

Sc N 64
30

86
✓

ETUDE
DE METHODES DE TRI

° °

ooooo o o ooooo ooooo ooooo
o o o o o o
o ooooo o ooooo ooooo ooooo
o o o o o o
o o o ooooo ooooo ooooo

pour l'obtention du

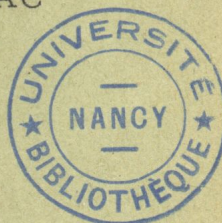
DOCTORAT de SPECIALITE MATHEMATIQUES (3ème CYCLE)

Soutenue devant le Jury le 21 décembre 1964

par

Raymond ROMAC

° °



Jury : Mr J. LEGRAS Président
 Mr C. PAIR Examineurs
 Mr M. DEPAIX

Tri, méthode

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

ETUDE DE METHODES DE

TRI



par

Raymond ROMAC

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - URION - ROUBAULT -

Professeurs honoraires : MM. CROZE - RAYBAUD - LAFFITE - LERAY -
OLY- LAPORTE - EICHHORN - CAPELLE - GODEMENT - DUBREIL - L. SCHWARTZ
EUDONNE - De MALLEMANN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER -
OUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - CHEVALLIER - WAHL -
ERVE -

Maîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET -

PROFESSEURS

M.			
URION	Chimie biologique	SCHWARTZ	Exploit. minière
DELSARTE	Analyse supérieure	GAYET	Physiologie
ROUBAULT	Géologie	MANGENOT	Phytopathologie
LILLET	Biologie animale	MALAPRADE	Chimie
CHEVIN	Botanique	HADNI	Physique
ARRIOL	Chimie théorique	BONVALET	Mécanique physique
ZETTE	Physique	KERN	Minéralogie
LILLIEN	Electronique	BASTICK	Chimie
BERT	Chimie physique	DUCHAUFOR	Pédologie
EGRAS	Mécanique rationnelle	NEEL	Chimie ind. orga.
OLFA	Minéralogie	GARNIER	Agronomie
CLAUDE	Chimie	WEPPE	Minéralogie appli.
MAIVRE	Physique appliquée	BERNARD	Géologie appliquée
UBRY	Chimie minérale	CHAMPIER	Physique
IVAL	Chimie	REGNIER	Physico-chimie
OPPENS	Radiogéologie	GAY	Chimie biologique
UHLING	Physique	WERNER	Botanique
HNER	Physique expérimentale	CONDE	Zoologie
LLY	Géologie	STEPHAN	Zoologie
GOFF	Génie chimique	EYMARD	Cal. Dif. et Int.
APON	Chimie biologique	LEVISALLES	Chimie organique
ROLD	Chimie industrielle	N.	Physique
		N.	M. M. P.

MAITRES DE CONFERENCES ET PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.			
EGE	Génie chimique	Mme HERVE	Math. (propédeutique)
CCI	Géologie	AUROUZE	Géologie
ILLAUME	Psychophysiologie	MARI	Chimie I. S. I. N.
AN	Mécanique physique	LAFON	Physique I. S. I. N.
de BASTICK	Chimie M. P. C. Epinal	FELDEN	Phy. Théor. & Nucl.
DEFIN	Physique	FLECHON	M. P. C.
RN	Physique	VIGNES	Physique (Mines)
ENTZ	Biologie animale	Melle HUET	Math. (S. P. C. N.)
		JANOT	M. P. C. Epinal

SECRETAIRE PRINCIPAL : C. CARON

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur J. LEGRAS, pour l'attention bienveillante qu'il m'a portée au cours de ces années d'études passées au Centre de Calcul Automatique de l'Université de Nancy.

Je dois beaucoup à Monsieur C. PAIR, qui a dirigé mes recherches, et qui n'a pas cessé de me manifester un intérêt constant. Je lui adresse donc, ici, mes plus vifs remerciements.

Je remercie également Monsieur M. DEPAIX, qui m'honore en faisant partie du Jury.

