Reçu 70 ex 23.6.1960 Sc N 60/11

UNIVERSITE DE NANCY ---o--- FACULTE DES SCIENCES

"L'EQUATION de la CHALEUR"

METHODE des DIFFERENCES FINIES

========

"TRANSFORMATION de FOURIER"

UNE METHODE NUMERIQUE DE CALCUL

==========

UNIVERSITÉ NANCY BIBLIOTHÈQUE

THÈSE

Présentée

à la FACULTE des SCIENCES de l'UNIVERSITE de NANCY

Pour l'obtention

du DOCTORAT de SPECIALITE (Mathématiques 3ème Cycle)

par

Gilles TISSIER

soutenue le 21 JUIN 1960 devant la Commission d'examen

Jury : MM. J. LEGRAS Président

M. HERVE
J. L. LIONS Examinateurs

UNIVERSITE DE NANCY ---o--- FACULTE DES SCIENCES

"L'EQUATION de la CHALEUR"

METHODE des DIFFERENCES FINIES

========

chaleur, équation
Fourier, fonction

"TRANSFORMATION de FOURIER"

UNE METHODE NUMERIQUE DE CALCUL

==========

UNIVERSITÉ NANCY BIBLIOTHÈQUE

THÈSE

Présentée

à la FACULTE des SCIENCES de l'UNIVERSITE de NANCY

Pour l'obtention

du DOCTORAT de SPECIALITE (Mathématiques 3ème Cycle)

par

Gilles TISSIER

soutenue le JUIN 1960 devant la Commission d'examen

Jury : MM. J. LEGRAS Président

M. HERVE
J. L. LIONS Examinateurs

" UNIVERSITE de NANCY --- FACULTE des SCIENCES "

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Doyen : M. URION
Assesseur : M. ECHEVIN

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT, DELSARTE
Professeurs honoraires : MM. GUTTON, CROZE, RAYBAUD, FALLOT, LAFFITE, LERAY, DONZELOT, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, L. SCHWARTZ, DIEUDONNE, de MALLEMANN, LONGCHAMBON, LETORT, DODE, GAUTHIER, GOUDET, OLMER, CORNUBERT, CHAPELLE, GUERIN.

Maîtres de conférences honoraires : MM. RAUX, LIENHART.

PROFESSEURS

MM.			
CHEVALLIER	Physique	NICLAUSE	Chimie
URION	Chimie biologique	FAIVRE	Physique appliquée
DELSARTE	Analyse supérieure	AUBRY	Chimie minérale
REMY	Zoologie	COMOLET	Mécanique physique
ROUBAULT	Géologie	DUVAL	Chimie
VEILLET	Biologie animale	COPPENS	Radiogéologie
ECHEVIN	Botanique	FRUHLING	Physique
WAHL	Chimie org. ind.	LIONS	M.M.P.
BARRIOL	Chimie théorique	SUHNER	Physique expériment.
BIZETTE	Physique	HILLY	Géologie
GUILLIEN	Electronique	LE GOFF	Génie chimique
GIBERT	Chimie Physique	CHAPON	Chimie biologique
HERVE	Calcul diff. et int.	HEROLD	Chimie industrielle
LEGRAS	Mécan. rationnelle	SCHWARTZ	Exploitation minière
DAVID	Chimie organique	MALAPRADE	Chimie
BOLFA	Minéralogie	MANGENOT	Phytopathologie

GAYET : Physiologie

MAITRES de CONFERENCES

MM.			
WERNER	Botanique	BERNARD	Géologie
GARNIER	Agronomie	ARAGNOL	Mathématiques (prop.)
BRUHAT	Math. générales	BONVALET	Mécanique appliquée
HADNI	Physique	BASTICK	Chimie
Mme ROIZEN	Physique	RENARD	Phys. théor. et nucl.
REGNIER	Physico-chimie	CONDE	Zoologie
KERN	Minéralogie	GOSSE	Génie chimique
WEPPE	Minéral appliquée	CHAMPIER	Physique
LERMUSIAUX	Physique	GAY	chimie biologique
CLIN	Stratigraphie et Paléontologie	N.	Géologie

Secrétaire : M. LAPOINTE

Que Monsieur le Professeur LEGRAS veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude pour les multiples conseils et la surveillance constante qu'il a bien voulu accorder au travail rapporté dans ce mémoire.

Je remercie aussi Messieurs les Professeurs M. HERVE et J.L. LIONS qui ont bien voulu me faire l'honneur de composer le Jury.

Je remercie enfin tous mes camarades du Centre de Calcul qui ont su y créer une ambiance des plus sympathique et sur les services desquels j'ai toujours pu compter.

L'EQUATION DE LA CHALEUR

-o-o-o-o-o-

METHODE DES DIFFERENCES FINIES

APPLICATION A UN PROBLEME CONCRET

POSITION DU PROBLEME :

On se propose d'étudier l'évolution des températures dans un lingot d'acier au cours de son refroidissement en lingotière, puis à nu après démoulage et enfin au cours de son conditionnement dans les fours Pits avant laminage.

L'ordinateur utilisé pour les calculs étant un 650 I.B.M. à 2.000 mémoires de travail, il était impossible pour des raisons de capacité de traiter le problème à trois dimensions.

On a donc simplifié le problème en le ramenant au cas bi-dimensionnel. Pour se faire, on a considéré que le lingot était un parallélépipède rectangle de longueur infinie dont il suffisait d'étudier une section droite. Enfin, des raisons de symétrie nous autorisaient à ne considérer que le 1/4 de cette section.

Dans ce dernier cas, l'équation de la propagation de la chaleur en régime variable s'écrira donc :

$$(1) \quad \boxed{c\rho \frac{\partial \theta}{\partial t}(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)}$$

où θ (x, y, t) est la température à l'instant t du point de coordonnées (x, y) d'un matériau de chaleur spécifique c, de densité ρ et de conductibilité thermique K.

Dans quelques cas simples, la solution de l'équation (1) peut s'exprimer assez facilement sous forme de série de fonctions connues, mais dans le cas présent, l'existence notamment du phénomène de chaleur latente de fusion rend la solution théorique pratiquement inaccessible.

.../...

On a donc été obligé d'avoir recours à une méthode numérique pour résoudre le problème posé, la méthode classique des différences finies. Utilisant pour la première fois cette méthode, il s'averrait nécessaire de faire quelques essais préliminaires pour avoir une idée assez précise de sa qualité.

Ces essais portent sur l'étude de l'évolution des températures dans une plaque rectangulaire avec des conditions aux limites simples (Conditions de Dirichlet et de Fourier) en dehors de toute considération de convexion, de rayonnement et de chaleur latente de fusion, et avec des distributions initiales choisies afin d'obtenir facilement une solution théorique.

Le compte rendu de ces essais, avec comparaison des résultats théoriques et numériques constituent la première partie de cet exposé.

Une seconde partie traitera de la résolution du problème concret.

==========

1ère partie

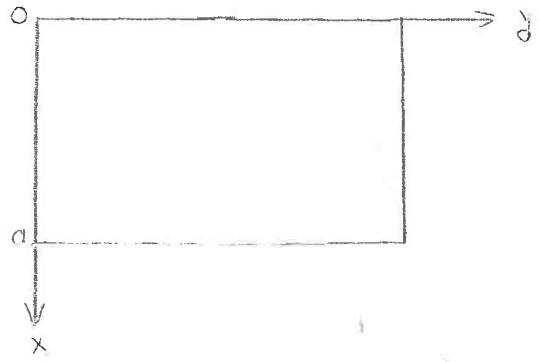
ESSAIS PRELIMINAIRES

La plaque considérée est une plaque d'acier de conductibilité K, chaleur spécifique c et densité ρ supposées constantes au cours du conditionnement. Dans ces conditions, l'équation (1) s'écrit :

$$(E) \quad \boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t}(x,y,t) = D\,\Delta(\theta)} \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

avec $D = \frac{K}{\rho c}$ = diffusivité thermique du matériau.

A - METHODE GENERALE DE CALCUL DE LA SOLUTION THEORIQUE :



.../...

Cherchons des solutions particulières de la forme :

$$\theta(x, y, t) = u(x)\, v(y)\, w(t)$$

où u, v , w , sont des fonctions d'une seule variable.
Ecrivons que $\theta(x, y, t) = u(x)\, v(y)\, w(t)$ est solution de l'équation (E)
Ceci se traduit par :

$$u(x)\, v(y)\, w'(t) = D\left[u''(x)\, v(y)\, w(t) + u(x)\, v''(y)\, w(t)\right]$$

d'où, en divisant par $D.u(x).v(y).w(t)$.

$$\frac{1}{D}\frac{w'}{w}(t) = \frac{u''}{u}(x) + \frac{v''}{v}(y)$$

Cette égalité devant être vérifiée pour toutes les valeurs des variables, il est clair que ceci n'est possible que si chacun des rapports est égal à une constante.
On posera donc :

$$\begin{cases} \dfrac{u''}{u}(x) = -\lambda^2 \\[2ex] \dfrac{v''}{v}(y) = -\mu^2 \\[2ex] \dfrac{w'}{w}(t) = -\nu^2 = -(\lambda^2 + \mu^2) \end{cases}$$

On est donc ramené à résoudre le système (S)

$$(S) \begin{cases} u''(x) + \lambda^2 u(x) = 0 & (1) \\ v''(y) + \mu^2 v(y) = 0 & (2) \\ w'(t) + \nu^2 w(t) = 0 & (3) \end{cases}$$

.../...

et on obtient sans difficultés :

$$(S')\begin{cases} u(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \\ v(y) = A'\cos\mu y + B'\sin\mu y \\ w(t) = A''\, e^{-D\nu^2 t} \end{cases}$$

Donc, toute fonction $\theta(x, y, t) = u(x)\, v(y)\, w(t)$ telle que u, v, w, vérifient (S'), est solution de (E).

Le problème se complique si l'on considère que la plaque est en outre soumise à deux sortes conditions.

1°) Des conditions initiales : $\theta(x, y, o) = \psi(x, y)$ fonction donnée.

2°) Des conditions aux limites :

La considération de ces conditions ramène le système (S') à un système linéaire d'équations aux valeurs propres λ_n, μ_m associées aux fonctions propres $u_n(x)$; $v_m(y)$ qui permet de construire des solutions particulières :

$$\theta_{n,m}(x\, y\, t) = u_n(x)\, v_m(y)\, w_{n,m}(t)$$

On a envisagé deux sortes de conditions aux limites :

1°) Conditions de Dirichlet : $\theta(x, y, t)$ = Constante sur les bords de la plaque.

2°) Conditions de Fourier : $\frac{\partial}{\partial n}\theta(x, y, t) - \alpha\theta = f(t)$ sur les bords de la plaque $\frac{\partial}{\partial n}$ étant la dérivée normale intérieure, le coefficient α pouvant éventuellement dépendre de t.

.../...

I) CONDITIONS DE DIRICHLET :

On montre facilement qu'on peut toujours se ramener au cas où θ (x, y, t) = 0 sur les bords de la plaque.

Le problème à résoudre est alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\theta = D\,\Delta\theta \\ \theta(0\,y\,t) = 0 \;;\; \theta(a\,y\,t) = 0 \\ \theta(x\,0\,t) = 0 \;;\; \theta(x\,b\,t) = 0 \\ \theta(x\,y\,0) = \Psi(x\,y) \end{cases}$$

Cond. Limites

Cond. init.

D'après ce qui précède, on est ramené à résoudre le système (T)

$$(T)\quad \begin{cases} u(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x & (1) \\ v(y) = A'\cos\mu y + B'\sin\mu y & (2) \\ w(t) = A''\,e^{-Dv^2 t} & (3) \\ \theta(0,y,t) = 0 \;;\; \theta(a\,y\,t) = 0 & (4) \\ \theta(x,y,t) = 0 \;;\; \theta(x\,b\,t) = 0 & (5) \\ \theta(x\,y\,0) = \Psi(x,y) & (6) \end{cases}$$

On a θ (x, y, t) = $u(x)\ v(y)\ w(t)$.

Les équations (T) (4) donnent immédiatement $u(0) = 0$ et $u(a) = 0$
de même (T) (5) donnent : $v(0) = 0$; $v(b) = 0$.
d'où, en tenant compte de (T) (1)

$$\begin{cases} A = 0 \\ B\sin\lambda\, a = 0 \quad \text{avec } B \neq 0 \end{cases}$$

.../...

Ce qui n'est possible que pour $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{a}$

$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$ est une valeur propre de (T) (1) et (4) et la fonction propre associée à λ_n est $u_n(x) = B \sin \frac{n\pi}{a} x$

On vérifie aisèment que les $u_n(x)$ forment un système <u>orthogonal</u> sur l'intervalle (0, a) c'est-à-dire que :

$$\int_0^a u_n(x)\, u_m(x)\, dx = 0 \quad \text{pour } n \neq m.$$

et en prenant $B = \sqrt{\frac{2}{a}}$ on obtient $u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$

et puisqu'alors $\int_0^a u_n\, u_m(x)\, dx = \delta_{n,m}$ on a obtenu un système <u>orthonormal</u> sur (0, a)

Par le même procédé on obtient un autre système orthonormal

$$v_m(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{m\pi}{a} y$$

On a ainsi obtenu $\begin{cases} u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x & \text{S.O.N. sur } (0, a) \\ v_m y = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{m\pi}{b} y & \text{S.O.N. sur } (0, b) \end{cases}$

Il est alors facile de montrer que la suite $(u_n(x)\, v_m(y) = f_{n,m}(x, y)$ forme un système orthonormal sur le rectangle $a \times b = \Omega$

On montre d'autre part que ce système est complet sur le domaine Ω donc, sur Ω toute fonction $\psi(x, y)$ peut s'écrire

$$\boxed{\psi(x\, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm}\, f_{nm}(x\, y)} \quad \text{avec } c_{nm} = \iint_\Omega \psi(x\, y)\, f_{nm}(x\, y)\, dx\, dy$$

.../...

On a donc obtenu : $\theta_{n,m}(x, y, t) = u_n(x)\ v_m(y)\ w_{n,m}(t)$ solution particulière de (T) (1) (2) (3) (4) (5).

Or, il est facile de vérifier que si θ_1 et θ_2 sont solutions de T(1)(2)(3)(4)(5) T (1) (2) (3) (4) (5) $\theta_1 + \theta_2$ en est encore solution. On peut donc écrire que sous réserve de la convergence uniforme de la série

$$\boxed{\theta(x\,y\,t) = \sum_{nm=0}^{\infty} A''_{nm}\, u_n(x)\, v_m(y)\, e^{-\pi^2 D\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)t}}$$

est solution de (T) (1) (2) (3) (4) (5).

Ecrivons maintenant que θ (x, y, t) doit aussi vérifier T (6), il vient alors

$$\theta(x\,y\,0) = \sum\sum A''_{nm}\, u_n(x)\, v_m(y) = \psi(x\,y) \quad \text{sur } a \times b = \Omega$$

Or, on a vu qu'on peut écrire que ψ (x, y) = $\sum c_{nm}\, \rho_{nm}(x\,y)$ sur Ω

On doit donc avoir $\sum A''_{nm}\, \rho_{nm}(x\,y) = \sum c_{nm}\, \rho_{nm}(x\,y)$ sur Ω

d'où on tire immédiatement $A''_{n,m} = c_{n,m}$

Finalement, on a obtenu une solution du problème posé, qui est :

$$(2)\quad \boxed{\theta(x\,y\,t) = \frac{4}{ab} \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\iint_{\Omega} \psi(x\,y)\, u_n(x)\, v_m(y)\, dx\,dy \right] u_n(x)\, v_m(y)\, e^{-D\nu^2 t}}$$

.../...

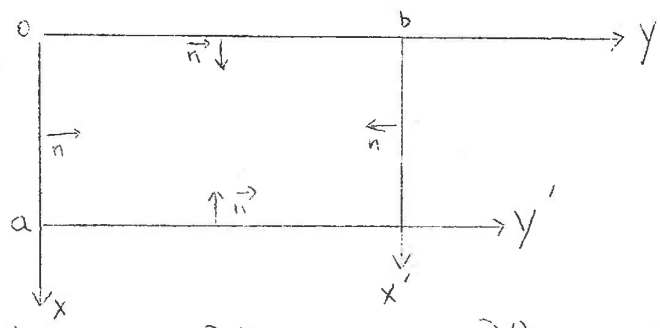
Et comme d'autre part on démontre que la solution de ce problème est unique, on a ainsi obtenu la solution générale du problème posé, si toutefois la série converge.

II) CONDITIONS DE FOURIER :

Traitons le cas où $f(t) = 0$.

Le problème à résoudre est alors :

$$(U)\begin{cases} u(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x & (1) \\ v(y) = A'\cos\mu y + B'\sin\mu y & (2) \\ w(t) = A''e^{-D\nu^2 t} & (3) \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\vec{n}} - \lambda\theta\Big|_{\Gamma} = 0 & (4) \\ \theta(xyo) = \psi(xy) & (5) \end{cases}$$



On a : $\dfrac{\partial\theta}{\partial n}(xyt) = \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\cos(\vec{n},\vec{ox}) + \dfrac{\partial\theta}{\partial y}\cdot\cos(\vec{n},\vec{oy})$

donc : sur $\vec{ox}$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial\vec{n}} = \dfrac{\partial\theta}{\partial y}$; sur $\vec{bx}$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial n} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$

sur $\vec{oy}$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial n} = \dfrac{\partial\theta}{\partial x}$; sur $\vec{ay'}$ $\dfrac{\partial\theta}{\partial n} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$

.../...

$\cup$ (4) donne immédiatement

$$\Theta'_x(0yt) - \alpha\,\Theta(0yt) = 0 \Rightarrow v'(0) - \alpha\, v(0) = 0 \quad (a)$$

$$-\Theta'_x(ayt) - \alpha\,\Theta(ayt) = 0 \Rightarrow v'(a) + \alpha\, v(a)$$

(a) s'écrit encore $\lambda B - \alpha A = 0$

(b) s'écrit aussi : $A(\alpha \cos \lambda a - \lambda \sin \lambda a) + B(\alpha \sin \lambda a + \lambda \cos \lambda a) = 0.$

On a donc à trouver A et B non identiquement nuls et solution du système (V)

$$(V)\begin{cases} \alpha A - \lambda B = 0 \\ A(\alpha \cos \lambda a - \lambda \sin \lambda a) + B(\alpha \sin \lambda a + \lambda \cos \lambda a) = 0 \end{cases}$$

Or, ceci n'est possible que si le déterminant de (V) est nul. Ce qui s'écrit, après simplification :

$$\boxed{(\lambda^2 - \alpha^2)\, tg\, \lambda a - 2\alpha\lambda = 0}$$

Or, ceci n'est vérifié que pour un ensemble discret (λ_n) tel que λ_n vérifie la relation

$$\boxed{tg\, \lambda_n a = \frac{2\alpha\lambda_n}{\lambda_n^2 - \alpha^2}} \quad (c)$$

De même, on aboutit à la conclusion qu'il n'existe A' et B' $\neq 0$ tels que $v(y)$ vérifie (2) et (4) que si μ est élément de l'ensemble discret (μ_m) tel que :

$$\boxed{tg\, \mu_m b = \frac{2\alpha\mu_m}{\mu_m^2 - \alpha^2}} \quad (d)$$

.../...

