UNIVERSITE DE NANCY I

SYSTEMES DIFFERENTIELS NON ANTICIPATIFS

THESE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE EN MATHEMATIQUES PURES

par

MICHAËL RUSINOWITCH

Soutenue le 19 Juin 1984

Membres du Jury :

Présidente : D. HUET

Examinateurs : C. GEORGE

M. JIMENEZ POZO

M. PIERRE

UNIVERSITE DE NANCY I

SYSTEMES DIFFERENTIELS
NON ANTICIPATIFS

THESE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE EN MATHEMATIQUES PURES

par

MICHAËL RUSINOWITCH

Soutenue le 19 Juin 1984

Membres du Jury :

Présidente : D. HUET

Examinateurs : C. GEORGE

M. JIMENEZ POZO

M. PIERRE

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Claude GEORGE pour l'attention, les précieux conseils et les orientations fructueuses qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail.

Je remercie Mademoiselle Denise HUET pour son soutien et pour l'honneur qu'elle me fait de présider le jury.

Je remercie Messieurs Miguel JIMENEZ POZO et Michel PIERRE, dont la présence au jury m'honore.

Je remercie Madame DRIQUERT et Mademoiselle TESOLIN qui se sont chargées de la frappe du manuscrit.

SOMMAIRE

SYSTEMES DIFFERENTIELS NON ANTICIPATIFS

0.1.- INTRODUCTION

Il semble naturel de penser que la vitesse à l'instant t d'un véhicule spatial, commandé depuis la terre, dépende de sa position à l'instant $t-\tau$, où τ représente le temps mis par un signal (radio) pour couvrir deux fois la distance séparant cet engin de son centre de contrôle au sol.

Ainsi la modélisation d'un système consiste souvent à exprimer la variation de ses paramètres à l'instant t comme une fonction de leurs valeurs antérieures à t. Cette approche traduit, en fait, le déterminisme des phénomènes et conduit à des équations différentielles que l'on peut qualifier de "non anticipatives".

Volterra fut le premier à étudier de manière systématique de telles équations, en particulier pour décrire l'écologie des systèmes proie-prédateur. Depuis, les équations non anticipatives sont apparues dans l'étude de la propagation des épidémies, de la circulation du fuel dans les centrales nucléaires, de la viscoélasticité...

Dans le premier chapitre nous nous sommes attachés à des problèmes d'existence sous des conditions de Carathéodory concernant les systèmes non anticipatifs. Plusieurs méthodes ont été envisagées : solutions approchées, point fixe et point fixe pour la fonction dérivée ; cette dernière s'est avérée conduire aux généralisations les plus intéressantes. Nous avons ensuite considéré dans le second chapitre des équations linéaires non anticipatives, faisant apparaître de nombreuses similitudes avec les équations différentielles ordinaires, et notamment l'existence d'un noyau résolvant, fort utile lorsqu'il s'agit d'étudier les problèmes de contrôle qui sont l'objet du troisième chapitre. Enfin, nous inspirant des travaux de Grimmer et Seifert sur la stabilité des équations intégro-différentielles, nous avons dégagé, dans le dernier chapitre, des conditions suffisantes pour que des perturbations non anticipatives n'affectent pas la stabilité ou le comportement asymptotique de systèmes ordinaires.

0.2.- DEFINITION - EXEMPLES

DEFINITION : Soit I un intervalle réel et $n,m \in \mathbb{N}^*$.

On dira que l'application $f : C(I\, ; \mathbb{R}^n) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonctionnelle non anticipative si

$$\forall x,y \in C(I\,;\mathbb{R}^n) \quad , \quad \forall t \in I \quad ,$$
$$(\ \forall \tau \in I \cup]-\infty\,, t] \quad x(\tau) = y(\tau)) \Rightarrow f(x,t) = f(y,t) \quad .$$

Dans les exemples suivants nous prendrons

$$f : C([0,T]\,;\mathbb{R}^n) \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

EXEMPLE 1 : $f(x,t) = x(\frac{t}{2})$

EXEMPLE 2 : (cf systèmes intégro-différentiels de Volterra)

$$f(x,t) = A(t)x(t) + \int_0^t g(\tau,\ x(\tau),t)\,d\tau$$

où : $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$A : \quad \mathbb{R} \longrightarrow L_n(\mathbb{R})$.

EXEMPLE 3 : (cf systèmes retardés).

Fixons $\tau \in [0,T]$ et $h \quad [0,\tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $C \in L_n(\mathbb{R})$

$$f(x,t) = \begin{cases} h(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ C\,x(t-\tau) & \text{si } t > \tau \end{cases}$$

Soit $H \in AC([0,\tau]_{;}\ \mathbb{R}^n)$. Prenons $h = \dot{H}$.

Alors les systèmes suivants sont équivalents

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t) \text{ p.p} \\ x(0) = H(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-\tau) \text{ p.p} & \text{pour } t > \tau \\ x(t) = H(t) & \text{pour } t \in [0,\tau] \end{cases} \quad .$$

Cette remarque nous montre que les systèmes retardés à condition initiale suffisamment régulière entrent dans le cadre des systèmes non anticipatifs.

EXEMPLE 4 :

Pour $t \in [0,T]$, on note ε_t l'application définie par

$x \in C[0,T] \longrightarrow x(t)$

Dans $C[0,T]$ on considère la tribu $F_t = \sigma(\varepsilon_u \; ; \; 0 \leq u \leq t)$

Proposition :

Soit $f \quad C[0,T] \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$\forall t \in [0,T] \quad f(\ ,t)$ est F_t mesurable

Alors f est une fonctionnelle non anticipative.

Démonstration :

Soit $\rho_t : C[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^{[0,t]}$ l'application qui à une fonction de $C[0,T]$ associe sa restriction à $[0,t]$

Comme la fonction $x \in C[0,T] \longrightarrow f(x,t)$ est F_t mesurable il existe, d'après le théorème de Doob une application

$h : \mathbb{R}^{[0,t]} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et

telle que $f(x,t) = (h \circ \rho_t)(x) \quad \forall x \in C[0,T]$.

Si x et y coïncident sur $[0,t]$, $\rho_t(x) = \rho_t(y)$ et donc $f(x,t) = f(y,t)$. □

La proposition explicite le rapport qui existe entre les fonctionnelles non-anticipatives étudiées ici et celles qui interviennent en théorie des probabilités (cf LIPTZER [1]).

O.3.- NOTATIONS

Soit $T \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$

On désigne par

$(.,.)$ et $|.|$ respectivement un produit scalaire et la norme associée dans $\mathbb{R}^n$ $L_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Pour $x \in C([0,T] ; \mathbb{R}^n)$ on note

$|x|_t = \text{Sup } \{|x(\tau)| \quad ; 0 \leq \tau \leq t \}$

$|x|_a^b = \text{Sup } \{|x(\tau)| \quad ; a \leq \tau \leq b \}$

où $t \in [0,T]$, $a,b \in [0,T]$, $a \leq b$.

I.- RESULTATS D'EXISTENCE

On se propose d'étudier les équations différentielles du type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t) \text{ p.p.} \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

où f est une fonctionnelle non anticipative sur $C([0,T] ; \mathbb{R}^n) \times [0,T]$.

1.- Méthode des solutions approchées.

THEOREME 1.1. :

Soit une application $f : C([0,T], \mathbb{R}^n) \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ayant les propriétés suivantes :

h1 : f est non anticipative.

h2 : $\forall y \in C([0,T] ; \mathbb{R}^n)$ l'application $t \to f(y,t)$ est mesurable

h3 : $\forall t \in [0,T]$ l'application $x \to f(x,t)$ est continue sur $C([0,T], \mathbb{R}^n)$

h4 : il existe une fonction positive $k \in L'(0,T)$ telle que $\forall t \in [0,T]$ $\forall x \in C([0,T] ; \mathbb{R}^n)$ $|f(x,t)| < k(t)(1+|x|_\tau)$

Alors le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t) \text{ p.p.} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

possède au moins une solution. Si de plus on a

h5 : $\forall x,y \in C([0,T] ; \mathbb{R}^n) \; |f(x,t)-f(y,t)| < k(t) \; |x-y|_t$

alors la solution est unique.

<u>Démonstration</u> :

Considérons une subdivision Δ de $[0,T]$

$\Delta : t_0 = 0 < t_1 \ldots < t_i < \ldots < t_N = T$ de pas $|\Delta|$.

Pour $t \in [0,T]$ on pose $\Delta(t) = \text{Max}\,\{t_i \; ; \; t_i \leq t\}$

Pour $x \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ et $s \in [0,T]$ on définit :

$$x^S(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t \leq S \\ x(S) & \text{si } S \leq t \leq T \end{cases}$$

Enfin on définira une fonctionnelle "approchée" f_Δ de **f** par

$$f_\Delta(x,t) = f(x^{t_i},t) \quad \text{si} \quad t_i \leq t < t_{i+1}$$

ce qui, en tenant compte des notations précédentes, peut s'écrire aussi

$$f_\Delta(x,t) = f(x^{\Delta(t)}, t) \quad .$$

Comme : $\forall t \in [0,T] \quad |x^{\Delta(t)}|_t \leq |x|_t$, on remarque que f_Δ possède les mêmes propriétés h1-h2-h3-h4 que **f** .

Construisons maintenant une solution x_Δ de l'équation

1-2 $$x_\Delta(t) = x_0 + \int_0^t f_\Delta(x_\Delta,s)ds$$

il suffit de poser $x_\Delta(0) = x_0$, puis par récurrence sur i :

si $t \in [t_i, t_{i+1}]$ alors $x_\Delta(t) = x_\Delta(t_i) + \int_{t_i}^t f(x_\Delta^{t_i}, \tau)d\tau$.

On a la majoration suivante pour x_Δ d'après h4 :

$$\forall t \in [0,T] \quad |x_\Delta(t)| < |x_0| + \int_0^t k(\tau)(1+|x_\Delta|_\tau)d\tau$$

et par suite que :

$$\forall t \in [0,T] \quad |x_\Delta|_t \leq |x_0| + \int_0^t k(\tau)\ (1+|x_\Delta|_\tau)d\tau$$

Rappelons le lemme suivant de Gronwall :

$$\begin{cases} \text{Si} \quad u, a \in L^\infty(0,T)\ ,\ b \in L'(0,T) \quad \text{et} \quad b > 0 \quad \text{p.p} \\ \text{et} \quad u(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)u(s)ds \quad \text{p.p} \\ \text{Alors} \quad u(t) \leq a(t) + \int_0^t a(\tau)b(\tau)\exp(\int_0^t b(s)ds)d\tau \quad \text{p.p.} \end{cases}$$

Appliquons ce lemme à $u(t) = (1+|x_\Delta|_t)$:

$$\forall t \in [0,T] \qquad 1+|x_\Delta|_t \leq 1+|x_0| + \int_0^t k(\tau)(1+|x_\Delta|_\tau)d\tau$$

$$1+|x_\Delta|_t \leq (1+|x_0|) + \int_0^t (1+|x_0|)k(\tau)\exp(\int_\tau^t k(s)ds)d\tau$$

1.3. $$1+|x_\Delta|_t \leq (1+|x_0|)\exp(\int_0^t k(s)ds) \quad .$$

On posera $K(t) = \int_0^t k(s)ds$ et $M = (1+|x_0|)K(T)$, donc :

$\forall t \in [0,T] \qquad 1+|x_\Delta|_t \leq M$. On a également si $0 \leq t' \leq t \leq T$

$$|x_\Delta(t) - x_\Delta(t')| \leq \int_{t'}^t |f_\Delta(x_\Delta,\tau)|d\tau \quad .$$

$$|x_\Delta(t) - x_\Delta(t')| \leq (1+|x_0|)\int_{t'}^t k(\tau)\ e^{K(\tau)}d\tau \quad .$$

1.4. $$|x_\Delta(t) - x\ (t')| \leq (1+|x_0|) \quad [e^{K(t\ )} - e^{K(t')}]$$

Si on appelle S l'ensemble des subdivisions de $[0,T]$, on remarque que les majorations 1.3 et 1.4 sont indépendantes de $\Delta \in S$. par conséquent la famille $(x_\Delta)_{\Delta \in S}$ de fonctions est équicontinue, bornée. Nous pouvons lui appliquer le théorème d'Ascoli : il existe une sous suite $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de S telle que x_{Δ^n} converge uniformément vers

x^* sur $[0,T]$ et $|\Delta^n|$ tend vers 0 .

Nous allons montrer maintenant que x^* est solution du problème initial. Fixons $\tau \in [0,T]$. Par abus d'écriture on notera encore (Δ) la suite (Δ^n) .

a) Montrons que $x_\Delta^{\Delta(\tau)}$ converge uniformément vers x^* sur $[0, \tau]$.

$$(x_\Delta^{\Delta(\tau)} - x^*)(t) = \begin{cases} x_\Delta(t) - x^*(t) & \text{si } t \leq \Delta(\tau) \\ x_\Delta(\Delta(\tau)) - x^*(t) & \text{si } \Delta(\tau) \leq t \leq \tau \end{cases} .$$

Mais $x_\Delta(\Delta(\tau)) - x^*(t) = x_\Delta(\Delta(\tau)) - x^*(\Delta(\tau)) + x^*(\Delta(\tau)) - x^*(t)$

et $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} \Delta(\tau) = \tau$.

La convergence uniforme de x_Δ vers x^* associée à la continuité uniforme de x^* , entraînent la convergence uniforme de $x_\Delta^{\Delta(\tau)}$ vers x sur l'intervalle $[0, \tau]$.

b) Montrons que $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} f_\Delta(x_\Delta, \tau) = f(x^*, \tau)$.

En effet $f_\Delta(x_\Delta,\tau) - f(x^*, \tau) = f(x_\Delta^{\Delta(\tau)},\tau) - f(x^*, \tau)$.

Le résultat précédent et l'hypothèse h.3 permettent de conclure immédiatement.

c) On a également la majoration suivante, d'après 1.3 et h4 :

$$|f_\Delta(x_\Delta,\tau)| \leq Mk(\tau) .$$

On peut alors grâce à b) et c) utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour passer à la limite dans 1.2 ce qui donne pour $t \in [0,T]$.

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t f(x^*, \tau)d\tau .$$

x^* est bien solution du problème initial.

Si de plus h5 est vérifiée et si x_1 et x_2 sont des solutions du problème on a, pour $t \in [0,T]$:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \int_0^t |f(x_1, \tau) - f(x_2, \tau)| \, d\tau .$$

et $$|x_1 - x_2|_t \leq \int_0^t k(\tau) \, |x_1 - x_2|_\tau \, d\tau .$$

Le lemme de Gronwall montre immédiatement que $|x_1 - x_2|_t = 0$.
Quelque soit $t \in [0,T]$, ce qui prouve l'unicité sous l'hypothèse h5. □

2.- Méthode du point fixe

Une autre approche consiste à utiliser un théorème du point fixe dans $C([0,T], \mathbb{R}^n)$. Le résultat obtenu est même un peu plus général :

THEOREME 2.1 :

Soit f vérifiant les hypothèses h1 - h2 - h3 - h4 et $h \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$. Alors il existe $x \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\forall t \in [0,T] \quad x(t) = h(t) + \int_0^t f(x,s)ds \quad .$$

Démonstration :

On construit une suite croissante d'intervalles $[0,T_m]$ et une suite de fonctions $x_m \in C([0,T_m], \mathbb{R}^n)$ tels que x_m soit solution du problème sur $[0,T_m]$. On remarque au préalable que le caractère non anticipatif de f permet de définir $f(y,t)$ pour $y \in C([0,t] , \mathbb{R}^n)$. Nous utiliserons dans la suite cet abus d'écriture.

a) Construction de la suite T_m .

Soit q tel que $0 < q < 1$ et N l'entier naturel défini par :

$$N = E\left[\frac{K(T)}{q}\right] + 1 \quad .$$

La fonction $t \longrightarrow K(t)$ étant croissante continue, il existe une suite finie $(T_i)_{0 \leq i \leq N}$ vérifiant :

* $T_0 = 0 \quad T_N = T$
* Si $1 \leq i \leq N-1$ alors $K(T_i) - K(T_{i-1}) = q$
* $K(T_N) - K(T_{N-1}) < q$

b) On définit ensuite une suite de majorants M_m

Notons d'abord $|h|_T = A$.

On pose $M_0 = |h(0)|$ et on définit par récurrence :

$$M_i = (M_{i-1} + 2A + q) \times \frac{1}{(1-q)}$$

c) Construction de la suite x_m :

Sur $[0,T_0]$ le problème admet une solution évidente que l'on notera x_0 . Soit $m \geq 1$. Supposons par hypothèse de récurrence, que nous ayons trouvé une solution x_{m-1} sur $[0,T_{m-1}]$ vérifiant en outre $|x_{m-1}|_{T_{m-1}} \leq M_m$.

Posons :

$$V_m = \{y \in C([0,T_m], \mathbb{R}^n) / \ |y|_{T_m} \leq M_m \ \text{ et } \ y|_{[0,T_{m-1}]} = x_{m-1}\}$$

Pour $y \in C\,([0,T_m], \mathbb{R}^n)$ on définit :

$$\varphi_m(y)(t) = h(t) + \int_0^t f(y,s)ds \quad , \text{ où } \ 0 \leq t \leq T_m \quad .$$

Etudions l'application $\varphi_m : C([0,T_m], \mathbb{R}^n) \to C([0,T_m], \mathbb{R}^n)$.