SOMMAIRE

CHAPITRE I

GENERALITES

- I Position du problème
- II Terminologie
- III Classification des méthodes
- IV Temps de tri

CHAPITRE II

LES METHODES DE TRANSPOSITION

- I Généralités
- II Méthode de Bubble
- III Méthode de Shell
- IV Méthode issue de la méthode de Von Neumann

CHAPITRE III

LES METHODES DE SELECTION

- I Généralités
- II La méthode de sélection **linéaire**
- III La méthode de sélection quadratique
- IV La méthode de T. N. Hibbard

CHAPITRE IV

LES METHODES D'INTERCLASSEMENT

- I Généralités
- II Méthode de Von Neumann
- III Autre méthode

CHAPITRE V

LES METHODES D'INSERTION

- I Généralités
- II La méthode d'insertion ordinaire
- III La méthode d'insertion dichotomique
- IV Méthode d'insertion et méthode de Shell

CHAPITRE VI

LES METHODES UTILISANT DES PILES SIMPLES

- I Généralités
- II Méthode dans laquelle l'ordre de tri est l'ordre de sortie de la pile
- III Méthode dans laquelle l'ordre de tri est l'ordre d'entrée dans la pile

CHAPITRE VII

COMPARAISON DES METHODES ET CONCLUSION

CHAPITRE I GENERALITES

I - POSITION du PROBLEME

Considérons une suite SI formée de n termes $a_1, a_2, \dots, a_n$, chaque a_i étant repéré par un indicatif $I(a_i)$, c'est à dire, en général, un nombre.

Trier(ou ordonner) cette suite, consiste à la réarranger de façon à obtenir une suite SR, que j'appellerai "suite résultat" (ou encore "suite finale") elle-même composée de n termes $r_1, r_2, \dots, r_n$. Cette suite est une permutation de SI, et, si nous avons choisi pour ordre de tri la relation d'ordre $\leq$ elle est telle que :

$$I(r_j) \leq I(r_{j+1}) \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n-1$$

Chaque r_j provient d'un a_i et d'un seul. Nous appellerons $p(a_i)$ le rang d'un élément a_i dans la suite résultat SR.

La quantité $f_i = i - p(a_i)$ représente donc l'écart d'un élément a_i à sa position définitive dans la suite SR.

II - TERMINOLOGIE

Afin d'alléger la notation dans la suite de cette étude, nous remplacerons l'écriture $I(a_i)$ qui est l'indicatif ("key" en anglais) associé à l'élément a_i par l'élément a_i lui-même.

J'appellerai SI la suite initiale des éléments à trier, suite qui sera composée des éléments a_i .

Un passage dans SI sera une exploration de tous les éléments de SI (ou d'une certaine partie de SI ce que je préciserai alors le cas échéant) afin d'extraire un (ou plusieurs) éléments de SI et de le (les) transférer à une place déterminée (en général, ce sera sa place définitive dans la suite finale SR). Il est clair qu'à l'issue d'un passage, SI va se trouver modifié. Le terme "étape" sera utilisé comme synonyme du mot "passage".

Au début du k° passage, je note s la suite issue de SI et formée des éléments e_i , chaque e_i provenant d'un seul a_j . A la fin de ce k° passage, s se transforme en une suite que je note s' , suite formée des éléments e'_j , chaque e'_j provenant d'un seul e_i .

Pour qu'un élément e'_j de s' soit "bien rangé", il faut que $j - p(e'_j) = 0$ en appelant $p(e'_j)$ le rang de e'_j dans la suite SR .

Comme e'_j provient de e_i $p(e'_j) = p(e_i)$.

L'élément e'_j de s' provenant par transposition de l'élément e_i de s sera dit "mieux rangé" (ou "mieux classé") que e_i si

$$|j - p(e'_j)| < |i - p(e_i)|$$

c'est à dire que cet élément s'est rapproché de sa position définitive dans SR . (Dans le cas contraire, les éléments e'_j et e_i seront dits "plus mal classés").