Après réduction on obtient alors :

$$\begin{cases} u_n(x) = A_n\left(\cos\lambda_n x + \dfrac{\alpha}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right) \\ v_m(y) = A'_m\left(\cos\mu_m y + \dfrac{\alpha}{\mu_m}\sin\mu_m y\right) \end{cases} \qquad \lambda_n \text{ et } \mu_m \text{ verifiant (c) et (d)}$$

Les $u_n(x)$ et $v_n(y)$ forment un système orthogonal sur $(0, a)$ et $(0, b)$ respectivement, qu'on normalise en posant :

$$A_n^2 = \frac{1}{\int_0^a (u_n(x))^2\,dx} \quad ; \quad A'^2_m = \frac{1}{\int_0^b (v_m(y))^2\,dy}$$

Et en raisonnant comme au paragraphe I) on aboutit à la conclusion que sous réserve de la convergence de la série double la fonction

$$\Theta(x\,y\,t) = \sum_{n,m} A''_{n,m}\, u_n(x)\, v_m(y)\, e^{-D(\lambda_n^2+\mu_m^2)t}$$

est solution de (U) (1) (2) (3) (4)

Ecrivons maintenant que $\Theta(x,y,t)$ doit aussi vérifier (5).

$$\Theta(x\,y\,0) = \Psi(x\,y).$$

On détermine ainsi $\quad A''_{n,m} = \iint_\Omega \Psi(x\,y)\, u_n(x)\, v_m(y)\, dx\,dy$ (cf A, I)

.../...

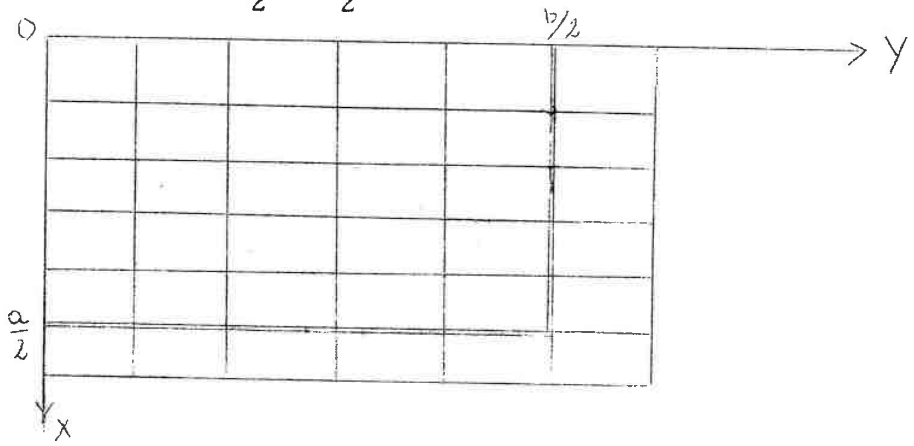
On obtient ainsi la solution théorique du problème posé, toujours sous réserve de la convergence de la série.

$$(3)\quad \boxed{\theta(x\,y\,t) = \sum_{n,m} A''_{n,m}\, u_n(x)\, v_m(y)\, e^{-D(\lambda_n^2+\mu_m^2)t}}$$

Note : Une difficulté qui n'apparaissait pas pour des conditions de Dirichlet se présente ici, c'est le calcul des valeurs propres λ_n et μ_m. qu'on doit calculer graphiquement.

B - CALCUL NUMERIQUE DES TEMPERATURES : METHODE DES DIFFERENCES FINIES :

On a vu, que pour des raisons de symétrie on ne considérait que le quart de la plaque $\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}$



On commence par décrire la plaque par un réseau de mailles rectangulaires aux noeuds duquel on se propose de calculer les températures à l'instant $t + 1$, connaissant la température des noeuds voisins à l'instant t.

On procède par étapes dans le temps.

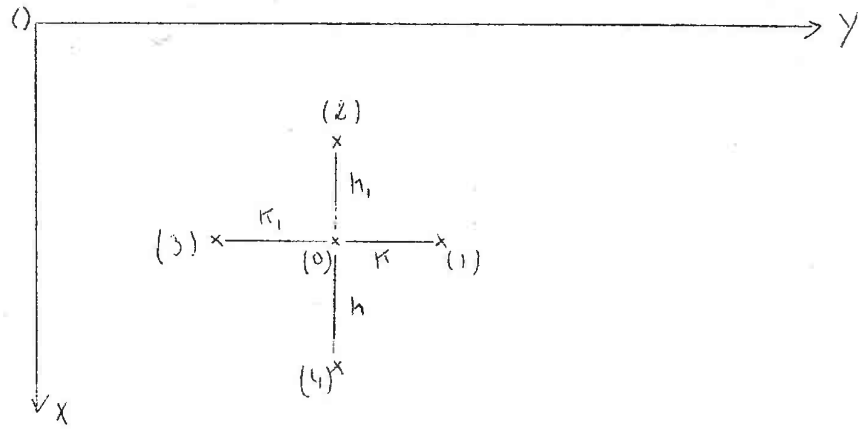
.../...

On connaît la répartition $\psi(x\,y)$ à l'instant $t = 0$. qui permet de calculer la même répartition à l'instant 1 cette dernière permettant de calculer la même répartition à l'instant 21 , et ainsi de suite.

La méthode consiste à remplacer l'équation de la chaleur par une équation approchée aux différences finies.

I) NOEUDS INTERIEURS AU RESEAU :

Soient x et y les coordonnées du noeud considéré (0)



On connaît les températures θ à l'instant t des noeuds (0), (1), (2), (3), et (4) et on veut calculer la température $\theta^*(0)$ du point (0) à l'instant t + 1
Les noeuds considérés sont :

(0)	x	y
(1)	x	y + K
(2)	$x - h_1$	y
(3)	x	$y - K_1$
(4)	x + h	y

.../...

Développons $(\cdot)^* = \Theta(x, y, t+\ell)$ en série de Taylor, il vient

$$(\cdot)^x = \Theta(0) + \ell \frac{\partial \Theta^x}{\partial t}(x y t) + \cdots$$

et comme $(\cdot)^x$ doit vérifier (E)

$$(\cdot)^x = \Theta(0) + \ell D \Delta(\Theta)$$

Il s'agit maintenant d'expliciter $\Delta(\cdot)$

Développons $(\cdot)(1)$, $(\cdot)(2)$, $(\cdot)(3)$, $(\cdot)(4)$ en série de Taylor.

Il vient, en négligeant les termes non écrits

(1) $$(\cdot)(1) = (\cdot)(0) + K \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{K^2}{2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \cdots$$

(2) $$(\cdot)(2) = (\cdot)(0) - h_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \cdots$$

(3) $$(\cdot)(3) = (\cdot)(0) - K_1 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{K_1^2}{2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \cdots$$

(4) $$(\cdot)(4) = (\cdot)(0) + h \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \cdots$$

En combinant (2) et (4) on obtient sans difficultés

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}(0) = \frac{2}{h h_1 (h + h_1)} \left[h\left(\Theta(2) - \Theta(0)\right) + h_1\left(\Theta(4) - \Theta(0)\right) \right]$$

De même en combinant (1) et (3) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}(0) = \frac{2}{K K_1 (K + K_1)} \left[K\left(\Theta(1) - \Theta(0)\right) + K_1\left(\Theta(3) - \Theta(0)\right) \right]$$

.../...

d'où finalement le pochoir de calcul de Θ^* : avec $A = \frac{2\rho D}{hh_1(h_1+h)}$; $B = \frac{2\rho D}{kk_1(k+k_1)}$

$$(4)\quad \boxed{\Theta^* = \Theta(0) + A\left[h\left(\Theta(2)-\Theta(0)\right) + h_1\left(\Theta(4)-\Theta(0)\right)\right] + B\left[k\left(\Theta(3)-\Theta(0)\right) + k_1\left(\Theta_1-\Theta_0\right)\right]}$$

En utilisant ce pochoir, l'erreur commise sur le Laplacien porte sur les dérivées partielles d'ordre 3.

Si le réseau est à mailles égales, ($k = k_1$; $h = h_1$) le pochoir se simplifie et donne :

$$(5)\quad \boxed{\Theta^* = \Theta(0) + \frac{\rho D}{h^2}\left[\Theta(2)+\Theta(4)-2\Theta(0)\right] + \frac{\rho D}{k^2}\left[\Theta(1)+\Theta(3)-2\Theta(0)\right]}$$

Remarquons que dans ce cas, l'erreur commise sur le calcul du Laplacien porte cette fois sur les dérivées d'ordre 4.

II) NOEUDS DE BORDURE : CONDITIONS AUX LIMITES :

1°) Conditions de Dirichlet :

Il n'y a aucune difficulté ici. Il suffit, au cours des calculs de laisser les noeuds limite à une température constante.

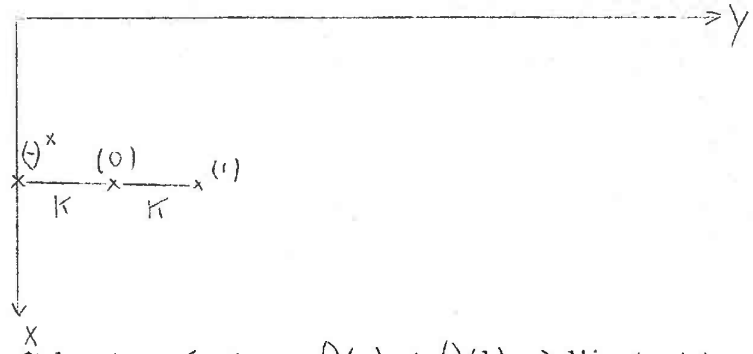
2°) Conditions de Fourier :

$$(6)\quad \left.\frac{\partial\Theta}{\partial n} - \lambda\Theta\right|_{\Gamma} = g(\Gamma)$$

Dans ce cas, il est nécessaire de construire un nouveau pochoir pour le calcul des températures aux noeuds situés sur les bords de la plaque. Ce calcul se fait après le calcul des noeuds intérieurs.

.../...

a) Noeuds situés sur $\overrightarrow{ox}$: (confère schéma).



On connaît les températures $\theta(o)$ et $\theta(1)$ à l'instant t, et on se propose de calculer θ^* au même instant, et répandant à la condition (6). Habituellement, le calcul d'un tel pochoir se fait à l'aide d'un seul point voisin, le point (o). Ce qui donne :

$$\theta(o) = \theta(x,K,t) = \theta^x + K\frac{\partial\theta}{\partial y}(x\,o\,t) + \cdots$$

et en fonction de (6) il vient puisque $\frac{\partial\theta}{\partial n} = \frac{\partial\theta}{\partial y}$

$$\theta^* = \theta(o) + \lambda K \theta^x + K\rho(t)$$

d'où le pochoir

$$\theta^* = \frac{\theta(o) - K\rho(t)}{1 + \lambda K}$$

L'erreur commise avec ce pochoir est rattachée à la dérivée seconde. Si on veut en améliorer la précision on est obligé de prendre k assez petit, ce qui par ailleurs, comme nous le verrons plus loin, impose des restrictions gênantes sur la valeur maximum à donner au pas d'intégration 1 .

.../...

On a donc rejeté ce pochoir pour le remplacer par un autre un peu plus compliqué, mais où l'erreur est rattachée à la dérivée 3ème, c'est-à-dire du même ordre que celle commise sur le calcul des points intérieurs : ce nouveau pochoir utilise 2 points voisins $\theta(o)$ et $\theta(1)$.

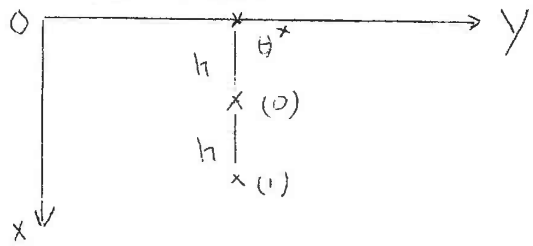
On a donc en développant en série de Taylor

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta^x + K \dfrac{\partial \theta^x}{\partial y} + \dfrac{K^2}{2} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \cdots \\ \theta(1) = \theta^x + 2K \dfrac{\partial \theta^x}{\partial y} + \dfrac{2K^2}{} \dfrac{\partial^2 \theta^x}{\partial y^2} \end{cases}$$

D'où il vient immédiatement le pochoir utilisé :

$$\boxed{\theta^x = \frac{4\,\theta(0) - \theta(1) - 2K\,\rho(t)}{3 + 4\lambda K}}$$

b) Noeuds situés sur o y :



On obtient de la même manière, le pochoir :

$$\boxed{\theta^x = \frac{4\,\theta(0) - \theta(1) - 2h\,\rho(t)}{3 + 4\lambda h}}$$

c) Stabilité de la méthode des différences finies :

On démontre par le calcul, que la méthode d'intégration des différences finies utilisées ne donne avec certitude des résultats corrects que si le pas 1 d'intégration dans le temps ne dépasse pas une valeur maximum L liée, d'une part, au pochoir de calcul utilisé, d'autre part, aux dimensions des mailles du réseau. On a d'ailleurs retrouvé expérimentalement ce résultat dans un cas simple que nous rapportons plus loin.

.../...

On démontre que dans le cas présent, pour un réseau de mailles inégales (de dimensions h, k, h_1, k_1) et avec le pochoir (4) construit précédemment, on doit avoir, pour que la méthode donne des résultats stables.

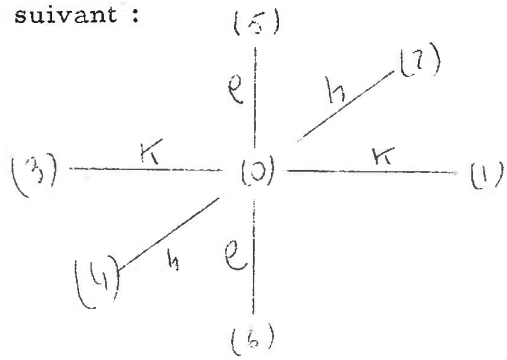
$$(7) \quad \boxed{\rho < L = \frac{1}{2D\left(\frac{1}{h h_1} + \frac{1}{k k_1}\right)}}$$

Retrouvons cette formule dans le cas plus simple où l'on a un réseau de mailles égales (h x k). ($h_1 = h$; $k_1 = k$)

Dans ce cas, le pochoir utilisé est le pochoir (5)

$$(5) \quad \theta^* = \theta(0) + \frac{\rho D}{h^2}\left(\theta(2) + \theta(4) - 2\,\theta(0)\right) + \frac{\rho D}{k^2}\left(\theta(1) + \theta(3) - 2\,\theta(0)\right)$$

avec le schéma suivant :



Affectons des indices n, p, q aux températures θ, indiquant leur place dans le réseau et dans le temps.

$$\theta(x\,y\,t) = \theta_{npq}$$

.../...

On a alors :

$$(o) = \theta_{npq}$$
$$(1) = \theta_{n,p+1,q}$$
$$(2) = \theta_{n,p,q+1}$$
$$(3) = \theta_{n,p-1,q}$$
$$(4) = \theta_{n,p,q-1}$$
$$(5) = \theta_{n+1,p,q}$$

Cherchons des solutions de la forme $\theta_{npq} = r^n \sin pB . \sin qC$
B et C étant des variables quelconques.

Il vient, en portant dans le pochoir (5)

$$\theta(1) + \theta(3) - 2\theta(0) = 2 r^n \sin qC . \sin pB (\cos B - 1)$$
$$\theta(2) + \theta(4) - 2\theta(0) = 2 r^n \sin qC . \sin pB (\cos C - 1)$$

$$\theta^x = \theta_{n+1,p,q} = r^{n+1} \sin pB . \sin qC$$

et en divisant par $r^n \sin pB . \sin qC$ il reste

$$(8) \qquad \boxed{r = 1 + \frac{2\ell D}{h^2}(\cos B - 1) + \frac{2\ell D}{K^2}(\cos C - 1)}$$

Revenons à l'expression $\theta_{npq} = r^n \sin pB . \sin qC$
Il est évident que la convergence est assurée si la raison r est en module inférieure à 1.

Ce qui se traduit d'après (8)

$$\sup \left| \frac{2\ell D}{h^2}(\cos B - 1) + \frac{2\ell D}{K^2}(\cos C - 1) \right| < 2$$

.../...

Or, $\sup \left(\cos x - 1\right) = 2$

Il suffit donc d'avoir $2\rho D\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) < 1$

Soit finalement :

$$(9) \quad \boxed{\rho < \frac{1}{2D\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)}}$$

On retrouve la formule annoncée et modifiée en posant $h_1 = h$; $k_1 = k$.

Remarque importante :
==========

Pour construire le pochoir (4) on a adopté la formule approchée :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(0) = \frac{\theta(5) - \theta(0)}{\rho} = \frac{\theta^{\times} - \theta(0)}{\rho}$$

et on a trouvé la formule (7) nous assurant la stabilité du pochoir.
Par contre, si on calcule $\frac{\partial \theta}{\partial t}(0)$ par la formule plus précise

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(0) = \frac{\theta(5) - \theta(6)}{2\rho}$$

le pochoir (5) devient :

$$\theta^{*} = \theta(6) + \frac{2\rho D}{h^2}\left(\theta(2) + \theta(4) - 2\theta(0)\right) + \frac{2\rho D}{k^2}\left(\theta(1) + \theta(3) - 2\theta(0)\right)$$

et on va montrer que la méthode est toujours instable. En procédant comme précédemment on aboutit cette fois à une équation du second degré en r.

