

81/760

Sc N 84 / 38 B

UNIVERSITE DE NANCY I
U.E.R. DE MATHÉMATIQUES

technique informatique de représentation
en perspective d'un objet défini par des
sections planes parallèles

thèse

pour l'obtention
du doctorat de spécialité
mathématiques



soutenue le 4 juin 1981

par

françoise simonot

jury :

MM.	J. LEGRAS	Président
	C. GILORMINI	Examineurs
	J.P. HATON	

UNIVERSITE DE NANCY I
U.E.R. DE MATHEMATIQUES

technique informatique de représentation
en perspective d'un objet défini par des
sections planes parallèles

thèse

pour l'obtention
du doctorat de spécialité
mathématiques



soutenue le 4 juin 1981

par

françoise simonot

jury :

MM. J. LEGRAS	Président
C. GILORMINI	Examineurs
J.P. HATON	

ERRATA

page 9 lignes 6,7 : remplacer ces lignes par

$$6\left(\sum_{i=1}^m v_i^A + \sum_{j=1}^n v_j^B\right) = \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{A_i A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{A_i B_{J(i)}}) \overrightarrow{\omega_B} + \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{A_i A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{A_i B_{J(i)}}) \overrightarrow{\omega_{A_i}} \\ + \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{B_j A_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_j B_{j+1}}) \overrightarrow{\omega_B} + \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{B_j A_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_j B_{j+1}}) \overrightarrow{\omega_{B_j}}$$

page 19 ligne 19 : lire

... en traits pleins lorsqu'elles

page 44 lignes 12,13,14 : remplacer ces lignes par

$$\mathcal{T}_1^+ = \left\{ t_1^j \mid t_1^j \in \mathcal{T}_1 \text{ et } N_{1Z}^j > 0 \text{ et } t_1^j \text{ ne vérifie pas (1)} \right\}$$

$$\mathcal{T}_2^+ = \left\{ t_2^j \mid t_2^j \in \mathcal{T}_2 \text{ et } N_{2Z}^j > 0 \text{ et } t_2^j \text{ ne vérifie pas (1)} \right\}$$

⋮

$$\mathcal{T}_{p-1}^+ = \left\{ t_{p-1}^j \mid t_{p-1}^j \in \mathcal{T}_{p-1} \text{ et } N_{p-1Z}^j > 0 \text{ et } t_{p-1}^j \text{ ne vérifie pas (1)} \right\}$$

page 56 dernière ligne : remplacer M_i par $\mathcal{M}_i$.

page 57 ligne 11 : remplacer M_3 par $\mathcal{M}_3$.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur LEGRAS ainsi qu'à Monsieur B. LEGRAS qui sont à l'origine de ce travail .

Je remercie Monsieur le Professeur HATON de l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du Jury .

Que Monsieur le Professeur GILORMINI trouve, ici, ma sincère reconnaissance pour les encouragements qu'il m'a prodigués .

Monsieur le Professeur MARI, directeur de l'Institut des Sciences de l'Ingénieur, a aimablement mis à ma disposition les moyens nécessaires à la réalisation de mon travail; je l'en remercie .

J'adresse mes remerciements à Marie-Claude, Odile, Jean pour leur sympathique collaboration dans la réalisation de ce travail .

sommaire

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE : CHOIX PRELIMINAIRES

Introduction	1
Chapitre I - Une technique de définition de l'objet à représenter.	
I - Présentation de la méthode	4
II - Volume d'un polyèdre	6
III - Décomposition des lignes de contour en sous-ensembles	11
IV - Triangulation	14
Chapitre II - Choix d'un tracé	
I - Que représenter ?	19
II - Arêtes réelles - arêtes fictives.	20
Chapitre III - Perspective	
I - Types de perspectives	21
II - Points cachés	27
III - Réduction du problème	29

DEUXIEME PARTIE : SOLUTION PROPOSEE AU PROBLEME D'ELIMINATION DES LIGNES CACHEES

Introduction	37
Chapitre I - Ordre de traitement des polygones	
I - Description de l'objet	38
II - Caractérisation des faces avant et arrière	40
III - Ordre de traitement des faces dans le cas d'une isométrie	44
Chapitre II - Masque	
I - Définition et propriétés	53
II - Description du masque - intérieur - extérieur	54
III - Points cachés - points visibles	56
Chapitre III - Intersection du contour d'un masque et du contour d'une face.	
I - Remarques préliminaires	59
II - Eléments étudiés	61
III - Intersection de deux lignes de contour orientées	63
IV - Répartition des vrais points d'intersection en trois classes	67

Chapitre IV - Construction du masque - détermination des points visibles d'une face

I - Masque $\mathcal{M}_1$ et visibilité de F_1 72

II - Position d'une face $\mathcal{F}_i$ par rapport à un masque $\mathcal{M}_{i-1}$ ($1 < i \leq m$)

TROISIEME PARTIE : ALGORITHMES

Introduction

Chapitre I - Definition de l'objet ; algorithmes et structure des informations:

I - Généralités 80

II - Algorithme 82

Chapitre II : Détermination des images ; algorithmes et structure des informations

I - Description de l'application 91

II - Etude d'un exemple - liens entre les informations représentées en mémoire 106

QUATRIEME PARTIE : RESULTATS

I - Exemple traité 112

II - Définition de l'objet 114

III - Elaboration des images 123

CONCLUSION 130

BIBLIOGRAPHIE 131

introduction

L'étude présentée ici a son origine en radiothérapie ; dans cette discipline, en effet, un dossier est constitué, pour chaque patient, afin de s'assurer que la tumeur reçoit une dose adéquate, tandis que les tissus sains ne subissent pas une irradiation excessive.

Ce dossier nécessite l'utilisation d'un modèle géométrique personnel décrivant le corps du patient, ainsi qu'en chaque point la dose délivrée. Actuellement, ce modèle existe sous la forme suivante : on dispose, dans un premier temps, de suite de points décrivant le corps du patient (contour externe et contours internes : poumons, tumeur etc...) dans des plans parallèles ; ensuite, dans chacun de ces plans, l'utilisation d'un programme de calcul permet de construire les courbes d'isodoses.

Il semble alors intéressant, à partir de ces informations, de donner une représentation de ce modèle à trois dimensions et d'en produire des images sur un périphérique graphique (table traçante ou écran de visualisation) d'une façon aussi réaliste que possible. C'est le but de notre projet.

Dans ce travail, nous nous sommes trouvés confrontés à un certain nombre de problèmes : le premier concerne la définition complète du modèle. En effet, celui-ci, initialement n'est connu que dans des plans parallèles ; nous avons alors déterminé une méthode d'approximation de ce modèle entre chaque plan. Les autres problèmes proviennent de la nécessité de produire une image claire et réaliste du modèle, semblable à celle qui se formerait sur la rétine d'un observateur. L'utilisation de la perspective permet de donner une illusion de profondeur à l'image présentée ; par ailleurs, l'élimination des parties cachées à la vue de l'observateur assure la lisibilité et la clarté de l'image ; nous avons élaboré un algorithme permettant de visualiser un modèle, observé sous un angle de vue donné en respectant les contraintes précédentes.

1.

choix préliminaires

INTRODUCTION

Le problème que nous nous proposons de résoudre nécessite un certain nombre de choix préliminaires. Les premiers de ces choix concernent la définition de l'objet lui-même, les autres, le mode de représentation de cet objet.

Les seules informations dont nous disposons pour la définition de l'objet sont les suivantes :

- le nombre de plans parallèles, ou plans de coupe, dans lesquels on possède des renseignements sur l'objet ;
- dans chaque plan, la suite orientée de points appartenant à l'intersection du plan et de "l'enveloppe" de l'objet.

La figure 1 donne un exemple d'une telle définition.

l'objet est défini dans 3 plans parallèles:

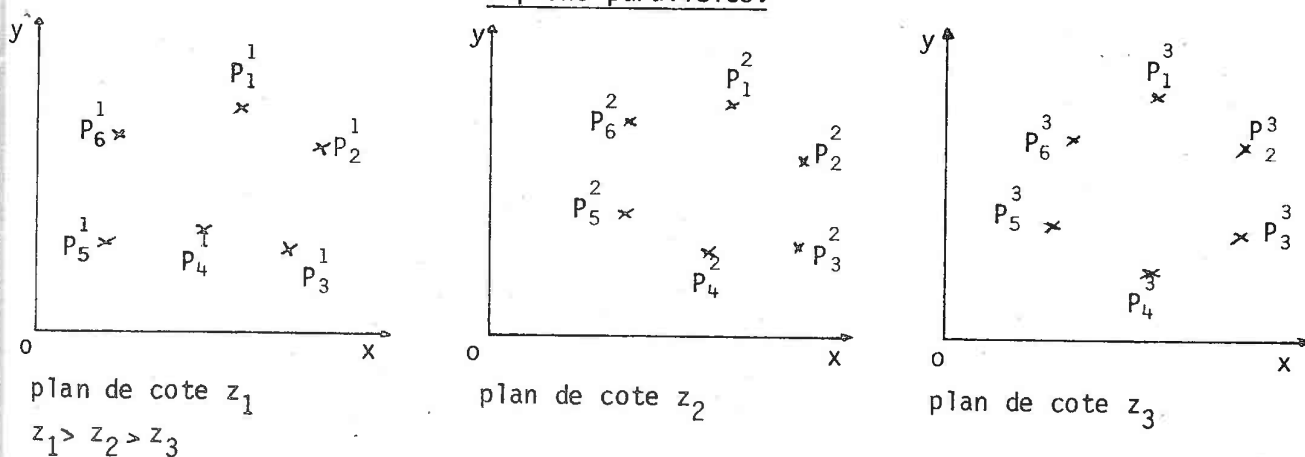


figure 1

En particulier, nous ne connaissons rien sur :

- la forme de l'enveloppe de l'objet, entre deux points, dans chaque plan ;
- la forme de l'enveloppe de l'objet entre deux plans consécutifs.

Il est évident que, pour une observation, l'image des points donnés ne fournit pas une représentation lisible de l'objet. De plus, le problème fondamental dans la production d'une image est la détermination des parties de l'objet qui sont visibles par l'observateur. Pour savoir si un point donné d'un objet est vu ou non, il suffit de chercher si entre ce point et l'observateur s'interpose l'enveloppe de l'objet.

La première incertitude concerne les frontières de l'objet dans un plan de coupe ; dans ce cas, nous avons choisi de définir l'objet par la ligne polygonale fermée dont les sommets sont les points donnés et dont l'orientation est déduite de l'orientation de la suite des points. Ce choix se justifie par le fait que la ligne polygonale est une courbe simple passant par les points et que, au vu des exemples qui nous ont été fournis (cf. 4^{ème} partie) elle permet de produire une image "satisfaisante" de l'objet. La figure 2 illustre une telle définition dans le cas de l'exemple précédent.

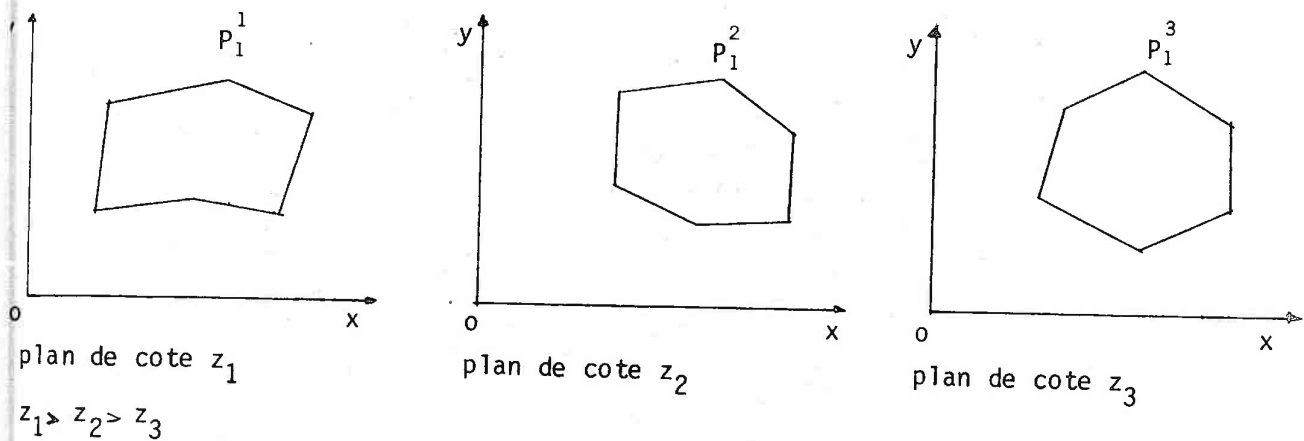


figure 2

La deuxième incertitude sur l'objet porte sur les frontières de cet objet entre deux plans de coupe consécutifs. Pour résoudre ce problème, nous supposons que la première incertitude a été levée et que l'objet est défini dans chaque plan par une ligne polygonale fermée. Nous avons alors choisi d'approcher l'objet par un polyèdre en respectant les contraintes suivantes :

- 1 - L'objet est limité par les plans de coupe supérieur et inférieur :
- une face de l'objet est définie par la ligne polygonale fermée (voir précédemment) appartenant au plan de coupe de plus grande cote. Dans l'exemple de la figure 1, il s'agit du plan de cote z_1 , la face est définie par $P_1^1, P_2^1, P_3^1, P_4^1, P_5^1, P_6^1$
- Une autre face de l'objet est définie par la ligne polygonale fermée dans le plan de coupe de plus petite cote (plan de cote z_3 ; face $P_1^3, P_2^3, P_3^3, P_4^3, P_5^3, P_6^3$, dans l'exemple précédent).

- 2 - Les autres faces de l'objet sont des triangles. Deux problèmes se posent alors ; sur quel critère se fonder pour déterminer la meilleure répartition en triangles et ensuite, quelle méthode utiliser pour la réalisation de cette répartition ? Pour résoudre ces deux questions , nous nous sommes inspirés du travail de E. KEPPEL [4]

Dans le premier chapitre , on développe une solution de ce problème.

En supposant que l'objet se présente sous la forme d'un polyèdre ainsi que nous l'avons décidé ci-dessus , nous sommes amenés , dans un deuxième temps , à décider d'un mode de représentation de ce polyèdre. Le problème fondamental est , alors, celui de la représentation sur un plan, d'un objet donné dans l'espace à 3 dimensions. Pour résoudre ce problème, nous disposons des outils de la perspective ; dans le chapitre III, après avoir choisi un type de perspective ,(l'axonométrie), nous dégagons les conséquences de ce choix sur l'image à calculer pour une observation donnée.

Enfin , un point reste à préciser ; quels sont les segments qui peuvent figurer dans le tracé de l'image , ceci fait l'objet du chapitre II .

CHAPITRE I

UNE TECHNIQUE DE DEFINITION DE L'OBJET A REPRESENTER

Dans ce chapitre, nous élaborons un algorithme pour définir de façon vraisemblable les frontières de l'objet entre deux plans de coupe, indépendamment de l'angle de vue.

I. PRESENTATION DE LA METHODE

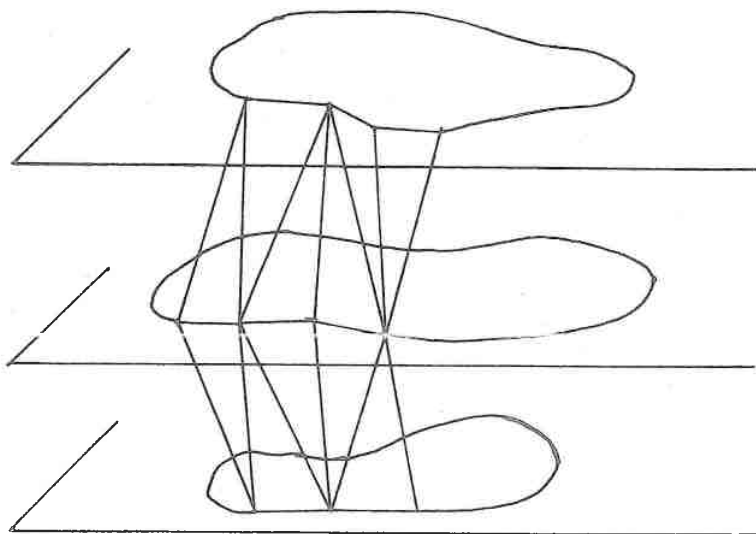
L'objet, dont nous devons calculer des images, nous est donné par des suites orientées de points, appartenant à l'intersection de l'enveloppe de l'objet avec des plans de coupe parallèles.

Dans l'introduction à cette première partie, nous avons admis de définir l'objet, dans chaque plan de coupe, par la ligne polygonale fermée dont les sommets sont les points donnés; l'orientation de cette ligne étant déduite de l'orientation de la suite des points.

Nous appellerons lignes de contour une telle ligne polygonale fermée.

Entre deux lignes de contour consécutives, nous approchons les frontières de l'objet par des triangles contigus. Nous avons imposé à ces triangles de posséder un côté commun avec une ligne de contour et un sommet commun avec l'autre (figure1).

figure 1



Le problème consiste , alors, à trouver la "meilleure" décomposition en triangles possible. Il s'agit, en fait, de définir de façon arbitraire une fonction objectif à optimiser suivant un certain critère.

Signalons , au préalable, quelques remarques intuitives, concernant la décomposition en triangles :

Soient deux lignes de contour consécutives : $A_1 A_2 \dots A_m$ et $B_1 B_2 \dots B_n$; dans ce chapitre nous prenons les conventions suivantes :

Si $i=m$ alors $A_{i+1} = A_1$

Si $i=1$ alors $A_{i-1} = A_m$

Si $j=n$ alors $B_{j+1} = B_1$; si $j=1$ alors $B_{j-1} = B_n$

-Quelque soit la décomposition, toute arête $A_i A_{i+1}$ (respectivement $B_j B_{j+1}$) est le coté d'un triangle.

-Soit un triangle $A_i A_{i+1} B_j$ (respectivement $B_j B_{j+1} A_i$) , il n'existe aucun triangle ayant pour coté $A_{i+1} B_{j-1}$ ou $A_i B_{j+1}$ (respectivement $B_{j+1} A_{i-1}$ ou $B_j A_{i+1}$).

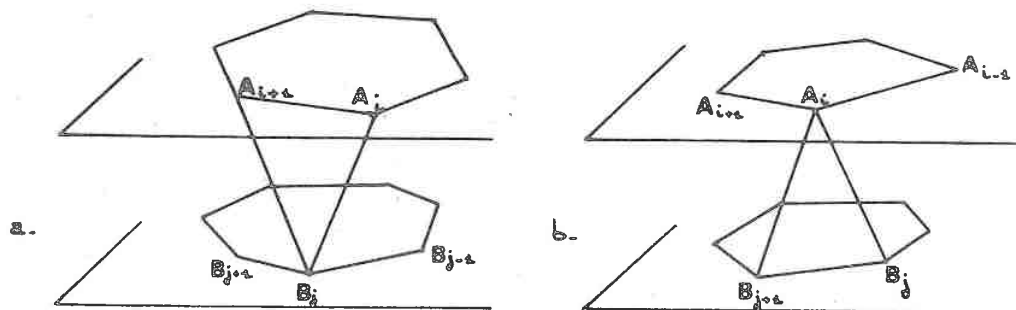


FIGURE 2

1 - Fonction objectif et critère d'optimisation dans le cas où les lignes de contour sont convexes.

Soient deux lignes de contour convexes, orientées dans le sens rétrograde dans l'espace-objet, appelons $\mathcal{C}^A$ et $\mathcal{C}^B$ les faces limitées par ces contours, et $\mathcal{T}$, l'ensemble des triangles représentant la frontière de l'objet entre ces deux lignes.

Nous utilisons la fonction objectif définie par E. KEPPEL [4], c'est à dire :

- le volume défini par S^A, S^B et $\mathcal{T}$ -

Nous choisissons de maximiser ce volume.

Dans le cas de deux lignes de contour convexes, le problème revient à trouver l'ensemble $\mathcal{T}$ qui maximise le volume défini par S^A, S^B et $\mathcal{T}$.

2 - Extension aux lignes de contour quelconques.

Nous proposons au paragraphe III, une décomposition des lignes de contour en sous-ensembles, représentant chacun des lignes de contour orientées dans le sens rétrograde ; nous démontrons dans le paragraphe IV que chaque sous-ensemble d'un contour correspond de manière unique à un sous-ensemble (éventuellement réduit à un point) de l'autre contour. IL suffit alors, pour chaque paire de sous-ensembles de déterminer les triangles qui maximisent le volume déduit des sous-ensembles.

II - VOLUME D'UN POLYEDRE

Soient deux lignes de contour convexes, orientées dans le sens rétrograde $A_1 A_2 \dots A_m$ et $B_1 B_2 \dots B_n$. Soient ω_A et ω_B deux points choisis respectivement dans le plan de $A_1 \dots A_m$ et $B_1 \dots B_n$.

Pour une décomposition en triangles donnée le volume du polyèdre $A_1 A_2 \dots A_m B_1 B_2 \dots B_n$ peut s'exprimer de la manière suivante :

$$V = V'_A + V_B$$

où V'_A est la somme des volumes des pentaèdres $A_i A_{i+1} B_{j(i)} \omega_A \omega_B$ pour $i = 1, 2, \dots, m$ et V_B la somme des volumes des tétraèdres $B_j B_{j+1} A_{i(j)} \omega_B$ pour $j = 1, 2, \dots, n$.

Nous notons $i(j)$ (resp. $j(i)$) l'indice du point, sommet d'un triangle dont un coté est $B_j B_{j+1}$ (resp. $A_i A_{i+1}$) dans la décomposition donnée.

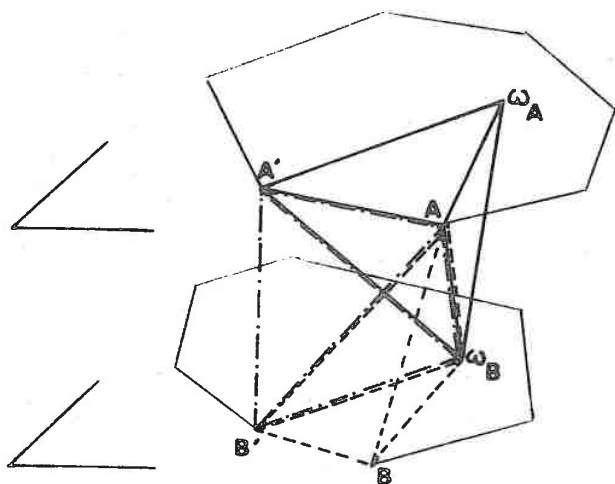


Figure 3 :

3 types de tétraèdres

- $A A' \omega_A \omega_B$
- $A A' B' \omega_B$
- $B B' A \omega_B$

Nous pouvons décomposer chaque pentaèdre $A_i A_{i+1} B_{J(i)} \omega_A \omega_B$ en deux tétraèdres : $A_i A_{i+1} B_{J(i)} \omega_B$ et $A_i A_{i+1} \omega_B \omega_A$

1 - Expression de la fonction objectif

Notons v_i^A le volume orienté du tétraèdre $A_i A_{i+1} B_{J(i)} \omega_A$
 v_j^B - - - - - $B_j B_{j+1} A_{I(j)} \omega_B$
 c_i - - - - - $A_i A_{i+1} \omega_A \omega_B$

La fonction objectif, volume orienté du polyèdre $A_1 A_2 \dots A_m B_1 B_2 \dots B_n$ s'écrit alors :

$$V = \sum_{i=1}^m v_i^A + \sum_{j=1}^n c_j + \sum_{j=1}^n v_j^B$$

Exprimons chaque volume orienté élémentaire, en tenant compte de l'orientation des lignes de contour : $A_1 A_2 \dots A_m$ et $B_1 B_2 \dots B_n$ orientées dans le sens rétrograde.

$$v_i^A = \frac{1}{6} (\overrightarrow{A_i A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{A_i B_{J(i)}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B A_i}$$

$$v_j^B = \frac{1}{6} (\overrightarrow{B_j A_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_j B_{j+1}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B B_j}$$

$$c_i = \frac{1}{6} (\overrightarrow{\omega_A A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{\omega_A A_i}) \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega_A}$$

2 - Choix de ω_B, ω_A

- V est indépendant de ω_A .

Seule $\sum_{i=1}^m c_i$ dépend de ω_A ; soit ω un point distinct de ω_A et tel que $\omega A_1 A_2 \dots A_m \omega_A$ soient coplanaires.

$$\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{\omega_A \omega} + \overrightarrow{\omega A_{i+1}}) \wedge (\overrightarrow{\omega_A \omega} + \overrightarrow{\omega A_i}) \cdot (\overrightarrow{\omega_B \omega} + \overrightarrow{\omega \omega_A})$$

$\omega_A, \omega, A_i, A_{i+1}$ sont coplanaires donc :

$$\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{\omega_A \omega} + \overrightarrow{\omega A_{i+1}}) \wedge (\overrightarrow{\omega_A \omega} + \overrightarrow{\omega A_i}) \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega}$$

Soit en développant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m c_i &= \sum_{i=1}^m \overrightarrow{\omega_A \omega} \wedge \overrightarrow{\omega A_i} \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \overrightarrow{\omega A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{\omega_A \omega} \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \overrightarrow{\omega A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{\omega A_i} \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} \end{aligned}$$

$$\text{or } \sum_{i=1}^m \overrightarrow{\omega A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{\omega_A \omega} \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} = - \sum_{i=1}^m \overrightarrow{\omega_A \omega} \wedge \overrightarrow{\omega A_{i+1}} \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega}$$

par convention, si $i=m$ alors $A_{i+1} = A_1$, donc :

$$- \sum_{i=1}^m \overrightarrow{\omega_A \omega} \wedge \overrightarrow{\omega A_{i+1}} \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} = - \sum_{i=1}^m \overrightarrow{\omega_A \omega} \wedge \overrightarrow{\omega A_i} \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega}$$

ce qui donne :

$$\sum_{i=1}^m c_i = \sum_{i=1}^m \overrightarrow{\omega A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{\omega A_i} \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega}$$

Nous avons démontré que V est indépendant de ω_A .

- V est indépendant de ω_B

Par une démonstration analogue, on peut montrer que $\sum_{i=1}^m c_i$ est indépendant de ω_B .

Etudions l'expression $\sum_{i=1}^m v_i^A + \sum_{j=1}^n v_j^B$

Soit ω un point distinct de ω_B et tel que $\omega, \omega_B, B_1, \dots, B_n$ soient coplanaires.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m v_i^A + \sum_{j=1}^n v_j^B &= \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{A_i A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{A_i B_{j(i)}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} + \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{A_i A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{A_i B_{j(i)}}) \cdot \overrightarrow{\omega A_i} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{B_j B_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_j B_{j+1}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} + \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{B_j B_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_j B_{j+1}}) \cdot \overrightarrow{\omega B_j} \end{aligned}$$

Soit le flux du vecteur $\overrightarrow{\omega_B \omega}$ à travers la surface du polyèdre $A_1 \dots A_m B_1 \dots B_n$:

$\Phi = \iint_S \overrightarrow{\omega_B \omega} \cdot \vec{n} dS$, où $\vec{n} dS$ est l'élément de surface, orienté suivant la normale extérieure.

$$\text{Alors, } \Phi = \iint_{S_A} \overrightarrow{\omega_B \omega} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_B} \overrightarrow{\omega_B \omega} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_L} \overrightarrow{\omega_B \omega} \cdot \vec{n} dS$$

S^A (resp. S^B) est la surface du polygone $A_1 A_2 \dots A_m$ (resp. $B_1 B_2 \dots B_n$) et S^L la surface des triangles.

$$\iint_{S^A} \overrightarrow{\omega_B \omega} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S^B} \overrightarrow{\omega_B \omega} \cdot \vec{n} dS = 0 \text{ car } \overrightarrow{\omega_B \omega} \text{ est orthogonal à la normale } \vec{n}.$$

$$\text{Donc } \Phi = \iint_{S^L} \overrightarrow{\omega_B \omega} \cdot \vec{n} dS = \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{A_i A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{A_i B_{j(i)}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} + \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{B_j B_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_j B_{j+1}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega}$$

On applique le théorème de la divergence :

$$\Phi = \iint_{S^L} \overrightarrow{\omega_B \omega} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\overrightarrow{\omega_B \omega}) \cdot dV$$

or $\overrightarrow{\omega_B \omega}$ est un vecteur constant, donc $\operatorname{div}(\overrightarrow{\omega_B \omega}) = 0$

donc $\Phi = 0$, ce qui montre que :

$$\sum_{i=1}^m (\overrightarrow{A_i A_{i+1}} \wedge \overrightarrow{A_i B_{j(i)}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} + \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{B_j B_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_j B_{j+1}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B \omega} = 0,$$

et enfin : $\sum_{i=1}^m v_i^A + \sum_{j=1}^n v_j^B$ est indépendant de ω_B .

Remarque : l'expression du volume est positive ; en effet, si V est indépendant de $\omega_A \wedge \omega_B$, nous pouvons choisir ces points tels que ω_A soit intérieur à $A_1 \dots A_m$ et ω_B intérieur à $B_1 \dots B_n$; il devient alors évident que les expressions v_i^A, v_j^B, c_i telles que nous les avons définies sont positives.

3 - Fonction objectif simplifiée

L'expression $\sum_{i=1}^m c_i$ est constante quelque soit la décomposition en triangle étudiée. Donc, chercher la triangulation qui maximise la fonction V revient à optimiser :

$$V' = \sum_{i=1}^m v_i^A + \sum_{j=1}^n v_j^B$$

4 - Volume orienté d'un polyèdre défini par deux lignes de contour orientées dans le sens direct.

Soient $A_1 A_2 \dots A_m, B_1 B_2 \dots B_n$ deux lignes de contour orientées dans le sens direct.

$A_m A_{m-1} \dots A_1, B_n B_{n-1} \dots B_1$ sont alors orientées dans le sens rétrograde.

On peut alors écrire la fonction objectif simplifiée :

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{A_i A_{i-1}} \wedge \overrightarrow{A_i B_{j(i)}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B A_i} + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{B_j A_{l(j)}} \wedge \overrightarrow{B_j B_{j-1}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B B_j} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{A_i A_{i-1}} \wedge \overrightarrow{A_i B_{j(i)}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B A_i} + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{B_j A_{l(j)}} \wedge \overrightarrow{B_j B_{j-1}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B B_j} \\ &= -\frac{1}{6} \sum_{i=1}^m (\overrightarrow{A_{i-1} A_i} \wedge \overrightarrow{A_i B_{j(i)}}) \cdot \overrightarrow{\omega_B A_i} - \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n (\overrightarrow{B_j A_{l(j)}} \wedge \overrightarrow{B_{j-1} B_j}) \cdot \overrightarrow{\omega_B B_j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \overrightarrow{A_{i-1} A_i} \wedge \overrightarrow{A_i B_{j(i)}} \cdot \overrightarrow{\omega_B A_i} &= \overrightarrow{A_{i-1} A_i} \wedge (\overrightarrow{A_i A_{i-1}} + \overrightarrow{A_{i-1} B_{j(i)}}) \cdot (\overrightarrow{\omega_B A_{i-1}} + \overrightarrow{A_{i-1} A_i}) \\ &= \overrightarrow{A_{i-1} A_i} \wedge \overrightarrow{A_{i-1} B_{j(i)}} \cdot \overrightarrow{\omega_B A_{i-1}} \end{aligned}$$

de la même manière :

$$\overrightarrow{B_j A_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_{j-1} B_j} \cdot \omega_B B_j = \overrightarrow{B_{j-1} A_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_{j-1} B_j} \cdot \omega_B B_{j-1}$$

donc

$$V' = - \left(\frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \overrightarrow{A_{i-1} A_i} \wedge \overrightarrow{A_{i-1} B_{J(i)}} \cdot \omega_B A_{i-1} + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n \overrightarrow{B_{j-1} A_{I(j)}} \wedge \overrightarrow{B_{j-1} B_j} \cdot \omega_B B_{j-1} \right)$$

$J(i)$ (resp. $I(j)$) désigne l'indice du point, sommet du triangle dont un coté est $A_{i-1} A_i$ (resp. $B_{j-1} B_j$)

On peut alors écrire que :

$$V' = - \left(\sum_{i=1}^m v_i^A + \sum_{j=1}^n v_j^B \right)$$

III - DECOMPOSITION DES LIGNES DE CONTOUR EN SOUS-ENSEMBLES

Afin de se trouver face au même problème pour chaque sous-ensemble traité, nous avons vu précédemment que ces sous-ensembles doivent décrire des lignes polygonales convexes fermées et orientées dans le sens rétrograde.

Soit $L_0 = A_1 A_2 \dots A_m$ une ligne de contour fermée, quelconque, orientée dans le sens rétrograde.

Nous effectuons sur cette ligne une décomposition itérative.

1ère étape : nous construisons le premier sous-ensemble à l'aide de tous les points de la ligne initiale L_0 appartenant à son enveloppe convexe.

Notons L_1^1 ce premier sous-ensemble.

Soient A_{i_1} , A_{i_2} deux points consécutifs de L_1^1 tels qu'ils ne soient pas consécutifs dans L_0 . Appelons R_1^1 l'ensemble des points situés entre A_{i_1} et A_{i_2} dans L_0 .

étapes suivantes : pour chaque ensemble R_j^i déduit de l'étape précédente, on construit le sous-ensemble L_j^i à l'aide de tous les points situés sur l'enveloppe convexe de R_j^i .

On obtient ainsi une liste de sous-ensembles représentant des lignes de contour, convexes, emboîtées :

niveau 1 : L_1^1

niveau 2 : L_2^1 L_2^2

niveau 3 : $L_3^{1,1}$ $L_3^{1,2}$... $L_3^{2,1}$ $L_3^{2,2}$...

Exemple :

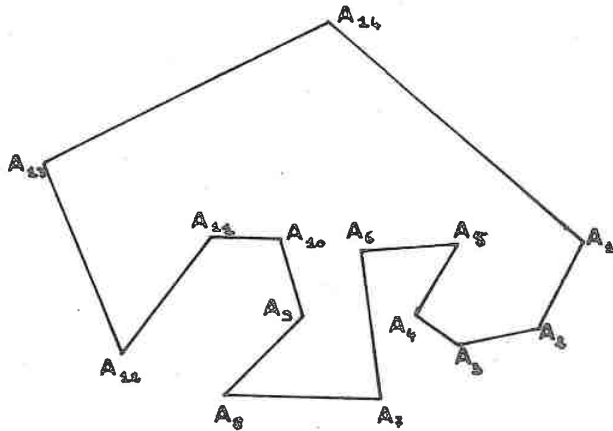


FIGURE 4

Etudions le cas de la figure 4

La ligne de contour initiale est $A_1 A_2 \dots A_{14} = L_0$

Niveau 1 :

- Calcul de L_1^1 :

$L_1^1 = A_1 A_2 A_7 A_8 A_{12} A_{13} A_{14}$ premier sous-ensemble de la décomposition

Il reste deux groupes de points :

$R_1^1 = A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ et $R_1^2 = A_8 A_9 A_{10} A_{11} A_{12}$

Niveau 2 :

- Traitement de R_1^1

Son enveloppe convexe est :

$L_2^1 = A_2 A_5 A_6 A_7$

Il reste un groupe de points

$R_2^{1,1} = A_3 A_4 A_5$

- Traitement de R_1^2

Son enveloppe convexe est

$L_2^2 = A_8 A_9 A_{10} A_{11} A_{12}$

Tous les points de R_1^2 sont traités.

Niveau 3

- Traitement de $R_2^{1,1}$

on détermine son enveloppe convexe :

$$L_3^{1,1} = A_2 A_3 A_4 A_5$$

Tous les points de $R_2^{1,1}$ sont traités.

L'algorithme prend fin puisque tous les points de L_0 sont traités.

Nous pouvons remarquer que les sous-ensembles sont alternativement orientés dans le sens direct et rétrograde.

La figure 5 représente les sous-ensembles obtenus :

niveau 1 : sens rétrograde (—)

$$L_1^1 = A_1 A_2 A_7 A_8 A_{12} A_{13} A_{14}$$

niveau 2 : sens direct (---)

$$L_2^1 = A_2 A_5 A_6 A_7$$

$$L_2^2 = A_8 A_9 A_{10} A_{11} A_{12}$$

niveau 3 : sens rétrograde (-----)

$$L_3^{1,1} = A_2 A_3 A_4 A_5$$

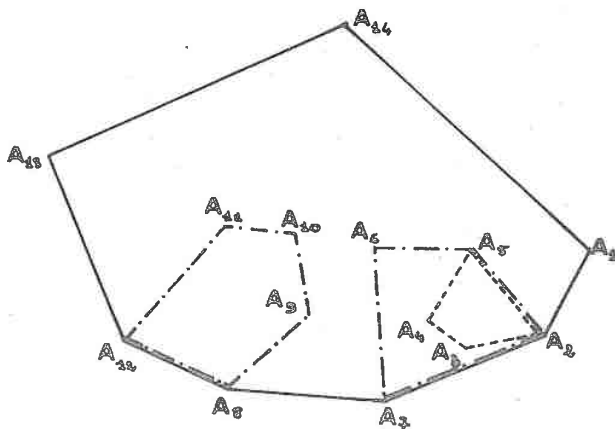


FIGURE 5

IV - TRIANGULATION

Après avoir défini les sous-ensembles emboîtés pour chaque ligne de contour, nous pouvons chercher la décomposition en triangles, qui approche au mieux la frontière entre chaque paire de sous ensembles.

1 - Maximisation du volume défini par deux lignes de contour, convexes, orientées dans le sens rétrograde.

Soient $A_1 A_2 \dots A_m$; $B_1 B_2 \dots B_n$ ces deux lignes :

Considérons le graphe $G = (P, U)$

où P est l'ensemble des sommets $P_{i,j}$ du graphe, représentant ici les arêtes

$A_i B_j$ ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$)

U est l'ensemble des arcs représentant les triangles

Les contraintes, établies au paragraphe I, restreignent l'ensemble U à des

arcs $P_{i,j} P_{i+1,j}$ et $P_{i,j} P_{i,j+1}$

La figure 6 donne une représentation de ce graphe.

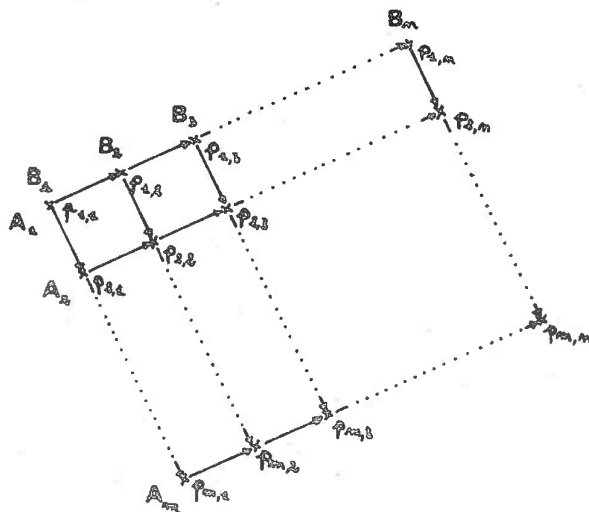


FIGURE 6

Associons une longueur à chaque arc :

soit v_i^A pour un arc $P_{i,j} P_{i+1,j}$

et v_j^B pour un arc $P_{i,j} P_{i,j+1}$

Tout chemin joignant $P_{1,1}$ à $P_{m,n}$ représente une triangulation donnée entre les arêtes $A_1 B_1$ et $A_m B_n$ et la "longueur" du chemin s'interprète comme le volume

V' du polyèdre $A_1 A_2 \dots A_m B_1 B_2 \dots B_n$ pour cette décomposition. Chercher la triangulation qui donne le volume maximum revient à déterminer le plus long chemin de $P_{1,1}$ à $P_{m,n}$, problème classique que nous résolvons par une technique de programmation dynamique :

Construisons deux matrices W et B :

W donnera, pour chaque élément $P_{i,j}$ le plus long chemin de $P_{1,1}$ à $P_{i,j}$ et B le dernier sommet sur ce chemin.

$$- w_{1,1} = 0 \quad ; \quad b_{1,1} = 0$$

$$- w_{i,1} = \sum_{k=1}^{j-1} v_k^A \quad ; \quad b_{i,1} = 0 \quad \text{pour } i = 2, \dots, m$$

$$- w_{1,j} = \sum_{l=1}^{j-1} v_l^B \quad ; \quad b_{1,j} = 1 \quad \text{pour } j = 2, \dots, n$$

$$- w_{i,j} = \max(w_{i-1,j} + v_{i-1}^A, w_{i,j-1} + v_{j-1}^B) \quad \text{pour } i \neq 1 \text{ et } j \neq 1$$

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } w_{i,j} = w_{i-1,j} + v_{i-1}^A \\ 1 & \text{si } w_{i,j} = w_{i,j-1} + v_{j-1}^B \end{cases}$$

Construisons W et B pour le graphe décrit à la figure 7

$$P = \{A_i B_j, \quad i=1, \dots, 3; \quad j=1, \dots, 4\}$$

La longueur des arcs est portée sur la figure

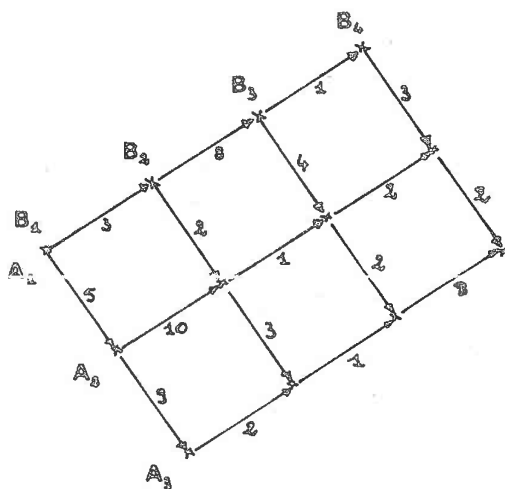


FIGURE 7

On obtient :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 11 & 12 \\ 5 & 15 & 16 & 18 \\ 14 & 18 & 19 & 27 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$w_{m,n}$ représente la longueur du plus long chemin, c'est-à-dire le volume maximum.

