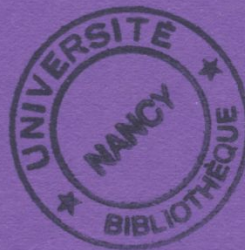


Sc N 80 / 126 A

ISATION EN RADIOTHERAPIE CINÉTIQUE

PAR PROGRAMMATION LINÉAIRE

EN VARIABLES BOOLEENNES



THESE

pour l'obtention du

DOCTORAT DE 3^{ème} CYCLE INFORMATIQUE

Soutenue le 17 Décembre 1980

par

Michel SCOUTELIS

MEMBRES DU JURY

PRÉSIDENT : M. J. LEGRAS
EXAMINATEURS : MM. C. GILORMINI
G. TISSIER

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1



D 095 180207 4

OPTIMISATION EN RADIOTHERAPIE CINÉTIQUE
PAR PROGRAMMATION LINÉAIRE
EN VARIABLES BOOLEENNES



THESE

pour l'obtention du

DOCTORAT DE 3^{ème} CYCLE INFORMATIQUE

Soutenue le 17 Décembre 1980

par

Michel SCOUTELIS

MEMBRES DU JURY

PRÉSIDENT : M. J. LEGRAS
EXAMINATEURS : MM C. GILORMINI
G. TISSIER

ΣΤΟΥΣ ΓΟΝΕΙΣ ΜΟΥ

ΛΙΤΣΑ

ΚΑΙ

ΞΕΝΟΦΩΝ

Que Monsieur le Professeur J. LEGRAS soit assuré de ma profonde gratitude pour la formation qu'il m'a donnée en me dirigeant dans ce travail, l'aide et les conseils qu'il a bien voulu me prodiguer.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur C. GILORMINI qui a bien voulu me faire l'honneur de participer au Jury de cette thèse.

Que Monsieur G. TISSIER soit sincèrement remercié pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, et l'honneur qu'il me fait en acceptant de siéger dans ce Jury.

Je remercie vivement M. COILLAND pour ses conseils et ses critiques.

Je remercie Monsieur le Professeur J. MARTIN des facilités accordées pour l'utilisation du matériel de la section d'Informatique Médicale de la Faculté de Médecine, ainsi que tous mes camarades de ce Laboratoire.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes Amis du Laboratoire d'Informatique de la Faculté des Sciences de NANCY I, pour la sympathie qu'ils m'ont toujours témoignée.

J'adresse à Madame D. MARCHAND mes remerciements les plus vifs, pour le soin, la gentillesse et la patience dont elle a fait preuve pour mener à bien la dactylographie et le tirage de cette thèse.

Sommaire

Introduction

SOMMAIRE

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	
CHAPITRE I - DOSIMETRIE ET OPTIMISATION EN RADIO- THERAPIE CINETIQUE.	
I.1 Description rapide du procédé étudié.	1
I.2 Schématisation et modélisation.	4
I.3 Introduction des variables booléennes.	6
CHAPITRE II - OPTIMISATION.	
II.1 Support d'optimisation.	7
II.2 Contraintes.	8
II.3 Choix de la fonction objectif.	9
II.4 Choix d'une méthode d'optimisation.	10
II.5 Comparaison avec les méthodes classiques.	12
II.6 Remarques sur le choix de T.	12
CHAPITRE III - METHODE D'OPTIMISATION EN VARIABLES BOOLENNES.	
III.1 Généralités.	15
III.2 Méthode SEP.	17
III.3 Définition et évolution de la borne.	23
III.4 Algorithme.	26
III.5 Initialisation - fin d'itérations.	32
III.6 Application numérique.	32

CHAPITRE IV - ESSAIS ET RESULTATS

IV.1	Notions préliminaires.	39
IV.2	Comparaison des deux premières fonctions objectifs.	42
IV.3	Isodoses.	47

CHAPITRE V - DOSSIER DE PROGRAMMATION

V.1	Introduction.	55
V.2	Description des modules.	57
V.3	Tableau récapitulatif.	75

<u>ANNEXE</u>	- CALCULS SPECIFIQUES AU CALCUL DE LA DOSE DE REFERENCE.	77
---------------	---	----

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons est l'adaptation d'une technique de programmation linéaire en variables booléennes à un problème médical.

Il s'agit d'irradier un domaine à l'aide d'un émetteur de rayons X en rotation uniforme, l'émission de rayons X pouvant être ou non occultée selon les positions.

La dose totale reçue en un point pourra se mettre sous la forme $T \cdot \sum_j d_{ij} \cdot x_j$ où x_j est égale à zéro ou à 1 et où T est une constante qui dépend en particulier de la vitesse de rotation de l'appareil.

Il s'agira alors de minimiser une expression de la forme $T \cdot \sum_j c_j x_j$ sous les contraintes

$$T \cdot \sum_j a_{ij} x_j \geq \text{ou} \leq b_i.$$

Les inconnues sont les couples (T, X), le problème ainsi posé est difficilement soluble. La méthode que nous développons consiste à se fixer T et à calculer le sous-optimum correspondant en cherchant X comme solution d'un problème de programmation linéaire à variables booléennes, dit problème du knapsack.

Nous commencerons par préciser la formulation du problème (chapitres I, II), puis à décrire l'algorithme (chapitre III).

Au quatrième chapitre, nous donnerons et commenterons quelques résultats et enfin au chapitre V, nous établirons le dossier de programmation du traitement mis en œuvre.

CHAPITRE I

DOSIMETRIE ET OPTIMISATION
EN RADIOTHERAPIE CINETIQUE

I - DOSIMETRIE et OPTIMISATION en RADIOTHERAPIE

CINETIQUE

I.1 DESCRIPTION RAPIDE DU PROCEDE ETUDIE

Il s'agit d'une source émettrice (fig. 1) de rayons X en rotation uniforme dans un plan appelé "Plan de traitement" (fig. 2) et nous supposons avoir la possibilité d'occulter cette source sur certains arcs (fig. 3). Nous supposons de plus que l'axe des faisceaux émis par ces sources passent par l'axe de rotation.*

On se propose pour une vitesse de rotation et un mode de fonctionnement choisi de définir les secteurs sur lesquels il faut occulter la source pour que la répartition des doses reçues soit satisfaisante, c'est-à-dire telle que nous ayons :

α : en chaque point de la tumeur une dose supérieure
en un seuil fixé b_t

β : en chaque point des organes sensibles une dose
inférieure en un seuil choisi $b_{o.s}^k$ associé à
l'organe.

* L'axe de rotation est le "point de référence" pour les traitements en DSA (distance source-axe).

La TELE - THERAPIE

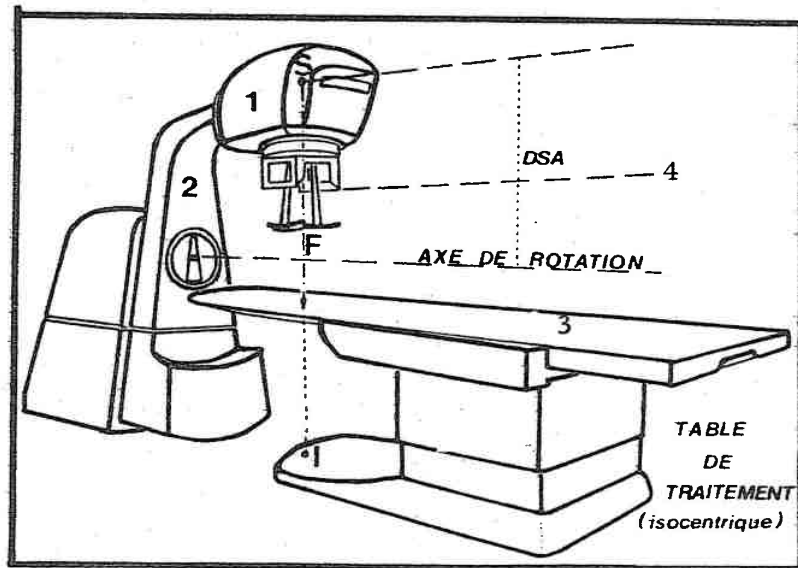


FIG. 1

Schéma du principe général d'un appareil utilisé en radiothérapie

S. source : En pratique courante on utilise essentiellement des radiations électromagnétiques (R_X , R_γ) et les électrons.

1. Tête

2. Bras

3. Plateau

4. Axe de Rotation

I. Centre de Rotation de la Table

F. Axe du Faisceau passant par I.

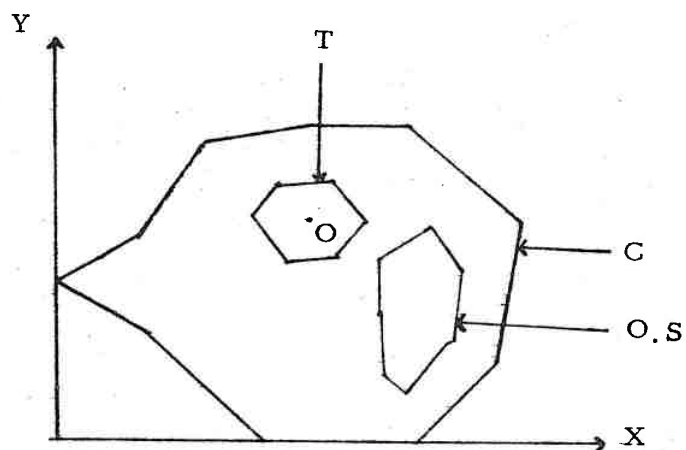


FIG. 2 - Contour du sujet

- (XY) . Plan de traitement
 T . Tumeur
 O.S . Organe sensible
 C . Contour du domaine irradié
 O . Centre de rotation de la source.

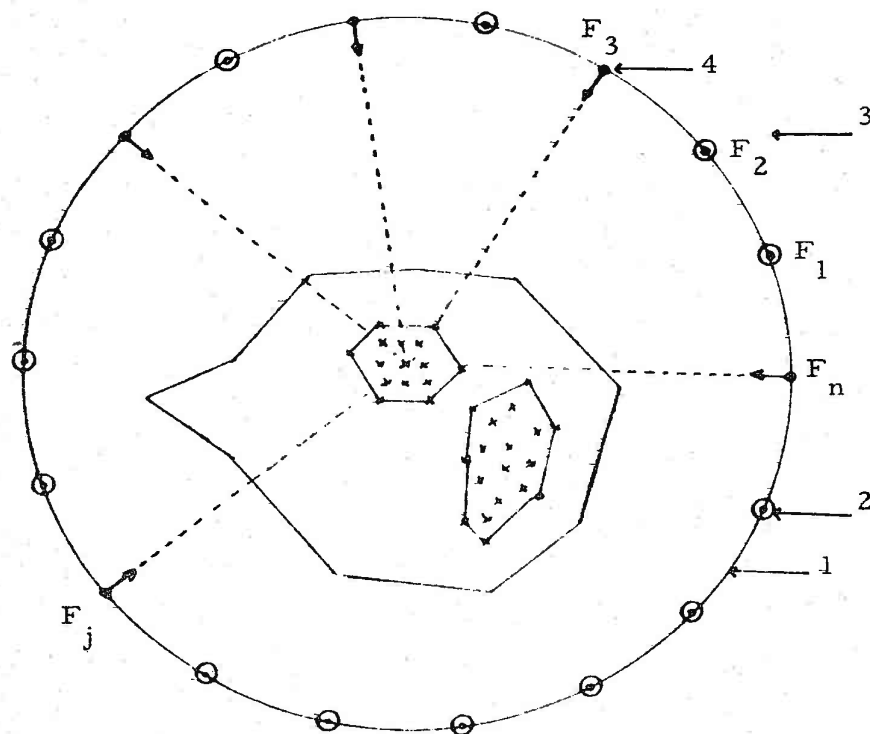


FIG. 3

1. Cercle décrit par la source
2. Source occultée
3. Deuxième faisceau
4. Source non occultée.

1.2 SCHEMATISATION et MODELISATION

Nous supposons :

1°) que le cercle décrit par l'appareil peut être partagé en N arcs égaux, suffisamment nombreux (nous utiliserons 18 arcs de 20° à 20°) et tel que sur chaque arc l'appareil sera soit occulté, soit en activité.

2°) que l'action de l'appareil pendant qu'il décrit un arc, est équivalente à l'émission d'une source unique placée au milieu de l'arc (discrétisation du problème).

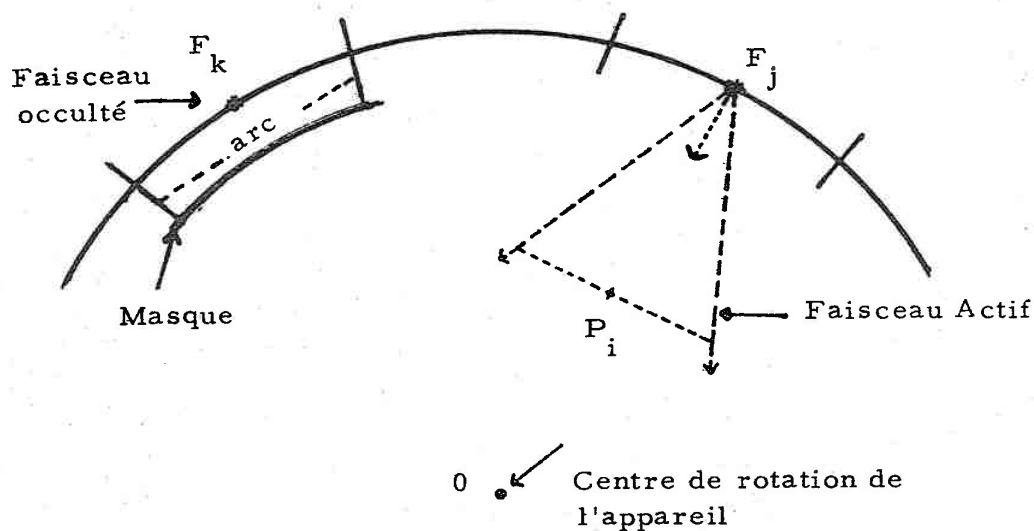
Nous définirons la dose de référence (également appelée dose unitaire) pour l'appareil considéré et un facteur de pondération " T ", dépendant du temps mis par la source pour décrire l'arc et des caractéristiques de fonctionnement de l'appareil.

Ce facteur de pondération sera le même pour toutes les positions où la source est non occultée.

Repérons par $j = 1, 2, \dots, N$, les N positions correspondant aux milieux des N arcs et désignons par $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ les faisceaux correspondants, occultés ou non.

Soit d_{ij} la Dose de Référence émise par le faisceau F_j et reçue en P_i

- si le faisceau F_j est occulté, la dose reçue en P_i sera nulle
- si le faisceau est actif, c'est-à-dire s'il n'est pas occulté, la dose reçue en P_i sera égale à $T \cdot d_{ij}$



La dose de référence d_{ij} peut être calculée suivant différentes formules selon la précision cherchée.

Dans ce travail nous utiliserons les formules dues à BOURGAT et coll (5). Ces formules de calcul rapide sont d'une qualité suffisante puisque l'essentiel de notre travail est la mise au point d'une méthode d'optimisation.

Dose de référence

Ce sera :

la dose reçue au point P_i , correspondant au faisceau F_j et calculée par les formules de BOURGAT dans lesquelles nous prenons $C = 110$.

Elle correspond à une dose de 110 rads à la peau.

Le calcul de cette dose de référence sera explicité en annexe.

1.3 INTRODUCTION DES VARIABLES BOOLEENNES

Pour obtenir une écriture mathématique commode nous associons à chaque faisceau F_j une variable booléenne " x_j ";

. Soit nulle si le faisceau F_j est occulté ;

. Soit égal à 1 dans le cas contraire.

La dose émise par le faisceau F_j et reçue en P_i pourra alors être formulée dans tous les cas par :

$$T \cdot d_{ij} \cdot x_j$$

Si nous désignons par D_i la "Dose Totale" reçue en P_i provenant de l'ensemble des faisceaux, cette dose aura pour valeur :

$$D_i = \sum_{j=1}^n (T \cdot d_{ij} \cdot x_j)$$

où n : le nombre des faisceaux.

Puisque T a par hypothèse la même valeur pour toute position du faisceau nous aurons :

$$D_i = T \cdot \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j.$$

CHAPITRE II

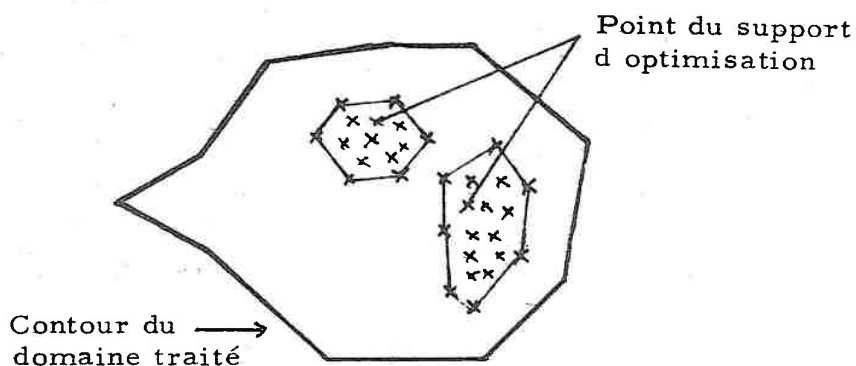
OPTIMISATION

II - OPTIMISATION

II.1 SUPPORT D'OPTIMISATION

Les contraintes habituellement introduites portent sur des conditions au niveau des volumes ; par exemple, dose supérieure à b_t dans la tumeur (volume-cible), dose inférieure à b_{os}^k au même organe sensible.

Pour traduire ces conditions nous choisirons un certain nombre de points sur le contour et à l'intérieur des volumes tant pour la tumeur, que pour les organes sensibles (fig. ci-dessous)



L'ensemble de ces points sera dit "Support d'Optimisation" ; nous le partagerons en deux groupes :

* points de la tumeur. L'ensemble de ces points sera noté E_t ;

** points du même organe sensible. L'ensemble de ces points sera noté E_{sk} , pour $k = 1, 2, \dots$

II.2 CONTRAINTES

Les contraintes que nous venons de voir sont de 2 types :

1°) Contraintes à la tumeur

Certains auteurs (12) ne tiennent compte que des contraintes associées aux points du contour de la tumeur. Dans notre travail nous avons préféré écrire ces contraintes également aux points intérieurs, cela par sécurité.