* φ_m est continue

En effet si $(y_k)_{y \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers y sur $[0,T_m]$ $f(y_k,.)$ converge simplement vers $f(y,.)$; et comme

$$\forall s \in [0,T_m] \ |f(y_k,s)| < k(s) \ (1+|y_k|_s) \quad ,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que $f(y_k,.)$ converge vers $f(y,.)$, en norme dans $L'([0,T_m], \mathbb{R}^n)$. Donc $\varphi_m(y_k)$ converge uniformément vers $\varphi_m(y)$ sur $[0,T_m]$.

* $\varphi_m(V_m) \subset V_m$.

En effet $\forall t \in [0,T_{m-1}]$ $\varphi_m(y)(t) = h(t) + \int_0^t f(y, s)ds$

si $y \in V_m$ alors $\varphi_m(y)(t) = h(t) + \int_0^t f(x_{m-1},s)ds$.

Comme x_{m-1} est solution du problème sur $[0,T_{m-1}]$ on a :

$$\forall t \in [0,T_{m-1}] \ \varphi_m(y)(t) = x_{m-1}(t) \quad .$$

Il reste à majorer $|\varphi_m(y)|_{T_m}$. Mais on a pour $t \in [0,T_m]$:

$$\varphi_m(y)(t) = h(t)-h(T_{m-1})+h(T_{m-1})+\int_0^{T_{m-1}} f(x_{m-1},s)ds + \int_{T_{m-1}}^{T_m} f(y,s)ds$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$\varphi_m(y)(t) = h(t)-h(T_{m-1})+x_{m-1}(T_{m-1})+ \int_{T_{m-1}}^{T_m} f(y,s)ds$$

Donc en utilisant la propriété h4 de f et la majoration de x_{m-1} :

$$|\varphi_m(y)(t)| \leq 2A+M_{m-1} + (|y|_{T_m}+1) \left(\int_{T_{m-1}}^{T_m} k(s)ds\right)$$

D'après le choix des T_i et la majoration de y :

$$|\varphi_m(y)(t)| \leq 2A+M_{m-1}+(M_m+1)q \quad .$$

Par construction des (M_i) cela entraîne :

$$|\varphi_m(y)(t)| \leq M_m \quad .$$

et l'inclusion est démontrée.

* $\varphi_m(V_m)$ est relativement compact dans $C([0,T_m], \mathbb{R}^n)$

En effet $\varphi_m(V_m)$ est borné car $\varphi_m(V_m) \subset V_m$.

De plus $\varphi_m(V_m)$ est un ensemble équicontinu, car pour $y \in V_m$ et pour $t, t' \in [0,T_m]$ on a :

$$|\varphi_m(y)(t) - \varphi_m(y)(t')| \leq |h(t)-h(t')| + \left|\int_t^{t'} f(y,s)ds\right|$$

et donc

$$|\varphi_m(y)(t) - \varphi_m(y)(t')| \leq |h(t)-h(t')| + (1+M_m)\ |K(t')-K(t)| \quad .$$

Notons F la fermeture de $\varphi_m(V_m)$ dans $C([0,T_m], \mathbb{R}^n)$. L'enveloppe convexe fermée de F est compacte d'après un théorème de Mazur (DUNFORD [1] p. 416). On peut lui appliquer le théorème du point fixe de Schauder (DUNFORD [1] , p. 456) :

"Un sous-ensemble compact convexe d'un espace topologique localement convexe possède la propriété du point fixe".

Il existe donc $x_m \in V_m$ tel que $x_m = \varphi_m(x_m)$.

La récurrence est ainsi démontrée. On remarque alors, pour finir, que x_N est bien solution du problème sur $[0,T]$.

Remarque 2.2 : il est facile d'adapter le théorème au cas où f est une fonctionnelle définie sur $C([0,+\infty[, \mathbb{R}^n)$ (muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts) et où $k \in L'_{loc}([0,+\infty[)$, $h \in C([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$. Il suffit de construire une suite $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, avec $K(T_{m+1}) - K(T_m) \leq q$ et de construire comme précédemment des solutions sur les intervalles $[0,T_m]$, chacune prolongeant la précédente.

3.- Méthode du point fixe appliquée à la fonction dérivée.

Au lieu de considérer l'équation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} .$$

où f vérifie h1, h2, h3, h4, on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} y(t) = f(Ty,t) \\ \text{où } Ty(\tau) = x_0 + \int_0^\tau y(u)du \quad \text{pour} \quad \tau \in [0,T] \end{cases}$$

dans $L'([0,T], \mathbb{R}^n)$

Pour cela, posons $F(y,t) = f(Ty,t)$ pour $y \in L'([0,T], \mathbb{R}^n)$, $t \in [0,T]$. Etudions les propriétés de F .

H1 F est non anticipative i.e : si $y_1, y_2 \in L'([0,T], \mathbb{R}^n)$, $t \in [0,T]$ et $y_1 \mathbb{1}_{[0,t]} = y_2 \mathbb{1}_{[0,t]}$ p.p.

alors $F(y_1,t) = F(y_2,t)$.

H2 : $\forall y \in L'([0,T], \mathbb{R}^n)$ $\quad t \longrightarrow F(y,t)$ est mesurable.

H1 et H2 sont des conséquences immédiates des hypothèses h1 et h2 sur f .

H3 : Si $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $L'([0,T], \mathbb{R}^n)$ vérifiant

. $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall \xi \in [0,t]$ $|y_m(\xi)| \leq g(\xi)$ où $g \in L'([0,t])$ est fixée.

. $(y_m \mathbb{1}_{[0,t]})_{m \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers $y \mathbb{1}_{[0,t]}$ dans $L'([0,t], \mathbb{R}^n)$. Alors $\lim\limits_{m \to \infty} F(y_m,t) = F(y,t)$.

Démonstration :

La famille $(Ty_m)_{m \geq 0}$ est équicontinue sur $[0,t]$

Comme $y_m \mathbb{1}_{[0,t]} \longrightarrow y \mathbb{1}_{[0,t]}$ pour la topologie $\sigma\{ L'([0,t], \mathbb{R}^n), L^\infty([0,t], \mathbb{R}^n)$

on a : $\forall \tau \in [0,t]$ $\lim\limits_{m \to +\infty} Ty_m(\tau) = Ty(\tau)$

Le théorème d'Ascoli assure alors la convergence uniforme sur

$[0,t]$ de $(Ty_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vers Ty .

Donc $\lim\limits_{m \to +\infty} f(Ty_m,t) = f(Ty,t)$ et H3 s'en déduit □

H4 : il existe $\tilde{k} \in L'([0,T], \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\forall y \in L'([0,T], \mathbb{R}^n) , \qquad \forall t \in [0,T]$$

$$|F(y,t)| < \tilde{k}(t) \quad (1+ \int_0^t |y(\tau)|d\tau) \quad .$$

Démonstration :

Il suffit de prendre $\tilde{k}(t) = k(t)\ (1 + |x_0|)$ et d'appliquer h4. □

On est donc ramené à démontrer le

THEOREME 3.1 :

Soit $F : L'([0,T], \mathbb{R}^n) \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ une application vérifiant H1, H2, H3, H4. Alors il existe $y^* \in L'([0,T], \mathbb{R}^n)$ tel que :

$$y^*(t) = F(y^*,t) \text{ p.p.}$$

Ce théorème sera une conséquence du théorème 4.2 démontré au paragraphe suivant. Pour l'instant, notons un corollaire immédiat du théorème 3.1 :

Corollaire 3.2. :

Soit $f : C([0,T], \mathbb{R}^n) \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application vérifiant h1, h2, h3, h4. Soit G une fonction réelle, mesurable sur

$$\Delta_T = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 0 \leq s \leq t \leq T\} \quad .$$

avec $\quad \text{Sup} = \{ G(t,s) \;/\; (t,s) \in \Delta_T \} < +\infty$

et $\quad \lim\limits_{\delta \to 0} \text{Sup} \;\{|G(t_2,s)-G(t_1,s)| / 0 \leq s \leq t_1 \text{ et } 0 \leq t_2-t_1 \leq \delta\} = 0$

Alors le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(z,t) \text{ p.p.} \\ z(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t G(t,s)x(s)\, ds \end{cases}$$

admet une solution $(x^*, z^*) \in L'([0,T], \mathbb{R}^n) \times C([0,T], \mathbb{R}^n)$.

4.- Une généralisation.

Nous allons démontrer les résultats précédents dans un cadre plus général. Introduisons d'abord quelques notations :

m représente un entier positif et on note (t,x) les éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$

$V = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m / \; t \geq \sqrt{x_1+\ldots+x_m^2} \}$

$E = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$

$E_t = [0,t] \times \mathbb{R}^m \qquad X_t = 1\!\!1_{Et}$

$\Gamma_\xi = E \cap (\xi \setminus V)$ où $\xi \in E \quad ; \quad \theta_\xi = 1\!\!1_\xi$

de manière plus explicite : $\Gamma_\xi = \{(t,x) \in E \;/ \xi - (t,x) \in V\}$.

Définition 4.1 :

On dira qu'une application $F : L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n) \times E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est non anticipative si $F(y_1, \xi) = F(y_2, \xi)$ lorsque $y_1|_{\Gamma_\xi} = y_2|_{\Gamma_\xi}$ p.p. y_1 et y_2 étant des éléments de $L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n)$.

Notons que pour $m = 0$ on retrouve la propriété H1 du paragraphe 3. Si F est non anticipative, $u \in L^1(\Gamma_\eta)$ (où $\eta \in E$) , et $\xi \in \Gamma_\eta$, pour deux prolongements quelconques u_1 et u_2 de u à $L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n)$, on a toujours $F(u_1, \xi) = F(u_2, \xi)$. Dans la suite, on convient de noter cet élément par : $F(u, \xi)$. Le résultat principal est le suivant :

THEOREME 4.2 :

Soit $F : L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n) \times E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application vérifiant :

P1 : F est non anticipative.

P2 : $\forall y \in L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n)$ l'application $\xi \to F(y, \xi)$ est mesurable sur E

P3 : Si $\xi \in E$, $u \in L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n)$ et $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de $L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n)$ tels que :

a) il existe $g \in L^1(\Gamma_\xi)$ avec $|u_k| \leq g$ sur Γ_ξ , quel que soit k

b) $u_k \xrightarrow[k \to \infty]{} u$ dans $L^1(\Gamma_\xi)$ faible

Alors $\lim\limits_{k \to \infty} F(u_k, \xi) = F(u, \xi)$.

P4 : il existe $\lambda \in L^1_{loc}(E)$ tels que :

$$\forall \xi \in E \quad \forall y \in L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n) \quad |F(y,\xi)| \leq \lambda(\xi)\left(1 + \int_{\Gamma_\xi} |y(\eta)| d\eta\right)$$

Alors il existe $y^* \in L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n)$ tel que $y^*(\eta) = F(y^*, \eta)$ p.p.

Notation : on désignera par L^n_τ l'ensemble $L^1(\Gamma_\xi, \mathbb{R}^n)$ où $\xi = (\tau, 0)$, $\tau \in \mathbb{R}$

Démonstration :

Soit $\tau_1, \tau_2, C \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ et $C \geq 0$.

Soit $\emptyset \in L'(\Gamma_{(\tau_1,0)}) = L'_{\tau_1}$.

On notera $K(\tau_1, \tau_2, \emptyset, C)$ le sous ensemble suivant de $L^n_{\tau_2}$:

$$\left\{ u \in L^n_{\tau_2} \;/\; u|\Gamma_{(\tau_1,0)} = \emptyset \text{ et } |u(\eta)| \leq C\lambda(\eta) \text{ p.p. sur } \Gamma_{(\tau_2,0)} \setminus \Gamma_{(\tau_1,0)} \right\}$$

LEMME 4.3. :

$K(\tau_1, \tau_2, \emptyset, C)$ est convexe faiblement compact dans $L^n_{\tau_2}$

Démonstration :

La convexité est évidente

Posons $$\psi(\xi) = \begin{cases} \mathrm{Max}(|\emptyset(\xi)|, C\lambda(\xi)) & \text{si } \xi \in \Gamma_{(\tau_1,0)} \\ C\lambda(\xi) & \text{si } \xi \in \Gamma_{(\tau_2,0)} \setminus \Gamma_{(\tau_1,0)} \end{cases}$$

Alors $\psi \in L'_{\tau_2}$ et :

$$K(\tau_1, \tau_2, \emptyset, C) \subset \{u \in L^n_{\tau_2} \;/\; |u(\xi)| \leq \psi(\xi) \text{ p.p.}\} .$$

Ce dernier ensemble, que nous appelerons H , est faiblement relativement compact, d'après le critère de DUNFORD-PETTIS (GENET [1], p. 183). Montrons qu'il est même faiblement compact. Soit f^* appartenant à l'adhérence faible de H ; prenons $v \in L^\infty(\Gamma_{(\tau_2,0)}, \mathbb{R}^n)$ tel que $|v| \leq 1$ p.p. La fonction (f^*, v) appartient à l'adhérence faible de $\{(f,v)/f \in H\}$ dans L'_{τ_2} . On considère maintenant un sous ensemble mesurable A de $\Gamma_{(\tau_2,0)}$; on a :

$$\forall f \in H \quad \int_A (f(\eta), v(\eta))d\eta \leq \int_A \psi(\eta)d\eta$$

donc :

$$\int_A (f^*(\eta), v(\eta))d\eta \leq \int_A \psi(\eta)d\eta .$$

A étant quelconque, on en déduit : $(f^*, v) \leq \psi$ p.p. sur $\Gamma_{(\tau_2,0)}$

Prenons $v(x) = \dfrac{f^*(x)}{|f^*(x)|} \, 1\!\!1_{\{\alpha \,;\, f^*(\alpha) \neq 0\}}(x)$

on a alors $|f^*| \leq \psi$ et donc $f^* \in H$.

En raisonnant de manière analogue on peut montrer que $K(\tau_1, \tau_2, \emptyset, C)$ est faiblement fermé dans H et le lemme 4.3 s'en déduit □

LEMME 4.4 :

L'application

$$\sigma : L^n_{\tau_2} \longrightarrow L^n_{\tau_2}$$
$$u \longmapsto (\xi \longrightarrow F(u, \xi))$$

est faiblement continue sur $K(\tau_1, \tau_2, \emptyset, C)$

Démonstration :

Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite de $K(\tau_1, \tau_2, \emptyset, C)$ qui converge faiblement vers u dans $L^n_{\tau_2}$. Si $\xi \in \Gamma_{(\tau_2,0)}$ alors

$\forall k \in \mathbb{N} \quad |u_k(\xi)| \leq \psi(\xi)$. Appliquons l'hypothèse P3 sur $\Gamma_{(\tau_2,0)}$:

$$\forall \xi \in \Gamma_{(\tau_2,0)} \quad \lim_{k \to +\infty} F(u_k, \xi) = F(u, \xi) \quad .$$

Mais d'après l'hypothèse P4 :

$$\forall \xi \in \Gamma_{(\tau_2,0)} \ \forall k \in \mathbb{N} \quad |F(u_k, \xi)| \leq \lambda(\xi) \left(1 + \int_{\Gamma_\xi} |y(\eta)| \, d\eta \right) \quad .$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(F(u_k,.))$ on en déduit qu'elle converge en norme dans $L^n_{\tau_2}$ vers $F(u_i)$ et donc à fortiori pour la topologie faible de $L^n_{\tau_2}$. On a ainsi prouvé que σ est séquentiellement faiblement continue. Comme $K(\tau_1, \tau_2, \emptyset, C)$ est métrisable pour la topologie faible (car faiblement compact dans un Banach séparable - DUNFORD [1] p. 434), σ est aussi faiblement continue.

□

On définit maintenant pour $t \geq 0$ $\Lambda(t) = \int_{\Gamma_{(t,0)}} \lambda(\eta)d\eta$.

La fonction Λ est croissante continue , $\Lambda(0) = 0$. Soit $q \in]0,1[$ il existe donc une suite $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $\Lambda(t_{i+1}) - \Lambda(t_i) \leq q$ quel que soit i et $t_o = 0$. Supposons que nous ayons constuit une solution u_m de

$$u(\xi) = F(u, \xi) \quad \text{dans} \quad L^n_{t_m}$$

(u_o existe de manière évidente).

Considérons $K(t_m, t_{m+1}, u_m, C_{m+1})$ où C_{m+1} sera déterminé plus loin.

Si $u \in K(t_m, t_{m+1}, u_m, C_{m+1})$ alors pour $\xi \in \Gamma_{(t_m,0)}$:

$$F(u, \xi) = F(u_m, \xi) = u_m(\xi)$$

De plus $\forall \xi \in \Gamma_{(t_{m+1},0)}$:

$$|F(u,\xi)| \leq \lambda(\xi) \left(1 + \int_{\Gamma_{(t_{m+1},0)}} |u(\eta).| \, d\eta\right) .$$

Mais $$1 + \int_{\Gamma_{(t_{m+1},0)}} |u(\eta)|d\eta \leq 1 + \int_{\Gamma_{(t_{m,0})}} |u_m(\eta)|d\eta + \int_{\Gamma_{(t_{m+1},0)} \smallsetminus \Gamma_{(t_m,0)}} |u(\eta)|d\eta$$

et $$\int_{\Gamma_{(t_{m+1},0)} \smallsetminus \Gamma_{(t_m,0)}} |u(\eta)|d\eta \leq C_{m+1} \left[\Lambda(t_{m+1}) - (t_m)\right] .$$

D'après le choix des t_i :

$$|F(u, \xi)| \leq \lambda(\xi) \left(1 + \int_{\Gamma_{(t_{m,0})}} |u_m(\eta)|d\eta + C_{m+1}q\right)$$

Choisissons maintenant C_{m+1} de manière à avoir :

$$1 + \int_{\Gamma(t_{m,0})} |u_m(\eta)|d\eta + q\, C_{m+1} \leq C_{m+1}$$

ce qui est possible car $q \in]0,1[$.