Pour déterminer ce volume, nous exploitons la matrice B à partir de l'élément $b_{m,n}$, nous aurons alors la succession des arêtes donnant la triangulation optimum.

Si le plus long chemin passe par $P_{i,j}$, alors il passera par $P_{i-1,j}$ si $b_{i,j} = 0$ ou par $P_{i,j-1}$ si $b_{i,j} = 1$.

Nous pouvons donc énoncer la suite des arêtes à partir de $P_{m,n}$ et jusqu'à $P_{1,1}$.

Dans l'exemple étudié plus haut, la suite des arêtes est $A_3 B_4 - A_3 B_3 -$

$A_3 B_2 - A_2 B_2 - A_2 B_1 - A_1 B_1$.

L'ensemble des triangles maximisant la fonction objectif est alors :

- $A_3 B_3 B_4$
- $A_3 B_3 B_2$
- $A_2 A_3 B_2$
- $A_2 B_1 B_2$
- $A_1 A_2 B_1$

2 - Triangulation générale

La méthode que nous venons d'énoncer n'est valable que si nous nous donnons les sommets origine et extrémité du chemin cherché $P_{1,1}$, $P_{m,n}$ c'est-à-dire les arêtes $A_1 B_1$ et $A_m B_n$.

Notons LA_1 et LB_1 les sous ensembles de niveau 1 des deux contours consécutifs étudiés, et plus généralement LA_j^i , LB_j^i les $i^{\text{ème}}$ sous-ensembles de niveau j .

- Détermination des sommets origine et extrémité du chemin cherché au niveau 1

Dans une première étape, nous devons chercher le couple $A_k B_l$ ($A_k \in LA_1$; $B_l \in LB_1$) tel que le plus long chemin de $A_k B_l$ à $A_k B_l$ soit maximum.

Pour ceci nous construisons les matrices W^l ($l=1, \dots, n$) correspondant chacune à la recherche d'un chemin optimal entre $A_1 B_1$ et $A_l B_l$. La matrice W^l telle que $w_{m+1, n+1}^l$ soit maximum nous donne l'arête origine et extrémité du graphe à étudier, soit $A_1 B_1$.

La matrice B^l associée fournit la triangulation optimale sur les sous-ensembles de niveau 1.

- Détermination des sommets origine et extrémité du chemin cherché lors du traitement de deux sous-ensembles de niveau j.

Au niveau $j-1$, le calcul des matrices W et B nous a donné la triangulation optimum entre deux lignes de contour. Cette triangulation fixe les sommets origine et extrémité des chemins pour les sous-ensembles de niveau j . Nous sommes alors amenés à rencontrer 3 cas, représentés à la figure 8.

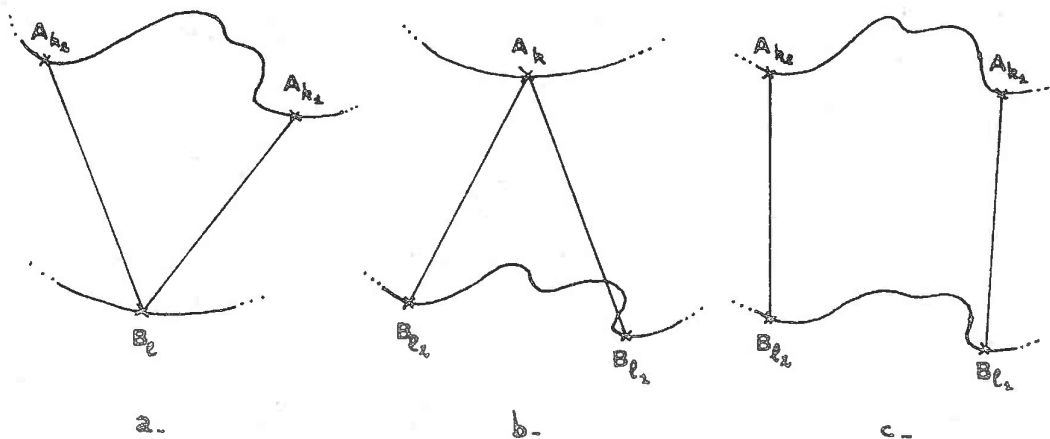


FIGURE 8

Dans le cas a- (respectivement : b-) le traitement se termine en construisant toutes les arêtes $A_k B_l$ pour $k = k_1, \dots, k_2$ (respectivement : $A_k B_l$ pour $l = l_1, \dots, l_2$)

Dans le cas c - nous pouvons alors fixer les sommets origine et extrémité du chemin à construire au niveau j : $A_{k_1} B_{l_1}$ et $A_{k_2} B_{l_2}$

Ces contraintes étant établies pour chaque sous ensemble de niveau j, l'algorithme établi au paragraphe IV - 1 peut être appliqué à nouveau sur les couples de sous-ensembles.

3 - Liste ordonnée de triangles

Le traitement d'une tranche prend fin lorsque tous les points des lignes de contour initiales sont traités. L'algorithme doit alors nous fournir une liste ordonnée de triangles suivant les critères suivant.

Soient $A_1 \dots A_m$ et $B_1 \dots B_n$ les lignes de contour initiales ,

- le premier triangle de la liste est soit $A_1 B_1 B_2$, soit $A_1 B_1 A_2$
- le dernier triangle de la liste est soit $A_1 B_n B_1$, soit $A_m B_1 A_1$
- si $A_i A_{i+1} B_j$ (respectivement $A_i B_j B_{j+1}$) est un triangle de cette liste, alors, les triangles $A_k A_{k+1} B_l$ précéderont $A_i A_{i+1} B_j$ (resp. $A_i B_j B_{j+1}$) si $k \leq i-1$ et $l \leq j$; de la même manière, un triangle $A_k B_l B_{l+1}$ précèdera $A_i A_{i+1} B_j$ (resp. $A_i B_j B_{j+1}$) si $k \leq i$ et $l \leq j-1$.

CHAPITRE II

CHOIX D'UN TRACE

I-QUE REPRESENTER ?

Nous devons établir l'image d'un objet tel que le voit un observateur donné, de manière à ce que l'objet garde sa signification; ceci nous impose de construire une image simple, sur laquelle ne figure que les arêtes nécessaires à sa lecture.

Rappelons que ces objets sont des polyèdres, définis par deux faces polygonales et des triangles (cf. chapitre I)

Il est bien évident que le tracé de toutes les arêtes du polyèdre alourdirait considérablement l'image.

Nous avons alors choisi de ne tracer que certaines arêtes significatives:
-les arêtes représentant une discontinuité dans la visibilité du polyèdre, c'est-à-dire les arêtes qui appartiennent à deux polygones dont l'un fait face à l'observateur tandis que l'autre appartient à l'arrière de l'objet. Nous appellerons "pseudo-contour apparent" l'ensemble de ces arêtes.

-les arêtes appartenant aux lignes de contour quelles que soient leurs caractéristiques.

Ces arêtes apparaîtront en traits lorsqu'elles seront visibles; elles seront absentes ou tracées en pointillés lorsqu'elles seront cachées.

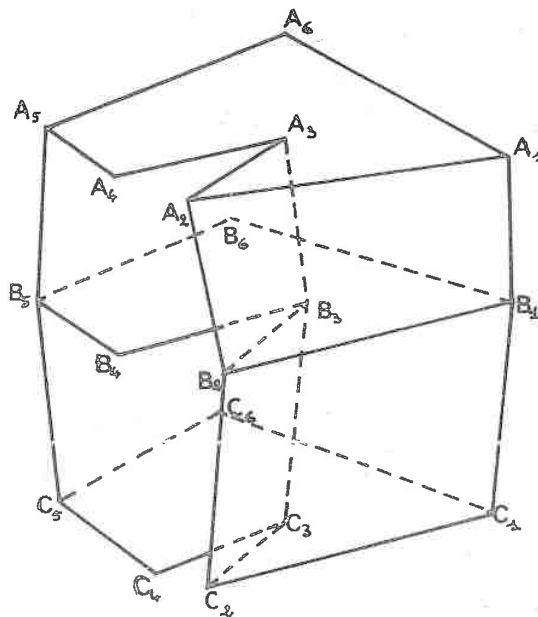


figure 1

Prenons l'exemple d'un objet défini par trois lignes de contour ($A_1 \dots A_6$; $B_1 \dots B_6$; $C_1 \dots C_6$); la figure 1 représente l'image de cet objet pour une observation donnée. Dans ce cas, le tracé portera sur:

-le "pseudo-contour apparent":

$$\begin{cases} A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_5B_5 \\ B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_5C_5 \\ A_5A_6, A_6A_1, C_1C_2, C_3C_4, C_4C_5 \end{cases}$$

-les lignes de contour:

$$\begin{cases} A_1A_2A_3A_4A_5A_6 \\ B_1B_2B_3B_4B_5B_6 \\ C_1C_2C_3C_4C_5C_6 \end{cases}$$

II-ARETES REELLES-ARETES FICTIVES.

Toute arête ne sera pas tracée, néanmoins, pour construire l'image, nous tiendrons compte de toutes les arêtes. Aussi avons-nous établi une distinction entre les arêtes traitées:

-les arêtes réelles: arêtes appartenant au tracé.

-les arêtes fictives: arêtes ne figurant pas dans le tracé de l'image, mais nécessaires à l'élaboration de celle-ci.

Afin d'éviter de tracer deux fois la même arête, toute arête ne pourra apparaître qu'une seule fois dans l'ensemble des arêtes réelles.

La détermination des arêtes réelles figurera dans la deuxième partie de cet exposé, lors de la recherche d'un ordre d'exploitation des faces de l'objet pour une observation donnée.

CHAPITRE III

PERSPECTIVE

I - TYPES DE PERSPECTIVES

Nous pouvons distinguer ici, trois types de perspective .

1 - Perspective centrale ou conique

L'image est obtenue en traçant les intersections des rayons menés de Ω l'oeil de l'observateur, ou point de vue à tous les points de l'objet à représenter, avec un plan T donné.

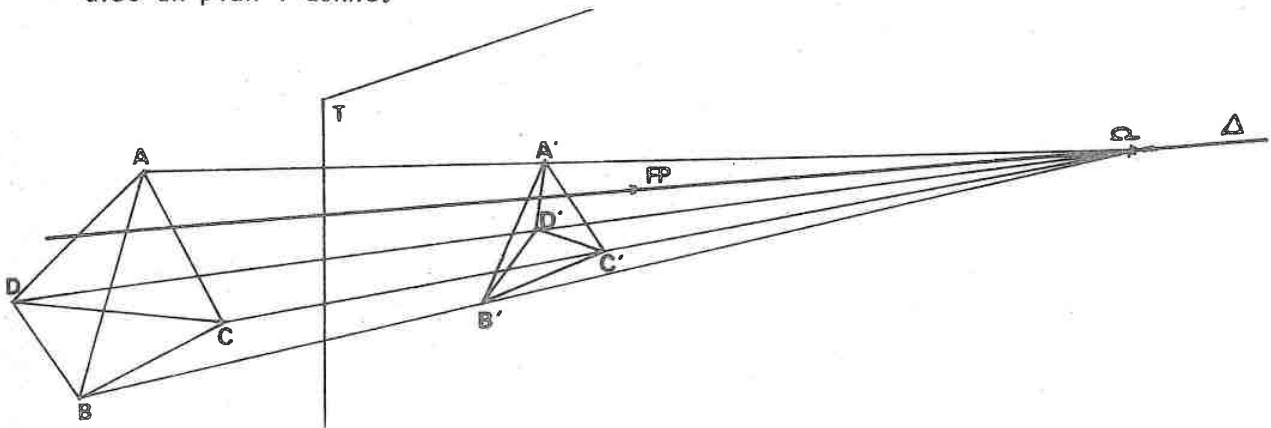


Figure 1

A B C D objet à représenter

A' B' C' D' image de A B C D sur un plan T pour un observateur Ω .

Soit Δ , la droite passant par Ω et perpendiculaire à T.

Δ est appelé ligne de visée.

FP, intersection de Δ et T est le point de fuite principal.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé , une perspective centrale sera définie par :

- les coordonnées du point de vue Ω .
- le plan de l'image T (ou les coordonnées du point de fuite principal FP ou la ligne de visée Δ et $\overline{FP\Omega}$).

Déterminons les coordonnées de l'image Q d'un point P de l'espace rapporté

au repère orthonormé $(O\ xyz)$, image obtenue par projection conique à partir d'un point de vue $\Omega (x_\Omega, 0, 0)$, $x_\Omega > 0$, sur le plan (yoz) . Notons que, par des transformations simples - rotation, translation - nous pouvons toujours nous ramener à ce cas.

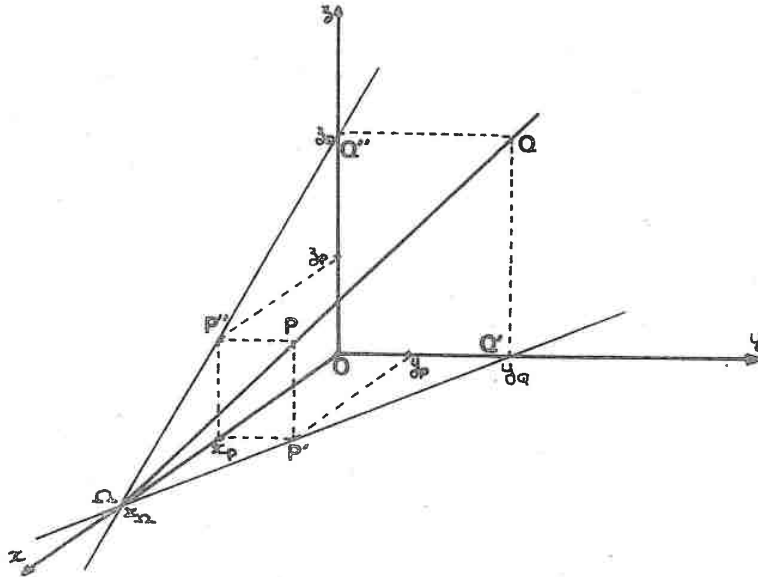


Figure 2

Soit P' , la projection de P sur xoy et P'' la projection de P sur xoz .

Supposons P distinct de Ω et déterminons l'équation de la droite support de $\Omega P'$:

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y_\Omega - y_P}{x_\Omega - x_P}$$

$x_Q = 0$, donc :

$$y_Q = \frac{y_P \cdot x_\Omega}{x_\Omega - x_P}$$

De la même manière en écrivant l'équation de P'' on obtient :

$$z_Q = \frac{z_P \cdot x_\Omega}{x_\Omega - x_P}$$

la figure 6a donne l'image d'un objet à l'aide d'une telle projection.

Si on rejette le point de vue à l'infini dans un sens D donné, on réalise une axonométrie ou perspective parallèle ; suivant la position de D par rapport au plan de l'image T , nous distinguerons deux axonométries.

2 - Axonométrie oblique ou perspective cavalière

Dans ce cas , la direction D n'est pas perpendiculaire à T . L'image est obtenue en traçant les intersections de rayons parallèles à D et passant par tous les points de l'objet, avec le plan T .

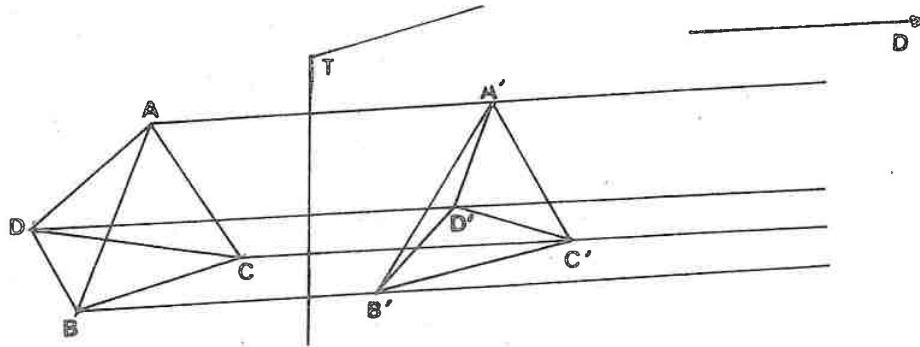


Figure 3

$A B C D$ objet à représenter

$A' B' C' D'$ image de $A B C D$ sur le plan T , dans une perspective cavalière de sens D .

Si on rapporte l'espace à un repère orthonormé, ce type de perspective est définie par :

- le plan T
- le sens de projection D .

Cherchons les coordonnées du point Q , image du point P de l'espace rapporté au système $(Oxyz)$, par axonométrie oblique sur le plan (yOz) , à partir d'une direction D définie par deux angles θ et ϕ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$).

Nous pouvons toujours, par rotations, nous ramener à ce cas. Notons que l'image obtenue est la même sur tout plan T parallèle à (yOz) .

D'' est la projection de D sur xOy et D' la droite parallèle à D'' et passant par P

θ est l'angle (Ox, D'')

ϕ est l'angle (D', D)

Calculons les composantes du vecteur $\vec{u}$, vecteur unitaire de D dans le repère $(Oxyz)$.

$$\vec{u} \begin{cases} u_x = \cos \phi \cdot \cos \theta \\ u_y = \cos \phi \cdot \sin \theta \\ u_z = \sin \phi \end{cases}$$

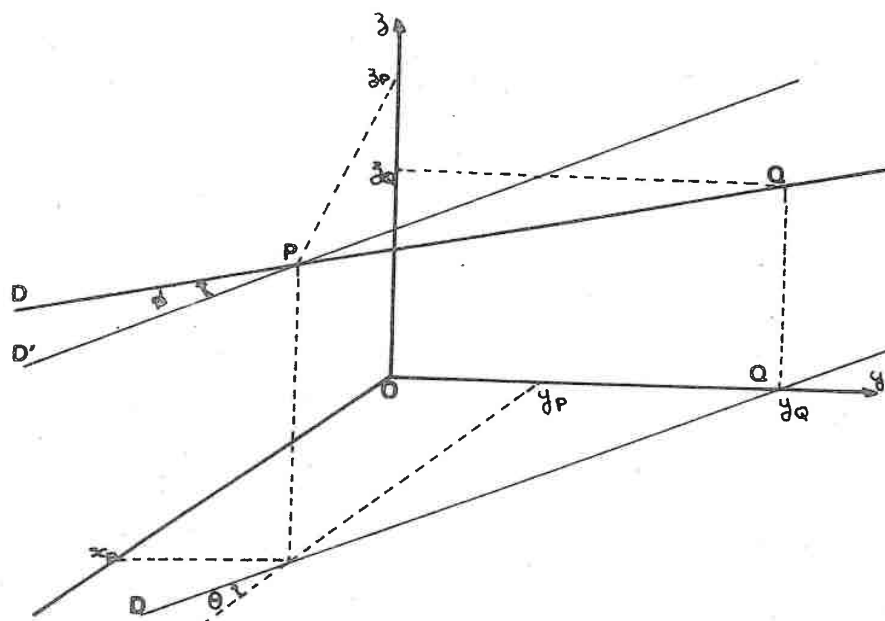


Figure 4

Afin de déterminer les coordonnées de Q, écrivons que :

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{u} \text{ soit :}$$

$$x_Q = x_p + \lambda \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta$$

$$y_Q = y_p + \lambda \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta$$

$$z_Q = z_p + \lambda \cdot \sin \phi$$

Q est dans le plan (yOz) donc $x_Q = 0$

$$\text{On peut calculer } \lambda : \lambda = \frac{-x_p}{\cos \phi \cdot \cos \theta} \text{ si } \phi \neq \pm \frac{\pi}{2}; \theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

Les coordonnées de l'image Q de P sont alors :

$$y_Q = y_p - x_p \cdot \operatorname{tg} \theta$$

$$z_Q = z_p - x_p \cdot \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos \theta}$$

La figure 6 b donne l'image d'un objet obtenue par perspective cavalière.

3 - Axonométrie orthogonale ou isométrie.

On considère alors que le sens D est perpendiculaire au plan de l'image T. L'image est obtenue par projection orthogonale de tous les points de l'objet sur le plan T.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, une isométrie est définie par :
- le plan T ou, ce qui revient au même, le sens D. L'image obtenue est la même sur tout plan perpendiculaire à D.

Déterminons Q, image de P obtenue par isométrie dont le sens D est défini par deux angles θ et ϕ dans le repère (Oxyz).

Pour cela, exprimons les coordonnées de P, dans le repère (OZXY) obtenu par rotation d'angle θ autour de Oy (repère (Ox'y'z)) puis par rotation d'angle ϕ autour de Oy'.

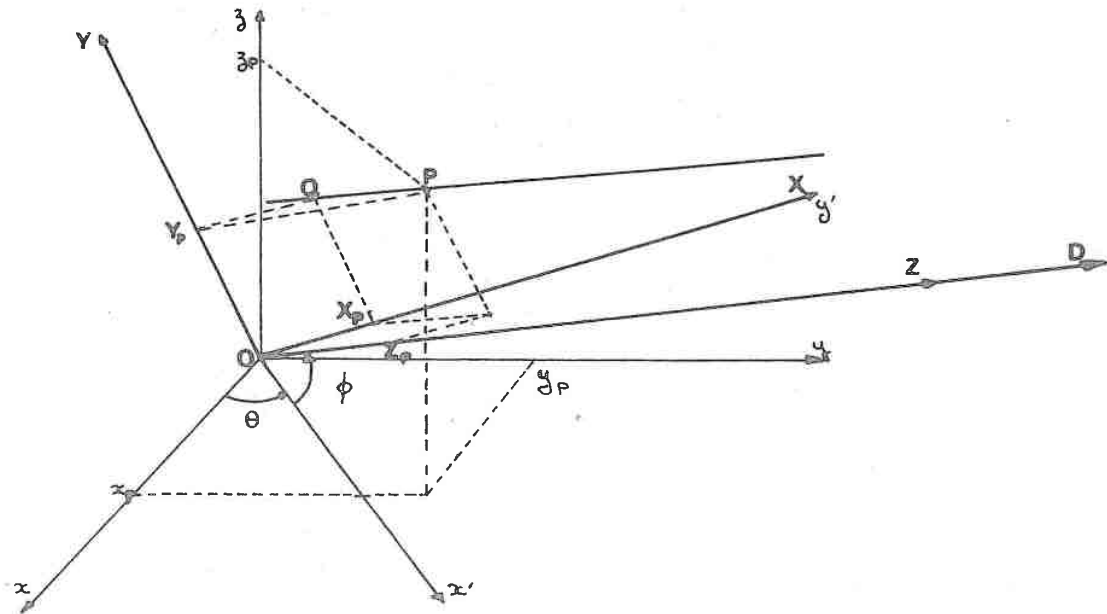


Figure 5

(x'Oy') est le plan de l'image.

La rotation d'angle θ autour de Oz s'exprime par la matrice suivante :

$$R_{Oz}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quant à la rotation d'angle ϕ autour de Oy' , elle est donnée par :

$$R_{Oy'}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

Les coordonnées de $P(Z_p, X_p, Y_p)$ dans le repère $(OZXY)$ s'obtiennent à partir des coordonnées de $P(x_p, y_p, z_p)$ dans le repère $(Oxyz)$ de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} Z_p & X_p & Y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \cdot R_{Oz}(\theta) \cdot R_{Oy'}(\phi)$$

X_p, Y_p sont les coordonnées du point Q , image de P ; dans le plan XOY .

$$X_Q = -\sin \theta \cdot x_p + \cos \theta \cdot y_p$$

$$Y_Q = -\cos \theta \cdot \sin \phi \cdot x_p - \sin \theta \cdot \sin \phi \cdot y_p + \cos \phi \cdot z_p$$

$$Z_p = \cos \theta \cdot \cos \phi \cdot x_p + \sin \theta \cdot \cos \phi \cdot y_p + \sin \phi \cdot z_p$$

Cette dernière coordonnée exprime la profondeur du point P , par rapport à l'observateur.

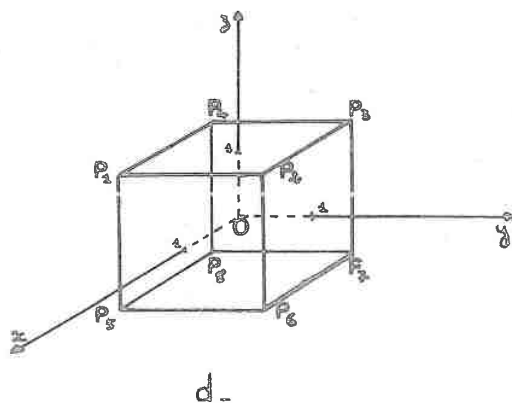
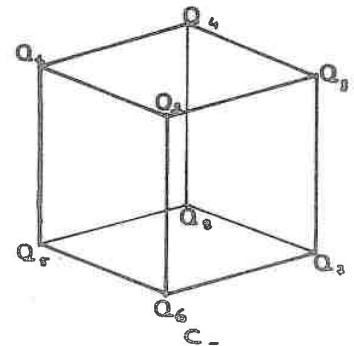
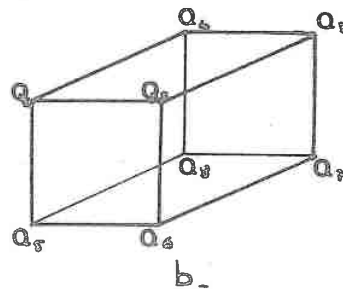
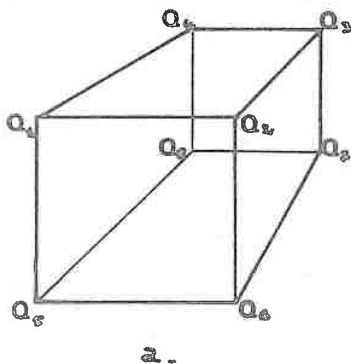


Figure 6

La figure 6 représente 3 images d'un même objet obtenues à l'aide des trois perspectives étudiées ci-dessus.

$P_1 P_2 \dots P_8$ est un cube de 2 cm de côté, dont le centre coïncide avec l'origine du repère (Oxyz); chacune de ses arêtes est parallèle à un des axes, ainsi que le représente la figure 6 -d-

a - Cette image est obtenue par projection conique sur le plan xOy, à partir d'un observateur Ω de coordonnées (3.5, 2.5, 5).

b - Une perspective cavalière de plan xOy, et d'angle $\theta = 50^\circ$, $\phi = 20^\circ$ nous fournit l'image b.

c - Quant à la 3ème image représentée (6-c), elle est le résultat d'une isométrie d'angle $\theta = 50^\circ$ et $\phi = 20^\circ$.

II - POINTS CACHES

Le but de notre travail est de déterminer ce qui est visible ou caché dans un objet, pour une certaine position d'un observateur. Il est donc essentiel de pouvoir déterminer les positions relatives d'un point P_1 et d'un point P_2 , pour un point de vue donné.

Nous dirons que P_1 cache P_2 si dans la projection étudiée, P_1 et P_2 ont même image et si P_1 est "entre" l'observateur et P_2 .

1 - Perspective conique

Dans l'espace rapporté au repère orthornormé (Oxyz), soit une projection conique de centre $\Omega (x_\Omega, 0, 0)$, $x_\Omega > 0$, sur le plan (yOz), nous éliminons, dans un premier temps tous les points qui sont "derrière" l'observateur, ce qui s'exprime par la condition $x_p < x_\Omega$

Un point P_1 , d'image Q, cache un point P_2 , d'image Q_2 si :

$$\begin{cases} x_{P_1} < x_\Omega & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{P_2} < x_\Omega & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega P_1} = \lambda \overrightarrow{\Omega P_2}, \quad 0 < \lambda < 1 & (3) \end{cases}$$

La figure 7 -a illustre ces conditions.

La condition (3) s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} y_{P_1} = \lambda y_{P_2} \\ z_{P_1} = \lambda z_{P_2} \\ x_{P_1} - x_{\Omega} = \lambda (x_{P_2} - x_{\Omega}) \end{cases} \quad (4)$$

(4) devient $x_{P_1} - x_{P_2} = (1 - \lambda) (x_{\Omega} - x_{P_2})$

$(1 - \lambda) > 0$ et $x_{\Omega} > x_{P_2}$ (2) donc $x_{P_1} > x_{P_2}$

La condition pour que P_1 , $(x_{P_1} < x_{\Omega})$ cache P_2 $(x_{P_2} < x_{\Omega})$ est :

$$\begin{cases} y_{P_1} = \lambda y_{P_2} \\ z_{P_1} = \lambda z_{P_2} \\ x_{P_1} > x_{P_2} \end{cases} \quad (5)$$

2 - Perspective cavalière

Soit, dans un espace rapporté au trièdre orthonormé $(Oxyz)$, une perspective cavalière de sens D , définie par deux angles θ , ϕ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2})$ et

dont le plan de l'image est (yOz) , (figure 7 -b) P_1 , d'image Q_1 , peut cacher P_2 , d'image Q_2 si :

$$\overrightarrow{P_2 P_1} = \lambda \vec{u}, \lambda > 0$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de D (u_x, u_y, u_z). Cette condition peut s'écrire :

$$\begin{cases} x_{P_1} - x_{P_2} = \lambda u_x, \lambda > 0 \\ y_{P_1} - y_{P_2} = \lambda u_y, \lambda > 0 \\ z_{P_1} - z_{P_2} = \lambda u_z, \lambda > 0 \end{cases} \quad (6)$$

$u_x = \cos \theta \cdot \cos \phi$, or $|\phi| < \frac{\pi}{2}$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ donc (6) est équivalente à $x_{P_1} > x_{P_2}$

P_1 est caché par P_2 si :

$$\begin{cases} y_{P_1} - y_{P_2} = \lambda u_y, \lambda > 0 \\ z_{P_1} - z_{P_2} = \lambda u_z, \lambda > 0 \\ x_{P_1} > x_{P_2} \end{cases} \quad (7)$$

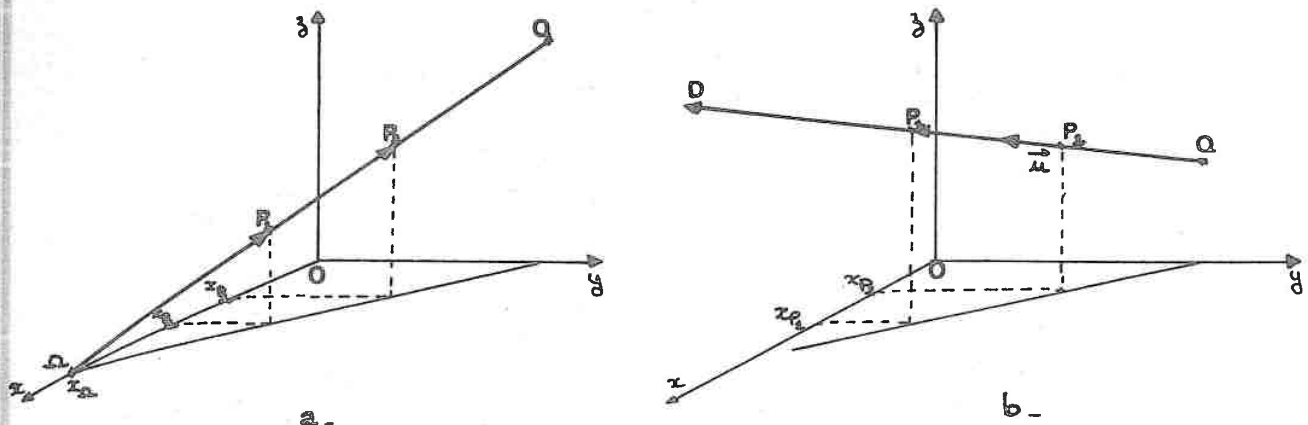


Figure 7

3 - Isométrie

Etudions une isométrie de sens D, $(Oxyz)$ est le repère orthonormé dans lequel est défini l'objet et $(OZXY)$ le repère orthonormé tel que OZ soit le sens D et (XOY) le plan de l'image. Les conditions pour que P_1 cache P_2 sont :

$$\begin{cases} x_{P_1} = x_{P_2} \\ y_{P_1} = y_{P_2} \\ z_{P_1} > z_{P_2} \end{cases} \quad (8)$$

III - REDUCTION DU PROBLEME

La transformation choisie dans ce travail est l'axonométrie orthogonale ; nous montrons, dans les paragraphes suivants, que toute perspective peut se réduire à une isométrie après une transformation convenable de l'objet.

1 - Perspective conique

Considérons une perspective conique de centre $\Omega (x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ dont le point de fuite principal FP a pour composantes (x_{FP}, y_{FP}, z_{FP}) dans l'espace rapporté au trièdre orthonormé $(Oxyz)$, $x_\Omega \neq x_{FP}$. Nous employons les coordonnées homogènes pour définir tout point de l'espace ; rappelons que un point $P(x_p, y_p, z_p)$ de l'espace à trois dimensions peut s'exprimer en coordonnées homogènes à l'aide de quatre composantes (X_p, Y_p, Z_p, W_p) telles que :

$$x_p = \frac{X_p}{W_p} ; \quad y_p = \frac{Y_p}{W_p} ; \quad z_p = \frac{Z_p}{W_p}$$

La réduction de la perspective considérée à une isométrie se fait en deux temps :

1- 1- Changement de repère faisant passer de l'espace $(Oxyz)$ à un espace intermédiaire $(OZXY)$ défini ainsi :

- O est le point de fuite principal FP.
- XOY est le plan de l'image.
- Ω a pour composantes $(Z_\Omega, 0, 0)$ avec $Z_\Omega > 0$.

- Translation

La première transformation déplace les axes de façon à amener l'origine au point FP; elle s'exprime par la matrice suivante :

$$Tr(OFP) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_{FP} & -y_{FP} & -z_{FP} & 1 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi un nouveau système $(O x' y' z')$

- Rotations

Déterminons les deux angles θ et ϕ qui permettent de passer du système $(Ox'y'z')$ au système $(OZXY)$, afin que $X_\Omega = Y_\Omega = 0$, $Z_\Omega > 0$.

Soit K le vecteur unitaire de l'axe OZ; la condition exprimant $Z_\Omega > 0$ peut s'écrire :

$$\vec{K} = \frac{\vec{O\Omega}}{\|\vec{O\Omega}\|}, \text{ soit}$$

$$\vec{K} \begin{cases} k_1 = \frac{x'_\Omega}{\|\vec{O\Omega}\|} \\ k_2 = \frac{y'_\Omega}{\|\vec{O\Omega}\|} \\ k_3 = \frac{z'_\Omega}{\|\vec{O\Omega}\|} \end{cases}$$

or $\vec{K}$ se décrit dans le système $(Ox'y'z')$ par :

$$\vec{K} \begin{cases} \cos \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \end{cases}$$

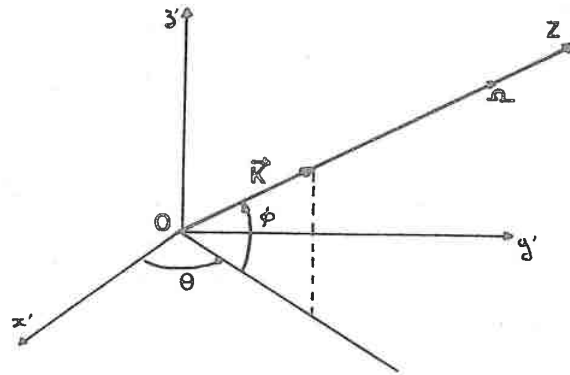


Figure 8

Nous avons donc trois équations à 2 inconnues θ et ϕ :

$$\begin{cases} \cos \phi \cos \theta = k_1 & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \phi \sin \theta = k_2 & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \phi = k_3 & (11) \end{cases}$$

$$(9) \text{ et } (10) \text{ donnent } \cos \phi = \epsilon \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (12)$$

(11) et (12) déterminent deux valeurs de ϕ en fonction de ϵ :

$$\begin{cases} \epsilon = +1, \phi \\ \epsilon = -1, \pi - \phi \end{cases}$$

$$(9) \text{ et } (12) \text{ donnent } \cos \theta = \frac{\epsilon k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad (13)$$

$$(10) \text{ et } (12) \text{ donnent } \sin \theta = \frac{\epsilon k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad (14)$$

(13) et (14) déterminent deux valeurs de θ en fonction de ϵ :

$$\begin{cases} \epsilon = +1, \theta \\ \epsilon = -1, \pi + \theta \end{cases}$$

Connaissant les angles θ et ϕ , les matrices de rotation s'expriment ainsi :

$$R_{Oy'}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \text{ pour passer de}$$

$(Ox'y'z')$ à $(Ox''y''z'')$ par rotation de θ autour de O_z .

$$R_{Oy''}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \text{ pour passer de}$$

$(Ox''y''z'')$ à $(OZXY)$ par rotation de ϕ autour de $O_{y''}$.

1 - 2 - Projection perspective.

Considérons un point $P(Z_p, X_p, Y_p)$, $Z_p < Z_\Omega$ et son image $Q(0, X_Q, Y_Q)$ dans la perspective choisie. La transformation qui associe à tout point P de l'espace un point P' tel que :

$$XP' = XQ \quad (15)$$

$$YP' = YQ \quad (16)$$

$$ZP' = f(ZP) \quad (17) \quad , \text{ où } f \text{ conserve la profondeur relative des points par rapport à l'observateur peut s'exprimer par la matrice :}$$

$$T(Z_\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{Z} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérifions que $T(Z_\Omega)$ convient ; pour ceci, calculons les coordonnées homogènes $(Z_{p'}, X_{p'}, Y_{p'}, 1)$ du point P' , obtenu par la transformation $T(Z_\Omega)$ du point $P(Z_p, X_p, Y_p, 1)$. Q est l'image de P .

$$\begin{bmatrix} Z_{P'} & X_{P'} & Y_{P'} & W_{P'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_P & X_P & Y_P & 1 \end{bmatrix} \times T(Z_\Omega) \text{ avec } Z_{P'} = \frac{Z_P}{W_{P'}} ;$$

$$X_{P'} = \frac{X_P}{W_{P'}} ; \quad Y_{P'} = \frac{Y_P}{W_{P'}} \quad \text{ce qui donne :}$$

$$X_{P'} = \frac{Z_\Omega \cdot X_P}{Z_\Omega - Z_P} \quad \text{qui vérifie (15)}$$

$$Y_{P'} = \frac{Z_\Omega \cdot Y_P}{Z_\Omega - Z_P} \quad \text{qui vérifie (16)}$$

$$Z_{P'} = \frac{Z_\Omega}{Z_\Omega - Z_P}, \text{ fonction croissante de } Z_P \text{ définie sur }]-\infty, Z_\Omega[.$$

Donc si un point P_1 cache un point P_2 , d'après (5) $Z_{P_1} > Z_{P_2}$, alors $Z_{P'_1} > Z_{P'_2}$,

ce qui signifie que $T(Z_\Omega)$ conserve bien la profondeur relative des points par rapport au point de vue Ω .

La figure 9 donne un exemple de cette transformation.

La perspective se réduit ensuite à une isométrie sur le plan (XOY).

2 - Perspective cavalière

Considérons, dans un espace rapporté au système (Oxyz) une axonométrie oblique définie par :

- . Un plan T muni d'un repère (XOY)
- . une direction D donnée par rapport à (Oxyz)
- De la même manière que dans le cas de la perspective conique, on peut déterminer les angles d'Euler θ', ϕ', ψ' qui font passer par des rotations successives, du repère (Oxyz) au repère (OZXY).
- Soient θ et ϕ ($|\theta| < \frac{\pi}{2}$; $|\phi| < \frac{\pi}{2}$), les angles définissant la direction par rapport à (OZXY). P(Z_P, X_P, Y_P) a pour image Q(0, X_Q, Y_Q) dans la perspective cavalière donnée.

La transformation qui associe à tout point P un point $P'(Z_{P'}, X_{P'}, Y_{P'})$ tel que :

$$\begin{cases} X_{P'} = X_Q \\ Y_{P'} = Y_Q \\ Z_{P'} = Z_P \end{cases}$$

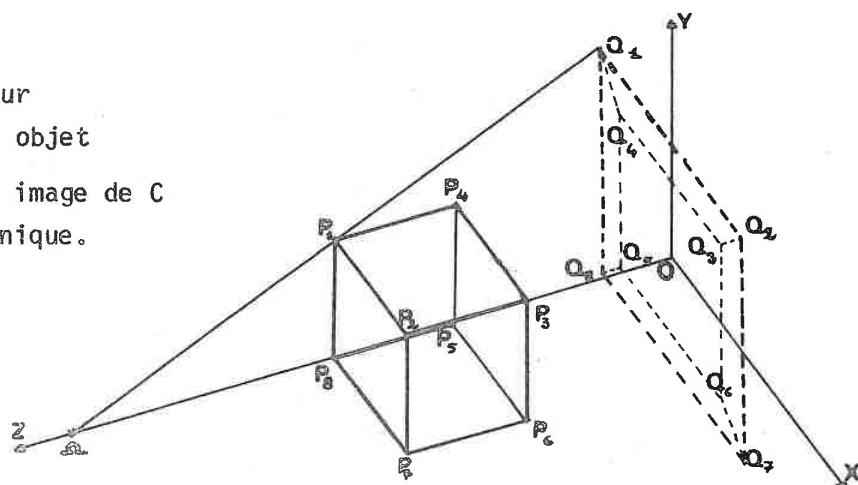
peut s'exprimer par la matrice suivante :

$$T(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & -\operatorname{tg}\theta & -\frac{\operatorname{tg}\phi}{\cos\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ω est l'observateur

$a-C = P_1 P_2 \dots P_8$: objet

$I = Q_1 Q_2 \dots Q_8$: image de C
en perspective conique.