Nous écrirons que la dose totale en chaque point de la tumeur (parmi les points du support) est supérieure ou égale à un seuil, ce qui se traduit par :

$$T \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \right) \geq b_t \quad \text{pour tout point de l'ensemble } E_t,$$

où b_t la valeur seuil pour la tumeur égale à 6 000 rads dans notre travail.

2°) Contraintes organes-sensibles

La dose totale en chaque point d'un même organe sensible doit être inférieure à une valeur seuil. Nous aurons donc :

$$T \left(\sum_{j=1}^n d'_{ij} x_j \right) \leq b_{os}^k \quad \text{pour tout point } P'_i \text{ de l'ensemble } E_{sk}$$

où b_{os}^k la valeur seuil pour le kème organe sensible égale à 4.000 rads dans notre travail.

II.3 CHOIX DE LA FONCTION OBJECTIF

Dans les divers articles sur l'optimisation en radiothérapie externe les auteurs ont choisi des critères d'optimisation différents. La plupart sont linéaires (minimisation de la dose intégrale au niveau des organes sensibles (réf. 7, 1), minimisation du maximum de la dose délivrée dans l'organe sensible (réf. 1), minimisation de la dose délivrée dans la tumeur (réf.12), minimisation de la dose intégrale dans la tumeur).

REDPATH (réf.13) utilise un critère non linéaire ; minimisation de la somme des carrés des écarts entre la dose en un point de la tumeur et la moyenne des doses.

Les radiothérapeutes considèrent l'homogénéité des doses dans le volume tumoral comme la particularité la plus importante. Ceci se traduit par minimisation d'un critère (fonction-objectif) portant sur la tumeur.

Dans notre étude nous nous limitons essentiellement au cas d'un critère linéaire par rapport aux variables booléennes x_j .

Nous avons choisi de :

Minimiser la dose totale au centre de la tumeur.

Notre programme peut être utilisé pour d'autres fonctions objectifs, sans modification autre que celle du sous-programme d'

introduction de la fonction objectif (voir II, partie programmation) à condition cependant que cette fonction objectif soit linéaire par rapport aux x_j .

En résumé le problème d'optimisation se formulera comme suit :

$$1^{\circ}) \text{ minimum de } T \cdot \sum_{j=1}^n c_j x_j = T \cdot (C \cdot X)$$

où les coefficients c_j dépendent du critère d'optimisation choisi et $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

2°) avec les conditions $x_j = 0$ ou 1 quel que soit j ,
 $T > 0$;

$$3^{\circ}) \quad T \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \geq b_t \quad \text{pour les points de } E_t$$

$$4^{\circ}) \quad T \sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \leq b_{os}^k \quad \text{pour les points de } E_{sk}$$

et $k = 1, 2, \dots$

II - 4 CHOIX D'UNE METHODE D'OPTIMISATION

Le problème général que nous nous sommes posé est :
dans une première étape, :

- chercher les couples (T, X) qui vérifient les contraintes (recherche d'une solution réalisable), puis dans une seconde étape :
- chercher parmi les solutions (T, X) réalisables celles qui optimisent la fonction objectif.

La difficulté du problème ainsi posé vient de ce que les x_j ne peuvent prendre que des valeurs discrètes, 0 ou 1, de sorte que les méthodes habituellement utilisées dans les problèmes d'optimisation en radiothérapie ne conviennent plus.

De plus, il est possible que des raisons techniques ne permettent pas de réaliser les valeurs de T qui pouvaient nous être fixées par une éventuelle solution du problème précédent.

La méthode que nous développons et que nous appellerons "Technique de Clignotement", consiste à se fixer une ou plusieurs valeurs de T, parmi les valeurs vraisemblables susceptibles d'être réalisées sur un appareillage donné, et de calculer le vecteur X qui vérifie les contraintes, puis, dans une seconde étape, de définir les solutions réalisables qui conduisent à une solution optimale.

Lorsque T est fixé, le problème d'optimisation devient un problème d'optimisation linéaire à variables booléennes dit aussi problème de KNAPSACK.

Parmi les méthodes utilisées pour l'optimisation d'un tel problème (réf. 11), nous utiliserons une méthode d'énumération, inspirée des méthodes de séparation et évaluation progressive (S.E.P.) (réf. 6, 3, 2, 8), qui sera étudiée dans les paragraphes suivants.

II - 5 COMPARAISON AVEC LES METHODES CLASSIQUES

Rappelons d'abord que dans les problèmes classiques d'optimisation en radiothérapie, il s'agit soit de déterminer des coefficients de pondération (dans le cas de la programmation linéaire), (réf. 10), soit des coefficients de pondération et des paramètres géométriques fixant la position des faisceaux (dans le cas de la programmation non-linéaire : réf. 12).

Il est essentiel de noter que dans tous ces problèmes les variables qui interviennent sont des variables continues ; et que les méthodes utilisées par les différents auteurs (simplex ; programmation quadratique ; méthode du gradient projeté) ne sont applicables que pour des variables continues.

Dans notre problème les principales variables sont booléennes et les méthodes citées précédemment ne peuvent pas être utilisées.

Le problème proposé et la méthode d'optimisation, sont totalement différents des problèmes et méthodes classiques en radiothérapie.

II - 6 REMARQUES SUR LE CHOIX DE T

On se propose d'étudier le coefficient de pondération T de notre problème tel que :

$$\text{minimiser } f(X) = T \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_j x_j \right)$$

sous les contraintes

$$1) \quad (\forall i \in I_t) \quad \left(T \cdot \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \right) \geq b_t > 0 \right)$$

où I_t l'ensemble d'indices des contraintes de la tumeur.

$$2) \quad (\forall k) \quad (\forall i \in I_{sk}) \quad \left(0 < T \cdot \left(\sum_{j=1}^n d_{ij} x_j \right) \leq b_{os}^k \right)$$

où I_{sk} l'ensemble d'indices des contraintes du même organe sensible.

$$3) \quad T > 0, \quad (\forall j \leq n) \quad (x_j \in B = \{0, 1\})$$

$$4) \quad (\exists j; j \leq n) \quad (x_j > 0).$$

Soit $(T, X) \in U_{ad}$ où U_{ad} l'espace admissible associé à ce problème. La formule (1) s'écrit :

$$(\forall i \in I_t) \quad \left(T \geq \frac{b_t}{\sum_j d_{ij} x_j} > 0 \right)$$

d'où

$$(\forall i \in I_t) \quad \left(T \geq \frac{b_t}{\sum_j d_{ij}} \right)$$

et

$$T \geq \max_{i \in I_t} \left(\frac{b_t}{\sum_j d_{ij}} \right) = T_1.$$

La formule 2 s'écrit :

$$(\forall k) \quad (\forall i \in I_{sk}) \quad \left(T \leq \frac{b_{os}^k}{\sum_j d_{ij} x_j} \right)$$

d'où

$$(\forall k) \left(T \leq \frac{b_{os}^k}{\min_{i \in I_{sk}} \left(\sum_j d_{ij} x_j \right)} \right)$$

et

$$T \leq \min_k \left\{ \frac{b_{os}^k}{\min_{i \in I_{sk}} \left(\sum_j d_{ij} x_j \right)} \right\}$$

Puisque $\sum_j d_{ij} x_j > 0$ nous avons

$$\min_{i \in I_{sk}} \sum_j d_{ij} x_j \geq \min_{i \in I_{sk}} \left\{ \min_j \{ d_{ij} : d_{ij} > 0 \} \right\} = m$$

Nous obtenons donc :

$$T \leq \min_k \left\{ \frac{b_{os}^k}{m} \right\} = T_2$$

Nous en déduisons alors à l'aide de 1, 2, 3, 4 que :

$$(\exists (T, X) \in U_{ad}) \implies (T_1 \leq T \leq T_2)$$

mais

$$(T_1 \leq T \leq T_2) \not\implies (\exists (T, X) \in U_{ad}).$$

Nous remarquons que si $T_2 < T_1$ nous avons $U_{ad} = \emptyset$, c'est-à-dire le problème n'a pas de solution.

CHAPITRE III

METHODE D'OPTIMISATION EN
VARIABLES BOOLEENNES

III - METHODE D'OPTIMISATION EN VARIABLES

BOOLEENNES

III - 1 GENERALITES

La méthode que nous utilisons est une méthode déduite de la méthode de "Séparation et Evaluation Progressive" adaptée à notre problème particulier.

Le programme que nous avons écrit est susceptible d'avoir d'autres applications qu'en radiothérapie cinétique et afin de donner une plus grande généralité à notre exposé, nous décrirons la méthode lorsque le problème d'optimisation sera défini par les notations suivantes :

on se propose de rechercher le minimum d'une fonction objectif f définie par

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = C \cdot X$$

où $c_j \geq 0 \quad \forall j$

lorsque les n variables x_j sont :

- des variables booléennes ;
- liées par m contraintes unilatérales ;

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n - b_1 \geq 0$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n - b_2 \geq 0$$

$\vdots$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n - b_m \geq 0$$

Notation matricielle

Soit X dans $E^n = \{0, 1\}^n$, trouver X^* qui minimise $f(X)$ avec $X^* \in E^n$, sous les m contraintes unilatérales

$$A \cdot X - B \gg 0 \quad (*)$$

où X est un vecteur-colonne à n composantes booléennes

$x_1, x_2, \dots, x_n$.

C est un vecteur ligne ayant pour composantes les coefficients de la fonction objectif.

Les coefficients c_j de la fonction objectif sont essentiellement des réels non négatifs mais ces conditions ne sont pas restrictives car lorsqu'un coefficient c_j est négatif il suffira de faire le changement de variable $x'_j = 1 - x_j$ sans omettre de modifier les coefficients b_i .

Les coefficients a_{ij} et b_i des contraintes sont des réels de signe quelconque.

Nous supposons toutes les contraintes de la forme "supérieure ou égale" mais cette condition elle non plus, n'est pas restrictive puisque dans le cas contraire il suffira de changer les signes.

(*) On rappelle que les vecteurs X et Y vérifient $X \leq Y$ si et seulement si $x_i \leq y_i$ pour tout i .

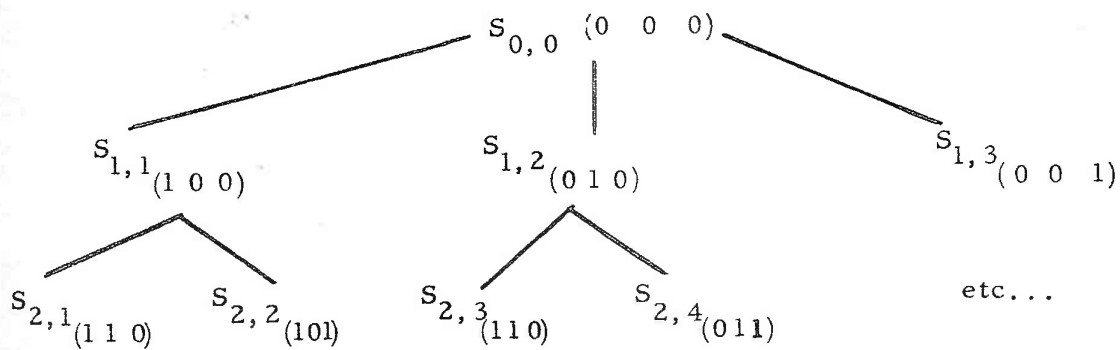
III - 2 METHODE S.E.P.

La méthode S.E.P. est une méthode arborescente caractérisée comme suit :

1) à chaque sommet de l'arborescence nous associons un vecteur booléen à n composantes. Ceci permet une numérotation des sommets de l'arborescence à l'aide de deux indices ; $S_{p,q}$ tel que

- p représente le niveau dans l'arborescence, c'est-à-dire le nombre des composantes égales à 1
- q représente dans chaque niveau l'ordre naturel, c'est-à-dire que les composantes passant de 0 à 1 sont choisies à partir de la gauche, ou éventuellement un ordre différent déterminé à l'aide d'un critère de choix défini ultérieurement.

Exemple :



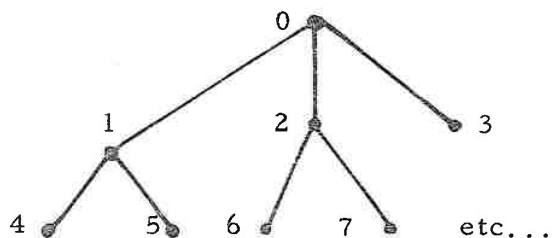
2) il peut être intéressant de n'utiliser qu'un seul indice. Ceci revient à déterminer une relation d'ordre totale sur l'arborescence

précédente tel que :

$$(S_{p,q} \leq S_{p',q'}) \text{ s. si } (p < p' \text{ ou } p = p' \text{ et } q \leq q')$$

Exemple :

Dans le cas précédent, la numérotation à un seul indice sera :



Remarque :

L'algorithme consiste justement à éviter le parcours complet de l'arborescence en remarquant en particulier que plusieurs sommets peuvent se voir associer un même vecteur booléen. De plus, on pourra, sans ambiguïté utiliser une notation à un ou deux indices.

3) A chaque sommet nous associons également :

- la valeur $f(X_p)$ prise par la fonction objectif ;
- une borne β_p (voir paragraphe III - 3.1) ;
- l'ensemble U_p des indices des composantes qui ont la valeur 1, l'ensemble L_p des indices des composantes qui ont la valeur 0, et I_p l'ensemble des indices des contraintes non vérifiées par X_p .

4) Le passage d'un sommet $S_{p,q}$ à un successeur $S_{p+1,r}$ se fera toujours en remplaçant par 1 une composante nulle x_j et une seule. On aura donc dans E^n

$$X_{p,q} << X_{p+1,r} \quad (*)$$

5) La racine de l'arborescence sera le vecteur X_0 dont toutes les composantes sont nulles.

Les propriétés essentielles de ce graphe sont les suivantes :

THEOREME 1

La fonction $f : (E^n, <<) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \leq)$ est non décroissante.

Démonstration

Si $X << X'$ alors $(\forall j) (x_j \leq x'_j)$

d'où

$$\sum_j c_j x_j \leq \sum_j c_j x'_j \quad \text{car} \quad (\forall j) (c_j \geq 0)$$

Une conséquence de ce théorème est :

|| Si X' est un descendant de X alors $f(X) \leq f(X')$.

Définition 1: Rappelons qu'un vecteur X_p est une solution réalisable si elle vérifie toutes les contraintes. Par définition un sommet S_p sera dit réalisable si le vecteur associé X_p est une solution réalisable. L'ensemble I_p est alors vide.

Soit S_p un sommet réalisable. Si un descendant $S_{p'}$ de S_p est un sommet réalisable, on a nécessairement, d'après le théorème 1, $f(X_p) \leq f(X_{p'})$ X_p et $X_{p'}$ étant des solutions réalisables. Nous en déduisons le théorème suivant :

(*) Ne pas confondre cette relation avec celle définie en 2).

THEOREME 2

Il n'existe dans la descendance de S_p aucune solution réalisable meilleure que celle de S_p .

Cas (a) :

Ceci nous montre que dès que nous sommes arrivés à un sommet réalisable il est inutile d'explorer ses descendances puisque nous ne pouvons pas trouver une solution réalisable conduisant à une valeur de la fonction objectif inférieure à celle du sommet étudié.

Nous venons d'exposer ainsi le premier cas où il est inutile d'explorer une partie de l'arborescence initiale. Nous allons développer maintenant un autre cas où il en est de même.

Définition 2

Soit K un sous ensemble arbitraire de L_p . A chaque élément de K correspond un successeur de S_p et un seul. Chacun de ces successeurs peut avoir une descendance. Nous appelons descendance partielle associée à K l'ensemble de ces successeurs et leur descendance.

Nous remarquons que les composantes nulles de X_p et d'indices $j \notin K$ devront rester nulles dans toute la descendance partielle associée à K .

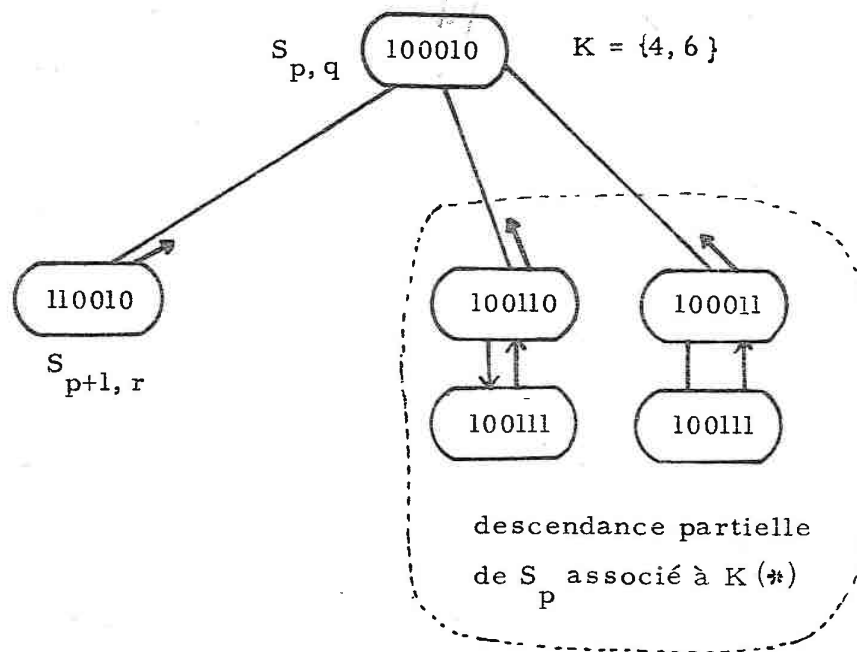
Nous allons établir une condition suffisante pour que la descendance partielle associée à K ne contienne aucun sommet réalisable.

