



UNIVERSITE de NANCY - FACULTE des SCIENCES

Bu
Sc N 66
32

THESE

PRESENTÉE à la FACULTE des SCIENCES de NANCY

pour obtenir le titre de

DOCTEUR de SPECIALITE en MATHEMATIQUES

(mention MATHEMATIQUES PURES)

par

Maryse TOMMASINI



Sur la Théorie des Fonctions Sphériques

Soutenue le 4 Juin 1966 devant la Commission d'Examen :

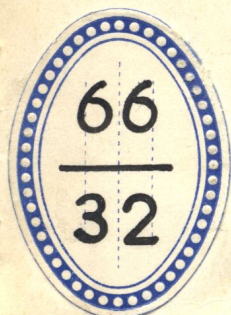
M. DELSARTE

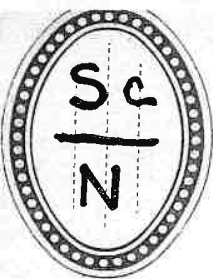
Président

M. TAKAHASHI

M. EYMARD

Examineurs





UNIVERSITE de NANCY - FACULTE des SCIENCES

THESE

PRESENTÉE à la FACULTE des SCIENCES de NANCY

pour obtenir le titre de
DOCTEUR de SPECIALITE en MATHEMATIQUES
(mention MATHEMATIQUES PURES)

par

Maryse TOMMASINI



Sur la Théorie des Fonctions Sphériques

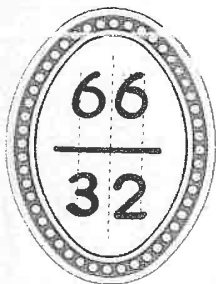
Soutenue le 4 Juin 1966 devant la Commission d'Examen :

M. DELSARTE Président

M. TAKAHASHI

M. EYMARD

Examineurs



UNIVERSITE de NANCY - FACULTE des SCIENCES

T H E S E

PRESENTÉE à la FACULTE des SCIENCES de NANCY

pour obtenir le titre de
DOCTEUR de SPECIALITE en MATHEMATIQUES
(mention MATHEMATIQUES PURES)

par

Maryse TOMMASINI



Sur la Théorie des Fonctions Sphériques

Soutenue le 4 juin 1966 devant le Commission d'Examen :

M. DELSARTE Président

M. TAKAHASHI)
M. EYMARD (Examineurs

UNIVERSITE de NANCY - FACULTE des SCIENCES

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - URION - ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. CROZE - RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JULY -
LAPORTE - EICHHORN - GODEMENT - DUBREUIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMANN -
LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPPELLE -
GUERIN - WAHL.

Maîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET.

PROFESSEURS

MM.

URION	Chimie biologique	* MALAPRADE	Chimie
DELSARTE	Analyse supérieure	MANGENOT	Botanique
ROUBAULT	Géologie	GAYET	Physiologie
CAPELLE	Mécanique rationnelle	BONVALET	Mécanique appliquée
VEILLET	Biologie animale	HADNI	Physique
BARRIOL	Chimie théorique	* BASTICK	Chimie
BIZETTE	Physique	* KERN	Minéralogie
GUILLIEN	Electronique	DUCHAUFOR	Pédologie
GIBERT	Chimie physique	GARNIER	Agronomie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	* WEPPE	Minéralogie appliquée
BOLFA	Minéralogie et cristallographie	NEEL	Chimie organique industrielle
NICLAUSE	Chimie	BERNARD	Géologie appliquée
FAIVRE	Physique appliquée	* CHAMPIER	Physique
AUBRY	Chimie minérale	* GAY	Chimie biologique
COPPENS	Radiogéologie	* REGNIER	Physico-chimie
DUVAL	Chimie	STEPHAN	Zoologie
FRUHLING	Physique	* CONDE	Zoologie
HILLY	Géologie	* WERNER	Botanique
LE GOFF	Génie chimique	EYMARD	Calcul différentiel et intégral
SUHNER	Physique expérimentale	LEVISALLES	Chimie organique
CHAPON	Chimie biologique	Mme HERVE	Méthodes mathématiques de la physique
HEROLD	Chimie minérale industrielle	* GOSSE	Mécanique physique
SCHWARTZ	Exploitation minière	FELDEN	Physique

ANNEE SCOLAIRES 1965-1966

* Professeur titulaire à titre personnel

MAITRES de CONFERENCE

Mme BASTICK	Chimie M.P.C. (Epinal)	Mle HUET	Mathématiques S.P.C.N.
GUDEFIN	Physique	VIGNES	Métallurgie
RUCCI	Géologie	BALESDENT	Thermodynamique chimique appliquée
VUILLAUME	Psychophysiologie	BLAZY	Minéralogie appliquée (E.N.S.G.)
FRENTZ	Biologie animale	JANOT	Physique M.P.C. (Epinal)
HORN	Physique Propédeutique	JACQUIN	Pédologie et chimie agricole
LAFON	Physique (I.S.I.N.)	MAINARD	Physique M.G.P.
MARI	Chimie (I.S.I.N.)	CACHAN	Entomologie appliquée (E.N.S.A.)
AUROUZE	Géologie	MARTIN	Chimie M.P.C.
DEVIOT	Physique du solide	PAULMIER	Mécanique expérimentale
FLECHON	Physique M.P.C.		

N....	Probabilités et statistiques
N....	Mécanique (I.S.I.N.)
N....	Mathématiques
N....	Génie chimique
N....	Mathématiques M.P.C.
N....	Mathématiques S.P.C.N.
N....	Mathématiques appliquées
N....	Mécanique des fluides (I.S.I.N.)
N....	Physiologie animale

-:-:-:-

TABLE des MATIERES

Introduction.

Première Partie. Fonctions sphériques et représentations unitaires de classe χ des groupes localement compacts.

- | | |
|--|--------|
| § 1. - Rappels des notations et des définitions. | - 2 - |
| § 2. - Définition des fonctions sphériques et des représentations de classe χ par rapport à un sous-groupe compact. | - 4 - |
| § 3. - Cas des groupes compacts. | - 10 - |
| § 4. - Cas de classe 1 . | - 15 - |

Deuxième Partie. Application au groupe des rotations $SO(n)$.

- | | |
|---|--------|
| § 5. - Calcul des fonctions sphériques zonales ;
Théorème de Hecke. | - 17 - |
| § 6. - Théorème de Herglotz concernant les fonctions
sphériques de dimension 3 . | - 29 - |

Bibliographie.

INTRODUCTION

Le but de la première partie de ce travail est d'exposer dans un cadre un peu plus général des résultats connus sur les fonctions sphériques et les représentations unitaires d'un groupe localement compact G par rapport à un sous-groupe compact H , du point de vue de R. Godement ([4], où le cas de classe 1 est considéré) ; nous considérons en effet le cas où H possède des caractères χ tels que l'algèbre (de convolution) A^χ des fonctions continues $f(g)$ sur G vérifiant $f(hgh') = \overline{\chi(h)} f(g) \overline{\chi(h')}$ quels que soient $h, h' \in H$, est commutative. Ceci s'applique par exemple au cas du groupe modulaire $SL(2, \mathbb{Z})$ (voir [10]).

Nous citerons ensuite quelques propriétés relatives au cas où G est compact, en vue des applications au groupe des rotations, qui seront données dans la deuxième partie ; plus précisément nous donnerons, du point de vue de la théorie des représentations, des démonstrations d'un théorème de Hecke sur les équations intégrales invariantes sphériques (théorème (5,24) du § 5), et d'un théorème de Herglotz sur la transformation des fonctions sphériques harmoniques classiques sur la sphère S^2 dans $\mathbb{R}^3$ (§ 6).

Nous tenons à exprimer notre vive gratitude à Monsieur TAKAHASHI, qui a eu l'idée de ce travail, et dont les nombreux conseils nous ont été de la plus grande utilité lors de sa mise en forme.

*
* *

Première partie : Fonctions sphériques et représentations unitaires de classe χ
des groupes localement compacts.

§ 1. - Rappelons tout d'abord quelques définitions générales sur les représentations. Pour les démonstrations des résultats énoncés, le lecteur se reportera à [2,7].