(8) devient (8')

$$(8') \quad r^2 = 1 + 2r\left[\frac{2\rho D}{h^2}(\cos B - 1) + \frac{2\rho D}{k^2}(\cos C - 1)\right]$$

.../...

d'où on tire : en posant $\frac{2\rho D}{h^2} = \alpha$ et $\frac{2\rho D}{k^2} = \beta$

$$r = \alpha(\cos B - 1) + \beta(\cos C - 1) \pm \sqrt{1 + [\alpha(\cos B - 1) + \beta(\cos C - 1)]^2}$$

Pour que la convergence soit assurée, il suffit que : $\sup |r| < 1$.

soit : $2(\alpha + \beta) + \sqrt{1 + 4(\alpha + \beta)^2} < 1$

Ce qui conduit immédiatement à $\alpha + \beta < 0$

soit $2\rho D\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) < 0$

ce qui est manifestement impossible puisque l et D sont positifs. La méthode est donc bien toujours instable.

D - RESULTATS NUMERIQUES : COMPARAISON AVEC LES RESULTATS THEORIQUES.

Les différents essais portent sur une plaque de dimensions 120 cm x 80 cm que l'on a décrite par un réseau de mailles égales.

Essai N° 1 :

On a adopté pour répartition initiale :

$$\psi(xy) = 1000 \sin\frac{\pi x}{a} \cdot \sin\frac{\pi x}{b}$$

Conditions de Dirichlet : $\theta(xyt) = 0$ sur les bords.

En se référant aux résultats du paragraphe A. I et pour des raisons évidentes d'orthogonalité, la solution théorique se réduit à :

$$\boxed{\theta(xyt) = 1000 \sin\frac{\pi x}{a} \cdot \sin\frac{\pi y}{b} \cdot e^{-\pi^2 D\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)t}}$$

.../...

I - Réseau de 81 points intérieurs au 1/4 de plaque $\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}$

Schéma du réseau :

0	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132
1	13	25	37	49	61	73	85	97	109	121	133
2	14	26	38	50	62	74	86	98	110	122	134
3	15	27	39	51	63	75	87	99	111	123	135
4	16	28	40	52	64	76	88	100	112	124	136
5	17	29	41	53	65	77	89	101	113	125	137
6	18	30	42	54	66	78	90	102	114	126	138
7	19	31	43	55	67	79	91	103	115	127	139
8	20	32	44	56	68	80	92	104	116	128	140
9	21	33	45	57	69	81	93	105	117	129	141
10	22	34	46	58	70	82	94	106	118	130	142
11	23	35	47	59	71	83	85	107	119	131	

Les points 11, 23, 35 ..... 131 et 132, 133 .....142 sont nécessaires pour le calcul des températures sur les médianes de la plaque, c'est-à-dire aux noeuds 22, 34,.....130 et 120, 121 ..... 130 par le même pochoir (5) que pour les autres noeuds intérieurs. Les points 11, 23 ..... et 132, 133 .... 142 vérifiant l'hypothèse de symétrie faite au début, c'est-à-dire que l'on a :

$\Theta(11) = \Theta(9)$; - - - - - - $\Theta(131) = \Theta(129)$

$\Theta(108) = \Theta(132)$; - - - - - $\Theta(142) = \Theta(118)$

.../...

Pour un tel réseau, et avec les dimensions a x b choisies, la limite d'instabilité L est :

$$P < L = \frac{1}{2D\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{36}\right)} = 55'',3 \qquad \begin{cases} h = 4 \text{ cm} \\ K = 6 \text{ cm} \\ D = 0,1 \end{cases}$$

Tableaux des résultats pour 1 = 30 secondes .

Les températures sont toutes en degrès C.

1°) Point 26 :

t en heures	théorique	calculée	Δ
1/2	63,96	63,92	0,04
1	42,84	42,78	0,06
1 1/2	28,70	28,63	0,07
2	19,22	19,16	0,06
2 1/2	12,88	12,83	0,05
3	8,62	8,59	0,03

.../...

2°) Point 65 :

t en heures	théorique	calculée	Δ
1/2	334,92	334,67	0,25
1	224,34	224,01	0,33
1 1/2	150,27	149,93	0,34
2	100,66	100,36	0,30
2 1/2	67,42	67,17	0,25
3	45,16	44,96	0,20

3°) Point 70 :

t en heures	théorique	calculée	Δ
1/2	473,65	473,29	0,26
1	317,27	316,79	0,48
1 1/2	212,52	212,04	0,48
2	142,35	141,93	0,42
2 1/2	95,35	95,00	0,35
3	63,87	63,58	0,29

.../...

4°) Point 103 :

t en heures	théorique	calculée	Δ
1/2	567,62	567,20	0,42
1	380,21	379,54	0,57
1 1/2	254,68	254,11	0,57
2	170,59	170,08	0,51
2 1/2	114,27	113,84	0,43
3	76,54	76,20	0,34

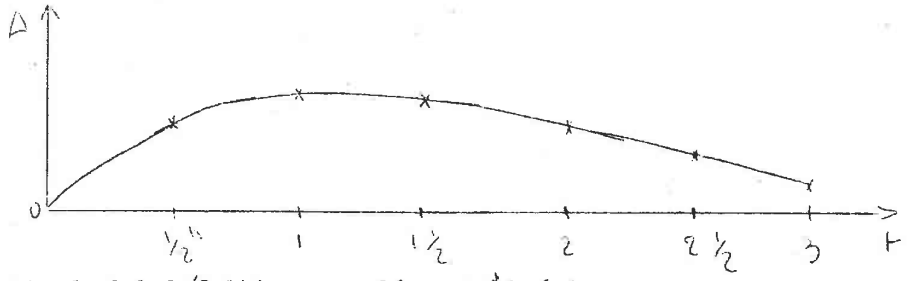
5°) Point 130 :

t en heures	théorique	calculée	Δ
1/2	669,84	669,34	0,50
1	448,68	448,01	0,67
1 1/2	300,54	299,87	0,67
2	201,32	200,71	0,61
2 1/2	134,85	134,34	0,51
3	90,33	82,92	0,41

.../...

On constate que l'écart maximum pour les 5 points précédents est obtenu pour le point 130, c'est-à-dire au centre du rectangle a x b.
D'autre part cet écart est inférieur à 0,7 oc
Pour chacun des points étudiés, les courbes donnant en fonction de t ont toutes la même allure et présentent un maximum entre 1 h et 1 h 1/2.

Allure de ces courbes :



A partir de 1 h 1/2 l'écart décroit linéairement.

II - Réseau de 16 points intérieurs au 1/4 de rectangle $\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}$.

Réseau à mailles égales $\begin{cases} h = 8 \text{ cm} \\ k = 12 \end{cases}$

	0	7	14	21	28	35	42
1	8	15	22	29	36	43	
2	9	16	23	30	37	44	
3	10	17	24	31	38	45	
4	11	18	25	32	39	46	
5	12	19	26	33	40	47	
6	13	20	27	34	41		

Y

X

Même remarque que précédemment pour les points extérieurs au 1/4 rectangle.

.../...

On a ici : $$L = \frac{1}{-2\,D\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{144}\right)} = 221{,}5 \text{ s.} \# 3{,}6'$$

$$\underline{\underline{L = 221{,}5 \text{ s.}}}$$

Ce qui nous permet de faire une gamme d'essais plus variés.
Les différents essais effectués correspondent successivement à $l = 30$ s; $l = 1'$; $l = 2'$; $l = 3'$.

.../...

Les résultats de ces essais ont été présentés groupés 1 = 30 s; 1' = 1'; 1'' = 2'; 1''' = 3'.

POINT 8 :

t en H.	Φ théorique	Φ calculée 1 = 30 S	Δ_1	Φ 1' 1' = 1'	Δ_1	Φ 1'' 1'' = 2'	$\Delta_{1''}$	Φ 1''' 1''' = 3'	$\Delta_{1'''}$
1/2	63,96	64,07	0,11	64,00	0,04	63,82	0,14	63,64	0,32
1	42,84	42,99	0,15	42,88	0,04	42,65	0,18	42,41	0,43
1 1/2	28,70	28,85	0,15	28,73	0,03	28,50	0,20	28,27	0,43
2	19,22	19,36	0,14	19,25	0,03	19,05	0,17	18,84	0,38
2 1/2	12,88	12,99	0,11	12,90	0,02	12,73	0,15	12,55	0,33
3	8,62	8,71	0,09	8,64	0,02	8,51	0,11	8,37	0,25
3 1/2	5,78	5,85	0,07	5,79	0,01	5,68	0,10	5,58	0,20
4	3,86	3,92	0,06	3,88	0,02	3,80	0,06	3,72	0,14
4 1/2	2,59	2,63	0,04	2,60	0,01	2,54	0,05	2,43	0,11
5	1,74	1,77	0,03	1,74	0,00	1,70	0,04	1,65	0,09
5 1/2	1,16	1,17	0,01	1,13	0,01	1,13	0,03	1,10	0,06
6	0,78	0,78	0,00	0,78	0,00	0,76	0,02	0,73	0,05

POINT 12 :

t en H.	θ théorique	θ calculée 1 = 30 S	Δ_1	$\theta_{1'}$ 1' = 1'	Δ_1	$\theta_{1''}$ 1'' = 2'	$\Delta_{1''}$	$\theta_{1'''}$ 1''' = 3'	$\Delta_{1'''}$
1/2	206,96	207,35	0,36	207,07	0,08	206,51	0,48	205,95	1,04
1	138,65	139,13	0,47	138,76	0,11	138,01	0,64	137,25	1,40
1 1/2	92,87	93,36	0,49	92,98	0,11	92,23	0,64	91,47	1,40
2	62,21	62,64	0,43	62,31	0,10	61,64	0,57	60,96	1,25
2 1/2	41,67	42,03	0,36	41,75	0,08	41,19	0,48	40,63	1,04
3	27,91	28,20	0,29	27,98	0,07	27,53	0,38	27,08	0,83
3 1/2	18,70	18,92	0,22	18,75	0,05	18,40	0,30	18,04	0,66
4	12,48	12,70	0,22	12,56	0,08	12,29	0,19	12,03	0,45
4 1/2	8,39	8,52	0,13	8,42	0,03	8,22	0,17	8,01	0,38
5	5,62	5,71	0,09	5,64	0,02	5,49	0,13	5,34	0,28
5 1/2	3,76	3,78	0,02	3,78	0,02	3,67	0,09	3,55	0,21
6	2,52	2,53	0,01	2,53	0,01	2,45	0,07	2,37	0,15

POINT 24

t en H.	θthéorique	θ calculée l = 30 s	Δ l	θ l' l' = l'	Δl'	θ l'' l'' = 2'	Δl''	θ l''' l'''=3'	Δl'''
1/2	438,41	439,18	0,77	438,59	0,18	437,40	1,01	436,20	2,21
1	293,67	294,69	1,02	293,90	0,23	292,31	1,26	290,71	2,96
1 1/2	196,71	197,73	1,02	196,94	0,23	195,35	1,36	193,74	2,97
2	131,76	132,68	0,92	131,97	0,21	130,55	1,21	129,12	2,64
2 1/2	88,26	89,03	0,77	88,43	0,17	87,24	1,02	86,05	2,21
3	59,12	59,74	0,62	59,26	0,14	58,30	0,32	57,35	1,77
3 1/2	39,60	40,08	0,48	39,71	0,11	38,96	0,64	38,22	1,38
4	26,44	26,89	0,45	26,61	0,17	26,04	0,40	25,47	0,97
4 1/2	17,77	18,05	0,28	17,83	0,06	17,40	0,37	16,97	0,80
5	11,90	12,11	0,21	11,95	0,05	11,63	0,27	11,31	0,59
5 1/2	7,97	8,01	0,04	8,01	0,04	7,77	0,20	7,54	0,43
6	5,34	5,37	0,03	5,36	0,02	5,19	0,15	5,02	0,32

POINT 29 :

t en H.	θ théorique	θ' calculée 1 = 30 s	Δ1	θ 1' 1' = 1''	Δ1'	θ 1'' 1'' = 2'	Δ1''	θ 1''' 1''' = 3'	Δ1'''
1/2	196,86	197,20	0,34	196,94	0,08	196,40	0,46	195,87	0,99
1	131,87	132,32	0,45	131,97	0,10	131,26	0,61	130,54	1,33
1 1/2	88,33	88,79	0,46	88,43	0,10	87,72	0,61	86,99	1,34
2	59,17	59,58	0,31	59,26	0,09	58,62	0,45	57,98	1,19
2 1/2	39,63	39,97	0,34	39,71	0,08	39,17	0,46	38,64	0,99
3	26,55	26,82	0,27	26,61	0,06	26,18	0,37	25,75	0,80
3 1/2	17,78	18,00	0,22	17,83	0,05	17,50	0,28	17,16	0,62
4	11,87	12,08	0,21	11,95	0,08	11,69	0,13	11,44	0,43
4 1/2	7,98	8,10	0,12	8,01	0,03	7,81	0,17	7,62	0,36
5	5,34	5,44	0,10	5,36	0,02	5,22	0,12	5,08	0,26
5 1/2	3,58	3,60	0,02	3,59	0,01	3,49	0,09	3,38	0,20
6	2,40	2,41	0,01	2,41	0,01	2,33	0,07	2,26	0,14

POINT 32 :

t en H.	θthéorique	θ² calculée 1 = 30 s	Δ1	θ 1' 1' = 1'	Δ1'	θ 1'' 1'' = 2'	Δ1''	θ 1''' 1''' = 3'	Δ1'''
1/2	605,87	606,93	1,06	606,12	0,25	604,48	0,39	602,81	3,06
1	405,84	407,25	1,41	406,16	0,22	403,97	1,87	401,75	4,09
1 1/2	271,84	273,26	1,42	272,17	0,33	269,97	1,87	267,74	4,10
2	182,09	183,36	1,27	182,38	0,29	180,42	1,67	178,44	3,65
2 1/2	121,97	123,03	1,06	122,21	0,24	120,57	1,40	118,92	3,05
3	81,70	82,55	0,85	81,89	0,19	80,58	1,12	79,25	2,45
3 1/2	54,73	55,39	0,66	54,88	0,15	53,85	0,88	52,82	1,91
4	36,54	37,17	0,63	36,77	0,23	35,99	0,55	35,20	1,34
4 1/2	24,55	24,94	0,39	24,64	0,09	24,05	0,50	23,46	1,09
5	16,45	16,73	0,28	16,51	0,06	16,07	0,38	15,63	0,82
5 1/2	11,02	11,07	0,05	11,06	0,04	10,74	0,28	10,42	0,60
6	7,38	7,42	0,04	7,41	0,03	7,18	0,20	6,94	0,44

POINT 37 :

t en H.	θthéorique	θ calculée 1 = 30 s	Δ_1	$\theta_{1'}$ 1' = 1'	$\Delta_{1'}$	$\theta_{1''}$ 1'' = 2'	$\Delta_{1''}$	$\theta_{1'''}$ 1''' = 3'	$\Delta_{1'''}$
1/2	393,72	394,40	0,68	393,88	0,16	392,81	0,91	391,73	1,99
1	263,73	264,64	0,91	263,94	0,21	262,51	1,22	261,07	2,66
1 1/2	176,66	177,58	0,92	176,87	0,21	175,43	1,23	173,99	2,67
2	118,33	119,15	0,82	118,52	0,19	117,24	1,09	115,96	2,37
2 1/2	79,26	79,95	0,69	79,42	0,16	78,35	0,91	77,28	1,98
3	53,09	53,64	0,55	53,22	0,13	52,36	0,73	51,50	1,59
3 1/2	35,56	36	0,44	35,66	0,10	34,99	0,57	34,32	1,24
4	23,75	24,15	0,40	23,90	0,15	23,38	0,37	22,87	0,88
4 1/2	15,96	16,21	0,25	16,01	0,05	15,63	0,33	15,24	0,72
5	10,69	10,87	0,18	10,73	0,04	10,44	0,25	10,16	0,53
5 1/2	7,16	7,19	0,03	7,19	0,03	6,98	0,18	6,77	0,39
6	4,79	4,82	0,03	4,82	0,03	4,66	0,13	4,51	0,28

POINT 40 :

t en H.	Θ théorique	Θ calculée I = 30 s	Δ_I	$\Theta_{I'}$ I' = I'	$\Delta_{I'}$	$\Theta_{I''}$ I'' = 2'	$\Delta_{I''}$	$\Theta_{I'''}$ I''' = 3'	$\Delta_{I'''}$
1/2	669,68	671,00	1,32	670,10	0,42	668,29	1,39	666,45	3,23
1	448,47	450,24	1,77	449,04	0,57	446,61	1,86	444,16	4,31
1 1/2	300,34	302,11	1,77	300,90	0,56	298,47	1,87	296,01	4,33
2	201,13	202,71	1,58	201,63	0,50	199,46	1,67	197,28	3,85
2 1/2	134,69	136,02	1,33	135,12	0,43	133,30	1,39	131,47	3,22
3	90,20	91,27	1,07	90,54	0,34	89,08	1,12	87,62	2,58
3 1/2	60,41	61,24	0,83	60,67	0,26	59,53	0,88	58,39	2,02
4	40,45	41,09	0,64	40,66	0,11	39,78	0,67	38,92	1,53
4 1/2	27,09	27,57	0,48	27,24	0,15	26,59	0,50	25,94	1,15
5	18,14	18,50	0,36	18,26	0,12	17,77	0,37	17,28	0,86
5 1/2	12,15	12,24	0,09	12,23	0,08	11,87	0,23	11,52	0,63
6	8,14	8,20	0,06	8,20	0,06	7,93	0,21	7,68	0,46

Essai N° 2 :

On prend comme répartition initiale : $\psi(x,y) = 1000 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$

Conditions de Dirichlet : $\theta(x,y,t) = 0$ sur les bords.
La solution théorique est cette fois : (cf § I.A)

$$\boxed{\theta(x,y,t) = 1000 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} e^{-\pi^2 D\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2}\right)t}}$$

Réseau de 16 points intérieurs : c'est le même que précédemment (Essai I, II).

Résultats :
=========
POINT 8.-

t en H.	θ théorique	$\theta_{1=30s}$	Δ1	$\theta_{1'=1'}$	Δ1'	$\theta_{1''=2'}$	Δ1''	$\theta_{1'''=3'}$	Δ1'''
1/2	62 39	66 77	4,38	65,78	3,39	63,77	1,38	61,69	0,70
1	15 57	17,83	2,26	17,31	1,74	16,26	0,69	15,22	0,35
1 1/2	3,89	4,76	0,87	4,55	0,66	4,15	0,26	3,76	0,13
2	0,97	1,27	0,30	1,20	0;23	1,06	0,09	0,93	0,04
2 1/2	0,24	0,34	0,10	0,31	0,07	0,27	0,03	0,23	0,01
3	0,06	0,09	0,03	0,08	0,02	0,07	0,01	0,06	0,00

.../...