- Soient $j_1, j_2, j_3 \dots j_s$ un sous ensemble de K tel que

$x'_{j_1} = x'_{j_2} = \dots = x'_{j_s} = 1$ en $S_{p'}, S_{p'}$ appartenant à la descendance

partielle associée à K

Exemple :



Soit C_i une contrainte non vérifiée en S_p . Au sommet $S_{p'}$ nous aurons :

$$\sum_{j \in U_{p'}} a_{ij} - b_i = \sum_{j \in U_p} a_{ij} - b_i +$$

$$a_{ij_1} + a_{ij_2} + \dots + a_{ij_s} \quad \text{pour } i \in I_2$$

On posera $R_i = \sum_{j \in U_{p'}} a_{ij} - b_i$

(*) Etant donné que K est formé de deux indices la descendance partielle associée ne comporte que trois éléments.

Nous supprimons dans R_i les coefficients a_{ij_e} négatifs, ce faisant nous majorons l'expression précédente. Désignons par $\Sigma_{p'}^+$ la somme des a_{ij_e} positifs. Nous obtenons donc :

$$R_i \leq \sum_{j \in U_p} a_{ij} - b_i + \Sigma_{p'}^+$$

Puisque la contrainte C_i n'est pas vérifiée en $S_{p'}$, la quantité $\sum_{j \in U_p} a_{ij} - b_i$ est négative.

$$\text{Si alors } \Sigma_{p'}^+ < \left| \sum_{j \in U_p} a_{ij} - b_i \right| \quad (1)$$

la contrainte C_i reste non vérifiée en $S_{p'}$.

Nous introduisons Σ_i^k la somme des a_{ij} positifs pour $j \in K$. On a évidemment $\Sigma_{p'}^+ \leq \Sigma_i^k$ quel que soit le sommet $S_{p'}$ descendant de S_p .

$$\text{Donc si } \Sigma_i^k < \left| \sum_{j \in U_p} a_{ij} - b_i \right|$$

on aura a fortiori

$$\Sigma_{p'}^+ \leq \Sigma_i^k < \left| \sum_{j \in U_p} a_{ij} - b_i \right|$$

Condition qui entraîne qu'il est impossible de vérifier la contrainte C_i correspondante quel que soit le sommet descendant de S_p associé à la descendance partielle associée à K .

Nous en déduisons le théorème suivant :

THEOREME 3

Soit $\sum_i^k$ la somme des coefficients a_{ij} positifs associée aux variables x_j , pour $j \in k$. Si les coefficients d'au moins une contrainte C_i non vérifiée en S_p , vérifient la condition :

$$\sum_i^k < \left| \sum_{j \in U_p} a_{ij} - b_i \right| \quad \text{pour } i \in I_p$$

alors il n'existe aucun sommet de la descendance partielle de S_p associé à K qui soit réalisable.

III - 3 DEFINITION ET EVOLUTION DE LA BORNE

Définition 3

Nous appelons borne, associée à un sommet $S_{p,q}$ notée $\beta_{p,q}$, la plus petite valeur prise par la fonction objectif à un sommet réalisable déjà rencontré.

Nous remarquons d'après la définition que sa valeur évoluera au long du traitement et ceci de la façon suivante :

Initialisation : au début du traitement, lorsque nous nous trouvons au sommet $S_{0,0}$, la borne n'est pas définie c'est-à-dire, $\beta_{0,0} = +\infty$.

Phase intermédiaire : au cours du déroutement de l'algorithme, et lorsque nous ne rencontrons pas un sommet réalisable la borne reste inchangée, c'est-à-dire

$$\beta_{p+1,r} = \beta_{p,q}$$

Phase évolutive : si un sommet $S_{p+1,r}$ est réalisable et

$$* \text{ si } f(X_{p+1,r}) < \beta_{p,q} \text{ alors } \beta_{p+1,r} = f(X_{p+1,r})$$

$$* \text{ sinon } \beta_{p+1,r} = \beta_{p,q}$$

On forme ainsi une suite $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ qui possède les propriétés suivantes.

- 1) La suite est décroissante. Propriété évidente.
- 2) Chaque élément de la suite est supérieur ou égal au minimum de la fonction objectif f^* .
- 3) A la fin du processus la dernière valeur β^* est égale au minimum cherché.

Nous allons démontrer cette troisième propriété.

Supposons qu'à un moment donné la borne prenne la valeur $\beta_p = f(X_p)$. Ceci entraîne que β_p est inférieur ou égal aux valeurs prises par la fonction objectif de tous les sommets réalisables.

En effet, dans le cas contraire nous aurions étudié un sommet S_q avec $S_q < S_p$ pour lequel nous aurions choisi $\beta_q = f(X_q)$ quantité inférieure à β_p ce qui est absurde puisque les bornes forment par construction une suite décroissante (propriété 1).

Lorsque nous sommes en fin de processus la dernière borne β_s est donc inférieure ou égale aux valeurs des fonctions objectifs en tous les sommets réalisables étudiés ; elle est de plus égale à la valeur de l'une d'elles au moins en un sommet S^* réalisable.

De plus, il y a des sommets réalisables que nous n'avons pas étudiés. Cela se produit :

- lorsque nous avons négligé la descendance d'un sommet S_p réalisable (cas (a)). Dans ce cas la fonction objectif en tout sommet réalisable de la descendance est supérieure ou égale de $f(X_p)$ (théorème 1), donc supérieure ou égale à β^* .
- Lorsque nous avons le successeur du sommet étudié pour lequel la fonction objectif dépasse la valeur β_p prise par la borne au moment du traitement (Déf. 3) Nous avons alors pour tous les sommets réalisables de ce successeur ou de sa descendance une fonction objectif dont la valeur est supérieure à β_p donc à la borne β^* .

Nous voyons donc que la valeur β^* de la borne est :

* Inférieure ou égale à la valeur de la fonction objectif en tout sommet réalisable.

** Egale à la valeur de la fonction objectif en au moins un de ces sommets ; ce qui démontre la propriété.

Remarque : Si pour une raison quelconque nous arrêtons le processus de calcul avant la fin, la valeur β_s prise par la borne au moment de l'arrêt est une majorante du minimum et le vecteur pour lequel $f(X_s) = \beta_s$ peut être considéré comme solution sous-optimale, c'est-à-dire comme la meilleure parmi les solutions étudiées.

III. 4 ALGORITHME

Phase itérative - Etude d'un sommet

Recherche d'une direction de déplacement

Nous supposons être à un sommet $S_{p,q}$ de l'arborescence et chercher une direction de déplacement, c'est-à-dire un successeur du sommet $S_{p,q}$.

De manière générale à chaque sommet $S_{p,q}$ nous associons les éléments, $X_{p,q}$; $f(X_{p,q})$; $\beta_{p,q}$; $U_{p,q}$; $L_{p,q}$ décrits au paragraphe III. 2.

① Nous examinons si $S_{p,q}$ est un sommet réalisable. Cela nécessite la construction de l'ensemble $I_{p,q}$ des indices des contraintes non vérifiées en $S_{p,q}$ de la façon suivante :

$$\text{Pour } i = 1, 2, \dots, m \quad * \text{ faire } R_i = \sum_{j \in U_{p,q}} a_{ij} - b_i$$

Si $R_i < 0$ alors $i \in I_{p,q}$

Sinon répéter

Si $I_{p,q} \neq \emptyset$ alors nous allons à ② afin de définir un successeur de $S_{p,q}$ susceptible de nous conduire à un sommet réalisable

Sinon (sommet réalisable et il y a évolution de la borne)

Si $f(X_{p,q}) < \beta_{p,q}$ alors $\beta_{p,q} = f(X_{p,q})$

Sinon la borne $\beta_{p,q}$ reste inchangée, telle qu'elle était définie lors de la création du sommet

* m représente le nombre des contraintes.

$S_{p,q}$. Il y a retour au prédécesseur si ce dernier existe

si il existe alors nous allons à (b)

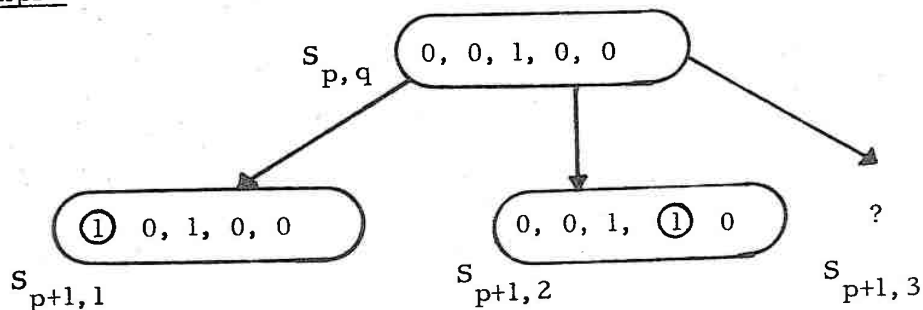
sinon FIN d'algorithme (**)

(b) On considère l'ensemble des indices des composantes nulles de $X_{p,q}$, soit $L_{p,q}$. Dans cet ensemble nous distinguons :

1b) Le sous ensemble $L_{p,q}^1$ de $L_{p,q}$, des indices des composantes nulles correspondant aux successeurs déjà étudiés, soit

$$L_{p,q}^1 = \{j \in L_{p,q} / \text{Le successeur correspondant à } x_j = 1 \text{ a déjà été étudié} \}$$

Exemple



En vue de la création d'un nouveau successeur $S_{p+1,3}$, nous remarquons qu'il faut éviter de choisir les composantes x_1 et x_4 déjà étudiées lors du passage aux sommets $S_{p+1,1}$ et $S_{p+1,2}$; d'où $L_{p,q}^1 = \{1, 4\}$ à ce moment. En général il y a évolution de cet ensemble lors du passage d'un sommet $S_{p,q}$ à un successeur. Si la composante x_{j_0} passe de 0 à 1 alors :

$$\text{nouveau } L_{p,q}^1 = \text{ancien } L_{p,q}^1 \cup \{j_0\} \text{ avec } j_0 \in L_{p,q}$$

(**) Lorsque le prédécesseur n'existe pas nous nous trouvons nécessairement au sommet initial et c'est la fin de l'algorithme.

2b) Le sous-ensemble $L_{p,q}^2$ de $L_{p,q}$, des indices des composantes nulles de $X_{p,q}$ correspondant à des successeurs pour lesquels la fonction objectif dépasse la borne $\beta_{p,q}$.

Soit j_0 l'indice de la composante de $X_{p,q}$ égale à zéro en $S_{p,q}$ et qui prend la valeur 1 en $S_{p+1,r}$ et soit c_{j_0} le coefficient de la fonction objectif associé à j_0 .

Dans ce cas il s'avère inutile d'explorer toute descendance partielle associée à un $S_{p+1,r}$ pour lequel $f(X_{p+1,r}) = f(X_{p,q}) + c_{j_0} \geq \beta_{p,q}$.

En effet, n'oublions pas que nous recherchons le minimum d'une fonction $f(X)$ monotone non décroissante (théorème 1).

Nous désignons par $\hat{L}_{p,q}$ l'ensemble des éléments de $L_{p,q}$ autre que ceux défini en (1b) et (2b). C'est en fait l'ensemble des indices qui ajouté à $U_{p,q}$ (ensemble des indices des composantes de $X_{p,q}$ égales à 1 en $S_{p,q}$) peuvent permettre d'obtenir un vecteur réalisable ou un meilleur vecteur réalisable que celui déjà obtenu antérieurement. Nous passons alors à (c).

(c) Si $\hat{L}_{p,q} = 0$ alors il y a retour au prédécesseur si ce dernier existe.

Si il existe alors l'algorithme reprend à (a)

sinon FIN d'algorithme

Sinon nous allons à (d)

(d) Nous recherchons si nous pouvons affirmer que la descendance associée à $\hat{L}_{p,q}$ ne possède aucun sommet réalisable. Pour cela il y a mise en œuvre du théorème 3 de la façon suivante :

Pour $i \in I_{p,q}$

si $\sum_i^k < \left| \sum_{j \in U_{p,q}} a_{ij} - b_i \right|$ avec $k = \hat{L}_{p,q}$

alors la descendance partielle associée à $L_{p,q}$
ne possède aucun sommet réalisable.

Il y a donc retour au prédécesseur et par
suite allons à (a)

sinon répéter.

Nous allons à (e)

(e) Nous choisissons un successeur de $S_{p,q}$ correspondant à un
indice de $\hat{L}_{p,q}$. On peut utiliser diverses techniques de choix par
exemple :

- * choix successif des indices de $\hat{L}_{p,q}$;
- * choix d'indice de $\hat{L}_{p,q}$ correspondant au plus faible accrois-
sement de la fonction objectif ;
- * choix d'indice de $\hat{L}_{p,q}$ qui minimise la distance du vecteur
 $X_{p+1,r}$ à l'espace des contraintes, etc. . .

Il y a alors évolution de la borne, des ensembles $L_{p+1,r}$;
 $U_{p+1,r}$, de la quantité $f(X_{p+1,r})$ et l'algorithme reprend au niveau (a) .

Remarques

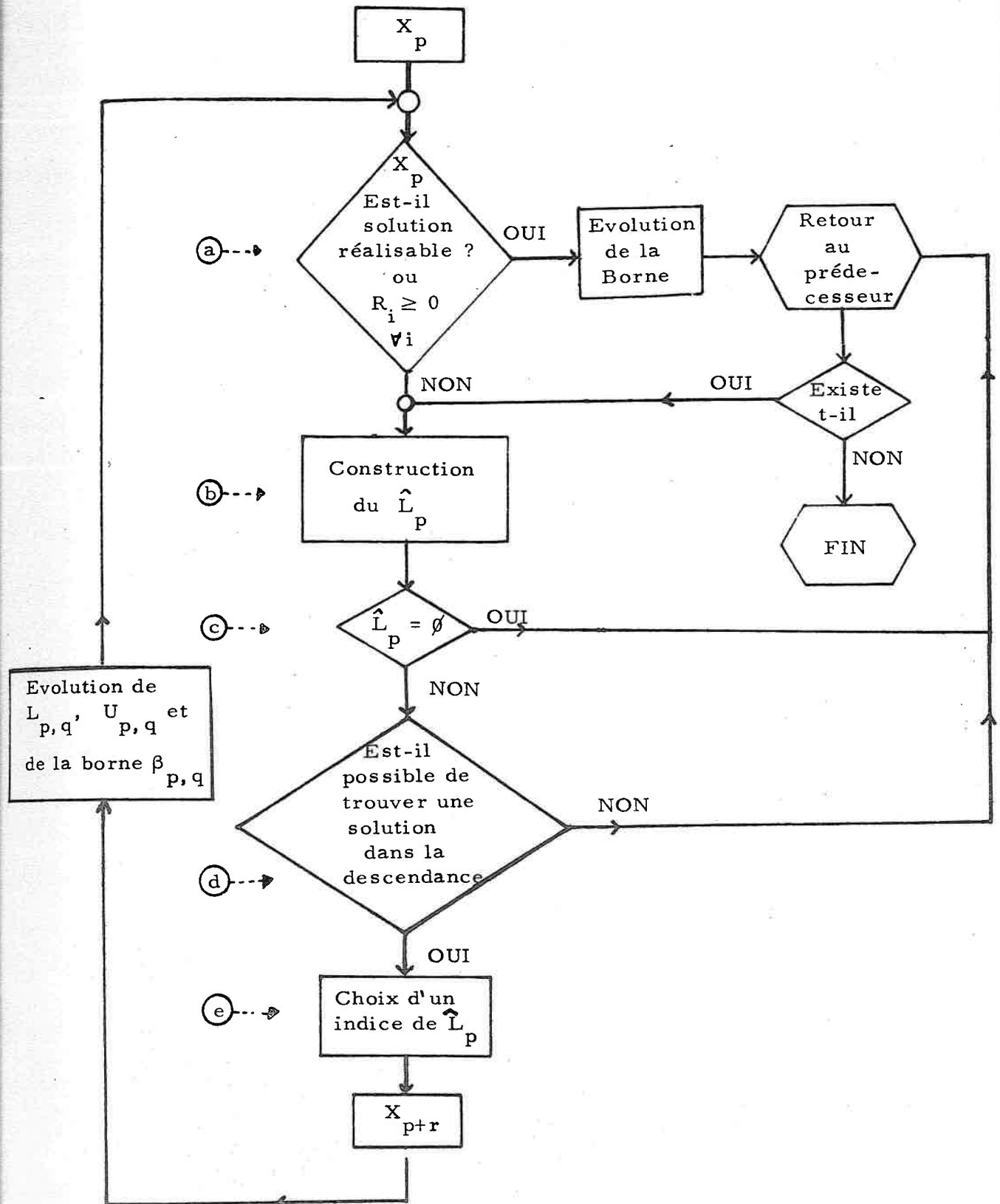
Nous avons choisi de programmer la dernière technique de choix
qui sera décrite dans la partie programmation. Le choix de ce
dernier critère est justifié par le souhait de construire un

algorithme suffisamment général utilisable en particulier dans le cas où les coefficients des contraintes sont de signe quelconque.

Par suite de la technique décrite en (a) un sommet réalisable ne peut être étudié qu'une seule fois au plus. Au contraire, un sommet non réalisable peut être examiné autant de fois que le vecteur $X_{p,q}$ correspondant a des composantes nulles.

SCHEMA D'UNE PHASE ITERATIVE

En concluant, le déroulement d'une phase itérative de la méthode d'optimisation que nous venons de décrire, se schématise comme suit :



III - 5 INITIALISATION - FIN D'ITERATIONS

On initialise le processus en prenant comme vecteur initial, le vecteur $X = (0, 0, \underbrace{\dots}_{n \text{ fois}}, 0)$.

Il est exceptionnel que ce vecteur X soit une solution réalisable sans quoi le problème a la solution évidente $X = (0, 0, \dots, 0)$.

