cases} a_k(f) &= 2 \int_a^{a+T} f(x) \cos k\omega x \frac{dx}{T} \\ b_k(f) &= 2 \int_a^{a+T} f(x) \sin k\omega x \frac{dx}{T} \end{cases} \end{aligned}$$

• Si la fonction est paire, $f(x) \sin k \omega x$ est une fonction impaire, son intégrale sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}; +\frac{T}{2}]$ par exemple est nul. Donc les coefficients b_k sont nuls, seuls les a_k sont différents de zéro et

$$\begin{cases} a_0(f) = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) dx \\ a_k(f) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos k \omega x dx \quad k > 0 \end{cases}$$

• Si la fonction est impaire, $f(x) \cos k \omega x$ est impaire, donc seuls les b_k sont différents de zéro et

$$b_k(f) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin k \omega x \frac{dx}{T}$$

Par le changement de variable $x = \frac{x}{T}$, comme $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\text{pour } f \text{ paire} \quad \begin{cases} a_0(f) = 2 \int_0^{1/2} f(Tx) dx \\ a_k(f) = 4 \int_0^{1/2} f(Tx) \cos 2\pi k x dx \end{cases}$$

$$\text{pour } f \text{ impaire} \quad \begin{cases} b_k(f) = 4 \int_0^{1/2} f(Tx) \sin 2\pi k x dx \end{cases}$$

Nous voyons que nous pouvons ainsi traiter le calcul des coefficients d'une série de FOURIER comme celui d'une transformée de FOURIER, exposé précédemment, avec des données précises : $L = \frac{1}{2}$ et k appartient aux entiers : $k = 0, 1, \dots, n$ alors que y appartient à $\mathbb{R}$ dans le cas général.

Remarquons qu'ayant une borne supérieure finie seule s'introduit alors la seconde des erreurs dont nous avons parlé à la fin du précédent chapitre.

Nous calculons les matrices $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ valables quel que soit f , (grâce au changement de variable ci-dessus, la période T variable suivant la fonction, n'intervient plus que dans les valeurs de celle-ci, donc uniquement dans le dernier calcul) avec :

$$n = 10 \quad \text{et} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 30.$$

puis les coefficients

$$a_k(f) = 4 \sum_{i=-11}^{11} e_i^k f(Tx_i)$$

$$\text{ou} \quad b_k(f) = 4 \sum_{i=-11}^{11} d_i^k f(Tx_i)$$

Nous avons fait différents essais sur des fonctions dont le développement en série de FOURIER est connu. Tous les calculs ont été effectués en virgule fixe simple précision cadrage : 5-5.

1 - Tout d'abord nous avons pris des fonctions qui doivent donner des résultats stricts. En effet, dans nos essais, la fonction $f(TX)$ est approchée par un polynôme de degré 3 sur chaque intervalle partiel, donc l'approximation est stricte pour un polynôme de degré inférieur ou égal à 3; nous avons utilisé les polynômes $f(x) = \frac{x}{2}$; $f(x) = x^2$; $f(x) = \pi(\pi - x)$; $f(x) = (\pi - x)^2$. $x = XT$; x varie dans l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$; $n = 10$.

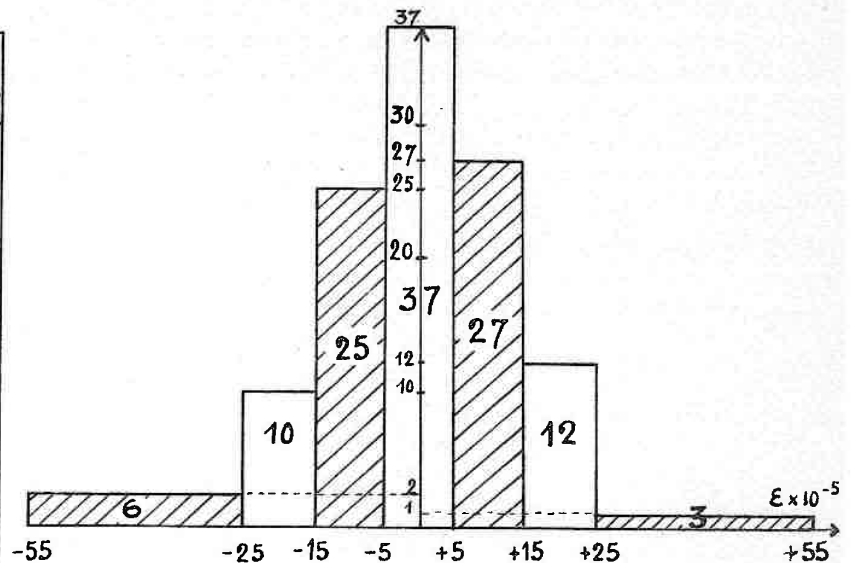
$f(x) = \frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + \dots$; $f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2} + \dots \right]$ pour $-\pi < x < +\pi$ ou $f(XT) = \pi X$ $T = 2\pi$ ou $f(XT) = (2\pi X)^2$ $T = 2\pi$						
k	$b_k(f)$ stricts = $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$	$b_k(f)$ calculés par la méthode	$\varepsilon \times 10^{-5}$	$a_k(f)$ stricts = $\frac{(-1)^k}{k^2}$	a_k calculés/4	$\varepsilon \times 10^{-5}$
1	1	0,99980	-20	-1	-0,99971	29
2	-0,50000	-0,49986	14	0,25000	0,24990	-10
3	0,33333	0,33329	-4	-0,11111	-0,11096	15
4	-0,25000	-0,24985	15	0,06250	0,06246	-4
5	0,20000	0,19990	-10	-0,04000	-0,03992	8
6	-0,16666	-0,16657	9	0,02777	0,02790	13
7	0,14286	0,14281	-5	-0,02041	-0,02034	7
8	-0,12500	-0,12504	-4	0,01562	0,01550	-12
9	0,11111	0,11114	3	-0,01235	-0,01213	22
10	-0,10000	-0,10000	0	0,01000	0,00994	-6
11	0,09091	0,09093	2	-0,00826	-0,00816	10
12	-0,08333	-0,08321	12	0,00694	0,00671	-23
13	0,07692	0,07688	-4	-0,00591	-0,00596	5
14	-0,07143	-0,07135	8	0,00510	0,00496	-14
15	0,06666	0,06656	-10	-0,00444	-0,00444	0
16	-0,06250	-0,06251	-1	0,00390	0,00400	10
17	0,05882	0,05863	-19	-0,00346	-0,00345	1
18	-0,05555	-0,05554	1	0,00309	0,00297	-12
19	0,05263	0,05257	-6	-0,00277	-0,00276	1
20	-0,05000	-0,04948	52	0,00250	0,00211	-39
21	0,04762	0,04737	-25	-0,00227	-0,00249	-22
22	-0,04545	-0,04526	19	0,00207	0,00212	5
23	0,04348	0,04338	-10	-0,00189	-0,00216	-27
24	-0,04166	-0,04169	-3	0,00174	0,00186	12
25	0,04000	0,03992	-8	-0,00160	-0,00162	-2
26	-0,03846	-0,03827	19	0,00148	0,00135	-13
27	0,03704	0,03694	-10	-0,00137	-0,00135	2
28	-0,03571	-0,03554	17	0,00128	0,00124	-4
29	0,03448	0,03445	-3	-0,00119	-0,00113	6
30	-0,03333	-0,03329	4	0,00111	0,00103	-8