POINT 12 :

t en H.	θ théorique	θ_1 1 = 30s	Δ_1	$\theta_{1'}$ 1'=1'	$\Delta_{1'}$	$\theta_{1''}$ 1'' = 2'	$\Delta_{1''}$	$\theta_{1'''}$ 1'''=3'	$\Delta_{1'''}$
1/2	201,93	216,06	14,13	212,88	10,95	206,36	4,43	199,63	2,30
1	50,40	57,70	6,30	56,01	5,61	52,63	2,23	49,26	1,26
1 1/2	12,58	15,41	2,83	14,74	2,16	13,43	0,85	12,16	0,42
2	3,14	4,12	0,98	3,88	0,74	3,42	0,28	3,00	0,14
2 1/2	0,78	1,10	0,32	1,02	0,24	0,87	0,09	0,74	0,04
3	0,19	0,29	0,10	0,27	0,08	0,22	0,03	0,18	0,01

POINT 24 : (On retrouve numériquement, le fait que les points 8 & 24 ont des températures identiques).

t en H.	θ théorique	θ_1 1 = 30s	Δ_1	$\theta_{1'}$ 1' =1'	$\Delta_{1'}$	$\theta_{1''}$ 1'' = 2'	$\Delta_{1''}$	$\theta_{1'''}$ 1'''=3'	$\Delta_{1'''}$
1/2		66,77		65,78		63,77		61,69	
1		17,83		17,31		16,26		15,22	
1 1/2		4,76		4,55		4,15		3,76	
2		1,27		1,20		1,06		0,93	
2 1/2		0,34		0;31		0,27		0,23	
3		0,09		0,08		0,07		0,06	

.../...

POINT 29 :

t en H.	θ théorique	θ_{1} 1 = 30 s	Δ_1	$\theta_{1'}$ 1 = 1'	$\Delta_{1'}$	$\theta_{1''}$ 1'' = 2'	$\Delta_{1''}$	$\theta_{1'''}$ 1''' = 3'	$\Delta_{1'''}$
1/2	- 45,34	- 48,51	3,17	- 47,79	2,45	-46,33	0,99	-44,82	0,52
1	- 11,32	- 12,95	1,63	-12,57	1,25	-11,82	0,50	-11,06	0,26
1 1/2	- 2,82	- 3,46	0,64	- 3,31	0,49	- 3,01	0,19	- 2,73	0,09
2	- 0,70	- 0,92	0,22	- 0,87	0,17	- 0,77	0,07	- 0,67	0,03
2 1/2	- 0,17	- 0,25	0,08	- 0,23	0,06	- 0;20	0,03	- 0,17	0,00
3	- 0,04	- 0,07	0,03	- 0,06	0,02	- 0,05	0,01	- 0,04	0,00

POINT 32 :

t en H.	θ théorique	θ_{1} 1 = 30s	Δ_1	$\theta_{1'}$ 1 = 1'	$\Delta_{1'}$	$\theta_{1''}$ 1'' = 2'	$\Delta_{1''}$	$\theta_{1'''}$ 1''' = 3'	$\Delta_{1'''}$
1/2	- 139,53	-149,29	9,76	-147,09	9,76	-142,59	3,06	-137,94	1,59
1	- 34,83	- 39,87	5,04	- 38,70	3,87	- 36,37	1,54	- 34,04	0,79
1 1/2	- 8,69	- 10,65	1,96	- 10,18	1,49	- 9,28	0,59	- 8,40	0,20
2	- 2,17	- 2,84	0,67	- 2,68	0,51	- 2,37	0,20	- 2,07	0,10
2 1/2	- 0,54	- 0,76	0,22	- 0,70	0,16	- 0,60	0,06	- 0,51	0,03
3	- 0,13	- 0,20	0,07	- 0,18	0,05	- 0,15	0,02	- 0,13	0,00

.../...

POINT37 :

t en H.	θ théorique	θ1 1 = 30s	Δ1	θ1' 1 = 1'	Δ1'	θ1'' 1'' = 2'	Δ1''	θ1''' 1''' = 3'	Δ1'''
1/2	- 146,71	-156,98	10,27	-154,66	7,95	-149,93	3,22	-145,04	1,67
1	- 36,62	- 41,92	5,30	- 40,70	4,08	- 38,24	1,62	- 35,79	0,83
1 1/2	- 9,14	- 11,19	2,05	- 10,71	1,57	- 9,75	0,61	- 8,83	0,31
2	- 2,28	- 2,99	0,71	- 2,82	0,54	- 2,49	0,21	- 2,18	0,10
2 1/2	- 0,57	- 0,80	0,23	- 0,74	0,17	- 0,63	0,06	- 0,54	0,03
3	- 0,14	- 0,21	0,07	- 0,19	0,05	- 0,16	0,02	- 0,13	0,01

POINT 40 :

t en H.	θ théorique	θ1 1 = 30s	Δ1	θ1' 1 = 1'	Δ1'	θ1'' 1'' = 2'	Δ1''	θ1''' 1''' = 3'	Δ1'''
1/2	- 249,60	-267,07	17,47	-263,13	13,53	-255,07	5,47	-246,76	2,84
1	- 62,30	- 71,32	9,02	- 69,24	6,94	- 65,06	2,76	- 60,89	1,41
1 1/2	- 15,55	- 19,05	3,50	- 18,22	2,67	- 16,59	1,04	- 15,02	0,53
2	- 3,88	- 5,09	1,21	- 4,79	0,91	- 4,23	0,35	- 3,71	0,17
2 1/2	- 0,97	- 1,36	0,39	- 1,26	0,29	- 1,08	0,11	- 0,91	0,06
3	- 0,24	- 0,36	0,12	- 0,33	0,09	- 0,27	0,03	- 0,22	0,02

.../...

Essai N° 3 :
==========

On prend comme répartition initiale : φ (x, y) = Constante = 1500°C

Conditions aux limites : On maintient les bords à une température constante de 100°C

Solution théorique :

On cherche θ (x, y, t) Solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = D(\Delta \theta) \\ \theta(xyt)\big|_{\Gamma} = 100 \end{cases}$$

Posons φ (x, y, t) = θ (x, y, t) - 100.

φ (x, y, t) vérifie alors le système :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \Delta \varphi$$

$$\varphi(xyt)\big|_{\Gamma} = 0$$

dont nous avons trouvé la solution : (§ A.T)

On a obtenu : $\varphi(x, y, t) = \dfrac{4}{ab} \sum_{n,m} c_{nm}\, u_n(x)\, v_m(y)\, e^{-\pi^2 D\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) t}$

avec :

$$c_{nm} = \iint \varphi(xy0)\, u_n(x)\, v_m(y)\, dx\, dy$$

Or $\varphi = \theta - 100$ d'où : $\varphi(x,y,o) = \theta(x,y,o) - 100 = 1500 - 100 = 1400$ °C

Et en écrivant maintenant que θ (x,y,t) = φ(x,y,t) + 100 il vient sans difficultés

$$\theta(xyt) = 100 + \frac{4}{ab} \sum_{n,m} \left[\iint 1400 \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b}\, dx\, dy \right] u_n(x)\, v_m(y)\, e^{-\nu_{nm}^2 t}$$

.../...

Calculons $C_{n,m}$:

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x\,dx = -\frac{a}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{a}x\Big]_0^a = \frac{a}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

d'où : $$C_{n,m} = \frac{ab}{nm\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^m\right]$$

Il est évident que les $C_{n,m}$ sont nuls, pour toute valeur <u>paire</u> de n, <u>ou</u> de m. et valent $\frac{4\,ab}{nm\pi^2}$ pour les autres valeurs.

$\Theta(x, y, t)$ se réduit donc à :

$$\Theta(x, y, t) = 100 + \frac{22.400}{\pi^2}\left[\sum_{\substack{n,m\\ \text{impairs}}} \frac{\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot\sin\frac{m\pi y}{b}}{n\,m}\, e^{-\pi^2 D\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)t}\right]$$

posons $$A_{nm} = \frac{\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi y}{b}}{m\,n}$$

et $$B_{n,m} = e^{-\pi^2 D\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)t}$$

d'où $$\Theta(x, y, t) = 100 + \frac{22.400}{\pi^2}\sum_{\substack{n,m\\ \text{impairs}}} A_{nm}B_{nm}$$

On a calculé la solution théorique en ne prenant que les 4 premiers termes.

Cette approximation étant justifiée par la décroissance rapide des termes $B_{n,m}$ d'une part, et l'alternance du signe des $A_{n,m}$ d'autre part.

.../...

Essai N° 4 :
==========

Prenons comme distribution initiale ψ (x y)

$$\psi(x,y) = 10\left(\cos\lambda_1 x + \frac{\alpha}{\lambda_1}\sin\lambda_1 x\right)\left(\cos\mu_1 y + \frac{\alpha}{\mu_1}\sin\mu_1 y\right)$$

λ_1 et μ_1 solution de : $\operatorname{tg}\lambda_1 a = \frac{2\alpha\lambda_1}{\lambda_1^2 - \alpha^2}$ et $\operatorname{tg}\mu_1 b = \frac{2\alpha\mu_1}{\mu_1^2 - \alpha^2}$

les bords de la plaque étant soumis à des conditions de Fourier
En se référant au paragraphe A.II La solution théorique est :

$$\boxed{\theta(x,y,t) = 10\left[\cos\lambda_1 x + \frac{\alpha}{\lambda_1}\sin\lambda_1 x\right]\left[\cos\mu_1 y + \frac{\alpha}{\mu_1}\sin\mu_1 y\right] e^{-D(\lambda_1^2+\mu_1^2)t}}$$

Calcul de λ_1 et μ_1

On a calculé λ_1 et μ_1 par tâtonnement.
Posons $a\lambda_n = X_n$ on est alors amené à trouver X_n vérifiant

$$\boxed{\operatorname{tg} X_n = \frac{2\alpha a X_n}{X_n^2 - a^2\alpha^2}}$$

On localise grossièrement x_1 entre x_o et x_1 par exemple.

On calcule alors, à l'aide de l'ordinateur l'écart $\delta = \left(\operatorname{tg} x - \frac{2\lambda a x}{x^2 - a^2\lambda^2}\right)$ aux points x_o, $x_o + h$, ..., $x_1 - \beta h$ $(\beta \leq 1)$. On trouve ainsi l'abscisse $x_o + ih$ pour laquelle δ est le plus faible. On a alors encadré X_1 entre 2 nouvelles valeurs qui sont $x_o + (i-1)h$ et $x_o + (i+1)h$ et qui vont servir de nouvel intervalle pour recommencer le processus en prenant un pas h plus faible que le précédent, et ceci jusqu'à ce qu'on ait la précision désirée.

Le calcul de λ_1 et μ_1 a été mené semi-automatiquement, (Le calcul a duré environ 1/4 d'heure dont deux minutes de calcul sur machine) et on s'est arrêté à $\delta < 10^{-7}$
On a obtenu pour = 1/4 :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{X_1}{a} = 0{,}03572175 \\ \mu_1 = \frac{X'_1}{b} = 0{,}02454859 5 \end{cases}$$

.../...

Réseau de 16 points :
==========
RESULTATS : POINT 8

t en H.	théorique	l calculée: l = 30 s	l;	l' l' = 1'	l'	l'' l''= 2'	l''	l''' l'''= 3'	l'''
1/2	81,83	82,61	0,78	82,53	0,70	82,37	0,54	82,21	0,38
1	58,35	59,15	0,80	59,04	0,69	58,81	0,46	58,58	0,23
1	41,61	42,31	0,70	42,19	0,58	41,95	0,34	41,71	0,10
2	29,67	30,26	0,59	30,15	0,48	29,92	0,25	29,68	0,01
2	21,16	21,64	0,48	21,54	0,38	21,33	0,17	21,13	0,03
3	15,09	15,47	0,38	15,39	0,30	15,21	0,12	15,04	0,05

POINT 12 :

t en H.	théorique	l l = 30 s	l	l' l' = 1'	l'	l'' l'' = 2'	l''	l''' l''' = 3'	l'''
1/2	197,30	198,22	0,92	198,03	0,73	197,64	0,34	197,24	0,06
1	140,69	141,82	1,13	141,55	0,86	141,01	0,32	140,46	0,23
1	100,32	101,44	1,12	101,15	0,83	100,57	0,25	99,98	0,34
2	71,54	72,55	1,01	72,27	0,73	71,72	0,18	71,16	0,38
2	51,01	51,88	0,87	51,63	0,62	51,14	0,13	50,65	0,36
3	36,37	37,09	0,72	36,89	0,52	36,47	0,10	36,04	0,33

POINT 24 :

t en H.	théorique	l l = 30 s	l	l' l' = 1'	l'	l'' l'' = 2'	l''	l''' l''' = 3'	l'''
1/2	360,72	361,57	0,85	361,22	0,50	360,51	0,21	359,79	0,93
1	257,22	258,56	1,34	258,06	0,84	257,07	0,15	256,06	1,16
1	183,42	184,89	1,47	184,37	0,95	183,31	0,11	182,24	1,18
2	130,79	132,21	1,42	131,71	0,92	130,71	0,08	129,69	1,10
2	93,26	94,54	1,28	94,10	0,84	93,20	0,06	92,30	0,96
3	66,50	67,61	1,11	67,22	0,72	66,45	0,05	65,68	0,82

.../...

POINT 29 :

t en H.	théorique	l l = 30 s	l	l' l' = 1'	l'	l'' l''= 2'	l''	l''' l'''= 3'	l'''
1/2	204,75	206,08	1,33	205,88	1,13	205,48	0,73	205,08	0,33
1	146,00	147,41	1,41	147,13	1,13	146,56	0,56	145,99	0,01
1	104,11	105,41	1,30	105,11	1,00	104,51	0,40	103,89	0,22
2	74,24	75,37	1,13	75,09	0,85	74,51	0,27	73,94	0,30
2	52,94	53,90	0,96	53,64	0,70	53,13	0,19	52,62	0,32
3	37,75	38,54	0,79	38,32	0,57	37,88	0,13	37,44	0,31

POINT 32 :

t en H.	théorique	l l = 30 s	l	l' l' = 1'	l'	l'' l''= 2'	l'''	l''' l'''= 3'	l'''
1/2	473,61	474,46	0,84	474,00	0,38	473,08	0,53	472,14	1,475
1	337,72	339,16	1,44	338,52	0,80	337,21	0,51	335,89	1,83
1	240,82	242,50	1,68	241,81	0,99	240,42	0,40	239,01	1,81
2	171,72	173,40	1,68	172,74	1,02	171,42	0,30	170,09	1,63
2	122,45	123,99	1,54	123,41	0,96	122,23	0,22	121,05	1,40
3	87,32	88,66	1,34	88,16	0,84	87,15	0,17	86,14	1,18

.../...

POINT 37 :

t en H.	théorique	l l = 30 s	l	l' l' = 1'	l'	l'' l'' = 2'	l''	l''' l''' = 3'	l'''
1/2	337,61	338,73	1,12	338,40	0,79	337,75	0,14	337,08	0,53
1	240,74	242,22	1,48	241,76	1,02	240,83	0,09	239,89	0,85
1	171,67	173,20	1,53	172,70	1,03	171,71	0,04	170,71	0,96
2	122,41	123,84	1,43	123,37	0,96	122,43	0,02	121,48	0,93
2	87,29	88,55	1,26	88,14	0,85	87,29	0,00	86,45	0,84
3	62,24	63,32	1,08	62,96	0,72	62,24	0,00	61,52	0,72

POINT

t en H.	théorique	l l = 30 s	l	l' l' = 1'	l'	l'' l'' = 2'	l''	l''' l''' = 3'	l'''
1/2	515,86	516,70	0,84	516,21	0,35	515,20	0,66	514,18	1,68
1	367,84	369,32	1,48	368,61	0,77	367,19	0,65	365,75	2,09
1	262,30	264,05	1,75	263,30	1,00	261,78	0,52	260,25	2,05
2	187,04	188,80	1,76	188,09	1,05	186,65	0,39	185,20	1,84
2	133,37	135,00	1,63	134,37	1,00	133,09	0,28	131,80	1,57
3	95,11	96,54	1,43	95,99	0,88	94,89	0,22	93,79	1,32

CONCLUSIONS :

Il ressort des résultats obtenus au cours des différents essais précédents que les courbes représentant l'écart Δ en fonction du temps t du refroidissement correspondant ont toutes sensiblement la même allure à partir de $t = 1$ heure. Ceci quel que soit le pas $\underline{l}$ choisi.

L'écart Δ décroit quand le temps augmente.
Il ressort également que la valeur optimum à choisir pour l n'est pas nécessairement la plus petite.
Ainsi, pour l'essai avec Conditions de Fourier, on constate que c'est $\underline{l = 2'}$ qui donne la meilleure précision.
Il semblerait que la valeur optimum pour $\underline{l}$ soit liée à la nature de la répartition initiale : Ainsi pour les conditions de Dirichlet :

Répartition	$1000 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$	:	l optimum = 1'
"	$1000 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}$	:	" = 3'
"	1500° et 100° sur Γ	:	" = 30 s.

On ne peut donc pas savoir à priori quelle valeur donner à l pour avoir la meilleure précision.

Il est à remarquer cependant que les écarts Δ deviennent rapidement inférieurs à 10° C. dans les cas les plus défavorables.

Si un réseau très fin donne une meilleure précision, cet avantage est contré par un accroissement considérable du temps de calcul, donc du prix de revient, alors que le réseau de 16 points utilisé donne une précision qui nous semble satisfaisante, compte tenu de la précision des mesures qui peuvent être faites expérimentalement à des températures aussi élevées que celles que nous rencontrerons dans le problème réel.

EXEMPLE d'INSTABILITE de la METHODE des DIFFERENCES FINIES :

On étudie une plaque d'acier de 120 x 82 cm-

Ψ (x y) = Constante = 1500° C

θ (x y t) = Constante = 0 sur les bords (condition de Dirichlet).

Le réseau utilisé est le réseau à 25 mailles pour le quart de la plaque.

On a : h = 8,2 cm

k = 12 cm

$$D_a = \frac{K_a}{\rho_a C_a} = \frac{0,01}{7,2 \times 0,16} = 0,05208$$

d'où la limite d'instabilité $L = \dfrac{1}{2 D_a \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)}$ # 7' 20"

pour l = 7' les résultats sont encore corrects alors que pour l = 9' l'instabilité apparaît dès que t = 2 h.