D'autre part, deux éléments e_j et e_k de s seront dits "bien classés" (ou bien rangés) l'un par rapport à l'autre si

$$e_j \leq e_k \quad \text{lorsque } j < k$$

De la même façon, deux éléments e_j et e_k de s seront

"mal classés" si

$$e_j > e_k \quad \text{lorsque } j < k.$$

Je n'ai envisagé dans cette étude que les méthodes de tri interne (Internal sorting). On suppose dans ces méthodes que les n éléments a_i de SI se trouvent dans la mémoire centrale du calculateur et que le nombre de mémoires disponibles est suffisant pour que le tri s'effectue sans avoir recours aux organes de stockage annexes du calculateur tels que les bandes ou disques magnétiques.

III - CLASSIFICATION des METHODES

Une telle classification est délicate pour ne pas dire arbitraire. J'ai retenu la classification suivante :

- a) les méthodes de transposition,
- b) les méthodes de sélection,
- c) les méthodes d'inter-classement,
- d) les méthodes d'insertion
- e) les méthodes utilisant des piles simples

IV - TEMPS de TRI

Lorsque les éléments a_i de SI sont chargés dans la mémoire centrale ainsi que le programme lui-même, le temps de tri est le temps au bout duquel la suite SI est totalement triée.

Le temps $\mathcal{T}$ est fonction, d'une part du nombre total $C(n)$ de tests à effectuer sur les n éléments a_i (et aussi sur les indices de ces éléments), et d'autre part du nombre total $t(n)$ de transferts nécessaires pour trier ces nombres.

$$\mathcal{T}(n) = a C(n) + b t(n).$$

a et b étant des constantes qui dépendent du calculateur.

Remarque : Nous appelons nombre théorique de tests d'une méthode le nombre de tests à effectuer sur les a_i pour trier SI à l'exclusion des tests sur les indices. Par contre, le nombre théorique de transferts est le nombre de transferts vérifiés à effectuer pour que tous les a_i soient triés.

Les essais de ces méthodes ont été effectués sur le calculateur IBM 650 du Centre de Calcul Automatique de NANCY.

CHAPITRE II

LES METHODES DE TRANSPOSITION

I - GENERALITES

Soit $S = a_1, a_2, \dots, a_n$ la suite initiale des n nombres à trier.

A l'issue de k transformations sur S nous obtenons une suite s formée des éléments $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Les méthodes de transposition consistent à choisir deux éléments déterminés de s , soient e_j et e_k , à les comparer, à les permuter si

$$e_j > e_k \text{ lorsque } j < k$$

et nous allons consulter deux autres éléments e_{j+1} et e_{k+1} .

Si $e_j \leq e_k$ nous les laissons en place et nous allons consulter deux autres éléments e_{j+1} et e_{k+1} de la suite s .

Les différentes méthodes se distinguent par le choix d'une paire de e_j et e_k , et également par le choix des éléments suivants : e_{j+1} et e_{k+1} .

L'intérêt de ces méthodes réside dans le fait que le tri s'effectue en utilisant une seule mémoire auxiliaire de travail : celle qui sert à la transposition.

Citons parmi ces méthodes celle de Bubble, celle de Shell, celle de Nelson Bose, et une méthode issue de celle de Von Neumann.

II - METHODE de BUBBLE

1°) Généralités

La méthode de Bubble [1] est une des plus naturelles qui soit puisqu'elle consiste à extraire le plus grand élément de la suite s et à le transporter en queue de liste en utilisant des transpositions portant sur des éléments consécutifs.

2°) Exposé de la méthode

2. 1. Soient deux éléments a_i et a_{i+1} de S au cours du premier passage. Si $a_i > a_{i+1}$ alors nous les permutons et nous allons consulter les éléments a'_{i+1} et a'_{i+2} où a'_{i+1} est en fait l'ancien a_i .

Si $a_i \leq a_{i+1}$ les éléments sont inchangés et nous allons consulter les éléments a_{i+1} et a_{i+2} .

Soit δ le plus grand des éléments de S .

Si δ n'est pas le dernier élément de S , c'est à dire s'il n'est pas a_n , il le deviendra : en effet supposons que $\delta = a_k$.