$f(x) = \pi(\pi - x) = \frac{\pi^2}{2} + 4 \left[\cos x + \dots + \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2} + \dots \right];$ $ x \leq \pi$ ou $f(Tx) = \pi^2(1-2X)$ $T = 2\pi$				$f(x) = (\pi - x)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \left[\cos x + \dots + \frac{\cos px}{p^2} + \dots \right];$ $ x \leq \pi$ ou $f(Tx) = \pi^2(1-2X)^2$ $T = 2\pi$		
k	$\frac{\pi^2}{4} a_k(f)$ stricts = $\frac{1}{k^2} k_{\text{imp}}$ k_{pair}	$\frac{\pi^2}{4} a_k(f)$ calculés	$\varepsilon \times 10^{-5}$	$\frac{\pi^2}{4} a_k(f)$ stricts = $\frac{1}{k^2}$	$\frac{\pi^2}{4} a_k(f)$ calculés	$\varepsilon \times 10^{-5}$
1	1	0,99992	-8	1	0,99984	-16
2	0	0,00007	7	0,25000	0,24994	-6
3	0,11111	0,11099	-12	0,11111	0,11103	-8
4	0	-0,00014	-14	0,06250	0,06238	-12
5	0,04000	0,04002	2	0,04000	0,04003	3
6	0	-0,00009	-9	0,02777	0,02772	-5
7	0,02041	0,02059	18	0,02041	0,02063	22
8	0	-0,00024	-24	0,01562	0,01543	-19
9	0,01235	0,01242	7	0,01235	0,01240	5
10	0	0,00005	5	0,01000	0,01004	4
11	0,00826	0,00839	13	0,00826	0,00842	16
12	0	0,00005	5	0,00694	0,00701	7
13	0,00591	0,00605	14	0,00591	0,00604	13
14	0	0,00009	9	0,00510	0,00524	14
15	0,00444	0,00444	0	0,00444	0,00444	0
16	0	0,00036	36	0,00390	0,00412	22
17	0,00346	0,00346	0	0,00346	0,00348	2
18	0	0,00010	10	0,00309	0,00317	8
19	0,00277	0,00265	-12	0,00277	0,00275	-2
20	0	-0,00044	-44	0,00250	0,00221	-29
21	0,00227	0,00190	-37	0,00227	0,00202	-25
22	0	-0,00024	-24	0,00207	0,00175	-32
23	0,00189	0,00175	-14	0,00189	0,00183	-6
24	0	0	0	0,00174	0,00177	3
25	0,00160	0,00152	-8	0,00160	0,00152	-8
26	0	0,00014	14	0,00148	0,00162	14
27	0,00137	0,00154	17	0,00137	0,00153	16
28	0	0,00011	11	0,00128	0,00135	7
29	0,00119	0,00139	20	0,00119	0,00136	17
30	0	0,00005	5	0,00111	0,00113	2

Les erreurs obtenues : $\varepsilon = a_k$ calculé - a_k strict, nous donnent alors l'ordre de grandeur des erreurs de chute avec le cadrage choisi. Elles procèdent toutes d'une même loi (un test de GNEDENKO l'a par ailleurs prouvé). Nous les avons donc réunies en un seul histogramme avec leur moyenne et leur écart-type.

Remarquons que nous n'avons pas à tenir compte des facteurs possibles de $a_k(f)$: $\frac{1}{4} \frac{\pi^2}{4}$ etc... ; en fait les erreurs données (ε) sont celles faites sur le calcul de l'intégrale $\int_0^{1/2} f(Tx) \cos 2\pi kx dx$, c'est ce qui nous intéresse.

Classes	Nombre d'erreurs
$\epsilon \times 10^{-5} < -25$	6
$-25 \leq \epsilon \times 10^{-5} < -15$	10
$-15 \leq \epsilon \times 10^{-5} < -5$	25
$-5 \leq \epsilon \times 10^{-5} \leq +5$	37
$+5 < \epsilon \times 10^{-5} \leq +15$	27
$+15 < \epsilon \times 10^{-5} \leq +25$	12
$+25 < \epsilon \times 10^{-5}$	3
	120



Histogramme

la surface de chaque rectangle est proportionnelle au nombre d'erreurs trouvées dans chaque classe.

Un calcul strict a donné pour moyenne $m = -0,18$
pour écart-type $T = 15,17$

soit environ $m \neq 0$ $T \neq 15$
Testons, à l'aide du χ^2 , si la loi que suit nos erreurs, s'approche d'une loi normale.

Soient k : nombre d'erreurs dans une classe.

n : nombre total d'erreurs. $n = 120$

p : probabilité pour que $-t < T < t$,
T suivant la loi normale $p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Nous faisons 2 estimations $m = 0$ et $T = 15$

$t = \frac{(E \times 10^{-5}) - m}{T}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	+1	
k_i observé	16	25	37	27	15
k'_i calculé avec la loi normale $k'_i = n p_i$	19	25	32	25	19

$$\chi^2 = \sum \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i} \text{ ou } \frac{16+9}{19} + \frac{4}{25} + \frac{25}{32} \neq 2,25$$

Nous avons 5 variables et 2 estimations, le degré de liberté du χ^2 est alors
 $r = 5 - 2 - 1 = 2$

à 2 degrés de liberté et à 95% $\chi_p^2 = 5,991$

$\chi^2 < \chi_p^2$ donc rien ne s'oppose à accepter l'hypothèse que nos erreurs suivent une loi normale de moyenne $m = 0$ et d'écart-type $T = 15$

2- Puis nous avons pris des fonctions pour lesquelles l'approximation par un polynôme de degré 3 n'est pas stricte et nous avons comparé notre méthode à une méthode de GAUSS et à une méthode composite ordinaire. Dans cette dernière, comme dans la méthode généralisée, nous avons divisé l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ en 10 intervalles partiels égaux et interpolé sur chacun d'eux la fonction $F(x) = f(Tx) \cos 2\pi kx$ par un polynôme de degré 3; dans celle de GAUSS nous avons pris une méthode d'ordre 10 sur tout l'intervalle donc stricte pour un polynôme de degré m : $m \leq (10 \times 2) + 1 = 21$.

Des essais ont été fait avec les fonctions $f(x) = \cos x$; $f(x) = \sin x$ qui donne sensiblement les mêmes résultats que la fonction $\cos x$, c'est pourquoi elle ne figure pas dans le tableau suivant, et $f(x) = \operatorname{ch} \frac{x}{2}$.

La méthode de GAUSS est excellente pour les premières valeurs de k , dans notre exemple $k \leq 8$. Mais, lorsque k croît, elle n'est plus valable.

Un essai sur une méthode de GAUSS d'ordre 3, donc stricte pour un polynôme de degré inférieur ou égal à 7, sur des intervalles partiels successifs (ici 10, soient 40 points de GAUSS au total sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$) a donné un meilleur résultat ($k \leq 18$) mais est plus coûteuse et ne convient plus pour k suffisamment grand.