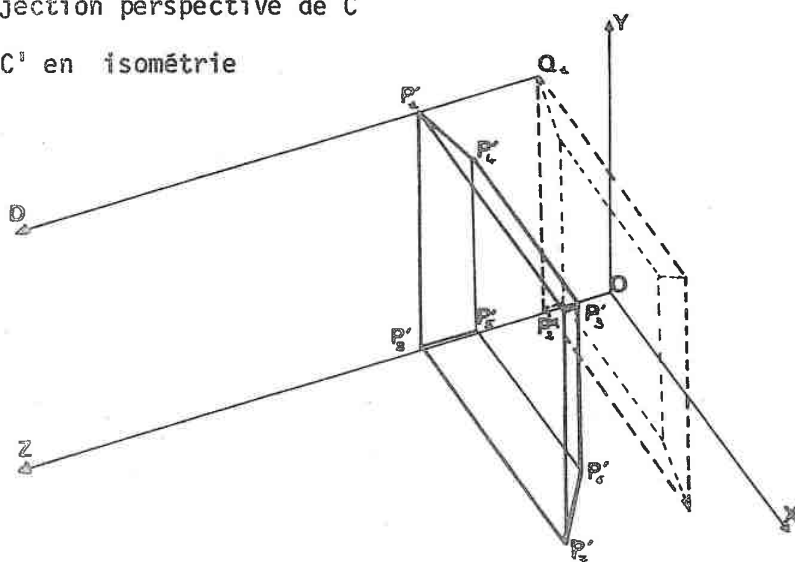


a-

$b-C' = P'_1 \dots P'_8$: projection perspective de C

$I' = Q'_1 \dots Q'_8$: image de C' en isométrie
de sens OZ

$I' = I$



b-

Figure 9

Il est évident que cette transformation conserve la profondeur relative des points les uns par rapport aux autres.

La figure 10 illustre une telle transformation.

3 - Définitions

Nous venons de montrer que toute perspective peut se réduire à une isométrie par transformation de l'objet observé. Afin de préciser les notations par la

suite nous donnons quelques définitions.

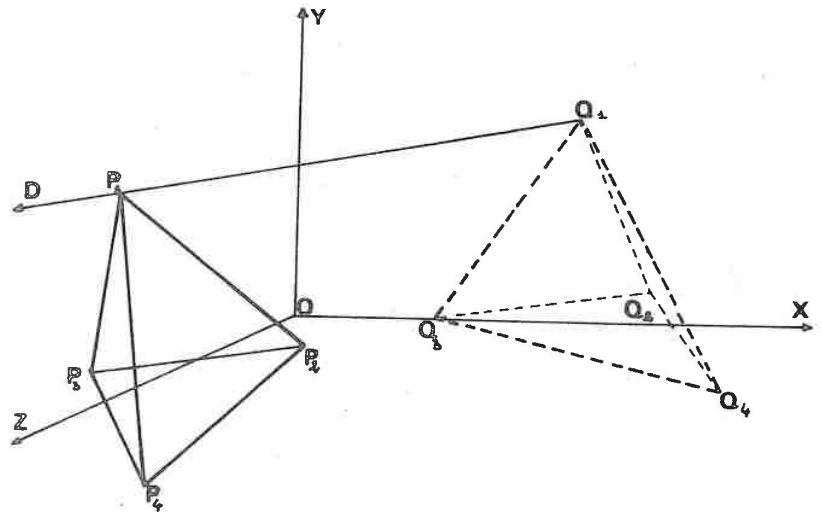
Espace-objet : espace rapporté à un repère orthonormé (Oxyz) dans lequel est défini l'objet à représenter ainsi que les paramètres de la perspective.

Espace-image : espace rapporté à un repère orthonormé (OZXY) dans lequel l'image est obtenue par projection orthogonale de l'objet transformé sur le plan (XOY) et dans lequel sont effectués les calculs d'élimination d'arêtes cachées.

D sens de projection

a. = $P_1 P_2 P_3 P_4$ objet

$I = Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ image de C
en perspective cavalière
de sens D.



a.

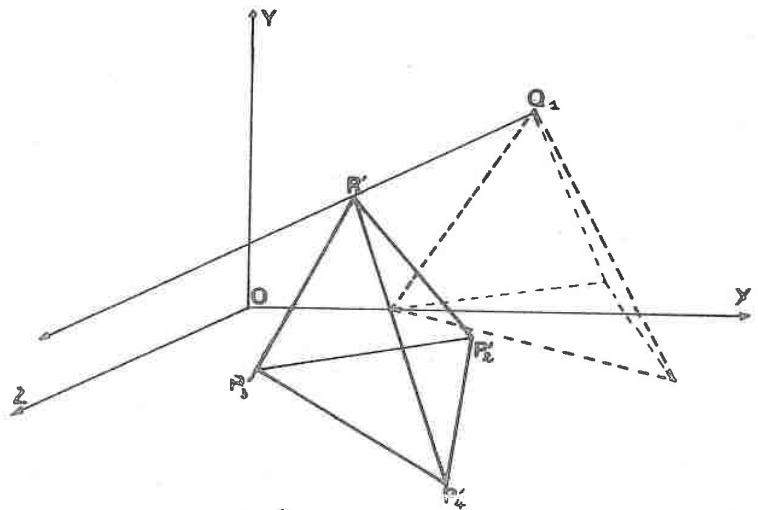
b- $C^i = P_1^i P_2^i P_3^i P_4^i$

transformé de C

$I' = Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ image de

C^i en isométrie de
sens OZ.

$I' = I$



b.

Figure 10

4 - Cadrage de l'image

Dans ce travail, nous ne nous occupons pas du découpage de l'image, qui réaliserait un cadrage. C'est à dire que nous considérons que "l'écran" est constitué par la totalité du plan-image. Nous cherchons donc à représenter tout l'objet sur ce plan, puis, par des changements d'échelle à opérer sur l'image obtenue, nous pouvons tracer l'intégralité de cette image sur un "écran" réel donné.

2.

solution proposée
au problème d'élimination des lignes cachées

INTRODUCTION

Dans cette partie, nous dégagons une méthode pour détecter les parties visibles et cachées d'un objet π , défini dans un espace-objet par un certain nombre de points appartenant à l'intersection de l'objet et de plans parallèles. Les frontières de l'objet sont approchées par un polyèdre (deux polygones parallèles et des faces triangulaires). La perspective utilisée est l'axonométrie orthogonale ; l'espace-image est repéré par le trièdre orthonormé (OZXY). Pour la perspective donnée, l'objet est entièrement défini par un ensemble de "faces avant". L'idée exploitée pour la détermination de l'algorithme est la suivante : une face G d'un objet π peut être cachée par un ensemble calculable de "faces avant" $H_1 \dots H_i$ situées avant G, c'est à dire, entre G et l'observateur. Si nous calculons l'union des projections de ces faces sur le plan de l'image, le polygone obtenu nous permet de construire un masque interposé entre la face G et l'observateur.

En exploitant cette notion, nous nous proposons de résoudre le problème par les étapes suivantes :

- Détermination d'un ordre sur les "faces avant" d'un objet .
- Détermination, par récurrence, des points visibles d'une face ; pour ceci, nous devons atteindre deux objectifs ; le premier est le calcul effectif des points visibles d'une face en fonction de son environnement ; quant au deuxième, il consiste à construire les différents masques, représentant pour chaque face un environnement particulier ; nous serons alors amenés à parler de la réunion du masque et d'une face.

CHAPITRE I

ORDRE DE TRAITEMENT DES POLYGONES POUR UNE ISOMETRIE DONNEE

I - DESCRIPTION DE L'OBJET

Rappelons que tout objet π , que nous devons représenter, est délimité par un ensemble de faces planes, chacune d'elles étant définie par un polygone.

Décrivons cet objet dans l'espace-objet (Oxyz)

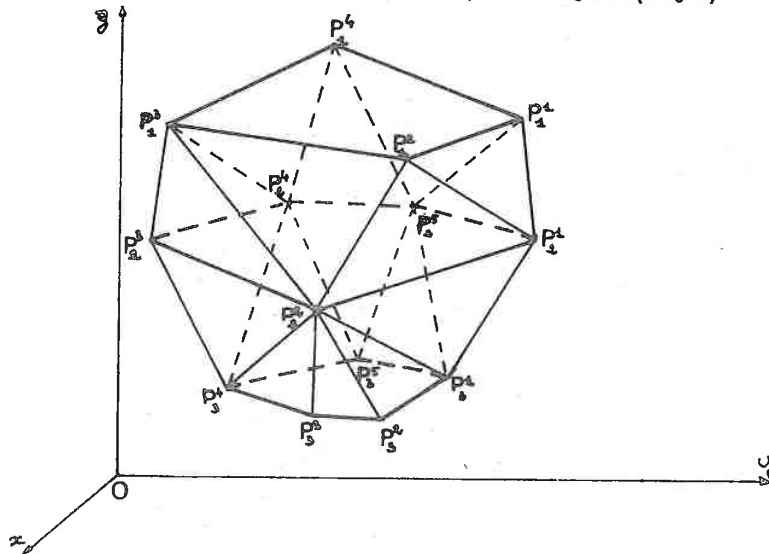


FIGURE 1

Il comprend p sections parallèles à (xOy) .

- $\mathcal{P}_1$ est la face "supérieure" de l'objet, c'est à dire celle dont la coordonnée z est maximum; ce polygone est défini par la ligne polygonale orientée dans le sens rétrograde dans le repère (xOy) et constituée des points de la première ligne de contour.

$\mathcal{P}_1 = (p_1^1 \ p_1^2 \ \dots \ p_1^{n_1})$ où n_1 est le nombre de points sur cette ligne.

- $\mathcal{P}_p$ est la face "inférieure" de l'objet ; elle est définie de la même manière que $\mathcal{P}_1$.

$\mathcal{P}_p = (p_p^1 \ p_p^2 \ \dots \ p_p^{n_p})$ où n_p est le nombre de points de la dernière ligne de contour.

- Les autres faces sont déterminées par les triangles obtenus par approximation des frontières de chaque tranche.

Soit $\mathcal{S}_1$, l'ensemble des triangles générés entre la 1ère et la 2ème section

(1ère tranche)

$$\mathcal{S}_1 = \{ s_1^1, s_1^2, \dots, s_1^{n_1 + n_2} \}$$

$\mathcal{S}_2$, ensemble des triangles générés sur la 2ème tranche s'écrit :

$$\mathcal{S}_2 = \{ s_2^1, s_2^2, \dots, s_2^{n_2 + n_3} \}$$

Enfin, la dernière tranche est définie par :

$$\mathcal{S}_{p-1} = \{ s_{p-1}^1, s_{p-1}^2, \dots, s_{p-1}^{n_{p-1} + n_p} \}$$

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{p-1}$ sont des groupes de triangles ordonnés suivant l'ordre introduit dans le chapitre I - première partie.

Les triangles s_i^j , $1 \leq i \leq p-1$, $1 \leq j \leq n_i + n_{i+1}$, sont de deux types :

- ceux qui possèdent deux sommets sur la ligne de contour n° i et un sommet sur la ligne i + 1 .
- ceux qui possèdent un sommet sur la ième ligne et deux sommets sur la i + 1ème ligne.

Tout objet est donc défini par :

$\mathcal{P}_1$: sa face supérieure

$\mathcal{P}_p$: sa face inférieure

$\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{p-1}$: ses frontières.

Dans l'exemple de la figure 1, l'objet se décrit à l'aide de :

$$\mathcal{P}_1 = (p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_2^4)$$

$$\mathcal{P}_3 = (p_3^1, p_3^2, p_3^3, p_3^4, p_3^5)$$

$$\mathcal{S}_1 = \{ p_1^1 p_2^1 p_1^2, p_1^2 p_2^1 p_2^2, \dots, p_2^5 p_1^1 p_2^1 \}, \text{ ensemble de 9 triangles}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{ p_2^1 p_3^1 p_2^2, p_2^2 p_3^1 p_3^2, \dots, p_2^5 p_3^1 p_2^1 \}, \text{ ensemble de 10 triangles.}$$

Lors de l'étude sur la perspective (1ère partie chapitre III), nous avons montré que tout type de perspective, demandé dans un espace (Oxyz) peut se ramener, par une suite de transformations de l'objet à une projection orthogonale sur le plan

XOY dans le système image repéré par (OZXY).

Tout objet π , se transforme alors en un objet π' défini par :

$$Q_1 = (Q_1^1 \quad Q_1^2 \quad \dots \quad Q_1^{n_1})$$

$$Q_p = (Q_p^1 \quad Q_p^2 \quad \dots \quad Q_p^{n_p})$$

et les groupes de triangles :

$$\mathcal{T}_1 = \{t_1^1, t_1^2, \dots, t_1^{n_1+n_2}\}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{t_2^1, t_2^2, \dots, t_2^{n_2+n_3}\}$$

$\vdots$

$$\mathcal{T}_{p-1} = \{t_{p-1}^1, t_{p-1}^2, \dots, t_{p-1}^{n_{p-1} + n_p}\}$$

où Q_i^j est le transformé du point P_i^j ($1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n_i$)

et t_i^j est le triangle obtenu par transformation des sommets du triangle s_i^j

($1 \leq i \leq p-1$; $1 \leq j \leq n_{i-1} + n_i$)

II - CARACTERISATION DES FACES AVANT ET ARRIERE

Ce travail se fait dans l'espace-image (OZXY). Considérons la normale $\vec{N}_f$ d'une face f de l'objet π , orientée vers l'extérieur de l'objet ; rappelons que dans l'espace-image, l'observateur est rejeté à l'infini dans le sens $\vec{OZ}$. Les polygones de π , dont la composante, suivant l'axe OZ, de la normale extérieure est négative, présentent une face arrière pour l'observateur ; c'est-à-dire appartiennent à la partie de l'objet qui n'est pas "vue" par l'observateur et qui n'apparaîtra pas sur l'image.

Nous ne tiendrons pas compte des polygones possédant une telle propriété dans la détermination des arêtes visibles.

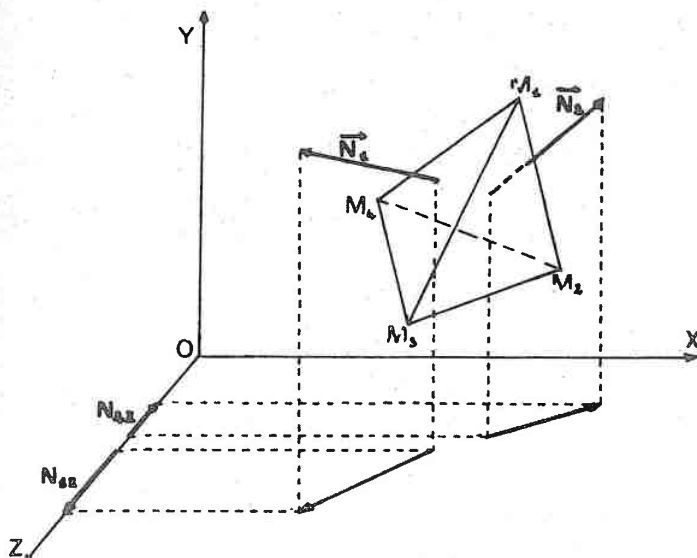


FIGURE 2

Dans l'exemple représenté à la figure 2, l'objet est défini par quatre faces $M_1 M_2 M_3$, $M_1 M_3 M_4$, $M_1 M_4 M_2$, $M_2 M_3 M_4$.

La face $M_1 M_2 M_4$ est une face arrière car N_{1z} composante sur OZ de sa normale $\vec{N}_1$ tournée vers l'extérieur, est négative.

Par contre $M_1 M_3 M_4$ doit être conservée pour le traitement ultérieur, la composante N_{2z} de sa normale, tournée vers l'extérieur de l'objet, $\vec{N}_2$ est positive.

Examinons, plus particulièrement le problème de détection des faces arrières dans le cas d'une isométrie.

1 - Polygones $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_p$

Soit une normale $\vec{N}_1$ de la face $\mathcal{P}_1$, orientée vers l'extérieur d'un objet π et calculée dans le repère (Oxyz) de l'espace-objet par :

$$\vec{N}_1 = \sum_{i=2}^{n_1-1} \overrightarrow{p_1^1 p_1^{i+1}} \wedge \overrightarrow{p_1^1 p_1^i}$$

Or ceci définit un vecteur dont le module est $2|A_1|$; A_1 est la surface de $\mathcal{P}_1$;

nommons $\vec{u}_1$ le vecteur unitaire de la normale étudiée :
 $\vec{N}_1 = 2 |A_1| \vec{u}_1$.

Les composantes de $\vec{N}_1$, dans (Oxyz) sont :

$\vec{N}_1 (0, 0, 2 |A_1|)$ car $\vec{u}_1$ a pour composante (0,0,1) par définition de l'objet dans (Oxyz).

De la même manière $\vec{N}_p$, une normale de $\mathcal{P}_p$, tournée vers l'extérieur de π peut s'écrire :

$$\vec{N}_p = \sum_{i=2}^{n_{p-1}} \vec{p}_p^i \wedge \vec{p}_p^{i+1}$$

Soit aussi :

$\vec{N}_p = 2 |A_p| \vec{u}_p$, A_p est la surface de $\mathcal{P}_p$ et $\vec{u}_p$ le vecteur unitaire $\vec{N}_p$ de composantes (0, 0, -1) Les composantes de $\vec{N}_p$ sont alors (0, 0, -2 |A_p|) dans l'espace (Oxyz).

Calculons les composantes de N_1 et N_p dans le repère (OZXY) de l'espace-image.

$$\vec{N}_1 \begin{cases} N_{1Z} = 2 \sin \phi |A_1| \\ N_{1X} = 0 \\ N_{1Y} = 2 \cos \phi |A_1| \end{cases}$$

$$\vec{N}_p \begin{cases} N_{pZ} = -2 \sin \phi |A_p| \\ N_{pX} = 0 \\ N_{pY} = -2 \cos \phi |A_p| \end{cases}$$

1er cas : $\phi > 0$, alors $\sin \phi > 0$, donc $N_{1Z} > 0$ et $N_{pZ} < 0$

2ème cas : $\phi < 0$, alors $\sin \phi < 0$, donc $N_{1Z} < 0$ et $N_{pZ} > 0$

Q_p (respectivement Q_1) est une face arrière si $\phi > 0$, (respectivement $\phi < 0$)

2 - Détermination de normales aux triangles

Soit t_i^j un triangle de la ième tranche (groupe $\mathcal{T}_i$) de l'objet π ; $1 \leq i \leq p-1$;
 $1 \leq j \leq n_i + n_{i+1}$

Par convention, dans les expressions qui suivent, nous dirons que si n est le nombre de points d'une section alors $p^{n+1} = p^1$

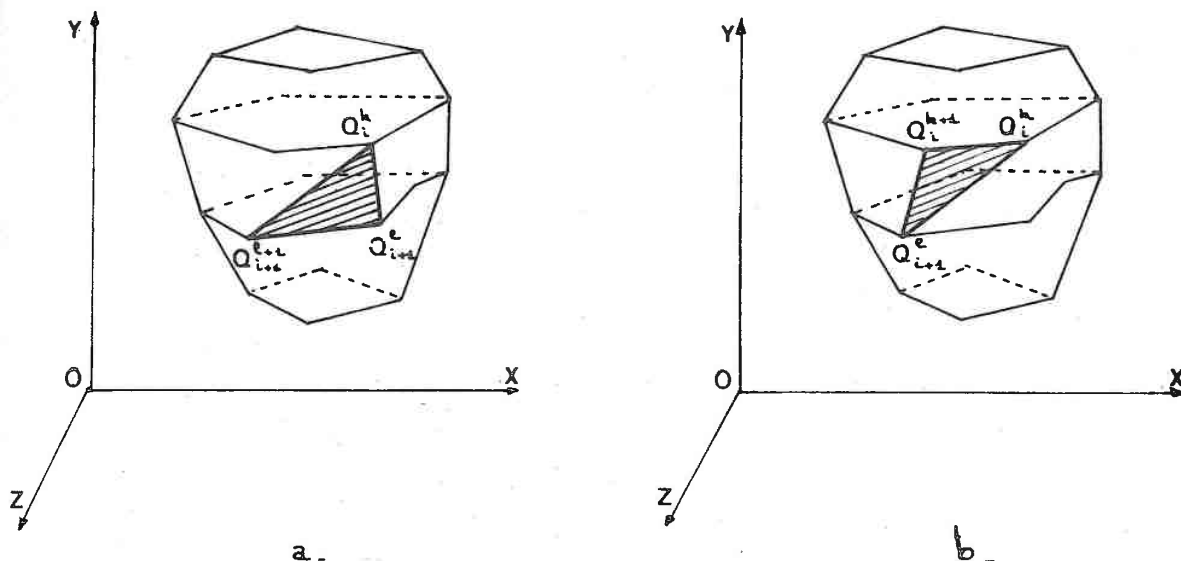


FIGURE 3

1er type de triangles

t_i^j possède deux sommets sur la $i + 1$ ème ligne de contour, Q_{i+1}^1 , Q_{i+1}^{1+1} , et un sommet sur la i ème ligne de contour, Q_i^k (figure 3 - a)

Une normale $\vec{N}_i^j$, au triangle t_i^j , orienté vers l'extérieur de l'objet se calcule par :

$$\vec{N}_i^j = \overrightarrow{Q_i^k Q_{i+1}^{1+1}} \wedge \overrightarrow{Q_i^k Q_{i+1}^1}$$

2ème type de triangles

t_i^j possède deux sommets sur la ligne de contour i , Q_i^k et Q_i^{k+1} et un sommet sur la ligne $i + 1$, Q_{i+1}^1 (figure 3 - b). Une normale $\vec{N}_i^j$ au triangle t_i^j , orienté vers l'extérieur de l'objet se calcule par :

$$\vec{N}_i^j = \overrightarrow{Q_{i+1}^1 Q_i^k} \wedge \overrightarrow{Q_{i+1}^1 Q_i^{k+1}}$$

3 - Elimination des polygones dont l'image est négligeable

Nous avons choisi de ne pas représenter les triangles dont la trace sur le plan de l'image est négligeable, c'est-à-dire ceux qui, en projection, sont représentés par trois arêtes dont deux sont pratiquement confondues.

Nommons A, B, C les sommets d'un triangle ; notre critère d'élimination est :

$$(1) \quad \begin{aligned} &|\sin(AB, AC)| < \epsilon \\ &\text{ou } |\sin(BC, BA)| < \epsilon \\ &\text{ou } |\sin(CA, CB)| < \epsilon, \text{ pour un } \epsilon \text{ donné qui dépend de la résolution souhaitée.} \end{aligned}$$

L'algorithme de détermination des arêtes visibles ne traitera que les sous-ensembles de triangles :

$$\mathcal{T}_1^+ = \{ t_1^j \mid t_1^j \in \mathcal{T}_1 \text{ et } N_{1Z}^j > 0 \text{ et } t_1^j \text{ vérifie (1)} \}$$

$$\mathcal{T}_2^+ = \{ t_2^j \mid t_2^j \in \mathcal{T}_2 \text{ et } N_{2Z}^j > 0 \text{ et } t_2^j \text{ vérifie (1)} \}$$

⋮

$$\mathcal{T}_{p-1}^+ = \{ t_{p-1}^j \mid t_{p-1}^j \in \mathcal{T}_{p-1} \text{ et } N_{p-1Z}^j > 0 \text{ et } t_{p-1}^j \text{ vérifie (1)} \}$$

Dans le cas où $\phi = 0$, nous pouvons remarquer que les traces de Q_1 et de Q_p sur le plan de l'image sont négligeables.

III - ORDRE DE TRAITEMENT DES FACES DANS LE CAS D'UNE ISOMETRIE.

Pour déterminer l'image d'un objet donné, par l'élimination des arêtes cachées sans avoir à comparer chaque face aux autres, nous traitons les polygones dans un certain ordre :

|| Une face e_i est traitée avant l'ensemble des faces $\mathcal{E}_j$ si aucun point de e_i n'est caché par l'une des faces de $\mathcal{E}_j$.

Dans les paragraphes 1 et 2, nous déterminons un ordre de traitement des groupes de polygones dans les cas $\phi > 0$, $\phi < 0$; dans le paragraphe 3 nous parlons

du cas $\phi = 0$ et dans le paragraphe 4, nous étudions une méthode de tri des polygones à l'intérieur d'un groupe.

1 - Tri des groupes de polygones lorsque $\phi > 0$

Dans ce cas, les groupes à traiter sont :

- le polygone Q_1
- les groupes de triangles τ_1^+ , τ_2^+ , ..., τ_{p-1}^+

Montrons que, si $\phi > 0$, alors Q_1 est le premier polygone à traiter ; c'est-à-dire qu'il ne peut être caché par aucune face.

Soit M_1 , un point de Q_1 de coordonnées (x_1, y_1, z_1) dans le système objet et (Z_1, X_1, Y_1) dans le système-image. Supposons qu'il existe un point M , $M \neq M_1$, dont les coordonnées sont (x, y, z) et (Z, X, Y) dans les deux systèmes; M appartenant à l'un des groupes ($z \leq z_1$) et tel que M cache M_1 ; d'après le chapitre III 1ère partie, ceci signifie que :

M et M_1 ont même image $X = X_1$

$$Y = Y_1$$

Ils répondent au critère de profondeur $Z > Z_1$

Ecrivons ces relations en fonction des coordonnées des points dans le repère $(Oxyz)$.

$$-x \sin \theta + y \cos \theta = -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \quad (2)$$

$$-x \sin \phi \cos \theta - y \sin \phi \sin \theta + z \cos \phi =$$

$$-x_1 \sin \phi \cos \theta - y_1 \sin \phi \sin \theta + z_1 \cos \phi \quad (3)$$

$$x \cos \phi \cos \theta + y \cos \phi \sin \theta + z \sin \phi >$$

$$x_1 \cos \phi \cos \theta + y_1 \cos \phi \sin \theta + z_1 \sin \phi \quad (4)$$

Posons : $\Delta x = x - x_1$ et $\Delta y = y - y_1$

le système devient :

$$\begin{cases} \Delta x \sin \theta - \Delta y \cos \theta = 0 \\ \Delta x \sin \phi \cos \theta + \Delta y \sin \phi \sin \theta + (z_1 - z) \cos \phi = 0 \\ \Delta x \cos \phi \cos \theta + \Delta y \cos \phi \sin \theta + (z - z_1) \sin \phi > 0 \end{cases} \quad (5)$$

le déterminant $\begin{vmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \end{vmatrix} = \sin \phi$ est non nul, puisque ϕ est strictement positif ; on peut donc calculer Δx et Δy :

$$\Delta x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\cos \theta \\ -(z_1 - z) \cdot \cos \phi & \sin \phi \cdot \sin \theta \end{vmatrix}}{\sin \phi} = \frac{-(z_1 - z) \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta}{\sin \phi}$$

$$\Delta y = \frac{\begin{vmatrix} \sin \theta & 0 \\ \sin \phi \cdot \cos \theta & -(z_1 - z) \cdot \cos \phi \end{vmatrix}}{\sin \phi} = \frac{-(z_1 - z) \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta}{\sin \phi}$$

en reportant dans l'inéquation :

$$-(z_1 - z) \cdot \frac{\cos^2 \phi \cdot \cos^2 \theta}{\sin \phi} - (z_1 - z) \cdot \frac{\cos^2 \phi \cdot \sin^2 \theta}{\sin \phi} + (z - z_1) \cdot \sin \phi > 0$$

$$\text{soit } (z - z_1) \cdot \frac{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}{\sin \phi} > 0 \quad (6)$$

or $\phi > 0$ entraîne $\sin \phi > 0$ donc

$$z > z_1$$

ceci est impossible car M_1 possède, d'après la définition de l'objet, la plus forte coordonnée suivant l'axe Oz.

Si $\phi > 0$, aucune face ne peut cacher Q_1 .

Montrons que, dans le cas $\phi > 0$, le groupe de triangles $\mathcal{C}_i^+$ doit être traité avant tout groupe $\mathcal{C}_j^+$ tel que $j > i$.

La démonstration est analogue à la précédente ; en prenant un point M_1 dans $\mathcal{C}_i^+$ et un point M dans $\mathcal{C}_j^+$ ($j > i$) $M \neq M_1$, on prouve de la même manière que si M cache M_1 , cela entraîne $z > z_1$, ce qui est contraire aux hypothèses de définition de l'objet :

$z_i > z_j$ (z_i coordonnée de la i ème ligne de contour et z_j coordonnée de la j ème ligne)

. Si M_1 est dans $\mathcal{T}_i^+$ alors $z_{i+1} \leq z_1 \leq z_i$

. Si M est dans $\mathcal{T}_j^+$ alors $z_{j+1} \leq z \leq z_j$

Soit $z \leq z_1$

Si $\phi > 0$, aucune face de $\mathcal{T}_i^+$ ne peut être cachée par une face de $\mathcal{T}_j^+$, pour $i < j$.

Ceci est valable quelque soient i et j tels que $i < j$;

l'ordre de traitement des groupes de polygones pour $\phi > 0$ est alors :

Q_1

$\mathcal{T}_1^+$

$\mathcal{T}_2^+$

$\vdots$

$\mathcal{T}_{p-1}^+$

2 - Tri des groupes de polygones lorsque $\phi < 0$

Les groupes à traiter dans ce cas sont :

- Q_p

- $\mathcal{T}_1^+, \mathcal{T}_2^+, \dots, \mathcal{T}_{p-1}^+$.

. Q_p ne peut être caché par aucun autre polygone ; Soit M_1 un point de Q_p , supposons qu'il existe un point M , $M \neq M_1$, M appartenant à une autre face de l'objet ($z \geq z_1$) et tel que M cache M_1 c'est-à-dire :

$$X = X_1$$

$$Y = Y_1$$

$$Z > Z_1$$

Nous obtenons alors un système identique à (5) et $\phi \neq 0$, entraîne l'inégalité(6)

$$(z - z_1) \frac{1}{\sin \phi} > 0$$

$\phi < 0$ donc $z < z_1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

. Lorsque ϕ est négatif, le groupe de triangles τ_i^+ doit être traité avant le groupe τ_j^+ si $i > j$, c'est-à-dire si z_i , coordonnée de la ième ligne de contour est inférieure à z_j coordonnée de la jème ligne.

La démonstration est identique à la précédente.

Nous pouvons donc affirmer que :

si $\phi < 0$, l'ordre de traitement des groupes est :

$$\begin{array}{c} \tau_p \\ \tau_{p-1}^+ \\ \vdots \\ \tau_2^+ \\ \tau_1^+ \end{array}$$

3 - Ordre de traitement lorsque $\phi = 0$

Les groupes à ordonner sont :

$$\begin{array}{c} \tau_1^+ \\ \tau_2^+ \\ \vdots \\ \tau_{p-1}^+ \end{array}$$

Prenons M et M_1 deux points de l'objet, appartenant aux groupes nommés ci-dessus.

- Le point M cache M_1 s'écrit, dans l'espace (OZXY) à l'aide des conditions :

$$\left. \begin{array}{l} X = X_i \\ Y = Y_1 \\ Z = Z_1 \end{array} \right\} (7)$$

Or la condition (7), lorsque $\phi = 0$, se réduit à $\underline{z = z_1}$.

Ceci signifie que si le point M_1 est caché, il l'est par un point de la même tranche et ceci quelque soit l'ordre de traitement des groupes $\mathcal{T}_i^+$.

Lorsque $\phi = 0$, les groupes peuvent être traités dans un ordre quelconque.

4 - Ordre des triangles à l'intérieur d'un groupe $\mathcal{T}_i^+$.

Nous nous proposons d'élaborer une méthode permettant d'ordonner les triangles à l'intérieur d'un groupe $\mathcal{T}_i^+$.

Appelons $\mathcal{U}_i$ la liste obtenue :

$\mathcal{U}_i = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, si n est le nombre d'éléments de $\mathcal{T}_i^+$ cette liste est telle que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} - 1 \leq j \leq n, \quad u_j \in \mathcal{T}_i^+ \\ - 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n, \quad j \neq k \text{ entraîne } u_j \neq u_k \\ - 1 \leq j < k \leq n \text{ entraîne : } u_j \text{ n'est pas caché par } u_k \text{ dans la perspective demandée.} \end{array} \right.$$

Nous construisons cette suite de la manière suivante :

- initialement, nous cherchons un triangle de l'ensemble $\mathcal{T}_i^+$ qui ne soit caché par aucun autre élément de cet ensemble ; appelons ce triangle u_1 .
- à chaque étape j , $2 \leq j \leq n - 1$, nous cherchons un triangle, dans l'ensemble constitué par $\mathcal{T}_i^+$ privé de $u_1, u_2, \dots, u_{j-1}$, qui ne soit caché par aucun autre élément de cet ensemble, soit u_j ce triangle.

a - Recherche d'un triangle en avant de tous les autres parmi un ensemble de triangles.

Pour réaliser ceci, nous considérons un élément t_i^k de l'ensemble et cherchons par quel triangle il peut-être caché.

1er cas : il n'est caché par aucun triangle, t_i^k est l'élément cherché.

2ème cas : il est caché par un triangle, nous recommençons le travail en considérant un autre triangle t_i^l .

Remarque : on peut construire $(u_1, \dots, u_n)$ par cette méthode à condition qu'il n'y ait aucun cycle dans l'ensemble $\mathcal{T}_i^+$, c'est-à-dire qu'on ne puisse pas trou-

ver une suite de n triangles $a_1, a_2, \dots, a_n$, tels que :

a_1 cache a_2

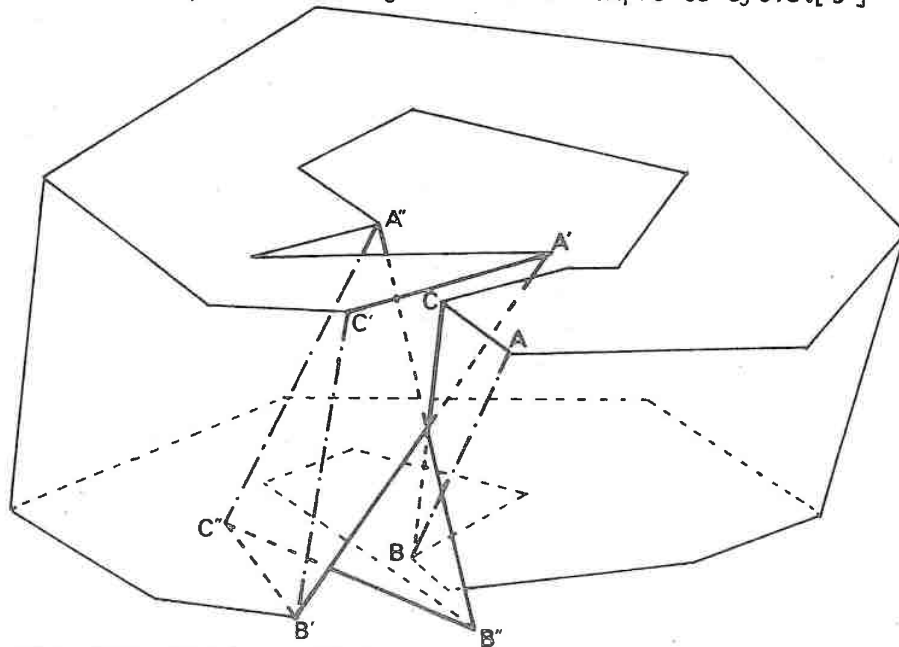
a_2 cache a_3

a_{n-1} cache a_n

a_n cache a_1

C'est le cas dans l'exemple illustré par la figure 4.

Nous pourrions alors développer deux voies ; soit imposer une restriction sur les objets, soit couper les triangles afin de rompre ce cycle.[5]



Les triangles $ABC, A' B' C', A'' B'' C''$ sont tels que

ABC cache $A' B' C'$

$A' B' C'$ cache $A'' B'' C''$

$A'' B'' C''$ cache ABC

FIGURE 4

b - Comparaison de deux triangles t et t_1 entre eux.

2 cas peuvent se produire :

- L'image de t et l'image de t_1 sont disjointes dans le plan XOY (Figure 5)

Dans ce cas, t n'est pas caché par t_1 , et t_1 n'est pas caché par t .

- L'intersection de l'image de t et de l'image de t_1 n'est pas vide dans le plan XOY.

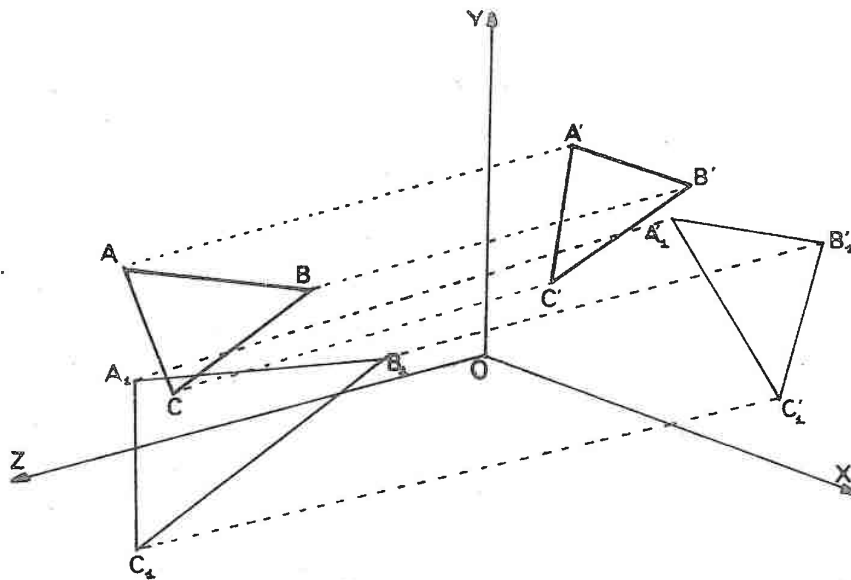


FIGURE 5

Nous choisissons alors dans XOY un point M' appartenant à cette intersection de la manière suivante :

. Si l'intersection des deux images est égale à l'image de t (respectivement t_1) M' est le barycentre de l'image de t (respectivement t_1) ainsi que nous l'avons représenté sur la figure 7 - a.

. sinon, M' est un point d'intersection entre l'image d'une arête de t et l'image distincte d'une arête de t_1 , M' est de plus choisi distinct d'un sommet.

Soit $M (ZM, XM, YM)$ le point de t dont M' est image et $M_1 (ZM_1, XM_1, YM_1)$ le point de t_1 dont M' est image.

Ce qui correspond aux conditions :

$$XM = XM_1 = XM'$$

$$YM = YM_1 = YM'$$

La figure 7 - b - donne un exemple de choix d'un tel point. Nous pouvons remarquer que par définition, il n'y a pas d'intersection entre les faces t et t_1 en dehors des arêtes. La figure 6 représente en fait un cas impossible.