Alors $\forall\xi \in \Gamma(t_{m+1,0})$ $|F(u, \xi)| \leq C_{m+1}\, \lambda(\xi)$.

On a ainsi démontré que l'image par l'application $u \to F(u,.)$ de $K(t_m, t_{m+1}, u_m, C_{m+1})$ est incluse dans lui-même. Comme cette application est faiblement continue sur $K(t_m, t_{m+1}, u_m, C_{m+1})$ qui est convexe faiblement compact, le théorème de Schauder s'applique : il existe une solution u_{m+1} de $u_{m+1} = F(u_{m+1},.)$ sur $\Gamma(t_{m+1,0})$. Par récurrence on a une solution sur tout ensemble $\Gamma(t_{i,0})$. Comme $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma(t_{i,0}) = E$, on obtiendra une solution U^* pour le problème initial, en choisissant pour U^* la fonction de $L^1_{loc}(E, \mathbb{R}^n)$ qui coïncide avec u_i sur $\Gamma(t_{i,0})$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$. □

5.- Une généralisation du lemme de Gronwall

Notations : $L^\infty_{loc}(E)$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables définies sur E dont la restriction à tout compact est essentiellement bornée.

$|.|_{\infty,K}$ désigne la norme de $L^\infty(K)$, où K est compact.

Proposition 5.1 :

Soit $k \in L^1(E)$, $k \geq 0$ p.p. et $a \in L^\infty_{loc}(E)$. Alors il existe une unique fonction $u \in L^\infty_{loc}(E)$ vérifiant $u(\xi) = a(\xi) + \int_{\Gamma_\xi} k(\eta)u(\eta)d\eta$ p.p.

De plus $|u|_{\infty,\Gamma_\xi} \leq |a|_{\infty,\Gamma_\xi} \exp(\int_{\Gamma_\xi} k(\eta)d\eta)$, pour tout $\xi \in E$.

Enfin si $a \geq 0$ p.p. alors $u \geq 0$ p.p.

Démonstration :

Fixons $\xi_o = (\theta_o, x_o)$ et cherchons une solution de l'équation dans le cône Γ_{ξ_o}. Pour $t \geq 0$ on pose $V(t) = \int_{\Gamma_{\xi_o} \cap E_t} k(\eta)d\eta$.

Il existe un entier N tel que $q = \dfrac{V(\theta_o)}{N} < 1$. On peut construire une suite finie $t_o = 0 < t_1 \ldots < t_i < \ldots < t_N = \theta_o$ telle que $V(t_i) = iq$.

Posons $M = |a|_{\infty, \Gamma_{\xi_o}}$.

Montrons par récurrence sur n qu'il existe une unique solution du problème sur $\Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_m}$ notée u_m, vérifiant de plus

$$|u_m|_{\infty}, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_m} \leq \frac{M}{(1-q)^m} \quad \text{et} \quad u_m \geq 0 \text{ p.p. lorsque } a \geq 0 \text{ p.p.}$$

Pour $m = 0$ c'est évident. Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour tout m inférieur ou égal à n. Une solution du problème sur $\Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}$ coïncide nécessairement avec u_m sur $\Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_m}$.

Il est donc équivalent de chercher $w \in L^{\infty}(\Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}})$ vérifiant

$$w(\xi) = a(\xi) + \int_{\Gamma_\xi} k(\eta)w(\eta)d\eta \quad \text{p.p.} \quad \text{ou vérifiant}$$

$$w(\xi) = a(\xi) + \int_{\Gamma_\xi \cap E_{t_m}} k(\eta)u_m(\eta)d\eta + \int_{\Gamma_\xi \cap (E_{t_{m+1}} \setminus E_{t_m})} k(\eta)w(\eta)d\eta .$$

$\forall \xi \in \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}$ on pose $A_{m+1}(\xi) = a(\xi) + \displaystyle\int_{\Gamma_\xi \cap E_{t_m}} k(\eta)u_m(\eta)d\eta.$

$\forall w \in L^{\infty}(\Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}})$ on pose $\phi_{m+1}(w)(\xi) = \displaystyle\int_{\Gamma_\xi \cap (E_{t_{m+1}} \setminus E_{t_m})} k(\eta)w(\eta)d\eta$.

De manière évident $A_{m+1} \in L^{\infty}(\Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_m})$ et ϕ_{m+1} est une application de $L^{\infty}(\Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}})$ dans lui-même.

Estimons $|A_{m+1}|_{\infty}$, $\Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}$.

$$|A_{m+1}|_{\infty,\, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} = \left|a(\xi) + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\Gamma_\xi \cap (E_{t_{k+1}} \setminus E_{t_k})} k(\eta) u_{k+1}(\eta)\, d\eta\right|_{\infty,\, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}}$$

$$|A_{m+1}|_{\infty,\, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} \leq M + \sum_{k=0}^{m-1} q \times \frac{M}{(1-q)^k} \quad \text{selon l'hypothèse de récurrence}$$

$$|A_{m+1}|_{\infty,\, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} \leq M \left[1 + \left(\frac{q}{1-q}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{1-q}\right)^m}{1 - \left(\frac{1}{1-q}\right)}\right]$$

$$|A_{m+1}|_{\infty,\, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} \leq \frac{M}{(1-q)^m}$$

Montrons maintenant que ϕ_{m+1} est contractante. Soit $w_1, w_2 \in L^{\infty}(\Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}})$

$$|\phi_{m+1}(w_1) - \phi_{m+1}(w_2)|_{\infty,\, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} \leq \left(\int_{\Gamma_{\xi_o} \cap (E_{t_{m+1}} \setminus E_{t_n})} k(\eta)\, d\eta\right) |w_1 - w_2|_{\infty\, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}}$$

Et d'après le choix de la suite $(t_o, \ldots, t_N)$:

$$|\phi_{m+1}(w_1) - \phi_{m+1}(w_2)|_{\infty,\, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} \leq q\, |w_1 - w_2|_{\infty,\, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}}$$

Le théorème du point fixe assure alors l'existence de U_{m+1} .

De plus $\lim\limits_{m' \to \infty} \left| u_{m+1} - \sum\limits_{k=0}^{m'} \phi_{m+1}^{(k)} (A_{m+1}) \right|_{\infty, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} = 0$

où $\phi_{m+1}^{(k)}$ est la k-ième itérée par composition de ϕ_{m+1} .

Cette dernière relation montre que si $u_m \geq 0$ p.p. et $a \geq 0$ p.p. alors $u_{m+1} \geq 0$ p.p. car ϕ_{m+1} transforme toute fonction positive en fonction positive.

On a aussi $|u_{m+1}|_{\infty, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} \leq |A_{m+1}|_{\infty, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} \times \frac{1}{1-q}$

soit encore $|u_{m+1}|_{\infty, \Gamma_{\xi_o} \cap E_{t_{m+1}}} \leq \frac{M}{(1-q)^{m+1}}$.

La récurrence est ainsi démontrée.

On remarque alors que u_N est une solution du problème sur Γ_{ξ_o}

On a donc démontré l'existence et l'unicité d'une solution du problème, notée u_{ξ_o} , sur Γ_{ξ_o} . De plus u_{ξ_o} vérifie pour N assez grand

$$|u_{\xi_o}|_{\infty, \Gamma_{\xi_o}} \leq \frac{M}{\left(1 - \frac{\int_{\Gamma_{\xi_o}} k}{N}\right)^N}$$

Faisons tendre N vers $+\infty$; on obtient :

$$|u_{\xi_o}|_{\infty, \Gamma_{\xi_o}} \leq M \exp\left(\int_{\Gamma_{\xi_o}} k\right)$$

qui est la relation cherchée.

Montrons que l'on peut définir une solution globale du problème.

Il suffit de vérifier que si u_ξ est solution sur Γ_ξ et $u_{\xi'}$ est solution sur $\Gamma_{\xi'}$, alors u_ξ et $u_{\xi'}$ coïncident sur $\Gamma_\xi \cap \Gamma_{\xi'}$. Mais cette propriété est évidente car u_ξ et $u_{\xi'}$ coïncident respectivement sur Γ_ξ et $\Gamma_{\xi'}$ avec $u_{\xi''}$ où ξ'' est choisi tel que

$$\Gamma_{\xi''} \supset \Gamma_\xi \cup \Gamma_{\xi'} \qquad . \qquad \square$$

Proposition 5.2 :

Soit $k \in L'(E)$, $k \geq 0$ et $a \in L^\infty_{loc}(E)$.

Si $u \in L^\infty_{loc}(E)$ vérifie :

$$u(\xi) \leq a(\xi) + \int_{\Gamma_\xi} k(\eta)u(\eta)d\eta \qquad \text{p.p.}$$

Alors :

$$u(\xi) \leq |a|_{\infty,\Gamma_\xi} \exp \left(\int_{\Gamma_\xi} k(\eta)d\eta\right) \qquad \text{p.p.}$$

Démonstration :

Soit $a_1 \in L^\infty_{loc}(E)$ vérifiant $u(\xi) = a_1(\xi) + \int_{\Gamma_\xi} k(\eta)u(\eta)d\eta$.

alors $a-a_1 \geq 0$ p.p.

Soit v la solution de : $v(\xi) = a\,(\xi) + \int_{\Gamma_\xi} k(\eta)v(\eta)d\eta$

dans $L^\infty_{loc}(E)$. D'après la proposition 5.1 on a :

$$|v(\xi)| < |a|_{\infty,\Gamma_\xi} \exp\left(\int_{\Gamma_\xi} k(\eta)d\eta\right) \qquad \text{p.p.}$$

Mais :

$$(v-u)(\xi) = (a-a_1)(\xi) + \int_{\Gamma_\xi} k(\eta)\,(v-u)\,(\eta)d\eta \qquad \text{p.p.}$$

Comme $a-a_1 \geq 0$ p.p. on a aussi $v \geq u$ p.p.

et finalement $u(\xi) \leq |a|_{\infty,\Gamma_\xi} \exp \int_{\Gamma_\xi} k(\eta)d\eta$ p.p.

Nous pouvons déduire de la proposition 5.2 une majoration pour les solutions d'équations non anticipatives :

Application 5.3 :

Prenons F comme dans le théorème 4.2 .

Soit $y \in L'_{loc}(E, \mathbb{R}^n)$ une solution de $y(\xi) = F(y, \xi)$ p.p.

Alors $|y(\xi)| \leq \lambda(\xi)\,(1 + \int_{\Gamma_\xi} |y(u)|du)$ p.p.

Posons :

$$\varphi(\xi) = 1 + \int_{\Gamma_\xi} |y(u)|du \qquad \text{pour} \qquad \xi \in E$$

En intégrant l'inégalité précédente sur Γ_η on obtient :

$$1 + \int_{\Gamma_\eta} |y(\xi)|d\xi \;<\; 1 + \int_{\Gamma_\eta} \lambda(\xi)\,\left(1 + \int_{\Gamma_\xi} |y(u)|du\right)d\xi$$

Appliquons la proposition 5.2 à φ

$$\varphi(\eta) \leq \exp\left(\int_{\Gamma_\eta} \lambda(\xi)d\xi\right)$$

Reportons cette relation dans la première inégalité :

$$|y(\xi)| \leq \lambda(\xi)\exp\left(\int_{\Gamma_\xi} \lambda(u)du\right) \qquad \text{p.p.}$$

<u>Corollaire 5.4</u> :

Si $\lambda \in L'(E)$ alors $y \in L'(E\,;\mathbb{R}^n)$.

II.- ETUDE DES SYSTEMES LINEAIRES NON ANTICIPATIFS

1.- Représentation des fonctionnelles linéaires non anticipatives

Notation :

$\mathcal{C}_+$ (resp $\mathcal{C}$) désigne l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ (resp $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On considère une application $f : \mathcal{C}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant

L1 : $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $f(.,t)$ est linéaire sur $\mathcal{C}_+$

L2 : $\forall x \in \mathcal{C}$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $|f(x,t)| < k(t)(1+ |x|_t)$

où $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ est fixée une fois pour toute.

Proposition 1.1. :

Si f vérifie L1 et L2 alors f est non anticipative. De plus, t étant fixé, $f(.,t)$ se prolonge en forme linéaire continue sur $\mathcal{C}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Démonstration :

$\forall \lambda > 0$ $|f(\lambda x,t)| \leq k(t)(1+\lambda\ |x|_t)$ d'après L2

donc $|f(x,t)| < k(t)(\frac{1}{\lambda} + |x|_t)$ d'après L1

Faisons tendre λ vers $+\infty$; on obtient :

L2' : $\forall x \in \mathcal{C}_+$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$ $|f(x,t)| \leq k(t)\ |x|_t$

On prolonge $f(.,t)$ sur $\mathcal{C}$ en posant pour $x \in \mathcal{C}$:

$$f(x,t) = f(x_{\mathbb{R}_+},t) \quad \text{où } x_{\mathbb{R}_+} \text{ est la restriction de } x \text{ à } \mathbb{R}_+ .$$

L2' montre immédiatement que f est non anticipative et continue sur $\mathcal{C}$ □. On supposera également dans la suite de ce chapitre que f vérifie

L3 : $\forall x \in \mathcal{C}_+$ $f(x,.)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 1.2 :

On dira que l'application $f : \mathscr{C}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est LNA si elle vérifie L1-L2-L3

Notation : Si g est à variation bornée sur $\mathbb{R}$ on désigne par $V_T g$ la variation totale de g sur $\mathbb{R}$.

Le théorème 2.3 qui suit permet de représenter les fonctionnelles LNA à l'aide des fonctions à variation bornée.

THEOREME 1.3 :

Soit f une fonctionnelle LNA. Alors il existe une application $A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow L_n(\mathbb{R})$ possédant les propriétés suivantes :

1) A est mesurable
2) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ fixé $A(t,.)$ est à variations bornées
3) Pour $s > t$ $A(t,s) = 0$
4) Pour $s < 0$ $A(t,s) = A(t,-\infty)$.
5) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ $V_T\, A(t,.) \leq k(t)$.
6) Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathscr{C}$ $f(x,t) = \int A(t,ds)x(s)$.

Cette application A est unique si on lui impose de vérifier en outre :

7) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ $A(t,.)$ est continue à gauche.

Démonstration :

Pour $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, on peut considérer $f(.,t)$ comme une mesure de Radon vectorielle et lui appliquer le théorème de représentation de Riesz (cf RUDIN [1] p. 173) : il existe une fonction à variation bornée notée $A(t,.)$, qui vérifie :

1-4 $\quad \forall x \in \mathscr{C}$ $f(x,t) = \int_{\mathbb{R}} A(t,ds)x(s)$

1-5 $\quad A(t,+\infty) = 0$.

1-6 $\quad \displaystyle\sup_{x \in \mathscr{C}} \frac{|f(x,t)|}{|x|_t} = V_T\, A(t,.)$.

$A(t,.)$ est unique si on lui impose de vérifier également :

1-7 $A(t,.)$ est continue à gauche.

D'après L2', 1-6 entraîne : $V_T\ A(t,.) \leq k(t)$.

Et toujours d'après L2', $A(t,.)$ est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]t, +\infty[$. La condition 3) résulte d'un choix de normalisation.

Il reste à démontrer la mesurabilité de A . Pour cela on posera : pour toute fonction g à variation bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{t \to 0^+} g(t) = g(t+0) \qquad \lim_{t \to 0^-} g(t) = g(t-0)$$

On remarque que $t \longrightarrow g(t+0)$ (resp $g(t-0)$) est continue à droite (resp à gauche).

L'ensemble $\{s \in \mathbb{R}/A(t,s+0) \neq A(t,s)\}$ est dénombrable car $A(t,.)$ est à variation bornée.

Donc $\{(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/A(t,s+0) \neq A(t,s)\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Il nous suffira par conséquent de montrer la mesurabilité de la fonction B définie par $B(t,s) = A(t,s+0)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Commençons par montrer que pour σ fixé $B(., \sigma)$ est mesurable.

Soit $y \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ dont le support est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}^n$. On définit x sur $\mathbb{R}$ par $x(u) = \gamma + \int_0^u y(v)dv$

Si $t \in \mathbb{R}_+$ alors $f(x,t) = \int A(t,ds)x(s)$

mais également $f(x,t) = \int B(t,ds)x(s)$.

Nous allons utiliser la formule d'intégration par parties suivantes (cf. VERLEY p. 138).

Soit α (resp β) une fonction localement à variation bornée sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (resp $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$). Pour $a < b$ on a :

1-8 : $$\int_{[a,b]} \beta(s+0)d\alpha(s) + \int_{[a,b]} d\beta(s)\alpha(s-0) = \beta(b+0)\alpha(b+0)-\beta(a-0)\alpha(a-0)$$

Prenons $m=n$ $\beta = B(t,.)$ $\alpha = x$ et $[a,b] = [0,t]$, tout en remarquant que x est continue et $B(t,.)$ continue à droite :

$$\int_{[0,t]} B(t,s)dx(s) + \int_{[0,t]} B(t,ds)x(s) = B(t,t)x(t)-B(t,0-0)x(0)$$

Mais $dx(s) = y(s)ds$ $x(0) = \gamma$ et $B(t,t) = 0$.