Résultats : $\ell = 9' > L$

t	θ calculée Point 40	θ calculée Point 12
2 h.	1.013,5° C	255° C
2 h. 06'	1.033,9	484
2 h. 15'	849,2	128,7
2 h. 24'	1.010,6	538,5
3 h.	1.420,4	947,06
3 h. 09'	- 422,9	- 747,.5
3 h. 18'	+ 2.195,6	+ 1.465,3
3 h. 27'	- 1.725,3	- 1.505,6
3 h. 36'	+ 3.883,5	+ 2.426,66
3 h. 45'	- 4.301	- 2.856,4
4 h. 54'	+ 7.392	+ 4.201
4 h. 03'	- 9.428,8	"
4 h. 12'	+ 14.515,7	"
4 h. 27'	- 19.631,9	"
4 h. 30'	+ 28.794,5	"

-o-o-o-o-o-

2ème PARTIE

-o-o-o-

RESOLUTION DU PROBLEME CONCRET

POSITION DU PROBLEME :

Le but de cette étude concréte est de trouver le conditionnement idéal (temps de séjour en lingotière, temps de séjour sur Car, temps de réchauffage en Pitts) permettant d'obtenir à la sortie des Pitts une répartition aussi homogène que possible des températures à l'intérieur du lingot.

La solution ne pouvant être trouvée directement, il fallait procéder par tâtonnement, c'est-à-dire calculer plusieurs conditionnements jusqu'à en obtenir un qui soit satisfaisant, le choix de ces conditionnements étant laissé au flair de l'opérateur.

Le calcul d'un conditionnement complet est en réalité constitué par 3 problèmes différents. Celui du séjour en lingotière, celui du refroidissement du lingot nu pendant son séjour sur Car et enfin celui du réchauffage en Pitts.

D'autre part, pour les points du réseau situés sur les faces extérieures de la lingotière et à l'interface lingot/lingotière se pose un problème qui présente certaines difficultés mathématiques du fait que les calculs conduisent à résoudre un système de 2 équations du 4ème degré à 2 inconnues dont on ne peut donner de solution formelle.

C'est la résolution de ces 2 derniers problèmes qui est exposée dans ce qui suit

I) PROBLEME DE LA CHALEUR LATENTE DE FUSION :

Ce problème se pose dès qu'on se trouve en présence d'un point du métal qui vient d'atteindre la température de fusion de ce métal.

Si c'est au cours d'un échauffement, le phénomène de la chaleur latente s'interprète de la façon suivante :

.../...

Dès qu'un point du métal atteint la température de fusion, il cesse de s'échauffer tant qu'il n'a pas reçu une certaine quantité de chaleur C appelée chaleur latente de fusion. Dans le cas d'un refroidissement, c'est le phénomène inverse qui se produit. Dès que le point atteint la température de fusion, il cesse de se refroidir tant qu'il n'a pas évacué la même quantité de chaleur C précédente.

Dans le problème qui nous est posé, c'est à ce dernier cas que l'on a affaire. On a résolu ce problème en bloquant la température du point considéré, à la température de fusion, et ceci, le temps nécessaire à l'évacuation de la quantité C.

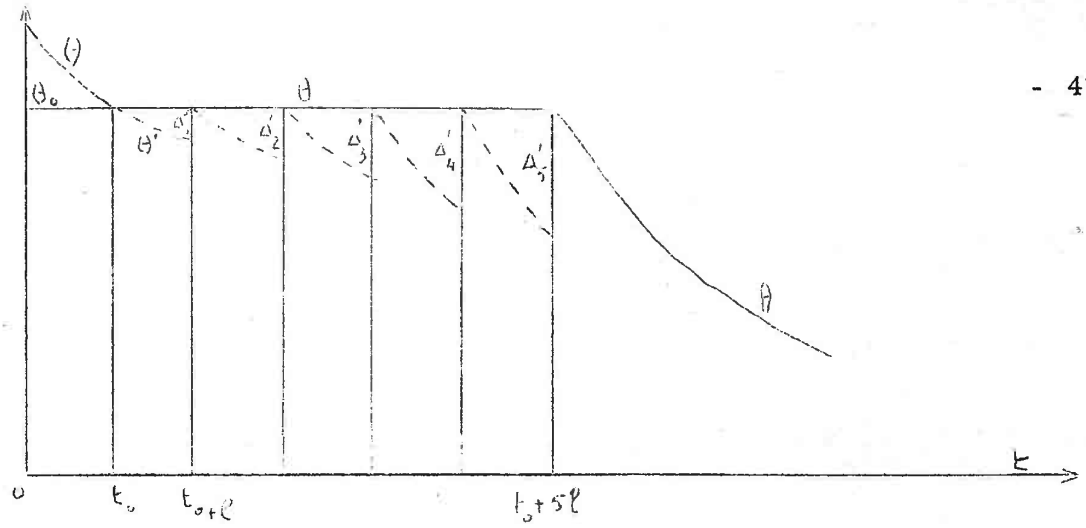
Cependant, au lieu de considèrer une perte de calories, on a préféré considérer une baisse de température fictive qui se prêtait mieux aux calculs.

Soit c la chaleur spécifique du métal et C sa chaleur latente de fusion . Si le phénomène de la chaleur latente ne se produisait pas, l'évacuation de C calories provoquerait, pour une masse de un gramme de métal, une baisse de température sensiblement égale à $\frac{C}{c}$ °C (Il est facile de voir, ici, que la masse n'intervient pas dans le calcul).

Donc, si on associe au point considéré une température fictive (obéissant à l'équation de la chaleur), on devra bloquer ce point à la température de fusion tant que sa température fictive n'aura pas accusé une baisse totale au moins égale à $\frac{C}{c}$ °C

Exemple : Soit l le pas d'intégration (l = 60 secondes par exemple) et θ_0 la température de fusion du métal atteinte à l'instant t et supposons de plus le métal coulé à une température supérieure à θ_c. On a alors le graphique suivant : θ étant la température réelle du point considéré.

.../...



------ θ réelle

- - - - température fictive θ'

On bloque le point à la température θ_0 tant que $\sum \Delta'_i < \frac{C}{c}$, par exemple, la courbe ci-dessus correspond à $\frac{C}{c} = \sum \Delta'_i$ mais le programme tient compte du fait que pratiquement on a jamais $\sum \Delta'_i = \frac{C}{c}$

<u>Remarque</u> : (les accroissements fictifs Δ'_i vont en croissant car, tandis que le point considéré reste bloqué à la température θ_0, les points voisins utilisés dans le calcul de θ' se refroidissent, augmentant ainsi le gradient de température au voisinage du point).

<u>Pratiquement</u>, à chaque pas d'intégration 1 au lieu de considérer $\sum \Delta'_i$ on modifie la quantité $\frac{C}{c}$

Initialement, on a affecté à chaque point intérieur du lingot, une mémoire dans laquelle on a placé le nombre $\frac{C}{c}$.

Au 1er pas d'intégration, on calcule Δ'_1 que l'on retranche de $\frac{C}{c}$ et que l'on met à la place de $\frac{C}{c}$ qui devient donc $\frac{C}{c} - \Delta'_1$

De même à la seconde intégration $\frac{C}{c} - \Delta'_1 \rightarrow \frac{C}{c} - \Delta'_1 - \Delta'_2$ .....etc et on bloque le point à la température θ_0 tant que la quantité $\frac{C}{c} - \sum \Delta'_i$ reste positive.

.../...

Dès que cette quantité devient négative, $= -\tau$ on met le point considéré à la température $\theta_0 - \tau$ et on ne repasse plus, du moins pour ce point, par l'intermédiaire de θ'

Le pochoir de calcul de θ' donc de Δ'_i est exactement le pochoir 5, indiqué dans la première partie.

II) DIFFERENTES PHASES DU REFROIDISSEMENT ET DU RECHAUFFAGE.

1) Première phase : lingot dans sa lingotière.

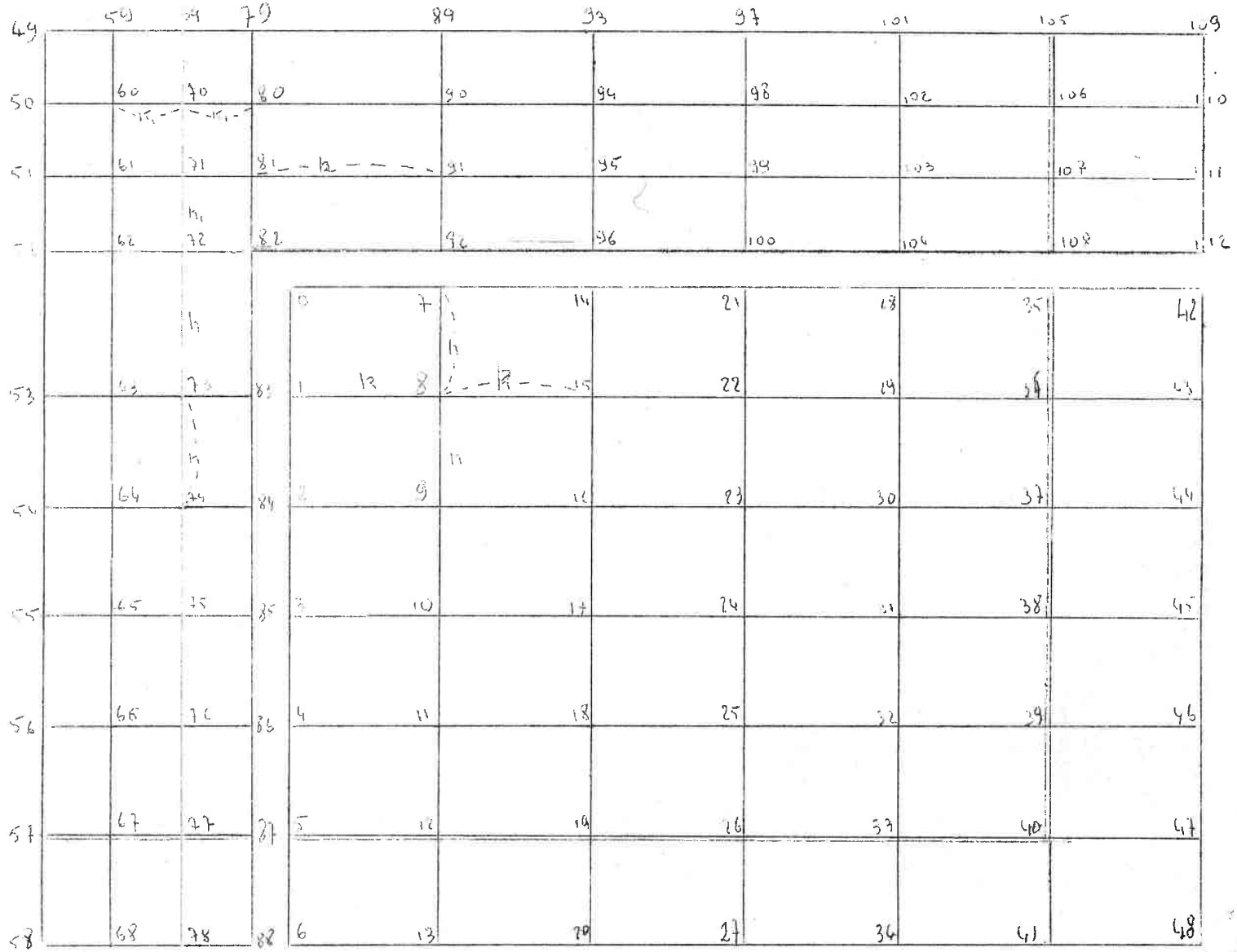
Problèmes de l'interface et des faces extérieures de la lingotière.

Donnons tout d'abord le schéma du réseau de point utilisé avec la numérotation correspondante.

Cette numérotation ne correspond pas exactement à l'ordre dans lequel se font les différents calculs, mais elle permet par un simple court-circuitage des instructions de passer immédiatement de la 1ère phase "lingot dans la lingotière" à la seconde phase "lingot nu".

Réseau utilisé : à l'interface, les noeuds sont représentés distincts mais ils sont géométriquement confondus, le retrait du métal étant négligeable par rapport aux dimensions du lingot.

.../...



A) PROBLEME DE L'INTERFACE :

Calcul du flux calorifique. - Nous admettrons dans tous les calculs, que le décollement du lingot dans la lingotière est instantané, ce qui, d'après les résultats de M.M. SARJANT & SLACK ("Journal of the iron and steel institute" Août 1954 N° 4), n'introduit pas de différences appréciables avec les résultats obtenus en considérant un décollement progressif.

On a pris pour valeur du flux calorifique rayonnant à travers l'interface lingot/lingotière la quantité Q.

$$|Q| = |q_a - q_f| = \sigma \varepsilon \, |T_a^4 - T_f^4|$$

où : σ est la constante de Stéfan qui vaut ici $\sigma = 1,3564593 \, 10^{-12}$ cal/cm²/(d°K)⁴

ε est le facteur d'émission effectif.

T indique qu'il s'agit de températures absolues.

Les indices a et f se rapportent au lingot et à la lingotière respectivement.

Il y a lieu de tenir compte du signe de la quantité

$$Q = \sigma \varepsilon (T_a^4 - T_f^4) \qquad \text{flux sortant} > 0$$

pour l'établissement des équations suivant qu'il s'agit d'un point du réseau situé sur la lingotière ou sur le lingot.

Calcul de ε .

Si ε_a et ε_f sont les facteurs d'émisssions respectivement de l'acier et de la fonte on a :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a \varepsilon_f}{\varepsilon_a + \varepsilon_f - \varepsilon_a \varepsilon_f}$$

Si de plus on considère que $\varepsilon_a = \varepsilon_f$ l'égalité ci-dessus devient :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{2 - \varepsilon_a} = \frac{\varepsilon_f}{2 - \varepsilon_f}$$

D'autre part, on voit qu'en prenant pour valeur du flux la quantité Q précédente, on n'a pas tenu compte du phénomène de convexion à l'interface.

.../...

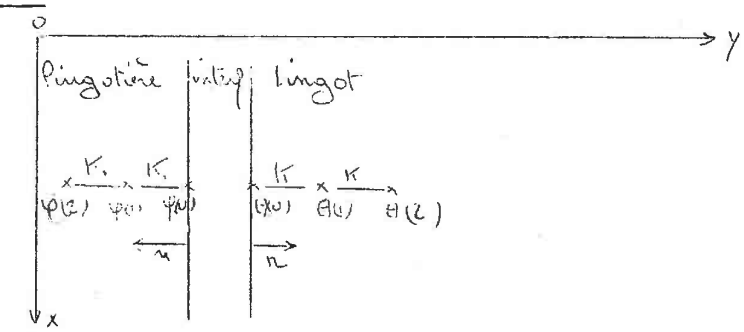
Nous prendrons désormais pour notation, $\sigma = \sigma\varepsilon$

On a donc $$Q = \sigma\left(T_a^4 - T_f^4\right)$$

Différentes équations à l'interface :

Le calcul des noeuds à l'interface lingot/lingotière, ainsi que des noeuds des faces externes de la lingotière à l'instant t, se fait après avoir calculé les noeuds intérieurs au lingot et à la lingotière au même instant.

1er Cas :



a) pour le lingot :

On connait les températures sbsolues $\varphi(1), \varphi(2), \theta(1), \theta(2)$, à l'instant t et on se propose de calculer $\varphi(0) = x$ et $\theta(0) = y$ au même instant. On a, si K_a est la conductibilité de l'acier :

$$Q = K_a \frac{\partial \theta}{\partial n} = K_a \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

et en écrivant $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ sous forme de différences finies, on obtient sans difficultés :

$$\boxed{K_a\left(y^4 - x^4\right) + 3y + A = 0}$$

avec :

$$A = 4\theta(1) - \theta(2) \quad ; \quad \alpha_a = \frac{2K\sigma}{K_a}$$

.../...

b) pour la lingotière :

On obtient de même l'équation :

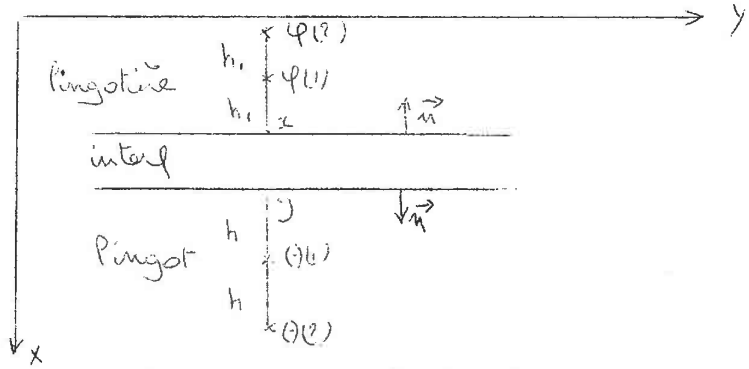
$$\boxed{\alpha_g(y^4 - x^4) - 3x + B = 0}$$

avec $B = h_1 \varphi(1) - \varphi(2)$; $\alpha_g = \dfrac{2 h_1 \sigma}{K_g}$

Donc, pour calculer x et y on a à résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_a(y^4 - x^4) + 3y - A = 0 \\ \alpha_g(y^4 - x^4) - 3x + B = 0 \end{cases}$$

2ème Cas :



On obtient de même le système à résoudre :

$$(S') \quad \begin{cases} \alpha'_a(y^4 - x^4) + 3y - A' = 0 \\ \alpha'_g(y^4 - x^4) - 3x + B' = 0 \end{cases}$$

.../...

avec $\alpha'_a = \frac{2h.\sigma}{K_a}$; $A' = 4\theta(1) - \theta(2)$

$\alpha'_g = \frac{2h.\sigma}{K_g}$; $B' = 4\varphi(1) - \varphi(2)$

B) PROBLEME DES FACES EXTERIEURES DE LA LINGOTIERE.

Calcul du flux calorifique :

Au cours du refroidissement en lingotière, la lingotière rayonne de la chaleur vers l'atmosphère extérieure et le flux rayonnant peut alors s'écrire si T_a est la température ambiante (température absolue) supposée constante au cours du refroidissement

$$Q_R = \sigma_{Rg}(T_g^4 - T_a^4) \quad \text{où} \quad \sigma_{Rg} = 1{,}35646.10^{-12} \times \varepsilon_g$$

On a d'autre part évalué les pertes de chaleur par convection, par la quantité

$$Q_c = 6.10^{-4}(T_g - T_a)$$

Le coefficient 6.10^{-4} a été calculé expérimentalement.
Finalement, la perte totale de chaleur dûe au rayonnement et à la convection s'écrit :

$$Q = \sigma_{Rg}(T_g^4 - T_a^4) + 6.10^{-4}(T_g - T_a)$$

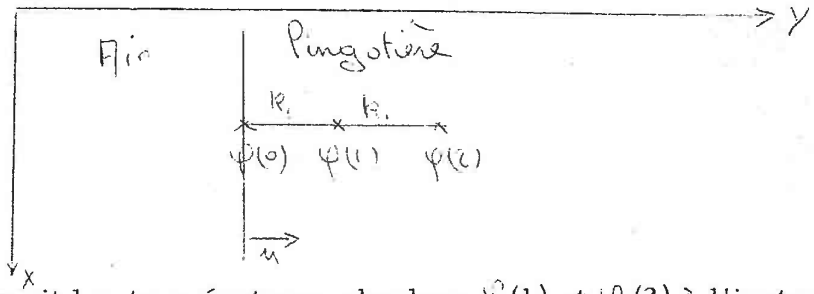
soit, en posant $T_f = x$

$$\boxed{Q = \sigma_{Rg}(x^4 - T_a^4) + 6.10^{-4}(x - T_a)}$$

.../...