La méthode composite ordinaire diverge également pour des valeurs de k un peu élevées ($k \geq 9$ pour l'exemple choisi) quoiqu'elle donne de moins bons résultats que celle de GAUSS pour les petites valeurs de k (cf: Comparaison des méthodes usuelles d'intégration, faite au Centre de Calcul Automatique de NANCY.)

Nous pouvions à priori prévoir la divergence de ces 2 méthodes:

En effet, dans celles-ci, c'est la fonction $F(x) = f(Tx) \cos 2\pi kx$ (ou $f(Tx) \sin 2\pi kx$) que nous approchons par un polynôme.

Lorsque k croît, le degré du polynôme d'approximation restant fixe, l'approximation devient défectueuse. Le nombre de points, servant à approcher une partie de la fonction, n'est plus suffisant: le polynôme obtenu ne représente pas d'une manière satisfaisante les courbes de plus en plus resserrées de la fonction (cf le théorème de LEBESGUE)

Ainsi, dans la méthode composite ordinaire, nous observons une période et une symétrie dans les résultats. Soit $2l$ le nombre d'intervalles partiels choisi sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. Pour $k' = k + 2l$, le résultat est le même que pour k : en effet, $\cos[2\pi kx + 2\pi 2lx]$ avec $x = \frac{n}{2l}$, n entier, devient $\cos[\frac{2\pi kn}{2l} + \frac{4\pi nl}{2l}] = \cos \frac{2\pi kn}{2l}$ ou $\cos 2\pi kx$. Nous avons donc une période de $2l$ et aussi une symétrie par rapport à l ; en effet si

$k' = k - l$ et $k'' = k + l$ $\cos 2\pi k'x = \cos[2\pi kx - 2\pi lx]$ soit avec $x = \frac{n}{2l}$ $\cos[2\pi kx - \pi n]$ égal à $\cos[2\pi kx + \pi n]$ et $\cos 2\pi k'x = \cos 2\pi k''x$.

De plus, dans l'erreur sur l'approximation de la fonction $F(x) \sin$ -troduisent les dérivées première, seconde, troisième de f et la valeur de la fonction elle-même, tandis que dans la méthode composite généralisée, c'est la dérivée 4 de f qui s'introduit la première (voir fin du chapitre précédent) ce qui explique la meilleure approximation: nous n'approchons que la seule fonction $f(x)$ par un polynôme, la fonction $\cos 2\pi kx$ (ou $\sin 2\pi kx$) intervenant strictement dans le calcul mathématique des

intégrales. Si $f(x)$ est "suffisamment régulière", le calcul reste valable quel que soit k , les erreurs observées dans les résultats sont de l'ordre de grandeur de celles trouvées au paragraphe précédent, [bien qu'il faille comparer $4(E_1 \times 10^{-5})$ aux $E \times 10^{-5}$ précédents, puisque nous avons donné les résultats de $\frac{a_k(f)}{4}$ et non de $a_k(f)$].

Remarquons en outre que la méthode de GAUSS impose des x_i précis, tandis que la méthode composite demande de connaître $f(x)$ en n points équidistants de l'intervalle période, le calcul de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ étant alors effectué avec ce nombre n , jusqu'à une valeur quelconque de k .

En conclusion, notre méthode doit permettre de calculer les coefficients élevés du développement d'une fonction en série de FOURIER; nous pourrions reprendre les essais avec un autre cadrage et plus de chiffres significatifs pour obtenir une meilleure précision sur ceux-ci, ce qui sera fait ultérieurement sur plus grosse machine.

$$f(x) = |\cos x| = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{3} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{\cos 2px}{4p^2-1} + \dots \right]$$

$$T = 2\pi \quad \text{et} \quad k = 2p$$

Nous avons négligé les coefficients nuls (k impair) dans ce tableau.

$p = \frac{k}{2}$	$\frac{1}{4} a_p(f) \text{ stricts} = \frac{(-1)^{p-1}}{\pi(4p^2-1)}$	$\frac{1}{4} a_p(f) \left\{ \begin{array}{l} \text{méthode} \\ \text{composite} \\ \text{généralisée} \end{array} \right.$	$\varepsilon_1 \times 10^{-5}$	$\frac{1}{4} a_p(f) \left\{ \begin{array}{l} \text{méthode} \\ \text{composite} \\ \text{ordinaire} \end{array} \right.$	$\varepsilon_2 \times 10^{-5}$	$\frac{1}{4} a_p(f) \text{ méthode de GAUSS}$	$\varepsilon_3 \times 10^{-5}$
1	0,10610	0,10577	-33	0,10614	+4	0,10610	0
2	-0,02122	-0,02122	0	-0,02138	-16	-0,02122	0
3	0,00909	0,00908	-1	0,00940	+31	0,00909	0
4	-0,00505	-0,00507	-2	-0,00555	-50	-0,00505	0
5	0,00321	0,00321	0	0,00396	+75	0,00321	0
6	-0,00223	-0,00224	-1	-0,00323	-100	-0,00223	0
7	0,00163	0,00165	+2	0,00285	+112	0,00164	+1
8	-0,00125	-0,00127	-2	-0,00272		-0,00119	+6
9	0,00098	0,00100	+2	0,00264	Ordre de la centaine en valeur absolue	0,00069	-29
10	-0,00080	-0,00080	0	-0,00263		-0,00283	-203
11	0,00066	0,00069	+3	0,00264		0,00547	+479
12	-0,00055	-0,00054	+1	-0,00270		0,02529	2474
13	0,00047	0,00047	0	0,00287		-0,02507	
14	-0,00040	-0,00041	-1	-0,00323		-0,12665	
15	0,00035	0,00034	-1	0,00396		0,03172	
16	-0,00031	-0,00025	+6	-0,00555		0,22365	
17	0,00027	0,00028	+1	0,00939		0,05167	
18	-0,00025	-0,00023	+2	-0,02137		-0,04045	
19	0,00022	0,00021	-1	0,10614	Ordre de la centaine en valeur absolue	-0,05010	
20	-0,00019	-0,00026	+7	0,31831		-0,11917	
21	0,00018	0,00014	-4	0,10614		-0,06679	
22	-0,00017	-0,00020	-3	-0,02138		-0,07373	
23	0,00015	0,00012	-3	0,00941		-0,03191	
24	-0,00014	-0,00014	0	-0,00555		-0,00799	-785
25	0,00013	0,00012	-1	0,00396		0,00107	+94
26	-0,00012	-0,00009	+3	-0,00322		0,01073	+1085
27	0,00011	0,00012	+1	0,00285		0,04446	
28	-0,00010	-0,00008	+2	-0,00271		0,12316	
29	0,00009	0,00011	+2	0,00264	Ordre de la centaine en valeur absolue	0,01571	
30	-0,00009	-0,00008	+1	-0,00263		-0,11600	