Donc $\int_{[0,t]} B(t,s)y(s)ds + \int_{[0,t]} B(t,ds)x(s) = -B(t,0-0)\gamma$

et $f(x,t) = - \int_{[0,t]} B(t,s)y(s)ds - B(t,0-0)\gamma$

Soit $\begin{matrix}\sigma \geq 0 \\ \delta \in \mathbb{R}^n\end{matrix}$. Posons

$$y_n^\sigma = 1\!\!1_{]\sigma + \frac{1}{n}, +\infty[}\ \delta$$

$$y^\sigma = 1\!\!1_{]\sigma +\infty[}\ \delta$$

$$x_n^\sigma(u) = \gamma + \int_0^u y_n^\sigma(v)dv$$

$$x^\sigma(u) = \gamma + \int_0^u y^\sigma(v)dv$$

Alors

$$f(x^\sigma,t) - f(x_n^\sigma,t) = \int_{[0,t]} B(t,s)\ [y^\sigma(s) - y_n^\sigma(s)]\ ds \quad .$$

$$f(x^\sigma,t) - f(x_n^\sigma,t) = \int_\sigma^{\sigma+\frac{1}{n}} B(t,s)\delta\ ds \quad .$$

$$n\ [f(x^\sigma,t) - f(x_n^\sigma,t)] = \left(n \int_\sigma^{\sigma+\frac{1}{n}} B(t,s)ds \right) \delta$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le premier membre est mesurable en t . Quel que soit t la limite du second membre pour n tendant vers $+\infty$ est $B(t,\sigma)\delta$ car $B(t,.)$ est continue à droite. On en déduit que $B(.,\sigma)\delta$ est mesurable, et comme δ peut être choisi arbitrairement finalement :

$\forall\sigma \geq 0$ $B(., \sigma)$ est mesurable.

Prenons maintenant pour y la fonction constante 0 ; x est alors la fonction constante γ et $f(x,t) = B(t, 0-0)\gamma$.

Pour $\sigma < 0$ $B(t, \sigma) = B(t, 0-0)$; γ pouvant être choisi quelconque, et d'après l'hypothèse L3 assurant la mesurabilité de $f(x,.)$, on a également la mesurabilité de $B(., \sigma)$ pour $\sigma < 0$.

Montrons maintenant que B est mesurable sur tout pavé $]a,b[\times]a,b[$. Il suffit de montrer que chacune des composantes de B est mesurable. Soit donc μ une composante de B . Posons $P =]a,b[\times]a,b[$. Soit I un intervalle ouvert et I_m une suite d'intervalles ouverts telle que $\bar{I}_m \subset I$ $\forall m$ et $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m = I$.

Pour $n,m \in \mathbb{N}$ on définit :

$$S_{n,m} = \bigcup_{s_0 \in Q} \{(t,s) \in P \ ; \ 0 \leq s_0 - s < \frac{1}{n} \ \text{et} \ \mu(t,s_0) \in I_m \}$$

Montrons que $P \cap \mu^{-1}(I_m) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_{n,m}$

Soit $(\tilde{t}, \tilde{s}) \in \mu^{-1}(I_m) \cap P$. Comme $\mu(\tilde{t}, .)$ est continue à droite et I_m est ouvert on peut prendre $s_0 \in Q \cap [\tilde{s},b[$ tel que $s_0 - \tilde{s} < \frac{1}{n}$ et $\mu(\tilde{t}, s_0) \in I_m$. Donc $(\tilde{t}, \tilde{s}) \in S_{n,m}$.

Montrons que $P \cap \mu^{-1}(\bar{I}_m) \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_{n,m}$.

Si $(\tilde{t}, \tilde{s}) \in P$ et $(\tilde{t}, \tilde{s}) \notin \mu^{-1}(\bar{I}_m)$, d'après la continuité à droite de $\mu(\tilde{t},.)$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall s \in [\tilde{s}, \tilde{s} + \frac{1}{N}] \cap]a,b[\quad \mu(\tilde{t},s) \notin \bar{I}_m .$$

Donc $(\tilde{t}, \tilde{s}) \notin S_{N,m}$, ce qui démontre l'inclusion.

Pour conclure on a

$$\mu^{-1}(I) \cap P = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (\mu^{-1}(I_m) \cap P) \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_{n,m} \right) .$$

et $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_{n,m} \right) \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (P \cap \mu^{-1}(\bar{I}_m)) = \mu^{-1}(I) \cap P$

Comme $S_{n,m}$ est un borélien il en est de même pour $\mu^{-1}(I) \cap P = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_{n,m} \right)$. En conclusion, μ est mesurable. □

2.- Résolvante - Propriétés.

On considère ici une fonctionnelle f de type LNA et une fonction $u \in L^{1}_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

$AC_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions localement absolument continues de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Les théorèmes du chapitre précédent permettent d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution du système :

$$\text{2-1} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t) + u(t) & \text{p.p.} \\ x(0) = x_0 & (x_0 \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

dans $AC_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

Nous allons montrer qu'il est possible à l'instar des équations différentielles linéaires ordinaires d'exprimer la solution de 2-1 à l'aide d'un noyau résolvant θ , solution d'une équation intégrale. Dans la suite nous supposons $n=1$ mais les raisonnements sont similaires pour n quelconque.

Rappelons d'abord une variante du théorème de Fubini, connue parfois sous le nom de "théorème de Bray", dont nous aurons besoin dans la suite (cf HONIG [1] p. 69).

THEOREME 2.2 :

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, soit ϕ_t une forme linéaire continue sur $C_c(\mathbb{R})$, ensemble des fonctions réelles continues à support compact sur $\mathbb{R}$, et $\tilde{\mu}_t$ la mesure régulière qui lui est associée par le théorème de Riesz.

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. On suppose que l'application $t \longrightarrow \phi_t(x)$ est mesurable, pour $x \in C_c(\mathbb{R})$ et que

$$\|\phi\|_t = |\tilde{\mu}_t|(\mathbb{R}) \leq K(t) \quad \text{où } K \in L^1(\mathbb{R}_+) .$$

On peut alors définir une forme linéaire continue $\phi = \int_a^b \phi_t dt$ sur $C_c(\mathbb{R})$ en posant

$$\phi(x) = \int_a^b \phi_t(x)dt \qquad \text{pour} \quad x \in C_c(\mathbb{R}) \quad .$$

Si μ est la mesure associée à ϕ et f une fonction réelle mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ alors :

$$t \longrightarrow \int f\, d\tilde{\mu}_t \quad \text{est Lebesgue intégrable}$$

et :

2-3 $$\int f d\mu = \int dt \int f d\tilde{\mu}_t \,.$$

Nous pouvons écrire le système 2-1 sous la forme

2-4 $$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int x \, d\mu_t + u(t) & \text{p.p.} \quad ; t \geq 0 \quad . \\ x(0) = x_0 & \end{cases}$$

où μ_t est la mesure bornée portée par $[0,t]$ associée à la forme linéaire continue : $x \longrightarrow f(x,t)$ sur $C_c(\mathbb{R})$.

On a par hypothèse $|\mu_t|\ (\mathbb{R}) \leq k(t)$; $t \geq 0$.

Considérons maintenant l'"<u>équation adjointe</u>" de 2-4 :

2-5 $$\left\{ \nu_t = \int_0^t \nu_t\,([\tau,t])\ \mu_\tau\ d\tau \ + \delta_t \right.$$

où t est un réel positif fixé, ν_t une mesure bornée et δ_t la mesure de Dirac en t .

<u>THEOREME 2.6</u> :

2-5 admet une solution unique.

Démonstration :

Lemme 2.7 :

Toute solution de 2-5 est portée par $[0,t]$.

Dém : Soit φ une fonction continue à support compact inclus dans $]t, +\infty[$. On a :

$$\int \varphi \, d\nu_t = \int_0^t \nu_t \; ([\tau ,t]) \, dt \int \varphi \, d\mu_\tau = 0 \quad .$$

car $\int \varphi \, d\mu_\tau = 0$ pour $\tau \geq t$.

On a le même résultat si le support de φ est inclus dans $]-\infty, 0[$.

Pour démontrer 2-6 il suffit de montrer qu'il existe une unique fonction $\phi_t \in VB([0,T], \mathbb{R})$ (espace des fonctions réelles à variation bornée sur $[0,T]$) vérifiant :

$$\text{2-8} \qquad \phi_t(a) = \int_0^t \phi_t(\tau) \, \mu_\tau \; ([a,t]) \, d\tau + 1 \quad ;$$

En effet la relation " $\nu_t[a,t] = \phi_t(a)$; $a \in [0,t]$ " définit une bijection entre les solutions de 2-5 et celles de 2-8.
Avec les notations du chapitre II-1 on a :

$$\mu_\tau([a,t]) = A(\tau,t+0) - A(\tau, a-0)$$

$$\mu_\tau([a,t]) = -A(\tau, a-0) \quad \text{lorsque } \tau \in [0,t] \quad .$$

2-8 devient alors

$$\text{2-9} \qquad \phi_t(a) = -\int_0^t \phi_t(\tau) A(\tau, a-0) d\tau + 1$$

Soit $t_0 \in [0,t]$. Munissons $VB([t_0,t], \mathbb{R})$ de la norme $|||.|||_{t_0}$ telle que

$$|||x|||_{t_0} = |x(t)| + V_{[t_0,t]} \, x$$

où $V_{[a,b]} \, x$ désigne la variation de x sur $[a,b]$.

On rappelle que $VB([t_0,t], \mathbb{R})$ muni de la norme $|||\cdot|||_{t_0}$ est un espace de Banach.

Posons

$$Fx(s) = -\int_s^t x(\tau)\, A(\tau, s-0)d\tau + 1$$

où $x \in VB([0,T], \mathbb{R})$ et $s \in [0,t]$.

Soit $s,s' \in [t_0,t]$ avec $s \leq s'$ alors :

$$|Fx(s) - Fy(s) - Fx(s') + Fy(s')| \leq \int_{t_0}^t |A(\tau,s-0)-A(\tau,s'-0)|\,|x(\tau) - y(\tau)|d\tau$$

$$+ \int_s^{s'} |x(\tau) - y(\tau)|\,|A(\tau,s-0)|\, d\tau \ .$$

Mais pour $\tau \geq 0$ on a $V_{[t_0,t]}\, A(\tau,.) \leq k(\tau)$.

en particulier pour $s \in \mathbb{R}$ $|A(\tau,s-0)| \leq k(\tau)$.

Par conséquent :

$$V_{[t_0,t]}\,(Fx - Fy) \leq \sup_{s\in [t_0,t]} |x(s) - y(s)| \times 2 \int_{t_0}^t k(\tau)d\tau.$$

Comme $Fx(t) = Fy(t) = 1$ on en déduit facilement :

$$|||Fx-Fy|||_{t_0} \leq \left(2\int_{t_0}^t k(\tau)d\tau\right)|||x-y|||_{t_0}$$

Comme $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall t' \in [\varepsilon,t] \quad \int_{t'-\varepsilon}^{t'} k(s)ds < \frac{1}{4}$$

F est une application contractante de $E = \{x \ ; \ x \in VB([t-\varepsilon,t],\mathbb{R}),x(t) = 1\}$ dans lui-même. Comme E est complet, F admet un unique point fixe. En réitérant ce procédé sur $[t-2\varepsilon,t-\varepsilon]$, etc... on trouve une solution unique de 2-9 sur $[0,t]$. $\square$

Remarquons que ν_t, solution de 2-5 est également solution de

2-5 bis : $\left\{\nu_t = \int_0^t \nu_t(]\tau,t])\mu_\tau d\tau + \delta_t\right.$

En effet $\int_0^t \nu_t(\{\tau\})\mu_\tau d\tau = 0$ car $\nu_t(\{\tau\}) = 0$ presque partout.

Enfin si dans 2-5 on remplace δ_t par une mesure bornée ρ portée par $[0,t]$, on a encore existence et unicité d'une solution.

THEOREME 2.10 :

La solution de 2-1 vérifie :

$$x(t) = \nu_t([0,t])x(0) + \int_0^t \nu_t([\tau,t])u(\tau)d\tau.$$

Démonstration :

Soit x la solution de 2-1, et $t \geq 0$

$$\int x \, d\nu_t = \int_0^t d\tau\left(\int x.\nu_t([\tau,t])d\mu_\tau\right) + x(t),$$

où l'on a utilisé 2-3 avec $\widetilde{\mu}_\tau = \nu_t[\tau,t]\mu_\tau$.

$$\int x \, d\nu_t = \int_0^t \nu_t([\tau,t])\left(\int x \, d\mu_\tau\right)d\tau + x(t)$$

2-10-1 : $$= \int_0^t \nu_t([\tau,t])\dot{x}(\tau)d\tau - \int_0^t \nu_t([\tau,t])u(\tau)d\tau + x(t)$$

Par ailleurs

$$\int x \, d\nu_t = \int d\nu_t(s)\left(x(0) + \int_0^s \dot{x}(\tau)d\tau\right)$$

$$= \nu_t([0,t])x(0) + \int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau \int_{\tau \leq s \leq t} d\nu_t(s)$$

d'après le théorème de Fubini.

2-10-2 : $$\int x \, d\nu_t = \nu_t([0,t])x(0) + \int_0^t \nu_t([\tau,t])\dot{x}(\tau)d\tau.$$

Si on compare 2-10-1 et 2-10-2 on obtient :

2-10-3 : $$x(t) = \nu_t([0,t])x(0)+\int_0^t \nu_t([\tau,t])u(\tau)d\tau. \quad \square$$

Posons $\theta(t,s) = \nu_t([s,t])$ pour $s \leq t$

$$\theta(t,s) = \int 1\!\!1_{[s,t]}d\nu_t = \int_0^t \theta(t,\tau)d\tau\left(\int 1\!\!1_{[s,t]}d\mu_\tau\right)+1,$$

d'après 2-3 et en remarquant que $\delta_t(1\!\!1_{[s,t]}) = 1$. C'est-à-dire :

$$\theta(t,s) = 1+\int_s^t \theta(t,\tau)\mu_\tau([s,\tau])d\tau$$

car $$\mu_\tau([s,t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < s \\ \mu_\tau([s,\tau]) & \text{si } s \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le :

<u>THEOREME 2-11</u> :

La solution de l'équation 2-1 est caractérisée par :

2-12 $$x(t) = \theta(t,0)x(0)+\int_0^t \theta(t,\tau)u(\tau)d\tau \quad ; \quad t \geq 0$$

où $\theta(t,.)$ est la solution dans $VB([0,t],L_n(\mathbb{R}))$ de

2-13 : $$\theta(t,s) = \int_s^t \theta(t,\tau)\mu_\tau([s,\tau])d\tau+Id_{\mathbb{R}^n}$$

Si l'on suppose que $A(\tau,.)$ est continue à gauche pour $\tau \geq 0$, alors on a :

2-14 : $$\theta(t,s) = -\int_s^t \theta(t,\tau)A(\tau,s)d\tau+Id_{\mathbb{R}^n} .$$

Il est parfois intéressant de réécrire 2-12 sous une autre forme ; en utilisant la relation

$$\theta(t,0) = \int_0^t \theta(t,\tau)\mu_\tau([0,\tau])d\tau + Id_{\mathbb{R}^n}$$

on obtient

2-15 : $$x(t) = x(0) + \int_0^t \theta(t,\tau)[u(\tau)+\mu_\tau([0,\tau])]d\tau.$$

Remarque :

A la différence des systèmes linéaires ordinaires, le noyau résolvant θ n'est en général pas inversible, comme le montre le contre-exemple suivant : (cf. HALE [1], p. 70) :

Considérons le système LNA suivant (c'est même un système retardé) dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2y(t) \\ \dot{y}(t) = -z(t) + \begin{cases} x(t-1) & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \dot{z}(t) = \begin{cases} 2y(t-1) & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

On peut alors montrer qu'il existe un plan P dans $\mathbb{R}^3$ tel que, quelle que soit la donnée initiale (x_0,y_0,z_0) et quel que soit $t > 1$ on a $(x(t),y(t),z(t)) \in P$. Donc pour ce système et pour $t > 1$, $\theta(t,0)$ n'est pas inversible.

Le système suivant fournit un contre exemple encore plus simple

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(0)(-\sin t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

En effet un calcul immédiat montre que $\theta(\frac{\pi}{2},0) = 0$.