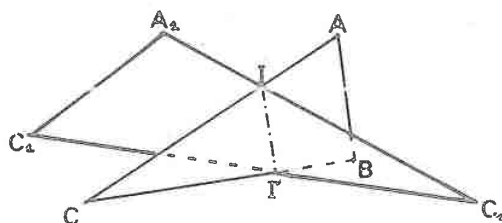


FIGURE 6

La face t cache la face t_1 si $ZM \geq ZM_1$

La face t est cachée par la face t_1 si $ZM < ZM_1$

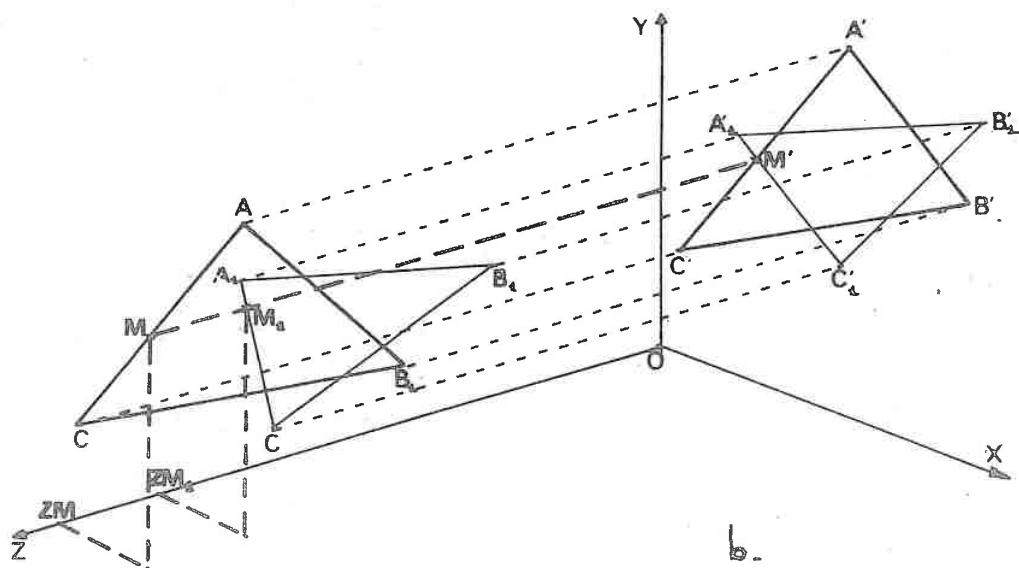
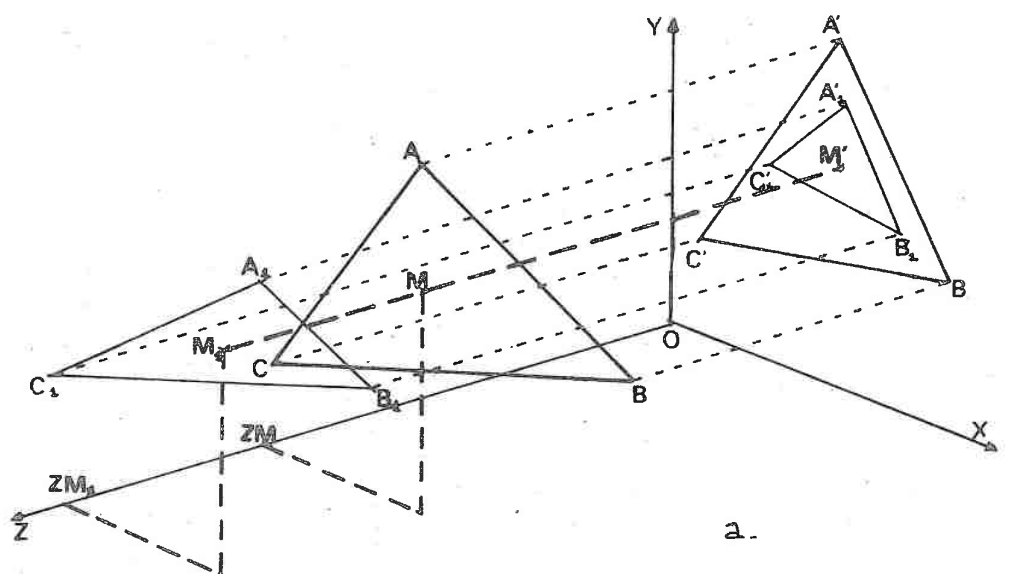


FIGURE 7

CHAPITRE II

MASQUE

I - DEFINITION ET PROPRIETE

1 - Définition

Considérons, dans l'espace-image d'une axonométrie orthogonale, rapporté au système orthonormé (OZXY) une liste ordonnée de m faces $F_1, \dots, F_i, \dots, F_m$ telles que, quels que soient i, j , avec $1 \leq i < j \leq m$, aucun point de F_i ne soit caché par un point de F_j .

Nous appelons masque M_i , l'union des projections orthogonales des faces $F_1, \dots, F_i$ sur le plan de l'image (XOY)

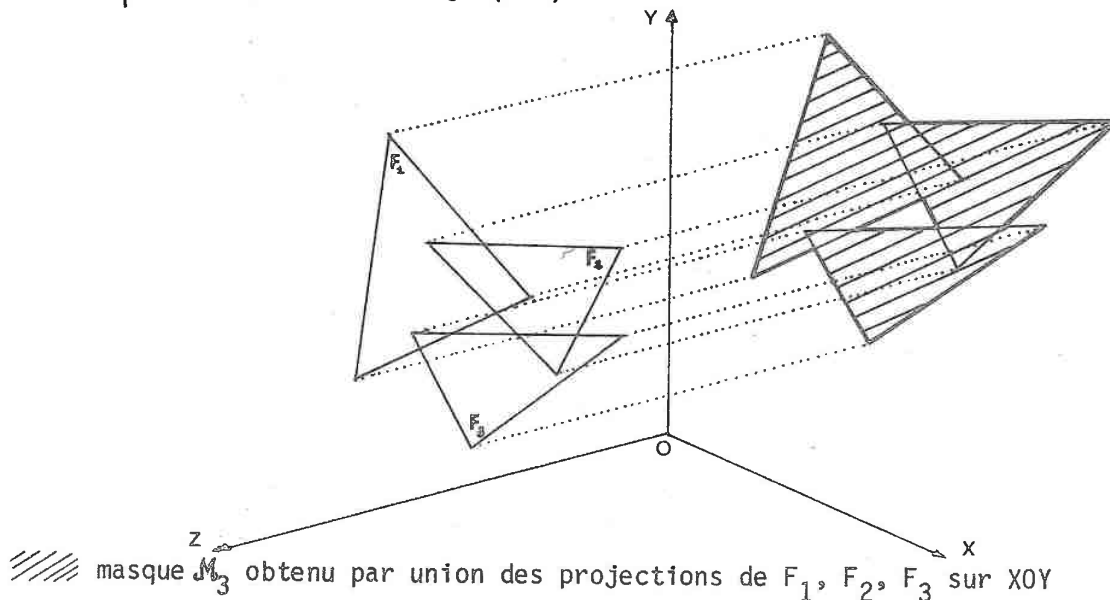


FIGURE 1

2 - Propriétés

Un masque est un polygone connexe.

Démontrons cette propriété par récurrence.

Soit une axonométrie orthogonale définie dans un espace objet par deux angles

θ et ϕ , la liste ordonnée des faces est, si ϕ est positif (respectivement ϕ négatif) :

- la face de plus haute cote dans le système objet: Q_1 (respectivement : la face de plus basse cote Q_p).
- les triangles de $\mathcal{T}_1^+$ (respectivement : $\mathcal{T}_{p-1}^+$)
- ...
- les triangles de $\mathcal{T}_{p-1}^+$ (respectivement : $\mathcal{T}_1^+$)

* Le masque $\mathcal{M}_1$, projection de Q_1 (respectivement : Q_p) sur le plan de l'image, est connexe par définition de l'objet.

* Supposons que $\mathcal{M}_i$, $i \geq 1$, union des projections des i premières faces de la liste soit connexe et étudions $\mathcal{M}_{i+1}$. Ce masque est défini comme l'union de $\mathcal{M}_i$ et de la projection de la $i+1$ ème face. Or il existe j , tel que F_{i+1} appartient à $\mathcal{T}_j^+$, donc il existe au moins un point de F_{i+1} appartenant à la j ème ligne de contour et un point appartenant à la $j+1$ ème ligne de contour. Si ϕ est positif (respectivement ϕ négatif) les projections des points de la j ème ligne de contour (respectivement de la $j+1$ ème ligne de contour) appartiennent au masque $\mathcal{M}_i$. Donc, l'intersection de $\mathcal{M}_i$ et de la projection de F_{i+1} n'est pas vide, $\mathcal{M}_{i+1}$ est connexe.

Remarques : les masques $\mathcal{M}_i$ ne sont pas forcément convexes, ni simplement connexes.

II - DESCRIPTION DU MASQUE - INTERIEUR - EXTERIEUR.

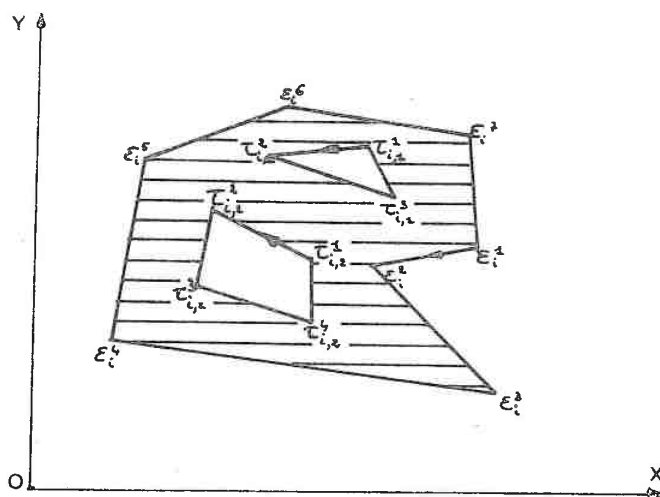
Un masque est défini dans le plan de l'image (XOY) par une ligne polygonale orientée dans le sens rétrograde, représentant le contour externe de la surface et, éventuellement, par un certain nombre de lignes polygonales, orientées dans le sens direct, intérieures à la ligne précédente, chacune représentant un trou dans la surface.

Exemple :

Le masque de la figure 2 est défini par :

• $\epsilon_i^1, \epsilon_i^2, \dots, \epsilon_i^7$ contour externe.

• 2 trous : $\tau_{i,1}^1, \tau_{i,1}^2, \tau_{i,1}^3$ et $\tau_{i,2}^1, \tau_{i,2}^2, \tau_{i,2}^3, \tau_{i,2}^4$.



==== masque M_i

FIGURE 2

Plus généralement, on note $L(i)$ le nombre de points définissant le contour externe d'un masque M_i et $I(i)$ le nombre de trous dans ce masque ; pour chaque trou j , $1 \leq j \leq I(i)$, on appelle $K(j)$ le nombre de points définissant le contour de ce trou.

M_i est alors décrit par :

- un contour externe : suite de points orientée dans le sens rétrograde ϵ_i^l , $1 \leq l \leq L(i)$

- éventuellement $I(i)$ trous ; le j ème trou $1 \leq j \leq I(i)$ est défini par une suite de points orientée dans le sens direct $\tau_{i,j}^k$, $1 \leq k \leq K(j)$

Remarque : dans ce qui suit, nous convenons que si $l = L(i)$ (respectivement $k = K(j)$) alors $l + 1$ (respectivement $k + 1$) est équivalent à 1.

Intérieur d'un masque M_i .

Un point M , dans le plan de l'image (XOY) est intérieur au masque M_i , s'il est intérieur au contour externe et extérieur à chaque trou.

$$\text{Soit } \left| \sum_{l=1}^{L(i)} \left(\overrightarrow{M \epsilon_i^l} \cdot \overrightarrow{M \epsilon_i^{l+1}} \right) \right| = 2\pi$$

et

- pour chaque trou j : $1 \leq j \leq I(i)$

$$\sum_{k=1}^{K(j)} (\overrightarrow{M\tau_{i,j}^k}, \overrightarrow{M\tau_{i,j}^{k+1}}) = 0$$

Exterieur d'un masque $\mathcal{M}_i$

Un point M, dans le plan de l'image (XOY) est extérieur au masque $\mathcal{M}_i$, s'il est extérieur à son contour externe, ou s'il existe un trou j, $1 \leq j \leq I(i)$ tel que M soit intérieur à ce trou.

Soit
$$\sum_{l=1}^{L(i)} (\overrightarrow{M\epsilon_i^l}, \overrightarrow{M\epsilon_i^{l+1}}) = 0$$

ou

il existe j, $1 \leq j \leq I(i)$ tel que

$$\left| \sum_{k=1}^{K(j)} (\overrightarrow{M\tau_{i,j}^k}, \overrightarrow{M\tau_{i,j}^{k+1}}) \right| = 2\pi$$

III - POINTS CACHES - POINTS VISIBLES

Soit un ensemble ordonné de faces $F_1, \dots, F_i, \dots, F_m$ et un masque $\mathcal{M}_i$, union des projections sur le plan image des faces $F_1, \dots, F_i$.

Considérons la face F_{i+1} ; d'après l'ordre de traitement des faces, établi pour un observateur donné, quel que soit j, $1 \leq j \leq i$, aucun point de la face F_j ne peut être caché par F_{i+1} .

Soit M, un point de F_{i+1}

- Si M a la même projection sur (XOY) qu'un point M' de $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_i$; alors M est caché par M' .

- S'il n'existe aucun point de $F_1 \cup \dots \cup F_i$ ayant même projection que M; M n'est caché par F_1 ou F_2 ou... F_i ; comme de plus, il ne peut être caché par une face F_k ($k > i+1$) on dira que M est un point visible.

Soit, pour une axonométrie orthogonale donnée, un ensemble ordonné de faces $F_1, \dots, F_m$ et un masque $\mathcal{M}_i$, $1 \leq i \leq m-1$, union des projections des faces $F_1, \dots, F_i$, un point M de la face F_{i+1} est caché si sa projection est intérieure à $\mathcal{M}_i$, il est visible si non.

Etudions l'exemple représenté à la figure 3 ; l'objet est défini par deux lignes de contour :

$$P_1^1, P_1^2, \dots, P_1^5$$

$$P_2^1, P_2^2, \dots, P_2^5$$

Pour l'observateur donné, les faces sont ordonnées ainsi :

$$F_1 : P_1^1 P_1^2 \dots P_1^5$$

$$F_2 : P_1^3 P_2^3 P_1^4$$

$$F_3 : P_1^4 P_2^3 P_2^4$$

$$F_4 : P_1^1 P_2^2 P_1^2$$

$$F_5 : P_1^1 P_2^1 P_2^2$$

Considérons le masque M_3 , union des projections de F_1, F_2, F_3

- La projection M_1^1 du point M_1 de F_4 est intérieure au masque ; M_1 est caché
- La projection M_2^2 du point M_2 de F_4 est extérieure au masque ; M_2 est visible

Pour la représentation que nous nous sommes fixée, la détermination des parties visibles d'un objet π , observé en isométrie, revient à la caractérisation des arêtes des faces repérées dans le plan de l'image.

Par la suite, nous ne travaillerons que dans le plan de l'image.

Pour caractériser les arêtes d'une face donnée, nous utiliserons la notion de cohérence d'arête ainsi que la définissent Sutherland - Sproull - Robert et Schumacker [10] . Cette notion exprime le fait que la "visibilité" d'une arête d'une face F_i ne peut changer qu'en un point d'intersection entre son image et l'image des arêtes des faces F_j ($1 \leq j \leq m$ et $j \neq i$) constituant l'objet.

Plus précisément, seuls les points d'intersection entre les arêtes de la projection de F_i et les arêtes du masque M_{L-1} , peuvent intervenir dans le changement de visibilité.

C'est pourquoi le chapitre III propose une étude et une classification des points d'intersection ; le chapitre IV, exploitant cette classification, donne

une méthode de création d'un masque et de détermination des parties visibles d'arêtes.

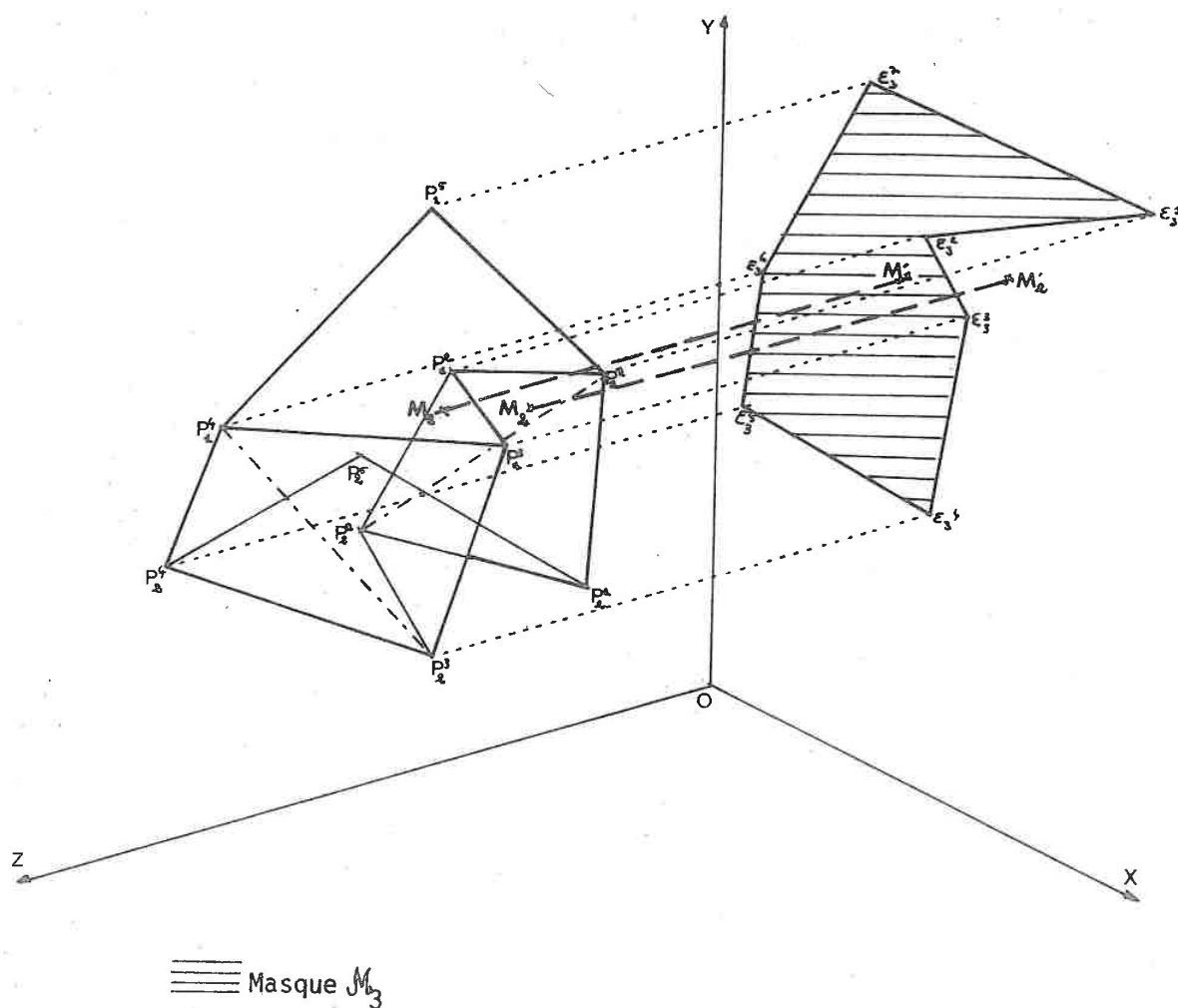


FIGURE 3

CHAPITRE III

INTERSECTION DU CONTOUR D'UN MASQUE ET DU CONTOUR D'UNE FACE

I - REMARQUES PRELIMINAIRES

Dans la liste ordonnée des faces $f_1 \dots f_m$ définissant un objet pour une isométrie donnée, considérons $\mathcal{F}_i$ ($1 \leq i \leq m$) projection de la face "avant" F_i sur le plan de l'image (XOY) et $\mathcal{M}_{i-1}$ le masque construit par union de $\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_{i-1}$. $\mathcal{M}_{i-1}$ et $\mathcal{F}_i$ sont décrits par leurs contours.

Notations : si $\mathcal{G}$ est une surface définie dans (XOY), nous noterons $\mathring{\mathcal{G}}$ l'intérieur strict de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ son contour: $\mathring{\mathcal{G}} \cup \mathcal{C}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $\mathring{\mathcal{G}} \cap \mathcal{C}(\mathcal{G}) = \emptyset$.

Le masque $\mathcal{M}_i$ sera obtenu par l'union de $\mathcal{M}_{i-1}$ et de $\mathcal{F}_i$; notre problème revient à déterminer la ou les lignes polygonales orientées, contour de $\mathcal{M}_i$ à partir de $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ et de $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$. Il convient donc d'étudier les positions relatives de ces deux contours.

Nous distinguerons plus particulièrement deux cas :

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}_i) \cap \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1}) = \emptyset$$

Un exemple de ce cas est représenté à la figure 1

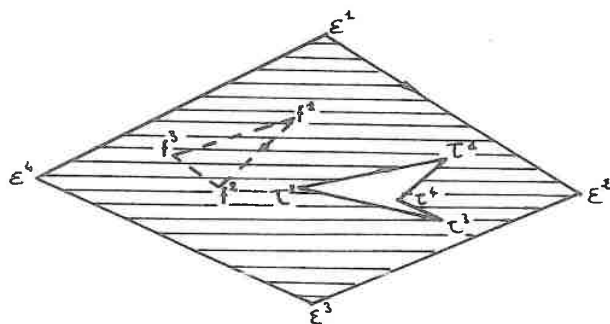


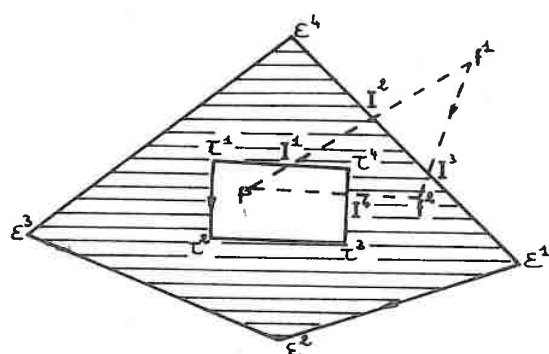
FIGURE 1

$f^1 f^2 f^3$: face $\mathcal{F}_i$ $\varepsilon^1 \varepsilon^2 \varepsilon^3 \varepsilon^4$: contour externe de $\mathcal{M}_{i-1}$
 $\tau^1 \tau^2 \tau^3 \tau^4$: contour d'un trou de $\mathcal{M}_{i-1}$ $\equiv \mathcal{M}_{i-1}$

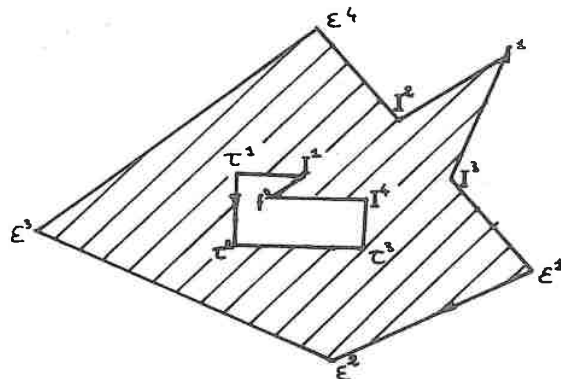
Un tel cas sera plus précisément étudié dans le chapitre IV.

$$- \mathcal{C}(\mathcal{F}_i) \cap \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1}) \neq \emptyset$$

Etudions ce cas sur un exemple (figure 2 -a)



a.



b.

$$a - \equiv \mathcal{M}_{i-1}$$

$\epsilon^1 \epsilon^2 \epsilon^3 \epsilon^4$: contour externe de $\mathcal{M}_{i-1}$

$\tau^1 \tau^2 \tau^3 \tau^4$: contour d'un trou de $\mathcal{M}_{i-1}$

$f^1 f^2 f^3$: face de $\mathcal{F}_i$

$$b - \equiv \mathcal{M}_i$$

FIGURE 2

Soient $I^1 I^2 I^3 I^4$ les points d'intersection entre $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$. On peut alors diviser les arêtes de $\mathcal{F}_i$ en segments :

$$\left\{ \begin{array}{l} f^1 f^2 \text{ en } f^1 I^3 \text{ et } I^3 f^2 \\ f^2 f^3 \text{ en } f^2 I^4 \text{ et } I^4 f^3 \\ f^3 f^1 \text{ en } f^3 I^1 \text{ et } I^1 I^2 \text{ et } I^2 f^1 \end{array} \right.$$

Les segments $I^2 f^1$, $f^1 I^3$, $I^4 f^3$ et $f^3 I^1$ ne sont pas inclus dans $\mathcal{M}_{i-1}$, ils feront partie de $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$. Par contre, $I^1 I^2$, $I^3 f^2$, $f^2 I^4$ sont inclus dans $\mathcal{M}_{i-1}$, ils n'appartiendront pas à $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$.

Considérons à présent les segments déterminés par $I^1 I^2, I^3 I^4$ sur les arêtes de M_{i-1} :

$\epsilon^4 I^2, I^3 I^1, \tau^3 I^4, I^1 \tau^1$ appartiendront à $\mathcal{C}(M_i)$; quant aux segments $I^2 I^3, I^4 \tau^4, \tau^4 I^1$, inclus dans $\mathcal{F}_i$, ils ne feront pas partie de $\mathcal{C}(M_i)$.

Le masque définitif M_i est défini par :

$\left. \begin{array}{l} \epsilon^1 \epsilon^2 \epsilon^3 \epsilon^4 I^2 f^1 I^3 \text{ son contour externe} \\ \tau^1 \tau^2 \tau^3 I^4 f^3 I^1 \text{ le contour d'un trou} \end{array} \right\} \quad (\text{figure 2 - b})$

Nous pouvons remarquer également que tout point de $\mathcal{F}_i$ qui appartient à $\mathcal{C}(M_i)$ est visible.

Cet exemple met en évidence le rôle des points d'intersection entre $\mathcal{C}(M_{i-1})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$, pour le calcul du nouveau masque M_i , ainsi que pour la détermination des arêtes visibles de $\mathcal{F}_i$; l'étude de ces points fera l'objet du paragraphe III.

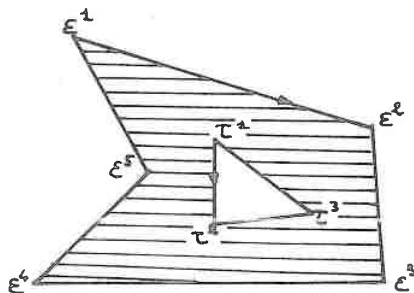
II - ELEMENTS ETUDIES

1 - Orientation

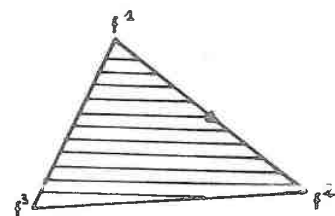
Masque : tout masque M_i est défini par (figure 3 - a)

- une ligne polygonale fermée orientée dans le sens rétrograde (contour externe)
- éventuellement une ou des lignes polygonales fermées orientées dans le sens direct (contours de trous)

Face : toute face $\mathcal{F}_i$ est définie par une ligne polygonale fermée, orientée dans le sens rétrograde (figure 3 - b)



a-



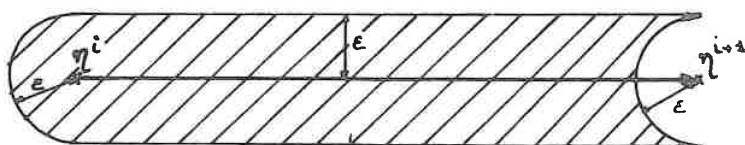
b-

FIGURE 3

2 - Notion d'arêtes

Soit une ligne polygonale fermée, orientée, décrite par la suite de sommets $\eta^1 \eta^2 \dots \eta^i \eta^{i+1} \dots \eta^n$, on appelle arête $[\eta^i \eta^{i+1}[$ l'ensemble des points μ situés dans un voisinage de $\eta^i \eta^{i+1}$ et extérieur au voisinage de η^{i+1} point extrémité.

Nous caractérisons ce voisinage par une distance ε , dépendant de la précision désirée.



/// arête $[\eta^i \eta^{i+1}[$

FIGURE 4

Nous pouvons dire que l'arête $[\eta^i \eta^{i+1}[$ est l'ensemble des points μ tels que :

- $d(\mu, \eta^i \eta^{i+1}) < \varepsilon$ et la projection H de μ sur $\eta^i \eta^{i+1}$ est entre η^i et η^{i+1}
 et $d(\mu, \eta^{i+1}) \geq \varepsilon$.

ou

- $d(\mu, \eta^i) < \varepsilon$

d désigne la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$

3 - Conventions

Longueur des arêtes $[AB[$

Pour éviter qu'un point d'une arête $[AB[$ appartienne au voisinage de A et au voisinage de B, nous ne considérons que les arêtes telles que :

$$d(A, B) \geq 2\varepsilon$$

Colinéarité de deux arêtes

Soient deux arêtes $[AB[$ et $[CD[$ telles que $d(A, B) \geq 2\varepsilon$ et $d(C, D) \geq 2\varepsilon$

Nous considérons que ces deux arêtes sont colinéaires si :

$$\begin{array}{l}
 d(A, CD) < \epsilon \\
 \text{et} \\
 d(B, CD) < \epsilon \\
 \text{et} \\
 d(C, AB) < \epsilon \\
 \text{et} \\
 d(D, AB) < \epsilon
 \end{array}$$

Conséquences

Chaque fois que nous traitons un contour (masque ou face), nous le modifions afin qu'il réponde aux caractéristiques suivantes :

- toute arête $[AB[$ du contour est telle que : $d(A,B) \geq 2\epsilon$.
- deux arêtes consécutives du contour ne sont pas colinéaires.

4 - Intersection de deux arêtes

Pour déterminer l'intersection de deux lignes polygonales fermées, nous devons définir de façon précise comment déterminer l'intersection de deux arêtes $[AB[$ et $[CD[$. Deux cas se présentent:

- $[AB[$ et $[CD[$ sont colinéaires au sens précisé ci-dessus

Si $A \in [CD[$ (respectivement $C \in [AB[$; alors A (respectivement C) est un point d'intersection. Seuls ces deux points sont considérés comme des points d'intersection.

- $[AB[$ et $[CD[$ ne sont pas colinéaires.

Soit I le point d'intersection entre la droite support de $[AB[$ et la droite support de $[CD[$.

Si $A \in [CD[$, A est point d'intersection,

Si $C \in [AB[$, C est point d'intersection,

Si $A \notin [CD[$ et $C \notin [AB[$, I est un point d'intersection si $I \in [AB[$ et $I \in [CD[$

III - INTERSECTION DE DEUX LIGNES DE CONTOUR ORIENTÉES.

1-Vrais et faux points d'intersection.

Nous avons été amenés à définir plusieurs types de points d'intersection.

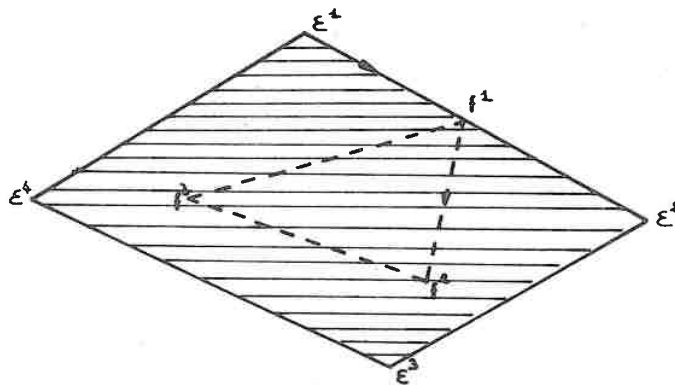
Dans un premier temps, nous ferons une distinction entre "faux" et "vrais"

points d'intersection.

Sur l'exemple de la figure 5, nous pouvons dire qu'il existe un point d'intersection entre $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$:

$[\varepsilon^1 \varepsilon^2[\cap]f^1 f^2[= f^1$; or $f^3 f^1$ et $f^1 f^2 \in \mathcal{M}_{i-1}$. ils sont cachés ; $\varepsilon^3 f^1$ et $f^1 \varepsilon^2$ feront partie de $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$.

On peut dire que le point d'intersection f^1 n'a aucune influence dans la construction du masque ou dans le changement de visibilité des arêtes. C'est pour nous un "faux" point d'intersection.



$\varepsilon^1 \varepsilon^2 \varepsilon^3 \varepsilon^4$: contour externe de $\mathcal{M}_{i-1}$

$f^1 f^2 f^3$: face de $\mathcal{F}_i$

FIGURE 5

Soient deux lignes de contour : $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$ possédant un point d'intersection I ; celui-ci définit la suite des segments $\varepsilon^k I$, $I \varepsilon^{k+1}$ sur

$\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ et $f^l I$, $I f^{l+1}$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$

Notons $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \text{ l'angle } (\overrightarrow{I \varepsilon^k}, \overrightarrow{I f^1}) \\ \varphi_2 \text{ l'angle } (\overrightarrow{I \varepsilon^k}, \overrightarrow{I f^{l+1}}) \\ \varphi_3 \text{ l'angle } (\overrightarrow{I \varepsilon^k}, \overrightarrow{I \varepsilon^{k+1}}) \end{array} \right.$ (figure 6)

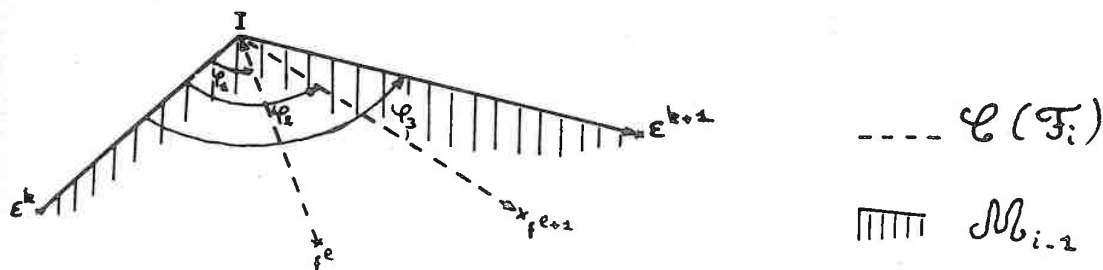


FIGURE 6

I est un faux point d'intersection si:
 $\max(\varphi_1, \varphi_2) \leq \varphi_3$ où $\varphi_i \in [0, 2\pi[$, $i = 1, 2, 3$.

Tout point d'intersection ne vérifiant pas cette propriété sera appelé "vrai" point d'intersection.

Ces "vrais" points, nous pouvons les répartir en trois classes, suivant l'influence qu'ils auront sur la visibilité des arêtes de faces ou sur la construction du masque.

Soit I, "vrai" point d'intersection entre $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$ divisant le contour $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ en segments $\epsilon^k I$, $I \epsilon^{k+1}$ et le contour $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$ en $f^l I$, $I f^{l+1}$.

Définissons les trois classes auxquelles peut appartenir ce point :

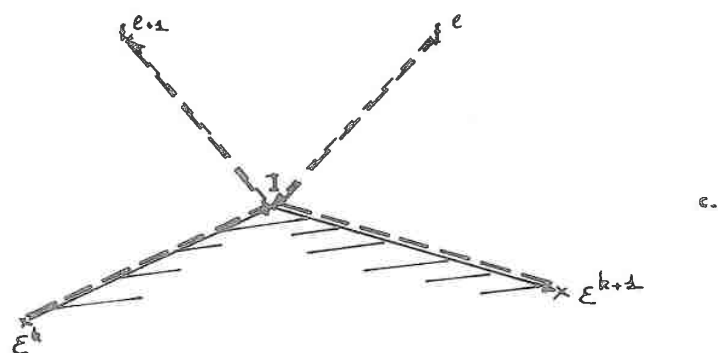
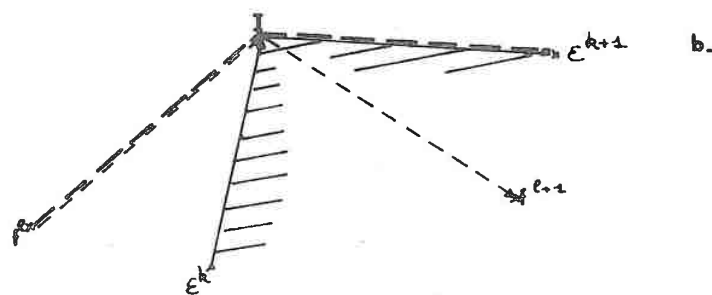
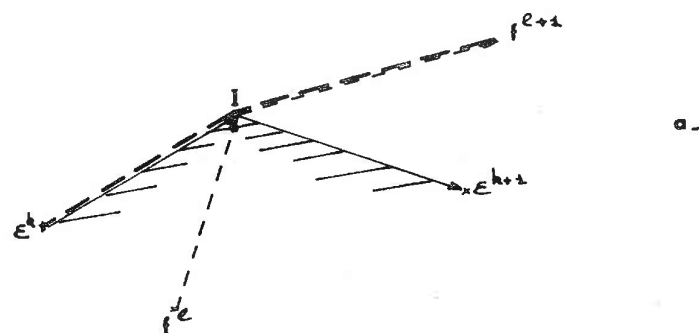
Classe 1 : $f^l I$ est caché, $I f^{l+1}$ est visible :
 $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$ comprendra la suite $\epsilon^k I f^{l+1}$

Classe 2 : $f^l I$ est visible, $I f^{l+1}$ est caché :
 $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$ comprendra la suite $f^l I \epsilon^{k+1}$

Classe 3 : $f^l I$ et $I f^{l+1}$ sont visibles :
 $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$ comprendra les suites : $\epsilon^k I f^l$ et $f^{l+1} I \epsilon^{k+1}$

De tels points seront appelés points doubles, car ils figureront deux fois dans $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$.

Les classes 1, 2 et 3 sont illustré respectivement par les figures 7 - a, 7 b et 7 c.



— $\mathcal{C}(M_{i-1})$

--- $\mathcal{C}(F_i)$

- - $\mathcal{C}(M_i)$

/// $\dot{M}_{i-1}$

FIGURE 7

IV - REPARTITION DES VRAIS POINTS D'INTERSECTION EN TROIS CLASSES.

Nous effectuons ce travail en analysant tous les cas d'intersection entre une arête de $\mathcal{M}_{i-1}$ et une arête de $\mathcal{F}_i$. Cette répartition ne porte, évidemment, que sur les "vrais" points d'intersection.

Il est nécessaire, dans certain cas, afin de déterminer la classe d'appartenance de connaître l'arête précédente sur chacun des contours.

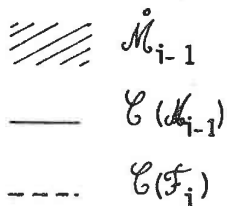
Soient trois sommets consécutifs de $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$: M_p, M, M_s et les trois sommets d'une face $\mathcal{F}_i$: T_p, T, T_s .

Nous étudions alors les cas d'intersection de $[M M_s[$ et $[T T_s[$ lorsque $[M M_s[\cap [T T_s[\neq \emptyset$

Rappels :

- M_p, M, M_s ne sont pas alignés.
 - T_p, T, T_s ne sont pas alignés ; ce sont les sommets d'un triangle.
 - L'intérieur du masque est situé "à droite" d'une arête orientée du contour.
- Le tableau ci-dessous résume la répartition (figure 8).