Soit G un groupe localement compact unimodulaire, soit dg sa mesure de Haar. Désignons par $L(G)$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des fonctions continues à valeurs complexes et à support compact sur G , munie du produit de convolution défini par la formule :

$$(1;1) \quad \varphi * \psi(g) = \int_G \varphi(gh^{-1}) \psi(h) dh \quad \text{pour } \varphi, \psi \in L(G).$$

Rappelons que sur cette algèbre, on définit une involution en posant :
 $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$.

Désignons par $L^p(G)$ l'espace de Banach des fonctions de puissance p -ième intégrable (on rappelle que $L^2(G)$ est un espace de Hilbert).

On notera $L^\infty(G)$ l'espace de Banach des fonctions essentiellement bornées sur G .

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soit A une algèbre associative sur $\mathbb{C}$.

(1,2) Définitions : une représentation du groupe G (resp. de l'algèbre A) dans $\mathcal{H}$ est un homomorphisme du groupe G (resp. de l'algèbre A) dans le groupe des éléments inversibles de l'algèbre des opérateurs linéaires dans $\mathcal{H}$ (resp. dans cette algèbre).

Supposons que $\mathcal{H}$ soit un espace de Hilbert, G un groupe topologique, et A une algèbre de Banach involutive. Une représentation unitaire de G (resp. de A) dans $\mathcal{H}$ est une représentation T dans $\mathcal{H}$ telle que, pour tout $g \in G$ (resp. pour tout $f \in A$).

1) T_g est borné et, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, l'application $g \mapsto T_g \xi$ est continue (resp. T_f est borné, et $f \mapsto T_f \xi$ est continue).

2) T_g est unitaire (resp. $T_f^* = T_f^*$).

Deux représentations unitaires de G , T_1 et T_2 dans des espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont dites unitairement équivalentes s'il existe une isométrie v de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$ tel que $v \circ T_1 = T_2 \circ v$.

(1,3) Remarque : toute représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ s'étend en une représentation unitaire de l'algèbre $L(G)$ dans $\mathcal{H}$, par la formule

$$T_f \xi = \int_G f(g) T_g \xi dg.$$

La dimension de T est par définition la dimension de $\mathcal{H}$.

On dit qu'un sous-espace $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ est stable pour la représentation T si $T_g \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, pour tout $g \in G$ (définition analogue dans le cas d'une algèbre).

Rappelons que toute représentation unitaire T est semi-simple, c'est-à-dire que pour tout sous-espace fermé $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ stable pour T , il existe dans $\mathcal{H}$ un supplémentaire topologique de $\mathcal{M}$ stable pour T (à savoir son orthogonal).

On dit qu'une représentation unitaire T est irréductible si elle possède une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- i) aucun sous-espace fermé non trivial de $\mathcal{H}$ n'est stable pour T ;
- ii) le sous-espace engendré par les éléments T_g , $g \in G$, est fortement dense dans l'algèbre des opérateurs linéaires de $\mathcal{H}$;
- iii) tout opérateur linéaire borné commutant à tout T_g , $g \in G$, est scalaire.

On dit qu'un sous-espace $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ est irréductible s'il est stable pour la représentation T et si la restriction de T à $\mathcal{M}$ est irréductible.

Rappelons enfin ce dernier résultat :

(1,4) une représentation unitaire T de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est irréductible si et seulement si la représentation correspondante (définie par (1,3)) de l'algèbre $L(G)$ l'est.

*
* *

§ 2. - Soit maintenant H un sous-groupe compact de G , et χ un caractère de ce sous-groupe, c'est-à-dire un homomorphisme continu de H dans $\mathbb{C}$. Soit dh la mesure de Haar normélisée de H (i.e. $\int_H dh = 1$).

(2,1) Définition : on notera A^χ la sous-algèbre de $L^1(G)$ formée des fonctions φ telles que :

$$\varphi(hgh') = \overline{\chi(h)} \varphi(g) \overline{\chi(h')} \quad \text{pour tout } h, h' \in H \\ g \in G.$$

Dans tout ce chapitre, on supposera A^χ commutative.

(2,2) Définition : une fonction f de $L^\infty(G)$ est dite sphérique de classe χ (par rapport à H) si elle est non nulle et vérifie les deux assertions suivantes :

- i) $f(hgh') = \overline{\chi(h)} f(g) \overline{\chi(h')}$ pour tout $g \in G$, h et $h' \in H$;
- ii) l'application $\varphi \mapsto f(\varphi) = \int_G \varphi(g) \overline{f(g)} dg$ est un caractère de l'algèbre A^χ .

Remarque : ii) équivaut à l'équation fonctionnelle (cf. [5])

$$\int_H f(ghg'h^{-1}) dh = f(g) f(g') \quad \text{pour tout } g, g' \in G.$$

(2,3) Définition : on dit qu'une représentation unitaire $(T, \mathcal{H})$ de G est de classe χ (par rapport à H) s'il existe un vecteur non nul, totalisateur, $\xi_0 \in \mathcal{H}$ tel que $T_h \xi_0 = \chi(h) \xi_0$ pour tout $h \in H$.

Remarques :

1) "totalisateur" signifie que $\mathcal{H}$ est engendré par les vecteurs de la forme $T_g \xi_0$, $g \in G$.

2) cette définition signifie que la restriction de la représentation T au sous-groupe H "contient" la représentation χ de dimension 1 dans le sous-espace engendré par ξ_0 .

Nous allons établir quelques résultats reliant entre elles ces deux notions. On sait que, prenant un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$, la fonction continue $\mathcal{E}_\xi(g) = (\xi | T_g \xi)$ est de type positif ; réciproquement, toute fonction continue de type positif, non nulle, s'écrit sous cette forme, et si on impose à ξ d'être totalisateur, la représentation T est entièrement déterminée, à une équivalence unitaire près, par cette fonction. (cf. [2], [7]).

On a de plus la proposition :

(2,4)

la fonction $\mathcal{E}_\xi$ satisfait à (2,2), i) si et seulement si ξ est tel que $T_h \xi = \chi(h) \xi$ pour tout $h \in H$.

Démonstration :

La condition est suffisante ; en effet,

$$\begin{aligned}\xi_{\xi}(hgh') &= (\xi | T_{hgh'} \xi) = (\xi | T_h T_g T_{h'} \xi) = (T_{h^{-1}} \xi | T_g T_{h'} \xi) \\ &= (\overline{\chi(h)} \xi | T_g \chi(h') \xi) = \overline{\chi(h)} (\xi | T_g \xi) \overline{\chi(h')} \\ &= \overline{\chi(h)} \xi_{\xi}(g) \overline{\chi(h')} \quad \text{quels que soient } h, h' \in H, g \in G.\end{aligned}$$

La condition est nécessaire ; supposons que

$$\xi_{\xi}(hgh') = \overline{\chi(h)} \xi_{\xi}(g) \overline{\chi(h')} \quad \text{quels que soient } h, h' \in H, g \in G.$$

Soit : $(\xi | T_{hgh'} \xi) = \overline{\chi(h)} (\xi | T_g \xi) \overline{\chi(h')}$

faisons alors $h' = e$; on obtient :

$$(T_{h^{-1}} \xi | T_g \xi) = (\overline{\chi(h)} \xi | T_g \xi)$$

soit

$$(T_h \xi - \chi(h) \xi | T_g \xi) = 0 \quad \text{pour tout } h \in H, g \in G.$$

Or ξ est totalisateur, donc les vecteurs $T_g \xi$ engendrent $\mathcal{H}$ quand g parcourt G . On a donc

$$T_h \xi = \chi(h) \xi \quad \text{pour tout } h \in H.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

(2,5)

Soit $(T, \mathcal{H})$ une représentation unitaire du groupe G , de classe χ par rapport à H . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $(T, \mathcal{H})$ est irréductible ;
- ii) le sous-espace $\mathcal{H}^0$ des vecteurs ξ tels que $T_h \xi = \chi(h) \xi$ pour tout $h \in H$ est de dimension 1 ;
- iii) la fonction $\xi_{\xi}(g) = (\xi | T_g \xi)$ est sphérique de classe χ .

Démonstration :

Supposons que $\mathcal{H}^0$ soit de dimension 1 .

Soit $\xi \in \mathcal{H}^0$, et soit A un opérateur sur $\mathcal{H}$ commutant à chaque opérateur T_g , $g \in G$. Posons $\eta = A \xi$. On a alors :

$$T_h \eta = T_h A \xi = A T_h \xi = \chi(h) A \xi = \chi(h) \eta \quad \text{pour tout } h \in H .$$

Donc η est de la forme $C\xi$, où C est scalaire ; alors, pour $g \in G$, on a : $A(T_g \xi) = T_g (A \xi) = C(T_g \xi)$ ce qui signifie que A est scalaire, puisque le vecteur ξ est totalisateur. Par conséquent la représentation T est irréductible.