Exemple 2-16 :

On considère le système LNA suivant où $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x\left(\frac{t}{2}\right)+v(t) \text{ p.p.} \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Posons $A(t,s) = \begin{cases} -1 & \text{si } s \leq \frac{t}{2} \\ 0 & \text{si } s > \frac{t}{2} \end{cases}$

La matrice fondamentale θ associée au système vérifie donc

$$(S) : \theta(t,s) = \begin{cases} 1+\int_{2s}^{t} \theta(t,\tau)d\tau & \text{si } 2s \leq t \\ 1 & \text{si } 2s > t \end{cases}$$

Par récurrence sur m on vérifie alors :

$$s \in \left[\frac{t}{2^{m+1}}, \frac{t}{2^m}\right] \Rightarrow \theta(t,s) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^m(t)s^i \quad \text{où}$$

$$\begin{cases} \alpha_0^0 = 1 \\ \text{et pour } m \geq 1 \quad i \geq 1 \qquad \alpha_i^m(t) = -\frac{2^{i-1}}{i}\alpha_{i-1}^{m-1}(t). \\ \qquad m \geq 1 \quad \alpha_0^m(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^{m-1}(t)\left(\frac{t}{2^m}\right)^i\left[1+\frac{t}{2^{m-i}(i+1)}\right] \end{cases}$$

La proposition suivante fournit quelques propriétés de la matrice fondamentale θ :

Proposition 2.17. :

a) θ est bornée sur tout ensemble $\Delta_T = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2/0 \leq s \leq t \leq T\}$

b) Si $A(t,.)$ est continue à gauche quel que soit $t \geq 0$, il en est de même pour $\theta(t,.)$ sur $]0,t]$.

c) $\theta(.,s)$ est localement absolument continue pour $s \geq 0$.

Démonstration :

a) Pour $s \in [0,t]$ $\theta(t,s) = -\int_s^t \theta(t,\tau)A(\tau,s)d\tau + Id_{\mathbb{R}^n}$

Mais :

2-17-1 : $|A(\tau,s)| \leq k(\tau)$.

Donc $|\theta(t,s)| \leq \int_0^t |\theta(t,\tau)|k(\tau)d\tau+1$.

Remplaçons s par $t-s$ puis appliquons le lemme de Gronwall

$$|\theta(t.t-s)| \leq 1+\left(\int_0^t k(\tau)d\tau\right)\exp\left(\int_0^t k(\tau)d\tau\right)$$

d'où l'on déduit immédiatement a).

b) Soit s et h tels que $s \in]0,t]$ $s-h \in]0,t]$.

$$\theta(t,s)-\theta(t,s-h) = -\int_s^t \theta(t,\tau)A(\tau,s)d\tau+\int_{s-h}^t \theta(t,\tau)A(\tau,s-h)d\tau.$$

2-17-2 : $$\theta(t,s)-\theta(t,s-h) = -\int_s^{s-h} \theta(t,\tau)A(\tau,s)d\tau+\int_{s-h}^t \theta(t,\tau)[A(\tau,s-h)-A(\tau,s)]d\tau$$

Si $s,t \in \Delta_T$ $|\theta(t,\tau)A(\tau,s)| \leq Mk(\tau)$

et $|\theta(t,\tau)[A(\tau,s-h)-A(\tau,s)]| \leq 2Mk(\tau)$

où M est une constante positive ne dépendant que de T.

La première intégrale de 2-17-2 tend vers 0 lorsque h tend vers 0. De même pour la seconde par le théorème de convergence dominée et la continuité à gauche de $A(\tau,.)$ $(\tau \geq 0)$. Cela montre b).

c) Soit $s \leq t' \leq t$. On a :

$$\theta(t,s)-\theta(t',s) = \int_{t'}^t \theta(t,\tau)A(\tau,s)d\tau+\int_s^{t'} [\theta(t,\tau)-\theta(t',\tau)]A(\tau,s)d\tau$$

Posons $\varphi(s) = |\theta(t,s)-\theta(t',s)|$

et $G = \int_{t'}^{t} |\theta(t,\tau)|k(\tau)d\tau$

D'après 2-17-1 on a

$$\varphi(s) \leq G+\int_{s}^{t'} \varphi(\tau)k(\tau)d\tau$$

et comme en a) :

$$\varphi(s) \leq G\left[1+\left(\int_0^t k(\tau)d\tau\right)\exp\left(\int_0^t k(\tau)d\tau\right)\right]$$

Pour $t \leq T$:

2-17-3 : $$|\theta(t,s)-\theta(t',s)| \leq M'\int_{t'}^{t} k(\tau)d\tau$$

(M' constante qui ne dépend que de T).
L'inégalité 2-17-3 entraîne facilement c). □

A l'instar de Grossman et Miller [1] pour les équations intégrodifférentielles, nous allons déduire du a) de la proposition 2-17, une condition suffisante pour qu'un sous-espace $\mathcal{F}$ de $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ soit envoyé de manière continue dans lui-même par l'application ρ qui à v associe la solution du système

2-18 : $$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t)+v(t) \text{ p.p.} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Rappelons que par : 2-12 :

2-19 : $$\rho(v)(t) = \int_0^t \theta(t,\tau)v(\tau)d\tau.$$

<u>Proposition 2.20.</u> :

Soit $\mathcal{F}$ un sous espace de $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ muni d'une métrique d qui le rend complet et le munit d'une topologie plus forte que celle de $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$. Alors si $\rho(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, ρ est continue comme application de $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$

Démonstration :

Soit v_n, v, y des éléments de $\mathcal{F}$ avec :

$$v_n \xrightarrow[\mathcal{F}]{} v \quad \text{et} \quad \rho(v_n) \xrightarrow[\mathcal{F}]{} y$$

Comme la topologie de $\mathcal{F}$ est plus forte que celle de $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ on a :

$$v_n \xrightarrow[L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)]{} v \quad \text{et} \quad \rho(v_n) \xrightarrow[L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)]{} y$$

Soit maintenant $\sigma \geq 0$.

$$\int_0^\sigma |\rho(v_n)(t)-\rho(v)(t)|\,dt = \int_0^\sigma \left|\int_0^t \theta(t,\tau)[v_n(\tau)-v(\tau)]\,d\tau\right| dt$$

$$\int_0^\sigma |\rho(v_n)(t)-\rho(v)(t)|\,dt \leq \left(\int_0^\sigma |v_n(\tau)-v(\tau)|\,d\tau\right) K(\sigma)$$

où $K(\sigma)$ est une constante qui ne dépend que de σ, cette inégalité étant justifiée par a) de la proposition 2.17.

De ce qui précède on déduit que $\rho(v_n) \xrightarrow[L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)]{} \rho(v)$ puis par unicité que $y = \rho(v)$.

Le théorème du graphe fermé permet alors de conclure. □

Appliquons la proposition 2.20 au cas particulier où $\mathcal{F} = L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.21. :

La solution de 2-18 est bornée quel que soit $v_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\sup\left\{\int_0^t |\theta(t,\tau)|\,d\tau \;\; ; \; t \geq 0\right\} < +\infty.$$

Démonstration :

Comme l'application ρ est linéaire continue de $L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $v \in L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$.

$$|\rho(v)|_\infty \leq M|v|_\infty.$$

Donc pour tout $t > 0$:

$$\left|\int_0^t \theta(t,\tau)v(\tau)d\tau\right| \leq M|v|_\infty.$$

Fixons t. Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq n$.
Prenons pour v la fonction dont chaque composante vérifie :

$$(1 \leq k \leq n) \quad v_k(\tau) = \text{sign } \theta_{i,k}(t,\tau)$$

où les $\theta_{i,k}$ sont les éléments de la matrice θ.
On a alors :

$$\int_0^t \sum_{k=1}^n |\theta_{i,k}(t,\tau)|d\tau \leq M.$$

D'où l'on déduit :

$$\int_0^t |\theta(t,\tau)|d\tau \leq M'$$

M' étant une constante indépendante de t. □

Remarque 2.22. :

On aurait pu prendre pour $\mathcal{F}$ l'ensemble $C_b(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.23. :

Une condition telle que celle intervenant dans la proposition 2.21 s'appelle parfois "condition de Perron" dans la littérature sur les équations différentielles.

3.- Application à une équation intégrale

Soit f une fonctionnelle LNA et A l'application qui lui est associée comme dans le théorème 1-3. On supposera que $A(t,.)$ est continue à gauche pour $t \geq 0$. Considérons l'équation intégrale suivante :

3-1 : $$y(t) = -\int_t^T A^*(s,t)y(s)ds - v(t)$$

où $v \in VB([0,T],\mathbb{R}^n)$.

L'équation 3-1 admet, comme l'équation 2-8, une solution unique dans $VB([0,T],\mathbb{R}^n)$. Il est possible d'exprimer cette solution à l'aide de la résolvante θ associée à f :

THEOREME 3-2 :

La solution de l'équation 3-1 vérifie :

3-3 $$y(t) = -\theta^*(T,t)v(t) + \int_{[t,T]} \theta^*(\tau,t)dv(\tau) \quad ; \quad 0 \leq t \leq T$$

Démonstration :

Montrons que le second membre de 3-3 vérifie 3-1.

En utilisant la relation intégrale 2-14 vérifiée par θ, on peut écrire :

$$\int_t^T A^*(s,t)\theta^*(T,s)v(T)ds = \left[\int_t^T \theta(T,s)A(s,t)ds\right]^* v(T)$$

$$= \left[-\theta^*(T,t) + Id_{\mathbb{R}^n}\right]v(T).$$

Par le théorème de Fubini on a également :

$$-\int_t^T A^*(s,t)\left[\int_{[t,T]} \theta^*(\tau,s)dv(\tau)\right]ds = \int_{[t,T]}\left[-\int_t^\tau A^*(s,t)\theta^*(\tau,s)ds\right]dv($$

$$= \int_{[t,T]}\left[\theta^*(\tau,t) - Id_{\mathbb{R}^n}\right]dv(\tau)$$

Ajoutons les relations obtenues membre à membre :

$$-\int_t^T A^*(s,t)\left[-\theta^*(T,s)v(T)+\int_{[t,T]}\theta^*(\tau,s)dv(\tau)\right]ds$$

$$= -\theta\ (T,t)v(T)+\int_{[t,T]}\theta^*(\tau,t)dv(\tau)+v(T)-\int_{[t,T]}dv(\tau)$$

$$= -\theta^*(T,t)v(T)+\int_{[t,T]}\theta^*(\tau,t)dv(\tau)+v(t)$$

On obtient bien l'équation 3-1. □

4.- Systèmes linéaires autonomes

Si l'on cherche à étendre la notion d'autonomie aux systèmes linéaires non anticipatifs, une première idée consiste à imposer à f de vérifier :

$$\forall t,t' \quad \forall x \in C(\mathbb{R}_+) \qquad f(x,t) = f(x,t').$$

Mais cette condition est très restrictive car elle conduit à

$$\forall t \qquad f(x,t) = f(x,0) = K\delta_0 \quad (K \text{ fixé, élément de } \mathbb{R}^n)$$

et donc uniquement à des solutions affines pour les systèmes LNA.

Les systèmes obtenus sont plus intéressants avec la condition suivante de "presque autonomie".

(PA) Quel que soit t,τ avec $t \geq \tau \geq 0$ et x continue à support dans $]\tau,+\infty[$, on a $f(x_\tau,t-\tau) = f(x,t)$, où $x_\tau(\xi) = x(\tau+\xi)$ $(\xi \geq 0,\ \tau \geq 0)$.

Exemple 4-1 :

Prenons $f(x,t) = C \quad x(t)+\int_0^t B(t-s)x(s)ds$

La vérification de (PA) est immédiate. □

Traduisons maintenant la condition (PA) sur une fonction A qui représente la fonctionnelle f comme précédemment (§ 1).

Si $t \geq \tau$ et $\mathrm{Supp}\ x \subset]\tau,+\infty[$ alors :

$$\int A(t-\tau,ds)x(s+\tau) = \int A(t,ds)x(s)$$

et, par changement de variable :

$$\int A(t-\tau,ds-\tau)x(s) = \int A(t,ds)x(s).$$

Par conséquent, les fonctions de s : $A(t-\tau,s-\tau)$ et $A(t,s)$ définissent la même mesure sur l'intervalle $]\tau,+\infty[$. On a aussi :

$$\forall s > t \qquad A(t-\tau,s-\tau) = A(t,s) = 0.$$

Il est possible de choisir A continu à droite par rapport à sa deuxième variable et nous supposerons qu'il en est ainsi dans la suite.

Alors, ce qui précède implique :

$$\forall s > \tau \qquad A(t-\tau,s-\tau) = A(t,s).$$

Faisons tendre s vers τ par valeurs supérieures :

$$(t \geq \tau \geq 0) : A(t-\tau,0) = A(t,\tau).$$

Posons pour $t \geq 0$ $K(t) = A(t,0)$. On obtient finalement :

4-2 : $$\forall s \in [0,t] \qquad A(t,s) = K(t-s).$$

A partir de là, on obtient facilement la :

<u>Proposition 4-3.</u> :

f vérifie (PA) si et seulement si il existe une fonction K localement à variation bornée sur IR_+, continue à gauche, telle que

$$\forall s \in [0,t] \qquad A(t,s) = K(t-s)$$

(où A représente f et est continue à droite par rapport à sa deuxième variable).

Considérons maintenant le système suivant où f vérifie (PA) et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$

4-4 : $$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t)+g(t) \text{ p.p.} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On peut lui associer un système adjoint (cf. 2-5 bis)

$$\nu_\tau = \int_0^\tau \nu_s(]s,\tau])\mu_s ds + \delta_\tau \ \ Id_{\mathbb{R}^n} \quad (\tau \geq 0)$$

où μ_s est la mesure associée à la forme linéaire $x \to f(x,s)$.

Posons $\nu_\tau(]s,\tau]) = \tilde{\theta}(\tau,s)$; alors pour $t \in [0,\tau]$:

$$\tilde{\theta}(\tau,t) = -\int_t^\tau \tilde{\theta}(\tau,s)\mu_s(]t,s])ds + Id_{\mathbb{R}^n}$$

Mais $\qquad \mu_s(]t,s]) = -A(s,t+0) = -A(s,t).$

Utilisons la proposition 4-3 :

$$\begin{cases} \tilde{\theta}(\tau,t) = -\int_t^\tau \tilde{\theta}(\tau,s)K(s-t)ds + Id_{\mathbb{R}^n} \\ t \in [0,\tau] \end{cases}$$

Remplaçons t par $\tau-t$ puis effectuons le changement de variable $s' = \tau-s$

4-5 : $$\begin{cases} \tilde{\theta}(\tau,\tau-t) = -\int_0^t \theta(\tau,\tau-s')K(t-s')ds' + Id_{\mathbb{R}^n} \\ t \in [0,\tau] \end{cases}$$

Fixons τ. 4-5 montre que l'application $t \to \tilde{\theta}(\tau,\tau-t)$ vérifie l'équation intégrale $\phi(t) = -\int_0^t \phi(s)K(t-s)ds+Id_{\mathbb{R}^n}$ sur $[0,\tau]$. Il est aisé de montrer que cette équation admet une solution unique. Donc si $t \in [0,\inf(\tau,\tau')]$

$$\tilde{\theta}(\tau,\tau-t) = \tilde{\theta}(\tau',\tau'-t)$$

En particulier si $t \in [0,\tau]$:

$$\theta(\tau,\tau-t) = \tilde{\theta}(t,0)$$

et quitte à remplacer $\tau-t$ par t :

4-6 : $$\tilde{\theta}(\tau,t) = \tilde{\theta}(\tau-t,0).$$

Introduisons alors une fonction Δ définie par :

$$\forall t \geq 0 \quad \Delta(t) = \tilde{\theta}(t,0)$$

On a alors

4-7 : $$(t \in [0,\tau]) \quad \tilde{\theta}(\tau,t) = \Delta(\tau-t).$$

Le système 4-5 devient :

4-8 : $$\Delta(t) = -\int_0^t \Delta(s)K(t-s)ds+Id_{\mathbb{R}^n}$$

D'après le théorème 2-10 on a : $(t \geq 0)$

$$x(t) = \nu_t(]0,t])x(0)+\nu_t(\{0\})x(0)+\int_0^t \nu_t(]\tau,t])g(\tau)d\tau + \\ +\int_0^t \nu_t(\{\tau\})g(\tau)d\tau.$$

La dernière intégrale est nulle car ν_t charge un nombre au plus dénombrable de points. Donc

4-9 : $$x(t) = \nu_t(]0,t])x(0)+\int_0^t \nu_t(]\tau,t])\{g(\tau)+\mu_\tau(\{0\})x_0\}d\tau.$$

Puis finalement, avec 4-7 on peut énoncer la

Proposition 4.10. :

La solution du système 4-4 est :

$$x(t) = \Delta(t)x_0+\int_0^t \Delta(t-\tau)[g(\tau)+\mu_\tau(\{0\})x_0]d\tau$$

où Δ est l'unique solution de l'équation intégrale sur $\mathbb{R}_+$:

$$\Delta(t) = -\int_0^t \Delta(s)K(t-s)ds+Id_{\mathbb{R}^n} .$$

III.- APPLICATION A DES PROBLEMES DE CONTRÔLE

Grâce à la formule 2-12 du chapitre II, l'étude du contrôle des systèmes non anticipatifs linéaires, ou "linéaires perturbés", se réduit souvent à une simple transposition des résultats sur les systèmes ordinaires ; nous allons le montrer sur deux exemples. De nombreux autres problèmes de contrôle sont traités par Delfour-Mitter [1] dans le cadre des systèmes affines héréditaires qui sont une classe particulière de systèmes LNA perturbés.

1.- Contrôle en temps optimal d'un système LNA

Considérons le système :

1-1 :
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t)+g(t)+B(t)u(t) \quad \text{p.p.} \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

où f est une fonctionnelle LNA

$g \in L'([0,T];\mathbb{R}^n)$

Ω est un convexe compact de $\mathbb{R}^m$

Quitte à diminuer m on supposera que Ω est d'intérieur non vide.

$$\mathcal{U}_T = \{u \text{ mesurable} \; ; \; u(t) \in \Omega \text{ pour tout } t \in [0,T]\}$$

$\mathcal{U}_T$ est l'espace des contrôles

$B \in L'([0,T] \; ; \; L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n))$

On notera $x(u)$ la solution du système 1-1 pour $u \in \mathcal{U}_T$.