FIGURE 8

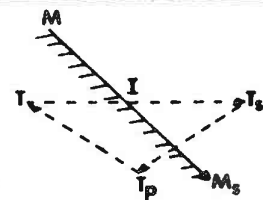


1 - $[MM_S]$ et $[TT_S]$ ne sont pas colinéaires ; $[MM_S] \cap [TT_S] = I$

$I \neq M$; $I \neq T$

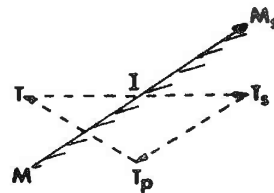
$$0 < (\overrightarrow{IM_S}, \overrightarrow{IT_S}) < \pi$$

I appartient à la classe 1



$$-\pi < (\overrightarrow{IM_S}, \overrightarrow{IT_S}) < 0$$

I appartient à la classe 2

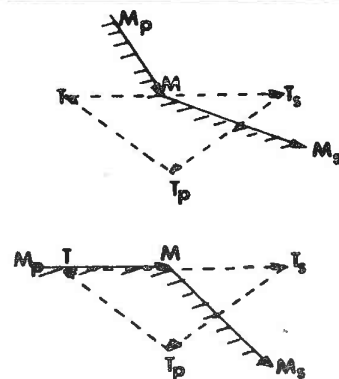


2 - $[MM_S]$ et $[TT_S]$ ne sont pas colinéaires ; $[MM_S] \cap [TT_S] = M$;

$M \neq T$

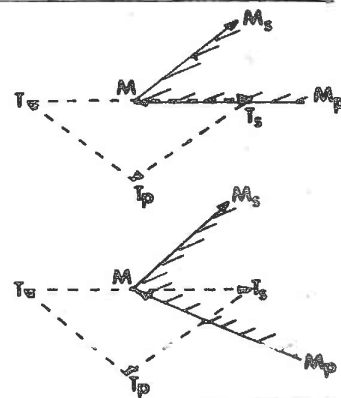
$$(\overrightarrow{MM_S}, \overrightarrow{MT_S}) < (\overrightarrow{MM_S}, \overrightarrow{MP}) \leq (\overrightarrow{MM_S}, \overrightarrow{MT})$$

M appartient à la classe 1



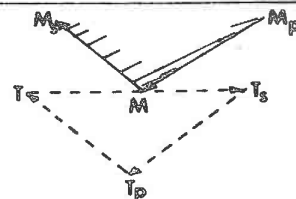
$$0 \leq (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MT_S}) < (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MS}) < (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MT})$$

M appartient à la classe 2



$$0 < (\overrightarrow{MT_S}, \overrightarrow{MP}) < (\overrightarrow{MT_S}, \overrightarrow{MS}) < \pi$$

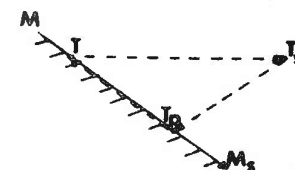
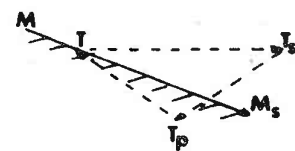
M appartient à la classe 3



3 - $[MM_S]$ et $[TT_S]$ non colinéaires ; $[MM_S] \cap [TT_S] = T$;
 $M \neq T$

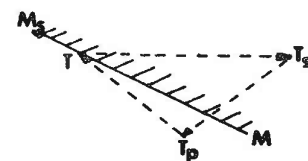
$$0 \leq (\overrightarrow{TT_p}, \overrightarrow{TM_s}) < (\overrightarrow{TT_p}, \overrightarrow{TT_s}) < \pi$$

T appartient à la classe 1



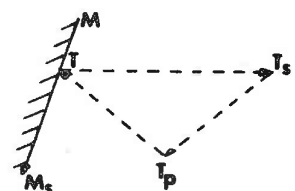
$$0 \leq (\overrightarrow{TT_p}, \overrightarrow{TM}) < (\overrightarrow{TT_p}, \overrightarrow{TT_s}) < \pi$$

T appartient à la classe 2



$$0 < (\overrightarrow{TM_s}, \overrightarrow{TT_p}) < (\overrightarrow{TM_s}, \overrightarrow{TT_s}) < \pi$$

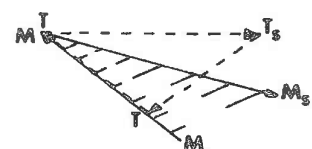
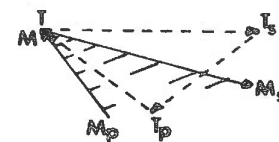
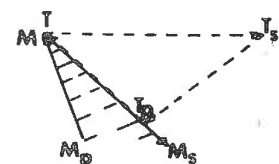
T appartient à la classe 3



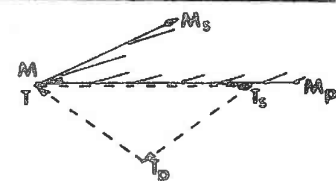
4 - $[MM_S]$ et $[TT_S]$ non colinéaires ; $[MM_S] \cap [TT_S] = M = T$

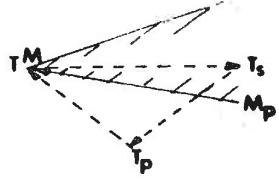
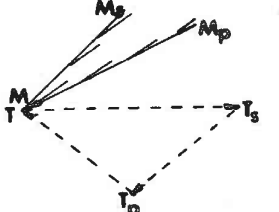
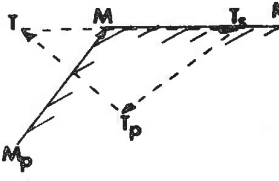
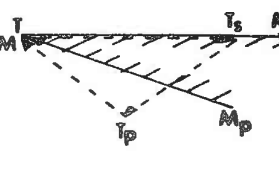
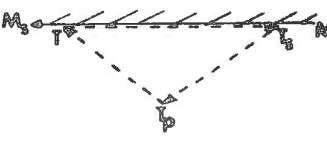
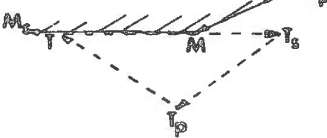
$$0 \leq (\overrightarrow{MM_p}, \overrightarrow{MT_p}) \leq (\overrightarrow{MM_p}, \overrightarrow{MT_s}) < (\overrightarrow{MM_p}, \overrightarrow{MT_s})$$

$M = T$ appartient à la classe 1



$$0 \leq (\overrightarrow{MT_p}, \overrightarrow{MM_p}) \leq (\overrightarrow{MT_p}, \overrightarrow{MT_s}) < (\overrightarrow{MT_p}, \overrightarrow{MT_s})$$

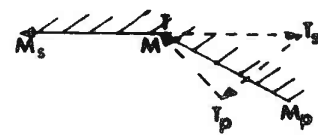


$M = T$ appartient à la classe 2	
$0 < (\overrightarrow{MT_p}, \overrightarrow{MT_s}) < (\overrightarrow{MT_p}, \overrightarrow{MM_p}) < (\overrightarrow{MT_p}, \overrightarrow{MM_s})$ $M = T$ appartient à la classe 3	
5 - $[MM_s[$ et $[TT_s[$ colinéaires de même sens; $[MM_s[\cap [TT_s[= M$; $M \neq T$	
$0 < (\overrightarrow{MT_p}, \overrightarrow{MM_p}) < \pi$ M appartient à la classe 2	
6 - $[MM_s[$ et $[TT_s[$ colinéaires de même sens ; $[MM_s[\cap [TT_s[= M = T$	
$0 < (\overrightarrow{MT_p}, \overrightarrow{MM_p}) < (\overrightarrow{MT_p}, \overrightarrow{MT_s})$ $M = T$ appartient à la classe 2	
7 - $[MM_s[$ et $[TT_s[$ colinéaires de sens contraires ; $M \neq T$	
$T \in [MM_s[\cap [TT_s[$	
T appartient à la classe 2	
$M \in [MM_s[\cap [TT_s[$	
$0 < (\overrightarrow{MT_s}, \overrightarrow{MM_p}) < \pi$ M appartient à la classe 1	

$8 - [M M_S[$ et $[T T_S[$ colinéaires de sens contraires ; $M = T$

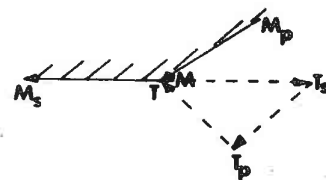
$$0 < (\overrightarrow{M M_S}, \overrightarrow{M T_p}) < (\overrightarrow{M M_S}, \overrightarrow{M M_p}) \leq (\overrightarrow{M M_S}, \overrightarrow{M T_S})$$

M appartient à la classe 2



$$0 < (\overrightarrow{M M_S}, \overrightarrow{M T_p}) < (\overrightarrow{M M_S}, \overrightarrow{M T_S}) < (\overrightarrow{M M_S}, \overrightarrow{M M_p})$$

$M = T$ appartient à la classe 3



CHAPITRE IV

CONSTRUCTION DU MASQUE

DETERMINATION DES POINTS VISIBLES D'UNE FACE

D'après le choix de tracé que nous avons fait (1ère partie chapitre II), les seuls points dont nous devons déterminer la visibilité sont ceux qui font partie :

- du pseudo-contour apparent
 - ou des lignes de contour définies dans les plans de coupe parallèles.
- Ces points appartiennent toujours aux arêtes des triangles définissant l'objet. C'est pourquoi nous ne cherchons à caractériser que les points de $\mathcal{C}(F_i)$.

I - MASQUE $\mathcal{M}_1$ ET VISIBILITE DE F_1

Le masque initial $\mathcal{M}_1$ est par définition, constitué par la projection $\mathcal{F}_1$ de la face "avant" F_1 .

Par construction de la suite des faces "avant" $F_1 \dots F_m$ on peut dire que F_1 ne peut être cachée par aucune face. Donc tout point de $\mathcal{C}(F_1)$ est visible.

II - POSITION D'UNE FACE $\mathcal{F}_i$ PAR RAPPORT A UN MASQUE $\mathcal{M}_{i-1}$ ($1 < i \leq m$)

1 - Il n'existe aucun "vrai" point d'intersection entre $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ et $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$

Tout masque est connexe donc $\mathcal{M}_{i-1}$ et $\mathcal{F}_i$ ne peuvent pas être disjoints.

Décrivons $\mathcal{M}_{i-1}$ et $\mathcal{F}_i$:

Soient $I(i-1)$ le nombre de trous de $\mathcal{M}_{i-1}$ et $L(i-1)$ le nombre de points sur le contour externe ; pour chaque trou j , $K(j)$ désigne le nombre de points sur le jème trou. $\mathcal{M}_{i-1}$ est décrit par :

- un contour externe $\epsilon_{i-1}^1 \dots \epsilon_{i-1}^{L(i-1)}$

$$\begin{aligned}
 - I(i-1) \text{ trous} : & \tau_{i-1,1}^1, \dots, \tau_{i-1,1}^{K(1)} \\
 & \vdots \\
 & \tau_{i-1,I(i-1)}^1, \dots, \tau_{i-1,I(i-1)}^{K(I(i-1))}
 \end{aligned}$$

Nous appelons enveloppe de $\mathcal{M}_{i-1}$ et notons $\mathcal{E}(\mathcal{M}_{i-1})$ la surface définie par le contour externe de $\mathcal{M}_{i-1}$.

La face $\mathcal{F}_i$ pour $i > 1$ est un triangle décrit par f_i^1, f_i^2, f_i^3

Nous pouvons distinguer trois cas :

a - Tout point de $\mathcal{F}_i$ est intérieur à $\mathcal{M}_{i-1}$ (figure 1)

Dans ce cas $\mathcal{M}_i$ est identique à $\mathcal{M}_{i-1}$; $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i) = \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$. Tous les points de $\mathcal{F}_i$ sont cachés.

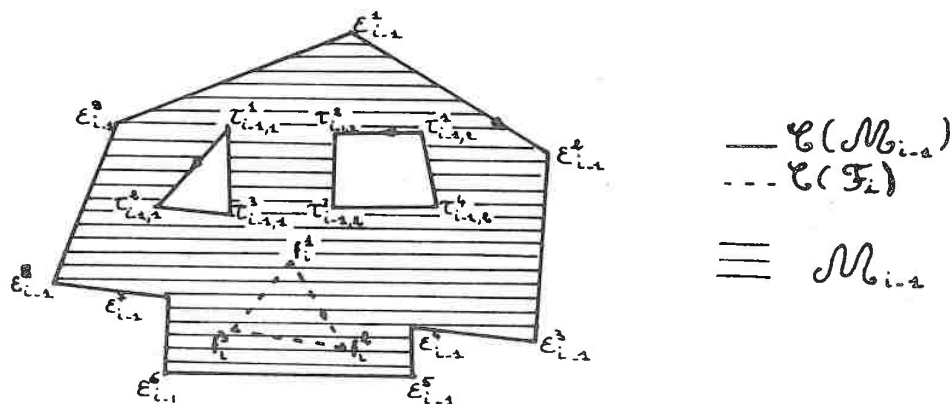


FIGURE 1

b - Tout point de $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$ est intérieur à $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ et il existe un point de $\mathcal{F}_i$ extérieur à $\mathcal{M}_{i-1}$ (figure 2)

Ceci signifie qu'il existe au moins un trou de $\mathcal{M}_{i-1}$ tel que son contour soit contenu dans $\mathcal{F}_i$. Le contour externe de $\mathcal{M}_i$ est identique au contour externe de $\mathcal{M}_{i-1}$. Les trous de $\mathcal{M}_{i-1}$ "intérieurs" à $\mathcal{F}_i$ n'apparaissent plus dans $\mathcal{M}_i$. Tout point de $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$ est caché.

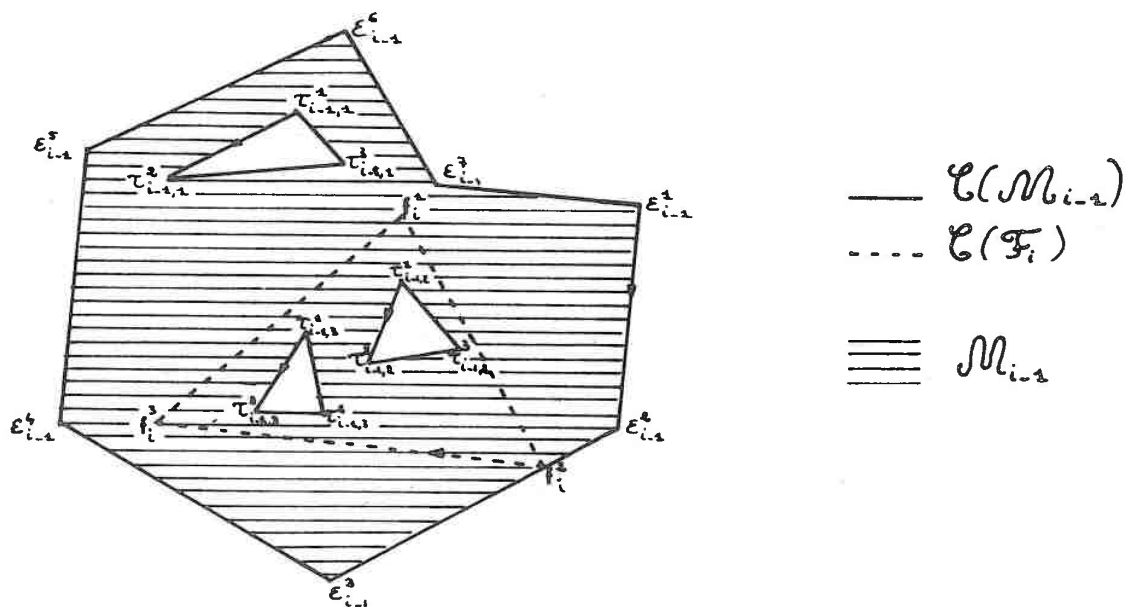


FIGURE 2

c - Tout point de $C(F_i)$ est extérieur à $C(M_{i-1})$ (figure 3)

Ceci signifie que la face F_i "englobe" le masque M_{i-1} . Dans ce cas M_i est constitué par F_i et tout point de $C(F_i)$ est visible.

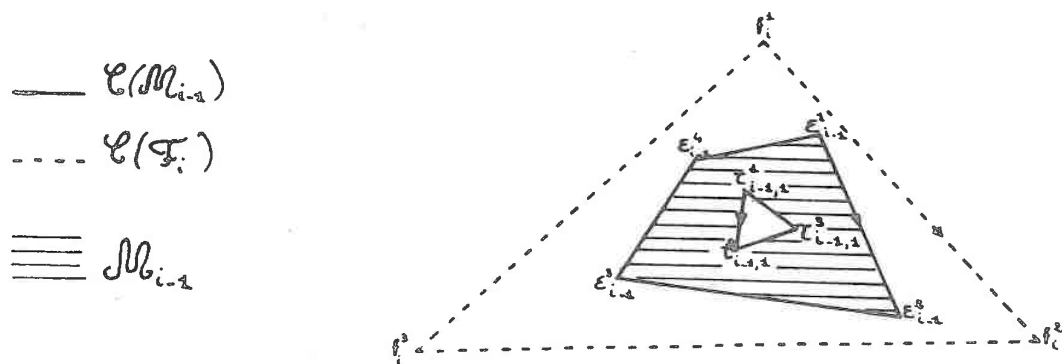


FIGURE 3

2 - Il existe au moins un "vrai" point d'intersection entre $C(M_{i-1})$ et $C(F_i)$

Remarque : si on considère qu'un point double ("vrai" point d'intersection de

classe 3) représente en fait deux points d'intersection, on peut dire que le nombre de "vrais" points d'intersection entre chaque contour de M_{i-1} et $\mathcal{C}(F_i)$ est pair.

$\mathcal{C}(M_i)$ est composé de suites de lignes polygonales appartenant à $\mathcal{C}(F_i)$ et de lignes polygonales appartenant à $\mathcal{C}(M_{i-1})$

a — La construction de $\mathcal{C}(M_i)$ se fait de la manière suivante :

Nous partons d'un "vrai" point d'intersection I^1 de classe 1 ou 2 (le cas particulier des points doubles sera évoqué plus loin). Nous exploitons l'orientation de $\mathcal{C}(M_{i-1})$ et de $\mathcal{C}(F_i)$.

Si ce point est de classe 1 (respectivement de classe 2) le contour de M_i sera constitué de la ligne polygonale extraite de $\mathcal{C}(F_i)$ (respectivement de $\mathcal{C}(M_{i-1})$) d'origine I^1 et dont l'extrémité est le premier "vrai" point d'intersection rencontré sur ce contour; nommons ce point I^2 , nous pouvons remarquer que I^2 appartient à la classe 2 (respectivement classe 1) ou à la classe 3. Le traitement dans le cas où I^2 est de classe 3 sera envisagé dans le paragraphe c. La suite de $\mathcal{C}(M_i)$ s'obtient en parcourant la ligne polygonale extraite de $\mathcal{C}(M_{i-1})$ (respectivement $\mathcal{C}(F_i)$) jusqu'à la rencontre d'un "vrai" point d'intersection de classe 1 (respectivement de classe 2) etc... Ce traitement continuera jusqu'à retomber sur le point I^1 .

Nous construisons des lignes de contour tant qu'il reste des "vrais" points d'intersection inexploités.

Etudions l'exemple représenté à la figure 4 :

Le masque M_{i-1} est défini par :

ϵ^1	ϵ^2	...	ϵ^6	:	son contour externe
1	2	3	4	}	les contours des trous
τ_1	τ_1	τ_1	τ_1		
1	2	...	5		
τ_2	τ_2	...	τ_2		

La face F_i est un triangle de sommets f^1, f^2, f^3

Dans un premier temps nous repérons les points d'intersection entre $\mathcal{C}(M_{i-1})$ et $\mathcal{C}(F_i)$:

I^1, I^3, I^5, I^7, I^9 sont des "vrais" points d'intersection de classe 1.

Quant à $I^2, I^4, I^6, I^8, I^{10}$, ils sont de classe 2.

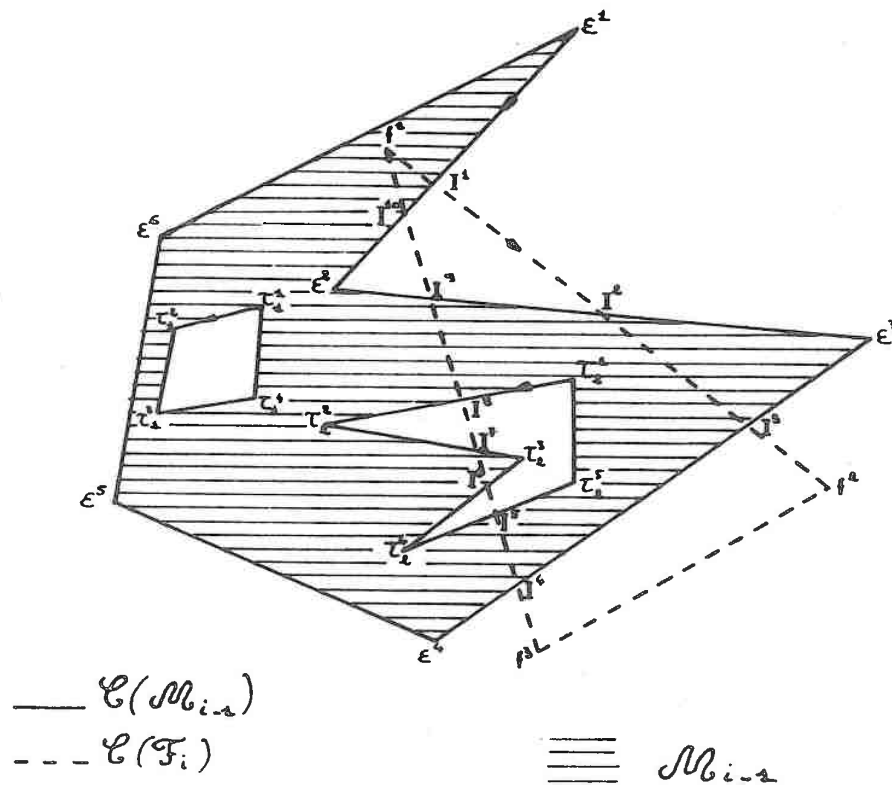


FIGURE 4

En suivant l'algorithme défini précédemment, nous pouvons construire les contours suivants :

- $I^1 - I^2 - \epsilon^3 - I^3 - f^2 - f^3 - I^4 - \epsilon^4 - \epsilon^5 - \epsilon^6 - \epsilon^1 - I^1$ - contour C_1 ,
 $I^9 - \epsilon^2 - I^{10} - I^9$ - contour C_2 ;
 $I^8 - \tau_2^2 - I^7 - I^8$ - contour C_3 ,
 $I^6 - \tau_2^4 - I^5 - I^6$ - contour C_4 .

Tous les points d'intersection ont été exploités. Ils reste alors à déterminer :

b - Signification des contours obtenus.

Chaque ligne de contour obtenue peut être :

- le contour externe de M_i ;
- le contour d'un trou de M_i ;

Nous pouvons remarquer que, par la méthode utilisée, le contour externe de l'union de deux polygones dont les contours externes sont orientés dans le sens rétrograde, est lui-même orienté dans le sens rétrograde.

En utilisant cette remarque, nous déterminons le contour externe de M_i , en recherchant parmi les contours C_k obtenus, celui qui est orienté dans le sens rétrograde. Tous les autres contours sont des contours de trous.

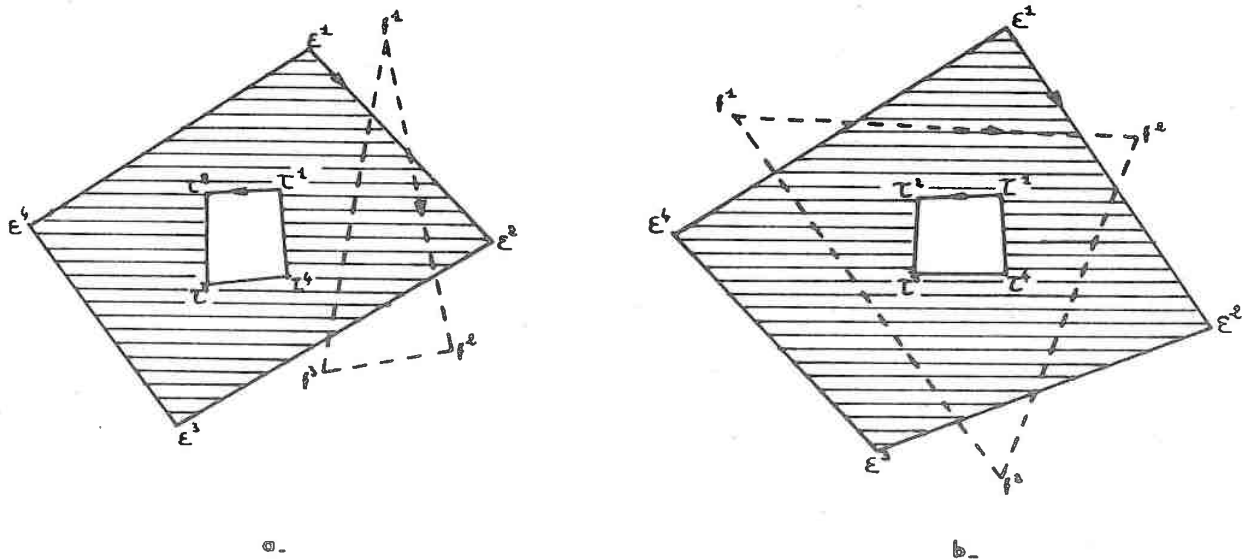
Dans l'exemple précédent (figure 4) C_1 est contour externe de M_i ; C_2, C_3, C_4 sont des contours de trous. Lors d'un tel traitement, il ne faut pas oublier le fait que l'intersection de $\mathcal{C}(F_i)$ et du contour d'un trou de M_{i-1} peut être vide. Deux cas, illustrés par la figure 5, peuvent alors se présenter.

Appelons le trou T , $\mathcal{C}(T)$ est son contour.

$$\mathcal{C}(F_i) \cap \mathcal{C}(T) = \emptyset$$

Nous exploitons toujours le fait que tout masque est connexe ; donc M_{i-1} et F_i ne peuvent pas être disjoints ; les deux cas possibles sont alors :

- T et F_i sont disjoints (figure 5 - a)
- T est intérieur à F_i (figure 5 - b)



M_i est décrit par $e^1 e^2 e^3 e^4$ son contour externe.

$\tau^1 \tau^2 \tau^3 \tau^4$ un contour de trou.

F_i est défini par $f^1 f^2 f^3$

FIGURE 5

Dans le premier cas $\mathcal{C}(T)$ appartient à $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$, alors que dans le deuxième cas, $\mathcal{C}(T)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$

c — Cas particulier des points doubles.

Nous considérons qu'un point double est équivalent à deux "vrais" points d'intersection :

- 1 point de classe 1 et ,
- 1 point de classe 2

Pour des raisons techniques, lors de la découverte d'un point double I , nous génèrons à la place de I deux points d'intersection distincts I^1 et I^2 de la façon suivante .

Soient les suites d'arêtes $\epsilon^1 I \epsilon^2 \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{i-1})$ et $f^1 I f^2 \in \mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$ (figure 6 - a) ;

I^1 sera construit sur la bissectrice de $(If^2, I\epsilon^1)$ et I^2 sur la bissectrice de $(I\epsilon^2, If^1)$ de manière à ce que $(I^1, I^2) \geq 2\epsilon$ (figure 6 - b)

I^1 est alors un point de classe 1 et I^2 un point de classe 2.

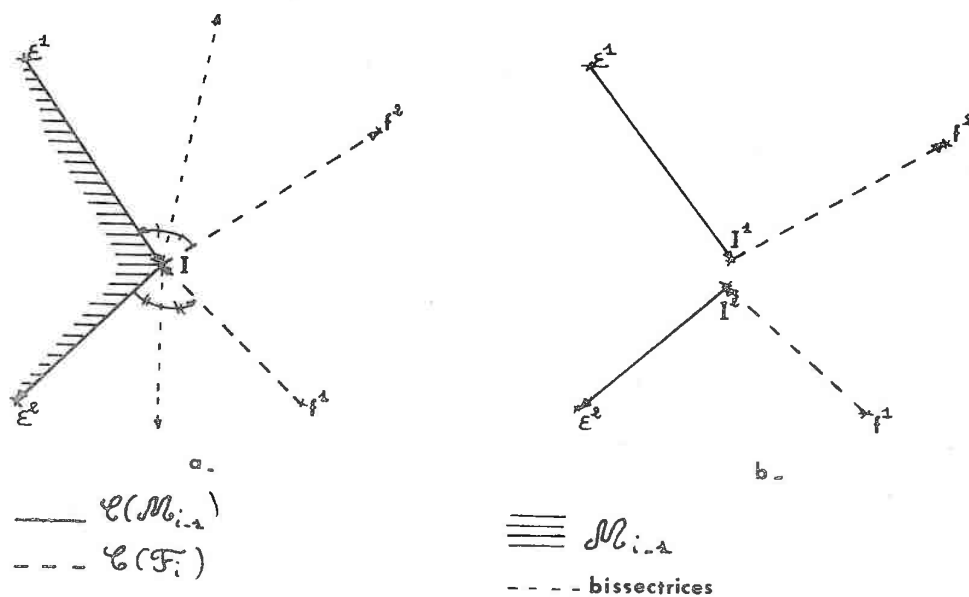


FIGURE 6

d — Points visibles d'une face

Tous les points de $\mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$ qui appartiennent à $\mathcal{C}(\mathcal{M}_i)$ sont visibles ; les autres sont cachés. Dans l'exemple de la figure 4 :

- les arêtes $I^1 I^2, I^3 f^2, f^2 f^3, f^3 I^4, I^5 I^6, I^7 I^8, I^9 I^{10}$ sont visibles.
- $f^1 I^1, I^2 I^3, I^4 I^5, I^6 I^7, I^8 I^9, I^{10} f^1$ sont cachées.

3 .

algorithmes

INTRODUCTION

En utilisant les résultats de ces deux premières parties, nous avons pu réaliser une application informatique qui permet de représenter dans un plan, un objet défini dans des plans de coupe parallèles ; cette représentation est réalisée en éliminant les lignes cachées pour l'observateur.

L'application se scinde, en fait, en deux étapes :

- La définition de l'objet à l'aide d'un polyèdre; ce traitement se fait, une seule fois, sur les données initiales de l'objet.
- La construction de l'image de l'objet pour chaque observation demandée ; ceci s'élabore à partir du polyèdre défini à l'étape précédente.

Les deux chapitres qui suivent, donnent une description rapide des algorithmes développés dans ces deux étapes.

CHAPITRE I

DEFINITION DE L'OBJET

ALGORITHME - STRUCTURE DES INFORMATIONS

I - GENERALITES

Nous avons constaté dans le chapitre I de la première partie, que la connaissance des informations initiales concernant un objet, est insuffisante pour déterminer l'image de cet objet pour une observation donnée. Nous avons alors développé une méthode d'approximation de l'objet par un polyèdre. L'élaboration de toute image se fait uniquement à partir des informations décrivant ce polyèdre.

Dans ce chapitre nous décrivons l'algorithme qui permet de définir le polyèdre, à partir des informations initiales fournies sur l'objet, en exploitant la méthode exposée précédemment. Cet algorithme n'est, bien entendu, à mettre en œuvre qu'une seule fois, et ceci, avant tout calcul d'image.

Afin de simplifier l'exposé, nous avons adopté un certain nombre de notations : Soit $\mathcal{J}$ une suite orientée de points coplanaires,

- nous noterons $\mathcal{C}(\mathcal{J})$, la suite orientée de points de $\mathcal{J}$ appartenant à l'enveloppe convexe de $\mathcal{J}$.
- nous appellerons borne initiale et borne finale le premier et le dernier point de $\mathcal{J}$; elles peuvent être confondues.
- la décomposition d'une ligne de contour $\mathcal{J}$ en sous-ensembles convexes emboîtés se fait par niveau; tout sous-ensemble convexe de niveau $i (i > 1)$ est intérieur à un seul sous-ensemble de niveau $i - 1$; il n'existe qu'un seul sous-ensemble de niveau 1, c'est $\mathcal{C}(\mathcal{J})$.
- un groupe complet dans $\mathcal{J}$, de niveau $i (i > 1)$ est une suite de points d'une ligne de contour $\mathcal{J}$, compris entre deux bornes i_1 et i_2 et tels que i_1 et i_2 appartiennent à des sous-ensembles convexes de niveau $j (j < i)$ et que aucun des points entre i_1 et i_2 n'appartienne à des sous-ensembles convexes de niveau j ; nous noterons $\underline{E_i(i_1, i_2)}$ un tel groupe.

Nous appellerons caractéristique d'un point le niveau du plus grand sous-ensemble convexe auquel il appartient.

Par exemple, dans le cas présenté à la figure 1, une ligne de contour $\mathcal{Y}$ est définie par la suite de points $A_1 A_2 \dots A_{12}$.

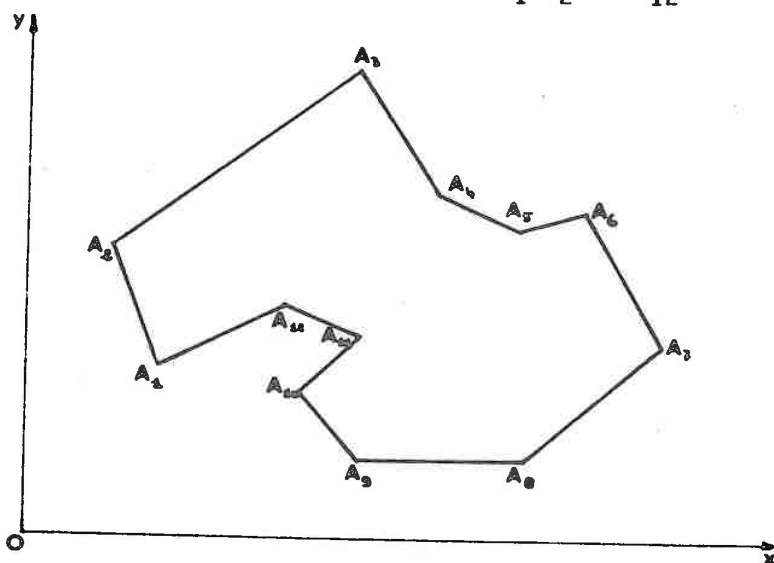


FIGURE 1

niveau 1 :

$$\mathcal{C}(\mathcal{Y}) = A_1 A_2 A_3 A_6 A_7 A_8 A_9$$

niveau 2 :

Nous déterminons deux groupes complets

$$E_2(A_3, A_6) = A_3 A_4 A_5 A_6 \text{ et}$$

$$E_2(A_9, A_1) = A_9 A_{10} A_{11} A_{12} A_1,$$

et deux sous-ensembles convexes :

$$\mathcal{C}(E_2(A_3, A_6)) = A_3 A_4 A_5 A_6$$

$$\mathcal{C}(E_2(A_9, A_1)) = A_9 A_{10} A_{11} A_{12}$$

niveau 3 :

Il reste un seul groupe complet :

$$E_3(A_9, A_{11}) = A_9 A_{10} A_{11}$$

Ce qui donne le sous-ensemble convexe $\mathcal{C}(E_3(A_9, A_{11})) = A_9 A_{10} A_{11}$.

Le tableau de la figure 2 donne les caractéristiques de chaque point :

points	caractéristiques
A ₁	1
A ₂	1
A ₃	1
A ₄	2
A ₅	2
A ₆	1
A ₇	1
A ₈	1
A ₉	1
A ₁₀	3
A ₁₁	2
A ₁₂	2

FIGURE 2

II- ALGORITHME

1 - Algorithme général

DONNEES

Les données initiales concernant l'objet sont les suivantes :

- identification de l'objet : NOM, chaîne de 10^(*) caractères alphanumériques
- nombre de lignes de contour : NS, valeur entière $1 < NS \leq 10^{(*)}$
- pour chaque ligne de contour, $i = 1, \dots, NS$:
 - le nombre de points de la ligne de contour N_i :
valeur entière $3 \leq N_i \leq 20^{(*)}$
 - la cote des points de la ligne de contour dans le repère de l'espace-objet (Oxyz), z_i , valeur réelle
 - pour chaque point P_j^i , $j = 1, \dots, N_i$,
 - les coordonnées du point dans le plan (xOy)
 xP_j^i , yP_j^i (valeurs réelles)

Remarques :

Nous imposons des contraintes sur les données ; la suite des points P_j^i décrit une ligne polygonale orientée dans le sens rétrograde dans (xOy) ; il existe au moins 3 points non alignés ; le polygone défini doit être simplement connexe

de plus, les cotes z_i sont telles que $z_1 > z_2 > \dots > z_{NS}$.

RESULTATS

Si les données répondent aux contraintes, les résultats sont sauvegardés dans un fichier que nous désignerons par le nom OBJET dans la suite de l'exposé. Ce fichier est à organisation consécutive ; il sera utilisé dans cette phase en sortie et en accès direct.

Il comprend entre 4 et $20^{(*)}$ enregistrements, de longueur variable et qui ont le format suivant :

- 1er enregistrement :
 - identification de l'objet : 10 caractères alphanumériques
 - nombre de lignes de contour : NS
- NS enregistrements, décrivant chacun une ligne de contour, et ordonnés par valeur décroissante de leur composante sur Oz ; ils ont la structure suivante :
 - nombre de points de la ligne de contour i : N_i
 - composante sur O_z de ces points : z_i
 - pour chaque point P_j^i ($j=1, \dots, N_i$) de la i ème ligne
 - xP_j^i , yP_j^i , ses coordonnées dans (xOy)
- NS - 1 enregistrements, chacun d'eux énonce la suite ordonnée des triangles définissant l'objet entre deux lignes de contour ; le premier décrit les triangles entre les cotes z_1 et z_2 , le deuxième entre z_2 et z_3 , etc... ; ces enregistrements ont le format suivant :
 - pour chaque triangle T_j^i , entre la i ème et la $i + 1$ ème ligne de contour, $1 \leq j \leq N_i + N_{i+1}$
 - τ_j^i un indicateur qui vaut 1 si le triangle possède deux sommets sur la i ème ligne, et -1 sinon.
 - k_j^i le numéro de son premier sommet sur la i ème ligne.
 - l_j^i le numéro de son premier sommet sur la $i + 1$ ème ligne.

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Acquisition { de l'identification de l'objet
 du nombre de lignes de contour, NS.

(*) valeur fixée dans les programmes développés actuellement.

- Ecriture de ces informations dans le 1er enregistrement du fichier OBJET.
- Initialisation:
 - Prétraitement des données de la 1ère ligne de contour (cf. § 1-1)
 - Détermination des caractéristiques des points de la 1ère ligne de contour (cf. § 1-2)
 - Ecriture des coordonnées des points de la 1ère ligne de contour, dans le 2ème enregistrement du fichier OBJET.
- Pour chaque suite de triangles à définir : $i = 1, \dots, NS - 1$
 - Prétraitement des données de la $i + 1$ ème ligne de contour (cf. § 1-1)
 - Détermination des caractéristiques des points de la $i + 1$ ème ligne de contour (§ 1 - 2)
 - Définition de l'objet entre les lignes de contour i et $i + 1$ (§ 1-3)
 - Ecriture des coordonnées des points de la $i + 1$ ème ligne de contour, dans l'enregistrement $i + 2$ du fichier OBJET.
 - Ecriture de la liste des triangles définissant l'objet entre les i et $i + 1$ ème lignes de contour, dans l'enregistrement $NS + i + 1$ du fichier OBJET.

1 - 1 - Prétraitement des données de la i ème ligne de contour.

Ce module a pour rôle de vérifier les données initiales et de les ranger en mémoire de façon à pouvoir les utiliser simplement par la suite.

DONNEES

Les données initiales concernant une ligne de contour, à savoir :

- NP nombre de points de la ligne.
- Z composante sur Oz de ces points.
- pour chaque point P_i $1 \leq i \leq NP$
 - x_i } ses composantes dans (xOy)
 - y_i }

RESULTATS

Nous ne conservons dans la liste ordonnée des points de la ligne de contour, que les éléments P_i , tels que P_{i-1} , P_i et P_{i+1} ne soient pas alignés ; les ré-

sultats de ce module sont alors :

- N nombre de points
 - S tableau décrivant ces points (figure 3)
- $S(i,3) = -1$, quel que soit i , $1 \leq i \leq N$; ceci signifiant qu'on n'a pas encore déterminé la caractéristique de ces points.

x_1	y_1	c_1	1
	$\vdots$		
x_i	y_i	c_i	i
	$\vdots$		
x_N	y_N	c_N	N

$-x_i, y_i$ sont les coordonnées du point P_i .

$-c_i$ est sa caractéristique .

FIGURE 3

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Acquisition de NP, Z
- Pour $j = 1, \dots, NP$
 - acquisition de x_j, y_j
 - $S(j, 1) = x_j$
 - $S(j, 2) = y_j$
 - $S(j, 3) = -1$
 - $N = NP$
 - $n = 1$
 - pour chaque point de la suite, $j = 1, \dots, NP$
 - n désigne l'indice du jème point de la suite dans le tableau S ;
 - calcul de p, l'indice de son prédécesseur et de s, l'indice de son successeur dans S.
 - si $(S(p, 1), S(p, 2)), (S(n, 1), S(n, 2)), (S(s, 1), S(s, 2))$ définissent trois points alignés,
 - alors * Suppression dans le tableau S de la ligne n

Sinon * $n = n + 1$

- Calcul de la surface orientée du polygone $P_1, \dots, P_n$: $S = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OP_i} \wedge \overrightarrow{OP_{s(i)}}$
($s(i)$ désigne l'indice du successeur de P_i)
 - si $S < 0$ alors les données sont correctes
 - sinon les données sont incorrectes; arrêt du traitement

1 - 2 - Détermination des caractéristiques des points de la ième ligne

Appelons $\mathcal{S}$ la suite de ces points. $\mathcal{S} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$

DONNEES

- N : nombre de points
- S : tableau de définition des points $P_1, \dots, P_n, P_1$ (cf figure 3)

RESULTATS

- $S(j, 3)$ pour $j \in [1, N]$, c'est à dire la caractéristique de chaque point ; on impose , de plus, la contrainte suivante : $S(1, 1) = 1$
- NIV : le dernier niveau de décomposition de cette ligne de contour.

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Recherche d'un point appartenant à $\mathcal{E}(\mathcal{S})$.
- Permutation circulaire des éléments du tableau S de façon à ce que ce point soit décrit par la première ligne du tableau.
- $S(1, 1) = 1, S(N + 1, 1) = 1$.
- Pour chaque niveau $j = 1, 2, \dots$, jusqu'à ce que $S(k, 3) \neq -1$,
 $\forall k \in [1, N]$:
 - Pour chaque couple (i_1, i_2) tel que $E_j(i_1, i_2)$ soit un groupe complet :
 - Pour $k = i_1 + 1, \dots, i_2 - 1$
 - si $P_k \in \mathcal{E}(E_j(i_1, i_2))$
 - alors $S(k, 3) = j$
 - sinon $S(k, 3) = -1$

Remarque :

Soit une suite $\mathcal{S} = P_1, \dots, P_N$; pour savoir si un point $P_i, 1 \leq i \leq N$,

appartient à $\mathcal{E}(\mathcal{S})$, enveloppe convexe de $\mathcal{S}$, il suffit de trouver un point P_j ; $1 \leq j \leq N$ et $j \neq i$ tel que, pour tout k , $1 \leq k \leq N$ et $k \neq i$ et $k \neq j$, $\overrightarrow{P_i P_j} \wedge \overrightarrow{P_i P_k}$ soit de même signe.

1 - 3 - Définition de l'objet entre les lignes de contour i et $i + 1$.

Appelons $\mathcal{S}^A$ et $\mathcal{S}^B$ la suite de points de la i ème ligne et de la $i + 1$ ème ligne de contour.

$\mathcal{S}^A = (A_1, \dots, A_{NA})$ et $\mathcal{S}^B = (B_1, \dots, B_{NB})$

DONNEES

- NA : nombre de points de $\mathcal{S}^A$.
- ZA : composante suivant Oz des points.
- SA : tableau des coordonnées et de la caractéristique des points de $\mathcal{S}^A$ (figure 3).
- NIVA : le dernier niveau de décomposition de $\mathcal{S}^A$.
- NB : nombre de points de $\mathcal{S}^B$.
- ZB : composante suivant Oz des points.
- SB : tableau des coordonnées et de la caractéristique des points de $\mathcal{S}^B$ (figure 3).
- NIVB : le dernier niveau de décomposition de $\mathcal{S}^B$.

RESULTATS

- M : matrice d'enchaînement, de $NA + 1$ lignes et $NB + 1$ colonnes ; ses éléments sont booléens

$M(1,1) = M(NA + 1, NB + 1) = 1$

Si $M(i, j) = 1$, $1 \leq i \leq NA$ et $1 \leq j \leq NB$, deux cas peuvent se produire :

- Soit $M(i+1, j) = 1$ et $M(i, j+1) = 0$ alors le triangle $A_i A_{i+1} B_j$ est une face du polyèdre.
- Soit $M(i, j+1) = 1$ et $M(i+1, j) = 0$ alors le triangle $A_i B_j B_{j+1}$ est une face du polyèdre.