Pour démontrer la réciproque, remarquons que l'opérateur :

$$T_{\bar{\chi}} = \int_H \overline{\chi(h)} T_h \, dh$$

est le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur le sous-espace $\mathcal{H}^0$, et on a par suite :

$$\xi \in \mathcal{H}^0 \iff T_{\bar{\chi}} \xi = \xi .$$

De plus on a :

$$\varphi \in A^\chi \iff \bar{\chi} * \varphi * \bar{\chi} = \varphi .$$

On a alors $T_\varphi \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^0$ pour $\varphi \in A^\chi$; en effet, on a :

$$T_{\bar{\chi}} T_\varphi \xi = T_{\bar{\chi} * \varphi} \xi = T_\varphi \xi \quad \text{pour } \xi \in \mathcal{H}^0 .$$

Si maintenant T est irréductible en tant que représentation de G , elle l'est en tant que représentation de l'algèbre $L(G)$ (1,4). D'après ce qui précède, T_f laisse stable $\mathcal{H}^0$ si $f \in A^\chi \cap L(G)$, d'où une représentation de l'algèbre $A^\chi \cap L(G)$, qui est encore irréductible ; en effet, soit B un opérateur linéaire borné quelconque dans $\mathcal{H}^0$; $BT_{\bar{\chi}}$ peut être approché fortement par des opérateurs T_f , $f \in L(G)$;

par suite B peut être approché par les restrictions de $T_{\bar{\chi} * f * \bar{\chi}}$ à $\mathcal{H}^0$, ce qui démontre l'irréductibilité, car la représentation est unitaire. Comme $A^X \cap L(G)$ est commutative, $\dim \mathcal{H}^0 = 1$.

Pour démontrer l'équivalence de ii) et iii), montrons d'abord que si $\xi(g) = (\xi | T_g \xi)$ est sphérique de classe χ , on a :

$$(T_\phi \xi | T_\psi \xi) = (T_\phi \xi | \xi) (\xi | T_\psi \xi) \quad \text{pour tout } \phi, \psi \in A^X \cap L(G).$$

On a en effet :

$$\begin{aligned} (T_\phi \xi | T_\psi \xi) &= (T_{\tilde{\psi} * \phi} \xi | \xi) = \int_G \tilde{\psi} * \phi(g) (T_g \xi | \xi) dg \\ &= \int_G \tilde{\psi} * \phi(g) \overline{\xi_\xi(g)} dg = \int_G \tilde{\psi}_\xi(g) \overline{\xi_\xi(g)} dg \int_G \phi(g) \overline{\xi_\xi(g)} dg \\ &\text{car } \phi, \psi \in A^X \text{ et } \phi \mapsto \int \phi(g) \overline{\xi_\xi(g)} dg \text{ est un} \\ &\text{homomorphisme.} \end{aligned}$$

$$= (T_{\tilde{\psi}} \xi | \xi) (T_\phi \xi | \xi) = (T_\phi \xi | \xi) (\xi | T_\psi \xi).$$

On en déduit que $\mathcal{H}^0$ est de dimension 1. En effet, soit $\mathcal{H}'$ le sous-espace des $T_f \xi$, $f \in L(G)$; il est partout dense dans $\mathcal{H}$, donc tout élément η de $\mathcal{H}$ est de la forme $\lim_n T_{f_n} \xi$, avec $f_n \in L(G)$.

En particulier, pour un élément $\eta \in \mathcal{H}^0$, on peut supposer que les f_n satisfont à la relation $\bar{\chi} * f_n * \bar{\chi} = f_n$, car $\eta = T_{\bar{\chi}} \eta = \lim_n T_{\bar{\chi}} T_{f_n} T_{\bar{\chi}} \xi = \lim_n T_{\bar{\chi} * f_n * \bar{\chi}} \xi$.

On peut donc supposer que $f_n \in A^X \cap L(G)$.

On a alors, pour f quelconque $\in L(G)$,

$$\begin{aligned}
 (\eta | T_f \xi) &= \lim_n (T_{f_n} \xi | T_f \xi) = \lim_n (T_{\bar{\chi}} T_{f_n} \xi | T_f T_{\bar{\chi}} \xi) \\
 &= \lim_n (T_{f_n} \xi | T_{\bar{\chi} * f * \bar{\chi}} \xi) \\
 &= \lim_n (T_{f_n} \xi | \xi) (\xi | T_{\bar{\chi} * f * \bar{\chi}} \xi) \\
 &= (\eta | \xi) (\xi | T_f \xi) = ((\eta | \xi) \xi | T_f \xi),
 \end{aligned}$$

soit $\eta = (\eta | \xi) \xi$, donc notre assertion, puisque ξ est totalisateur.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{H}^0$ est de dimension 1. Alors, quelle que soit $\varphi \in A^\chi$, on a $T_\varphi \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^0$, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in \mathcal{H}^0$, il existe une fonction λ telle que $T_\varphi \xi = \lambda(\varphi) \xi$, ce qui donne, en faisant le produit scalaire par ξ :

$$\lambda(\varphi) = (T_\varphi \xi | \xi) = \int_G \varphi(g) \overline{\xi_\xi(g)} dg.$$

Or on sait que $T_{\varphi * \psi} \xi = \lambda(\varphi * \psi) \xi = T_\varphi T_\psi \xi = \lambda(\varphi) \lambda(\psi) \xi$; $\varphi \mapsto \lambda(\varphi)$ est donc un homomorphisme, de plus unitaire, de A^χ . En regroupant ce résultat avec (2,4), on obtient l'équivalence des propriétés ii) et iii), ce qui achève notre démonstration.

(2,6) La fonction sphérique $\xi(g) = (\xi | T_g \xi)$ caractérise la représentation unitaire irréductible T (à une équivalence unitaire près) ; on l'appellera fonction sphérique associée à la représentation $(T, \mathcal{H})$ de classe χ par rapport à H .

*
* *

§ 3. - Nous allons maintenant démontrer des résultats particuliers au cas où le groupe G est compact. On supposera la mesure dg normalisée.

On sait que toute représentation unitaire irréductible de G est de dimension finie.

Soit $\mathcal{H}_\chi$ le sous-espace de $L^2(G)$ formé par les fonctions f telles que $f(gh) = \chi(h) f(g)$ pour $h \in H$, $g \in G$.

C'est un sous-espace stable pour la représentation régulière à gauche de G dans $L^2(G)$. On a alors la proposition :

(3,1) Soit $(T, \mathcal{H})$ une représentation unitaire irréductible d'un groupe compact G , de classe χ par rapport à un sous-groupe H ; alors il existe un sous-espace irréductible V de $\mathcal{H}_\chi$ tel que la représentation $(T, \mathcal{H})$ soit unitairement équivalente à la restriction à V de la représentation régulière à gauche de G .

On rappelle que la représentation régulière à gauche de G est donnée par :

$$(3,2) \quad (\chi(s)f)(g) = f(s^{-1}g) \quad \text{pour tout } f \in L^2(G), \quad s \in G.$$

Soit n la dimension de la représentation T . T est de classe χ donc il existe un vecteur totalisateur $\xi_0 \in \mathcal{H}$ tel que $T_h \xi_0 = \chi(h) \xi_0$ pour tout $h \in H$. Supposons que $\|\xi_0\| = 1$.

Considérons l'application U de $\mathcal{H}$ dans $L^2(G)$ définie par la formule :

$$\xi \mapsto f_\xi(g) = \sqrt{n} (\xi | T_g \xi_0).$$

f_ξ est continue et appartient à $L^2(G)$. On a :

$$\begin{aligned} f_{T_g \xi}(s) &= \sqrt{n} (T_g \xi | T_s \xi_0) = \sqrt{n} (\xi | T_{g^{-1}s} \xi_0) = f_\xi(g^{-1}s) \\ &= \chi(g) f_\xi(s) \end{aligned}$$

donc $U \circ T_g = \chi(g) \circ U$ pour tout $g \in G$.