Remarque : dans la méthode composite ordinaire ici $l = 10$

la période est de 20

la symétrie est autour du point $p = 10$

$$a_p(f) = a_{p+20}(f)$$

$$a_{10-p}(f) = a_{10+p}(f)$$

$$f(x) = Ch \frac{x}{2} = \frac{4\pi}{Sh \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{5} + \dots + (-1)^p \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{4p^2+1} + \dots \right] ; |x| \leq \pi$$

$$T = 2\pi \quad k=p=1; 2; \dots, 30$$

k	$\frac{1}{4} a_k(f) \text{ stricts} = \frac{Sh \frac{\pi}{2}}{\pi} \frac{(-1)^k}{4k^2+1}$	$\frac{1}{4} a_k(f) \left\{ \begin{array}{l} \text{méthode} \\ \text{composite} \\ \text{généralisée} \end{array} \right.$	$\varepsilon'_1 \times 10^{-5}$	$\frac{1}{4} a_k(f) \left\{ \begin{array}{l} \text{méthode} \\ \text{composite} \\ \text{ordinaire} \end{array} \right.$	$\varepsilon'_2 \times 10^{-5}$	$\frac{1}{4} a_k(f) \left\{ \begin{array}{l} \text{méthode} \\ \text{de GAUSS} \end{array} \right.$	$\varepsilon'_3 \times 10^{-5}$
1	- 0,14650	- 0,14691	- 41	- 0,14660	- 10	- 0,14650	0
2	0,04309	0,04307	- 2	0,04340	+ 31	0,04309	0
3	- 0,01980	- 0,01978	+ 2	- 0,02048	- 68	- 0,01979	+ 1
4	0,01127	0,01124	- 3	0,01243	+ 116	0,01127	0
5	- 0,00725	- 0,00722	+ 3	- 0,00896	- 171	- 0,00726	- 1
6	0,00505	0,00509	+ 4	0,00735	+ 230	0,00505	0
7	- 0,00372	- 0,00368	+ 4	- 0,00655	- 283	- 0,00372	0
8	0,00285	0,00279	- 6	0,00620		0,00288	+ 3
9	- 0,00225	- 0,00219	+ 6	- 0,00606		- 0,00197	+ 28
10	0,00183	0,00182	- 1	0,00602		- 0,00028	- 211
11	- 0,00151	- 0,00148	+ 3	- 0,00606		- 0,00694	- 543
12	0,00127	0,00123	- 4	0,00620		0,03956	+ 3829
13	- 0,00108	- 0,00107	+ 1	- 0,00656		0,03034	
14	0,00093	0,00089	- 4	0,00735		- 0,22952	
15	- 0,00081	- 0,00080	+ 1	- 0,00896	- 817	- 0,04251	
16	0,00071	0,00077	+ 6	0,01243	1172	0,46432	
17	- 0,00063	- 0,00064	+ 1	- 0,02050	- 1977	- 0,06597	
18	0,00056	0,00055	- 1	0,04342	+ 4286	- 0,07792	
19	- 0,00050	- 0,00053	- 3	- 0,14660	- 14610	0,06649	
20	0,00045	0,00031	- 14	0,73254	+ 73209	- 0,29286	
21	- 0,00042	- 0,00052	- 10	- 0,14658	- 14616	0,09091	
22	0,00037	0,00038	+ 1	0,04340	+ 4303	- 0,19983	
23	- 0,00034	- 0,00043	- 9	- 0,02047	- 2013	0,04473	
24	0,00031	0,00035	+ 4	0,01242	+ 1211	- 0,03406	
25	- 0,00029	- 0,00031	- 2	- 0,00895	- 866	- 0,00325	
26	0,00027	0,00024	- 3	0,00733		0,04878	
27	- 0,00025	- 0,00023	+ 2	- 0,00654		- 0,05990	
28	0,00023	0,00023	0	0,00622		0,27799	
29	- 0,00021	- 0,00019	+ 2	- 0,00606		- 0,02638	
30	0,00020	0,00019	- 1	0,00602		- 0,17058	

Même remarque que dans le tableau précédent pour la période et la symétrie observées dans la méthode composite ordinaire.

$$a_k(f) = a_{k+20}(f) \quad \text{et} \quad a_{10-k}(f) = a_{10+k}(f).$$

B - Les Transformées de FOURIER.

Les matrices $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont été calculées, toujours en approchant $f(x)$ par un polynôme de degré 3 : $P_3(x)$, pour différentes valeurs de n et avec des valeurs de y en général égales à celles de x pour obtenir des matrices carrées; puis nous avons effectué plusieurs essais sur des fonctions $f(x)$ ayant une écriture mathématique simple et dont nous connaissions la transformée de FOURIER $\hat{f}(y)$.

Ainsi les sommes, ligne par ligne, des termes de $\mathcal{C}$ (ou de $\mathcal{D}$) ont été vérifiées: en posant $f(x) \equiv 1$ nous avons, par notre méthode $\hat{f}(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i(j)$ et strictement

$$\hat{f}(y) = \int_0^L \cos 2\pi xy \, dx = \frac{\sin 2\pi Ly}{2\pi y}$$

Nous avons ensuite été conduit à considérer le nombre de "bosses" de la courbe, c'est à dire le nombre de portions comprises entre 2 maxima ou 2 minima.

Si le nombre de points choisis pour "définir" la fonction $f(x)$ (définir au sens physique: définition d'un signal par exemple.) est de 8 ou 10 points au moins, pour une "bosse" la méthode est bonne, s'il est de 4 ou 5 points la méthode reste valable dans le sens où le signe de $\hat{f}(y)$, l'allure de la courbe, c'est à dire la position des maxima, sont respectés mais où les valeurs numériques de ces maxima sont entachées d'erreur; par contre la méthode ne convient plus lorsque nous prenons moins de 4 points pour définir "une bosse".

Remarquons de plus que nous avons calculé toutes les transformées de FOURIER suivantes sur l'intervalle $[0, +\infty[$ seulement, puisque toutes les fonctions $f(x)$ ont été choisies paires ou impaires (Cf. début chapitre 3.).

1^{iers} exemples. - Étude du nombre de points à choisir par "bosse"

avec essais sur des fonctions $f(x) = \cos qx$ ou $\sin qx$

{ L'intervalle $[-L; +L]$ a été choisi égal à $[-10; +10]$, les fonctions $f(x)$ étant nulles en dehors de cet intervalle.

(a)

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{4} x & \text{pour } |x| \leq 10 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 10 \end{cases}$$

- Avec $n = 8$ Formons d'abord le tableau de variation de la fonction.

x	-1,25	0	1,25	2	2,5	3,75	4	5	6	6,25	7,5	8	8,75	10
$f(x)$	0,5556	1	0,5556	0	-0,3827	-0,9808	-1	-0,7071	0	0,1951	0,9239	1	0,8315	0

1 "bosse" 7 points de "définition" choisis (les x).

Nous avons un nombre de points suffisant par "bosse" pour calculer $\hat{f}(y)$ par notre méthode

- Avec $n = 16$ nous avons un nombre de points de "définition" par "bosse" double du précédent, donc une meilleure approximation.