Il y a fin du processus lorsque l'ensemble $\hat{L}$ associé au sommet initial devient vide.

III - 6 APPLICATION NUMERIQUE

On se propose d'illustrer l'algorithme décrit aux paragraphes précédents en l'étudiant en détail sur l'exemple suivant :

$$\text{minimiser } f(x) = 30 x_1 + 36 x_2 + 19 x_3 + 20 x_4$$

sous les contraintes

$$12 x_1 + 4 x_2 + 8 x_3 + 2 x_4 \geq 10$$

$$- 2 x_1 - 4 x_2 - x_3 \geq - 8$$

$$- 4 x_1 - 3 x_3 - x_4 \geq - 8$$

$$x_j = 0 \text{ ou } 1 \text{ pour } j = 1, 2, 3, 4.$$

On initialise le processus en associant au sommet $S_{0,0}$;

$$X_{0,0} = (0, 0, 0, 0), f(X_{0,0}) = 0, \beta_{0,0} = +\infty, U_{0,0} = \emptyset, L_{0,0} = \{1, 2, 3, 4\}$$

ETAPE 0 - SOMMET $S_{0,0}$

(a) Nous examinons si le sommet $S_{0,0}$ est réalisable ;

$$\text{Pour } i = 1, 2, 3 \text{ nous calculons } R_i = \sum_{j \in U_{0,0}} a_{ij} - b_i$$

$$R_1 = -10 ; \quad R_2 = 8, \quad R_3 = 8$$

Comme $R_1 < 0$ on a $I_{0,0} = \{1\}$, donc le sommet $S_{0,0}$ n'est pas réalisable, car $I_{0,0} \neq \emptyset$; nous passons à (b) .

(b) Nous formons les sous-ensembles $L_{0,0}^1$ (ensemble des indices de $L_{0,0}$ correspondants à des successeurs déjà étudiés), $L_{0,0}^2$ (ensemble des indices de $L_{0,0}$ correspondants à des successeurs pour lesquels la fonction objectif associée dépasse la borne $\beta_{0,0}$) et $\hat{L}_{0,0}$ de $L_{0,0}$.

* $L_{0,0}^1 = \emptyset$ car aucun successeur du sommet $S_{0,0}$ n'est encore étudié.

* $L_{0,0}^2 = \emptyset$

car $\forall j \in L_{0,0}, f(X_{0,0}) + c_j < \beta_{0,0}$ avec c_j les coefficients de la fonction objectif.

** Nous en déduisons alors que :

$$\hat{L}_{0,0} = L_{0,0} - \{L_{0,0}^1 \cup L_{0,0}^2\} = L_{0,0} = \{1, 2, 3, 4\}$$

nous allons donc à (c) .

(c) Puisque $\hat{L}_{0,0} \neq \emptyset$

il existe un indice de $\hat{L}_{0,0}$ qui ajouté à l'ensemble $U_{0,0}$ (ensemble des indices des composantes du vecteur $X_{0,0}$ égales à 1 en $S_{0,0}$) permettrait d'obtenir un vecteur approchant une solution réalisable.

Nous allons à (d) .

④ Nous allons déterminer à présent s'il est possible de trouver une solution réalisable dans la descendance associée à $S_{0,0}$. Pour cela il faut qu'aucune contrainte parmi celles non vérifiées en $S_{0,0}$ ne vérifie l'inégalité suivante (mise en œuvre du théorème 3) :

$$\Sigma_i^k < \left| \sum_{j \in U_{0,0}} a_{ij} - b_i \right| \text{ pour } i \in I_{0,0} \text{ et } k = \hat{L}_{0,0}$$

où Σ_i^k la somme des coefficients non négatifs, d'indices $j \in k$, pour la contrainte $i \in I_{0,0}$.

Nous savons que $\Sigma_1 = 26 \geq \left| \sum_{j \in U_{0,0}} a_{1j} - b_1 \right| = |-10|$ et nous en déduisons que la contrainte $j \in U_{0,0}$ 1 peut être vérifiée dans la descendance. Nous allons à ⑤.

⑤ Nous allons choisir un successeur de $S_{0,0}$ correspondant à un indice de $\hat{L}_{0,0}$. La méthode de choix que nous utiliserons dans cet exemple sera le choix successif des indices de l'ensemble $\hat{L}_{p,q}$.

Nous choisissons alors $J_0 = 1$, c'est-à-dire que $x_1 = 1$ au sommet successeur. De plus il y a évolution de l'ensemble $L_{0,0}^1$ puisque nous venons de créer un successeur de $S_{0,0}$: on pose alors

$$L_{0,0}^1 = L_{0,0}^1 \cup \{J_0\}. \text{ A ce sommet } S_{1,1} \text{ nous associons :}$$

$$X_{1,1} = (1, 0, 0, 0) ; L_{1,1} = \{2, 3, 4\} ; U_{1,1} = \{1\} ; f(X_{1,1}) = 30 ;$$

$\beta_{1,1} = \beta_{0,0} = +\infty$; c'est-à-dire que la borne reste inchangée (paragraphe III.3), $S_{1,1}$ n'étant pas réalisable.

Nous reprenons l'algorithme au niveau ①.

ETAPE 1 - SOMMET $S_{1,1}$

- ② Pour $i = 1, 2, 3$ nous calculons $R_i = \sum_{j \in U_{1,1}} a_{ij} - b_i$
 $R_1 = 2$; $R_2 = 6$; $R_3 = 4$.

Puisque pour $i = 1, 2, 3$ $R_i \geq 0$ ($I_{1,1} = \emptyset$) le vecteur $X_{1,1} = (1, 0, 0, 0)$ est une solution réalisable, il y a ainsi évolution de la borne car $f(X_{1,1}) = 30 < \beta_{1,1} = +\infty$. On pose $\beta_{1,1} = 30$.

Nous retournons alors au prédécesseur $S_{0,0}$ de $S_{1,1}$ (puisque'il existe) en lui associant :

$X_{0,0} = (0, 0, 0, 0)$; $L_{0,0} = \{1, 2, 3, 4\}$; $U_{0,0} = \emptyset$; $f(X_{0,0}) = 0$
 et $\beta_{0,0} = \beta_{1,1} = 30$, et l'algorithme reprend au niveau ② .

ETAPE 2 - SOMMET $S_{0,0}$

- ③ Construction des ensembles $L_{0,0}^1$; $L_{0,0}^2$; $\hat{L}_{0,0}$

* $L_{0,0}^1 = \{1\}$

* $L_{0,0}^2 = \{1, 2\}$ puisque pour :

$J = 1$; $f(X_{0,0}) + c_1 = 0 + 30 \geq \beta_{0,0} = 30$

$J = 2$; $f(X_{0,0}) + c_2 = 0 + 36 \geq \beta_{0,0} = 30$

** $\hat{L}_{0,0} = \{3, 4\} \neq \emptyset$. Nous passons à ④ .

- ④ Est-il possible de trouver une solution réalisable dans la descendance partielle de $S_{0,0}$ associée à $\hat{L}_{0,0}$?

Rappelons que $I_{0,0} = \{1\}$ (voir étape 0). Pour $i \in I_{0,0}$ et

pour $k = \hat{L}_{0,0}$ nous avons :

$$\Sigma_1^k = 8 + 2 \geq | \Sigma a_{ij} - b_1 | = | -10 | \text{ donc}$$

Σ_1^k n'est pas strictement inférieur à $| -10 |$ d'où nous passons à (e) .

(e) Nous choisissons $j = 3 \in \hat{L}_{0,0}$ ($x_3 = 1$ au sommet successeur). Il y a évolution de l'ensemble $L_{0,0}^1$: nouveau $L_{0,0}^1 =$ ancien $L_{0,0}^1 \cup \{j\} = \{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\}$.

A ce sommet $S_{1,2}$ nous associons :

$$X_{1,2} = (0, 0, 1, 0) ; L_{1,2} = \{1, 2, 4\} ; U_{1,2} = \{3\} ; f(X_{1,2}) = 19$$

et $\beta_{1,2} = \beta_{0,0} = 30$, $X_{1,2}$ n'étant pas réalisable, la borne ne change pas.

Nous reprenons à (a) .

ETAPE 3 - SOMMET $S_{1,2}$

(a) Nous avons : $R_1 = -2 ; R_2 = 7 ; R_3 = 5$ et $I_{1,3} = \{1\}$ nous passons à (b) puisque $I_{1,3} \neq \emptyset$.

(b) Construction de $L_{1,2}^1 ; L_{1,2}^2 ; \hat{L}_{1,2}$

$$* L_{1,2}^1 = \emptyset$$

$$* L_{1,2}^2 = \{1, 2, 4\} \text{ car pour :}$$

$$j = 1 ; f(X_{1,2}) + c_1 = 19 + 30 \geq \beta_{1,2} = 30$$

$$j = 2 ; f(X_{1,2}) + c_2 = 19 + 36 \geq \beta_{1,2} = 30$$

$$j = 3 ; f(X_{1,2}) + c_3 = 19 + 20 \geq \beta_{1,2} = 30$$

$$** \hat{L}_{1,2} = L_{1,2} - \{L_{1,2}^1 \cup L_{1,2}^2\} = \emptyset$$

Nous passons au niveau (c) .

(c) Etant donné que $\hat{L}_{1,2}$ est vide il y a de nouveau retour au prédécesseur $S_{0,0}$ (car il existe) pour lequel nous avons :

$$X_{0,0} = (0, 0, 0, 0) ; L_{0,0} = \{1, 2, 3, 4\} ; U_{0,0} = \emptyset ;$$

$$f(X_{0,0}) = 0 ; \underline{\beta_{0,0} = \beta_{1,2} = 30.}$$

L'algorithme reprend au niveau (b) .

ETAPE 4 - SOMMET $S_{0,0}$

(b) Construction de $L_{0,0}^1 ; L_{0,0}^2 ; \hat{L}_{0,0}$

$$* L_{0,0}^1 = \{1, 3\} \text{ (voir étape 3)}$$

$$* L_{0,0}^2 = \{1, 2\} \text{ car pour } j = 1, 2 \in L_{0,0} \text{ nous avons ;}$$

$$f(X_{0,0}) + c_j \geq \beta_{0,0} = 30.$$

$$** \hat{L}_{0,0} = L_{0,0} - \{L_{0,0}^1 \cup L_{0,0}^2\} = \{4\}$$

Nous passons à (d) .

(d) Puisque $\hat{L}_{0,0} \neq \emptyset$ nous passons à (e) .

(e) Nous examinons si nous pouvons affirmer qu'il existe une solution réalisable dans la descendance partielle de $S_{0,0}$ associée à $\hat{L}_{0,0} = \{4\}$.

Rappelons que $I_{0,0} = \{1\}$. Pour $i \in I_{0,0}$ et $K = \hat{L}_{0,0}$, nous avons $\Sigma_1^k = 2$ qui est strictement inférieur à $|-10|$.

Puisque l'inégalité du théorème 3 est vérifiée, il n'est pas possible de trouver une solution réalisable dans la descendance associée à $\hat{L}_{0,0}$. Il y a évolution de l'ensemble

$L_{0,0}^1$: nouveau $L_{0,0}^1 = \text{ancien } L_{0,0}^1 \cup \hat{L}_{0,0} = \{1, 3\} \cup \{4\} = \{1, 3, 4\}$ et retour au prédécesseur $S_{0,0}$, pour lequel nous avons :

$$X_{0,0} = (0, 0, 0, 0); L_{0,0} = \{1, 2, 3, 4\}; U_{0,0} = \emptyset; f(X_{0,0}) = 0$$

$$\beta_{0,0} = 30.$$

L'algorithme reprend au niveau (b).

ETAPE 5 - SOMMET $S_{0,0}$

(b) Construction de $L_{0,0}^1; L_{0,0}^2; \hat{L}_{0,0}$

$$* L_{0,0}^1 = \{1, 3, 4\}$$

$$* L_{0,0}^2 = \{1, 2\}$$

$$** \hat{L}_{0,0} = \emptyset.$$

Nous passons à (c).

(c) Puisque $\hat{L}_{0,0} = \emptyset$ nous devons retourner au prédécesseur de $S_{0,0}$ lequel n'existe pas. C'est alors la fin de l'algorithme.

Le programme optimal est $X^* = (1, 0, 0, 0)$ avec $f(X^*) = 30$.

CHAPITRE IV

ESSAIS ET RESULTATS

IV - ESSAIS ET RESULTATS

IV.1 NOTIONS PRELIMINAIRES

Le but de cette partie est de montrer la validité de la méthode d'optimisation linéaire en variables booléennes dans le cadre de la radiothérapie cinétique externe et pour cela nous avons préféré traiter un exemple que nous avons choisi de façon que ce traitement soit suffisamment difficile.

Pour les essais que nous représentons :

- a) l'axe de rotation de l'appareil radioactif passe par le centre de la tumeur ;
- b) la tumeur est irradiée par des champs de 7×7 cm environ, le volume de la tumeur supposé homogène ;
- c) la distance source-axe est égale à 80 cm.

Pour tester la validité de notre travail nous avons utilisé successivement trois fonctions objectifs

- 1) la dose totale au centre de la tumeur, notée "f" ;
- 2) la somme des doses totales aux points de la tumeur, notée "F" ;

Ces deux premiers critères peuvent s'interpréter comme caractérisant plus ou moins l'homogénéité de la répartition des doses à l'intérieur de la tumeur.

- 3) La minimisation en un point bien choisi de l'organe sensible de la dose reçue en ce point.

Ce critère peut être intéressant par exemple lorsqu'il n'apparaît pas de solution réalisable pour le seuil imposé.

Dans l'essai que nous avons fait, nous avons constaté que les deux premières fonctions objectifs conduisaient à des résultats analogues, ce qui sera mis en évidence dans le prochain paragraphe.

Nous avons ensuite pour faciliter l'interprétation de notre résultat, représenté les lignes isodoses correspondant à l'optimum pour $T = 15$, ainsi que des sous-optimums associés à deux valeurs $T = 5$ et $T = 30$. Nous représentons enfin des isodoses dans le cas de minimisation des doses à l'organe sensible.

Les figures et les tableaux correspondants seront décrits au paragraphe suivant.

Dans l'exemple traité, le support d'optimisation est formé comme suit :

- une tumeur est définie par 13 points dont

- 7 points intérieurs
- 6 points du contour

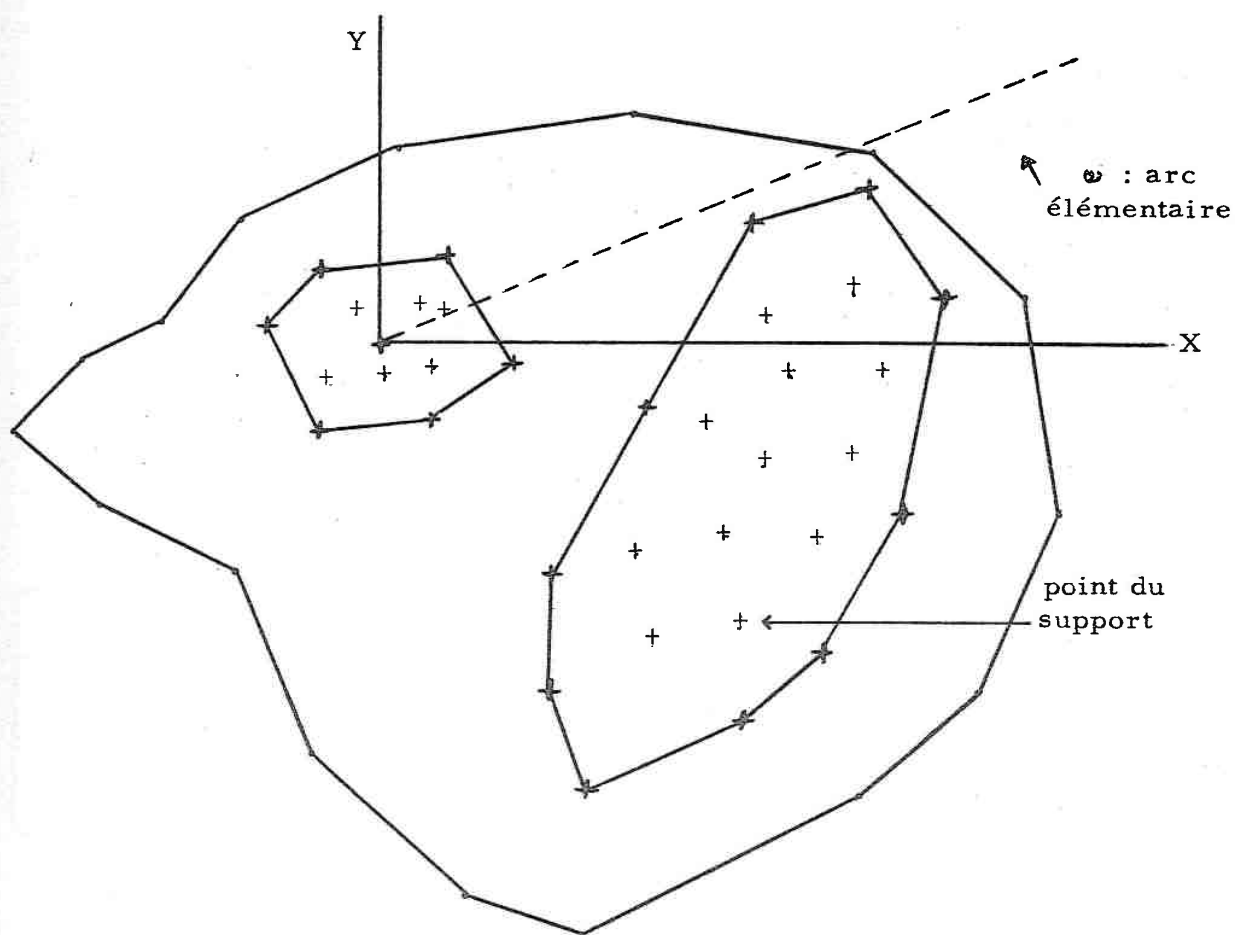
- un organe sensible est défini par 22 points dont

- 9 points intérieurs
- 13 points du contour.