En outre :

$$\begin{aligned}\|f_\xi\|_2^2 &= \int_G |f_\xi(g)|^2 dg = \int_G n |(\xi | T_g \xi_0)|^2 dg \\ &= n \cdot \frac{1}{n} \|\xi_0\|^2 \|T\|^2 \|\xi\|^2 = \|\xi\|^2,\end{aligned}$$

en vertu des relations d'orthogonalité. Donc U est une isométrie de $\mathcal{H}$ sur le sous-espace V de $L^2(G)$ défini par :

$$V = \{f_\xi ; \xi \in \mathcal{H}\}.$$

De plus on a :

$$f_\xi(sh) = \sqrt{n} (\xi | T_{sh} \xi_0) = \overline{\chi(h)} \sqrt{n} (\xi | T_s \xi_0) = \overline{\chi(h)} f_\xi(s)$$

pour tout $s \in G$, $h \in H$, $\xi \in \mathcal{H}$.

On voit donc que $V \subset \mathcal{H}$, ce qui démontre la proposition.

La réciproque est encore vraie ; de façon plus précise, on a la proposition suivante :

(3,3) Si $\mathcal{M}$ est un sous-espace irréductible de $\mathcal{H}_\chi$, alors la représentation $(\gamma, \mathcal{M})$ est de classe χ par rapport à H .

En effet, on sait que $\mathcal{M}$ est formé de fonctions continues (cf. [7]).

Il contient par conséquent une base orthonormée $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$ de fonctions continues sur G , et telles que $f_i(gh) = \overline{\chi(h)} f_i(g)$ pour tout $h \in H$. Posons :

$$\gamma(s) f_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}(s) f_i.$$

La matrice (c_{ij}) est unitaire, donc $c_{ij}(s^{-1}) = \overline{c_{ji}(s)}$. On a alors :

$$f_j(s) = (\gamma(s^{-1})f_j)(e) = \sum_{i=1}^n c_{ij}(s^{-1}) f_i(e),$$

ce qui montre que les nombres complexes $f_i(e)_{i=1, \dots, n}$ ne sont pas tous nuls simultanément, sinon f_j serait identiquement nulle pour $j = 1, \dots, n$.

Soit $f_0 = \sum_{i=1}^n \overline{f_i(e)} f_i$; c'est un vecteur non nul de $\mathcal{M}$, et on a :

$$\begin{aligned} \gamma(h) f_0 &= \sum_{i=1}^n \overline{f_i(e)} \gamma(h) f_i = \sum_{i=1}^n \overline{f_i(e)} \sum_{j=1}^n c_{ji}(h) f_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \overline{c_{ij}(h)} f_i(e) \right) f_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n c_{ij}(h^{-1}) f_i(e) \right) f_j \\ &= \sum_{j=1}^n \overline{(\gamma(h^{-1}) f_j)(e)} f_j = \sum_{j=1}^n \overline{f_j(h)} f_j, \end{aligned}$$

or $f_j(h) = \overline{\chi(h)} f_j(e)$, donc

$$\gamma(h) f_0 = \sum_{j=1}^n \chi(h) \overline{f_j(e)} f_j = \chi(h) f_0, \quad \text{CQFD.}$$

(3,1) et (3,3) caractérisent les représentations unitaires irréductibles de classe χ par rapport à H .

(3,4) Remarque :

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace irréductible de $\mathcal{H}_\chi$; comme on vient de le voir, la représentation $(\gamma, \mathcal{M})$ est de classe χ par rapport à H , donc le sous-espace $\mathcal{M}^0$ des ξ tels que $\gamma(h)\xi = \chi(h)\xi$, pour tout $h \in H$, est de dimension 1 ; on peut choisir une base orthonormée $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de $\mathcal{M}$ telle que $f_1 \in \mathcal{M}^0$; on a alors :

$$f_i(s) = \sum_{j=1}^n f_j(e) \overline{c_{ij}(s)}, \text{ si } c_{ij}(s) = (\gamma(s) f_j | f_i) ;$$

d'autre part, on a vu que $\sum_{i=1}^n \overline{f_i(e)} f_i$ est dans $\mathcal{M}^0$; on a donc :

$$\sum_{i=1}^n \overline{f_i(e)} f_i = \lambda f_1, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

d'où $f_i(e) = 0$ pour $i = 2, \dots, n$;

par conséquent, on a :

$$f_i(s) = f_1(e) \overline{c_{i1}(s)} ;$$

en calculant la norme, on trouve (la relation d'orthogonalité donne $\|c_{ij}\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$)

$$\text{que } |f_1(e)| = \sqrt{n} ;$$

on voit donc que l'ensemble

$$\{ \sqrt{n} \overline{c_{i1}(g)} ; i = 1, \dots, n \}$$

est une base orthonormée de $\mathcal{M}$, telle que $\sqrt{n} c_{11} \in \mathcal{M}^0$.

(3,5) Corollaire. - La fonction sphérique $\xi(g)$ associée à $(\gamma, \mathcal{M})$ est elle-même dans $\mathcal{M}^0$; on a donc :

$$\xi(g) = (\xi | \xi) \xi(g), \quad \text{si } \xi \in \mathcal{M}^0, \quad \|\xi\| = 1.$$

En effet, si $\xi \in \mathcal{M}^0$, $\|\xi\| = 1$, $\xi = \lambda \sqrt{n} \overline{c_{11}}$, avec $|\lambda| = 1$; on a donc

$$\begin{aligned} \xi(g) &= (\xi | \gamma(g)\xi) = n(\overline{c_{11}} | \gamma(g) \overline{c_{11}}) \\ &= n \int_G \overline{c_{11}(s)} c_{11}(\bar{g}^{-1} s) ds = n \sum_{i=1}^n \int_G \overline{c_{11}(s)} c_{i1}(s) ds \cdot c_{1i}(\bar{g}^{-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \delta_{1i} \overline{c_{i1}(g)} = \overline{c_{11}(g)}, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\xi \in \mathcal{M}^0$.

En vertu de l'équation fonctionnelle de ξ , on a :

$$(3,6) \quad \xi * \xi = \|\xi\|^2 \xi.$$

En effet, on a :

$$\int_G \int_H \xi(\text{shth}^{-1}) d\text{h} \cdot \overline{\xi(t)} dt = \xi(s) \int_G \xi(t) \overline{\xi(t)} dt ;$$

or le premier membre donne $\xi * \tilde{\xi}(s)$, en faisant le changement de variable :
 $t \rightarrow h^{-1}th$; comme on a $\xi = \tilde{\xi}$, on trouve (3,6) .

Ceci a une conséquence intéressante :

(3,7) Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace irréductible de $\mathcal{H}_\chi$, et soit ξ la fonction sphérique associée à $(\gamma, \mathcal{M})$. On a alors :

$$\mathcal{M} = \{f * \xi ; f \in L(G)\} .$$

En effet, notons $\mathcal{M}_\xi$ le second membre ; c'est un sous-espace de $\mathcal{M}$ car $f * \xi = \gamma(f)\xi$, $\xi \in \mathcal{M}$; il est non nul, car $\xi = \|\xi\|^{-2} \xi * \xi \in \mathcal{M}_\xi$; il est stable pour γ , donc il est égal à $\mathcal{M}$, à cause de l'irréductibilité.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

(3,8) Pour qu'une représentation unitaire irréductible (de G) soit de classe χ (par rapport à H), il faut et il suffit qu'elle soit unitairement équivalente à une sous-représentation de $(\gamma, \mathcal{H}_\chi)$. On a de plus

$$\mathcal{H}_\chi = \bigoplus_{\xi} \mathcal{M}_\xi , \text{ somme hilbertienne, } \xi \text{ parcourant l'ensemble des fonctions sphériques de classe } \chi \text{ par rapport à } H ,$$

$$\text{et } \mathcal{M}_\xi = \{f * \xi ; f \in L(G)\} .$$

(3,9) Définition :

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace irréductible de $\mathcal{H}_\chi$; soit χ le caractère de la représentation irréductible $(\gamma, \mathcal{M})$; les éléments de $\mathcal{M}$ sont alors appelés "fonctions sphériques de classe χ (par rapport à H) et de type χ " .

Remarquons que cette terminologie ne contredit la définition précédente (2,2), à cause de (3,5).

Lorsque $G = SO(n)$, $H = SO(n-1)$ (plongé dans G convenablement), on verra que les fonctions sphériques de classe 1 par rapport à H ne sont autre que les fonctions sphériques au sens classique.