Nous connaissons mathématiquement la transformée de FOURIER

de $f(x)$: $\hat{f}(y) = \int_0^{10} \cos \frac{\pi x}{4} \cos 2\pi xy \, dx$ et en intégrant par parties

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 10(2\pi y + \frac{\pi}{4})}{2\pi y + \frac{\pi}{4}} + \frac{\sin 10(2\pi y - \frac{\pi}{4})}{2\pi y - \frac{\pi}{4}} \right]$$

Nous utilisons donc ici des matrices du type $\mathcal{E}$ et obtenons le tableau suivant :

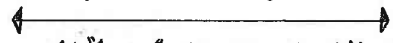
y	$\hat{f}(y)$ stricte	$\hat{f}(y)$ calculée n = 8	$\mathcal{E} \times 10^{-5}$	$\hat{f}(y)$ calculée n = 16	$\mathcal{E} \times 10^{-5}$
1,25	0,01286	0,01298	+ 12	0,01290	+ 4
2,50	-0,00319	-0,00182	+ 137	-0,00320	+ 1
3,75	0,00142	0,00148	+ 6	0,00146	+ 4
5	-0,00080	-0,00086	- 6	-0,00083	- 3
6,25	0,00051	0,00070	+ 19	0,00064	+ 13
7,50	-0,00035	-0,00035	0	-0,00035	0
8,75	0,00026	0,00022	- 4	0,00025	- 1
10	-0,00020	-0,00016	- 4	-0,00019	+ 1

< Soit $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{5} & \text{pour } |x| \leq 10 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 10 \end{cases}$

Avec $n = 8$, nous avons 8 points par "bosse"
et avec $n = 16$, un nombre double de points de "définition" par "bosse".

— Tableau de variation de $f(x)$.

x	-1,25	0	1,25	2,5	3,75	5	6,25	7,50	8,75	10
f(x)	-0,707	0	0,707	1	0,707	0	-0,707	-1	0,707	0



 $\frac{1}{2}$ "bosse" 4 points de définition

Mathématiquement $\hat{f}(y) = \int_0^{10} \sin \frac{\pi x}{5} \sin 2\pi xy \, dx$ soit

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 10(2\pi y + \frac{\pi}{5})}{2\pi y + \frac{\pi}{5}} - \frac{\sin 10(2\pi y - \frac{\pi}{5})}{2\pi y - \frac{\pi}{5}} \right]$$

Nous obtenons des résultats avec des erreurs du même ordre de grandeur que les précédentes. En voici un extrait : (nous utilisons donc ici des matrices du type $\mathcal{E}$.)

y	$\hat{f}(y)$ stricte	$\hat{f}(y)$ calculée n=16	$\mathcal{E} \times 10^{-5}$
0,625	0,04181	0,04181	0
1,875	-0,00454	-0,00457	- 3
3,125	0,00163	0,00162	- 1
4,375	-0,00083	-0,00085	- 2
5,625	0,00050	0,00046	- 2
6,875	-0,00037	-0,00039	- 2
8,125	0,00018	0,00017	- 1
9,375	-0,00021	-0,00023	- 2

b

Avec $n = 80$, c'est à dire avec un nombre beaucoup plus considérable de points pour "définir" la fonction, toujours sur le même intervalle $[-10; +10]$ pour $[-L; +L]$, nous avons étudié quatre fonctions successives :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = \cos \frac{\pi x}{4} \\ f_2(x) = \cos \frac{7\pi x}{4} \\ f_3(x) = \cos \frac{17\pi x}{4} \\ f_4(x) = \cos \frac{31\pi x}{4} \end{array} \right\} \text{ pour } |x| \leq 10$$

$$f_1(x); f_2(x); f_3(x); f_4(x) = 0 \text{ pour } |x| \geq 10$$

Le nombre n ainsi choisi donne une excellente "définition" pour la première fonction : 64 points par "bosse".

Pour la seconde, il correspond à 8 à 9 points par "bosse" soit une "définition" encore bonne de $f(x)$.

Pour la troisième, il correspond à 3 à 4 points par "bosse" soit une "définition" seulement valable qui nous donne l'allure de la courbe de la transformée.

Pour la quatrième, la "définition" à 1 ou 2 points par "bosse" est sans valeur et donne des résultats trop erronés pour la transformée, c'est pourquoi ceux-ci ne figureront pas dans le tableau suivant

Par calcul mathématique les transformées de FOURIER strictes sont :

$$\hat{f}_1(y) = \int_0^{10} \cos \frac{\pi x}{4} \cos 2\pi xy dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 10(2\pi y + \frac{\pi}{4})}{2\pi y + \frac{\pi}{4}} + \frac{\sin 10(2\pi y - \frac{\pi}{4})}{2\pi y - \frac{\pi}{4}} \right]$$

$$\hat{f}_2(y) = \int_0^{10} \cos \frac{7\pi x}{4} \cos 2\pi xy dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 10(2\pi y + \frac{7\pi}{4})}{2\pi y + \frac{7\pi}{4}} + \frac{\sin 10(2\pi y - \frac{7\pi}{4})}{2\pi y - \frac{7\pi}{4}} \right]$$

$$\hat{f}_3(y) = \int_0^{10} \cos \frac{17\pi x}{4} \cos 2\pi xy dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 10(2\pi y + \frac{17\pi}{4})}{2\pi y + \frac{17\pi}{4}} + \frac{\sin 10(2\pi y - \frac{17\pi}{4})}{2\pi y - \frac{17\pi}{4}} \right]$$

Nous utilisons ici une matrice du type $\mathcal{E}$.

Le tableau complet des résultats étant trop important, nous nous sommes limités à un tableau partiel, celui-ci contenant, entre autre, les valeurs des maxima de la transformée.