Par exemple, les triangles générés par la matrice M de la figure 4 sont :

$A_1 B_1 B_2, A_1 A_2 B_2, A_2 A_3 B_2, \dots, A_{NA} B_{NB} B_1, A_{NA} A_1 B_1$

	B_1, B_2, B_3				B_{m+1}, B_m	
A_1	1	1	0	.	.	0 0
A_2	0	1	0	.	.	0 0
A_3	0	1		.	.	
	.	.				.
	.	.				.
	.	.				.
A_{m+1}	0	0		.	.	1 1
A_m	0	0		.	.	0 1

M

FIGURE 4

Remarque :

- Nous dirons que le sous-ensemble convexe de niveau k , $k > 1$ d'une ligne de contour est homologue au sous-ensemble convexe de niveau k de la ligne de contour précédente ou suivante, si les bornes initiales i_1 et j_1 de ces sous-ensembles et leurs bornes finales, i_2 et j_2 , sont telles que $M(i_1, j_1) = 1$ et $M(i_2, j_2) = 1$, c'est à dire que les arêtes $A_{i_1} B_{j_1}$ et $A_{i_2} B_{j_2}$ font partie du chemin optimal déterminé au niveau $k - 1$.

Si $k = 1$, nous devons déterminer les bornes initiales de $\xi(\mathcal{S}^A)$ et $\xi(\mathcal{S}^B)$ qui maximisent la fonction objectif.

Pour $k > 1$, l'un des deux sous-ensembles peut être réduit à un point ; ses bornes initiale et finale sont confondues.

- Afin de déterminer le polyèdre entre deux sous-ensembles convexes, homologues de niveau k , des lignes de contour i et $i + 1$, nous devons calculer deux matrices W et B , ainsi que nous l'avons vu lors de l'exposé de la méthode.

$W(i, j)$ donne le plus grand volume calculé entre $A_1 B_1$ et $A_i B_j$; $B(i, j)$, élément booléen, précise l'origine du dernier arc appartenant au chemin optimal de $A_1 B_1$ à $A_i B_j$.

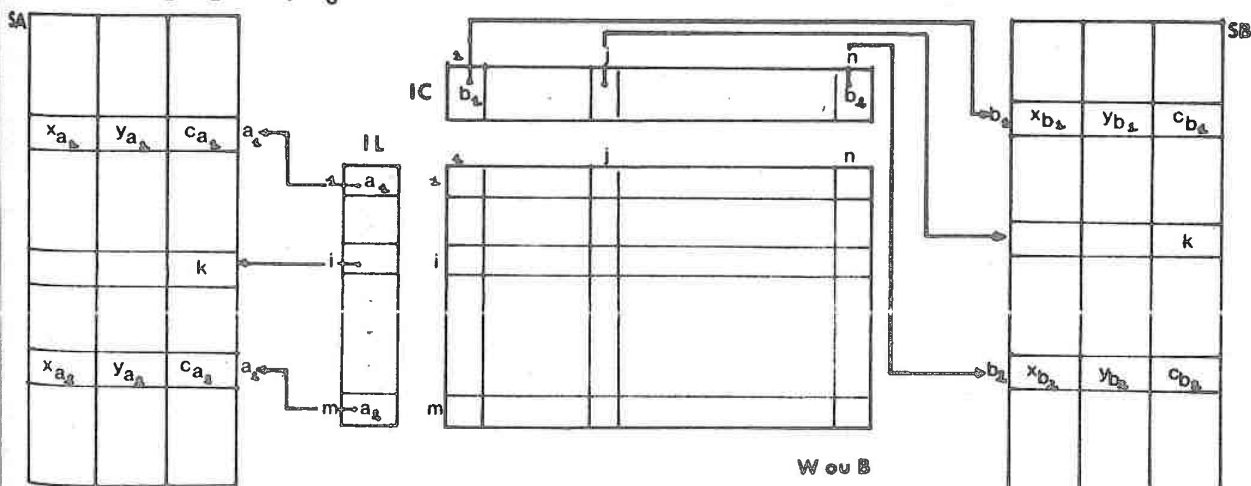


FIGURE 5

Notons m et n le nombre de points de chaque sous-ensemble ; W et B auront alors m lignes et n colonnes. Nous utilisons deux vecteurs de correspondance entre les indices W et B , et les indices des descriptions des points dans SA et SB . Désignons par a_1 (resp. b_1) et a_2 (resp. b_2) les indices des bornes initiale et finale de la ligne de contour i (resp. $i + 1$). La figure 5 illustre le lien entre ces informations.

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Initialisation:

- Construction de $I L$, tableau des indices dans SA des points possédant une caractéristique égale à 1 ; soit M le nombre de ces points.
- Construction de $I C$, tableau des indices dans SB des points possédant une caractéristique égale à 1 ; soit N le nombre de ces points.
- Construction de W, B
- $MAX = W(M, N)$ (c'est à dire le plus grand volume, en prenant comme arête initiale $A_{IL(1)} B_{IC(1)}$)
- $JMAX = IC(1)$
- Pour $i = 1, \dots, N-1$
 - Permutation circulaire des éléments de IC d'une position
 - Construction de W, B .
 - Si $W(M, N) > MAX$ alors $JMAX = IC(1)$
 $MAX = W(M, N)$
- Permutation circulaire des éléments du tableau SB , de façon à ce que B_{JMAX} soit défini par $SB(1,1), SB(1,2), SB(1,3)$
- Mise à jour de la matrice d'enchaînement M (§1-3-1)
- Pour chaque niveau j , tant que $j \leq \max(NIVA, NIVB)$
 - Pour chaque sous-ensemble convexe $\mathcal{C}^A$ de $\mathcal{S}^A$ de niveau j .
 - Calcul des indices des bornes initiale et finale, i_1 et i_2 de $\mathcal{C}^A$
 - Calcul des indices des bornes initiale et finale, j_1 et j_2 du sous-ensemble $\mathcal{C}^B$ homologue à $\mathcal{C}^A$.
 - Si $j_1 = j_2$ alors $M(i, j_1) = i$ pour $i = i_1, \dots, i_2$
 - Sinon - construction de $I L$, tableau des indices dans SA des points de $\mathcal{C}^A$.
 - Construction de $I C$, tableau des indices dans SB des points de $\mathcal{C}^B$.

- Construction de W, B.
- Mise à jour de la matrice d'enchaînement $M(\S 1-3-1)$.
- Pour chaque sous-ensemble convexe $\mathcal{C}^B$ de $\mathcal{S}^B$, de niveau j, non traité
 - Calcul des indices des bornes initiale et finale, j_1 et j_2 de $\mathcal{C}^B$.
 - Calcul de i, indice du point, seul élément du sous-ensemble de $\mathcal{S}^A$ homologue à $\mathcal{C}^B$.
 - $M(i, j) = 1$ pour $j = j_1, \dots, j_2$

1 - 3 - 1 - Mise à jour de la matrice d'enchaînement M

DONNEES

- m : nombre de points du sous-ensemble convexe de $\mathcal{S}^A$.
- n : nombre de points du sous-ensemble convexe de $\mathcal{S}^B$.
- IL : vecteur de m éléments, contenant les indices des points dans SA
- IC : vecteur de n éléments, contenant les indices des points dans SB
- B : matrice booléenne de m lignes de n colonnes ; elle indique le chemin optimum.

RESULTATS

- M : matrice d'enchaînement (figure 4).

STRUCTURE DU PROGRAMME

- $M(IL(1), IC(n)) = 0$
- $M(IL(m), IC(1)) = 0$
- $M(IL(1), IC(1)) = 1$
- $M(IL(m), IC(n)) = 1$
- $i = m$
- $j = n$
- tant que $i \neq 1$ ou $j \neq 1$ faire :
 - si $B(i, j) = 1$ alors $j = j - 1$
 - $M(IL(i), IC(j)) = 1$
 - sinon $i = i - 1$
 - $M(IL(i), IC(j)) = 1$

CHAPITRE II

DETERMINATION DES IMAGES

ALGORITHME ET STRUCTURE DES INFORMATIONS MANIPULEES

I - DESCRIPTION DE L'APPLICATION

Tout objet défini par un polyèdre à l'aide de l'algorithme développé dans le chapitre précédent, peut être représenté en axonométrie orthogonale sur un périphérique "graphique"(console graphique ou traceur de courbes). En utilisant les résultats développés dans la deuxième partie de cet exposé, nous pouvons établir un algorithme de détermination d'images, dont la description figure dans les paragraphes suivants.

Cette application permet, pour un même objet, de déterminer sa représentation en perspective, suivant plusieurs points de vue différents.

1 - Algorithme général

DONNEES

- Les données concernant l'objet sont exploitées à partir du fichier, résultat de l'algorithme de définition de l'objet (chapitre I. §II - 1). Nous le nommerons "fichier OBJET". Son organisation est consécutive, il sera utilisé dans cette étape en entrée et en accès direct. Rappelons sa structure :
- 1er enregistrement :-identification de l'objet
 - NS, nombre de lignes de contour.
- NS enregistrements contenant chacun la description d'une ligne de contour.
- NS - 1 enregistrements définissant chacun la suite orientée des triangles approchant l'objet entre deux lignes de contour consécutives.

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Lecture des caractéristiques de l'objet dans le "fichier OBJET" :
identification , NS nombre de lignes de contour.
- Pour chaque angle de vue désiré:
 - Calcul de l'image (§1-1)
 - Tracé de l'image.

1 - 1 Calcul de l'image

DONNEES :

- NS, le nombre de lignes de contour composant l'objet
- le fichier OBJET
- Le point de vue de l'observateur est donné sous la forme de deux angles θ et ϕ exprimés en degrés et définissant l'isométrie dans le repère de l'espace objet (Oxyz), ainsi que nous l'avons établi dans la première partie du chapitre III- § I.

RESULTATS :

Si on peut déterminer l'image, c'est à dire s'il n'existe aucun cycle dans l'ensemble des triangles entre deux lignes de contour(cf. deuxième partie - chapitre I - §III - 4), on mémorise les résultats dans un fichier ; ouvert en écriture, il est à organisation consécutive et à accès séquentiel ; il est constitué d'au plus $20^{(*)}$ enregistrements, dont le format est le suivant :

- N P un entier

NP = 0 : cet enregistrement est le dernier du fichier.

NP > 0 : dans cet enregistrement figure les renseignements, concernant NP points.

- N P triplets (X, Y, λ) où X et Y sont deux nombres réels, coordonnées du point dans le plan de l'image et λ , nombre entier, définit la visibilité de l'arête dont ce point est origine et dont le point suivant est extrémité (le successeur du dernier point est le premier point de la liste)

$\lambda = 1$: arête réelle et visible.

$\lambda = 0$: arête réelle et cachée.

$\lambda = -1$: arête fictive

Dans ce fichier, chaque enregistrement correspond, soit à la description d'une ligne de contour, soit à la description des arêtes de pseudo-contour apparent entre deux lignes de contour (exception faite des arêtes appartenant aux lignes de contour). Dans la suite de l'exposé, nous nommerons ce fichier , fichier GRAPHIQUE.

STRUCTURE DES INFORMATIONS

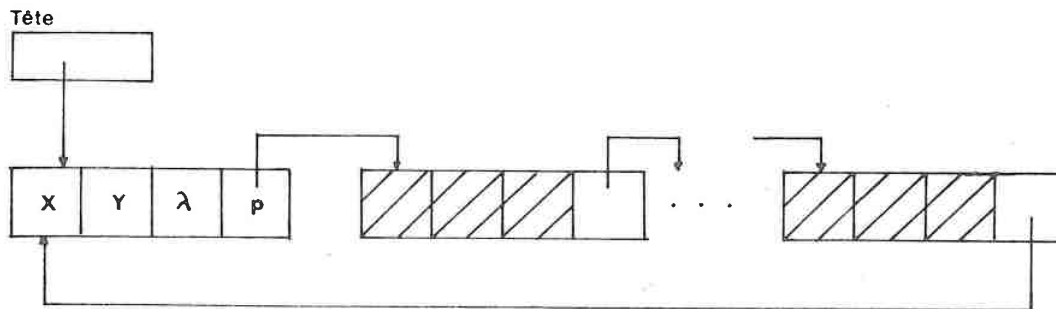
Dans la deuxième partie de cet exposé, nous avons été amenés à parler de contour externe de masque, contour de trous dans un masque, contour d'une face

(*) valeur fixée dans les programmes développés actuellement.

de polyèdre, liste ordonnée des triangles etc... Ce paragraphe a pour but de donner la représentation adoptée pour de telles informations.

a - Description des lignes de contour.

Dans le fichier GRAPHIQUE figurent des enregistrements décrivant une ligne de contour. Chacun d'eux est obtenu après élaboration en mémoire d'une suite d'informations décrivant les arêtes de la ligne de contour. Dans cette suite d'informations, outre les points initiaux de la ligne polygonale, peuvent venir s'insérer au cours du traitement, des points intermédiaires marquant un changement de visibilité dans une arête. Pour une gestion plus souple de cette suite, nous avons choisi de la représenter par une liste circulaire chaînée de nom S B L (figure 1).



Liste SBL

FIGURE 1

La liste décrit la ligne polygonale orientée dans le sens rétrograde dans le plan de l'image (XOY). Chaque bloc décrit un point et contient les informations suivantes :

- X, Y sont les coordonnées du point dans le plan (XOY)
- λ caractérise la visibilité de l'arête dont ce point est origine et le point suivant dans la liste, extrémité.
 - $\lambda = 1$: arête visible
 - $\lambda = 0$: arête cachée.
- p est le pointeur sur le point suivant de la liste.

Lors du traitement des faces du polyèdre entre deux lignes de contour, nous

devons conserver des informations relatives aux sommets de ces deux lignes. Nous utilisons, pour ceci deux tableaux de noms SA et SB ; dans la deuxième partie , nous avons déterminé un ordre d'exploitation des lignes de contour ; le tableau SA sera associé à la i ème ligne traitée et SB à la $i + 1$ ème ligne traitée, à chaque étape de l'application (figure 2).

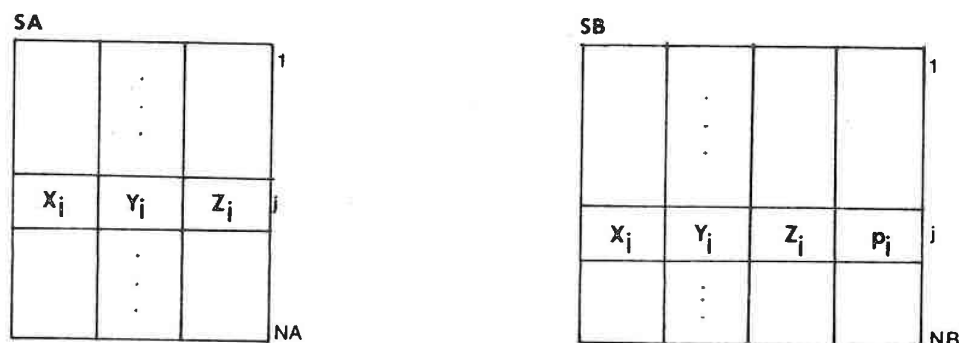


FIGURE 2

Soient N A et N B, les nombres de points de la i ème ligne et de la $i + 1$ ème ligne traitée.

La j ème ligne du tableau S A (respectivement S B) définit les informations relatives au j ème point de la i ème ligne de contour (respectivement : $i + 1$ ème ligne), soit :

X_j, Y_j, Z_j coordonnées du point dans l'espace - image (OXYZ)

P_j : pointeur sur le bloc d'informations , décrivant le meme point, dans la liste chaînée S B L.

L'ordre d'apparition des points dans SA ou SB définit une ligne polygonale orientée dans le sens rétrograde dans le plan de l'image (XOY).

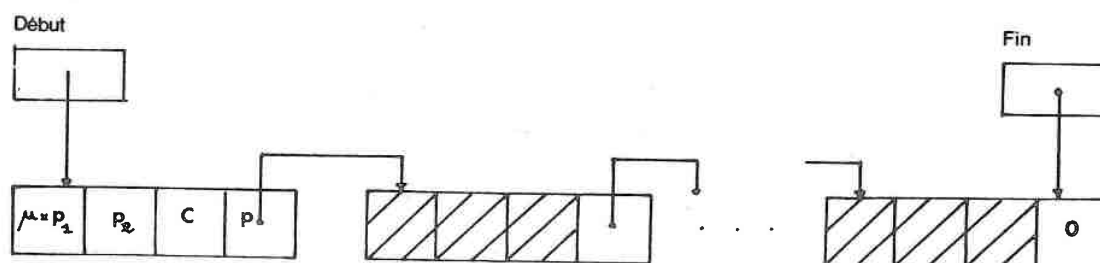
b - Description du polyèdre entre deux lignes de contour consécutives.

Nous appelons "tranche" la partie de l'objet située entre deux lignes de contour.

Nous devons réaliser le traitement d'une tranche en exploitant des listes ordonnées de triangles :

- La suite des triangles d'une tranche dans l'ordre issu de l'orientation des lignes de contour dans le plan de l'image.
- La suite ordonnée des triangles, "faces avant" d'une tranche, cette suite

est construite à partir de la précédente (cf. deuxième partie, chapitre I). Dans la première liste, nous sommes amenés à faire un certain nombre de suppression d'éléments : triangles de surface négligeable sur le plan (XOY) ou "faces arrières" de l'objet pour l'observateur donné. Dans la deuxième liste, nous devons classer les éléments les uns par rapport aux autres. La représentation en mémoire doit nous donner les renseignements concernant les sommets du triangle et la caractéristique de celui-ci. Nous avons alors choisi de représenter ces suites de triangles sous la forme d'une liste chaînée, de nom TRI (figure 3); les pointeurs de début et de fin de liste sont DT, FT pour la liste chaînée mémorisant la suite ordonnée de tous les triangles de la tranche, et DEBO, FINO pour la liste décrivant la suite ordonnée des "faces avant".



Liste de triangles TRI

FIGURE 3

Toute tranche est encadrée par deux lignes de contour ; en respectant l'ordre d'exploitation des tranches, nous distinguerons une ligne de contour "précédant" la tranche, et une ligne de contour "suivant" la tranche, décrites respectivement par un tableau SA de NA éléments et un tableau SB de NB éléments.

Chaque bloc d'informations de la liste TRI définit un triangle :

- μ : type du triangle.
 - $\mu = 1$: le triangle possède deux sommets sur la ligne précédente,
 - $\mu = -1$: le triangle possède deux sommets sur la ligne suivante.
- p_1 : pointeur sur la ligne de SA, description d'un sommet (le premier des deux sommets appartenant à la ligne de contour précédente si $\mu = 1$)
- p_2 : pointeur sur la ligne de SB, description d'un sommet (le premier des deux sommets appartenant à la ligne de contour suivante si $\mu = -1$)
- C : caractéristique du triangle.

Si $\mu = 1$ (respectivement : $\mu = -1$), notons A_1, A_2 les deux sommets sur la ligne de contour précédente (resp. B_1, B_2 les deux sommets sur la ligne de contour suivante) et B (resp. A) le troisième sommet du triangle ;

$C = 0$: $A_1 B, A_2 B$ (resp. AB_1, AB_2) sont des arêtes fictives.

$C = 1$: $A_1 B$ (resp. AB_1) est une arête réelle et,

$A_2 B$ (resp. AB_2) est une arête fictive.

$C = 2$: $A_2 B$ (resp. AB_2) est une arête réelle et ,

$A_1 B$ (resp. AB_1) est une arête fictive.

$C = 3$: $A_1 B$ et $A_2 B$ (resp. AB_1 et AB_2) sont des arêtes réelles.

$C = 4$: le triangle n'est pas une "face avant".

. p : pointeur sur la description du triangle suivant dans la suite ordonnée.

Exemple : Etudions un objet défini par deux lignes de contour, pour une isométrie donnée ; son image est illustrée par la figure 4 - a ; après détermination des caractéristiques des triangles de la tranche, les informations ont la forme présentée à la figure 4 - b.

$P_1^1 P_1^2 P_1^3$ est la ligne de contour précédente et , $P_2^1 P_2^2 P_2^3$, la ligne de contour suivante.

La description de la tranche est donnée dans la liste TRI de pointeurs de début et de fin , DT et FT. Le quatrième bloc d'information de cette liste décrit le triangle $P_1^3 P_2^2 P_2^3$, ce n'est pas une face avant pour l'observateur.

Le traitement d'une tranche doit fournir, entre autres résultats, la liste des arêtes du pseudo-contour apparent de la tranche (exception faite des arêtes appartenant aux lignes de contour.) Ces résultats figurent dans un tableau de nom CA (figure 5).

X, Y sont les coordonnées du point dans le plan de l'image.

λ est la visibilité de l'arête dont ce point est origine et dont le point suivant dans le tableau est extrémité.

$\lambda = 1$ arête réelle,

$\lambda = 0$ arête cachée,

$\lambda = -1$ arête fictive.

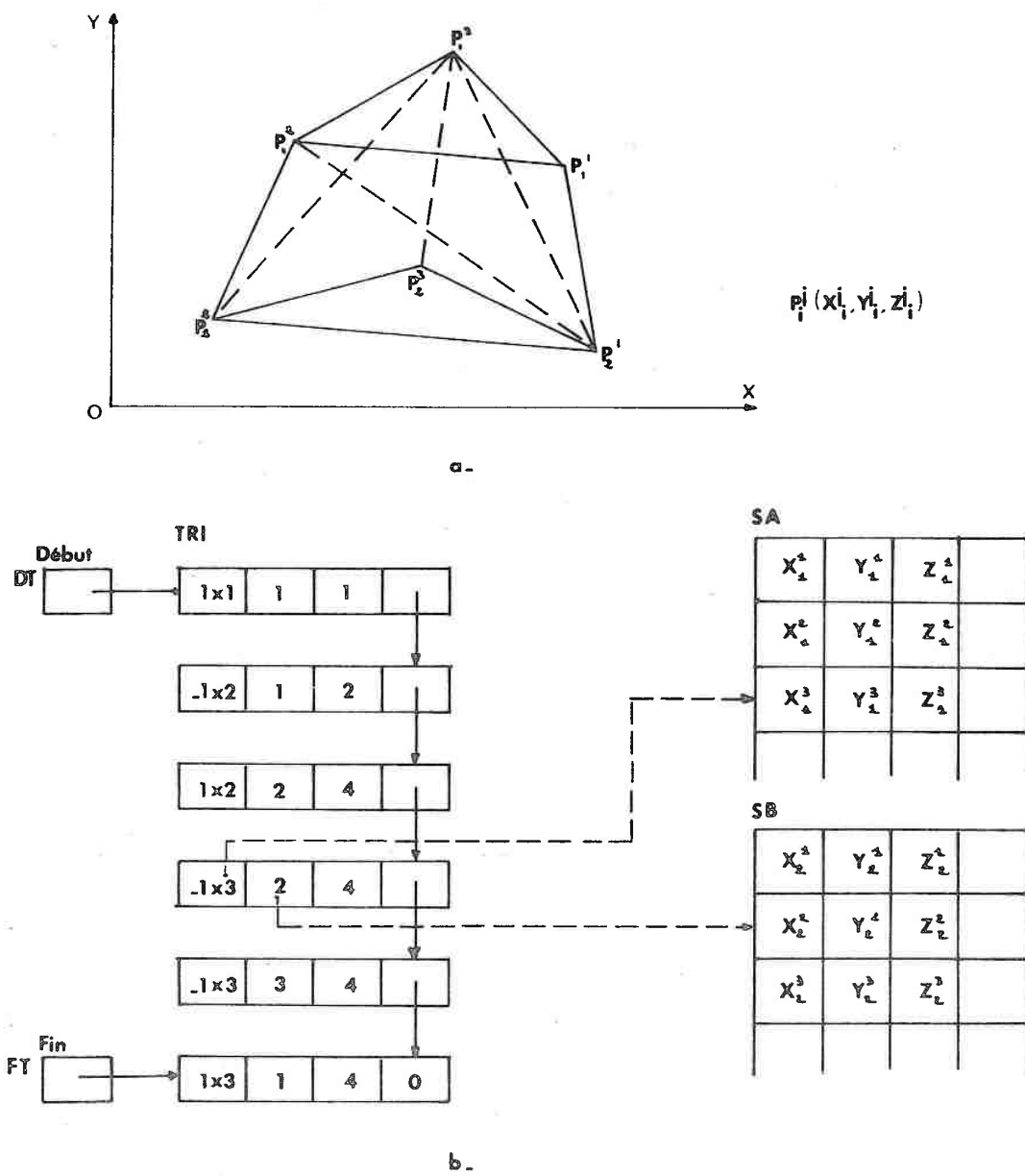


FIGURE 4

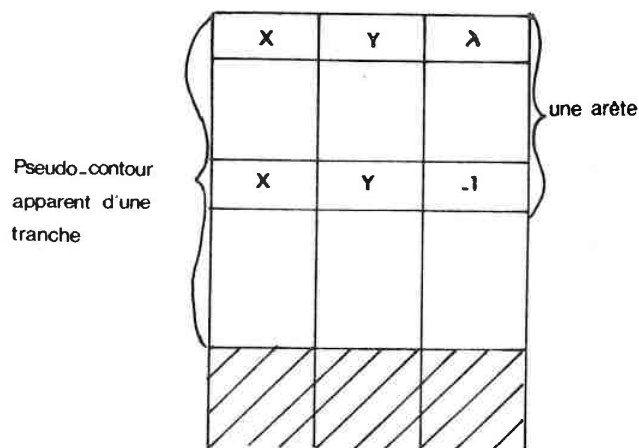
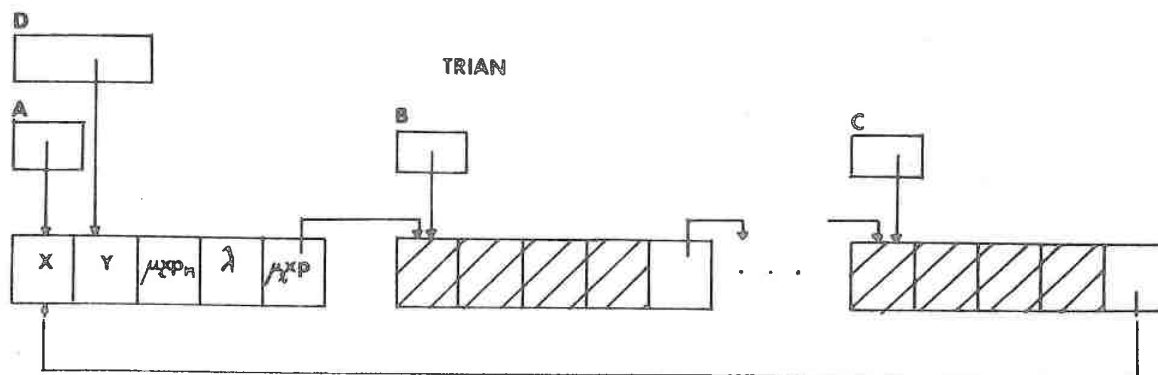


FIGURE 5

c - Représentation d'un triangle.

Un triangle sera représenté sous la forme d'une liste chaînée circulaire de début D ; chaque bloc d'informations décrit un point du triangle ; l'ordre d'exploitation de ces blocs définit une ligne polygonale orientée dans le sens rétrograde dans le plan de l'image. Le nom de cette liste est TRIAN ; les sommets du triangle seront repérés par 3 pointeurs sur cette liste A, B, C. Rappelons qu'entre ces sommets pourront venir s'intercaler des points d'intersection avec un contour de masque. La figure 6 représente une telle liste.



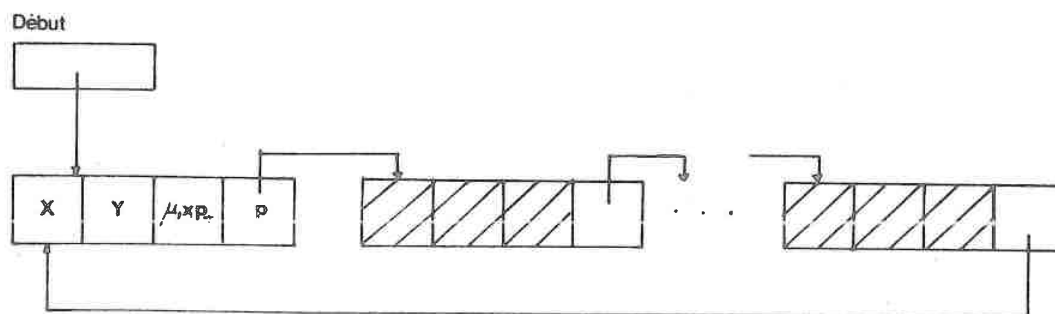
Liste TRIAN
FIGURE 6

Les informations concernant chaque point sont :

- . X, Y : coordonnées du point dans le plan de l'image.
- . λ : caractéristique de l'arête dont ce point est origine et le point suivant extrémité.
 - $\lambda = 1$ arête visible,
 - $\lambda = 0$ arête cachée,
 - $\lambda = -1$ arête fictive.
- . p : pointeur sur le point suivant dans la liste.
- . Si le point n'est pas un vrai point d'intersection, $\mu_1 = p_M = 0$ et $\mu_2 = 1$.
 Si le point est un vrai point d'intersection entre le contour du triangle et un contour du masque, on prendra en compte les informations suivantes :
 - . p_M : pointeur sur le même point dans la description du masque (voir § suivant)
 - . $\mu_1 = -1$ point de classe 3 (point double)
 = +1 point de classe 1 ou 2.
 - . $\mu_2 = +1$ point de classe 1
 = -1 point de classe 2.

d - Représentation d'un masque.

Un masque est défini par un contour externe et , éventuellement , NTR contours de trous. Chaque contour est une ligne polygonale fermée orientée dans le sens direct (trous) ou rétrograde (contour externe). En mémoire, nous représentons ces informations par des listes chaînées circulaires, de nom MASK; et de pointeur de début de liste E pour le contour externe et TR_i pour le ième trou dans le masque. La figure 7 représente une de ces listes.



Liste MASK
FIGURE 7

A chaque point, correspond le bloc d'information suivant :

- . X, Y : coordonnées du point dans le plan de l'image.
- . p : pointeur sur le point suivant dans la liste.

Si ce point n'est pas un vrai point d'intersection, alors $\mu_1 = p_T = 0$ sinon :

- . $\mu_1 = -1$ ce point est un vrai point d'intersection de classe 3.
- . $\mu_1 = +1$ ce point est un vrai point d'intersection de classe 1 ou 2.
- . p_T : pointeur sur la description du même point dans la liste TRIAN.

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Initialisations :

- Détermination de l'ordre de lecture des informations dans le fichier OBJET ; notons n_l le numéro de l'enregistrement de la ligne de contour à traiter, n_t le numéro d'enregistrement de la tranche et , p, le pas de progression de n_l et n_t :

si $\varphi \geq 0$ alors $n_l = 1$, $n_t = NS + 1$, $p = 1$

sinon $n_l = NS + 2$, $n_t = 2 NS + 1$, $p = -1$;

- Initialisation de n_e , le numéro d'enregistrement à écrire dans le fichier GRAPHIQUE : $n_e = 1$

- Construction des tableaux SA de NA lignes et 3 colonnes de la liste SBL à partir de l'enregistrement numéro n_l (§ 1 - 1 - 1)

- Ecriture des informations de la liste SBL dans l'enregistrement numéro n_e .

$n_e = n_e + 1$

- Calcul du masque initial $MASK_1^*$ (son contour externe est égal à la ligne polygonale fermée décrite dans SA ; il ne possède aucun trou - NTR = 0).

- Pour chaque tranche $i_t = 1, \dots, NS - 1$

- $n_l = n_l + p$

- $n_t = n_t + p$

- Construction du tableau SB de NB lignes et 4 colonnes et de la liste SBL à partir de l'enregistrement numéro n_l du fichier OBJET (§ 1 - 1 - 1)

- Construction de la liste TRI (pointeur de tête = DT ; pointeur de fin = FT) à partir des informations de l'enregistrement numéro n_t du fichier OBJET (§ 1 - 1 - 2)

- Traitement de la tranche (§1-1-3)
- Si le tableau CA (pseudo contour apparent) n'est pas vide alors :
 - écriture des informations de CA dans l'enregistrement numéro n_e du fichier GRAPHIQUE
 - $n_e = n_e + 1$
- Ecriture des informations de la liste SBL dans l'enregistrement numéro n_e du fichier GRAPHIQUE.
- NA = NB
- Pour $i = 1, \dots, NB$
 - SA(i,1) = SB(i,1)
 - SA(i,2) = SB(i,2)
 - SA(i,3) = SB(i,3)
- Le dernier masque obtenu après traitement de la tranche, devient le masque initial pour l'itération suivante, soit $MASK_{i_t+1}^o$.

1- 1- 1 - Construction d'un tableau S de N lignes et M colonnes et d'une liste chaînée SBL, à partir d'un enregistrement n_1 du fichier OBJET.

DONNEES

- θ et φ définissant l'angle de vue.
- l'enregistrement n_1 du fichier OBJET, décrivant la ligne de contour :
 - N nombre de points.
 - z cote des points dans le repère (Oxyz) de l'espace-objet.
 - N fois (x_i, y_i) coordonnées des points dans le plan (xOy).

RESULTATS

- Un tableau S de 3 colonnes et de N lignes (cf. § 1 - 1 - a)
- Une liste chaînée circulaire SBL de N éléments (cf. § 1 - 1 - a)

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Acquisition de l'enregistrement n_1 du fichier OBJET
- Pour $i = 1, \dots, N$
 - Si $\varphi \geq 0$ alors $j = i$
sinon $j = N - i + 1$
 - $S(j, 1) = -\sin\theta \cdot x_i + \cos\theta \cdot y_i$

- $S(j,2) = -\cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot x_i - \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot y_i + \cos\varphi \cdot z$
- $S(j,3) = \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot x_i - \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot y_i + \sin\varphi \cdot z$
- La liste SBL est vide
- Pour $i = 1, \dots, N$
 - Ajouter un bloc derrière le dernier élément de la liste SBL,
 - La 1ère information du bloc : X prend la valeur $S(i,1)$
 - La 2ème information du bloc : Y prend la valeur $S(i,2)$
 - Si $M = 4$ alors $\lambda = 0$; (ce point est origine d'une arête initialement cachée)
 - $S(i,4)$ pointe sur ce bloc d'informations ;
 - Sinon $\lambda = 1$ (ce point est origine d'une arête visible, il appartient à la 1ère ligne de contour traitée).

1 - 1 - 2 - Construction de la liste TRI (pointeur de tête DT, de fin FT à partir de l'enregistrement n_t du fichier OBJET.

DONNEES

- θ, φ angles de vue.
- N_1 et N_2 : nombres de points des lignes de contour encadrant la tranche.
- L'enregistrement n_t du fichier OBJET.

Soit pour chaque triangle T_i , $1 \leq i \leq N_1 + N_2$

- τ_i un indicateur qui vaut 1 si le triangle possède deux sommets sur la ligne de contour de plus haute cote, et - 1 sinon,
- k_i le numéro de son premier sommet sur la ligne "supérieure",
- l_i le numéro de son premier sommet sur la ligne "inférieure",

RESULTATS

- Une liste TRI de début DT et fin FT (§1 - 1 - b), décrivant la suite des triangles dans un ordre déduit de l'ordre des points dans la liste SBL.

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Acquisition des informations de l'enregistrement n_t du fichier OBJET
- Pour $i = 1, \dots, N_1 + N_2$
 - Ajouter un bloc en fin de liste TRI
 - Si $\varphi \geq 0$ alors $\mu = \tau_i$
 - $p_1 = k_i$
 - $p_2 = l_i$
 - sinon $\mu = -\tau_1$
 - $a = N_1 - l_i + 1$
 - $b = N_2 - k_i + 1$
 - Si $\mu = -1$ alors $p_1 = b$
 - $p_2 = p_r(a)^{(*)}$
 - sinon $p_2 = a$
 - $p_1 = p_r(b)^{(*)}$

1 - 1 - 3 - Traitement de la tranche

DONNEES :

- Liste ordonnée des triangles de la tranche TRI (DT, FT)
- Description des lignes de contour :
 - précédente : NA, nombre de points
 - SA, tableau de coordonnées des points
 - suivante : NB, nombre de points.
 - SB, tableau de coordonnées des points
 - SBL, liste chaînée, créée à partir de SB
- Le masque initial MASK^o (NTR^o trous, E^o, TR₁^o, ..., TR_{NTR}^o pointeurs de début début de liste.)

RESULTATS

- SBL et CA, décrivant la visibilité des arêtes de la tranche.
- Le dernier masque obtenu MASK^{NT}, où NT est le nombre de "faces avant" de la tranche (NTR^{NT} trous, TR₂^{NT}, ..., TR_{NTR}^{NT}, pointeurs de début de liste)

(*) Soit un tableau S de N éléments ;
si $i = 1$, pr(i) = N
si $1 < i \leq N$ pr(i) = i - 1

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Pour chaque triangle de la tranche
 - Calcul des caractéristiques du triangle
- Elimination de la liste TRI (DT, FT); des triangles qui ne sont pas des "faces avant".
- Détermination de la liste ordonnée des triangles, "faces avant", de l'objet (liste TRI de début DEBO, de fin FINO) (§ 1 - 1 - 3 - 1)
- Pour chaque triangle T_i de la liste TRI (DEBO, FINO), $i = 1, \dots, NT$:
 - Construction de la liste circulaire chaînée TRIAN, à partir des sommets du triangle T_i
 - Traitement du triangle T_i (§ 1 - 1 - 3 - 2)
 - Affectation de la visibilité des arêtes dans la liste chaînée SBL et le tableau CA.

1 - 1 - 3 - 1 - Détermination de la liste ordonnée des triangles.

DONNEES

- Liste TRI (DT, FT), donnant la suite ordonnée de tous les triangles de la tranche ; dans cette suite ne figurent que les triangles qui sont "faces avant".

RESULTATS

- Liste TRI (DEBO, FINO) donnant la liste ordonnée de tous les triangles, "face avant" de la tranche.
- NT nombre de triangles de cette liste.

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Tant que la liste TRI (DT, FT) n'est pas réduite à un élément
 - T est le triangle de début de liste TRI (DT, FT)
 - Retirer T de la liste, TRI (DT, FT)
 - Si T n'est pas caché par T', pour tout T' appartenant à la liste TRI (DT, FT) et $T \neq T'$.
 - alors - insérer T en fin de liste TRI (DEBO, FINO)

sinon - insérer T en fin de liste TRI (DT, FT)

- Insérer le dernier élément de la liste TRI (DT, FT) en fin de liste TRI (DEBO, FINO).

1 - 1 - 3 - 2 - Traitement du triangle T_j

DONNEES :

- $MASK^{j-1}$ déterminé à l'étape précédente (NTR^{j-1} trous, E^{j-1} , TR_1^{j-1} , ... débuts de listes).
- La liste circulaire chaînée définissant le triangle (figure 6).

RESULTATS :

- $MASK^j$ le masque obtenu par union de $MASK^{j-1}$ et de T_j (NTR^j trous, E^j , TR_1^j , ... , $TR_{NTR^j}^j$ début de listes).
- La visibilité des arêtes du triangle T_j ; c'est à dire la caractéristique λ de chaque élément de la liste TRIAN et des informations correspondant à ce triangle dans la liste SBL.

STRUCTURE DU PROGRAMME

- Pour chaque contour du masque
 - Soit MA, le pointeur de début de liste $MASK^{j-1}$ décrivant ce contour.
 - MP désigne le 1er point du contour.
 - Pour chaque point du contour :
 - M est le point qui succède à MP,
 - MS est le point qui succède à M,
 - TP désigne le 1er sommet du triangle
 - Pour chaque sommet du triangle :
 - T est le sommet suivant TP
 - TS est le sommet suivant T
 - Si entre MMS et TTS existe un vrai point d'intersection :
alors insérer les informations correspondant à ce point entre T et TS dans la liste TRIAN (D) et entre

M et MS dans la liste $MASK^{j-1}$ (MA).

- $TP = T$

- $MP = M$

- Construction des lignes chaînées, $MASK^j$, générées à l'aide des vrais points d'intersection entre le contour initial $MASK^{j-1}$ (MA) et le triangle T_j ; mise à jour des caractéristiques de visibilité dans la liste TRIAN (D).

II - ETUDE D'UN EXEMPLE - LIENS ENTRE LES INFORMATIONS REPRESENTÉES EN MEMOIRE

Considérons un masque et un triangle , dessiné dans le plan de l'image (figure8)

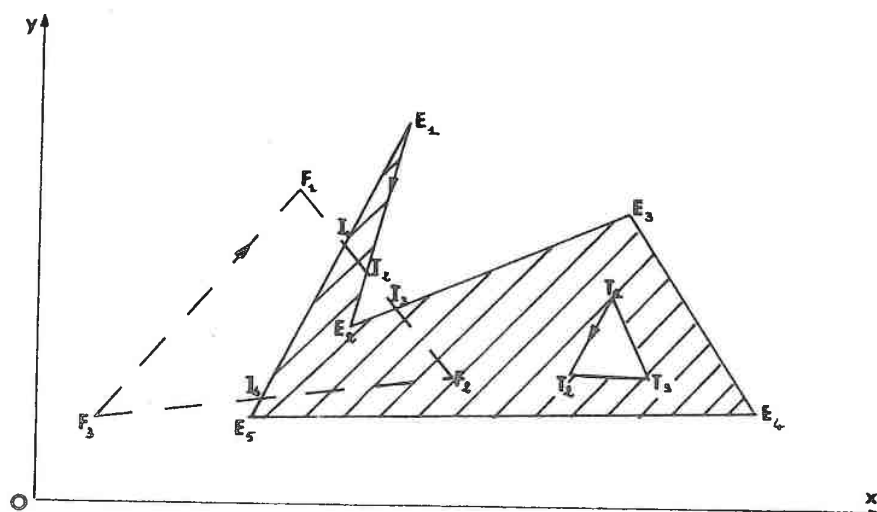


FIGURE 8

Triangle :

$F_1 (XF_1, YF_1)$, $F_2 (XF_2, YF_2)$, $F_3 (XF_3, YF_3)$

Les arêtes $F_1 F_2$, $F_2 F_3$ sont réelles.