Le support est donc formé de 35 points.

Les seuils d'irradiation pour les points du support sont :

- 6000 rads pour la tumeur soit 60 gray
- 4000 rads pour l'organe sensible soit 40 gray.



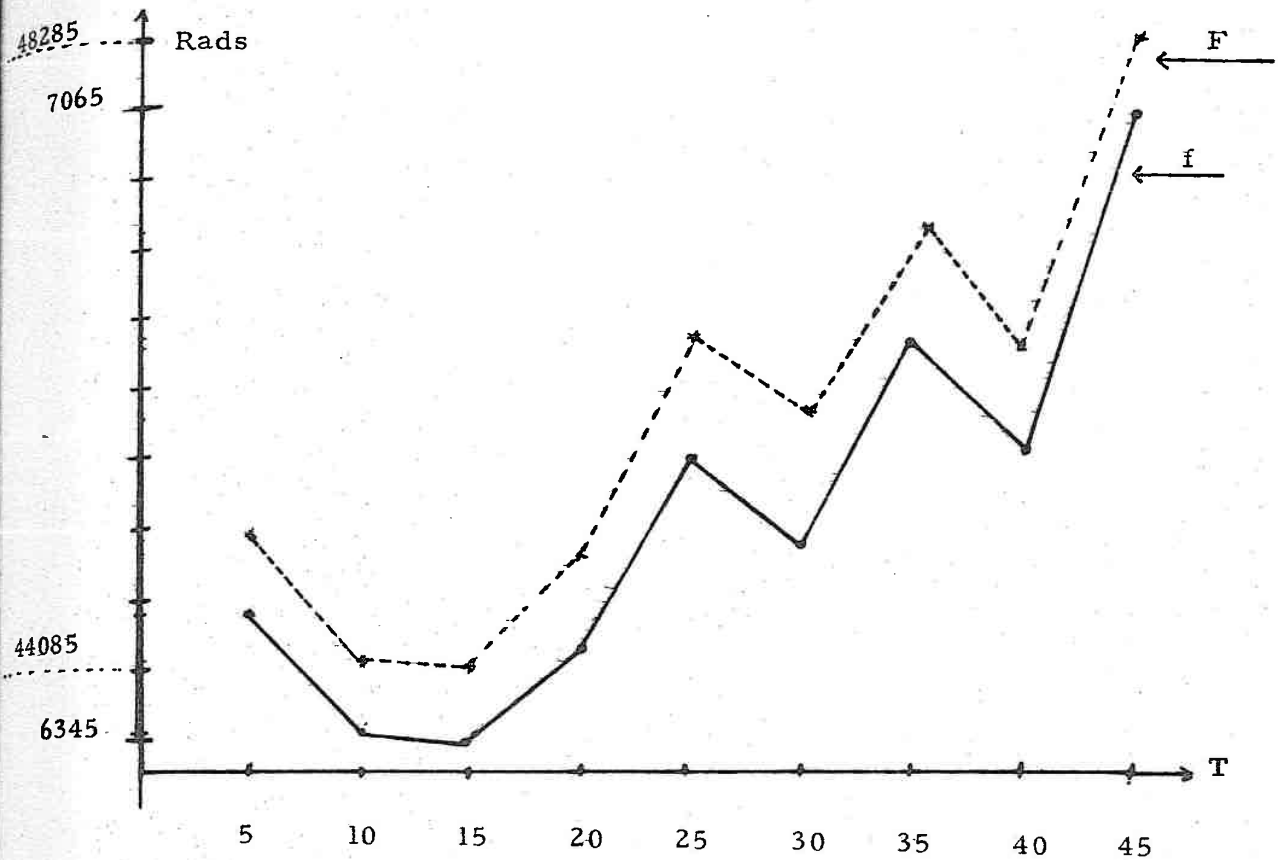
Remarque : L'angle des faisceaux est repéré par rapport à l'horizontale ox et croît dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

IV - 2 COMPARAISON DES DEUX PREMIERES FONCTIONS OBJECTIFS

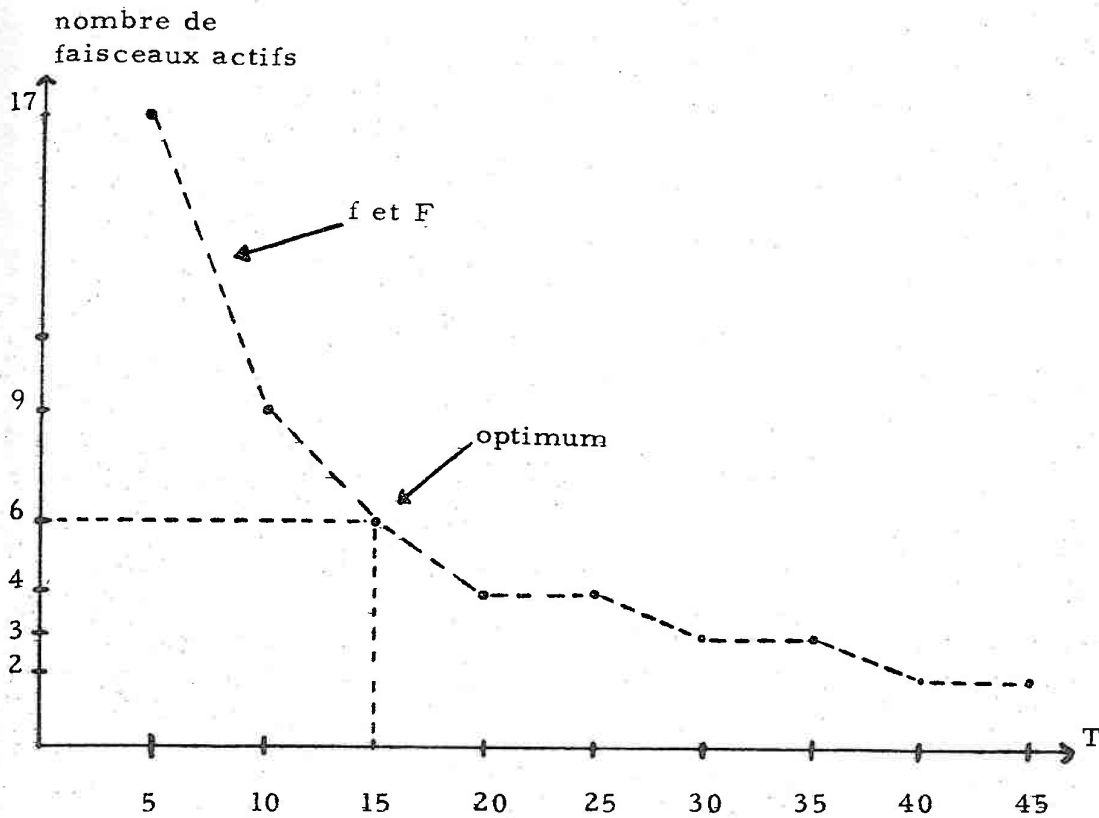
Rappelons que à chaque valeur numérique du coefficient de pondération T de l'intervalle $[T_1, T_2]$ correspond un vecteur booléen donnant la "meilleure" distribution des doses dans le volume tumoral. La valeur prise par la fonction objectif à ce point X est dite "sous-optimum" associée à T .

Nous considérons des valeurs de T de 5 à 5, de 5 à 45 et nous représentons à la table suivante, sur chaque ligne la valeur prise par la fonction objectif considérée, associée au coefficient T en haut de colonne.

T	5	10	15	20	25	30	35	40	45
f	6490	6350	6345	6460	6675	6570	6790	6680	7065
F	44940	44040	44085	44860	46300	45750	47005	46240	48285



Nous constatons ainsi que les deux courbes ont des allures analogues. Pour ces mêmes valeurs de T , nous donnons par la suite l'évolution du nombre de faisceaux actifs associés aux sous-optimums obtenus pour les deux fonctions objectifs f et F .



Nous remarquons sur ce graphique que le nombre de faisceaux diminue lorsque T augmente, de manière que le produit (nombre de faisceaux) $\times$ T reste sensiblement constant et de l'ordre de 90. Ce résultat était d'ailleurs à prévoir.

Enfin, comme nous l'avons indiqué, nous donnons page suivante, pour $T = 15$ l'évolution des différentes quantités associées à cette valeur de T :

COEFF DE PONDERATION= 15 DSA= 80 NBRE DE FAISCS INITIAUX= 10
FAISCEAU:ACTIF=1, OCCULTE=0

ETAPE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	NBRE-FAISCS	SOUS-OPTM	MOY-TUNEUR	DOSE-CENTRE	MOY/CEN
21	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	7650	7454	7650	97.0X
34	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6	7635	7419	7635	97.0X
47	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6	7560	7362	7560	97.0X
54	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6	7440	7247	7440	97.0X
117	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	6	7380	7199	7380	97.0X
122	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	6	7350	7142	7350	97.0X
168	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	6	7335	7108	7335	96.0X
215	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	6	7230	7026	7230	97.0X
425	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	6	7140	6972	7140	97.0X
427	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	6	7110	6930	7110	97.0X
465	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	6	7095	6895	7095	97.0X
503	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	6	7035	6864	7035	97.0X
507	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	6	6990	6813	6990	97.0X
697	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	6	6975	6816	6975	97.0X
701	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	6	6930	6765	6930	97.0X
717	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	6	6900	6708	6900	97.0X
872	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	6	6885	6674	6885	96.0X
975	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	6	6825	6643	6825	97.0X
979	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	6	6780	6592	6780	97.0X
1344	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	6	6735	6565	6735	97.0X
1452	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	6	6720	6531	6720	97.0X
1532	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	6	6615	6449	6615	97.0X
2052	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	6	6600	6442	6600	97.0X
2141	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	6	6585	6407	6585	97.0X
2179	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	6	6525	6359	6525	97.0X
2208	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	6	6495	6335	6495	97.0X
2224	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	6	6450	6267	6450	97.0X
2670	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	6	6420	6249	6420	97.0X
2743	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	6	6405	6242	6405	97.0X
4370	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	6	6345	6198	6345	97.0X

A L OPTIMUM NOUS OBTENONS
NBRE D. ETAPES = 8099

ETAT DES a 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
FAISCEAUX a 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1

NBRE DE FAISCEAUX ACTIFS= 6

CENTRE TUMEUR(EN RADS) 6345
CONTOUR TUMEUR ... 6060
MOY ORG SEHS ... NO 1 2403

Le nombre de faisceaux actifs, pendant la recherche de la solution optimale est constant. L'inconvénient représenté est qu'à partir de l'étape 4370 où on obtient la dernière solution réalisable, nous effectuons un nombre assez important d'essais, jusqu'à l'étape 8099, sans trouver une solution meilleure que celle-ci la dernière. Ceci s'étend pratiquement pour tout T que nous avons testé, pour les critères f et F, et nous a conduit à introduire les quantités suivantes. :

- dose moyenne tumeur
- dose contour tumeur
- moyenne organe sensible.

Par le biais de ces quantités nous espérons pouvoir tester la qualité de la solution réalisable obtenue en un moment donné, par rapport aux contraintes imposées. A l'exemple précédent nous voyons que :

- la moyenne de la dose au contour est environ 6085 rads, contre 6000 rads du seuil imposé ;
- la dose moyenne à l'organe sensible est de l'ordre de 2403 rads contre 4000 rads du seuil imposé ;
- la moyenne de la dose à la tumeur est estimée 6198 rads environ.

Ainsi, dans le cas où une solution réalisable nous paraît satisfaisante, nous pourrions décider l'arrêt des calculs, afin d'éviter un nombre souvent élevé d'essais inutiles.

Note

Les valeurs numériques de T que nous avons testées sont difficiles à préciser a priori par les hypothèses que nous disposons. Nous avons constaté que pour un T assez grand, pour l'exemple que nous testons $T \geq 40$, il est possible :

- d'une part que la sous-solution optimale trouvée, contienne un nombre faible, inférieur à 3, des positions de la source non occultées ;

- d'autre part, il peut arriver à au moins une contrainte de l'organe sensible de ne jamais être vérifiée. En effet, étant donné que ces contraintes sont de la forme $T(A.X) \leq B$, il est évident qu'avec un coefficient T grand nous risquons de dépasser la borne B .

IV.3 ISODOSES

Nous représentons d'abord les isodoses relatives à la solution optimale.

Les lignes isodoses de références 1, 2, ..., 6, ... correspondent aux lignes joignant les points où les valeurs des doses sont respectivement égales à 1000, 2000, ..., 6000, ... rads.

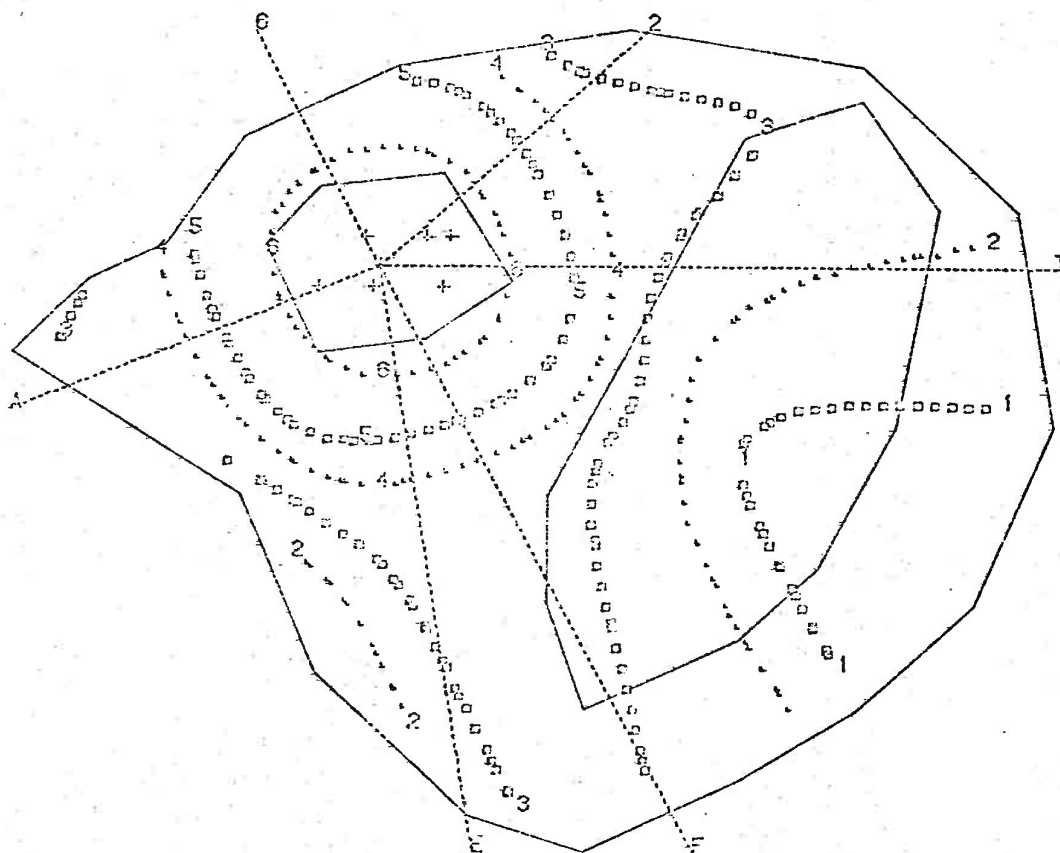
Caractéristiques du traitement

Dans ce qui suit les tracés correspondent à l'optimisation de la dose totale au "centre" de la tumeur.

- Seuil tumeur : 6000 rads.
- Seuil organe sensible : 4000 rads.
- Isodoses tracées de 1000 en 1000 rads.
- Nombre de faisceaux initiaux : 18.
- Distance source-axe ; DSA : 80 cm.

A) Distribution finale des doses après optimisation pour
T = 15 (optimum).

- Dose au "centre" tumeur : 6345 rads (D).
- Dose moyenne tumeur : 6198 rads (DM).
- Dose moyenne contour tumeur : 6085 rads.
- Rapport (D)/(DM) : 97 %
- Nombre de faisceaux actifs : 6
- Dose moyenne organe-sensible : 2403 rads.



Nous donnons par la suite (comme nous l'avons indiqué au paragraphe IV.1) deux autres cas correspondant à $T = 5$ et à $T = 30$. (pages 51 et 52 respectivement).

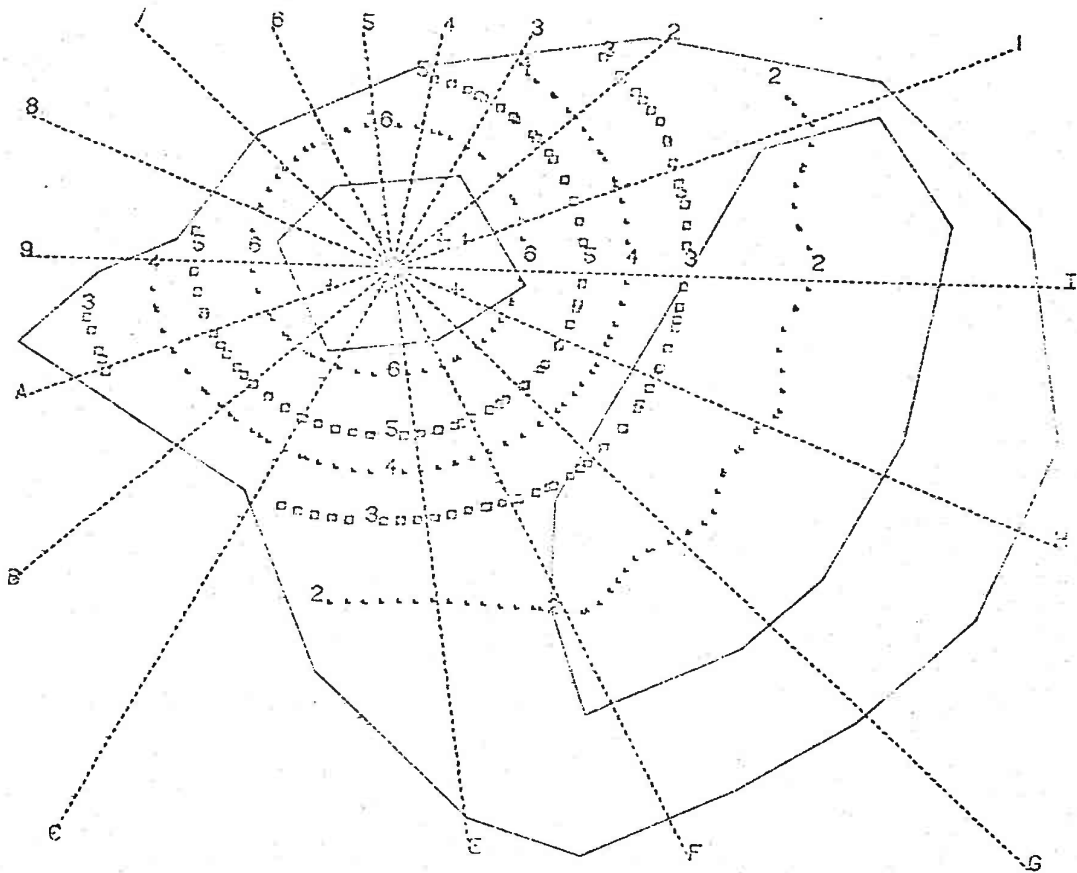
Ainsi, dans le premier cas, nous disposons un nombre élevé de faisceaux actifs et dans le second un nombre faible.