y	$\hat{f}_1(y)$ stricte	$\hat{f}_1(y)$ calculée	$\epsilon \times 10^{-5}$	$\hat{f}_2(y)$ stricte	$\hat{f}_2(y)$ calculée	$\epsilon \times 10^{-5}$	$\hat{f}_3(y)$ stricte	$\hat{f}_3(y)$ calculée	$\epsilon \times 10^{-5}$
0,125	0	0	0	0	-0,00089	- 89	0	-0,00305	- 305
0,250	0,42441	0,42058	- 83	0,19806	0,11649	- 8157	- 0,07595	- 0,05140	+ 2455
0,375	0	0,00006	+ 6	0,00002	0,00003	+ 1	0	0,00025	+ 25
0,5	- 0,08488	- 0,08501	- 13	- 0,27008	- 0,29062	- 2054	0,07928	0,09498	+ 1570
0,625	0	- 0,00001	- 1	- 0,00005	0,00006	+ 11	0,00001	- 0,00012	- 13
0,75	0,03637	0,03636	- 1	0,68558	0,67583	- 975	- 0,08555	- 0,07306	+ 1249
0,875	0	0,00002	+ 2	4,99999	5,00534	+ 535	- 0,00002	- 0,00019	- 17
1	- 0,02021	- 0,02023	- 2	0,59419	0,59005	- 414	0,09620	0,08507	- 1113
1,125	0	- 0,00004	- 4	0,00006	- 0,00001	- 7	0,00002	0,00034	+ 34
1,25	0,01286	0,01282	- 4	- 0,17476	- 0,17456	+ 20	- 0,11452	- 0,10378	+ 1074
1,375	0	- 0,00007	- 7	- 0,00003	- 0,00012	- 9	- 0,00003	- 0,00002	+ 1
1,5	- 0,00890	- 0,00887	+ 3	0,09382	0,09341	- 41	0,14927	0,13429	- 1498
1,625	0	0,00014	+ 14	0,00002	0,00001	- 1	0,00006	0,00013	+ 7
1,75	0,00653	0,00654	+ 1	- 0,06063	- 0,06033	+ 30	- 0,23274	- 0,21045	+ 2229
1,875	0	- 0,00008	- 8	- 0,00002	- 0,00010	- 8	- 0,00013	- 0,00004	+ 9
2	- 0,00499	- 0,00506	- 7	0,04306	0,04293	- 13	0,65588	0,59533	- 6055
2,125	0	0,00008	+ 8	0,00002	- 0,00011	- 14	4,99999	4,54595	- 45404
2,25	0,00394	0,00392	- 2	- 0,03241	- 0,03229	+ 12	0,61846	0,56455	- 5391
2,375	0	- 0,00010	- 10	- 0,00001	- 0,00003	- 2	0,00014	0,00019	+ 5
2,5	- 0,00319	- 0,00321	- 2	0,02539	0,02530	- 9	- 0,19500	- 0,17873	+ 1627
2,625	0	- 0,00012	- 12	0,00001	- 0,00009	- 11	- 0,00007	- 0,00016	- 9
2,75	0,00264	0,00258	- 6	- 0,02049	- 0,02045	+ 4	0,11100	0,10251	- 849
2,875	0	0,00005	+ 5	- 0,00001	- 0,00001	0	0,00005	- 0,00005	- 10
3	- 0,00221	- 0,00222	- 1	0,01691	0,01677	- 14	- 0,07542	- 0,07013	+ 529
3,125	0	- 0,00008	- 8	0	0	0	0,00004	0,00003	+ 7
3,25	0,00189	0,00188	- 1	- 0,01421	- 0,01420	+ 1	0,05593	0,05277	- 316
3,375	0	0,00005	+ 5	0	- 0,00009	- 9	0,00003	- 0,00004	- 7
3,5	- 0,00163	- 0,00155	+ 8	0,01213	0,01216	+ 3	- 0,04373	- 0,04159	+ 214
3,625	0	0,00002	+ 2	0	0,00002	+ 2	- 0,00003	- 0,00019	- 16
3,75	0,00142	0,00143	+ 1	- 0,01047	- 0,01028	+ 19	0,03543	0,03443	- 100
3,875	0	0,00003	+ 3	0	- 0,00005	- 5	0,00002	0,00006	+ 4
4	- 0,00124	- 0,00126	- 2	0,00914	0,00917	+ 3	- 0,02945	- 0,02904	+ 41
5,125	0	0,00013	+ 13	0	0,00002	+ 2	- 0,00002	0,00007	+ 9
5,250	0,00072	0,00072	0	- 0,00520	- 0,00508	+ 12	0,01467	0,01955	+ 478
5,375	0	0,00003	+ 3	0	- 0,00005	- 5	0,00001	- 0,00010	- 11
5,5	- 0,00066	- 0,00065	+ 1	0,00472	0,00466	- 6	- 0,01314	- 0,02226	- 912
5,625	0	- 0,00003	- 3	0	0,00015	+ 15	- 0,00001	0,00016	+ 17
5,75	0,00060	0,00057	+ 3	- 0,00431	- 0,00426	+ 6	0,01185	0,04173	+ 2988
5,875	0	- 0,00010	- 10	0	0,00004	+ 4	+ 0,00001	0,24187	+ 24186
6	- 0,00055	- 0,00053	+ 2	0,00395	0,00402	+ 7	- 0,01074	0,02128	+ 3202
6,125	0	0,00011	+ 11	0	0,00002	+ 2	- 0,00001	0,00005	+ 6
6,25	0,00051	0,00058	+ 7	- 0,00364	- 0,00374	- 10	0,00979	- 0,00199	+ 1118
6,375	0	0,00008	+ 8	0	0,00017	+ 17	+ 0,00001	0,00004	+ 3
6,5	- 0,00047	- 0,00045	+ 2	0,00336	0,00347	+ 11	- 0,00896	- 0,00204	+ 692

Remarquons que, dans ces résultats, les premières valeurs de la transformée sont plus fortement entachées d'erreur que les suivantes, ce que nous avions prévu au chapitre 3 (voir "erreurs" en fin de chapitre.)

De plus $\hat{f}_3(y)$ calculée donne l'allure de la courbe de la transformée puisque nous retrouvons bien le maximum le plus élevé pour $y = 2,125$, dont la valeur numérique est altérée cependant; mais elle semble donner en outre un harmonique pour $y = 5,875$ qui n'existe pas en réalité. Ce qui nous confirme que 4 à 5 points par "bosse" n'est pas un nombre suffisant pour "définir" $f(x)$ si nous désirons un résultat précis.

Une courbe $f(x)$ sera d'autant plus difficile à "définir" expérimentalement qu'elle possède un plus grand nombre de maxima et minima. En conclusion, dans le cas d'une courbe très oscillante, pour obtenir des résultats corrects, il faudra "mettre le prix" c'est à dire définir cette courbe avec 6 à 8 points par "bosse" au moins, donc prendre un nombre assez élevé, ce qui est coûteux au départ, mais ne l'est plus lorsque la matrice $\mathcal{E}$ est calculée.

Autres exemples - Les fonctions utilisées jusqu'à présent ne présentaient aucune discontinuité, puisque même pour $x = 10$ elles étaient nulles, aucune singularité non plus sauf pour le point $x = 10$ qui possédait deux tangentes différentes, une à droite et une à gauche.

Nous allons essayer maintenant diverses fonctions qui auront chacune une particularité.

$$\text{< Soit } f(x) = e^{-x} \quad x \in [0, +\infty[.$$

Nous calculons $\int_0^\infty e^{-x} \cos 2\pi xy \, dx$ en négligeant $\int_L^\infty e^{-x} \cos 2\pi xy \, dx$ c'est à dire en commettant une erreur systématique.

Nous utilisons pour cet exemple $n = 16$ et une matrice du type $\mathcal{E}$ puisque $f(x)$ est paire.

Nous avons pris deux valeurs de L pour étudier cette erreur

- Pour $L = 2$ $f(2) = e^{-2} = 0,13534$ l'intégrale $\int_0^\infty$ n'est pas négligeable du tout, d'où les fortes erreurs observées. En effet dans l'erreur intervient d'abord $f(L)$ (cf: fin du 3^{ème} chapitre). Par notre méthode l'allure de la courbe n'est plus conservée: elle oscille alors qu'en réalité elle décroît régulièrement.

- Pour $L = 10$ $f(10) = e^{-10} = 0,00005$ l'intégrale $\int_0^\infty$ est négligeable à la précision que nous avons choisie, les erreurs observées dans les résultats sont du même ordre de grandeur que celles observées en général.