Définition 1.2 :

L'ensemble d'atteignabilité en $\xi \in [0,T]$ est $K(\xi) = \{x(u)(\xi) \; ; \; u \in \mathcal{U}_T\}$.

THEOREME 1.3. :

Pour $\xi \in [0,T]$, $K(\xi)$ est compact, convexe et varie continûment avec ξ.

Démonstration :

Soit θ la résolvante associée à f. D'après 2-12-II :

$$\forall \xi \in [0,T] \qquad x(u)(\xi) = \theta(\xi,0)x_0 + \int_0^{\xi} \theta(\xi,s)[g(s)+B(s)u(s)]ds.$$

Il suffit ensuite de poursuivre comme dans la démonstration du théorème 1 p. 69 de LEE-MARKUS [1]. □

On note ∂G la frontière (topologique) d'un ensemble G.

Définition 1.4. :

Un contrôle u est extrêmal en T si $x(u)(T) \in \partial K(T)$.

THEOREME 1.5. :

u est un contrôle extrêmal en T si et seulement si il existe $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

1-6 : $$\eta_0^* \theta(T,t)B(t)u(t) = \operatorname*{Max}_{u \in \Omega} \eta_0^* \theta(T,t)B(t)u$$

presque pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration :

Soit u un contrôle extrêmal. Il existe un hyperplan d'appui à $K(T)$ en $x(u)(T)$ donc il existe $\eta_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que

1-7 : $$\forall z \in K(T) \quad \eta_0^*(x(u)(T)-z) \geq 0.$$

Supposons que $\eta_0^* \theta(T,t)B(t)u(t) < \max\limits_{u \in \Omega} \eta_0^* \theta(T,t)B(t)u$ sur un sous-ensemble de mesure non nulle de $[0,T]$.

Posons

$$\hat{g}(t,u) = \eta_0^* \theta(T,t)B(t)u$$

$$\hat{\psi}(t) = \operatorname*{Max}_{u \in \Omega} \hat{g}(t,u).$$

Alors $\hat{\psi}(t) \in \hat{g}(t,\Omega)$, $\hat{\psi}$ est mesurable et d'après le théorème 1-2 p. 220 de EKELAND-REMAM [1], il existe $\bar{u} \in \mathcal{U}_T$ tel que :

$$\hat{\psi}(t) = \hat{g}(t,\bar{u}(t)).$$

Donc : $\int_0^T \eta_0^*\theta(T,t)B(t)u(t)dt < \int_0^T \eta_0^*\theta(T,t)B(t)\bar{u}(t)dt$

et $\eta_0^* x(u)(T) < \eta_0^* x(\bar{u})(T)$.

Comme $x(\bar{u})(T) \in K(T)$, on a une contradiction avec 1-7.

Réciproquement, si u vérifie 1-6, comme précédemment $x(\bar{u})$ vérifie $\eta_0^* x(u)(T) \geq \eta_0^* y$ pour tout y appartenant à $K(T)$.

On en déduit $x(u)(T) \in \partial K(T)$. □

Définition 1.8. :

Le système |-| est dit "normal" sur $[0,T]$ si, quel que soit le vecteur η_0 non nul de IR^n, la fonction $\eta_0^*\theta(T,.)B(.)$ n'admet aucune composante s'annulant sur un sous ensemble de mesure strictement positive de $[0,T]$.

THEOREME 1.9. :

Si le système |-| est normal et Ω contient plus d'un point alors $K(T)$ est strictement convexe d'intérieur non vide. De plus, si u_1 et u_2 sont des contrôles ayant pour réponses respectives x_1 et x_2 avec $x_1(T) \in \partial K(T)$ et $x_1(T) = x_2(T)$ alors $u_1(t) = u_2(t)$ presque pour tout $t \in [0,T]$.

Démonstration :

* Si $x_1(T) \in \partial K(T)$ et $x_2(T) \in \partial K(T)$ où x_1 et x_2 sont les réponses associées à u_1 et u_2 et si le segment $[x_1(T),x_2(T)]$ est inclus dans $\partial K(T)$, alors m, milieu de ce segment, appartient à $\partial K(T)$ et il existe $\eta_0 \in IR^n \setminus \{0\}$ tel que

1-10 : $\forall z \in K(T) \quad \eta_0^*(z-m) \leq 0$

Si $\eta_0^*(m-x_1(T) > 0$ et $\eta_0^*(m-x_2(T)) > 0$ on aboutit à une contradiction car $\eta_0^*(m-m) = 0$. Donc, par exemple, $\eta_0^*(m-x_1(T)) \leq 0$. En comparant avec 1-10, on obtient :

$$\eta_0^*(m-x_1(T)) = 0 \quad \text{puis} \quad \eta_0^*(m-x_2(T)) = 0 \quad \text{et}$$

1-11 : $$\forall z \in K(T) \quad \eta_0^*(z-x_1(T)) \leq 0 \quad \text{et} \quad \eta_0^*(z-x_2(T)) \leq 0.$$

Comme dans le théorème 1-5, on a :

$$\eta_0^*\theta(T,t)B(t)u_1(t) = \eta_0^*\theta(T,t)B(t)u_2(t) = \underset{u\in\Omega}{\mathrm{Max}}\ \eta_0^*\theta(T,t)B(t)u$$

et, le système I-I étant normal, u_1 coïncide avec u_2 presque partout.

Donc $x_1(T) = x_2(T)$. Cela prouve que $K(T)$ est strictement convexe.

* Pour montrer que $K(T)$ est d'intérieur non vide, il suffit de montrer que $K(T)$ n'est pas réduit à un point.

Si cela n'était pas le cas on aurait

1-12 : $$\forall u \in \mathcal{U}_T \quad \int_0^T \theta(T,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = Z$$ où Z est un vecteur fixé de IR.

Définissons :

$$u(t) = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad 0 \leq t \leq s \\ \beta & \text{si} \quad s < t \leq T \end{cases}$$

où $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^n$, $s \in]0,T[$.

Alors $$\left(\int_0^s \theta(T,\tau)B(\tau)d\tau\right)\alpha+\left(\int_s^T \theta(T,\tau)B(\tau)d\tau\right)\beta = Z \quad \text{par} \quad 1\text{-}12$$

Et en dérivant :

$$\theta(T,s)B(s)\alpha-\theta(T,s)B(s)\beta = 0 \quad \text{p.p.}$$

On en déduit aisément que pour presque tout $s \in [0,T]$:

(1-13 : $$\theta(T,s)B(s) = 0$$

Cela contredit la normalité. Donc $K(T)$ n'est pas réduit à un point.

* Si u_1 et u_2 sont des contrôles extrêmaux avec $x_1(u)(T) = x_2(u)(T)$ le théorème 1-5 et l'hypothèse de normalité entraînent :

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{p.p.}$$

<u>THEOREME 1.14.</u> : (contrôle en temps optimal)

Soit une application $G : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour $t \geq 0$, $G(t)$ soit un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. On suppose G continue. S'il existe $u \in \mathcal{U}_T$ et $t_1 \in [0,T]$ vérifiant $x(u)(t_1) \in G(t_1)$ alors il existe t_m (temps minimal) et $u_m \in \mathcal{U}_T$ (contrôle en temps optimal) tels que $x(u_m)(t_m) \in G(t_m)$.

De plus tout contrôle optimal est extrêmal i.e. :

$$\exists \eta \in \mathbb{R}^n \quad \eta^*\theta(t_m,t)B(t)u_m(t) = \underset{u\in\Omega}{\text{Max}}\ \eta^*\theta(t_m,t)B(t)u \quad \text{p.p.}$$

<u>Démonstration</u> :

cf. LEE-MARKUS [1] p. 127. □

<u>THEOREME 1.15.</u> : (principe bang-bang)

Soit $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^m \; ; \; |u^i| \leq 1, \; i = 1,2,\dots m\}$ et $G(t)$ convexe pour $t \geq 0$

1) Si le système |-| est normal, le contrôle en temps optimal est unique.

2) Soit u_m un contrôle en temps optimal t_m ; alors il existe $\eta \in C[0,t_m]$ tel que $u_m(t) = \text{sgn}[\eta(t)B(t)]$ p.p.

où $\text{sgn}(h) = (\text{sgn}(h'),\dots \text{sgn}(h^m))^*$ pour $h \in \mathbb{R}^m$.

<u>Démonstration</u> :

1) est une conséquence des théorèmes précédents.

Pour 2) il suffit de prendre $\eta(t) = \eta^*\theta(t_m,t)$ avec η comme dans 1-14. □

2.- Contrôlabilité locale d'un système non linéaire

Dans ce qui suit, nous adaptons aux systèmes non anticipatifs une méthode dérivée du théorème des fonctions implicites, et déjà utilisée par MAGNUSSON - PRITCHARD [1] dans le cadre des équations aux dérivées partielles.

Considérons le système suivant sur $[0,T]$:

$$2\text{-}1 : \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = f(z,t)+Bu(t)+F(z,u)(t) \quad \text{p.p.} \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

où f est une fonctionnelle LNA ; pour $\tau \geq 0$ et $z \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$

$$|f(z,\tau)| \leq k(\tau)|z|_\tau \qquad (k \in L'[0,T] \text{ est fixée})$$

$$u \in L^m([0,T];\mathbb{R}^p) \qquad (1 \leq m \leq +\infty,\ p \in \mathbb{N}^*)$$

$$B \in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n).$$

$$F : C([0,T];\mathbb{R}^n)\times L^m([0,T];\mathbb{R}^p) \to L^\infty([0,T];\mathbb{R}^n)$$

avec F continûment différentiable

$$F(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad dF(0,0) = 0.$$

Le système linéarisé associé à 2-1 est :

$$2\text{-}2 : \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = f(z,t)+Bu(t) \quad \text{p.p.} \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Nous supposerons de plus que, pour $\|u\|_m < \rho$ $(\rho > 0)$ le système 2-1 admet une solution unique. ($\|.\|_m$ désigne la norme dans $L^m([0,T];\mathbb{R}^p)$).
On notera $z(u)$ cette solution.

THEOREME 2.3. :

Si le système 2-2 est contrôlable en T, alors il existe un voisinage $v(0)$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall \eta \in v(0) \quad \exists u \in L^m([0,T];\mathbb{R}^p) \text{ tel que } z(u)(T) = \eta.$$

Démonstration :

Soit $z \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ et $u \in L^m([0,T];\mathbb{R}^p)$.

On notera $\mathcal{M}(z,u)$ l'unique solution du système

$$\text{2-4 :} \quad \begin{cases} \dot{Z}(t) = f(Z,t)+Bu(t)+F(z,u)(t) \quad \text{p.p.} \\ Z(0) = 0 \end{cases}$$

Posons $T(z,u) = z-\mathcal{M}(z,u)$.

On vérifie immédiatement que T applique $C([0,T];\mathbb{R}^n)\times L^m([0,T];\mathbb{R}^p)$ dans $C([0,T];\mathbb{R}^n)$.

Si θ est la résolvante de f on a :

$$\forall t \in [0,T] \quad T(z,u)(t) = z(t)-\int_0^t \theta(t,\tau)Bu(\tau)-\int_0^t \theta(t,\tau)F(z,u)(\tau)d\tau$$

Notons $B_\rho^m = \{u \; ; \; u \in L^m([0,T];\mathbb{R}^p) \text{ et } \|u\|_m < \rho\}$

Définissons une application ϕ :

$$\begin{aligned} \phi \; : \; B_\rho^m &\to C([0,T];\mathbb{R}^n) \\ v &\mapsto \phi v = y \end{aligned}$$

où y est l'unique solution de $T(y,v) = 0$.

Calculons maintenant $\frac{\partial T}{\partial u}(z_o,u_o)u$ et $\frac{\partial T}{\partial z}(z_o,u_o)z$.

On a :

$$\|F(z_o,u_o+u)-F(z_o,u_o)- \frac{\partial F}{\partial u}(z_o,u_o).u\|_\infty = 0(\|u\|_m^2)$$

Posons :

$$G = \left|T(z_o,u_o+u)(t)-T(z_o,u_o)(t)+\int_0^t \theta(t,s)Bu(s)ds + \right.$$
$$\left. +\int_0^t \theta(t,s)\left[\frac{\partial F}{\partial u}(z_o,u_o).u\right](s)ds\right|$$

Alors :

$$G \leq \left(\int_0^t |\theta(t,s)|\right)ds \; 0(\|u\|_m^2)$$

et par la proposition 2-17-a du chapitre II, il existe $K > 0$ tel que :

$$G \leq KTO(\|u\|_m^2)$$

On a ainsi démontré que $\frac{\partial T}{\partial u}$ existe et que :

2-5 : $$\frac{\partial T}{\partial u}(z_0,u_0).u(t) = -\int_0^t \theta(t,s)Bu(s)ds - \int_0^t \theta(t,s)\frac{\partial F}{\partial u}(z_0,u_0).u(s)ds$$

De la même manière $\frac{\partial T}{\partial z}$ nous est donné par :

2-6 : $$\frac{\partial T}{\partial z}(z_0,u_0).z(t) = z(t) - \int_0^t \theta(t,s)\frac{\partial F}{\partial z}(z_0,u_0).z(s)ds.$$

Il est facile de vérifier sur les expressions précédentes que $\frac{\partial T}{\partial u}$ et $\frac{\partial T}{\partial z}$ sont continues en u et z. De plus :

2-7 : $$\frac{\partial T}{\partial z}(0,0) = Id_{C([0,T];\mathbb{R}^n)}.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, ϕ est de classe C^1 sur un voisinage $\mathcal{U}(0)$ de 0 dans $L^m([0,T];\mathbb{R}^p)$.

En dérivant $T(\phi w,w) = 0$ en $w = 0$ on obtient :

2-8 : $$\forall v \in L^m([0,T];\mathbb{R}^p) : \frac{\partial T}{\partial z}(0,0)\phi'(0)v + \frac{\partial T}{\partial u}(0,0)v = 0.$$

Appliquons 2-5 et 2-7 :

$$\forall v \in L^m([0,T];\mathbb{R}^p) : \forall t \in [0,T] :$$

2-9 : $$\phi'(0).v(t) = \int_0^t \theta(t,s)Bv(s)ds + \int_0^t \theta(t,s)\frac{\partial F}{\partial u}(0,0).u(s)ds$$

Comme $dF(0,0) = 0$, 2-9 se simplifie en :

2-10 : $$\phi'(0).v(t) = \int_0^t \theta(t,s)Bv(s)ds$$

Considérons l'application ϕ_T

$$\begin{aligned} \phi_T : B_\rho^m &\to \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \phi(u)(T) \end{aligned}$$

ainsi que ψ_T

$$\begin{aligned} \psi_T : C([0,T];\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R}^n \\ z &\mapsto z(T) \end{aligned}$$

On a alors :

2-11 : $$\phi_T = \psi_T \circ \phi$$

Par conséquent :

$$\forall u \in L^m([0,T];\mathbb{R}^p)$$

2-12 : $$\phi_T'(0).u = \psi_T \circ \phi'(0).u$$

Et par 2-10 :

2-13 : $$\phi_T'(0).u = \int_0^T \theta(T,s)Bu(s)ds.$$

$\phi_T'(0)$ est surjective, par l'hypothèse sur la contrôlabilité en T du système linéarisé 2-2. Comme l'application $u \mapsto \phi_T'(u)$ est continue sur un voisinage $\mathcal{U}(0)$ de 0, le résultat suivant s'applique à ϕ_T.

> Soit V et W des espaces de Banach, G une application de classe C^1 d'un voisinage de 0_V dans V à valeurs dans W telle que $G(0_V) = 0_W$. Si $G'(0_V)$ est surjective alors l'image de G est un voisinage de 0_W.

Donc $\{\phi_T u \; ; \; u \in B_\rho^m\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, ce qui prouve 2-3. □

IV.- ETUDE DE LA STABILITE D'UN SYSTEME PERTURBE PAR UNE FONCTIONNELLE NON ANTICIPATIVE

0.- Introduction

Dans cette partie nous adaptons des résultats de Grimmer-Seifert [1] à notre présentation des systèmes non anticipatifs. Il s'agit de conditions suffisantes pour avoir divers types de stabilité, se basant sur une variante due à Razumikhin de la méthode de Liapunov.

Considérons un système non anticipatif dans $\mathbb{R}^n$:

0-1 : $$\dot{x}(t) = f(x,t)$$

et une fonction $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment différentiable.

La dérivée de W le long d'une solution de 0-1 est donnée par :

0-2 $$\dot{W}(x(t)) = \frac{\partial W}{\partial x}(x(t)).f(x,t).$$

La stabilité se démontre, en général, en prouvant que 0-2 est négative pour toute donnée initiale (cf. HIRSCH-SMALE [1] p. 192).

Cette condition est assez restrictive sur f. En fait, si une solution de 0-1 est à l'instant initial dans une boule centrée en 0 et quitte cette boule à l'instant t, on a $|x(\tau)| \leq |x(t)|$ pour $\tau \in [0,t]$. Il suffit donc de vérifier que 0-2 est négative pour de telles solutions, uniquement. C'est cette idée que nous exploitons dans la suite.