Une différence remarquable de ces deux exemples par rapport à l'exemple associé à l'optimum est que le temps de calcul du vecteur sous-optimal correspondant est de l'ordre de trois minutes, pour chacun de ces deux exemples, contre plus de 60 minutes pour la solution optimale.

Notons que le coefficient de pondération $T = 5$ correspond à la borne inférieure de l'intervalle de pondération.

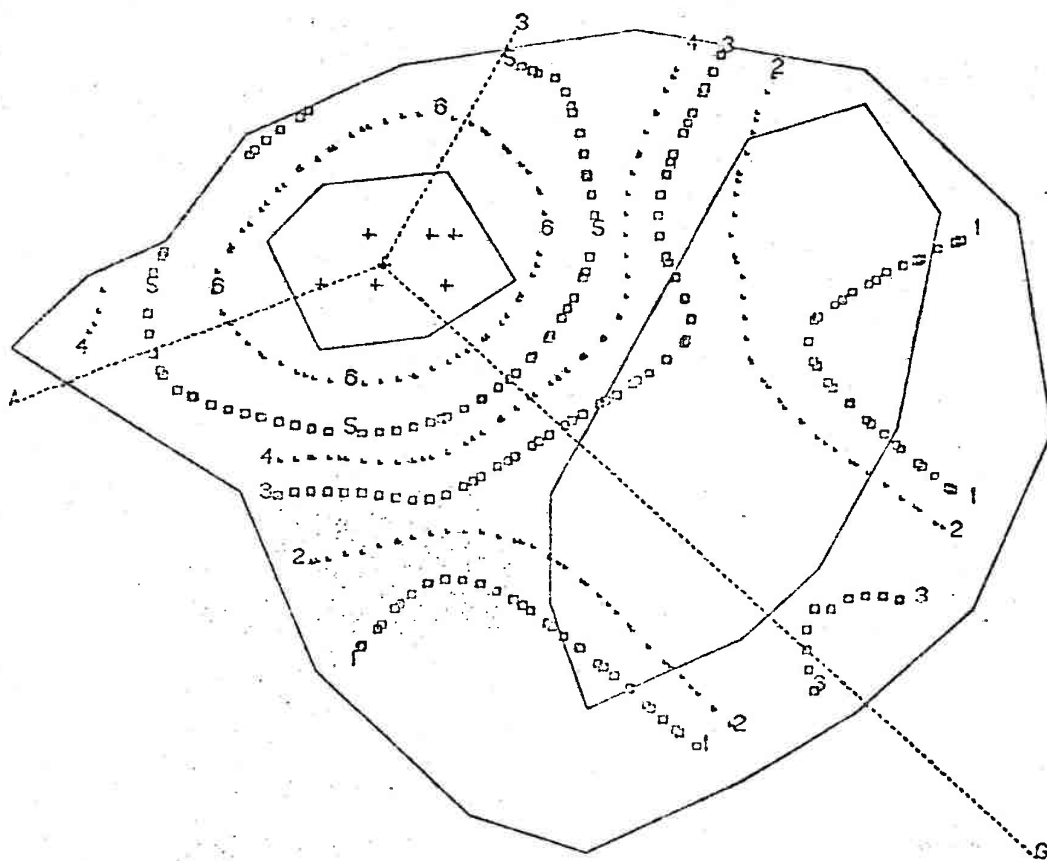
B) Distribution finale des doses après optimisation pour T = 5.

- Dose au "centre" tumeur : 6490 rads.
- Dose moyenne tumeur : 6322 rads.
- Dose moyenne contour-tumeur : 6208 rads.
- Rapport (D) / (DM) : 97 %.
- Nombre de faisceaux actifs : 17.
- Dose moyenne organe-sensible : 2229 rads.



C) Distribution finale des doses après optimisation pour
T = 30.

- Dose au "centre" tumeur : 6570 rads.
- Dose moyenne tumeur : 6434 rads.
- Dose moyenne contour tumeur : 6315 rads.
- Rapport (D) / (DM) : 97 %.
- Nombre de faisceaux actifs : 3.
- Dose moyenne organe-sensible : 2107 rads.

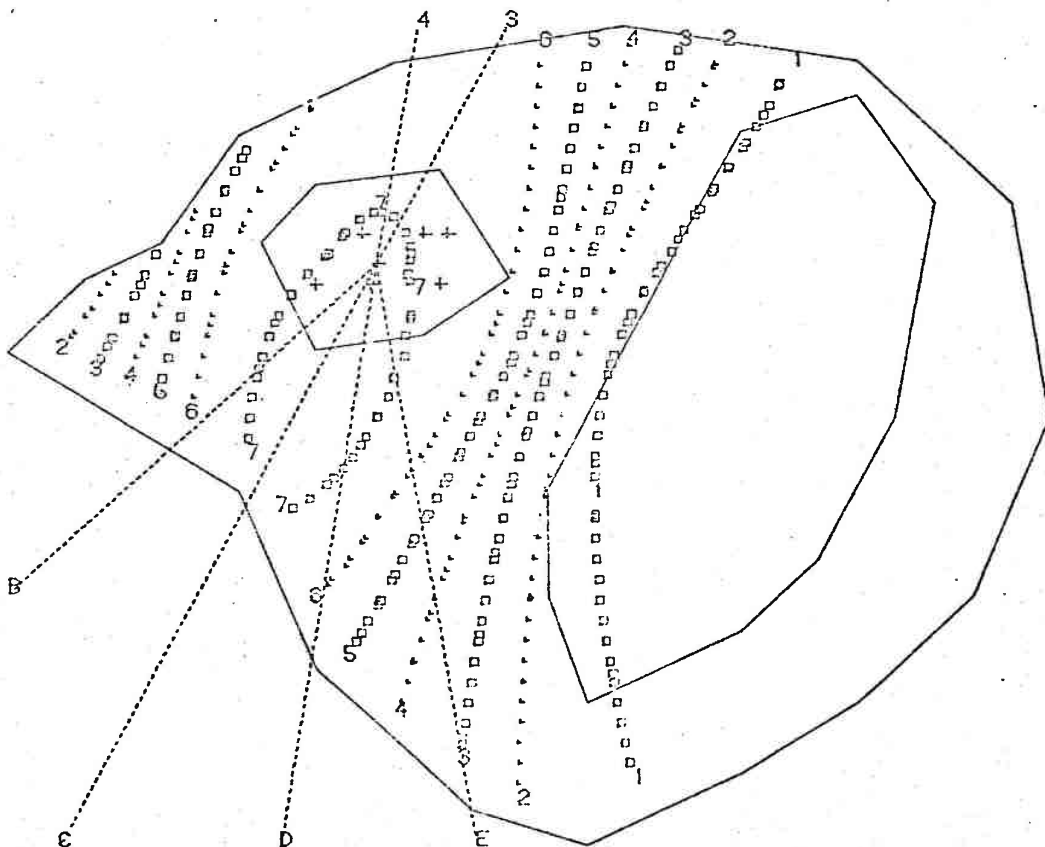


Nous donnons enfin, un exemple d'optimisation de la dose à l'organe sensible (f_1). Pour cela nous avons préféré représenter les isodoses correspondant à $T = 15$, afin de pouvoir faire la comparaison de la distribution des doses avec l'optimum ($T = 15$) dans le cas d'optimisation à la tumeur (f).

Nous remarquons, page suivante, qu'en effet l'utilisation de ce critère a pour résultat la diminution de la dose moyenne à l'organe sensible, qui est égale à 684 rads contre 2403 rads dans le cas d'optimisation à la tumeur. Ce gain se paie par un accroissement de la dose au centre de la tumeur où nous passons de 6345 rads (cas f) à 7110 rads (cas f_1), et à fortiori de la dose moyenne à la tumeur où nous passons de 6198 rads (cas f) à 6878 rads (cas f_1) tout en ayant le même nombre de faisceaux actifs. Enfin, nous constatons que la dose moyenne au contour de la tumeur est égale à 6732 rads, alors que le seuil imposé est de 6000 rads.

D) Distribution des doses finales après optimisation à l'organe sensible pour $T = 15$.

- Dose au centre tumeur : 7110 rads.
- Dose moyenne tumeur : 6878 rads.
- Dose moyenne contour : 6732 rads.
- Rapport (D) / (DM) : 96 %.
- Nombre de faisceaux actifs : 6.
- Dose moyenne organe sensible : 684 rads.



CHAPITRE V

DOSSIER DE
PROGRAMMATION

V - DOSSIER DE PROGRAMMATION

INTRODUCTION

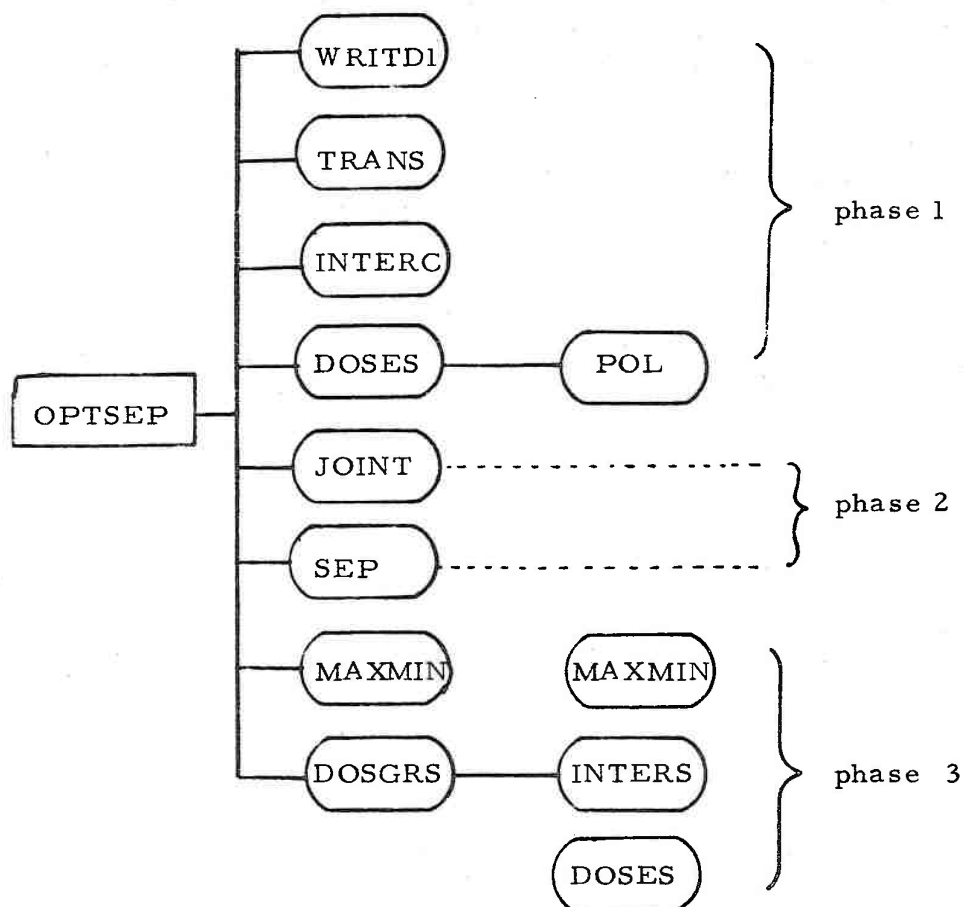
Les différents modules que nous allons présenter sont écrits en FORTRAN IV - MITRA 15 et mis au point sur le MITRA - 15 de l'U. E. R. de Sciences Mathématiques de l'Université de NANCY I.

La configuration utilisée est la suivante :

- * mémoire centrale de 64 K - octets dont environ
28 K-octets réservés au système
36 K-octets utilisables
- * lecteur de carte (600 c/mm)
- * imprimante (133 caractères à 600 l/mn)
- * disque mobile utilisateur de 5 M-octets
- * console de visualisation A/N
- * console de visualisation graphique.

Le programme d'optimisation de radiothérapie cinétique, en variables booléennes que nous avons écrits peut être schématisé et décomposé en trois phases de travaux principaux et indépendants.

Schématisation



Décomposition

* Phase préparatoire ou de calcul des doses.

Dans cette partie nous trouvons :

d'une part le module WRITDI chargé de sauvegarder sur disque : le contour du domaine d'irradiation de la tumeur et des organes sensibles ; le support d'optimisation. Notons que l'introduction de ces données se fait dans notre programme par lecture sur cartes.

D'autre part les modules TRANS (Translation) ; INTERC (Intersection) et DOSES (Doses de références) sont chargés de calculer les doses de références aux points du support d'optimisation.

**** Phase d'Optimisation**

C'est ici que le module JOINT intervient pour faire le "pont" entre la phase préparatoire et la phase d'optimisation à laquelle il appartient. C'est la formalisation du problème linéaire en variables booléennes.

***** Phase de répartition des doses sur une grille de 40×60 points en vue du dessin des isodoses**

Ce sont les modules MAXMIN, INTERS, et DOSGRS qui sont chargés de construire une grille de 40×60 points suivant les valeurs limites du contour (INTERs) et de calculer la dose totale à chaque nœud.

DESCRIPTION DES MODULES

WRITD1

Rôle : Ecriture sur disque du nombre des points et de leurs coordonnées, tant pour les différents contours que pour le support d'optimisation.

Common : INTER/ XS (MA), YS (MA)

Appel : CALL WRITD1 (N, IT, CT, NOS, NPS, NPSI, X, Y, XT, YT)

N : nombre de points délimitant le contour du domaine d'irradiation.

IT : nombre de points intérieurs de la tumeur

CT : nombre de points du contour de la tumeur

NOS : nombre des organes sensibles

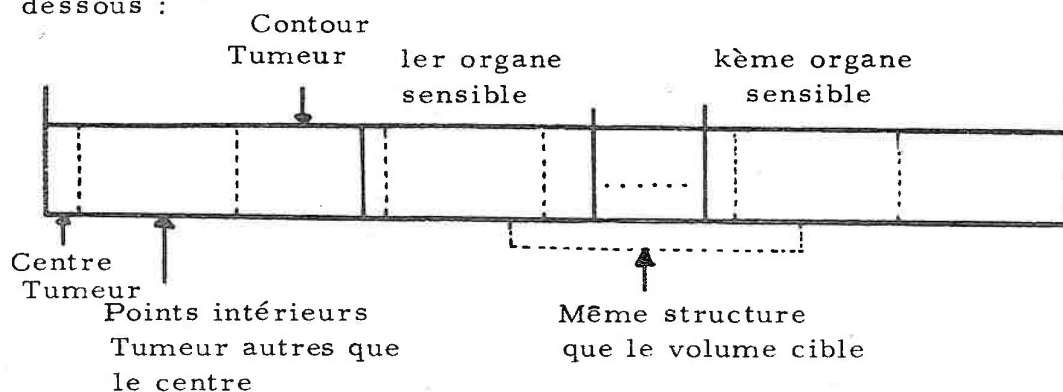
NPS : tableau de taille égale à NOS contenant le nombre total des points de chaque organe sensible.

NPSI : tableau de dimension NOS contenant le nombre des points intérieurs de chaque organe sensible.

X } tableaux de taille égale à N des coordonnées des points du
Y } contour du domaine irradié.

XT } tableaux de taille égale à IT + CT + $\sum_{k=1}^{nos} nps(k)$ des coor-
YT } données des points du support d'optimisation.

L'organisation de chacun de ces tableaux est indiquée ci-dessous :



Remarques

Dans ce sous-programme les tableaux XS (MA), YS (MA) du common INTER sont des tableaux auxiliaires contenant successivement les coordonnées des différents ensembles des points du domaine d'irradiation. Les utilisateurs devront veiller à ce que la valeur numérique donnée à MA ne soit pas inférieure au $\max \{ \max C_i + 1 ; M \}$:

$\max C_i$: le plus grand nombre de points définissant les contours mentionnés ci-dessous

M : le nombre des faisceaux initialement utilisés. Dans notre travail M vaut 18 et nous avons pris MA égale à 20.

TRANS

Rôle : Translation de tout vecteur par rapport au centre de rotation de l'appareil émetteur de radioactivité.

Appel : CALL TRANS (N, IT, CT, NOS, NPS, NARCS, DSA, X, Y, XT, YT, XA, YA, OS)

N, IT, CT, NOS, NPS, X, Y, XT, YT : cf. WRITD1

NARCS : nombre des arcs en lesquels le cercle décrit par l'appareil est partagé. Ceci est toujours égal à M.

DSA : Distance source-axe de rotation.

$\left. \begin{array}{l} XA \\ YA \end{array} \right\}$: Coordonnées du centre de rotation de l'appareil émetteur.