La Transformée de FOURIER de $f(x)$ nous est connue :

$$\hat{f}(y) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2\pi xy \, dx = \frac{1}{1 + 4\pi^2 y^2}$$

TABLEAUX DES RÉSULTATS

<u>L=2</u>	y	$\hat{f}(y)$ stricte	$\hat{f}(y)$ calculée	<u>L=10</u>	y	$\hat{f}(y)$ stricte	$\hat{f}(y)$ calculée	$\epsilon \times 10^{-5}$
	0,125	0,61810	0,71525		0	1	0,99768	-232
	0,250	0,28840	0,32734		0,625	0,06089	0,06089	0
	0,375	0,15263	0,10266		1,25	0,01595	0,01613	+18
	0,5	0,09200	0,07810		1,875	0,00715	0,00730	+15
	0,625	0,06089	0,09205		2,5	0,00404	0,00404	0
	0,75	0,04309	0,04819		3,125	0,00259	0,00274	+15
	0,875	0,03195	0,00792		3,75	0,00180	0,00182	+2
	1	0,02471	0,02103		4,375	0,00132	0,00133	+1
	1,125	0,01962	0,03794		5	0,00101	0,00104	+3
	1,25	0,01595	0,01778		5,625	0,00080	0,00081	+1
					6,25	0,00065	0,00071	+6
					6,875	0,00053	0,00052	-1
					7,5	0,00045	0,00043	-2
					8,125	0,00038	0,00043	+5
					8,75	0,00033	0,00035	+2
					9,375	0,00029	0,00032	+3
					10	0,00025	0,00025	0

$$< \text{ Soit } f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq 2,5 \\ 2,5 & 2,5 \leq |x| \leq 10 \\ 0 & |x| > 10 \end{cases}$$

$f(x)$ est une fonction avec un point à tangentes différentes à gauche et à droite : le point $x = 2,5$, et une fonction discontinue puisqu'elle possède un saut au point $x = 10$

$L = 10$. Comme $f(x)$ est impaire nous utilisons une matrice du type $\mathcal{D}$ avec $n = 16$.

La transformée de FOURIER de $f(x)$ est :

$$\hat{f}(y) = \int_0^{2,5} x \sin 2\pi xy \, dx + \int_{2,5}^{10} 2,5 \sin 2\pi xy \, dx$$

$$\text{soit } \hat{f}(y) = \frac{\sin 5\pi y}{4\pi^2 y^2} - \frac{5 \cos 20\pi y}{4\pi y}$$

TABLEAU DES RÉSULTATS

y	$\hat{f}(y)$ stricte	$\hat{f}(y)$ calculée	$\epsilon \times 10^{-5}$
0,625	-0,02482	-0,02931	- 449
1,25	0,32977	0,32217	- 760
1,875	-0,00665	-0,00131	+ 534
2,5	-0,15510	-0,15644	- 134
3,125	-0,00240	-0,00018	+ 222
3,75	0,10738	0,10683	- 55
4,375	-0,00050	-0,00062	- 12
5	-0,07958	-0,07962	- 4
5,625	0,00030	0,00009	- 21
6,25	0,06320	0,06367	+ 47
6,875	0,00050	0,00027	- 23
7,5	-0,05350	-0,05327	+ 23
8,125	0,00035	-0,00001	- 36
8,75	0,04524	0,04533	+ 9
9,375	0,00011	-0,00008	- 19
10	-0,03979	-0,03980	- 1

< Nous venons de donner un exemple sur une fonction ayant une discontinuité au départ et dont la transformée de FOURIER elle, était continue

Inversement, soit une fonction $f(x)$ continue, notre méthode permet-elle de retrouver les discontinuités de la transformée de FOURIER de cette fonction? Une réponse affirmative serait intéressante pour les physiciens.

Soient les 3 fonctions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} \\ f_2(x) = \frac{\sin 2,5\pi x}{2\pi x} \\ f_3(x) = \frac{\sin 3\pi x}{2\pi x} \end{array} \right\} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Nous utilisons une matrice du type $\mathcal{C}$ avec $n=80$ sur l'intervalle $[0,10]$ donc ici $L=10$

Nous connaissons les transformées de FOURIER de ces fonctions :

$$\hat{f}_1(y) = \int_0^\infty \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} \cos 2\pi xy \, dx = \begin{cases} 0,25 & |x| < 1 \\ 0,125 & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\hat{f}_2(y) = \int_0^\infty \frac{\sin 2,5\pi x}{2\pi x} \cos 2\pi xy \, dx = \begin{cases} 0,25 & |x| < 1,25 \\ 0,125 & |x| = 1,25 \\ 0 & |x| > 1,25 \end{cases}$$

$$\hat{f}_3(y) = \int_0^\infty \frac{\sin 3\pi x}{2\pi x} \cos 2\pi xy \, dx = \begin{cases} 0,25 & |x| < 1,5 \\ 0,125 & |x| = 1,5 \\ 0 & |x| > 1,5 \end{cases}$$

TABLEAU DES RÉSULTATS

y	$\hat{f}_1(y)$ stricte	$\hat{f}_1(y)$ calculée	$\hat{f}_2(y)$ stricte	$\hat{f}_2(y)$ calculée	$\hat{f}_3(y)$ stricte	$\hat{f}_3(y)$ calculée
0,375	0,25000	0,20374	0,25000	0,19726	0,25000	0,19250
0,5	0,25000	0,28243	0,25000	0,29402	0,25000	0,29289
0,625	0,25000	0,26174	0,25000	0,26348	0,25000	0,26496
0,75	0,25000	0,25943	0,25000	0,25188	0,25000	0,25791
0,875	0,25000	0,25896	0,25000	0,26213	0,25000	0,26316
1	0,12500	0,13089	0,25000	0,26205	0,25000	0,25466
1,125	0	0,00972	0,25000	0,25688	0,25000	0,25930
1,25	0	0,00418	0,12500	0,13340	0,25000	0,26422
1,375	0	0,00759	0	0,01026	0,25000	0,25365
1,5	0	0,00963	0	0,00443	0,12500	0,13121
1,625	0	0,00747	0	0,00859	0	0,01080
1,75	0	0,00590	0	0,01043	0	0,00479
1,875	0	0,00676	0	0,00805	0	0,00880
2	0	0,00739	0	0,00641	0	0,01066
2,125	0	0,00619	0	0,00722	0	0,00810
2,25	0	0,00532	0	0,00786	0	0,00638
2,375	0	0,00551	0	0,00652	0	0,00716
2,5	0	0,00557	0	0,00533	0	0,00764
2,625	0	0,00488	0	0,00573	0	0,00635
2,75	0	0,00405	0	0,00579	0	0,00514
2,875	0	0,00402	0	0,00478	0	0,00533
3	0	0,00405	0	0,00399	0	0,00546

Nous pouvons conclure que les allures des courbes des transformées de FOURIER des fonctions $f(x)$ sont conservées mais remarquons que :

— $\hat{f}_1(y)$ est la courbe la "mieux approchée" des trois. En effet la courbe $\hat{f}_1(x)$ possède avec n et L choisis 8 points de "définition" par "bosse" tandis que $\hat{f}_2(x)$ en possède 6 à 7 et $\hat{f}_3(x)$ 5 seulement.

Un essai a été exécuté avec la fonction $f_4(x) = \frac{\sin 10\pi x}{2\pi x}$ pour $x \in \mathbb{R}$, mais a donné des résultats assez erronés ($\hat{f}_4(5) = 0,065$ au lieu de 0,125 par exemple au point de discontinuité), celle-ci ne possédant que 1 à 2 points de "définition" par "bosse".