En particulier les théorèmes 4, 5, 6 de l'article de Grimmer et Seifert précité, concernant la stabilité d'équations intégro-différentielles de Volterra, sont généralisés pour s'appliquer à des équations où interviennent des fonctionnelles non anticipatives ; sous des conditions de Carathéodory.

1.- Une condition suffisante de stabilité uniforme

Dans ce paragraphe X désigne une partie de $C([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$. En pratique, X est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle. Le résultat essentiel est le suivant :

THEOREME 1.1. :

On suppose qu'il existe des fonctions $u,v,f \in C([0,+\infty[;\mathbb{R}\ )$ et $V \in C([0,+\infty[\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}\ )$ vérifiant les hypothèses suivantes :

h1 : u est strictement croissante, $u(0) = v(0) = 0$,
$\forall s > 0 \quad f(s) > s$.

h21 : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n \qquad u(|x|) \leq V(t,x) \leq v(|x|)$

h22 : $\forall x \in X$ l'application $t \to V(t,x(t))$ est localement absolument continue et pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\left[\forall s \in [0,t]\ f(V(t,x(t)) > V(s,x(s))\right] \Rightarrow \dot{V}(t,x(t)) \leq 0$$

Alors $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0$ tel que $(x \in X$ et $|x(0)| < \eta)$
$\Rightarrow \ (\forall t\ |x(t)| < \varepsilon)$

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta(\varepsilon)$ tel que $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ et $v(s) < u(\varepsilon)$ pour $s \in [0,\delta(\varepsilon)]$, ce qui est possible car v est continue.

Soit $x \in X$ tel que $|x(0)| < \delta(\varepsilon)$.

Supposons qu'il existe $t_2 > 0$ tel que $|x(t_2)| = \varepsilon$ et $\forall t \in [0,t_2[$ $|x(t)| < \varepsilon$.

Si $V(t_2,x(t_2)) \leq V(0,x(0))$, on a alors par l'hypothèse h21

1-2 : $$u(|x(t_2)|) \leq V(t_2,x(t_2)) \leq V(0,x(0)) \leq v(|x(0)|).$$

Mais d'après le choix de $\delta(\varepsilon)$:

1-3 : $$v(|x(0)|) < u(\varepsilon).$$

Comme u est croissante, 1-2 et 1-3 impliquent : $|x(t_2)| < \varepsilon$.

Ce qui contredit le choix de t_2.

Donc $V(t_2,x(t_2)) > V(0,x(0))$.

Comme $t \to V(t,x(t))$ est continue, il existe $t_1 \in]0,t_2]$ tel que

1-4 : $$0 \leq t < t_1 \Rightarrow V(t,x(t)) < V(t_1,x(t_1)) = V(t_2,x(t_2))$$

Posons $\mathcal{M} = \{\tau \in [0,t_1] \ ; \ \dot{V}(\tau,x(\tau)) > 0\}$

Montrons que $\forall t \in [0,t_1[$ $\mathcal{M} \cap [t,t_1[$ est de mesure strictement positive. Par l'absurde, s'il existe $t \in [0,t_1[$ tel que $\dot{V}(\tau,x(\tau)) \leq 0$ pour presque tout $\tau \in [t,t_1]$, cela implique :

1-5 $$-V(t,x(t))+V(t_1,x(t_1)) = \int_t^{t_1} \dot{V}(\tau,x(\tau))d\tau \leq 0.$$

Mais 1-5 contredit le choix de t_1.

Posons

$$\mathcal{M}' = \{t \in \mathcal{M} \ ; \ \forall s \in [0,t] \ \ f(V(t,x(t)) > V(s,x(s))\}.$$

Supposons qu'il existe $t_3 \in [0,t_1[$ tel que : $\mathcal{N} = \mathcal{M}' \cap [t_3,t_1]$ est de mesure nulle.

Donc $\forall\tau \in ([t_3,t_1] \cap \mathcal{M}) \setminus \mathcal{N}$ $\exists\sigma(\tau) \in [0,\tau]$ vérifiant :

1-6 : $$f(V(\tau,x(\tau)) \leq V(\sigma(\tau),x(\sigma(\tau)))$$

Considérons une suite $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{i\to+\infty} \tau_i = t_1$ et $\tau_i \in (\mathcal{M} \cap [t_3,t_1]) \setminus \mathcal{N}$. Une telle suite existe d'après les propriétés de $\mathcal{M}$.

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\lim_{i\to+\infty} \sigma(\tau_i) = s_0 \in [0,t_1]$$

Par continuité, on a également, en passant à la limite dans 1-6 :

1-7 : $$f(V(t_1,x(t_1)) \leq V(s_0,x(s_0)).$$

Comme $V(t_1,x(t_1)) > 0$, l'hypothèse h1 entraîne :

1-8 : $$f(V(t_1,x(t_1)) > V(t_1,x(t_1)).$$

et $$V(t_1,x(t_1)) < V(s_0,x(s_0))$$

ce qui contredit le choix de t_1.

Donc $\forall t \in [0,t_1[$, $\mathcal{M}' \cap [t,t_1[$ est de mesure strictement positive.

Mais d'après l'hypothèse h22, pour tout élément τ de $\mathcal{M}'$ on a

$$\dot{V}(\tau,x(\tau)) \leq 0.$$

Comme $\mathcal{M}'$ est de mesure strictement positive, on a une contradiction avec $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$.

On en conclut que $\forall t > 0 \quad |x(t)| < \varepsilon$, ce qui démontre le théorème. □

On va appliquer le résultat précédent au système suivant : ($x \in AC_{loc}([0,+\infty[,\mathbb{R}^n)$)

1-9 : $$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t)+\tilde{f}(x,t) \text{ p.p.} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où A est une matrice n-n réelle dont les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative et $\tilde{f}$ est une fonctionnelle non anticipative avec :

1-10 : $\forall x \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n) \qquad t \mapsto \tilde{f}(x,t)$ est mesurable

1-11 : $\forall t \geq 0 \qquad x \mapsto \tilde{f}(x,t)$ est continue sur $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n)$

1-12 : $\forall t \geq 0 \quad \forall x \in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^n) \quad |\tilde{f}(x,t)| \leq \mu|x|_t$ où $\mu \in \mathbb{R}_+$ est fixé

Le système 1-9 admet des solutions, selon les théorèmes du chapitre I.

Prenons pour X l'ensemble de ces solutions.

Posons $B = \int_0^{+\infty} \exp(A^*t)\exp(At)dt$. Alors :

1-13 : $BA+A^*B = -Id_{\mathbb{R}^n}$ et B est symétrique réelle définie positive.

Soit $\lambda^2(\lambda > 0)$ et $\Lambda^2(\Lambda > 0)$ respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de B.

On a $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \; \lambda^2(x,x) \leq (x,Bx) \leq \Lambda^2(x,x)$.

Posons $\quad V(t,x) = (x,Bx) \qquad t \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$

$\qquad u(s) = \lambda s^2 \qquad s \geq 0$

$\qquad v(s) = \Lambda s^2 \qquad s \geq 0.$

L'hypothèse h21 du théorème 1-1 est vérifiée.

Si $x \in X$, $t \to V(t,x(t))$ est localement absolument continue et :

$$\dot{V}(t,x(t)) = (x(t),(A^*B+BA)x(t))+2(\tilde{f}(x,t),Bx(t)) \text{ p.p.}$$

et par 1-13

$$\dot{V}(t,x(t)) = -|x(t)|^2+2(\tilde{f}(x,t),Bx(t)) \quad \text{p.p.}$$

Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $q > 1$.

Posons : $f(s) = q^2 s \quad (s \geq 0)$.

Supposons que :

$$\forall s \in [0,t] \quad q^2(x(t),Bx(t)) > (x(s),Bx(s))$$

Comme $(x(s),Bx(s)) \geq \lambda^2 |x(s)|^2$, cela implique :

1-14 : $$q^2(x(t),Bx(t)) > \lambda^2 |x|_t^2$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée au produit scalaire associé à B permet d'écrire :

1-15 : $$(\tilde{f}(x,t),Bx(t)) \leq (\tilde{f}(x,t),B\tilde{f}(x,t))^{1/2}(x(t),Bx(t))^{1/2}$$

donc : $(\tilde{f}(x,t),Bx(t)) \leq \Lambda^2 |\tilde{f}(x,t)||x(t)|$.

Par 1-12 on a

$$(\tilde{f}(x,t),Bx(t)) \leq \Lambda^2 \mu |x|_t |x(t)|.$$

En utilisant 1-14 on obtient :

$$(\tilde{f}(x,t),Bx(t)) \leq \Lambda^2 \mu \frac{q\Lambda}{\lambda} |x(t)|^2$$

Si $2\frac{\Lambda^3}{\lambda}\mu < 1$ on peut choisir $q > 1$ tel que $2\frac{\Lambda^3}{\lambda}\mu q < 1$.

On a alors

$$\dot{V}(t,x(t)) \leq (2\frac{\Lambda^3}{\lambda}\mu q - 1)|x(t)|^2 \leq 0 \quad \text{p.p.}$$

L'hypothèse h22 du théorème 1-1 est donc satisfaite. En conclusion on a

Proposition 1.16. :

Si $2\frac{\Lambda^3}{\lambda}\mu < 1$, alors quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(|x_0| < \eta) \Rightarrow (\forall x \in X \quad \forall t \geq 0 \quad |x(t)| < \varepsilon).$$

2.- Une condition suffisante pour avoir des solutions bornées

Une simple modification de l'argument du théorème 1-1 va nous fournir une condition suffisante pour que les solutions du système :

$$\text{2-1 :} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t)+\tilde{f}(x,t)+g(t) & \text{p.p.} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où A et $\tilde{f}$ sont comme précédemment et $g \in L^\infty(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^n)$, soient bornées. (Des solutions existent, d'après les théorèmes du chapitre I).

THEOREME 2.2. :

Prenons u,v,f,V comme dans le théorème 1.1.

On suppose h1 et h21 vérifiés, ainsi que les hypothèses suivantes :

h23 : $\forall x \in X \quad t \to V(t,x(t))$ est localement absolument continue et il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\forall x \in X$, pour presque tout $t \geq 0$ on ait

$$\Big[|x(t)| \geq M \text{ et } \forall s \in [0,t] \quad f(V(t,x(t)) > V(s,x(s))\Big] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dot{V}(t,x(t)) \leq 0$$

h3 : $\lim\limits_{r\to+\infty} u(r) = +\infty$ et v strictement croissante.

Alors $\forall \alpha \geq 0 \quad \exists K > 0$ tel que $\forall x \in X\Big[|x(0)| \leq \alpha \Rightarrow |x|_\infty \leq K\Big]$.

En particulier tout élément de X est une fonction continue bornée.

Démonstration :

Soit $x \in X$. On se propose de démontrer

2-3 : $\forall t > 0 \quad u(|x(t)|) \leq v(|x(0)|)+v(M)$

Si 2-3 n'est pas vérifié, il existe $t_2 > 0$ avec

$$u(|x(t_2)|) > v(|x(0)|)+v(M)$$

Donc $V(t_2,x(t_2)) > V(0,x(0))+v(M)$

On définit t_1, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ comme dans la démonstration du théorème 1-1.

On obtient de la même manière :

$\forall t \in [0,t_1[\quad \mathfrak{M}' \cap [t,t_1[$ est de mesure strictement positive.

Mais $V(t_1,x(t_1)) = V(t_2,x(t_2)) > v(M)$

donc $|x(t_1)| > M$ d'après h3.

Posons $\mathfrak{M}'' = \{t \in \mathfrak{M}' \; ; \; |x(t)| > M\}$.

$\mathfrak{M}''$ est de mesure strictement positive car dans un voisinage de t_1 on a $|x(t)| > M$.

Or d'après h23 tout élément τ de $\mathfrak{M}''$ vérifie $\dot{V}(\tau,x(\tau)) \leq 0$.

C'est contradictoire avec le fait que $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}$.

Donc 2-3 est vérifié.

Par conséquent $\forall t \geq 0 \quad |x(t)| \leq u^{-1}(v(|x(0)|)+v(M))$.

Et par l'hypothèse h3 le théorème 2-2 se trouve démontré.

Revenons au système 2-1.

On prend B,v,u,V,f,X comme au paragraphe 1. On a

$$\dot{V}(t,x(t)) = -|x(t)|^2+2(\tilde{\tilde{f}}(x,t),Bx(t))+2(g(t),Bx(t)) \quad \text{p.p.}$$

Supposons que $\forall s \in [0,t] \quad q^2(x(t),Bx(t)) > (x(s),Bx(s))$.

Alors $\dot{V}(t,x(t)) \leq -|x(t)|^2+2\mu q \dfrac{\Lambda^3}{\lambda} |x(t)|^2+2|x(t)|\Lambda^2|g|_\infty$.

Si $2\mu \frac{\Lambda^3}{\lambda} < 1$ on peut choisir $q > 1$ tel que $2\mu q \frac{\Lambda^3}{\lambda} < 1$.

Alors si $|x(t)| \geq \dfrac{2\Lambda^2 |g|_\infty}{1-2\mu q \frac{\Lambda^3}{\lambda}}$ on a $\dot{V}(t,x(t)) \leq 0$.

L'hypothèse h23 du théorème 2-2 est vérifiée avec $M = \dfrac{2\Lambda^2 |g|_\infty}{1-2\mu q \frac{\Lambda^3}{\lambda}}$.

Proposition 2.4. :

Si $2\mu \frac{\Lambda^3}{\lambda} < 1$, toute solution de 2-1 est bornée.

Remarque 2.5. :

En fait on n'utilise pas $u(0) = v(0) = 0$ dans ce qui précède.

La proposition 2-4 peut être améliorée par un affaiblissement des hypothèses sur $\tilde{f}$. Il suffit en effet de supposer la condition sur μ "vraie pour $t \geq T$ seulement". Remplaçons donc l'hypothèse 1-12 par 1-12 bis :

1-12 bis : $\forall t \geq 0 \quad |\tilde{f}(x,t)| \leq \mu(t)|x|_t$

où $\mu \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ et $\mu > 0$ p.p.

Tout demeurant identique par ailleurs, on a la :

Proposition 2.6. :

Si $2\mu(t) \frac{\Lambda^3}{\lambda} \leq \eta < 1$ pour $t \geq T$, les solutions de 2-1 sont bornées.

Plus précisément : $\forall \alpha \geq 0 \quad \exists K(\alpha) > 0$ tel que (x vérifie 2-1 et $|x(0)| \leq \alpha) \Rightarrow (|x|_\infty < K(\alpha))$.

Démonstration :

Posons $X = \{x \ ; \ x$ vérifie 2-1 et $|x(0)| \leq \alpha\}$.

Si x est solution de 2-1 alors x est également solution de

2-7 : $$\begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{f}(x,t)\,\mathbb{1}_{[T,+\infty[}(t) + g(t)\,\mathbb{1}_{[T,+\infty[}(t) + \dot{x}(t)\,\mathbb{1}_{[0,T[}(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Posons : $\tilde{F}(x,t) = \tilde{f}(x,t)1\!\!1_{[T,+\infty[}(t)$

et $G(t) = g(t)1\!\!1_{[T,+\infty[}(t)+\dot{x}(t)1\!\!1_{[0,T[}(t)$.

Majorons $|G|_\infty$ en fonction de $|x_0|$.

$$|\dot{x}(t)| \leq (\mu(t)+|A|)(|x_0|+\int_0^t |\dot{x}(\tau)|d\tau)+|\dot{g}(t)| \;\; ; \; t \geq 0$$

Donc :

2-8 : $$|\dot{x}(t)| \leq (\mu(t)+|A|+|g|_\infty)(1+|x_0|)(1+\int_0^t |\dot{x}(\tau)|d\tau) \;\; ; \; t \geq 0$$

Posons pour $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}_+$:

$$m(\tilde{\alpha}) = (|\mu 1\!\!1_{[0,T[}|_\infty+|A|+|g|_\infty)(1+\tilde{\alpha})$$

Par le lemme de Gronwall on déduit de 2-8 :

$$|\dot{x}\, 1\!\!1_{[0,T[}|_\infty \leq m(|x_0|)\exp(Tm(|x_0|)).$$

et donc :

2-9 : $$|G|_\infty \leq m(|x_0|)\exp(Tm(|x_0|))+|g|_\infty$$

On est en position pour appliquer le théorème 2-2 avec :

2-10 : $$M = [m(\alpha)\exp[Tm(\alpha)]+|g|_\infty] \times \frac{2\Lambda^2}{1-\eta q} .$$

Il suffit de raisonner comme pour la proposition 2-4 avec $\tilde{F}$ à la place de $\tilde{f}$ et en remarquant que pour $t \geq 0$:

2-11 : $$|\tilde{F}(y,t)| \leq 1\!\!1_{[T,+\infty[}(t)\mu(t)|y|_t \leq \frac{\lambda\eta}{2\Lambda^3} \; |y|_t$$

quel que soit $y \in C([0,+\infty[,\mathbb{R}^n)$. □

3.- Stabilité asymptotique uniforme

On désigne par $CB([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$ les fonctions continues bornées de $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et par X une partie de $CB([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$. En affinant la méthode utilisée en 2 on peut obtenir une condition suffisante pour que les éléments de X tendent vers 0.

THEOREME 3.1. :

Soit des fonctions h,a,b,V vérifiant :

A : h est continu de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$; $h(s) > s$ pour $s > 0$; $h(0) = 0$.