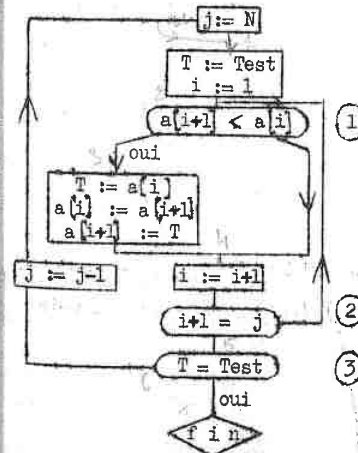
La comparaison de a_k et a_{k+1} va amener la permutation de a_{k+1} et a_k , ce qui nous donnera $a'_k = a_{k+1}$ et $a'_{k+1} = \delta$. Au test suivant portant sur a'_{k+1} et a'_{k+2} , δ et a_{k+2} vont à nouveau permuter etc... jusqu'à ce que δ occupe la place de a_n , a_n devenant a'_{n-1} .

D'autre part si δ est déjà le dernier élément de S , il le restera. Nous voyons donc qu'à l'issue de ce premier passage un élément au moins sera classé.

De la même façon chaque nouveau passage dans la suite s classera au moins un élément de sorte qu'au bout de n passages au plus les n éléments de S seront classés. Il convient de remarquer que puisqu'à chaque passage un élément au moins se trouve rangé définitivement nous pourrions ne plus en tenir compte de sorte qu'au premier passage nous aurons $n-1$ tests, au second passage $n-2$ tests,

D'autre part si un passage dans s ne donne lieu à aucune transposition, il en résulte que $e_i \leq e_{i+1}$ quel que soit i et les nombres seront donc triés, ce qui suggère le test de fin de tri.

2. 2. organigramme et exemple



nous avons posé :

i = indice de l'élément e_i

dans la suite s

j = indice du dernier élément

de la suite s (s est

formé de $e_1, e_2, \dots, e_j$)

le symbole $:=$ est le symbole

"affecté à" du langage

ALGOL.

Donnons un exemple : chaque ligne représente l'évolution du contenu d'une mémoire au cours du tri.

Notation : - les colonnes repérées par les numéros 1, 2, 3, etc... représentent l'évolution des mémoires au cours du premier passage, deuxième passage, troisième passage, etc...
- les colonnes notées 1B, 2B, 3B, etc... représentent l'état des mémoires à l'issue du premier passage, du deuxième passage, du troisième passage, etc...

N° d'ordre des mémoires	Etat initial des mémoires	1	1B	2	2B	3	3B	4	4B	5	5B	6	6B	7	7B	8	8B
1	7	4	4	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	7	7	0	0	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1
3	9	0	0	7	2	4	4	4	4	4	4	3	3	3	1	2	2
4	0	9	2	2	7	6	6	5	5	5	5	3	4	1	3	3	3
5	2	9	6	6	7	5	5	6	6	6	3	3	5	1	4	4	4
6	6	9	5	5	7	7	7	3	3	6	1	1	5	5	5	5	5
7	5	9	8	8	8	3	3	7	1	6	6	6	6	6	6	6	6
8	8	9	3	3	8	1	1	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
9	3	9	1	1	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
10	1	9	9		9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Nous voyons donc sur cet exemple que ce n'est qu'à l'issue du neuvième passage que nous n'avons plus de transpositions, ce qui est considérable.

Soit $p(e_i)$ le rang de l'élément e_i de s dans la suite finale SR des éléments triés, c'est à dire pour fixer les idées

lorsque $s = 1B$ $e_9 = 1$ $p(e) = 2$ $f_9 = |9 - p(e_9)| = 8$
 $s' = 2B$ e'_9 a donné e'_8

Le tri sera d'autant plus valable qu'il y aura un grand nombre de valeurs i pour lesquelles $|i - p(e_i)| < |j - p(e'_j)|$ (pour les notations, voir l'introduction).

Or comme e'_j provient de e_i par transposition, nous avons $p(e'_j) = p(e_i)$. Posons toujours $\delta = e_k$ le plus grand élément de s (dans l'exemple choisi $\delta = e_7 = 8$ car nous ne tenons plus compte de $e_{10} = 9$). Tous les éléments e_i tels que $k < i < j$ sont décalés d'une mémoire de c :

à la suite du passage dans s , seront "mieux classés" les éléments e_i de s pour lesquels

$$i - p(e_i) > 0 \quad \text{avec } k < i < n.$$

Ce ne sont pas, d'ailleurs, les seuls.