Etablissement des différentes équations :

1er cas : concernant les points 50, 51, 52, ... 57



On connait les températures absolues $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$ à l'instant t et on se propose de calculer la température $\varphi(0) = x$ au même instant t.

On a encore : $Q = K_g \dfrac{\partial \theta}{\partial \eta}$

Soit encore : $Q = K_g \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$

ou encore $K_g \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \sigma_{Rg}(x^4 - T_a^4) + 6.10^{-4}(x - T_a)$

et en écrivant $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ sous forme de différences finies, on obtient sans difficultés, en tenant compte de : $4\varphi(1) - \varphi(2) = 3x + 2k_1 \dfrac{\partial \theta}{\partial y}(0)$

$$4\varphi(1) - \varphi(2) = \frac{2k_1\sigma_{Rg}}{K_g}x^4 + \left(3 + \frac{12.10^{-4}k_1}{K_g}\right)x - T_a\left(\frac{12.10^{-4}k_1}{K_g} + \frac{2k_1\sigma_{Rg}}{K_g}T_a^3\right)$$

.../...

Soit en posant $4\varphi(1) - \varphi(2) = D$; $\frac{2k_1\sigma\beta_g}{K_g} = \delta_g$; et $\frac{12.10^{-4}k_1}{K_g} = \beta_g$

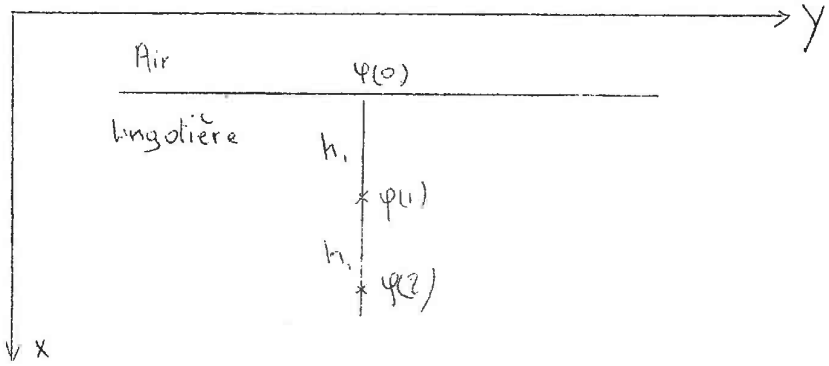
$$\delta_g x^4 + (3+\beta_g)x - T_a(\delta_g T_a^3 + \beta_g) - B = 0$$

Soit encore

$$(E) \quad \boxed{\delta_g x^4 + (3+\beta_g)x - D = 0} \qquad D = B + T_a(\delta_g T_a^3 + \beta_g)$$

On a cette fois à résoudre qu'une seule équation du 4ème degré à une inconnue x.

<u>2ème Cas</u> : Concernant les points 59, 69, ... 105



Le problème est exactement le précédent, en remplaçant k_1 par h_1 et $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ par $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ et on aboutit sans difficulté à l'équation :

$$\boxed{\delta'_g x^4 + (3+\beta'_g)x - D' = 0}$$

.../...

avec : $\delta'_g = \frac{2h_1 \sigma_{Rg}}{K_g}$; $\beta'_g = \frac{12.10^{-4} h_1}{K_g}$; et $D' = 4\varphi(1) - \varphi(2) + T_a(\delta'_g T_a^3 + \beta'_g)$

2 : deuxième phase : Lingot à nu.

Dans cette seconde phase, le lingot qui est resté un certain temps en lingotière, est mis à refroidir sur plateforme avant son enfournement dans les Pitts.

C'est ce refroidissement qu'on se propose d'étudier ici.

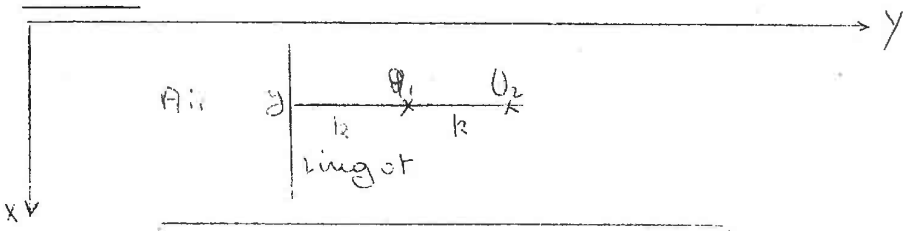
Le calcul des points intérieurs du lingot est inchangé. C'est le même qu'au cours de la 1ère phase. Il n'en est pas de même pour les points du réseau situés sur les faces.

Cependant, ce problème ne pose plus de difficultés puisqu'il a été résolu pour les faces extérieures de la lingotière, au cours de la 1ère phase. Seules les notations changent :

x	devient	y	
k_1	"	k	
h_1	"	h	
σ_{Rg}	"	σ_{Ra}	$= 1,35646.10^{-12} \times \varepsilon_a$

et on obtient ainsi, en faisant les transpositions convenables :

<u>1er cas</u> :

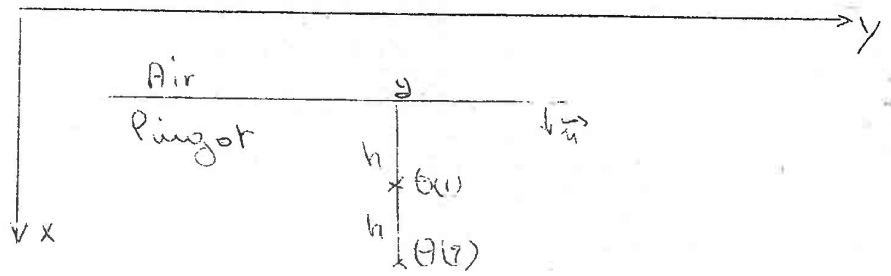


$$\boxed{\delta_a y^4 + (3 + \beta_a) y - F = 0}$$

avec $\delta_a = \frac{2k\,\sigma_{Ra}}{K_a}$; $\beta_a = \frac{12\,10^{-4} k}{K_a}$; $F = 4\theta(1) - \theta(2) + T_a(\delta_a T_a^3 + \beta_a)$

.../...

2ème cas :



$$\boxed{\delta'_a y^4 + (3+\beta'_a)y - E' = 0}$$

avec $\delta'_a = \dfrac{2h\sigma_{Ra}}{K_a}$; $\beta'_a = \dfrac{12.10^{-4}h}{K_a}$; $E' = 4(\theta(1)-\theta(2)) + T_a(\delta'_a T_a^3 + \beta'_a)$

3 : Troisième phase : réchauffage en Pitts.

On a considéré que le four Pitts était une paroi rayonnante à une température qui, aussitôt l'enfournement, croissait jusqu'à devenir constante, au bout d'un temps convenu d'avance.

L'examen de nombreux relevés de températures à l'intérieur du Pits montre que la montée de la température aussitôt l'enfournement est très sensiblement linéaire.

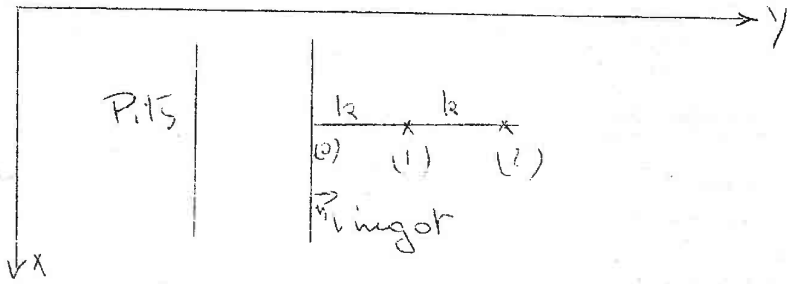
On a donc résolu le problème en considérant une croissance linéaire pendant un certain temps convenu d'avance : à partir d'une certaine température initiale.

Donc, si cette fois on appelle T_a la température absolue des parois de la cellule, on constate qu'on est rigoureusement ramené au problème de la 2ème phase, avec la seule différence que le flux est cette fois $Q = \sigma E_a(y^4 - T_a^4)$ et qu'on doit, à chaque intégration, modifier T_a et ceci pendant la durée de la montée de la température du Pits.

.../...

On a alors les équations :

<u>1er cas</u> :



on a : $K_a \dfrac{\partial \theta}{\partial n} = \sigma_{ra}\left(y^4 - T_a^4\right)$

d'où il vient immédiatement

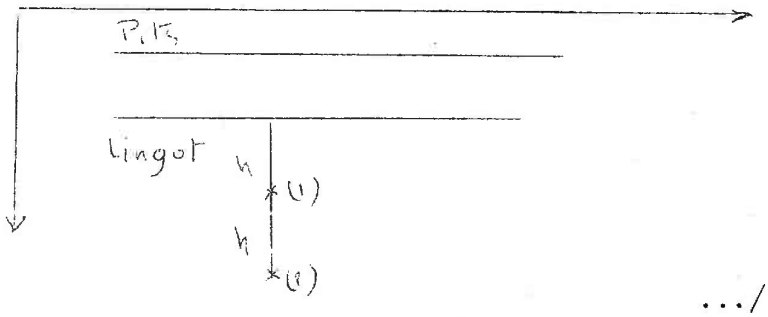
$$4\left(\theta(1) - \theta(2)\right) = 3y + \frac{2k}{K_a}\sigma_{ra}\left(y^4 - T_a\right)$$

soit finalement $\quad y = \dfrac{D + \delta_a T_a^4 - \delta_a y^4}{3}$

$$\boxed{y = \frac{D - \delta_a y^4}{3}}$$

avec $D = 4\,\theta(1) - \theta(2) + \delta_a T_a^4$

<u>2ème cas</u> :



.../...

On a cette fois l'équation ; $\boxed{y = \dfrac{D' - \delta'_a y^4}{3}}$

avec $D' = 4\,\Theta(1) - \Theta(2) + \delta'_a T_a^4$

§ 4 : Résolution pratique des différentes équations rencontrées précédemment.

Le fait que l'on se trouve en présence d'équations du 4ème degré posait certaines difficultés mathématiques. En effet, on ne peut donner à ces équations, des solutions formelles. On a donc été amené à utiliser une méthode numérique se prêtant facilement au calcul sur machine et de plus, ne demandant pas trop de temps d'exécution afin de ne pas trop allonger le temps global nécessaire à la résolution du problème complet.

On avait d'abord pensé à la méthode de Newton, mais elle conduisait à l'écriture de formules très compliquées qui auraient pris un temps considérable sur machine.

Finalement on a adopté une méthode d'approximations successives facile à programmer et à convergence rapide.

Nous avons à résoudre d'une part un système (S) et d'autre part une équation du type (E)

1) Commençons par résoudre l'équation (E).

Cette équation peut immédiatement se transformer pour donner

$$x = \frac{D - \delta_g x^4}{3 + \beta_g}$$

elle est de la forme $x = f(x)$

.../...

Or, on sait qu'on peut résoudre une telle équation par approximation successives.

On considère une suite $x_n = f(x_{n-1})$

Il est clair que si la suite (x_n) est convergente, on a à la limite

$$x = f(x)$$

Il est d'autre part facile de montrer que la suite (x_n) est convergente si $|f'(x)| < 1$ au voisinage de la solution et qu'elle l'est d'autant plus rapidement que $f'(x)$ est voisine de 0.

On montre aussi que même si $|f'(x)| \geqslant 1$, on peut toujours transformer l'équation $x = f(x)$ en une équation équivalente qui, elle, peut se résoudre par la méthode précédente. Ce dernier procédé permet aussi de transformer la suite (x_n) en une suite plus rapidement convergente, si besoin est, en s'arrangeant pour que la dérivée considérée soit aussi petite que possible.

Exemple : supposons $|f'(x)| > 1$ l'équation $x = f(x)$ est équivalente à
======== l'équation $2x = x + f(x)$

soit $x = \dfrac{x + f(x)}{2} = g(x) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1 + f'(x)}{2}$

Soit encore plus généralement $x = \dfrac{(n-1)x + f(x)}{n} = g(x) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{n - 1 + f'(x)}{n}$

On choisit alors, n tel que $n - 1 + f'(x) \neq 0$

n est ici un nombre entier positif ou négatif suivant que f' est négatif ou positif, mais il est bien évident que n peut être un nombre réel quelconque, ce qui peut donner exactement $\underline{n - 1 + f'(x) = 0}$

Dans le cas qui nous intéresse, $f(x) = \dfrac{D - \delta g x^4}{3 + \beta g}$ d'où $f'(x) = -\dfrac{4 \delta g x^3}{3 + \beta g}$

.../...

On sait, d'autre part, que x, dans le problème des faces externes de la lingotière ne dépasse pas $10^3 + 273°K$ ce qui est le cas le plus défavorable pour la convergence de la suite (x_n) Or, on vérifie, que même dans ce cas, on a $|f'(x)| <$

On est donc assuré de la convergence de la suite (x_n)

$$x_n = \frac{D - \delta\rho\, x_{n-1}^4}{3 + \beta\rho}$$

C'est par ce procédé que l'on a résolu l'équation (E) relative à la lingotière en prenant comme valeur initiale x_0 = la température du point considéré calculé au cours de l'intégration précédente, à l'instant t - 1 (1 pas d'intégration).

On a vérifié expérimentalement que la convergence était très rapide et que 2 approximations étaient suffisantes pour la précision que nous désirions. Cependant, étant assuré de la convergence, on ne s'est pas fixé le nombre d'approximations à effectuer, mais on a introduit dans le programme un test ordonnant à la machine de stopper le bouclage dès que deux valeurs successives x_n et x_{n+1} différaient de moins d'une certaine quantité (Procédé qu'on a mis en oeuvre de modifier la précision à obtenir, ce qui eût été impossible si on s'était fixé un certain nombre de boucles).

Dans le cas des faces du lingot, on a dû utiliser le procédé d'accélération de convergence $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{D - \delta\rho\, x_{n-1}^4}{3 + \beta\rho}\right)$ afin d'éviter des ennuis dûs au fait que l'on y rencontre des températures plus élevées (dans les Pits notamment).

2) Résolution du système S :

Ce système peut facilement se transformer en :

$$(S_1) \begin{cases} y = \dfrac{A - \alpha_a(y^4 - x^4)}{3} \\[2ex] x = \dfrac{B + \alpha_g(y^4 - x^4)}{3} \end{cases}$$

.../...

S_1 est de la forme :

$$\begin{cases} y = f(x, y) \\ x = g(x, y) \end{cases}$$

et on peut résoudre ce système en considérant cette fois 2 suites (x_n) et (y_n) telles que :

$$\begin{cases} x_n = g(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$$

On montre de même que dans le cas de l'équation (E) que pour que ces suites soient convergentes, il suffit d'avoir au voisinage de la solution : "Le module de la plus grande des valeurs propres de la matrice suivante est inférieur à 1 :

$$\begin{pmatrix} g'_x & g'_y \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$

et que la convergence est d'autant plus rapide que cette plus grande valeur propre est voisine de 0.

On a adopté le système équivalent,

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}\left[x_{n-1} + \frac{B + \alpha_\beta\left(y_{n-1}^4 - x_{n-1}^4\right)}{3}\right] \\ y_n = \frac{1}{2}\left[y_{n-1} + \frac{A - \alpha_\alpha\left(y_{n-1}^4 - x_{n-1}^4\right)}{3}\right] \end{cases}$$

.../...

:

qui, bien que ne répondant pas au critère précédent, a la chance de converger quand même, et rapidement. (on l'a vérifié expérimentalement).

Note : ce cas particulier prouve que la condition de convergence énoncée
===== précédemment n'est que suffisante.

Le test d'arrêt de bouclage porte cette fois sur les 2 valeurs x_n et y_n.

On arrête le bouclage dès que l'on a simultanèment $|x_n - x_{n-1}|$ et $|y_n - y_{n-1}|$ inférieurs à une certaine quantité fixée au préalable et suffisante pour la précision désirée.

L'équation utilisée sur les faces du lingot dans le Pits est résolue par la méthode accélérée :

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{D - \delta_a y_{n-1}^4}{3}\right)$$

§ 5 : Pochoirs utilisés : Stabilité.

Pour les points intérieurs au lingot et à la lingotière, les pochoirs utilisés sont tous dérivés du pochoir général calculé dans la 1ère partie. Seuls les indices a et f ainsi que les dimensions des mailles changent suivant la position du noeud considéré sur le réseau. On a choisi comme limite de stabilité L une limite inférieure à la plus petite des limites correspondant à chaque pochoir.

Soit $L = \dfrac{\inf(h_1^2, h_2^2, h_3^2, h_4^2)}{4 \sup(D_a, D_f)}$ (D_i diffusivité des matériaux considérés)

§ 6 : Rappel sur la convergence des méthodes de résolution par approximations successives.

1°) Approximation à une seule variable :

On veut résoudre l'équation $x = f(x)$ en étudiant la suite (x_n) telle que :

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Il est évident que si la suite (x_n) converge vers X, X est solution de l'équation posée.

Il s'agit d'étudier la convergence de la suite (x_n). Pour ce, on se ramène à l'étude de la série $\sum u_n$ telle que $u_n = x_n - x_{n-1}$

On a immédiatement : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = x_n - x_0$

Donc la convergence de la série $\sum^{\infty} u_n$ entraîne la convergence de la suite (x_n)

Pour que la série $\sum u_n$ converge il suffit que $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$

Or, $u_{n+1} = x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1})$

Or il existe $\xi \in [x_n, x_{n-1}]$ tel que $f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1}) f'(\xi)$

.../...

Donc il existe ξ tel que $u_{n+1} = (x_n - x_{n-1})\, f'(\xi) = u_n\, f'(\xi)$

Donc tel que. $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |f'(\xi)|$

Donc, pour que $\sum u_n$ converge il suffit que $|f'| < 1$ au voisinage de la solution.