— Par notre méthode, les premières valeurs numériques de la transformée présentent un maximum assez élevé et supérieur à la valeur réelle de cette transformée. Nous retrouvons ici le phénomène de GIBBS.

« Soit une fonction $f(x)$ développable en série de FOURIER :

Si nous voulons représenter cette fonction par un nombre fini de termes de cette série, la courbe obtenue possèdera des maxima et des minima autour de la courbe réelle vers laquelle tend la série, ceux-ci décroissants en valeur absolue les uns par rapport aux autres, le premier étant un maximum et le plus élevé. De plus les écarts entre les deux courbes sont de moins en moins

importants lorsque nous prenons de plus en plus de termes de la série pour représenter la fonction.

< Or, dans notre méthode, nous ne calculons pas l'intégrale $\int_0^\infty$ puisque nous négligeons $\int_L^\infty$, donc il n'est pas étonnant de retrouver ce phénomène.

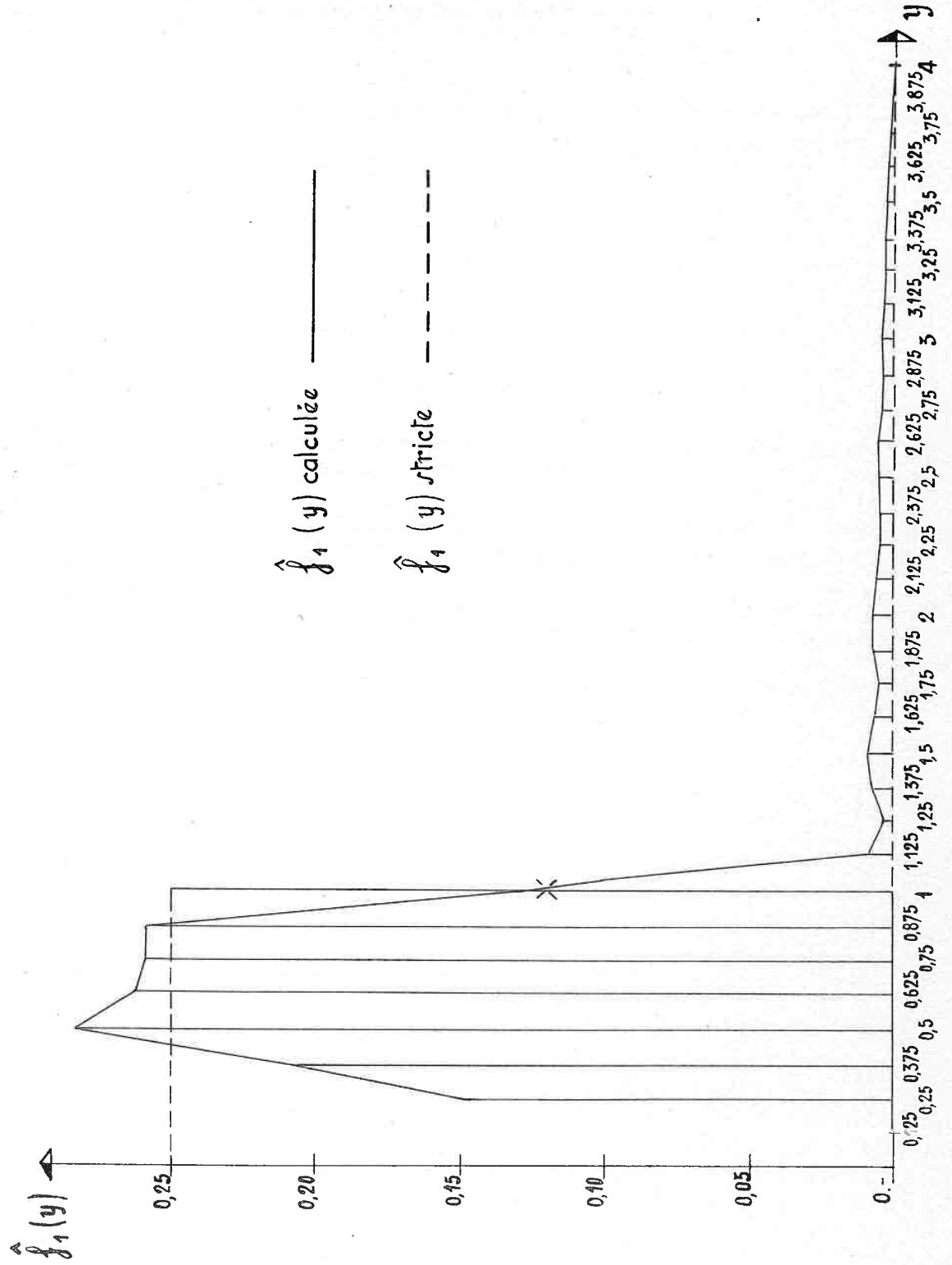
— Le fait que nous négligeons l'intégrale $\int_0^\infty f(x) \cos 2\pi xy \, dx$ entraîne de plus que les valeurs numériques de la transformée observées sont entachées d'une erreur systématique ($\hat{f}_1(1) = 0,130$ au lieu de 0,125 par exemple, au point de discontinuité). En effet $f(L)$ a une valeur assez considérable et il ne suffirait pas de prendre par exemple une autre fonction $f(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi Lx}$ $L > 1$ pour amoindrir cette erreur, car la constante, valeur constante transformée de FOURIER de $f(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}$ divisée par ce même nombre L .

L'erreur relative sur $f(L)$ dépend de L , de l'ordre de

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{L} \Big| \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{\frac{\pi L}{2}}$$

Ce qui nous donne dans notre exemple une erreur relative d'environ 6% et une erreur absolue au moins égale à 0,007.

Par conséquent pour obtenir une meilleure approximation de $\hat{f}(y)$, donc, non seulement l'allure du saut de cette fonction mais aussi une valeur numérique ajustée de la constante représentant cette fonction en réalité, il faudrait augmenter la valeur de la limite L tout en conservant le même nombre de "points de définition" pour une "bosse" de la fonction. Le phénomène de GIBBS en serait en même temps atténué mais pas supprimé.



— CONCLUSION —

Notre méthode a montré son efficacité dans le calcul des coefficients d'une série de FOURIER ou celui d'une transformée de FOURIER d'une fonction expérimentale.

Nous pouvons approcher toute intégrale :

$$\int_a^b k(xy) f(x) dx = g(y)$$

par le système linéaire :

$$C_i^j f(x) = g(y_j)$$

en interpolant la seule fonction $f(x)$ et en conservant le noyau $k(xy)$ sous forme mathématique.

Cette méthode permet en particulier le calcul d'intégrales singulières, avec noyaux infinis ou bosses infinies par exemple.

Elle peut être, dans l'avenir, le point de départ d'une mise au point d'un moyen de résolution des équations intégrales linéaires : nous voyons la possibilité de remplacer par un système linéaire une équation intégrale du type de celle citée ci-dessus.

VU ET APPROUVÉ
NANCY, le Octobre 1962

LE DOYEN,
M. ROUBAULT

VU ET PERMIS D'IMPRIMER
NANCY, le Octobre 1962

LE RECTEUR,
Président du Conseil de l'Université

P. IMBS