Seront au contraire plus mal classés les éléments e_j tels que : $j - p(e_j) < 0$ avec $k < j \leq n$ et ce ne sont pas non plus les seuls à être plus mal classés.

Nous pouvons donc prévoir que la méthode ne sera pas excellente car elle réalise des opérations qui sont contraires à l'ordre de tri.

2. 3. Nombres de tests théoriques nécessaires pour trier n nombres :

a) Supposons tout d'abord que la suite initiale SI soit totalement rangée. Un seul passage dans s est nécessaire et le nombre de tests est donc :

$$N_a = n - 1$$

b) Envisageons à présent la suite SI telle que

$$a_i \leq a_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1$$

et a_n soit le plus petit des a_i .

Soit s la suite formée des éléments e_i à l'issue du k^{e} passage : nous avons $i = 1, 2, \dots, n-k$. Seront rangés les éléments $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$. Par contre, $e_{n-k} = a_n$; a_n ne s'est rapproché de son rang définitif que de k positions. Nous voyons donc qu'il nous faudra n passages dans s pour que a_n soit définitivement rangé ! Le nombre de tests est alors :

$$N_b = \sum_{i=1}^{n-1} i+1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

Au nombre de transferts près, ce cas est identique à celui d'une suite SI totalement rangée dans l'ordre inverse de tri, c'est à dire telle que

$$a_i \geq a_{i+1} \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, n.$$

c) Soit une suite initiale SI qui n'est pas totalement rangée il existe alors des indices i tels que $i - p(a_i)$ soit positif. Soit l l'indice qui réalise le maximum de $i - p(a_i)$; posons $m = l - p(a_l)$.

Appelons e_k l'élément provenant de a_l , à l'issue du k° passage.

Si $e_{k-1} \leq e_k$ e_k n'est pas déplacé
 $e_{k-1} > e_k$ e_k va se trouver décalé d'une position seulement vers la gauche.

Nous voyons donc que m décrit au plus d'une unité à chaque passage de sorte qu'il faudra au moins m passages pour mettre en place a_l dans SR (c'est ce qui se passait en b, où il fallait n passages pour que a_n soit placé à sa position définitive dans SR).

Le nombre de tests N_c sera tel que :

$$N_c \geq (n-1) + (n-2) + \dots + (n-m) = n \times m - \frac{m(m+1)}{2}$$

$$= \frac{m(2n-m-1)}{2}$$

Pour étudier cette quantité, évaluons la valeur moyenne de m :

nous avons $i - p(a_i) \leq \max_i (i - p(a_i))$
d'où $E(i - p(a_i)) \leq E(\max_i (i - p(a_i)))$
 $\max_i E(i - p(a_i)) \leq E(\max_i (i - p(a_i)))$
lorsque i est fixé nous avons $E(i - p(a_i)) = i - E(p(a_i))$
mais $E(p(a_i)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}$
d'où $E(i - p(a_i)) = i - \frac{n+1}{2}$
Cette quantité est maximum pour $i = n$ et est égale à $\frac{n-1}{2}$
d'où $m \geq \frac{n-1}{2}$

Remarque : Afin de remédier à un inconvénient analogue à celui signalé au b, j'ai envisagé une méthode dans laquelle la suite s est explorée dans le sens $e_1, e_2, \dots, e_j$ et la suite s' dans le sens $e'_{j-1}, e'_{j-2}, \dots, e'_1$.

Au cours des passages impairs, ce sont donc les plus grands éléments qui sont extraits et, en inversant les bornes du test $e_{j+1} \leq e_j$, au cours

des passages pairs les plus petits le sont à leur tour : les résultats expérimentaux ont été alors améliorés dans le rapport $\frac{3}{4}$ par rapport à la première méthode.