OS : Tableau de taille égale à NARCS, contenant la distance source-centre tumeur à chaque position de la source parmi les NARCS.

INTERC

Rôle : Calcul de l'intersection, la plus proche de la source, de l'axe du faisceau avec le contour du domaine d'irradiation.

Appel : CALL INTERC (X, Y, N, NARCS, OS, XET, YET)

$\left. \begin{array}{l} XET \\ YET \end{array} \right\}$: Tableaux de dimension NARCS, contenant les coordonnées des points d'intersections axes-contour du domaine à irradier.

X, Y, N, NARCS, OS : cf. WRITD1 ; TRANS.

Remarque

Les tableaux XS, YS du common INTER dans ce sous-programme contiennent les coordonnées de l'appareil à chacune de ces positions. Par la suite leur contenu devra rester inchangé en raison d'une multiple utilisation à l'intérieur du programme.

POL

Rôle : Interpolation de Lagrange par un polynôme du second degré.

Appel : CALL POL (J, XET, YET, OS, BBI, BI)

J : Indicateur de la position du faisceau.

BBI : Tableau contenant le support d'interpolation

BI : Valeur du polynome d'interpolation.

DOSES

Rôle : Calcul des doses de références aux points du support d'optimisation suivant les formules dues à BOURGAT et Coll en DSA.

Common : INTER / XS (MA), YS (MA)

Appel : CALL DOSES (XT, YT, NARCS, IT, CT, NOS, NPS, LA, LO, XET, YET, OS, ID1, ID2, DOS).

LA } : Largeur et longueur du champ équivalent du faisceau. Dans
LO } notre travail LA = 10 et LO = 5 ce qui correspond à un
champ de 7 x 7 cm environ.

ID1 } : Paramètres de dimensionnement.
ID2 }

DOS : Matrice de dimension (ID1, ID2) contenant les doses de références d_{ij} aux points d'un support.

XT, YT, NARCS, IT, CT, NOS, NPS, XET, YET,

OS : cf. WRITD1 ; TRANS.

S.S.P appelés : POL

JOINT

Rôle : Il est chargé de construire les tableaux des coefficients de la fonction objectif et des contraintes du problème linéaire à variables booléennes. De plus, il calcule les bornes de l'intervalle $[T_1, T_2]$ décrit au paragraphe II.6.

Appel : CALL JOINT (T, NARCS, IT, CT, NOS, NPS, IMODE, ISEULT, ISEULS, DOS, Z, INFO)

T : Coefficient de pondération.

IMODE: Indicateur de choix de la fonction objectif à optimiser. Il a la valeur

-1 en cas de minimisation de la dose totale reçue au centre de gravité de la tumeur ;
0 en cas de minimisation de la somme des doses totales aux points de la tumeur
1 en cas de minimisation de la dose maximale reçue en un point des organes sensibles.

ISEULT : Valeur seuil d'irradiation à chaque point de la tumeur.

ISEULS : Tableau de taille NOS, contenant les valeurs seuils associées à chaque organe sensible.

DOS : Matrice de dimension (KA, KB) contenant dans ce module les coefficients des contraintes à la tumeur et aux organes sensibles. La valeur numérique donnée à KA ne doit pas être inférieure aux $\max \{NS ; 40\}$ où NS le nombre total des points du support, et KB = 60.

Z : Tableau de taille égale à NARCS, contenant les coefficients de la fonction objectif choisie.

INFO : Indicateur d'incident suivant le coefficient de pondération T utilisé. Il a la valeur :

0 en cas où $T \in [T_1, T_2]$. Cela veut dire que le problème peut avoir une solution ; 1 dans le cas contraire.
--

SEP

Ce sous-programme est la mise en œuvre de l'algorithme décrit au paragraphe III.4 qui est d'ailleurs le noyau de notre travail. Notons que pour des raisons techniques il y a de légères différences en ce qui concerne la programmation, avec l'algorithme comme par exemple la construction de l'ensemble $\hat{L}_p$.

En raison de l'importance de ce sous-programme nous allons donner une plus large description en notant les points les plus remarquables, ainsi que les principaux tableaux, matrices ou identificateurs utilisés.

Comme nous l'avons dit au paragraphe III.4 (cf. p.29 , remarques) nous décrirons également le critère de choix d'un successeur d'un sommet S_p que nous exposerons en premier.

Critère de choix d'un successeur

Nous supposons nous trouver à un sommet S_p de l'arborescence (pour l'utilisation d'un seul indice de description d'un sommet voir paragraphe III.2 - (2)).

D'une manière générale nous calculons les écarts :

$$d_i = b_i - \sum_{j \in U_p} a_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m$$

où m le nombre de contraintes ; a_{ij} , b_i les coefficients des contraintes et leur second membre ; U_p est l'ensemble des indices des composantes égales à 1 du vecteur X_p associé au sommet S_p .

Nous voulons que les d_i deviennent tous négatifs ou nuls afin que les contraintes associées soient vérifiées.

Pour chaque $j \in \hat{L}_p$ nous testons l'évolution des d_i ;

* si un d_i devient négatif ou nul, la contrainte correspondante est satisfaite.

** Pour les d_i qui restent positifs, on estime l'amélioration obtenue en calculant pour chaque $j \in \hat{L}_p$ la somme des nouveaux d_i , $d_i > 0$ tel que :

$$\text{nouveau } d_i = \text{ancien } d_i - a_{ij}.$$

Plus cette somme (somme positive) est petite, meilleure est la direction. Nous choisissons alors l'indice j qui correspond au :

$$\min_{j \in \hat{L}_p} \left\{ \sum_{i=1}^m (d_i - a_{ij}) \text{ avec } d_i - a_{ij} > 0 \right\}$$

Si plusieurs indices peuvent être choisis, on considérera celui pour lequel l'accroissement de la fonction objectif est le plus faible. S'il y a encore ambiguïté à ce niveau du choix, on prendra le dernier des indices donnant le plus petit accroissement.

Ce critère de choix d'un successeur permet d'obtenir un sommet successeur "s'approchant le plus possible" d'un sommet réalisable.

Exemple :

Nous considérons un problème linéaire en variables booléennes dont les contraintes sont les suivantes :

$$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \geq 5$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \geq 0$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 1$$

Nous supposons nous trouver au sommet S_0 avec $X_0 = (0, 0, 0, 0)$ et $\hat{L}_0 = \{1, 2, 3\}$. Il est évident que si $(\forall i)(d_i \leq 0)$ les contraintes sont vérifiées, mais il n'en n'est pas ainsi.

En S_0 nous avons :

$$d_1 = 5 \quad d_2 = 0 \quad d_3 = 2 \text{ (une seule contrainte vérifiée).}$$

Nous allons choisir un seul indice j de $\hat{L}_0$, tel que $x_j = 1$ au sommet successeur, correspondant à la meilleure direction.

Pour se faire nous calculons pour chaque j les nouveaux d_i :

$$\begin{array}{c|c|c}
 J = 1 : d_1 = 5 - 3 = 2 & J = 2 : d_1 = 5 + 2 = 7 & J = 3 : d_1 = 5 + 3 = 8 \\
 d_2 = 0 - 2 = -2 & d_2 = 0 - 1 = -1 & d_2 = 0 - 1 = -1 \\
 d_3 = 2 - 1 = 1 & d_3 = 2 + 1 = 3 & d_3 = 2 + 1 = 3
 \end{array}$$

L'indice j qui correspond au :

$$\min_{j \in \hat{L}_0} \left\{ \sum_{i=1}^3 (d_i - a_{ij}) \text{ avec } d_i - a_{ij} > 0 \right\} =$$

$$\min_{j \in \hat{L}_0} \{ (2 + 1), (7 + 3), (8 + 3) \} = 2 + 1$$

est alors $j = 1$.

Sous-programme SEP

Ce sous-programme calcule la (les) solution (s) optimale (s) d'un problème linéaire comme suit :

$$[\min] f(X) = C \cdot X \text{ avec } A \cdot X \geq B \text{ et } X \in \{0, 1\}^n.$$

Il comporte l'édition de messages permettant de suivre l'évolution des différentes solutions réalisables (en cas d'existence), de différentes quantités spécifiques au problème de radiothérapie cinétique et de messages caractérisant les incidents rencontrés.

Paramètres formels

NARCS : Nombre de variables booléennes.

INDSOL : Tableau de taille égale à NARCS contenant successivement la meilleure solution réalisable déjà trouvée.

INFO1 : Indicateur d'incident. Il a la valeur

$$\begin{array}{|l}
 1 \text{ en cas d'existence de solution du problème} \\
 0 \text{ dans le cas contraire.}
 \end{array}$$

INFO2 : Indicateur de débordement des matrices dépendant du paramètre local I (compteur du nombre des sommets d'une descendance partielle d'un sommet S_p de l'arborescence). Il a la valeur

1	en cas de débordement
0	dans le cas contraire.

CONTR : Matrice de dimension (KA, KB) {cf. matrice DOS dans SSP JOINT} contenant les coefficients des contraintes ainsi que leur second membre.

IT, CT, NOS, NPS : cf. WRITD1 ; Z := cf. JOINT.

Principaux identificateurs spécifiques à SEP

SOLL : contient en permanence $f(X_p)$, valeur de la fonction objectif pour le dernier sommet examiné.

VECN : Tableau de dimension NARCS, contenant les éléments de l'ensemble $\hat{L}_p$ (cf. III.4 - (b)).

INDN : Tableau de taille au moins égale à NARCS contenant le card (VECN) à un sommet S_p de l'arborescence.

DMEIL : Tableau de dimension NARCS contenant les quantités

$$\left\{ \sum_{i=1}^m (d_i - a_{ij}) \text{ avec } d_i - a_{ij} > 0 \right\} \text{ pour } j \in \hat{L}_p$$

PREDES : Tableau de taille NA arbitraire dont les éléments indiquent de quel sommet S_p , un sommet S_q est descendant. Dans notre programme NA est égal à 2×18 .

- PRED : Tableau de dimension NA indiquant le prédécesseur d'un sommet S_p .
- ITER : Tableau de taille NA dont les éléments indiquent l'ordre d'apparition naturel d'un sommet S_p de l'arborescence.
- TRAVAI : Tableau auxiliaire de taille MA arbitraire chargé de préparer le contenu du tableau VECN.
- DIF : Tableau de taille égale au nombre de points du support d'optimisation contenant les écarts $d_i = b_i - \sum a_{ij}$.
- KK : Matrice de dimensions (NA, NARCS) contenant les successeurs déjà étudiés d'un sommet S_p (voir paragraphe III.4 - (b)).
- IND : Matrice de dimension (NA, NARCS) contenant le vecteur X_p associé à un sommet S_p .

Remarque

Dans le cas d'apparition à l'imprimante du message "LA DIMENSION DES MATRICES DEPENDANT DE L'INDICE I EST INSUFFISANTE", les utilisateurs devront augmenter la taille des matrices dépendant de la dimension NA décrite ci-dessus. Cette dimension doit être la plus grande possible en fonction de la taille mémoire de l'ordinateur utilisé et du nombre de variables du problème.

LISTE des INSTRUCTIONS

```

SUBROUTINE SEP(N,IT,CT,NOS,NPS,CONTR,Z,INDSOL,INFO1,INFO2)
C
C PROGRAMMATION LINEAIRE A VARIABLES BOOLEENNES PAR UNE METHODE
C DE S.E.P
C
INTEGER CONTR,PRED,AUX,CT
INTEGER SOL,PREDES,VFCN,TRAVAI,VAR
DIMENSION VECN(20),INDN(20),DMFIL(20)
DIMENSION CONTR(70,1),Z(1),NPS(1),INDSOL(1)
DIMENSION PRED(36),ITER(36),PREDES(36)
DIMENSION TRAVAI(60)
COMMON/PPX/DIF(40),AUX(40)
COMMON/CSEP/KK(36,20),IND(36,20)

INFO1=0
INFO2=0
NTS=0
199 DO 199 J=1,NOS
   NTS=NTS+NPS(J)
   NBRE=IT+CT+NTS
   NN=N+1
   DO 299 I=1,36
      PRED(I)=0
      ITER(I)=0
      PREDES(I)=0
   DO 299 J=1,20
      KK(I,J)=0
299   IND(I,J)=0
   DO 499 I=1,20
      DMFIL(I)=0
      INDSOL(I)=0
   VFCN(1)=0
499   INDN(1)=0
   DO 500 I=1,40
500   DIF(I)=0.
   IF(KEY(1).EQ.0) GO TO 100
   PRINT104,(Z(I),I=1,N)
   PRINT105
   DO 3 I=1,NBRE
3     PRINT106,(CONTR(I,J),J=1,N),CONTR(I,NN)
100   CONST=0.
   PRINT105
   PRINT101,(J,J=1,N)
   SOL=3*10**5.
   IAIG=1
   I=1
   ITER(I)=I
   PREDES(I)=0
   PRED(I)=0
80   DO 11 ID=1,NBRE
      IF(KEY(10).EQ.1) GO TO 1000
      CONSIDI=0

```

```

DO 10 JI=1,N
IF(IND(I,JI).NE.0) CONSDI =CONSDI +CONTR(ID,JI)
10 CONTINUE
11 DIF(ID)=CONTR(ID,NN)-CONSDI
SOM1=0
DO 12 J=1,N
IF(IND(I,J).NE.0) SOM1=SOM1+Z(J)
12 CONTINUE
VALZ=SOM1

DO 13 IS=1,NBRE
IF(DIF(IS).LE.0) GO TO 13
GO TO 70
13 CONTINUE
SOL=1
IF(VALZ.GE.SOLL) GOTO 5
SOLL=VALZ
DO 6 I1=1,N
6 INDSOL(I1)=IND(I,I1)
5 SOL1=VALZ+CONST
TMOY=0.
ITC=11+CT
DO 8 K=1,ITC
SOM=0.
TSOM=0
DO 7 J=1,N
IF(INDSOL(J).EQ.1) TSOM=TSOM+1
7 SOM=SOM+INDSOL(J)*CONTR(K,J)
AUX(K)=SOM
8 TMOY=TMOY+AUX(K)
TMOY=TMOY/ITC
IRAP=100*TMOY/AUX(1)
INFO1=1
PRINT102,ITER(I),(IND(I,J),J=1,N),TSOM,VALZ,TMOY,AUX(1),TRAP
GO TO 51
70 SOL1=VALZ+CONST
IRET=1
81 JJ=1
DO 22 J=1,N
IF(IND(I,J).NE.1) GO TO 22
TRAVAI(JJ)=J
JJ=JJ+1
22 CONTINUE
IF(SOLL.GE.3*10**5.) GO TO 44
DO 26 JD=1,N
IF(VALZ+Z(JD).LT.SOLL) GO TO 26
TRAVAI(JJ)=JD
JJ=JJ+1
26 CONTINUE
44 IF(KK(I,1).EQ.0) GO TO 46
I3=KK(I,1)+1
DO 48 I2=2,I3
TRAVAI(JJ)=KK(I,I2)
JJ=JJ+1
48 CONTINUE
46 INDTRA=JJ-1
IF(INDTRA.LE.60) GO TO 350

```

```
PRINT115
INF02=1
RETURN
350 I3=1
DO 49 I2=1,N
DO 60 J1=1,INDTRA
IF(IPRAVAI (I1).EQ.I2) GO TO 49
60 CONTINUE
VECN(I3)=I2
I3=I3+1
49 CONTINUE
INDN(I)=I3-1
I3=I3-1

IF(INDN(I).EQ.0) GO TO 51
IS=1
15 I1=1
IF(DIF(IS).GT.0) GO TO 14
17 IS=IS+1
IF(IS.LE.NBRE) GO TO 15
GO TO 52
14 SOM=0
16 MM=VECN(I1)
IF(CONTR(IS,MM).GT.0) SOM=SOM+CONTR(IS,MM)
I1=I1+1
IF(I1.LE.INDN(I)) GO TO 16
IF(DIF(IS)-SOM.GT.0) GO TO 51
GO TO 17
51 KK(I,1)=0
I=PRED(I)
I4=I+1
I3=KK(I,1) +1
DO 88 I1=I4,N
DO 88 I2=1,I3
88 KK(I1,I2)=KK(I,I2)
IF(INDN(I).GE.2) GO TO 30
IF(I.EQ.0) GO TO 71
GO TO 51
52 IF(INDN(I).NE.1) GO TO 50
M1=VECN(I)
GO TO 30
50 IM=INDN(I)
DO 18 I1=1,IM
SOM=0
DO 19 ID=1,NBRE
MM=VECN(I1)
IF(DIF(ID)-CONTR(ID,MM).GT.0) SOM=SOM+DIF(ID)-CONTR(ID,MM)
19 CONTINUE
18 DMEIL(I1)=SOM
DMINME=3*10**5.
DO 20 I1=1,IM
IF(DMEIL(I1).LT.DMINME ) DMINME =DMEIL(I1)
20 CONTINUE
ZMIN=32000.
DO 21 I1=1,IM
IF(DMEIL(I1).NE.DMINME) GO TO 21
```

```
MM=VECN(I1)
TF(Z(MM).GE.ZHIN) GO TO 21
7MIN=Z(MM)
M1=MM
21 CONTINUE
KK(I,1)=KK(I,1)+1
T1=KK(I,1)+1
KK(I,11)=M1
GO TO 61
30 KK(I,1)=KK(I,1)+1
I1=KK(I,1)+1
KK(I,11)=VECN(I)
61 I=I+1
IF(I.LE.36) GO TO 360
INFO2=1
PRINT114
RETURN
360 IAIG=IAIG+1

KK1=JAIG
ITER(1)=IAIG
PRED(I)=IREI
PREDFS(I)=ITER(IRET)
DO 62 I1=1,N
62 IND(I,I1)=IND(IRET,I1)
IND(I,M1)=1
GO TO 80
1000 PRINT1001
71 SOLL=SOLL+CONST
IF(INFO1.EQ.0) GO TO 400
PRINT111
PRINT3000,KK1
PRINT109,(J,J=1,N),(INDSOL(J),J=1,N)
PRINT112,I,SOM
DO 330 I=1,NBRE
330 AUX(I)=ABS(AUX(I))
PRINT110,AUX(1)
IT1=IT+1
IT2=IT+CT
PRINT115,(AUX(I),I=IT1,IT2)
DO 320 K=1,NOS
K1=IT2+1
K2=IT2+NPS(K)
SOM=0.
DO 310 I=K1,K2
SOM1=0.
DO 290 J=1,N
290 SOM1=SOM1+INDSOL(J)*CONTR(I,J)
310 SOM=SOM+SOM1
SOM=ABS(SOM/NPS(K))
PRINT116,K,SOM
320 IT2=NPS(K)
RETURN
400 PRINT117
RETURN
```

```

101  FORMAT(/5X,'ETAPE',2X,18I3,2X,'NBRE-FAISCEX',5X,'SOUS-OPTM'
*,2X,'MOY-TUMEUR',2X,'DOSE-CENTRE',2X,'MOY/CEN'//)
102  FORMAT(5X,I5,2X,18I3,6X,I2,12X,I5,7X,I5,7X,I5,6X,F5.1,'%')
103  FORMAT(22X,'FAISCEAU:ACTIF=1 , OCCULTE=0')
104  FORMAT(/2X,'FONCTION A MINIMISER MIN Z = '//2X,18(I6,','))
105  FORMAT(/2X,18I6,'>=A',I5)
106  FORMAT(/2X,18I6,'>=A',I5)
109  FORMAT(/10X,'ETAT DES *',18I3/19X,'*'/10X,'FAISCEAUX*',18I3)
110  FORMAT(/10X,'CENTRE TUMEUR(EN RADS)',I7)
111  FORMAT(///20X,'A L OPTIMUM NOUS OBTENONS')
112  FORMAT(/10X,'NBRE DE FAISCEAUX ACTIFS=',I3)
113  FORMAT(////////30X,'LA DIMENSION DU TABLEAU-TRAVAI-INSUFISANTE')
114  FORMAT(////////,20X,'LA DIMENSION DES MATRICES DEPENDANT DE L,
*INDICES I EST INSUFISANTE')
115  FORMAT(10X,'CONTOUR TUMEUR ... ',3X,6I7)
116  FORMAT(10X,'MOY ORG SENS ... NO',I3,I7)
117  FORMAT(/40X,43('*')/40X,'*IL N Y A PAS DE SOLUTION'
*, ' POUR CE PROBLEME*/40X,43('*'))
1001 FORMAT(/40X,38('*')/40X,'*LE TRAITEMENT POUR CE COEFFICIENT DE,
*/40X,'*PONDERATION DEVIENT TRES LONG. A CE */40X,
**NIVEAU NOUS OBTENONS',16X,'*/40X,38('*'))
3000 FORMAT(10X,'NBRE D,ITERATION =',I7)
      END