*
* *

§ 4. - Cas du caractère trivial $\chi \equiv 1$ du sous-groupe H :

Les fonctions définies sur l'espace homogène $X = G/H$ peuvent être identifiées aux fonctions définies sur G et invariantes par les translations à droite (ou encore constantes dans chaque classe gH de G suivant H). On sait de plus qu'il existe une mesure invariante (pour l'action de G) $d\mu(x)$ sur X , telle que

$$\int_G f(g) dg = \int_X d\mu(\bar{g}) \int_H f(gh) dh \quad (\text{cf. [11]}) ;$$

par conséquent, l'espace hilbertien $L^2(X, \mu)$ s'identifie au sous-espace $\mathcal{H}_1$ correspondant au caractère trivial $\chi \equiv 1$. La représentation correspondante dans $L^2(X)$ est la représentation quasi-régulière définie par

$$(\chi(s)f)(x) = f(s^{-1}x) \quad \text{pour } s \in G, x \in X, f \in L^2(X, \mu).$$

Si on traduit les résultats obtenus précédemment, on a les propositions suivantes (en supposant toujours que l'algèbre correspondante A^1 est commutative) :

(4,1) Pour qu'une représentation unitaire irréductible de G soit de classe 1 par rapport à H , il faut et il suffit qu'elle soit unitairement équivalente à une sous-représentation de la représentation quasi-régulière $(\chi, L^2(X))$.

(4,2) On a : $L^2(X) = \bigotimes_{\chi \in I} S_{\chi}$, où I désigne l'ensemble des caractères des représentations unitaires irréductibles de classe 1 , et S_{χ} désigne le sous-espace des fonctions sphériques de classe 1 et de type χ .

Les fonctions sphériques f (de classe 1 par rapport à H) telles que $\gamma(h)f = f$ sont appelées zonales. Les fonctions sphériques associées aux représentations unitaires irréductibles de classe 1 sont donc zonales.

*
* *

Deuxième Partie : Application au groupe $SO(n)$.

§ 5. - Théorème de Hecke.

Dans tout ce paragraphe, le groupe G sera le groupe compact $SO(n)$ des matrices orthogonales de déterminant 1, d'ordre n .

Alors $SO(n-1)$ s'identifie à un sous-groupe fermé H de G grâce à l'application $h \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$. Nous allons déterminer les représentations irréductibles de G qui sont de classe 1 par rapport à H ; en corollaire, nous démontrerons de notre point de vue un résultat classique dû à Hecke (voir [6]) .

-:-:-

L'espace homogène $X = G/H = \{sH ; s \in G\}$ s'identifie à la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$; en effet, si $g = (g_{ij}) \in G$, on fait correspondre à la classe gH le point $x = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix}$ de S^{n-1} .

$$\text{On a alors } gH = g'H \iff g^{-1}g' \in H \iff \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_{11} \\ g'_{21} \\ \vdots \\ g'_{n1} \end{pmatrix} ,$$

par conséquent l'application est bijective ; elle est en outre bicontinue (c'est même un isomorphisme de variétés analytiques) .

Démontrons d'abord que l'algèbre A^1 définie en $(2,1)$ est commutative . Pour cela, on a besoin du lemme :

tout élément g de $SO(n)$ - $n \geq 3$ - s'écrit sous la forme $g = h u_{\theta} h'$, où h et h' sont des éléments de $SO(n-1)$, et où u_{θ} est une matrice de la forme :

(5,1)

$$u_{\theta} = \left(\begin{array}{cc|c} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1_{n-2} \end{array} \right) \quad 0 \leq \theta < \pi ;$$

θ étant défini par $g_{11} = \cos \theta$, alors g n'appartient pas à H si et seulement si θ est strictement positif.

Soit θ tel que $g_{11} = \cos \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$) ; alors $\sin \theta$ est égal à $(1 - g_{11}^2)^{1/2}$ soit $(g_{21}^2 + g_{31}^2 + \dots + g_{n1}^2)^{1/2}$, donc est positif ou nul ; par suite on peut trouver $(n-1)$ vecteurs normés deux à deux orthogonaux

$\vec{h}_i = (h_{i2}, h_{i3}, \dots, h_{in})_{i=2, \dots, n}$ tels que :

$$(g_{21}, g_{31}, \dots, g_{n1}) = \sin \theta (h_{22}, h_{23}, \dots, h_{2n}) .$$

La matrice $h = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \vec{0} \\ 0 & \vec{h}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vec{h}_n \end{array} \right)$ est orthogonale, et le produit hg est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & * & \dots & * \\ \sin \theta & * & \dots & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & & * \end{pmatrix}$$

En multipliant à droite, on peut trouver $h' \in SO(n-1)$ tel que hgh' soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & \dots & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \dots & * \end{pmatrix} ,$$

d'où il résulte que $u_{-\theta}(hgh') \in SO(n-1)$, donc $g = h^{-1}u_{\theta} h'' h'^{-1}$, où h, h' et h'' appartiennent à $SO(n-1)$, CQFD.

On est alors en mesure d'énoncer le résultat :

(5,2) L'algèbre A^1 relative à $SO(n)$ et $SO(n-1)$ est commutative.

Si on pose $\check{f}(x) = f(x^{-1})$, l'application $f \mapsto \check{f}$ est une involution sur $L^1(G)$. Il suffit donc de démontrer que si $f \in A^1$, on a $f = \check{f}$. Pour cela, il suffit de montrer que $f(u_{\theta}^{-1}) = f(u_{\theta})$, pour tout θ .

Or il existe $h_0 \in H$ tel que $u_{\theta}^{-1} = u_{-\theta} = h_0 u_{\theta} h_0$ pour tout θ : par exemple

$$h_0 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & & 1_{n-3} \end{array} \right).$$

-:-:-

On peut donc écrire, d'après (4,2) :

(5,3) $L^2(S^{n-1}) = \bigoplus_{\chi \in I} S_{\chi}$,
où (χ, S_{χ}) est irréductible, et où I désigne l'ensemble des caractères de représentations irréductibles de classe 1 par rapport à H .

Pour chaque caractère $\chi \in I$, il n'existe qu'une seule fonction sphérique zonale, à un facteur constant près. Nous allons la calculer explicitement.

Pour cela nous allons introduire les coordonnées sphériques dans S^{n-1} par les formules :

$$(5,4) \quad \begin{cases} x_1 = \cos \theta_1 \\ x_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \varphi \\ x_n = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \varphi \end{cases}$$

où $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Une fonction f définie sur G et invariante à droite par les éléments de H , c'est-à-dire une fonction définie sur S^{n-1} , s'écrira alors :

$$f(g) = f(g_{11}, g_{21}, \dots, g_{n1}) = f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$$

lorsque $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$ sont les coordonnées sphériques de $(g_{11}, g_{21}, \dots, g_{n1})$.

Si de plus f est invariante à gauche par les éléments de H , $f(g)$ ne dépend que de $g_{11} = \cos \theta_1$ (cela justifie la définition de fonction sphérique zonale).

Si on note $\mathfrak{so}(n)$ l'algèbre de Lie de $SO(n)$ (en ce qui concerne la théorie des algèbres de Lie, on consultera [8]), elle est formée des matrices réelles anti-symétriques ; par suite, une base de $\mathfrak{so}(n)$ est donnée par les matrices suivantes

$$X_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

où E_{ij} désigne la matrice (e_{rs}) : $e_{rs} = \delta_{ri} \delta_{sj}$ (notation de Kronecker).

On a :

$$(5,5) \quad [X_{ij}, X_{rs}] = \delta_{jr} X_{is} + \delta_{js} X_{ri} - \delta_{ir} X_{js} - \delta_{js} X_{ir}.$$

Désignons par $\mathcal{D}(S^{n-1})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions indéfiniment différentiables sur S^{n-1} .

On sait que $S_\chi \subset \mathcal{D}(S^{n-1})$ pour tout $\chi \in I$ (cf. [5]).