3°) Programme ALGOL

PROCEDURE Bubble (A,N); VALEUR N; ENTIER N; TABLEAU A;

DEBUT ENTIER I, J; REEL T, Test;

POUR J := N PAS - 1 JUSQUA 0 FAIRE

DEBUT T := Test;

POUR I := 1 PAS 1 JUSQUA J - 1 FAIRE

SI A[I+1] < A[I] ALORS

DEBUT T := A[I]; A[I] := A[I+1]; A[I+1] := T FIN;

SI T = Test ALORS ALLER A Sortie

FIN;

Sortie : FIN de la procédure Bubble;

4°) Programme pour IBM 650 écrit en PASØ

cf. au programme n° 1

Ce programme occupe 53 mémoires.

5°) Résultats expérimentaux

Le nombre de tests réels N_r est différent du nombre de tests théoriques N_c (test n° 1 sur l'organigramme) car il comprend en plus pour chaque test (1) un test (2) portant sur l'indice i mais également pour chaque passage un test (3) test de fin. (nous verrons dans d'autres méthodes l'importance que peuvent avoir les tests sur les indices).

Nous avons alors $N_r \approx 2 N_c + m$.

Les essais sur calculateur ont été faits avec deux types de suite SI afin de déterminer l'influence de la distribution sur le nombre de tests :

SI 1 est une suite de nombres répartis au hasard

SI 2 est une suite de nombres pratiquement triés.

L'équation du temps de passage est de la forme :

$$T = k_1 N_r + k_2 M_r + c$$

en appelant M_r le nombre de transferts. Elle est donc en n^2 .

Nous avons obtenu les résultats suivants :

Temps de passage	n = 128	n = 256	n = 512
avec SI 1	7'20"	29'	115'
avec SI 2		28"	2'30"

III - LA METHODE de SHELL

1°) Généralités

La méthode de Dubble est une méthode très simple et très naturelle, mais, malheureusement, son efficacité est médiocre, et nous sommes amenés à considérer des méthodes beaucoup plus élaborées et beaucoup plus complexes. On s'est aperçu qu'il était toujours très intéressant de diviser la suite initiale en plusieurs sous-suites et de les traiter d'abord séparément. La méthode de Shell [2] [3] utilise cette constatation et prend à son compte les avantages de la méthode de Von Neumann sur laquelle nous reviendrons à propos des méthodes d'interclassement.

Shell l'a mise au point en 1959 et les performances obtenues sont très intéressantes dans le cas d'une suite SI quelconque.

2°) Exposé de la méthode

Pour rendre plus clair cet exposé, supposons que vous avez $n = 2^p$ nombres à trier (la méthode elle-même n'est pas aussi restrictive).

a) Soit donc SI la suite initiale des nombres à trier. Divisons la en $\frac{n}{2} = 2^{p-1} = m$ sous-suites formées de 2 éléments seulement qui ne sont pas consécutifs. Appelons f_j^1 ces sous-suites avec $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$.

f_1^1 est formé des éléments a_1 et $a_{\frac{n}{2}+1}$

f_2^1 est formé des éléments a_2 et $a_{\frac{n}{2}+2}$

f_j^1 est formé des éléments a_j et $a_{\frac{n}{2}+j}$

...

$f_{\frac{n}{2}}^1$ est formé des éléments $a_{\frac{n}{2}}$ et a_n

A l'issue du premier passage dans la suite SI nous obtenons donc une suite s_1 formée de $\frac{n}{2}$ sous-suites f_j^1 ordonnées comprenant 2 éléments. Appelons s_j^1 les n éléments de s_1 ils sont tels que

$$s_k^1 \leq s_{k+\frac{n}{2}}^1 \quad \text{avec } 1 \leq k \leq \frac{n}{2}$$

b) La suite s_1 est à présent divisée en $\frac{n}{4}$ sous-suites formées de 4 éléments et que nous appellerons :

f_1^2 formée des éléments $s_1^1, s_{\frac{n}{4}+1}^1, s_{\frac{2n}{4}+1}^1, s_{\frac{3n}{4}+1}^1$

f_2^2 formée des éléments $s_2^1, s_{\frac{n}{4}+2}^1, s_{\frac{2n}{4}+2}^1, s_{\frac{3n}{4}+2}^1$

...