2°) Approximation à deux variables :

On veut résoudre le système (S).

$$(S) \quad \begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(x, y) \end{cases}$$

en étudiant les 2 suites (x_n) et (y_n)

$$(1) \quad \begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = g(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$$

Comme précédemment on se ramène à l'étude des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$

$$(2) \quad \begin{cases} u_n = x_{n+1} - x_n = f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ v_n = y_{n+1} - y_n = g(x_n, y_n) - g(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$$

.../...

La convergence de ces 2 séries entraîne celle des suites (x_n) et (y_n).

Ecrivons (2) sous la forme (3)

$$(3)\quad \begin{cases} u_n = \alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1} \\ v_n = \alpha' u_{n-1} + \beta' v_{n-1} \end{cases}$$

Calculons $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$;

(3) est équivalent à (4)

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha(x_n - x_{n-1}) + \beta(y_n - y_{n-1}) = f(x_n y_n) - f(x_{n-1} y_{n-1}) \\ \alpha'(x_n - x_{n-1}) + \beta'(y_n - y_{n-1}) = g(x_n y_n) - g(x_{n-1} y_{n-1}) \end{cases}$$

et en développant les seconds membres de (4) en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2, on voit immédiatement que :

$$\begin{cases} \alpha \sim f'_x \ ; \ \beta \sim f'_y \\ \alpha' \sim g'_x \ ; \ \beta' \sim g'_y \end{cases}$$

Donc, à la limite, (3) devient (5).

$$(5)\quad \begin{cases} u_n = f'_x u_{n-1} + f'_y v_{n-1} \\ v_n = g'_x u_{n-1} + g'_y v_{n-1} \end{cases}$$

Cherchons des solutions de la forme $u_n = A r^n$; $v_n = B r^n$

.../...

Il est évident que si $|r| < 1$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.
En portant dans (5) il vient

$$\begin{cases} A r^n = A f'_x r^{n-1} + B f'_y r^{n-1} \\ B r^n = A g'_x r^{n-1} + B g'_y r^{n-1} \end{cases} \quad \text{Soit} \quad \begin{cases} A(f'_x - r) + B f'_y = 0 \\ A g'_x + B(g'_y - r) = 0 \end{cases}$$

Système qui n'admet de solutions non nulles que si son déterminant est nul. Ce qui s'écrit :

$$\begin{vmatrix} f'_x - r & f'_y \\ g'_x & g'_y - r \end{vmatrix} = 0$$

On s'aperçoit que r est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$

d'où la conclusion : pour que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et par conséquent les suites (x_n) et (y_n) convergent il suffit que le module de la plus grande valeur propre de la matrice précédente soit inférieur à 1.

Note : La démonstration a été faite dans le cas de 2 variables, mais la généralisation est immédiate.

UNE METHODE DE CALCUL NUMERIQUE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE FONCTION

-o-o-o-o-

: Définition :

On adoptera pour désigner la transformée de Fourier $\hat{f}(y)$ d'une fonction $f(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$ au point y, la définition

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ixy} f(x) \, dx$$

et par inversion :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \hat{f}(y) \, dy$$

Objet de l'étude :

On se propose de calculer numériquement $\hat{f}(y)$ sachant que l'on dispose d'un sous-programme permettant de calculer $f(x)$ en un point x quelconque

Pratiquement cette dernière assertion se traduit par le fait que $f(x)$ est pratiquement nulle pour x extérieur à un certain intervalle (a, b). Ce sous-programme calculera $f(x)$ $(x \in (a, b))$ soit à partir d'une définition mathématique de $f(x)$ (si c'est possible), soit par interpolation dans une table de valeurs numériques de $f(x)$ données en des points équidistants, (si la fonction $f(x)$ est donnée sous forme de courbe).

Méthode de Calcul :

Nous allons utiliser pour le calcul de $\hat{f}(y)$ une propriété des fonctions de Hermite.

.../...

Rappel sur les polynômes et fonctions de Hermite.

1) Polynômes de Hermite.

Définition : On adoptera pour désigner ces polynomes, la définition

$$\boxed{H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \, D_x^n \left(e^{-x^2}\right)}$$

Le symbole D_x^n désignant l'opérateur $\dfrac{d^n}{dx^n}$

Calculons $D_x H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \, D_x^{n+1} \left(e^{-x^2}\right) + (-1)^n \, 2x \, e^{x^2} D^n \left(e^{-x^2}\right)$

(1) soit $\boxed{D H_n(x) = 2x \, H_n(x) - H_{n+1}(x)}$ (1)

1°) $H_n(x)$ est un polynôme de d° n. de même parité que n. et le 1er terme est $2^n x^n$.

Ceci est vrai pour $H_o(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$

Supposons la propriété vraie pour $H_{n-1}(x)$.

par hypothèse $H_{n-1}(x)$ est $\left\{\begin{array}{l}\text{de degré } n-1 \\ \text{de parité } n-1\end{array}\right.$

et le coefficient de $x^{n-1} = 2^{n-1}$

d'après (1) on a :

$$H_n(x) = 2x \, H_{n-1}(x) - D H_{n-1}(x)$$

.../...

$2 x H_{n-1}(x)$ est de d° $n + 1 + 1 = n$.

$DH_{n-1}(x)$ est de d° $n - 1 - 1 = n - 2$.

donc $H_n(x)$ est de d° n. et sa parité est maintenant celle de n.

De plus, le coefficient de x^n est $2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

Donc, par récurrence, $H_n(x)$ possède les propriétés annoncées.

2°) <u>Les $H_n(x)$ sont solution de l'équation différentielle</u> :

$$\boxed{(- D^2 + 2x D) H_n = 2 n H_n}$$

d'après (1) on a :

$$D^2 H_n = D (DH_n) = 2 x D H_n + 2 H_n - D H_{n+1}$$

d'où $$(-D^2 + 2x D) H_n = D H_{n+1} - 2 H_n$$

d'autre part, d'après (1)

$$D H_{n+1} = 2x H_{n+1} - H_{n+2}$$

$$= (-1)^{n+1} e^{x^2} (2xD^{n+1} (e^{-x^2}) + D^{n+2} (e^{-x^2}) \qquad (a)$$

or $D^{n+2} (e^{-x^2}) = D^{n+1} (-2x e^{-x^2}) = - 2x D^{n+1} (e^{-x^2}) - 2(n+1) D^n(e^{-x^2})$

en appliquant la formule de Leibeintz.

.../...

d'où, en portant dans (a)

$$D H_{n+1} = (-1)^{n+1} e^{x^2} \left[- 2(n+1) D^n (e^{-x^2}) \right] = 2 (n+1) H_n$$

(2) $$\boxed{D H_{n+1} = 2 (n+1) H_n}$$ (2)

il vient finalement

$$(-D^2 + 2xD) H_n = D H_{n+1} - 2 H_n = 2(n+1) H_n - 2 H_n = 2 n H_n$$

(3) $$\boxed{(-D^2 + 2x D) H_n(x) = 2n H_n(x)}$$ (3)

3°) <u>Les $H_n(x)$ vérifient la formule de récurrence suivante.</u>

(4) $$\boxed{H_n(x) = 2x H(x)_{n-1} - 2 (n-1) H_{n-2}}$$ (4)

<u>Démonstration</u> :

(1) $\Rightarrow$ $H_n(x) = 2 x H_{n-1}(x) - D H_{n-1}(x)$

et d'après (2) $D H_{n-1}(x) = 2 (n-1) H_{n-2}(x)$

d'où : $H_n(x) = 2x H_{n-1}(x) - 2 (n-1) H_{n-2}(x)$

2) Fonctions de Hermite :
==========

<u>Définition</u> : On adoptera la définition

$$\boxed{\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n (e^{-x^2})}$$

.../...

1°) <u>Les $\varphi_n(x)$ vérifient la relation évidente déduite de (4).</u>

(5) $$\boxed{\varphi_n(x) = 2x\,\varphi_{n-1}(x) - 2(n-1)\,\varphi_{n-2}}$$

2°) Les $\varphi_n(x)$ sont solution de l'équation différentielle.

$$\boxed{(-D^2 + x^2)\,\varphi_n(x) = (2n+1)\,\varphi_n}$$

<u>Démonstration</u> :

Calculons $D\varphi_n = D\left(e^{\frac{-x^2}{2}} H_n\right) = -x H_n e^{\frac{-x^2}{2}} + e^{\frac{-x^2}{2}} D H_n$

et d'après (1)

$$D\varphi_n = -x\varphi_n + e^{\frac{-x^2}{2}}(2x H_n - H_{n+1})$$

$$= x\varphi_n - \varphi_{n+1}$$

(6) $$\boxed{D\varphi_n = x\varphi_n - \varphi_{n+1}}$$

$$D^2\varphi_n = D(D\varphi_n) = x D\varphi_n + \varphi_n - D\varphi_{n+1} \qquad \text{(d'après (6)}$$

$$= x^2\varphi_n - x\varphi_{n+1} - x\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2} + \varphi_n$$

$$D^2\varphi_n = x^2\varphi_n - 2x\varphi_{n+1} + \varphi_{n+2} + \varphi_n$$

.../...

$$-D^2\varphi_n + x^2\varphi_n = 2x\varphi_{n+1} - \varphi_{n+2} - \varphi_n = 2(n+1)\varphi_n - \varphi_n = (2n+1)\varphi_n \quad \text{(cf 5)}$$

(7) $$\boxed{(-D^2 + x^2)\varphi_n = (2n+1)\varphi_n}$$

les φ_n sont les fonctions propres de l'équation aux valeurs propres (7) et relatives aux valeurs propres $(2n+1)$

3°) <u>Les $\varphi_n(x)$ forment un système ortogonal sur l'intervalle</u> $]-\infty, \infty[$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = 0 \text{ si } m \neq n$$

en effet on a :

$$-D^2\varphi_n + x^2\varphi_n = (2n+1)\varphi_n$$

$$-D^2\varphi_m + x^2\varphi_m = (2m+1)\varphi_m$$

En multipliant ces 2 équations par φ_m et φ_n respectivement et en intégrant il vient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi_n D^2\varphi_m - \varphi_m D^2\varphi_n\right] dx = 2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n \varphi_m\, dx.$$

soit $\left.\varphi_n D\varphi_m - \varphi_m D\varphi_n\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 = 2(n-m) \quad {}_n \quad {}_m\, dx.$

donc si $m \neq n$ $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n \varphi_m\, dx. = 0$

(8) $$\boxed{\text{si } m \neq n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \quad \varphi_m(x)\, dx = 0}$$

.../...

4°) On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 \, dx = 2^n \, n! \sqrt{\pi}$

Démonstration : Elle se fait habituellement à l'aide du théorème de Watson, et est assez compliquée. Les diverses propriétés établies précédemment nous ont permis d'en donner une autre plus simple.

On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)^2 \, dx = \int \varphi_n(x) \, \varphi_n(x) \, dx = \int e^{x^2} D^n(e^{-x^2}) \, D^n(e^{-x^2}) \, dx =$

$$= \left[e^{x^2} D^{n-1}(e^{-x^2}) \, D^n(e^{-x^2}) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[D^{n-1}(e^{-x^2}) \right] \left[2x \, e^{x^2} D^n(e^{-x^2}) + e^{x^2} D^{n+1}(e^{-x^2}) \right] dx$$

$\left[\quad \right]_{-\infty}^{\infty}$ est évidemment $= 0$

donc

$$\int \varphi_n^2 \, dx = -\int D^{n-1}(e^{-x^2}) \cdot 2x \, e^{x^2} D^n(e^{-x^2}) \, dx - \int e^{x^2} D^{n-1}(\ ) \, D^{n+1}(\ ) \, dx.$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int \varphi_n^2 \, dx = \int 2x \, \varphi_n \, \varphi_{n-1} - K \int \varphi_{n-1} \, \varphi_{n+1} \, dx.$$

en vertu de (8) $\displaystyle\int \varphi_{n-1} \, \varphi_{n+1} \, dx = 0.$

il reste donc $\displaystyle\int \varphi_n^2 \, dx = \int (2x \, \varphi_n) \, \varphi_{n-1} \, dx.$

.../...

Or d'après (5) $2x\varphi_n(x) = \varphi_{n+1} + 2n\,\varphi_{n-1}$

d'où :

$$\int \varphi_n^2 \, dx = \int \varphi_{n-1}\,\varphi_{n+1}\, dx + 2n \int \varphi_{n-1}^2 \, dx .$$

et d'après la remarque précédente, on obtient :

$$(9) \quad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x)\, dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-1}^2(x)\, dx.}$$

d'autre part $\int \varphi_o^2(x)\, dx = \int e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

$$\int \varphi_1^2(x)\, dx = 2 \times 1 . \int \varphi_o^2 = 2\sqrt{\pi} = 2^1\,(1!)\sqrt{\pi}$$

On a $\int \varphi_n^2\, dx = 2^n\, n!\sqrt{\pi}$ formule vraie pour $n = 0$ et 1.

Si on la suppose vraie pour $n - 1$ soit $\int \varphi_{n-1}^2\, dx = 2^{n-1}\,(n-1)!\,\sqrt{\pi}$

alors (9) $\int \varphi_n^2\, dx = 2n \int \varphi_{n-1}^2\, dx = 2n \times 2^{n-1}\,(n-1)!\,\sqrt{\pi} = 2^n\, n!\,\sqrt{\pi}$

.../...

On a donc :

$$(10) \qquad \boxed{\int \varphi_n^2(x)\, dx = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}}$$

5°) Si on pose $\psi_n(x) = (2^n\, n!\, \sqrt{\pi})^{-1/2}\, \varphi_n(x)$, les $\psi_n(x)$ forment un S.O.N. sur $]-\infty, \infty[$

$$\boxed{\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}\, \pi^{1/4}}}$$

$$(10\text{ bis}) \qquad \text{et} \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\, \psi_m(x) = \delta_{n,m}}$$

III - Transformée de Fourier des fonctions $\varphi_n(x)$.

Soit $f(x)$ une fonction de l'espace $\mathcal{S}$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables et à décroissance rapide).

On a alors les propriétés suivantes, relatives à sa transformée de Fourier :

1°) $D_y^n \hat{f}(y) = \widehat{(-ix)^n f}(y) = (-i)^n \widehat{x^n f(x)}(y)$

en effet,

$$D_y^n \hat{f}(y) = D_y^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x)\, dx.$$

et en dérivant n fois sous le signe $\int$ ce qui est permis du fait que $f(x) \in \mathcal{S}$ on obtient :

$$D_y^n \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} (-ix)^n f(x)\, dx.$$

.../...

(11) donc : $$\boxed{\widehat{x^n f(x)}\,(y) = (+i)^n\, D_y^n\, \hat{f}\,(y)}$$

2°) $$\widehat{D_x^n f(x)}\,(y) = (+i\,y)^n\, \hat{f}\,(y)$$

en effet :

$$\widehat{D_x^n f(x)}\,(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,xy}\, D_x^n f(x)\, dx.$$

en intégrant n fois par partie et en tenant compte du fait que $f(x) \in \mathcal{S}$ donc que $f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} o$, il vient :

$$\widehat{D_x^n f(x)}\,(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n\, (-iy)^n\, f(x)\, dx = (iy)^n\, \hat{f}\,(y)$$

donc :

(12) $$\boxed{\widehat{D_x^n f(x)}\,(y) = (i\,y)^n\, \hat{f}\,(y)}$$

3°) Appliquons ces résultats à la transformée de Fourier des deux membres de l'équation (7). Les $\varphi_n(x)$ étant évidemment dans $\mathcal{S}$, il vient .

$$-\widehat{D^2 \varphi_n}\,(y) + \widehat{x^2 \varphi_n}\,(y) = (2n+1)\, \hat{\varphi}_n\,(y)$$

et (11) et (12) $\Longrightarrow$

$$-(i\,y)^2\, \hat{\varphi}_n(y) + (i)^2\, D_y^2\, \hat{\varphi}_n(y) = (2n+1)\, \hat{\varphi}_n\,(y)$$

.../...

soit :

$$y^2 \hat{\varphi}_n(y) - D_y^2 \hat{\varphi}_n(y) = (2n+1)\, \hat{\varphi}_n(y)$$

soit enfin :

$$(13) \qquad \boxed{-D_y^2 \hat{\varphi}_n(y) + y^2 \hat{\varphi}_n(y) = (2n+1)\, \hat{\varphi}_n(y)}$$

On voit que les $\hat{\varphi}_n(y)$ sont solution de la même équation (7) que les $\varphi_n(x)$. Et comme d'autre part la solution de (7) est unique à une constante multiplicative près, on en déduit que :

$$(14) \qquad \boxed{\hat{\varphi}_n(y) = k_n\, \varphi_n(y)}$$

Calcul du coefficient k_n :

On a :

$$\hat{\varphi}_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\, \varphi_n(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x^2}{2} - ixy}\, D_x^n(e^{-x^2})\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, D_x^n\left(e^{\frac{x^2}{2} - ixy}\right) dx$$

Or $\frac{x^2}{2} - ixy = \frac{1}{2}(x^2 - 2ixy) = \frac{1}{2}\left((x-iy)^2 + y^2\right) = \frac{y^2}{2} + \frac{(x-iy)^2}{2}$

.../...

d'où :

$$\hat{\varphi}_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, D_x^n \left(e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2}\right) dx$$

D'autre part, on montre facilement par récurrence que :

$$D_x^n \; e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2} = (i)^n \, D_y^n \; e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2}$$

Donc :

$$\hat{\varphi}_n(y) = \frac{(+i)^n}{\sqrt{2\pi}} \; e^{\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, D_y^n \; e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2} \, dx.$$

$$= \frac{(+i)^n}{\sqrt{2\pi}} \; e^{y^2/2} \; D_y^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + \frac{1}{2}(x-iy)^2} \, dx$$

$$= \frac{(+i)^n}{\sqrt{2\pi}} \; e^{y^2/2} \; D_y^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2} \, dx$$

$$= \frac{(i)^n}{\sqrt{2\pi}} \; e^{y^2/2} \; D_y^n \left[e^{-y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} \, dx \right]$$

$$= \frac{(i)^n}{\sqrt{2\pi}} \; e^{y^2/2} \; D_y^n \; \sqrt{2\pi} \; e^{-y^2}$$

$$= (i)^n \; e^{y^2/2} \; D_y^n \; e^{-y^2} = (-i)^n \, \varphi_n(y)$$

.../...