B : V est continue de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \qquad a(|x|) \leq V(t,x) \leq b(|x|)$.

a et b sont strictement croissantes de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, continues.

C : $\forall x \in X \qquad t \to V(t,x(t))$ est localement absolument continue.

D : Quel que soit $M > 0$ il existe :

- une suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, strictement décroissante et tendant vers 0.
- une suite $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, strictement croissante et tendant vers $+\infty$.
- une suite $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. strictement positives sur $[u_j/2, M]$ et telles que
  si $x \in X$, $|x|_\infty \leq M$, $t \geq r_j$, $u_j \leq |x(t)|$,
  $\dot{V}(t,x(t))$ existe et
  $(\forall s \in [t-r_j, t] \quad V(s,x(s)) < h(V(t,x(t)))$
  on a : $\dot{V}(t,x(t)) \leq -w_j(|x(t)|)$.

Alors tout élément de X tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
Plus précisément : $\forall M > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists T(\eta,M) > 0$ tel que

$$(x \in X \text{ et } |x|_\infty \leq M) \Rightarrow (t \geq T(\eta,M) \Rightarrow |x(t)| < \eta).$$

Démonstration :

Soit $x \in X$, $M > 0$, $\eta > 0$ tels que $\eta < M$ et $|x|_\infty \leq M$.

D'après l'hypothèse A il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que

3-2 : $$a(\eta)/_2 \leq s \leq b(M) \Rightarrow h(s)-s \geq \varepsilon_o$$

Quitte à prendre ε_o assez petit on peut supposer qu'il existe un entier N positif tel que $a(\eta) \geq b(M)-N\varepsilon_o \geq a(\eta)/_2$.

Posons $\varepsilon_k = b(M)-k\varepsilon_o$ et prenons $J > 0$ tel que

3-3 : $$u_J < b^{-1}(\varepsilon_N)$$

Nous allons montrer par récurrence que $\forall k \in \{1,2...N\}$;

3-4 : $$t \geq k(r_J+\frac{\varepsilon_o}{\gamma}) \Rightarrow V(t,x(t)) \leq \varepsilon_k$$

où γ est un minorant strictement positif de w_J sur $[U_J,M]$.

Si 3-4 est démontré, on aura en particulier pour $k = N$

$$t \geq N(r_J+\frac{\varepsilon_o}{\gamma}) \Rightarrow V(t,x(t)) \leq \varepsilon_N \leq a(\eta)$$

et donc, avec l'hypothèse B :

$$t \geq N(r_J+\frac{\varepsilon_o}{\gamma}) \Rightarrow |x(t)| \leq \eta.$$

Le théorème 3-1 s'en déduira immédiatement.

Vérifions 3-4 pour $k = 1$

Montrons d'abord qu'il existe $t_1 \in [r_J,r_J+\frac{\varepsilon_o}{\gamma}]$ tel que $V(t_1,x(t_1)) \leq \varepsilon$

Sinon, par l'absurde :

$$\forall t \in [r_J,r_J+\frac{\varepsilon_o}{\gamma}] \quad V(t,x(t)) > \varepsilon_1$$

Mais $V(t,x(t)) > \varepsilon_1 \Rightarrow a(\eta)/_2 < V(t,x(t)) \leq b(M)$.

Donc, grâce à 3-2 ; pour $s \in [t-r_J,t]$ on a :

3-5 : $$h(V(t,x(t))) > \varepsilon_1+\varepsilon_o = b(M) \geq V(s,x(s))$$

Mais

3-6 : $\forall t \in [r_J, r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma}]$ $b(|x(t)|) \geq V(t,x(t)) > \varepsilon_1 > \varepsilon_N$

Donc $\forall t \in [r_J, r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma}]$ $|x(t)| > b^{-1}(\varepsilon_N) > U_J$

Par conséquent si $\dot{V}(t,x(t))$ est défini on a :

3-7 : $\dot{V}(t,x(t)) \leq -w_J(|x(t)|) \leq -\gamma$ (car $U_J < |x(t)| \leq M$)

Comme, par l'hypothèse C :

$$V(r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma}, x(r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma})) - V(r_J, x(r_J)) = \int_{r_J}^{r_J + \varepsilon_0/\gamma} \dot{V}(t,x(t))dt$$

Grâce à 3-7 on a finalement :

3-8 : $V(r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma}, x(r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma})) - b(M) \leq \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \times (-\gamma) = -\varepsilon_0$

Mais :

3-9 : $V(r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma}, x(r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma})) - b(M) > \varepsilon_1 - b(M) = -\varepsilon_0$

et 3-8 et 3-9 sont contradictoires.

Par conséquent il existe $t_1 \in [r_J, r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma}]$ tel que $V(t_1, x(t_1)) \leq \varepsilon_1$.

Montrons ensuite que $t \geq r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \Rightarrow V(t,x(t)) \leq \varepsilon_1$.

Sinon il existe $t_2 > t_1$ avec $V(t_2, x(t_2)) > \varepsilon_1$.

Posons $t_3 = \sup\{t \; ; \; t < t_2$ et $V(t,x(t)) \leq \varepsilon_1\}$.

Alors $t_3 \geq t_1$ et $\forall t \in]t_3, t_2] V(t,x(t)) > \varepsilon_1$ et $V(t_3, x(t_3)) = \varepsilon_1$.

Si $t \in]t_3, t_2]$ $|x(t)| > b^{-1}(\varepsilon_N) > U_J$ comme en 3-6 et

$$h(V(t,x(t)) \geq V(t,x(t)) + \varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 + \varepsilon_0 = b(M). \text{ Donc :}$$

$$\forall s \in [t - r_J, t] \quad h(V(t,x(t)) > V(s,x(s)).$$

Par l'hypothèse D cela implique :

$$\dot{V}(t,x(t)) \leq -w_J(|x(t)|) \leq -\gamma < 0 \quad \text{presque partout sur } [t_3,t_2].$$

Par l'hypothèse C on en déduit :

$$V(t_2,x(t_2)) \leq V(t_3,x(t_3)) = \varepsilon_1$$

cela contredit $V(t_2,x(t_2)) > \varepsilon_1$.

D'où $\quad t \geq r_J + \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \Rightarrow V(t,x(t)) \leq \varepsilon_1$

Montrons que si 3-4 est vrai pour $k \leq N-1$ alors 3-4 est vrai pour $k+1$.
Supposons par l'absurde que

$$\forall t \in [k(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma})+r_J,(k+1)(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma})] \quad V(t,x(t)) > \varepsilon_{k+1}$$

Alors comme précédemment

$$h(V(t,x(t)) \geq V(t,x(t))+\varepsilon_0 > \varepsilon_{k+1}+\varepsilon_0 = \varepsilon_k$$

Donc pour $s \in [k(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma}),t]$ et d'après l'hypothèse de récurrence :

3-10 : $\quad h(V(t,x(t)) > V(s,x(s)).$

Comme $\quad t-r_J \geq k(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma})$, 3-10 est également vérifiée pour $s \in [t-r_J,t]$.
D'où :

$\dot{V}(t,x(t)) \leq -w_J(|x(t)|)$ presque partout sur l'intervalle considéré. Puis (cf. 3-7, 3-8, 3-9) :

$$\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k < V\Big((k+1)(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma}),x[(k+1)(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma})]\Big)$$
$$-V(k(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma})+r_J, x[k(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma})+r_J])$$

3-11 : $$\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k < (-\gamma) \times \frac{\varepsilon_0}{\gamma} = -\varepsilon_0.$$

3-11 contredit la définition des ε_k.
Par conséquent il existe $t_1 \in [k(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma})+r_J,(k+1)(r_J+\frac{\varepsilon_0}{\gamma})]$ tel que

$$V(t_1,x(t_1)) \leq \varepsilon_{k+1}$$

En suivant alors le raisonnement précédent, on achève de démontrer 3-4 pour k+1. □

Revenons au système 2-1. Nous allons montrer que lorsque la fonctionnelle non anticipative $\tilde{f}$ dépend de manière prépondérante du passé récent, dans un sens que nous préciserons, le comportement asymptotique des solutions de 2-1 est guidé par celui de g. Nous conservons pour A les mêmes hypothèses qu'auparavant, et pour $\tilde{f}$ les hypothèses 1-10, 1-11.

Dans la suite W désigne une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie

3-12 : $$\lim_{t\to+\infty} W(t) = 0 \text{ et } W \text{ continue}$$

<u>THEOREME 3.13.</u> :

On suppose que : $\forall T \geq 0 \quad \forall t \geq T \qquad \forall x \in C([0,+\infty[;\mathbb{R}^n)$.

3-14 : $$|\tilde{f}(x,t)| \leq \mu|x|_{t-T}^{t} + W(T)|x|_t \qquad \text{p.p.}$$

et que :

3-15 : $$2\mu\frac{\Lambda^3}{\lambda} < 1.$$

Alors si g est continue, bornée et tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$, il en est de même pour toute solution de 2-1.

Plus précisément : Etant donné $\alpha \geq 0$ et $\eta > 0$ il existe $S(\alpha,\eta) \geq 0$ tel que si x est solution de 2-1 :

$$(|x(0)| < \alpha) \Rightarrow (\forall t \geq S(\alpha,\eta) \quad |x(t)| < \eta).$$

Démonstration :

Soit x une solution de 2-1 vérifiant $|x|_\infty < M$.
On définit u,v,V comme au paragraphe 1 de ce chapitre.
Soit $t \geq 0$ tel que $\dot{V}(t,x(t))$ soit défini. Alors :

$$\dot{V}(t,x(t)) \leq -|x(t)|^2+2(\tilde{f}(x,t),Bx(t))+2(g(t),Bx(t))$$

Prenons $q > 1$ et $K > 0$.
Si $T \leq t$, par 3-14, on a :

3-16 : $$\dot{V}(t,x(t)) \leq -|x(t)|^2+2|x(t)|\Lambda^2[\mu|x|_{t-T}^{t}+W(T)|x|_t]+2|x(t)|\Lambda^2|g(t)|$$

Supposons que $\forall s \in [t-T,t]\, q^2V(t,x(t)) \geq V(s,x(s))$
alors $\forall s \in [t-T,t]\ q\,\frac{\Lambda}{\lambda}|x(t)| \geq |x(s)|$

Par suite :

3-17 : $$\dot{V}(t,x(t)) \leq -|x(t)|^2+2\mu q\frac{\Lambda^3}{\lambda}|x(t)|^2+2M^2\Lambda^2W(T)+2\Lambda^2M|g(t)|.$$

Posons $u_k = \frac{2}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} W(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, on peut construire une suite strictement croissante de réels positifs $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$t \geq r_k \Rightarrow 2M^2W(r_k)+2M|g(t)| < \frac{K}{2k^2}$$

Par conséquent si $t \geq r_k$ et $\frac{1}{k} = \frac{u_k}{2} \leq |x(t)| < M$ on a

$$\dot{V}(t,x(t)) \leq (2\mu q\frac{\Lambda^3}{\lambda}-1)|x(t)|^2+\frac{\Lambda^2}{2k^2}K.$$

Choisissons q tel que $2\mu q\frac{\Lambda^3}{\lambda} < 1$ ce qui est possible grâce à 3-15, alors

3-18 : $$\dot{V}(t,x(t) \leq (2\mu q\frac{\Lambda^3}{\lambda}-1)\times\frac{1}{k^2}+\frac{\Lambda^2K}{2k^2}$$

Prenons $K = \frac{1}{\Lambda^2}(1-2\,q\frac{\Lambda^3}{\lambda})$. 3-18 se réécrit en :

3-19 : $$\dot{V}(t,x(t)) \leq -\frac{1}{2}\,(1-2\mu q\,\frac{\Lambda^3}{\lambda})\,\frac{1}{k^2}$$

Si on pose $W_k(u) = -\frac{1}{2}\,(1-2\mu q\,\frac{\Lambda^3}{\lambda}) \times \frac{1}{k^2}$ pour $u \geq 0$ et si on prend pour X l'ensemble des solutions de 2-1, on constate que toutes les hypothèses du théorème 3-1 sont satisfaites. Donc si $x \in X$ et $|x|_\infty \leq M$, il existe $T(\eta,M) \geq 0$ tel que

$$t \geq T(\eta,M) \Rightarrow |x(t)| < \eta.$$

Il reste à montrer que sous les hypothèses du théorème 3-13 toute solution de 2-1 est bornée.

Prenons T tel que $2(\mu+W(T))\frac{\Lambda^3}{\lambda} < 1$ (cf. 3-12)

Alors $\forall t \geq T$ $|\tilde{f}(x,t)| \leq (\mu+W(T))|x|_t$

La proposition 2-6 s'applique avec :

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu+W(T) & \text{pour } t \geq T \\ \mu+W(0) & \text{si } 0 \leq t < T \end{cases}$$

Donc si $x \in X$ et $|x(0)| \leq \alpha$, on a : $|x|_\infty < K(\alpha)$ et avec ce qui précède

$$[t \geq T(\eta,K(\alpha))] \Rightarrow [|x(t)| < \eta\,]$$

ce qui démontre le théorème 3-13. □

Corollaire 3.20. :

Les hypothèses sont celles du théorème 3-13. On suppose de plus

3-21 : $f(x,t)$ est linéaire par rapport à x.

3-22 : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(e_i,t) = \varepsilon_i \qquad i \in \{1,2,\dots,n\}$

où e_i représente la fonction constante égale au i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3-23 : $A+f(\infty)$ est inversible

où $f(\infty)$ est la matrice n-n dont les vecteurs colonnes sont les composantes des ε_i dans la base canonique.

Alors si g admet une limite lorsque t tend vers $+\infty$, toute solution de 2-1 vérifie :

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = -[A+f(\infty)]^{-1} \lim_{t\to+\infty} g(t).$$

Démonstration :

Posons $\ell = -[A+f(\infty)]^{-1} \lim_{t\to+\infty} g(t)$

et $w(t) = x(t)-\ell$ où x est solution de 2-1.

Alors $w(t)$ vérifie

3-24 : $$\dot{w}(t) = Aw(t)+f(w,t)+A\ell+f(\ell,t)+g(t)$$

Par l'hypothèse 3-22 on a

3-25 : $$\lim_{t\to+\infty} f(\ell,t) = f(\infty)\ell$$

donc $$\lim_{t\to+\infty} A\ell+f(\ell,t)+g(t) = 0$$

Appliquons alors le théorème 3-13 ; on en déduit

3-26 : $$\lim_{t\to+\infty} w(t) = 0$$

et par conséquent $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \ell$. □

BIBLIOGRAPHIE

DELFOUR-MITTER [1] : Controllability, observability and optimal feed-back control of affine hereditary differential systems SIAM J. Control. n° 2 (1972).

DUNFORD-SCHWARTZ [1] : Linear Operators T1 Interscience (1958).

EKELAND-TEMAM [1] : Analyse convexe et problèmes variationnels Dunod (1974).

GENET [1] : Mesure et intégration Vuibert (1976).

GRIMMER-SEIFERT [1] : Stability properties of Volterra - Integro differential équations. J. of Diff. Equ. 19, 142-166 (1975).

GROSSMAN-MILLER [1] : Perturbation theory for Volterra Integrodifferential Systems. J. Of Diff. Equ. 8, 457-474 (1970).

HALE [1] : Theory of Functional Differential Equations. Springer Verlag (1977).

HIRSCH-SMALE [1] : Differential Equations, Dynamical systems and linear algebra Academic Press (1974).

HONIG [1] : Volterra-Stieltjes. Integral Equations. North-Holland (1975).

LEE-MARKUS [1] : Foundations of Optimal Control Theory. WILEY (1967).

LIPTZER-SHYRIAEV [1] : Statistique des processus stochastiques. Moscou (1974).

MAGNUSSON-PRITCHARD [1] : Local controllability for nonlinear evolution equations dans KAPPEL-SCHAPACHER : Abstract Cauchy problems and functional differential équations - Research notes in mathematics (1981).

RUDIN [1] : Real and complex analysis.
Mac Graw Hill (1966).

VERLEY [1] : Théorie élémentaire de l'intégration CDU (1968).

NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur RUSINOWITCH Michaël

NATURE DE LA THESE : Doctorat 3ème Cycle en Mathématiques Pures

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le [illegible]

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

R. MAINARD

Dans le premier chapitre nous nous sommes attachés à des problèmes d'existence sous des conditions de Carathéodory concernant les systèmes non anticipatifs. Plusieurs méthodes ont été envisagées : solutions approchées, point fixe et point fixe pour la fonction dérivée ; cette dernière s'est avérée conduire aux généralisations les plus intéressantes. Nous avons ensuite considéré dans le second chapitre des équations linéaires non anticipatives, faisant apparaître de nombreuses similitudes avec les équations différentielles ordinaires, et notamment l'existence d'un noyau résolvant, fort utile lorsqu'il s'agit d'étudier les problèmes de contrôle qui sont l'objet du troisième chapitre. Enfin, nous inspirant des travaux de Grimmer et Seifert sur la stabilité des équations intégro-différentielles, nous avons dégagé, dans le dernier chapitre, des conditions suffisantes pour que des perturbations non anticipatives n'affectent pas la stabilité ou le comportement asymptotique de systèmes ordinaires.

MOTS-CLES:

-équations différentielles fonctionnelles
-théorème de Schauder
-stabilité
-méthode de Liapunov.