$f_{\frac{n}{4}}^2$ formée des éléments $s_{\frac{n}{4}}^1, s_{\frac{2n}{4}}^1, s_{\frac{3n}{4}}^1, s_n^1$

Chaque sous-suite f_j^2 est triée par transposition. Shell avait le choix entre : d'une part, trier f_1^2 puis, f_1^2 étant totalement rangée, passer au tri de f_2^2 , puis à celui de f_3^2 etc..., d'autre part, imbriquer les tris des f_j^2 les uns dans les autres.

Afin de simplifier les tests sur les indices, il a préféré adopter la deuxième solution : trier les deux premiers éléments de f_1^2 , puis les deux premiers éléments de f_2^2 , etc. et enfin les 2^{es} éléments de $f_{\frac{n}{4}}^2$, ensuite trier les 3^{es} éléments de f_1^2 , puis les 3^{es} éléments de f_2^2 , et enfin les 3^{es} éléments de $f_{\frac{n}{4}}^2$ etc.

A l'issue de ce second passage, la suite s_1 est transposée en une suite s_2 formée de $\frac{n}{4}$ sous-suites f_j^2 comprenant 4 éléments qui sont rangés entre eux.

c) La suite s_2 est à présent divisée en $\frac{n}{8}$ sous-suites f_j^3 non ordonnées formées de 8 éléments et qui par transposition donneront $\frac{n}{8}$ sous-suites ordonnées f_j^3 avec $1 \leq j \leq \frac{n}{8}$.

Nous voyons donc qu'à l'issue du p^e passage nous obtenons une suite s_p formée d'une seule sous-suite f^p et dans laquelle les éléments s_j^p sont tels que $s_j^p \leq s_{j+1}^p$ avec $1 \leq j \leq n-1$.

Remarques :

Nous avons supposé pour simplifier l'exposé que $n = 2^p$. En fait, la méthode est valable quel que soit la valeur de n . En effet, soit au k^{e} passage $m = \text{partie entière de } \left(\frac{n}{2^k}\right)$. Nous formerons alors la sous-suite f_1^k avec les éléments s_i^k tels que :

f_1^k sera formé de $s_1^k ; s_{m+1}^k ; s_{2m+1}^k ; \dots ; s_{pxm+1}^k$ avec $pxm+1 \leq n$

f_2^k sera formé de $s_2^k ; s_{m+2}^k ; s_{2m+2}^k ; \dots ; s_{qxm+2}^k$ avec $qxm+2 \leq n$

etc...

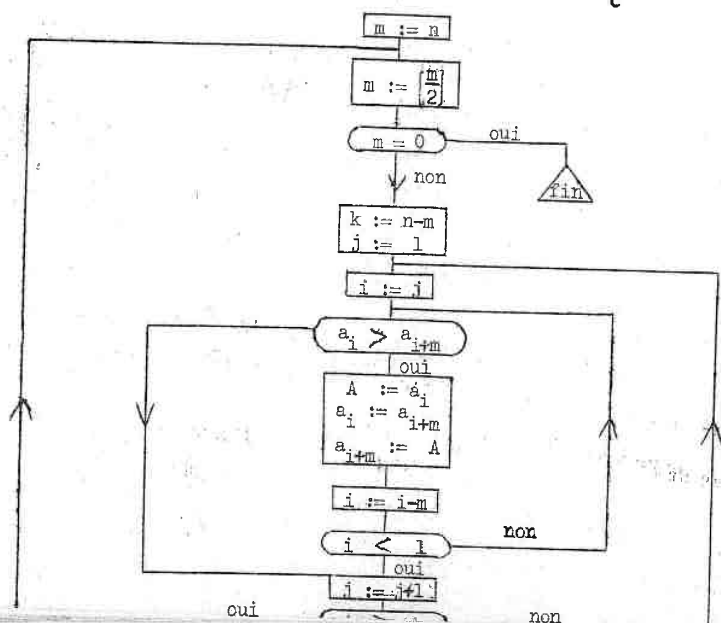
Le nombre d'éléments dans chaque sous-suite est supérieure ou égal à 2^k . Le tri sera terminé lorsque nous aurons une seule sous-suite, c'est à dire lorsque $m = 1$ (ou encore partie entière de $\frac{m}{2} = 0$).