Donc :

(15)

$$\boxed{\begin{array}{c} \hat{\varphi}_n(y) = (-i)^n \varphi_n(y) \\ \hline \varphi_n(x) = (i)^n \hat{\varphi}_n(x) \end{array}}$$

IV - Application de la relation (15) au calcul de $\hat{f}(y)$. $f(x) \in L^2]-\infty, \infty[$

On a démontré que les fonctions $\psi_n(x) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} \varphi_n(x)$ forment un système orthonormal (cf (8) et (10 bis)) mais

[redacted] Ce système [redacted] est [redacted] complet [redacted] on ne peut pas écrire qu'une fonction $f(x)$ est égale exactement à son développement en série de fonctions ψ_n.

Il y a seulement convergence en moyenne quadratique

Soit $\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \sum_{p=0} \rho_p \psi_p(x) \right|^2 dx = 0$ (cf Titchmach)

Mais ceci n'est pas un obstacle pour le calcul numérique approché de $\hat{f}(y)$ et on écrira que

(16)

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} f_n \psi_n(x) \\ \hline \text{avec} \quad f_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \psi_n(x) \, dx. \end{array}}$$

Donc, en vertu de 15 et sous réserve de convergence de la série, on écrira :

.../...

$$(19) \qquad \boxed{\hat{f}(y) = \sum_{0}^{\infty} (-i)^n f_n \, \psi_n(y)}$$

Formons une loi de récurrence pour les $\psi_n(x)$.

(5) s'écrit :

$$2^{n/2} \pi^{1/4} \sqrt{n!}\, \psi(x) = 2x\, 2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{1/4} \sqrt{(n-1)!}\, \psi_{n-1}(x) - 2(n-1) 2^{\frac{n-2}{2}} \pi^{1/4} \sqrt{(n-2)!}\, \psi_{n-2}(x)$$

Soit :

$$\sqrt{n}\, \psi_n(x) = x\sqrt{2}\, \psi_{n-1}(x) - \sqrt{(n-1)}\, \psi_{n-2}(x)$$

Soit finalement :

$$(20) \qquad \boxed{\psi_n(x) = x\sqrt{\frac{2}{n}}\, \psi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n-1}{n}}\, \psi_{n-2}(x)} \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

$$\boxed{\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2}} \quad \text{pour } n = 0$$

Cette relation (20) va nous permettre, connaissant $\psi_0(x)$ de calculer $\psi_n(x)$ et ceci quel que soit x.

Relation entre $\hat{f}(y)$ et $\hat{\tilde{f}}(y)$: $\tilde{f}(x)$ étant la transformée de $f(x)$ par l'homothétie de rapport k.

On a : $\boxed{f(x) = k\, \tilde{f}\left(\frac{x}{k}\right)}$

.../...

D'autre part :

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) \, dx$$

Posons $x = k\cancel{x}$ il vient $(k > 0)$

$$\hat{f}(y) = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\cancel{x}(ky)} f(k\cancel{x}) \, d\cancel{x} = \frac{k^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\cancel{x}(ky)} \tilde{f}(\cancel{x}) \, d\cancel{x}.$$

Donc :

$$(21) \qquad \boxed{\hat{f}(y) = k^2 \, \widehat{\tilde{f}}(k\,y)}$$

§2 : Méthode numérique de Calcul:

Pratiquement, la relation (16) s'écrit :

$$(22) \quad \boxed{f(x) \sim \sum_{0}^{N} c_n \psi_n(x)} \qquad \text{avec}$$

N étant choisi suffisamment grand pour que la contribution des termes oubliés soit négligeable.

On supposera d'autre part que f(x) est à support compact, c'est-à-dire, nulle en dehors d'un certain intervalle (a, b) ce qui permet d'écrire :

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_n(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\psi_n(x)\,dx$$

Il est évident que, pour une fonction f(x) donnée, le calcul des c_n se fera une fois pour toutes.

On écrira alors :

$$(23) \quad \boxed{\hat{f}(y) = \sum_{0}^{N} (-i)^n c_n \psi_n(y)}$$

La principale difficulté est donc le calcul des coefficients c_n. D'autre part, il est facile d'écrire une fonction quelconque f(x) sous la forme de la somme des deux fonctions G(x) et H(x) paires et impaires respectivement.

On a :

$$f(x) = G(x) + H(x) \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} G(x) = f(x) + f(-x) \\ H(x) = f(x) - f(-x) \end{cases}$$

.../...

d'où on tire immédiatement :

$$\hat{f}(y) = \hat{G}(y) + \hat{H}(y)$$

On peut donc se ramener au calcul de la transformée de Fourier de fonctions paires, et impaires, G (x) et H (x). $\hat{G}(y)$ est une fonction réelle et paire ; $\hat{H}(y)$ est une fonction impaire et imaginaire pure.

On écrira donc :

1°) f (x) paire : $\hat{f}(y) = \sum_{0}^{N/2} (-1)^{2p} c_{2p} \psi_{2p}(y)$ (N paire)

(24) soit : $$\boxed{\hat{f}(y) = \sum_{0}^{N/2} (-1)^{p} c_{2p} \psi_{2p}(y)}$$

2°) f (x) impaire : $\hat{f}(y)$ est imaginaire pure.

(25) $$\boxed{\hat{f}(y) = \sum_{1}^{N/2} (-1)^{p-1} c_{2p-1} \psi_{2p-1}(y)}$$

Calcul des coefficients c_n :

On doit calculer $c_n = 2 \int_0^a f(x) \psi_n(x)\, dx$

On a calculé ces intégrales pour une méthode d'intégration approchée dérivée de la méthode de Newton-Cotes, qui consiste à approcher la fonction $f(x)\psi_n(x)$ par un polynome de degré 7 passant par 8 points équidistants :

.../...

On écrit :

$$\int_0^7 y_x \, dx = \frac{7}{17.280} (751\, y_o + 3577\, y_1 + 1323\, y_2 + 2989\, y_3 + 2989\, y_4 + 1323\, y_5 + 3577\, y_6 + 751\, y_7)$$

(Confère H. Mineur : "Techniquesde calcul numérique").

Calcul pratique des coefficients c_n :

En vertu de la relation (21), on s'est borné à calculer

$$c_n = 2\int_0^{10,5} f(x)\, \psi_n(x)\, dx$$

en écrivant que :

$$c_n = 2\int_0^{0,1} f\psi_n\, dx + 2\int_{0,1}^{0,2} f\, dx + \dots + 2\int_{9,8}^{10,5} f\, dx .$$

Le calcul de $\psi_n(x)$ pour x fixé étant très long, on a dû fabriquer des tables de ψ_o, ψ_1, ψ_2 ..... ψ_{180} pour x = O; O,1 ; 0,2 ; .....; 10,5.

Ces fonctions ont été calculées à l'aide de la relation de récurrence (20) et virgule flottante double-précision pour éviter une trop grande répercussion des erreurs dûe à la loi de récurrence elle-même pour les indices n d'ordre élevé.

.../...

Les tables des $\psi_{0,\ 1 \ldots\ldots 150}$ sont aussi disponibles en virgule flottante simple précision, et en virgule fixe à 10 décimales. (on a pris les 10 premiers chiffres de leurs valeurs en double-précision).

Pour calculer $c_n = 2 \int_0^{10,5} f(x)\, \psi_n(x)\, dx$ il suffit donc de disposer d'une table des valeurs de $f(x)$ (paire, ou impaire) pour $x = 0;\ 0,1\ ;\ \ldots\ldots;\ 10,5$.

Calcul pratique de $\hat{f}(y)$:
==========

Ayant calculé les c_n précédents, on calcule $c_n^* = \sum (-i)^n c_n$.

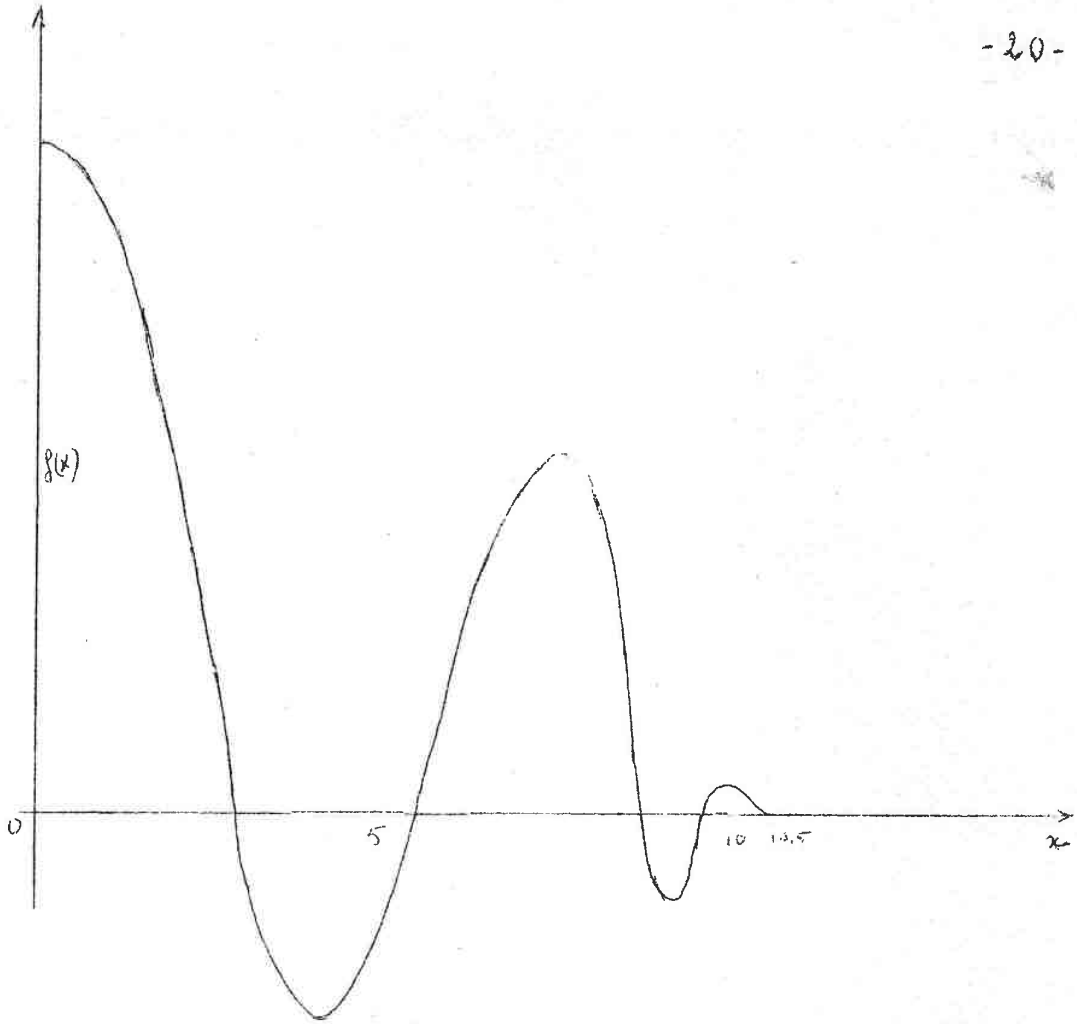
et on applique la relation (23)

$$\hat{f}(y) = \sum_0^{N/2} c_n^* \psi_n(y)$$

Les mêmes tables $\psi_0, \ldots\ldots;_{50}$ permettent ainsi de calculer $f(y)$ pour $y = 0\ ;\ 0,1\ ;\ \ldots\ldots;\ 10,5$.

Résultats pratiques :

1er exemple : $f(x)$ est la fonction paire représentée par la courbe suivante

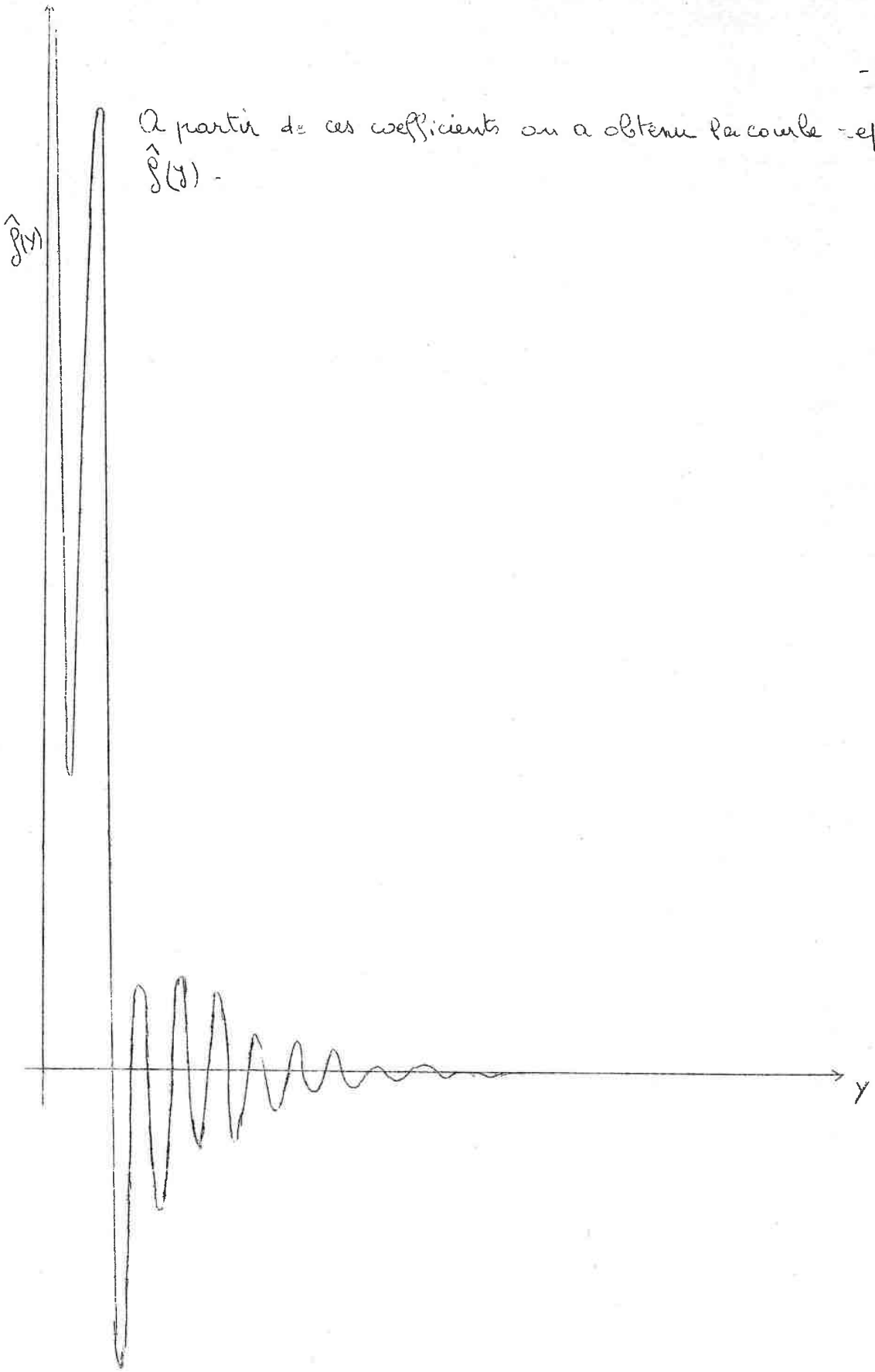


Le développement en série de fonctions ψ_n a été poussé jusqu'à $n = 54$

$c_0 = 16,629$	$c_{14} = -0,379$	$c_{28} = 3,776$	$c_{42} = -1,214$
$c_2 = 5,392$	$c_{16} = 0,996$	$c_{30} = 3,506$	$c_{44} = -1,028$
$c_4 = -0,278$	$c_{18} = 2,152$	$c_{32} = 2,977$	$c_{46} = -0,346$
$c_6 = -2,864$	$c_{20} = 2,864$	$c_{34} = 2,267$	$c_{48} = 0,405$
$c_8 = -3,298$	$c_{22} = 3,542$	$c_{36} = 1,122$	$c_{50} = 0,710$
$c_{10} = -2,335$	$c_{24} = 3,801$	$c_{38} = 0,185$	$c_{52} = 0,504$
$c_{12} = -1,304$	$c_{26} = 3,771$	$c_{40} = -0,756$	$c_{54} = 0,105$

../..

A partir de ces coefficients on a obtenu la courbe représentant $\hat{\rho}(y)$.



A partir de la courbe $\hat{f}(y)$ obtenue, on a par le même procédé régénéré $f(x) = \widehat{\hat{f}(y)}^{\sim}(.)$

La nouvelle courbe $f(x)$ ainsi obtenue est pratiquement identique à la courbe $f(x)$ de départ.

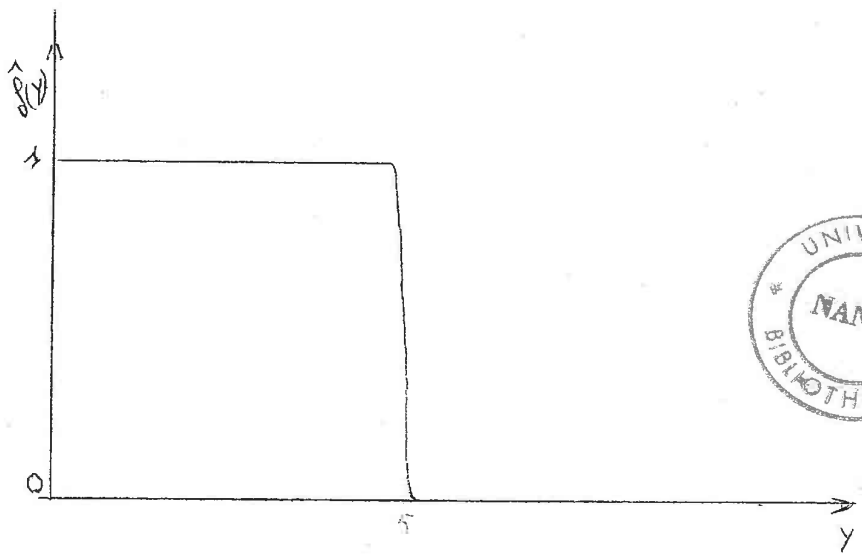
2ème Exemple :
==========

Soit la fonction $f(x) = 1$ pour $0 < |x| < a$ et 0 ailleurs.

On a : $\hat{f}(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \cos xy \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ay}{y}$

On est parti de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 5x}{x}$ dont la transformée $\hat{f}(y)$ est $\hat{f}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

La courbe obtenue numériquement est la suivante : (avec 76 coeff^{ts} : $c_0, c_1, \ldots, c_{70}$)



UNIVERSITÉ NANCY BIBLIOTHÈQUE

Vu et Approuvé

Nancy, le

Le Doyen :
E. URION,

Vu et Permis d'Imprimer

Nancy, le

Le Recteur :
Président du Conseil de
l'Université.

G. MAYER