L'arête $F_1 F_3$ est fictive

F_1 appartient à la ligne de contour précédant la tranche étudiée

$F_2 F_3$ sont des points de la ligne de contour suivante.

Masque

Il est défini par :

- Son contour externe : $E_i (XE_i, YE_i)$, $i = 1, \dots, 5$
- un trou : $T_i (XT_i, YT_i)$, $i = 1, 2, 3$.

a - Initialement les informations sont les suivantes :

- Un élément dans la liste des triangles "avant", TRI
- F_1 est décrit dans SA
- F_2, F_3 sont décrits dans SB et SBL.

La figure 9 - a en donne une représentation.

De plus triangle et masque sont décrits par des listes circulaires chaînées (figure 9 - b).

Dans le tableau CA (pseudo-contour apparent) ne figure aucune information concernant le triangle.

Initialement, toutes les arêtes du triangle sont considérées comme cachées.

b - Intersection du contour du triangle et du contour externe du masque

Le calcul fournit la liste des "vrais" points d'intersection: $I_1 (XI_1, YI_1)$, $I_3 (XI_3, YI_3)$ points de classe 2.

$I_2 (XI_2, YI_2)$, $I_4 (XI_4, YI_4)$ points de classe 1.

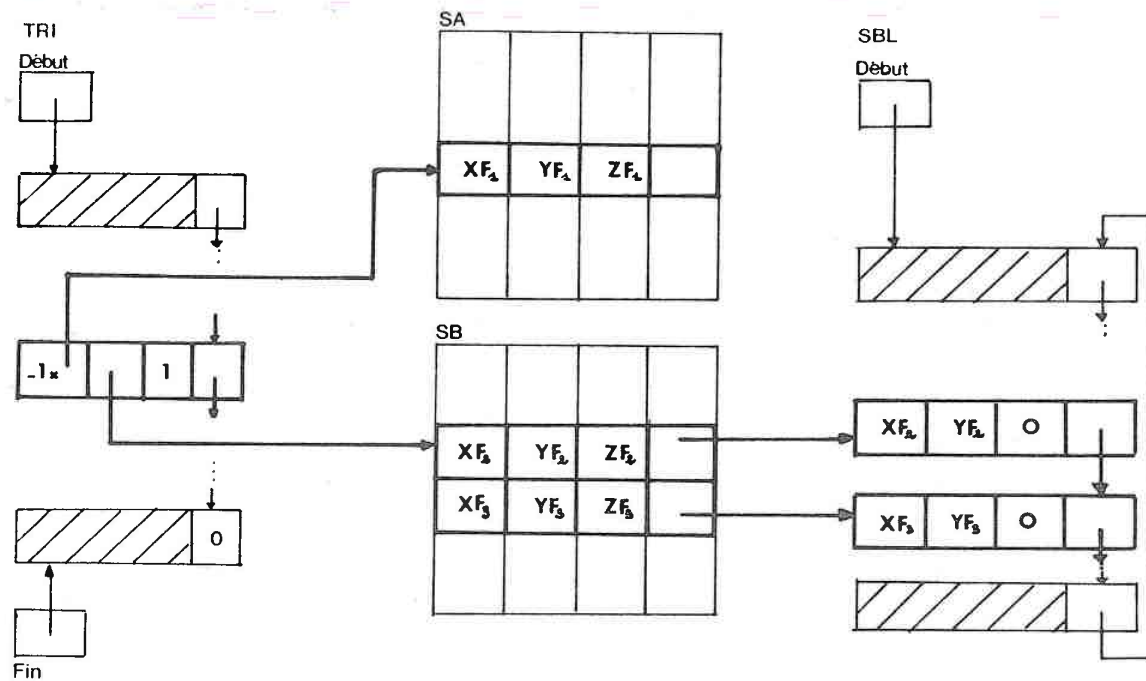
Ils s'insèrent dans les listes TRIAN et MASK de la manière représentée à la figure 10 (les traits gras représentent les modifications apportées dans les listes, ainsi que les liens établis entre les deux listes).

c - Création du nouveau contour externe ; visibilité des arêtes de $F_1 F_2 F_3$

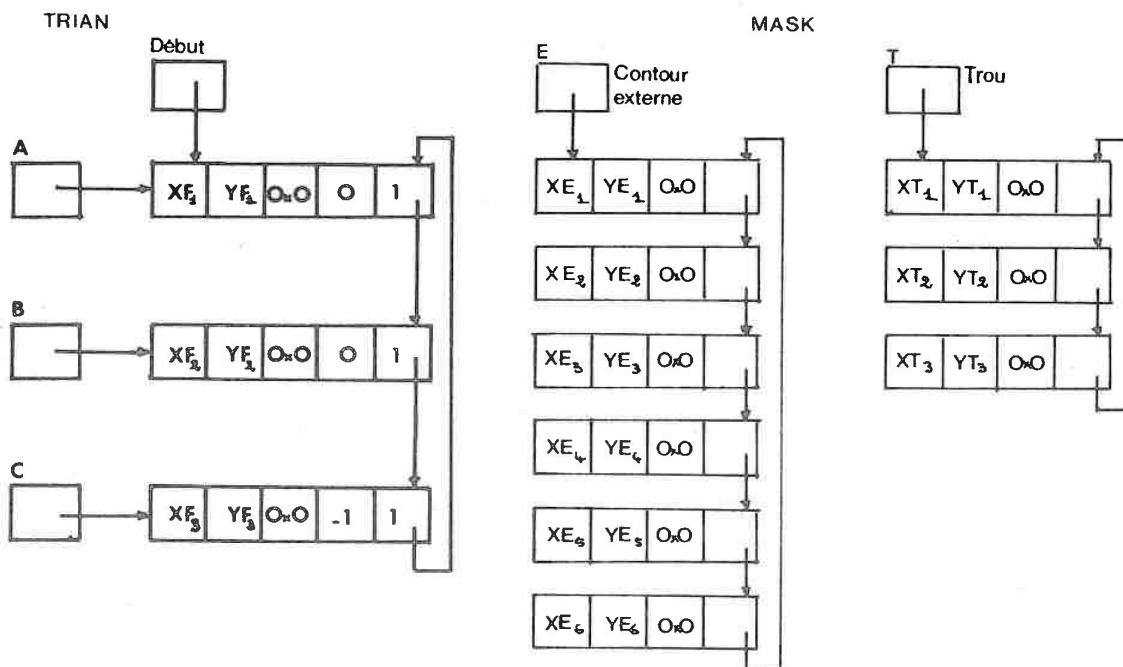
Partant de l'un quelconque des points d'intersection - par exemple I_1 - nous pouvons construire un nouveau contour du masque :

$I_1 E_1 I_2 I_3 E_3 E_4 E_5 I_4 F_3 F_1$.

L'étude de cette ligne montre qu'elle est orientée dans le sens rétrograde dans (XOY) ; il s'agit donc du nouveau contour externe du masque. Les arêtes du triangle qui feront partie de ce contour sont visibles, le résultat est représenté à la figure 11 - A.



a -



b -

Les informations concernant le triangle $F_1 F_2 F_3$ sont en gras.

FIGURE 9

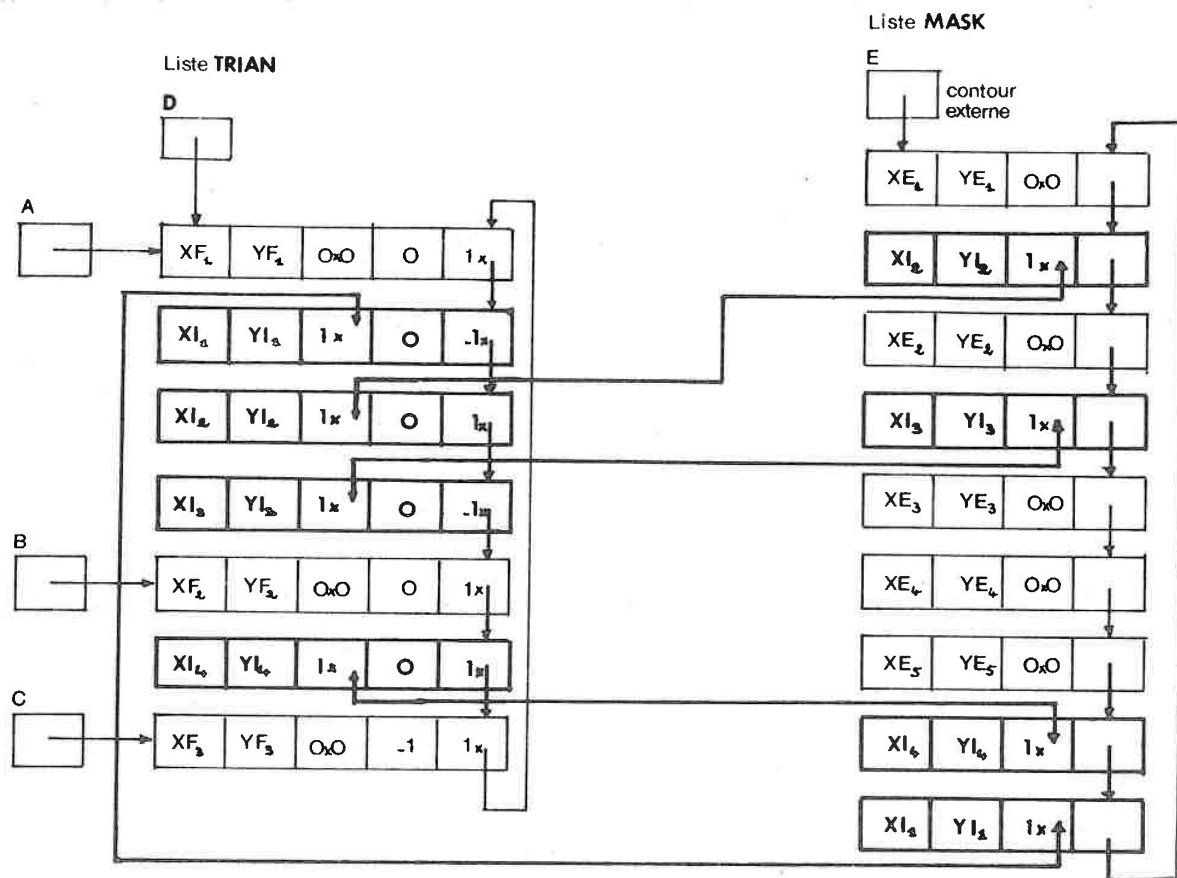


FIGURE 10

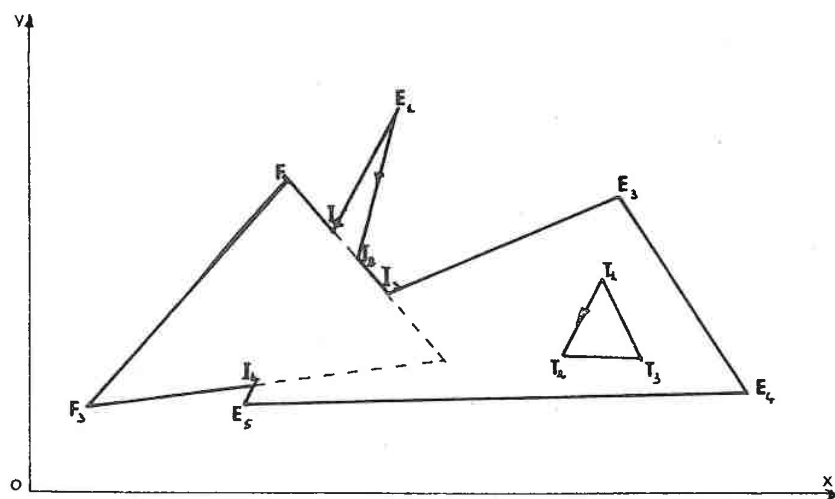
Après traitement de tous les points d'intersection entre triangle et contour externe du masque ; la liste TRIAN est modifiée ainsi que l'illustre la figure 11 - b.

d - Intersection du contour du trou et du contour du triangle

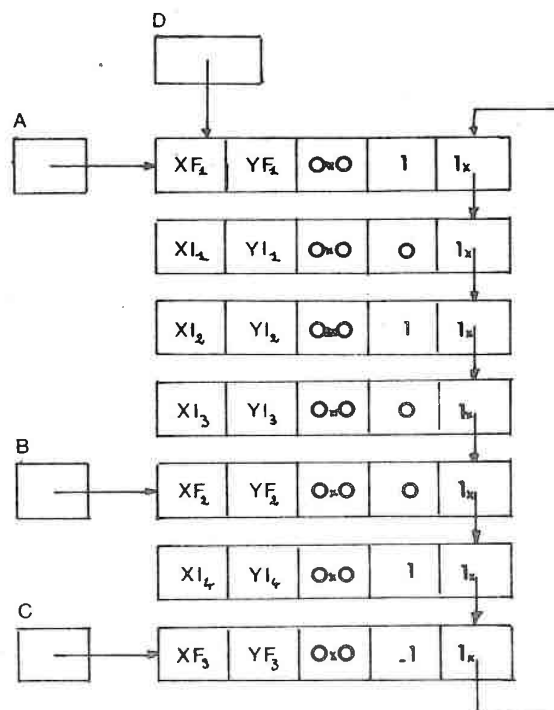
Cette intersection est vide ; de plus tout point du contour du trou est extérieur au triangle ; donc triangle et trou sont disjoints.

Les informations ne seront pas modifiées ; le traitement du triangle est terminé.

Le masque est décrit par , son contour externe ainsi qu'il est représenté à la figure 10 , et où les informations μ , P_T sont nulles, et par son contour de trou (figure (Figure 9 - b)).



a.



Liste TRIAN

b.

FIGURE 11

e - Mise à jour de la liste SBL et du tableau CA

Dans cette étape, il s'agit de compléter SBL et CA par la définition exacte de l'arête de section $F_2 F_3$ (dans SBL) et de l'arête de "pseudo contour" apparent $F_1 F_2$ (dans CA). (Figure 12).

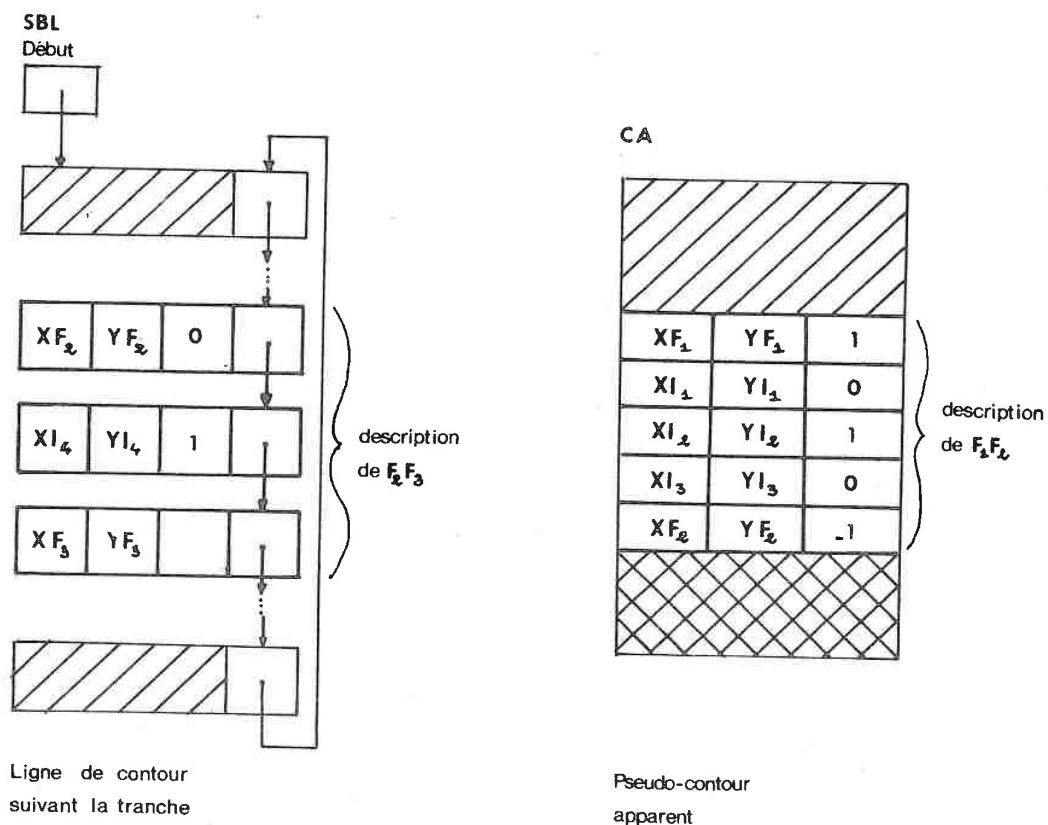


FIGURE 12

4 .

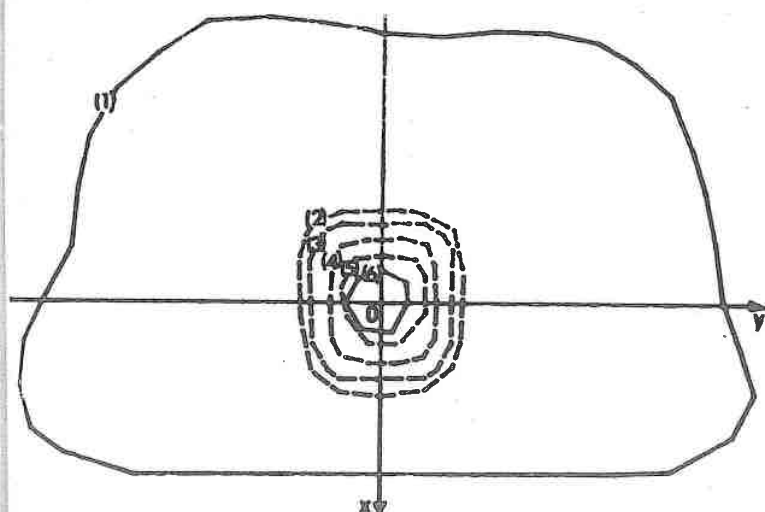
résultats

I - EXEMPLE TRAITE.

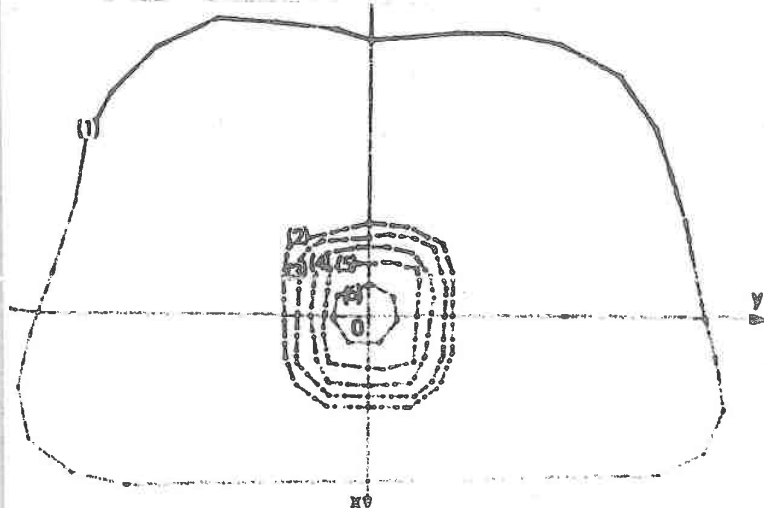
Dans les pages qui suivent , nous présentons les résultats obtenus en appliquant la méthode développée précédemment sur un exemple précis. L'objet global, se présente, dans ce cas, sous la forme de 6 objets élémentaires :

- le contour externe (thorax),
- le contour interne (oesophage)
- l'isodose 95%,
- l'isodose 90%,
- l'isodose 85%,
- l'isodose 80%,

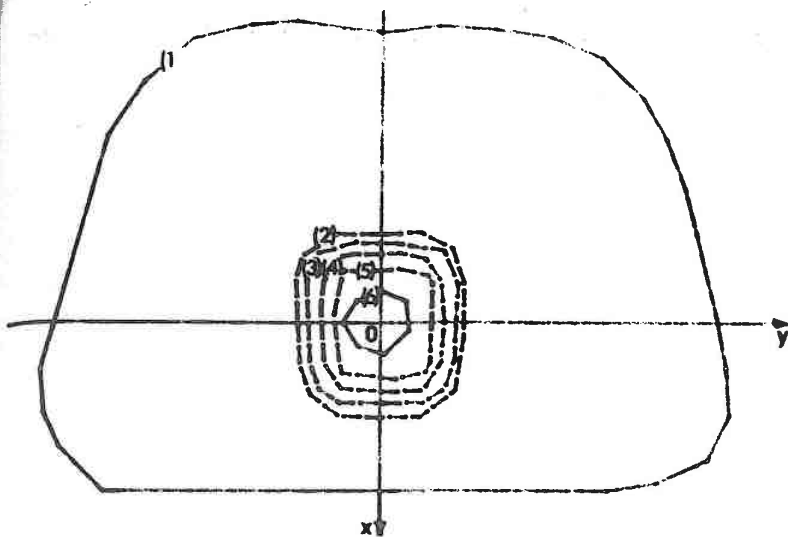
Chaque objet est défini dans un espace rapporté au système (Oxyz), dans des plans de coupe parallèles de cotes 5 cm., 3 cm., 0 cm., - 3 cm., - 5 cm. (figure 1).



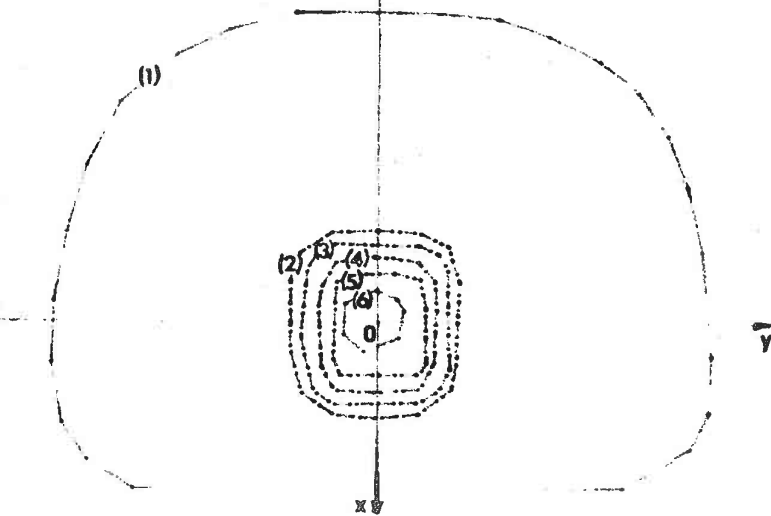
a - $z = 5$ cm.



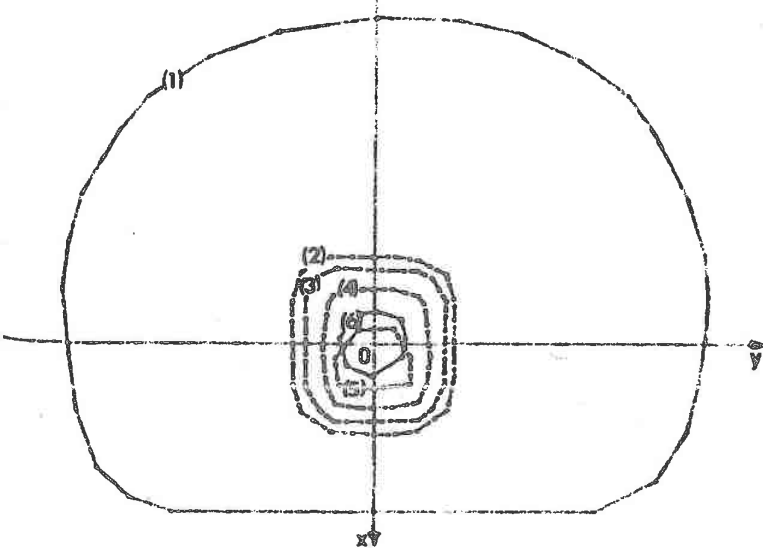
b - $z = 3$ cm.



c - $z = 0$ cm.



d - $z = - 3$ cm.



e - $z = - 5$ cm.

- (1) thoraxe
- (2) isodose 80%
- (3) isodose 85%
- (4) 90%
- (5) 95%
- (6) oesophage

échelle : 1/3

FIGURE 1

II - DEFINITION DE L'OBJET

Dans un premier temps , à partir des données initiales, nous avons approché les frontières de chaque objet élémentaire. Nous présentons dans ce paragraphe, les résultats obtenus pour le contour externe, l'oesophage et l'isodose 90 % .

Rappelons les notations suivantes :

Soit $E_1 = (P_1 \dots P_n)$ une suite de points coplanaires, $E_i(k,l)$ est le groupe complet de niveau i , $E_i(k,l) = (P_k P_{k+1} \dots P_{l-1} P_l)$.

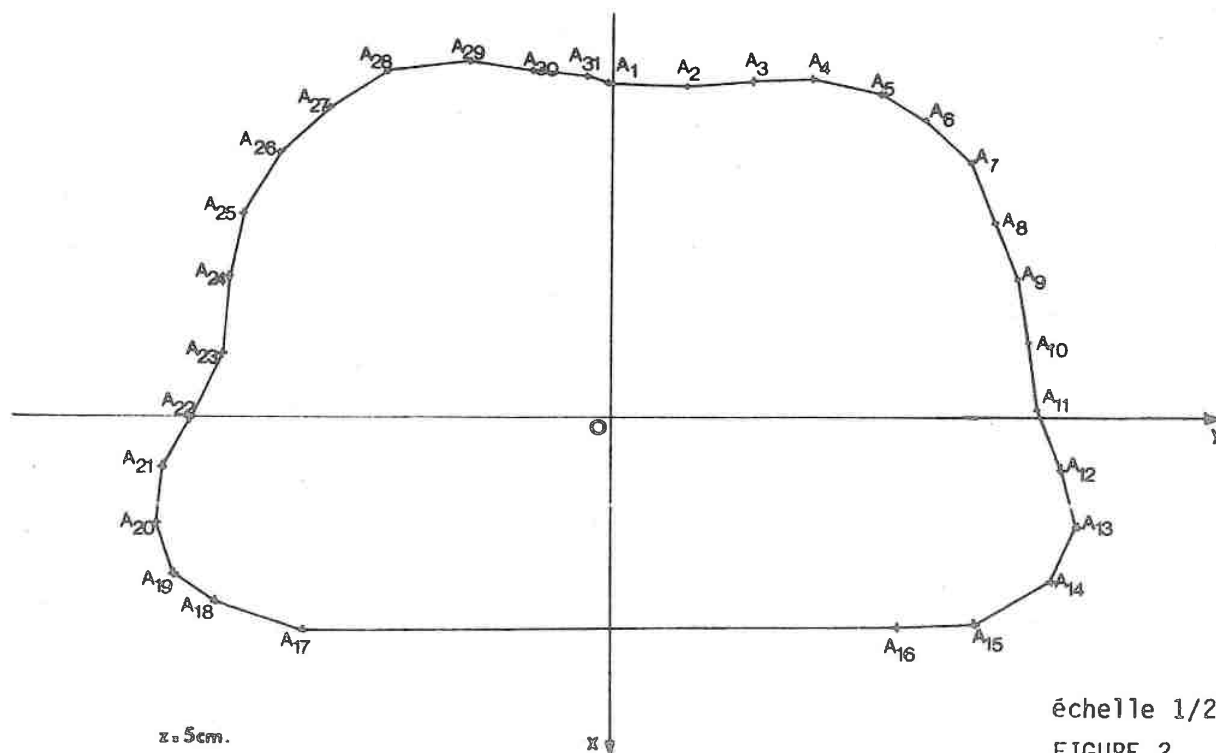
Si E est une suite de points définissant un polygone , alors nous notons $\mathcal{G}(E)$ l'enveloppe convexe de ce polygone .

1 - Définition du contour externe

1 - 1 - Traitement des lignes de contour

1 - 1 - 1 - Décomposition en sous-ensembles convexes de la 1ère ligne de contour ; $z = 5$ cm. (figure 2)

Soit L_1^1 cette ligne ; $L_1^1 = A_1 A_2 \dots A_{31}$



La décomposition en sous-ensembles convexes emboîtés est la suivante :

1er niveau :

$$\mathcal{G}(L_1^1) = A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9 A_{13} A_{14} A_{15} A_{16} A_{17} A_{18} A_{19} A_{20} A_{21} A_{25} A_{26} A_{27} A_{28} A_{29}$$

Il reste 3 groupes complets :

$$- L_2^1(9,13) = A_9 A_{10} A_{11} A_{12} A_{13}$$

$$- L_2^1(21,25) = A_{21} A_{22} A_{23} A_{24} A_{25}$$

$$- L_2^1(29,4) = A_{29} A_{30} A_{31} A_1 A_2 A_3 A_4$$

2ème niveau :

$$\mathcal{G}(L_2^1(9,13)) = A_9 A_{11} A_{13}$$

Il reste 2 groupes complets :

$$- L_3^1(9,11) = A_9 A_{10} A_{11}$$

$$- L_3^1(11,13) = A_{11} A_{12} A_{13}$$

$$\mathcal{G}(L_2^1(21,25)) = A_{21} A_{22} A_{23} A_{25}$$

Il reste 1 groupe complet :

$$- L_3^1(23,25) = A_{23} A_{24} A_{25}$$

$$\mathcal{G}(L_2^1(29,4)) = A_{29} A_1 A_2 A_4$$

Il reste 2 groupes complets:

$$- L_3^1(30,1) = A_{30} A_{31} A_1$$

$$- L_3^1(2,4) = A_2 A_3 A_4$$

3ème niveau :

$$\mathcal{G}(L_3^1(9,11)) = A_9 A_{10} A_{11}$$

$$\mathcal{G}(L_3^1(11,13)) = A_{11} A_{12} A_{13}$$

$$\mathcal{G}(L_3^1((23,25)) = A_{23} A_{24} A_{25}$$

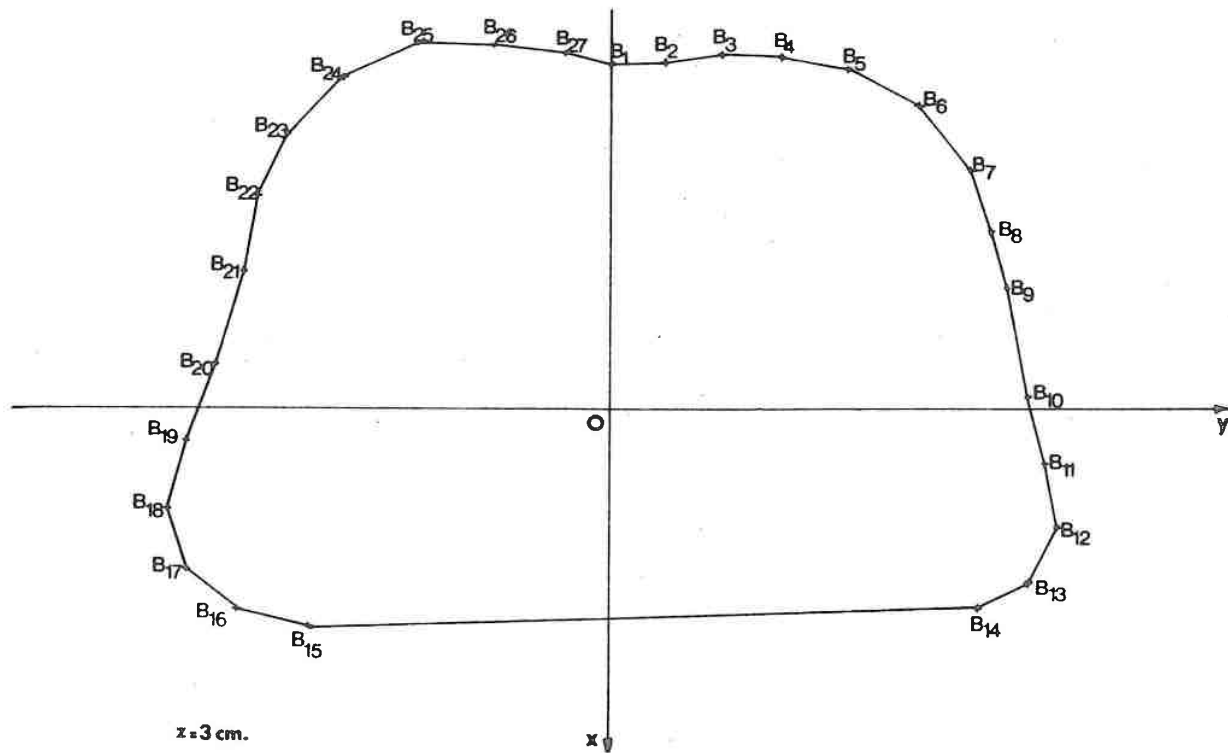
$$\mathcal{G}(L_3^1(30,1)) = A_{29} A_{30} A_{31} A_1$$

$$\mathcal{G}(L_3^1(2,4)) = A_2 A_3 A_4$$

1-1-2-Décomposition en sous-ensembles convexes de la 2^{ème} ligne de contour;

$z = 3\text{cm.}$ (figure 3)

$$L_1^2 = B_1 B_2 \dots B_{27}$$



échelle : 1/2

FIGURE 3

Les sous-ensembles calculés sont les suivants:

1er niveau

$$\mathcal{C}(L_1^2) = B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16} B_{17} B_{18} B_{19} B_{22} B_{23} B_{24} B_{25}$$

2ème niveau

$$\mathcal{C}(L_2^2(9,11)) = B_9 B_{10} B_{11}$$

$$\mathcal{C}(L_2^2(19,22)) = B_{19} B_{20} B_{21} B_{22}$$

$$\mathcal{C}(L_2^2(25,4)) = B_{25} B_1 B_4$$

3ème niveau

$$\mathcal{C}(L_3^2(25,1)) = B_{25} B_{26} B_{27} B_1$$

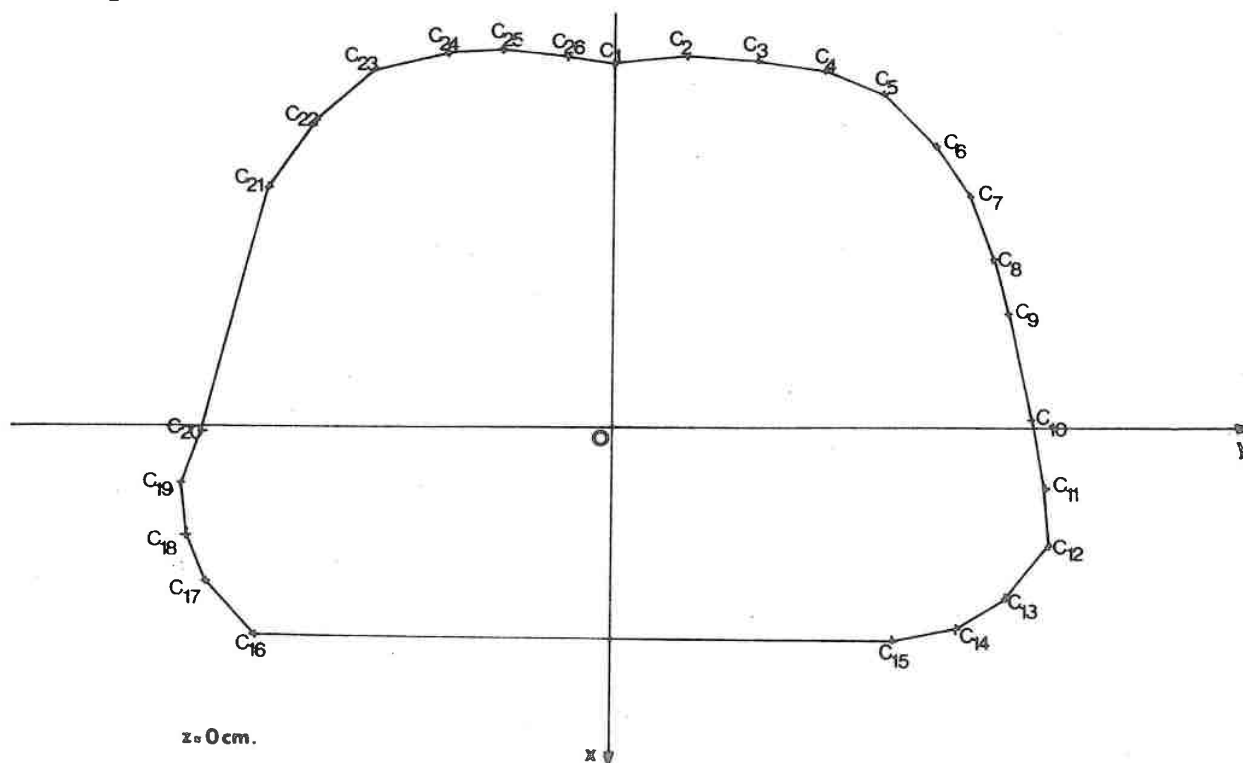
$$\mathcal{C}(L_3^2(1,4)) = B_1 B_3 B_4$$

4ème niveau

$$\mathcal{G}(L_4^2(1,3)) = B_1 B_2 B_3$$

1-1-3- Décomposition en sous-ensembles convexes de la 3ème ligne de contour ;
 $z = 0 \text{ cm.}$ (figure 4)

$$L_1^3 = C_1 C_2 \dots C_{26}$$



échelle 1/2

FIGURE 4

Les sous-ensembles convexes sont les suivants:

1er niveau

$$\mathcal{G}(L_1^3) = C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8 C_9 C_{10} C_{11} C_{12} C_{13} C_{14} C_{15} C_{16} C_{17} C_{18} C_{19} C_{21} C_{22} C_{23} C_{24} C_{25}$$

2ème niveau

$$\mathcal{G}(L_2^3(19,21)) = C_{19} C_{20} C_{21}$$

$$\mathcal{G}(L_2^3(25,2)) = C_{25} C_1 C_2$$

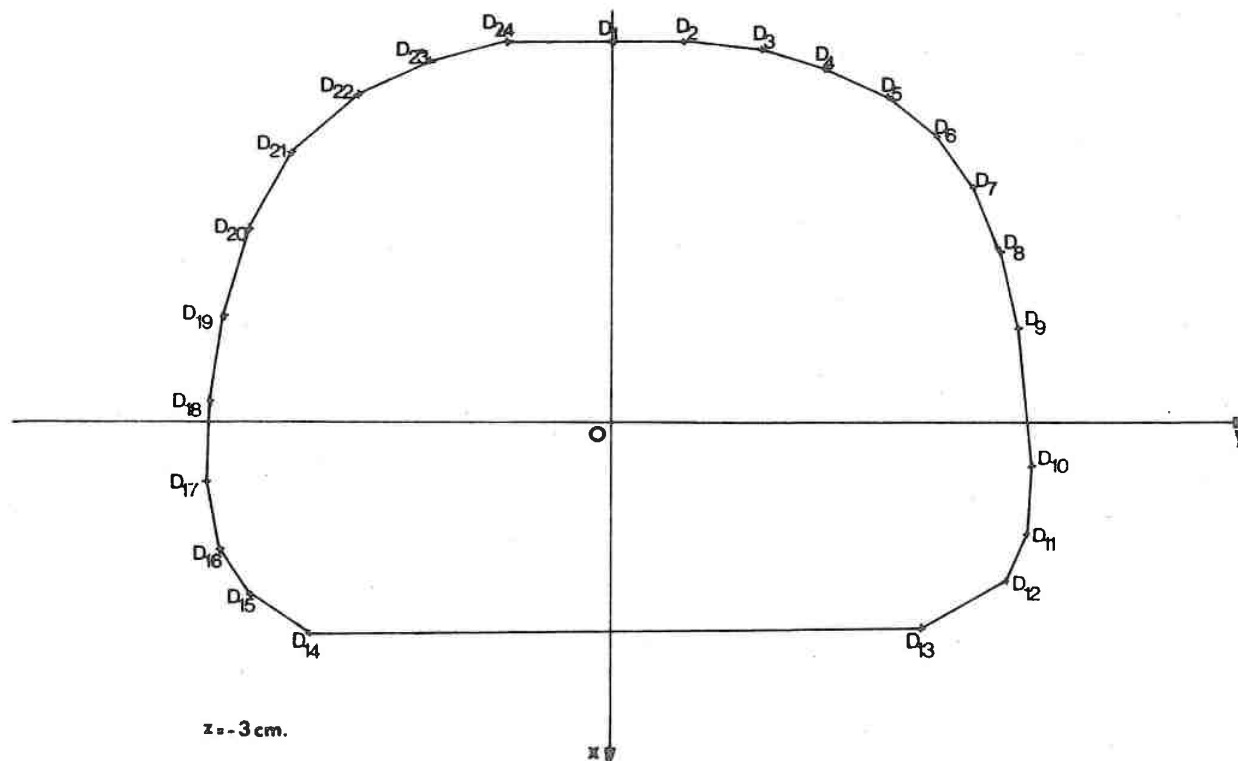
3ème niveau

$$\mathcal{G}(L_3^3(25,1)) = C_{25} C_{26} C_1$$

1-1-4- Décomposition en sous-ensembles convexes de la 4ème ligne de contour;

$z = -3\text{cm.}$ (figure 5)

$$L_1^4 = D_1 D_2 \dots D_{24}$$



échelle 1/2

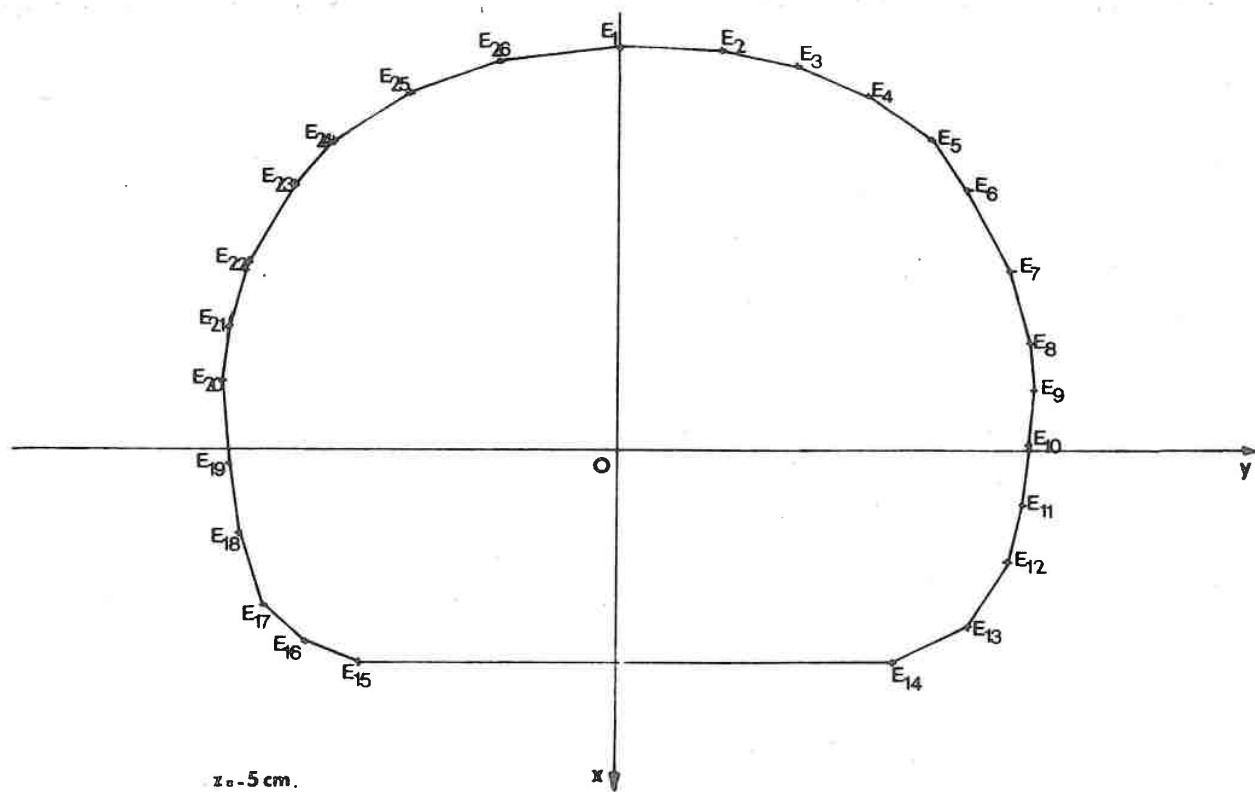
FIGURE 5

L_1^4 est convexe.