Pour tout $X \in \mathfrak{so}(n)$, l'opérateur $d\chi(X)$ - cette notation désigne la représentation infinitésimale associée à χ - est défini dans $\mathcal{D}(S^{n-1})$, et on sait, d'après la théorie des algèbres de Lie, que l'opérateur de Casimir :

$$\Gamma = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d\chi(X_{ij}))^2$$

commute à tout $d\chi(X)$, pour $X \in \mathfrak{so}(n)$; par conséquent, sur chaque sous-espace

S_χ , Γ est scalaire, soit égal à $c(\chi)$, et $S_\chi \subset \mathcal{D}_{c(\chi)}$, où $\mathcal{D}_\lambda$ désigne le sous-espace formé des fonctions propres de Γ à valeur propre λ :

$$(5,6) \quad \mathcal{D}_\lambda = \{f \in \mathcal{D}(S^{n-1}) ; \Gamma f = \lambda f\}.$$

Les sous-espaces $\mathcal{D}_\lambda$ sont caractérisés par le lemme

$$(5,7) \quad \boxed{\mathcal{D}_\lambda \text{ est différent de } \{0\} \text{ si et seulement si } \lambda = p(p+n-2) \text{ où } p \text{ est entier } \geq 0. \text{ Le sous-espace } \mathcal{D}_{p(p+n-2)} \text{ est irréductible.}}$$

En effet, comme Γ commute à tout $d\chi(X)$, $X \in \mathfrak{so}(n)$, l'adhérence $\overline{\mathcal{D}_\lambda}$ de $\mathcal{D}_\lambda$ est un sous-espace stable pour χ ; il est donc somme directe hilbertienne de sous-espaces irréductibles; $\overline{\mathcal{D}_\lambda}$ sera lui-même irréductible, s'il ne contient qu'une seule fonction zonale normée.

Montrons donc que si $\mathcal{D}_\lambda \neq \{0\}$, $\lambda = p(p + n - 2)$ avec un entier $p \geq 0$, et que toute fonction sphérique zonale contenue dans $\overline{\mathcal{D}_\lambda}$ est proportionnelle à une fonction bien déterminée. Soit donc ξ une fonction zonale ; on sait qu'elle est dans $\mathcal{D}(S^{n-1})$; calculons $\Gamma \xi$:

a) pour $2 \leq i < j \leq n$, $\exp tX_{ij} \in SO(n-1)$, donc

$$d_{\delta(X_{ij})}\xi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\delta(\exp tX_{ij})\xi - \xi) = 0 ;$$

b) pour $i = 1$, $2 \leq j \leq n$, calculons $d_{\delta(X_{1j})}^2$: on a par définition

$$\begin{aligned} [d_{\delta(X_{1j})}\xi](g) &= \left[\frac{d}{dt} (\delta(\exp tX_{1j})\xi)(g) \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \xi(\exp(-tX_{1j}))(g) \right]_{t=0} ; \end{aligned}$$

comme ξ ne dépend que de g_{11} , il vient :

$$(d_{\delta(X_{1j})}\xi)(g) = \left[\frac{d}{dt} g_{11}(-t) \right]_{t=0} \frac{\partial \xi}{\partial g_{11}}(g) , \text{ avec}$$

$$g_{j1}(t) = (\exp tX_{1j})(g_{11}) = g_{11} \cos t + g_{j1} \sin t ;$$

$$\text{on a donc } d_{\delta(X_{1j})}\xi = -g_{j1} \frac{\partial \xi}{\partial g_{11}} ;$$

$$\text{Par suite, } d_{\delta(X_{1j})}^2 \xi = g_{j1}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial g_{11}^2} - g_{11} \frac{\partial \xi}{\partial g_{11}} ;$$

compte tenu de la relation

$$g_{11}^2 + g_{21}^2 + \dots + g_{n1}^2 = 1 , \text{ il en résulte que}$$

$$-\Gamma \xi = (1 - g_{11}^2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial g_{11}^2} - (n-1) g_{11} \frac{\partial \xi}{\partial g_{11}} .$$

Comme $\xi(g)$ ne dépend que de $g_{11} = \cos \theta_1$, posons :

$$\xi(g) = Z(g_{11}) ;$$

La fonction $Z(x)$ est donc solution de l'équation différentielle :

$$(5,8) \quad (1 - x^2)Z''(x) - (n-1)xZ'(x) + c(x)Z(x) = 0$$

telle que $Z(1) = 1$; on sait qu'elle n'admet des solutions bornées dans $[-1, +1]$

que si $c(x) = p(p+n-2)$, pour un entier $p \geq 0$, et alors ces solutions sont données par $c \cdot C_p^{\frac{n}{2}-1}(x)$, où $C_p^{\frac{n}{2}}(x)$ désigne le polynôme de Gegenbauer de degré p défini par la formule :

$$(5,9) \quad (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{n}{2}} = \sum_{p=0}^{\infty} C_p^{\frac{n}{2}}(x) t^p, \text{ pour } t \text{ assez petit.}$$

Remarque : pour $n = 3$, ce n'est autre que le polynôme de Legendre de degré p .

On déduit de (5,9) facilement que :

$$(5,10) \quad C_p^{\frac{n}{2}}(1) = \frac{(2 \frac{n}{2} + p)}{(2 \frac{n}{2})p!},$$

d'où :

$$(5,11) \quad \xi(g) = \frac{\Gamma(n-2)p!}{\Gamma(n-2+p)} C_p^{\frac{1}{2}(n-2)}(g_{11}).$$

$\overline{\mathcal{D}}_\lambda$ ne peut contenir qu'un seul sous-espace irréductible, c'est-à-dire est lui-même irréductible ; $\mathcal{D}_\lambda$ est donc de dimension finie, donc $\mathcal{D}_\lambda = \overline{\mathcal{D}}_\lambda$. On peut donc énoncer le résultat :

(5,12) Il existe un entier $p \geq 0$ tel que $c(x) = p(p+n-2)$ et :

$$S_x = \mathcal{D}_{p(p+n-2)} ;$$

la fonction sphérique zonale normée est donnée par la formule (5,11).

Désignons par $\mathcal{H}_p$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des polynômes homogènes harmoniques $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de degré p . Comme le laplacien Δ est invariant par rotation, on a une représentation évidente ρ de $SO(n)$ dans $\mathcal{H}_p$; elle peut être rendue unitaire par un choix convenable du produit scalaire dans $\mathcal{H}_p$.

L'application $T: P \mapsto P|S^{n-1}$ (restriction de P à S^{n-1}) est une bijection car si $f = T(P) = P|S^{n-1}$, on a :

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = r^p f\left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\right) \quad \text{avec } r = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

On a de plus $T \circ \rho(s) = \gamma(s) \circ T$, pour $s \in G$. Montrons que $T(\mathcal{H}_p) = \mathcal{S}_\chi$, pour χ tel que $c(\chi) = p(p+n-2)$. Alors la représentation $(\rho, \mathcal{H}_p)$ sera de classe 1 par rapport à H , puisque unitairement équivalente à une composante de $(\chi, L^2(S^{n-1}))$.

On connaît l'expression de Δ en coordonnées polaires $(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$ où $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$ désignent les coordonnées sphériques du point $\left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\right)$ de S^{n-1} :

$$(5,13) \quad \Delta = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Omega,$$

où Ω est un opérateur différentiel du second ordre, dépendant des variables $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi)$, de la forme suivante :

$$(5,14) \quad \Omega = \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + (n-2) \cotg \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \sum_{j=2}^{n-2} \left(\alpha_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \beta_j \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} \right) + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

α_j , β_j et γ étant des fonctions de $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$. (cf. [3])

Soit maintenant P un polynôme dans $\mathcal{H}_p$ tel que $\rho(h) \cdot P = P$ pour tout $h \in H$; alors $f = T(P) = P|S^{n-1}$ est une fonction zonale et

$$P(x_1, \dots, x_n) = r^p f\left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r}\right) = r^p f(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi), \text{ d'où}$$

$$(5,15) \quad \Delta P = p(p + n - 2)r^{n-2} f + r^{n-2} \Delta f = 0 ;$$

Comme f ne dépend que de $\cos \theta_1$, on tire de (5,14) le résultat :

$$(5,16) \quad \frac{d^2 f}{d\theta_1^2} + (n-1) \cotg \theta_1 \frac{df}{d\theta_1} + p(p + n - 2) f = 0$$

ou encore, pour $f(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) = F(\cos \theta_1) = F(x)$

$$(5,17) \quad (1 - x^2) F''(x) - (n-1)x F'(x) + p(p + n - 2) F(x) = 0 ;$$

il en résulte que $F(x) = c Z(x)$, donc $f = c\xi$, CQFD.