```

MAXMIN

Rôle : Calcul de la valeur maximale et minimale d'une table des valeurs.

Appel : CALL MAXMIN (T, N, TMAX, TMIN).

T : Tableau de N valeurs.

TMAX }
TMIN } : Valeur maximale et minimale du T.

INTERS

Rôle : Calcul des coordonnées des points d'intersection P_1 et P_2 d'une droite parallèle à l'abscisse avec le contour du domaine d'irradiation.

Appel : CALL INTERS (Y, XC, YC, N, X1, Y1)

Y : Paramètre représentant la droite $y = b$.

XC }
YC } : Tableaux contenant les coordonnées des points délimitant un contour.

N : Nombre des points du contour discrétisé.

X1 }
Y1 } : P_1, P_2

DOSGRS

Rôle : Calcul des doses de référence sur les points d'une grille de 60 colonnes et 40 lignes. Etant donné que nous nous intéressons seulement aux points appartenant au domaine

d'irradiation, à chaque point extérieur (indication fournie par INTERS) nous affectons une valeur négative.

Common : CSEP / DOSGR (NA, NB), TX (NA), TY (NA).

Appel : CALL DOSGRS (XC, YC, N, M, XET, YET, LA, LO, OS, T, INDSOL, DOSGRI, NDEP)

XC, YC, N, XET, YET, LA, LO, OS, T, INDSOL : cf. INTERS, INTERC, DOSES, JOINT.

M : Nombre de faisceaux initialement utilisés.

DOSGRI : Matrice de dimension égale à $N1 \times N2$ représentant la distribution des doses en des points régulièrement répartis sur une grille de 60 colonnes et 40 lignes.

NDEP : Adresse du début de l'article du fichier de la distribution des doses sur la grille, associée à un coefficient de pondération T. Notons que chaque article est constitué de 40 enregistrements binaires de 240 octets et que chaque enregistrement contient les doses d'une même colonne de la grille.

Si T_i le $i^{\text{ème}}$ coefficient de pondération, alors
 $NDEP = i * 50$ pour $i = 0, 1, 2 \dots$. Le premier enregistrement se trouve à l'adresse $NDEP + 1$ en raison de la réservation d'adresse NDEP pour diverses informations.

Remarque : La matrice DOSGR (NA, NB) du common CSEP contient successivement les doses de références aux points d'une même colonne dont les coordonnées sont rangées dans les tableaux TX, TY. Les utilisateurs devront veiller à ce que $NA \geq 60$ et $NB \geq M$.

S.S.P. appelés : MAXMIN, INTERS, DOSE.

TABLEAU RECAPITULATIF

Nous donnons par la suite un tableau récapitulatif des différents paramètres utilisés dans chaque module, tableau conçu de telle manière que :

- chaque paramètre est décrit dans une ligne ;
- le signe " ⊗ " indique que le paramètre est décrit dans le sous-programme repéré en haut de la colonne ;
- le signe "*" indique que le paramètre est utilisé dans le sous-programme correspondant ;
- enfin le signe "**" indique que l'identificateur est utilisé dans le sous-programme correspondant, mais avec une signification différente du sous-programme de description.

S.S.P.	WRITDI	TRANS	INTERC	DOSES	POL	JOINT	SEP	MAXMIN	INTERS	DOSGRS	TYPE DE PARAMÈTRE TABLEAU	
Identificateur												
N	(*)	*	*					*	*	*	I	
IT,CT,NOS,NPS	(*)	*		*		*	*				I	
NPSI	(*)										I	
X, Y	(*)	*	*								R	+
XT, YT	(*)	*		*							R	+
NARCS		(*)	*	*		*	*			*	I	
OS		(*)	*	*	*					*	R	+
XET, YET			(*)	*	*						R	+
DSA, XA, YA		(*)									R	
LA, LO				(*)						*	I	
ID1, ID2				(*)							I	
DOS				(*)		**	**				I	+
J, BBI, BI					*						I,R	+
T						(*)				*	I	+
IMODE, ISEULT ISEULS, INFO						(*)					I	
Z						(*)	*				R	+
INDSOL INFO1, INFO2							(*)				I	
TMAX, TMIN								(*)			R	+
X1									(*)		R	+
Y1, XC, YC									(*)	*	R	+
DOSGRI										(*)	I	+
NDEP										(*)	I	

* I = Entier ; R = Réel.

Annexe

Bibliographie

CALCULS SPECIFIQUES AU CALCUL

DE LA DOSE DE REFERENCE

* Calcul de la dose de Référence

Le calcul de la dose de référence est une méthode empirique, rapide mais elle reste approximative. POTDEVIN dans sa thèse utilise les formules précises, mais lourdes de CUNNINGHAM.

- Nous désignons par :

F_j : La position du jème faisceau. Elle est donnée par l'angle polaire de son axe, et par la distance DSA.

P : Le point d'entrée (Intersection axe-contour).

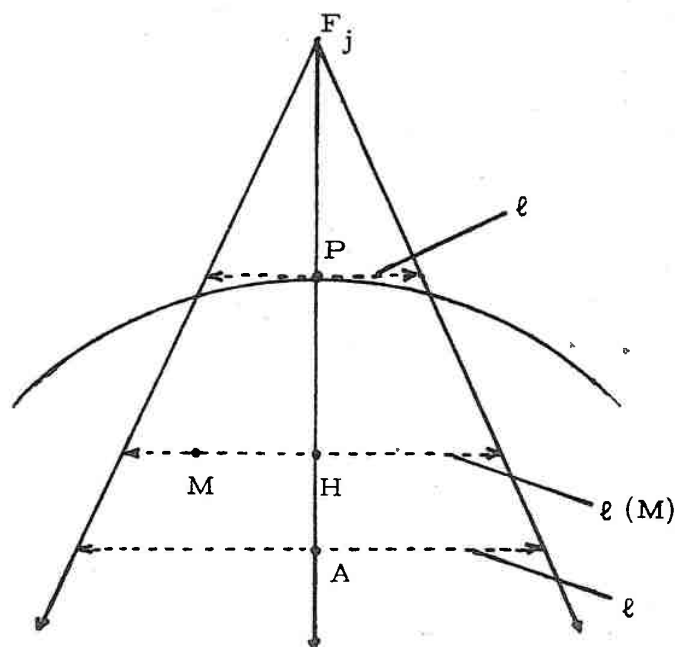
ℓ, L : La largeur et la longueur du champ du faisceau.

$a = \frac{2\ell \cdot L}{\ell + L}$: Champ équivalent.

$\ell(P_i)$: La largeur du champ du faisceau au niveau d'un point P_i du volume irradié.

DSP : Distance source-peau.

- Nous supposons que l'axe du faisceau est perpendiculaire au domaine à irradier (section du volume à irradier par le plan du traitement).



A) Pour un point H de l'axe du faisceau (fig. 1) situé dans le domaine, et pour une distance source-axe, la dose de référence, notée par $d(H)$ est donnée par :

$$d(H) = c \cdot e^{B \cdot PH}$$

où c est une constante qui dépend de l'appareil utilisé (ici nous prendrons $c = 110$), et B une fonction des dimensions du faisceau et de la DSP, dont la valeur est donnée approximativement par :

$$B = \beta_0 + \beta_1 a + \beta_2 a^2$$

Les coefficients β_0 , β_1 , β_2 étant calculés par interpolation linéaire à partir du tableau suivant.

	DSP en cm			
	50	60	80	100
β_0	-0,1027	-0,0979	-0,087	-0,082
β_1	0,0038	0,00405	0,00328	0,00299
β_2	-11.10^{-5}	$-12,8.10^{-5}$	$-9,1.10^{-5}$	-8.10^{-5}

B) En un point quelconque M du corps, la dose de référence, notée par $d(M)$, est donnée par :

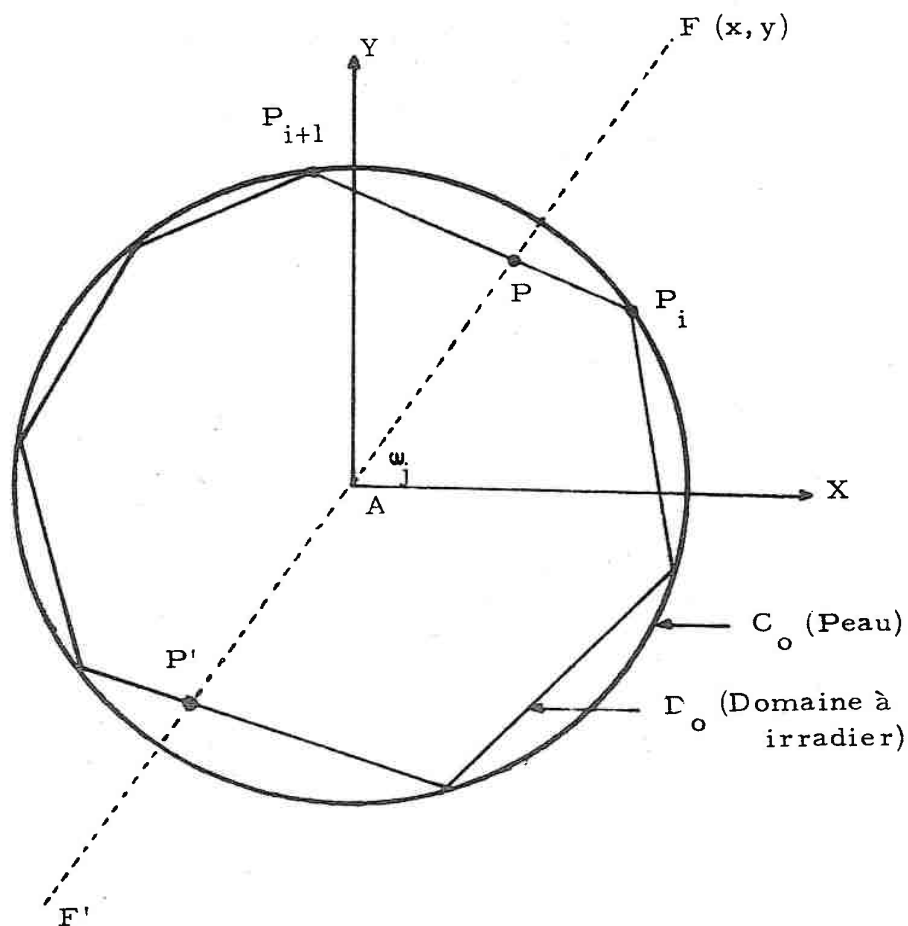
$$d(M) = d(H) \cdot (1 - e^{k(MH - \ell(M)/2)/2}) \text{ si } MH \leq \ell(M)/2$$

$$d(M) = d(H) \cdot e^{k(\ell(M)/2 - MH)/2} \text{ si } MH \geq \ell(M)/2$$

- où
- . MH est la distance du point M à sa projection H sur l'axe du faisceau ;
 - . $d(H)$ est la dose de référence en H calculée précédemment ;
 - . k est une constante positive qui permet de tenir compte de la pénombre : $k = 1,5$.

INTERSECTION AXE-CONTOUR

Soit D_0 l'ensemble fini des points qui définit le domaine à irradier. Nous supposons que ce domaine est un ensemble convexe, de sorte que toute droite coupe le domaine en deux points au plus.



Il est nécessaire de déterminer d'une part deux points successifs P_i et P_{i+1} du domaine D_0 de manière que $F'F$ coupe le segment $P_i P_{i+1}$ en un point P situé entre eux, et d'autre part les coordonnées du point P le plus proche de la source.

Recherche du P_i et P_{i+1}

Soit un faisceau F_j de coordonnées (x, y) , et ω_j l'angle polaire de son axe. AF a pour équation

$$y \cos \omega_j - x \sin \omega_j = 0 \quad (1)$$

Si un point $P_i (x_i, y_i)$ se situe hors de FA, la quantité

$$c_i = y_i \cos \omega_j - x_i \sin \omega_j \quad (2)$$

prend une valeur non nulle qui est du signe "+" ou "-" suivant la position du point par rapport à FA.

Pour que deux points $P_i (x_i, y_i)$ et $P_{i+1} (x_{i+1}, y_{i+1})$ se trouvent de part et d'autre de FA, il suffit que le produit $C_i \cdot C_{i+1}$ soit négatif. Dans le cas où le produit est égal à zéro le point P se confond avec un des deux points P_i ou P_{i+1} .

Si $x_i \neq x_{i+1}$ et ω_j égal à $\pi/2$ ou $3\pi/2$ on pose

$$x^* = 0$$

$$y^* = \frac{x_i \cdot y_{i+1} - y_i \cdot x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

Définition du point P

Afin de choisir le point d'intersection le plus proche de la source, nous testons la quantité :

$$\lambda = \begin{cases} x - x^*/x & \text{si } x \neq 0 \\ y - y^*/y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On choisit le point (x^*, y^*) pour lequel $\lambda < 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - ALI-AHMED H Techniques d'optimisation en radiothérapie externe.

Thèse de Docteur ès-Sciences -
NANCY 1977.
- 2 - BALAS E. Un algorithme additif pour la résolution des programmes linéaires en variables booléennes.

C. R. Acad. Sc. PARIS 1964,
258, 3817 - 3820.
- 3 - BEZAUT O. Programmation linéaire à variables booléennes par la méthode SEP.

Thèse de Doctorat de Spécialité,
NANCY 1975.
- 4 - BERNARD D. - DUTREIX A.

Calcul des doses par ordinateur en télécobalthérapie.

J. Radiol. Electrol. 1972, 53,
233 - 240.
- 5 - BOURCAT J. F. et Coll

Optimisation par ordinateur du traitement en télécobalthérapie.

J. Radiol. Electrol. 1974, 55, 775-779.
- 6 - CONDRAN M - MINOUX M.

Graphes et algorithmes.

Editions EYROLLES, PARIS 1979.

- 7 - LEGRAS B. L'optimisation automatique des doses en radiothérapie externe.
Thèse de Biologie Humaine,
NANCY, 1978.
- 8 - LEGRAS J. Notes de cours sur la méthode SEP.
NANCY 1975.
- 9 - LEGRAS J. Méthodes et techniques de l'analyse numérique.
DUNOD, PARIS, 1971.
- 10 - MANTEL J. et Coll.
Automatic variation of field size and dose rate
in rotation therapy.
Int. J. Radia. Oncology Biol. Phys.
1977, 2, 697-704.
- 11 - PLATEAU G. Contribution à la résolution du problème du knapsack.
Thèse de Doctorat de Spécialité -
LILLE, 1971.
- 12 - POTDEVIN M. Programmes d'optimisation non linéaire en radiothérapie externe.
Thèse de Docteur ès-Sciences,
NANCY 1980.
- 13 - REDPATH A. T. et Coll
A new technique for radiotherapy planning
using quadratic programming.
Phys. Med. Biol. 1976, 21, 781-791.

14 - WEINKAM J. J. - STERLING T. D.

A versatile system for three-dimensional
dose computation and display, R. T. P.

Comput. Progra. Biomed. 1972,
178-192.

NOM DE L'ETUDIANT : SCOUTELIS Michel

NATURE DE LA THESE : 3ème CYCLE - Informatique

VU, APPROUVE

et PERMIS D'IMPRIMER

NANCY LE 09.DEC 1980 11570

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



M. BOULANGE