1-1-5- Décomposition en sous-ensembles convexes de la 5ème ligne de contour;

$z = -5\text{cm.}$ (figure 6)

$L_1^5 = E_1 E_2 \dots E_{26}$ est convexe.

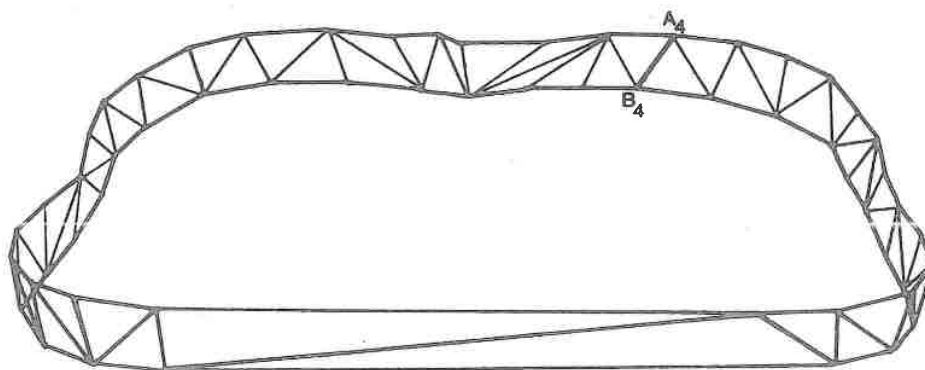


échelle 1/2

FIGURE 6

1-2- Définition de l'objet entre les lignes de contour.

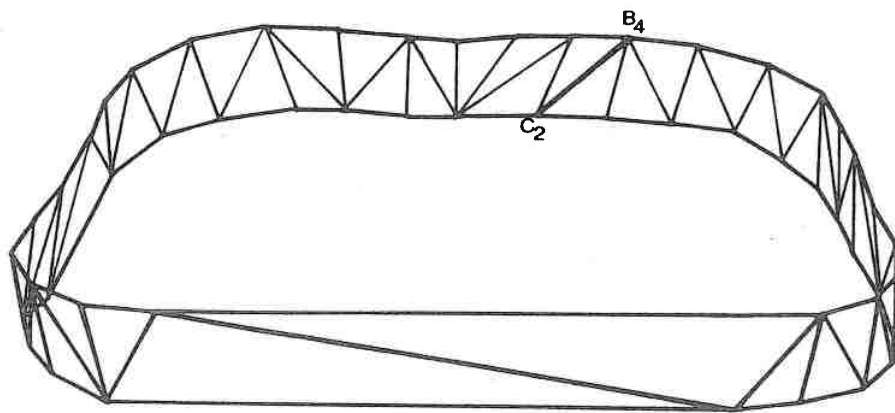
Soit $\mathcal{C}_i$ la suite des triangles générés entre la i ème et la $i+1$ ème ligne de contour. La figure 7 donne une représentation en perspective des suites $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$.



$\mathcal{C}_1$

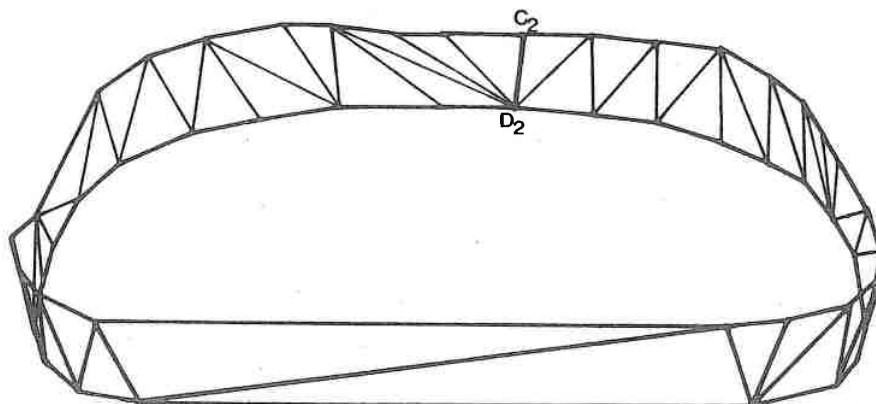
$A_4 B_4$: arête initiale

FIGURE 7



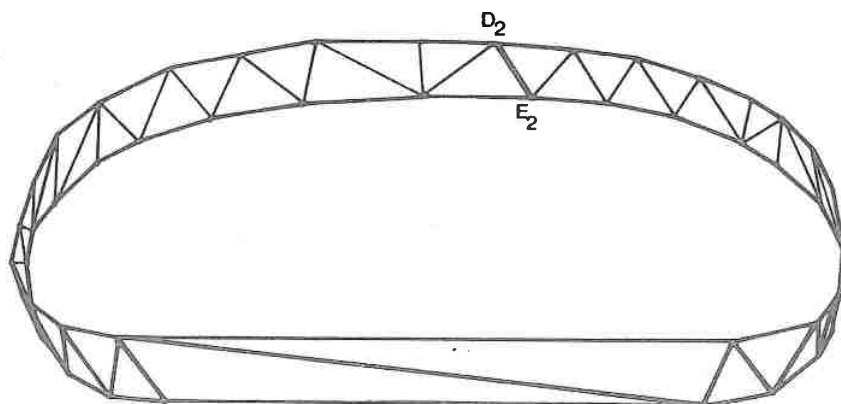
b.

$\mathcal{C}_2$
 $B_4 C_2$: arête initiale



c.

$\mathcal{C}_3$
 $C_2 D_2$: arête initiale



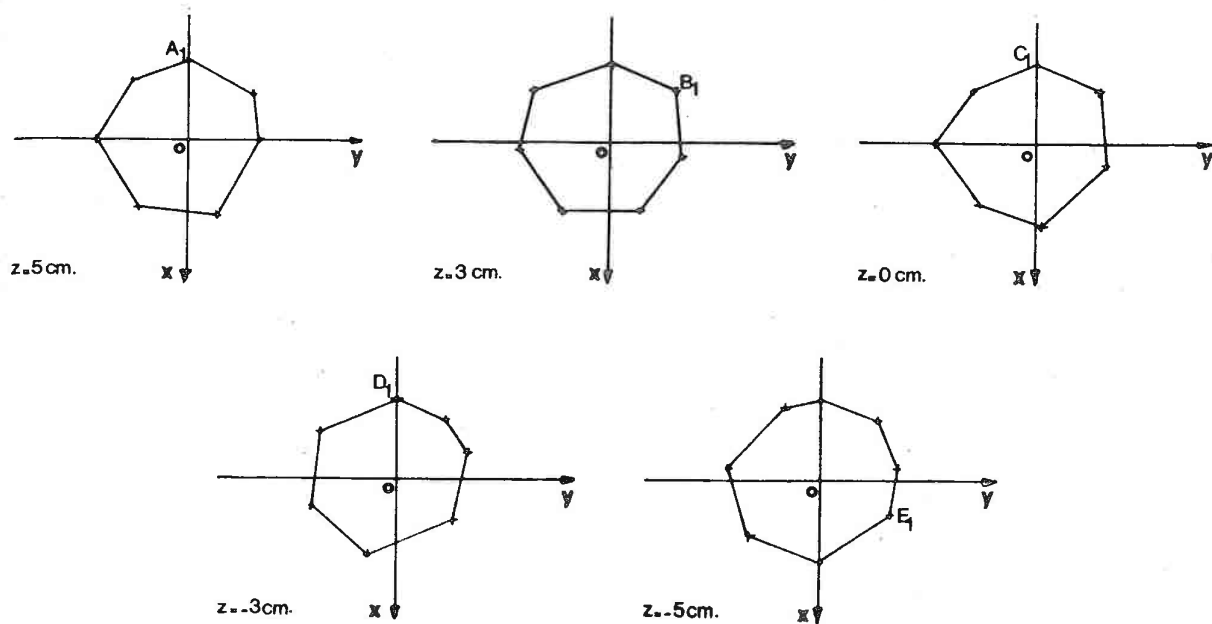
d.

$\mathcal{C}_4$
 $D_2 E_2$: arête initiale

FIGURE 7

2 - Définition du contour interne

nous voyons sur la figure 8 que dans chaque plan de coupe, la suite des points donnés définit des polygones convexes.



échelle 1/1

FIGURE 8

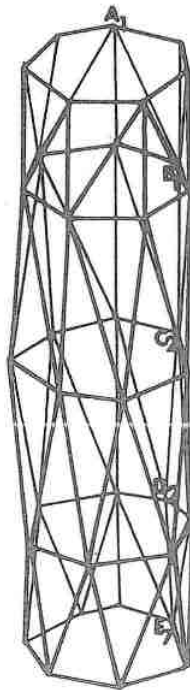


FIGURE 9

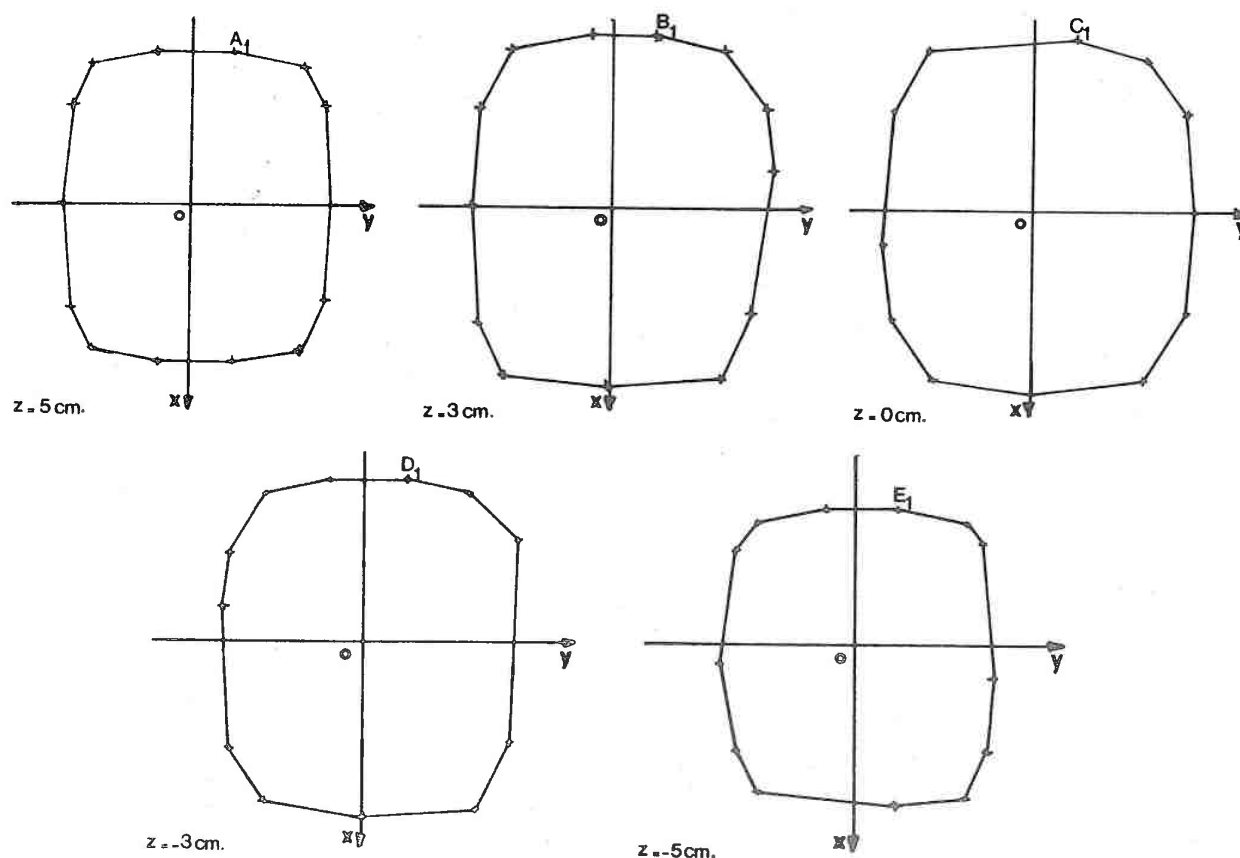
La figure 9 représente en perspective l'ensemble des triangles approchant les frontières de cet objet.

Les arêtes initiales dans chaque tranche sont :

$A_1 B_1$, $B_1 C_2$, $C_2 D_2$, $D_2 E_7$.

3 - Définition de l'isodose 90%.

Dans chaque plan de coupe, les polygones sont convexes. (figure 10).



échelle 1/1

FIGURE 10

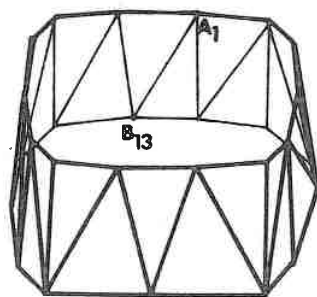
Les frontières de l'objet sont approchées à l'aide de la suite de triangles représentés en perspective à la figure 11.

L'arête initiale de la 1ère tranche est $A_1 B_{13}$. (FIGURE 11 - a).

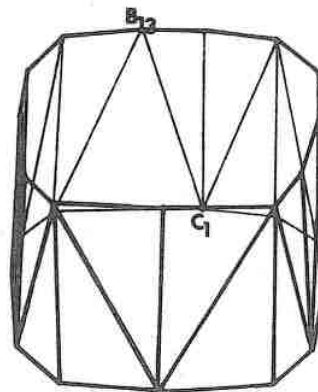
- - - 2ème - - $B_{13} C_1$. (FIGURE 11 - b).

L'arête initiale de la 3ème tranche est $C_1 D_1$. (FIGURE 11 - c).

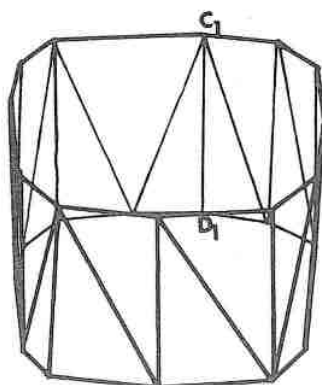
- - - 4ème - - $D_1 E_1$. (FIGURE 11 - d).



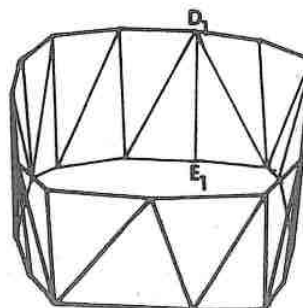
a.



b.



c.



d.

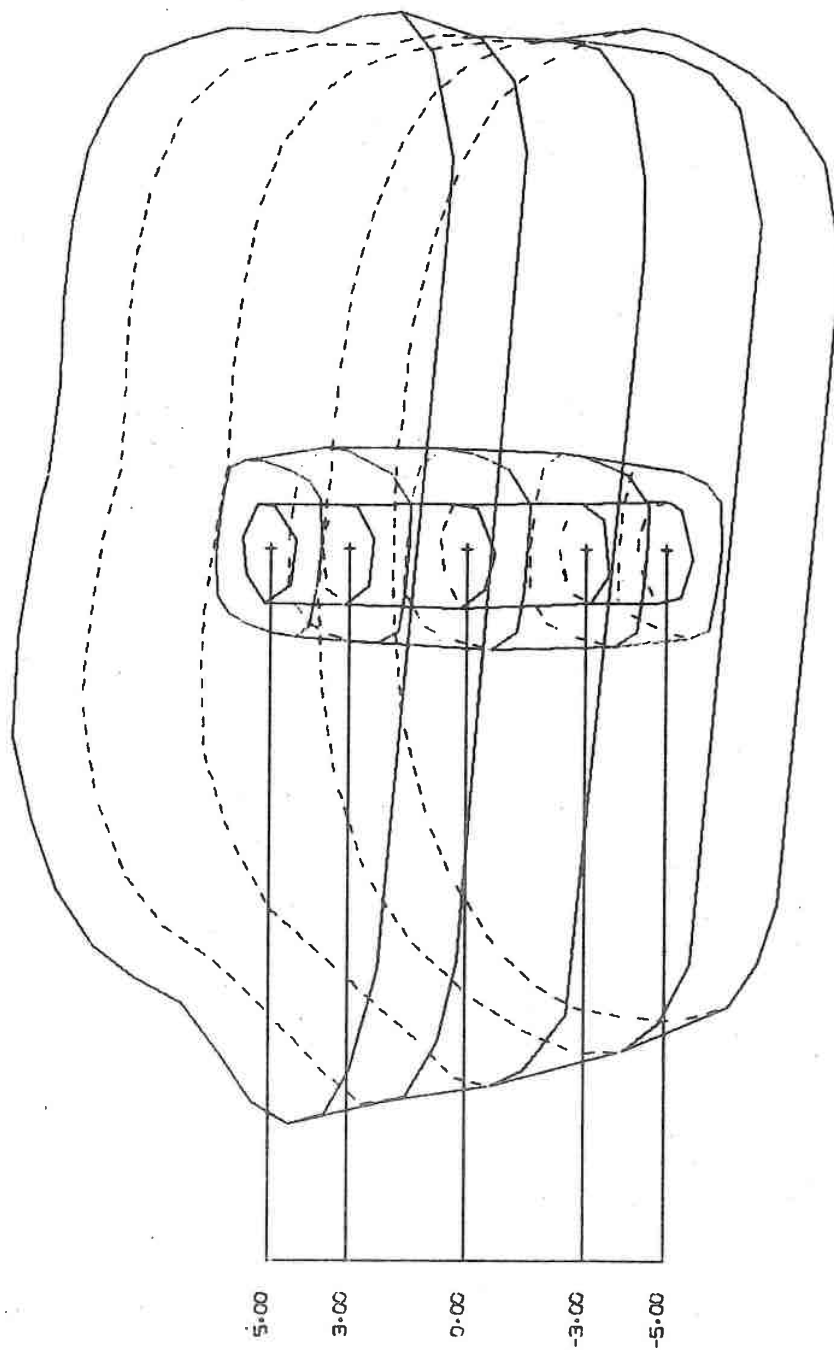
FIGURE 11

III - ELABORATION DES IMAGES.

Nous présentons, dans ce paragraphe, quelques images obtenues à l'aide de notre algorithme, à partir des informations précédentes.

Dans les figures 12 - a, 12 - b, 12 - c, les arêtes cachées sont tracées en pointillés.

Ces arêtes ne sont pas tracées dans les figures 12 - d, 12 - e, 12 - f.



NOM OESOPHAGE 150009290

ANGLES DE VISION THETA= 10·DEGRES
PHI= 30·DEGRES

ECHELLE 1 CM· REPRESENTE 1·0 CM·

FIGURE 12 - a

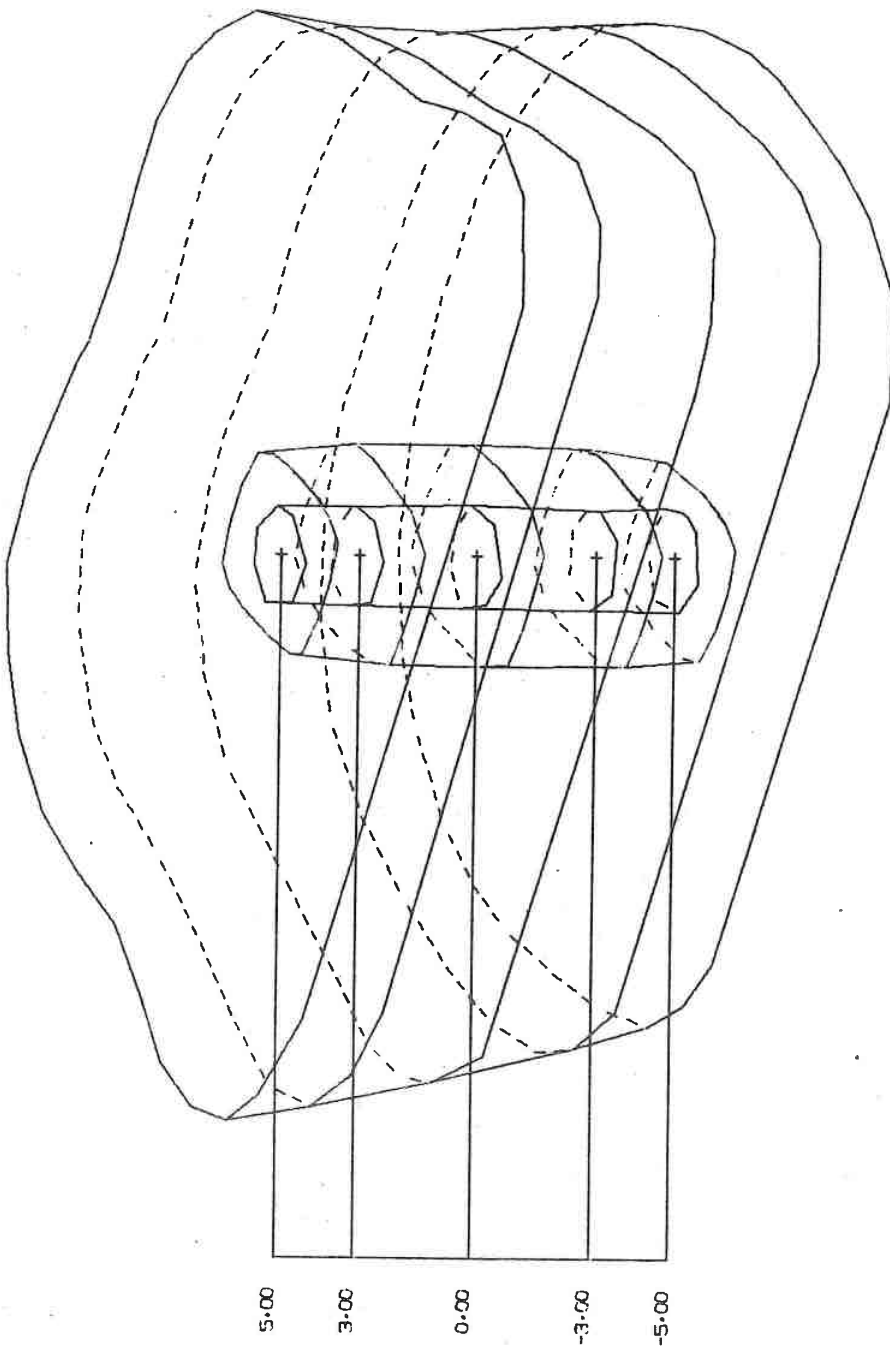
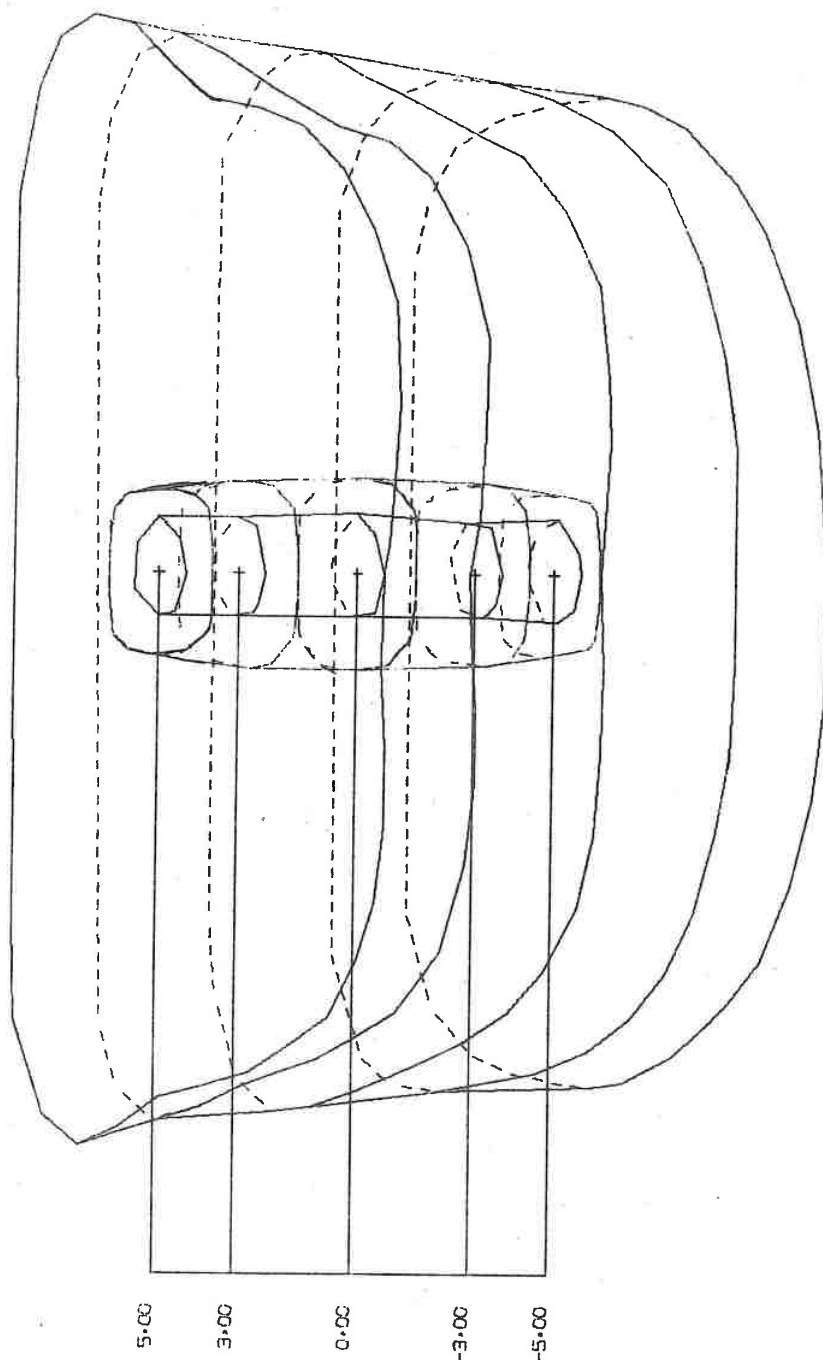


FIGURE 12 - b



NOM OESOPHAGE TS00009E90

ANGLES DE VISION THETA= 180. DEGRES
PHI= 30. DEGRES

ECHELLE 1 CM. REPRESENTA 1.0 CM.

FIGURE 12 - c

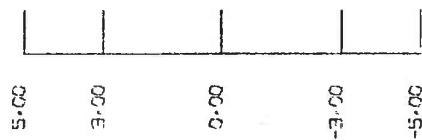
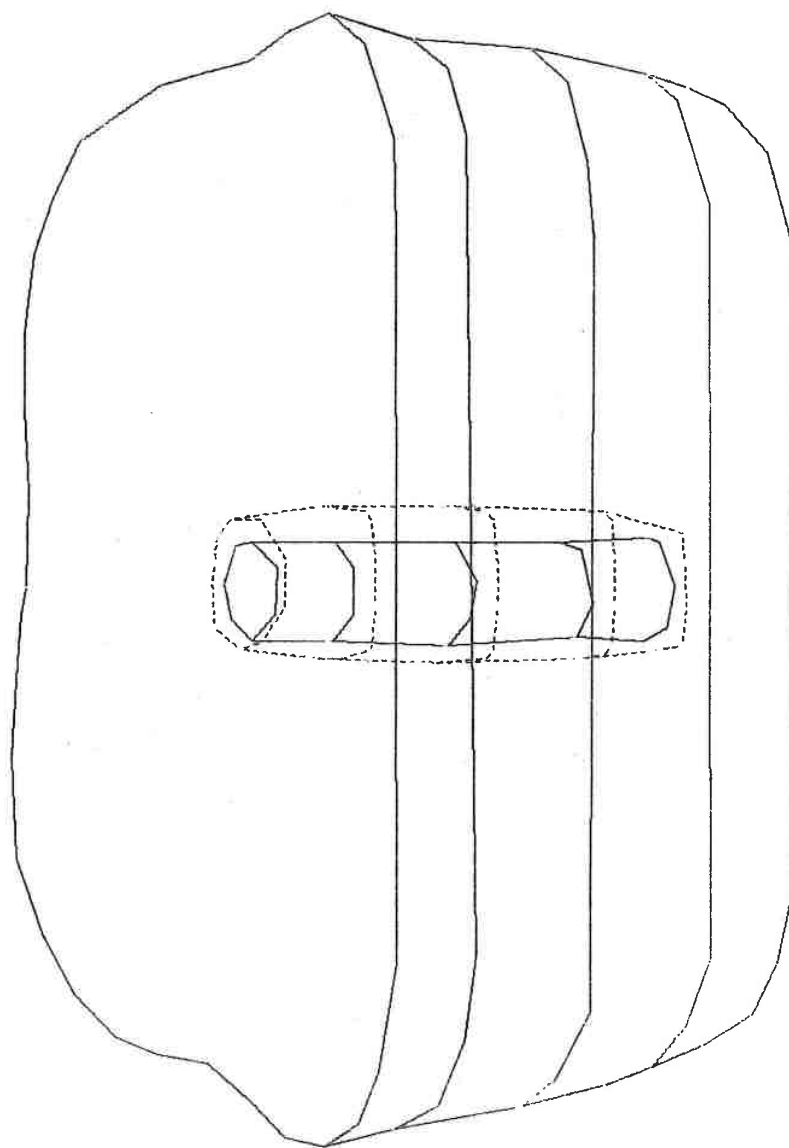


FIGURE 12 - d

ISODOSE 95

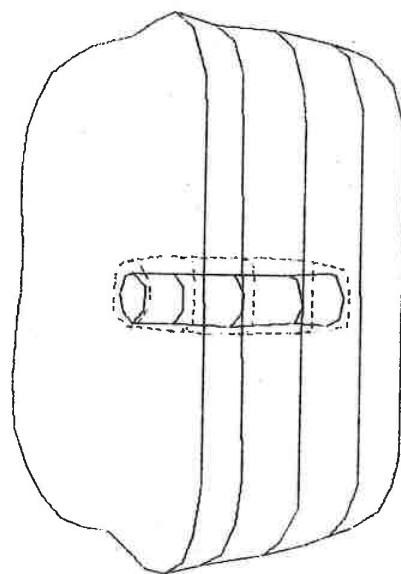
NOM OESOPHAGE

ANGLES DE VISION THETA= 0.0 DEGRES

PHI= 30.0 DEGRES

ECHELLE 1 CM. REPRESENTE 1.0 CM.

5.00
3.00
2.00
00.00
00.00

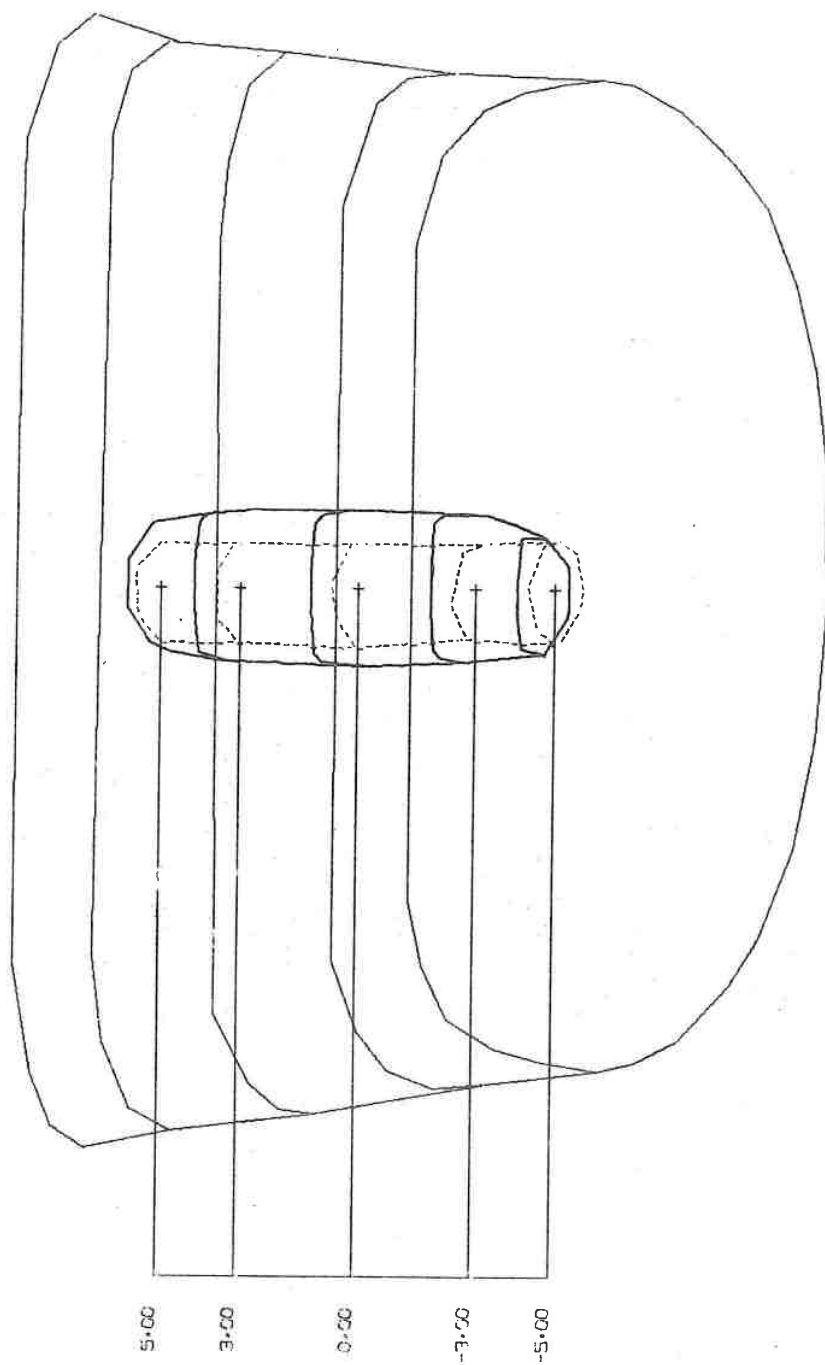


NOM OESOPHAGE ISODOSE 95

ANGLES DE VISION THETA= 0.0 DEGRES
PHI= 30.0 DEGRES

ECHELLE 1 CM. REPRESENTE 2.0 CM.

FIGURE 12 - e



NOM OESOPHAGE ISODOSES

ANGLES DE VISION THETA= 0. DEGRES
PHI= -30. DEGRES

ECHELLE 1 CM. REPRESENTE 1.0 CM.

FIGURE 12 - f

conclusions

Le projet que nous avons développé se présente , en fait, sous deux aspects :

- l'approximation des frontières d'un objet défini dans des plans parallèles.
- la visualisation de l'image d'un tel objet, réalisé en traçant certaines arêtes du polyèdre.

Nous pouvons remarquer que , pour le premier problème, la solution que nous avons proposée a une portée suffisamment étendue pour permettre, par la suite d'autres types de visualisation d'une image. Il est en effet possible, à partir de la décomposition en triangles de la surface du polyèdre, de produire , sur console de visualisation graphique, une image de ce polyèdre en développant un algorithme de recherche de faces visibles avec construction des ombres sur le polyèdre.

Dans les problèmes de visualisation d'objet de l'espace, un point important est la représentation interne de l'objet. Dans la méthode que nous avons établie, nous utilisons une représentation de l'objet qui occupe peu de places : tableaux des coordonnées des sommets du polyèdre et liste de ses faces.

Enfin , nous pouvons situer notre algorithme de calcul d'images parmi les algorithmes existants en exploitant la classification de I. E. Sutherland [10] ; nous avons élaboré une méthode de résolution exacte , permettant l'élimination des lignes cachées , ce qui l'apparente aux algorithmes de Galimberti et Montanari [6] ; afin de faciliter le traitement et d'éviter les comparaisons de toutes les arêtes avec toutes les faces, nous avons introduit le calcul d'une liste de priorité des faces.

Notons qu'un algorithme de résolution exacte, s'il est un peu plus couteux en temps de calcul, permet de produire des images ou des parties d'image qui peuvent être considérablement agrandies sans perdre de qualité ; la précision des calculs (virgule flottante) étant en effet supérieure à la résolution du du périphérique utilisé.

bibliographie

- 1 C. BERGE
Théorie des graphes et ses applications.
(Dunod, 1963)
- 2 M. BOUIX
Géométrie analytique.
(Editions Claude Hermant)
- 3 R. FAURE
Précis de recherche opérationnelle.
(Dunod, 1979)
- 4 E. KEPPEL
Approximating Complex Surfaces by Triangulation of Contour Lines.
(IBM Journal of research and development, janvier 1975)
- 5 M. LERAY
Génération en temps réel d'images synthétiques tridimensionnelles.
(Journées d'études AFCET, avril 1976)
- 6 P. MORVAN, M. LUCAS
Images et ordinateur.
(Larousse, 1976)
- 7 W. M. NEWMAN, R.F. SPROULL
Principles of Interactive Computer Graphics.
(Mc Graw - Hill Book Company, 1979)
- 8 C. PAIR, J. C. DERNIAME
Etude des problèmes de cheminement dans les graphes finis.

- 9 C. PAIR
Structures de données et algorithmes fondamentaux.
- 10 I. E. SUTHERLAND, R.F. SPROULL, R. A. SCHUMACKER
A Charaterization of Ten Hidden-Surface Algorithms.
(Computing Surveys, Vol. 6, No. 1, Mars 1974).

NOM DE L'ETUDIANT : SIMONOT Françoise

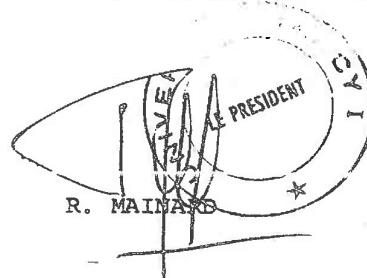
NATURE DE LA THESE : Doctorat de spécialité
Mathématiques Appliquées

VU, APPROUVE

ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 19 Mai 1981 - 1894

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I,



A circular stamp of the University of Nancy I is visible, containing the text "UNIVERSITE DE NANCY I" and "LE PRESIDENT" with a star. Overlaid on the stamp is a handwritten signature and the printed name "R. MAINARD".

R. MAINARD