En résumé, on peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit p un entier ≥ 0 . Soit $S_p^{(n)} = \{f ; f = P|S^{n-1} \text{ où } P \text{ est un polynôme homogène harmonique de degré } p\}$. Alors $S_p^{(n)}$ est stable et irréductible pour la représentation quasi-régulière γ , et $L^2(S^{n-1})$ est somme directe hilbertienne des $S_p^{(n)}$, $p \geq 0$.

(5,18) Une représentation unitaire irréductible est de classe 1 par rapport à H si et seulement si elle est unitairement équivalente à une représentation $(\gamma, S_p^{(n)})$.

La fonction zonale normée $\xi_p^{(n)}$ contenue dans $S_p^{(n)}$ est donnée par la formule suivante :

$$\xi_p^{(n)}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) = \frac{\Gamma(n-2)p!}{\Gamma(p+n-2)} c_p^{\frac{n-2}{2}} (\cos \theta_1) .$$

Remarque : On peut calculer d'une façon élémentaire la dimension de $\mathcal{H}_p$, c'est-à-dire le nombre de polynômes homogènes harmoniques linéairement indépendants ; comme $\dim S_p^{(n)} = \dim \mathcal{H}_p$, il vient :

$$(5,19) \quad \dim S_p^{(n)} = (2p + n - 2) \frac{(p + n - 3)!}{(n - 2)! p!} \quad (\text{cf. } [3]).$$

-:-:-

Les fonctions de $S_p^{(n)}$ ne sont autre que les "fonctions sphériques d'ordre p et de dimension n " au sens classique. Ceci va nous permettre de démontrer un résultat dû à Hecke (cf. [6], [3]) et dont nous donnerons tout d'abord l'énoncé classique :

"Pour toute fonction $\Psi(t)$ continue d'une variable réelle, on a :

$$\int_{S^2} \Psi((x|y)) Y_p(y) d\omega(y) = Y_p(x) \cdot 2\pi \int_{-1}^{+1} \Psi(t) P_p(t) dt,$$

où x, y désignent des points de la sphère unité S^2 , ω la mesure invariante usuelle de S^2 , $(x|y)$ le produit scalaire $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ de x, y ; P_p est le polynôme de Legendre de degré p , tandis que Y_p désigne une fonction sphérique de Laplace d'ordre p ."

-:-:-

En vertu des résultats (3,6), (3,7) on voit que

$$f \in S_p^{(n)} \iff f * \xi_p = \|\xi_p\|^2 f,$$

pour $f \in L^2(S^{n-1})$; on en déduit la proposition suivante :

(5,20) Pour toute fonction biinvariante φ et pour toute $f \in S_p^{(n)}$, on a :

$$f * \varphi = \xi_p(\varphi) f.$$

En effet, on a :

$$f * \varphi = \|\xi_p\|^{-2} (f * \xi_p) * \varphi = \|\xi_p\|^{-2} f * (\xi_p * \varphi) ;$$

or :

$$\begin{aligned} \xi_p * \varphi(g) &= \int_G \xi_p(g s^{-1}) \varphi(s) ds = \int_G \xi_p(g h s^{-1}) \varphi(s) ds \\ &= \int_G \int_H \xi_p(g h s^{-1}) dh \varphi(s) ds = \xi_p(g) \int_G \xi_p(s^{-1}) \varphi(s) ds \\ &= \xi_p(\varphi) \xi_p(g) , \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement le résultat cherché.

Pour obtenir le théorème de Hecke, il suffit de traduire (5,20) en termes de fonctions définies sur S^{n-1} ; considérons en effet, un noyau continu $F(x, x')$ sur $S^{n-1} \times S^{n-1}$, invariant par les rotations, i.e tel que :

$$F(g.x, g.x') = F(x, x') , \quad \text{pour } g \in G = SO(n) .$$

Soit π l'application canonique de G sur $S^{n-1} = G/H$. Alors la fonction $\tilde{\Phi}$ définie par $\tilde{\Phi}(s, s') = F(\pi(s), \pi(s'))$, pour s, s' dans G , vérifie :

$$\tilde{\Phi}(sh, s'h') = \tilde{\Phi}(s, s') \quad \text{quels que soient } h, h' \in H ,$$

$$\tilde{\Phi}(gs, gs') = \tilde{\Phi}(s, s') \quad \text{quel que soit } g \in G ;$$

par suite, on a $\tilde{\Phi}(s, s') = \tilde{\Phi}(s'^{-1} s, e)$; si on pose $\varphi(s) = \tilde{\Phi}(s, e)$, on obtient donc une fonction continue telle que :

$$(5,21) \quad \begin{cases} \varphi(hsh') = \varphi(s) & \text{si } h, h' \in H , \\ F(x, x') = \varphi(s'^{-1} s) & \text{si } x = \pi(s) , \quad x' = \pi(s') . \end{cases}$$

On a donc pour $Y_p \in S_p^{(n)}$, $f = Y_p \circ \pi$,

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} F(x, x') Y_p(x') d\omega(x') &= \omega(S^{n-1}) \int_G \varphi(s'^{-1}s) f(s') ds' = \omega(S^{n-1}) f * \varphi(s) = \\ &= \omega(S^{n-1}) \zeta_p(\varphi) f(s), \end{aligned}$$

d'après (5,20) ; $\omega(S^{n-1})$ désigne la masse totale de S^{n-1} pour la mesure ω (i.e. $\omega(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$).

On a donc :

$$(5,22) \quad \int_{S^{n-1}} F(x, x') Y_p(x') d\omega(x') = \alpha Y_p(x), \quad \text{pour } Y_p \in S_p,$$

avec :

$$\alpha = \omega(S^{n-1}) \zeta_p(\varphi).$$

On peut calculer α , en utilisant (5,11) :

remarquons que d'après (5,21), $\varphi(g)$ ne dépend que de g_{11} , donc $F(x, x')$ ne dépend que du produit scalaire $(x|x') = \sum_{i=1}^n x_i x'_i$; il existe donc une fonction continue $\Psi(t)$ dans $\mathbb{R}$, telle que $F(x, x') = \Psi((x|x'))$, $\varphi(g) = \Psi(g_{11})$. D'autre part, on a la formule d'intégration suivante, pour les fonctions biinvariantes pour H sur G (cf. par exemple [9]) :

$$\int_G \varphi(g) dg = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^1 \Psi(t) (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt ;$$

pour toute fonction φ biinvariante pour H , Ψ désignant la fonction d'une variable réelle telle que $\varphi(g) = \Psi(g_{11})$.

On obtient ainsi le résultat suivant :

$$(5,23) \quad \alpha = 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(n-2) p!}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \Gamma(n-2+p)} \int_{-1}^1 \Psi(t) c_p^{\frac{n-2}{2}}(t) (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt .$$

On peut donc énoncer le théorème :

$$(5,24) \quad \begin{array}{l} \text{Soit } F(x, x') \text{ une fonction continue sur } S^{n-1} \times S^{n-1}, \text{ invariante par rotations ;} \\ \text{on a :} \\ \int_{S^{n-1}} F(x, x') Y_p(x') d\omega(x') = \alpha Y_p(x) , \\ \text{pour toute fonction sphérique } Y_p \text{ d'ordre } p \text{ sur } S^{n-1} ; \alpha \text{ est donné par la} \\ \text{formule (5,23) , où } \Psi(t) \text{ est la fonction telle que } F(x, x') = \Psi((x|x')) . \end{array}$$

*
* *

§ 6. - Théorème de Herglotz.

Dans ce paragraphe, nous allons nous préoccuper de démontrer à l'aide de la théorie des fonctions sphériques précédemment exposée, un théorème dû à Herglotz sur la transformation des fonctions sphériques sur S^2 (voir [1] ou [3]).

Considérons le groupe $SO(3)$, le sous-groupe $SO(2)$, et la sphère S^2 de $\mathbb{R}^3$, identifiée au quotient $SO(3)/SO(2)$. Considérons la représentation quasi-régulière $\gamma^{(3)}$ de $SO(3)$ dans $L^2(S^2)$. En vertu des résultats précédents (5,18) (pour $n=3$), $L^2(S^2)$ est somme hilbertienne des sous-espaces irréductibles $S_p^{(3)}$, pour $p \geq 0$, où

$$(6,1) \quad S_p^{(3)} = \{f ; f = P|S^2, P \text{ polynôme homogène harmonique de degré } p \text{ dans } \mathbb{R}^3\}$$

on sait de plus que $\dim S_p^{(3)} = 2p + 1$.

Soit $\{f_i ; i = 1, \dots, 2p + 1\}$ une base orthonormée de $S_p^{(3)}$, telle que f_1 soit zonale, et posons :

$$(6,2) \quad \delta^{(3)}(g) f_i = \sum_j c_{ji}(g) f_j, \quad \text{pour } g \in SO(3);$$

en remplaçant g par g^{-1} , ceci équivaut à :

$$(6,3) \quad f_i(g.x) = \sum_j \overline{c_{ij}(g)} f_j(x), \quad \text{pour } g \in SO(3), x \in S^2.$$

Les fonctions $\overline{c_{ji}(g)}$ sont sphériques de classe 1, par rapport à $SO(2)$. Le théorème de Herglotz affirme que les fonctions $\overline{c_{ij}}$, pour $i, j = 1, \dots, 2p + 1$, peuvent être considérées canoniquement comme fonctions sur la sphère S^3 de $\mathbb{R}^4$, et qu'elles sont alors sphériques d'ordre $2p$ (c'est-à-dire elles sont dans $S_{2p}^{(4)}$).

De façon plus précise, soit $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des quaternions de norme 1. On identifie $\mathbb{U}$ à S^3 par la correspondance :

$$x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

On identifie de plus S^2 à "l'équateur" de S^3 défini par $x_1 = 0$, à savoir l'ensemble des quaternions de norme 1 à partie réelle nulle.

Pour $u \in \mathbb{U}$, $x \in S^2$, $x' = ux\bar{u}$ est encore dans S^2 , d'où une rotation $x \mapsto x'$ de S^2 qu'on note $\pi(u)$; on sait même que π est un homomorphisme continu de $\mathbb{U}$ sur $SO(3)$, le noyau étant formé par ± 1 . Nous allons montrer que les fonctions $\overline{c_{ij}} \circ \pi$ sont sphériques d'ordre $2p$ sur $\mathbb{U} \approx S^3$.

Considérons pour cela le groupe $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$; pour $v, w \in \mathbb{U}$, l'application qui associe à $u \in \mathbb{U}$, le produit $vu\bar{w}$ est une rotation de $\mathbb{U} \approx S^3$, c'est-à-dire un élément de $SO(4)$, que nous noterons $\tilde{w}(v, w)$. On sait que $\tilde{w}$ est un homomorphisme continu de $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ sur $SO(4)$, dont le noyau est formé par $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

Il est évident que l'image par $\tilde{\omega}$ du sous-groupe diagonal Δ (isomorphe à $\mathbb{U}$) est $SO(3)$ plongé dans $SO(4)$, car $\tilde{\omega}(v,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi(v) \end{pmatrix}$. On a donc le lemme suivant :

(6,4) Soit $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel soutenu par les fonctions $\overline{c_{ij}} \circ \pi$ dans $L^2(\mathbb{U})$.
 $\mathcal{L}$ est alors stable pour la représentation $\rho = \gamma^{(4)} \circ \tilde{\omega}$ de $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ dans $L^2(\mathbb{U})$
 et $(\rho, \mathcal{L})$ est irréductible de classe 1 par rapport à Δ .

Démonstration : Pour $f \in \mathcal{L}$, $(v,w) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$, on a $[\rho(v,w)f](u) = f(\bar{v}uw)$. Posons $b_{ij} = \overline{c_{ij}} \circ \pi$; on a alors, en posant $x = \pi(u)$, $y = \pi(v)$, $z = \pi(w)$,

$$\begin{aligned} [\rho(v,w) b_{ij}](u) &= b_{ij}(\bar{v}uw) = \overline{c_{ij}}(y^{-1}xz) \\ &= \sum_{r,s} \overline{c_{ir}}(y^{-1}) \overline{c_{sj}}(z) \overline{c_{rs}}(x) = \sum_{r,s} \overline{b_{ri}}(v) b_{sj}(w) b_{rs}(u), \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{L}$ est stable pour ρ . La représentation $(\rho, \mathcal{L})$ est de classe 1 par rapport à Δ ; en effet, la fonction $t(u) = \sum b_{ii}(u) = \text{Tr}(\gamma^{(3)}(\pi(u)))$ vérifie $\rho(v,v)t = t$, pour tout $v \in \mathbb{U}$, car

$$\begin{aligned} t(\bar{v}uv) &= \text{Tr}(\gamma^{(3)}(\pi(v))^{-1} \cdot \gamma^{(3)}(\pi(u)) \cdot \gamma^{(3)}(\pi(v))) \\ &= \text{Tr}(\gamma^{(3)}(\pi(u))) = t(u). \end{aligned}$$

Cette fonction t n'est pas identiquement nulle, sinon la représentation $(\gamma^{(3)}, S_p^{(3)})$ serait nulle. Pour montrer enfin l'irréductibilité, il suffit de montrer que toute fonction f dans $\mathcal{L}$ telle que $\rho(v,v)f = f$, quel que soit $v \in \mathbb{U}$, est proportionnelle à la fonction t ci-dessus (théorème (2,5)). Or si $f = \sum \alpha_{ij} b_{ij}$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, on a $f(u) = f(\bar{v}uv)$, pour tout $v \in \mathbb{U}$, donc $f(u) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \overline{c_{ij}}(g^{-1} \cdot \pi(u) \cdot g)$, pour tout $g \in SO(3)$,

d'où :

$$\begin{aligned}
 f(u) &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} \int_{SO(3)} \overline{c_{ij}}(g^{-1} \cdot \pi(u) \cdot g) dg \\
 &= \sum_{i,j,r,s} \alpha_{ij} \int_{SO(3)} c_{ri}(g) \overline{c_{sj}}(g) dg \overline{c_{rs}}(\pi(u)) \\
 &= \frac{1}{2p+1} \sum_i \alpha_{ii} \sum_r \overline{c_{rr}}(\pi(u)) \\
 &= \left(\frac{1}{2p+1} \sum_i \alpha_{ii} \right) t(u),
 \end{aligned}$$

en vertu des relations d'orthogonalité, CQFD.

(6,5) Corollaire : On a : $\mathcal{L} = S_{2p}^{(4)}$.

En effet, le lemme entraîne que $\mathcal{L}$ est un sous-espace stable de $L^2(U)$ pour la représentation $\gamma^{(4)}$ de $SO(4)$, irréductible et de classe 1 par rapport à $SO(3)$; il existe donc un entier $q \geq 0$ tel que $\mathcal{L} = S_q^{(4)}$; comme les fonctions b_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2p+1$, sont linéairement indépendantes (car elles sont deux à deux orthogonales !), $\dim \mathcal{L} = (2p+1)^2$; d'autre part $\dim S_q^{(4)} = (q+1)^2$, d'où $q = 2p$.

*

* *

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. COURANT and D. HILBERT. Methods of mathematical physics, vol. 1.
New York, Interscience Publishers, 1953.
- [2] J. DIXMIER. Les C^* Algèbres et leurs représentations.
Paris, Gauthier-Villars, 1964.
- [3] A. ERDELYI, N. MAGNUS, F. OBERHETTINGER and F. TRICOMI. Higher Transcendental Functions, vol. 2.
New York, Mac Graw-Hill, 1953.
- [4] R. GODEMENT. Introduction aux travaux de A. Selberg.
Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956-1957, n° 144.
- [5] R. GODEMENT. A theory of spherical functions I.
Trans. Amer. Math. Soc., vol. 73, 1952.
- [6] E. HECKE. Über orthogonal-invariante Integralgleichungen,
Mathematische Werke, p. 208-214, Göttingen 1959.
- [7] M. A. NAIMARK. Normierte Algebren.
Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.
- [8] SEMINAIRE "SOPHUS LIE". Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie. Paris, 1955.
- [9] R. TAKAHASHI. Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés.
Bull. Soc. Math. France, t. 91, 1963, p. 289-433.
- [10] R. TAKAHASHI. Zur Darstellungstheorie der Modulgruppe (à paraître).
- [11] A. WEIL. L'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications.
Paris, Hermann, 1940-1953.

Vu et approuvé

NANCY, le 14 mai 1966

Le doyen de la Faculté des Sciences

J. AUBRY

Vu et permis d'imprimer

NANCY, le 16 mai 1966

Le Recteur de l'Académie

Président du Conseil de l'Université

P. IMBS