3°) Organigramme :

L'organigramme ci-dessous permet de bien comprendre le processus.

Les éléments à trier a_i sont rangés dans n mémoires consécutives.

i = indice de l'élément s_i^k dans la sous-suite f_ℓ^k
 j = indice qui appartient à f_ℓ^k puis à $f_{\ell+1}^k$ etc... et qui réalise la simultanéité du tri des f_ℓ^k .



Donnons également un exemple qui fixera les idées, soit, par exemple, $n = 11$.

n° des mémoires	SI	s_1	s_2	v
1	0	0	0	0
2	10	1	1	1
3	9	5	2	2
4	6	3	3	3
5	8	2	4	4
6	3	6	5	5
7	1	10	7	6
8	5	9	8	7
9	7	7	10	8
10	2	8	9	9
11	4	4	10	10

Nous avons dans cet exemple $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = 5$ au premier tour

f_1^1 formée de $a_1 = 0, a_6 = 3, a_{11} = 4$

f_2^1 formée de $a_2 = 10, a_7 = 1$.

Les flèches symbolisent la permutation des éléments a_j et $a_{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + j}$ lorsque celle-ci s'avère nécessaire; par exemple dans le cas présent a_7 permute avec a_2 .

A l'issue du premier passage, nous obtenons les f_j^1 qui sont

f_1^1 formée de $s_1^1 = 0 ; s_6^1 = 3 ; s_{11}^1 = 4 ;$

f_2^1 formée de $s_2^1 = 1 ; s_7^1 = 10 ;$

Dans la suite s_1 nous obtenons les sous-suites f_j^2 avec $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = 2$
 f_1^2 formée de $s_1^1 = 0 ; s_3^1 = 5 ; s_5^1 = 2 ; s_7^1 = 10 ; s_9^1 = 7 ; s_{11}^1 = 4 ;$

A l'issue du second passage s_1 est transposée en s_2 , les f_j^2 ordonnées :

par exemple : f_1^2 est formée de $s_1^2 = 0; s_3^2 = 2; s_5^2 = 4; s_7^2 = 5;$

et f_2^2 est formé de $s_2^2 = 7; s_{11}^2 = 10$
 $s_4^2 = 1; s_6^2 = 3; s_8^2 = 6; s_{10}^2 = 8;$

Le troisième passage, $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = 1$, nous donne une seule suite, où tous les nombres sont triés, c'est ce que nous appelons la suite résultat R.

4°) Programme ALGOL

```
PROCEDURE Shell (A,N); VALEUR N ; TABLEAU A ; ENTIER N ;
DEBUT ENTIER M,I,J,K ; REEL A 1 ;
M := N ;
B1 : M := Entière (M/2) ; SI M=0 ALORS ALLER A Sortie SINON K:=M
POUR J := 1 PAS 1 TANT QUE J < K FAIRE
POUR I := J PAS -M TANT QUE I >= 1 ^ A[I] > A[I+M] FAIRE
DEBUT A1:= A[I] ; A[I] := A[I+M] ; A[I+M] := A1
FIN ;
ALLER A B1 ;
Sortie : FIN de la procédure Shell ;
```

5°) Programme IBM 650 écrit en PAS

cf. programme n° 2

Il n'occupe que 66 mémoires et il est très simple à mettre en œuvre.

6°) Résultats expérimentaux

Shell a donné comme résultats expérimentaux un temps de tri proportionnel à $n^{1,226}$ et Hibbard [6] la relation $n[A(\log_2 n)^2 + B \log_2 n]$

En ce qui nous concerne, nous avons obtenu :

Temps de passage	128 Nb	256 Nb	512 Nb
avec S 1	$T_1 = 1'30''$	$T_2 = 4'30''$	$T_3 = 14'45''$
avec S 2		$T_2' = 1'43''$	$T_3 = 3'42''$

En faisant l'hypothèse que le temps de tri T est proportionnel à n^x , on trouve $x \approx 1,6$.

IV - METHODE ISSUE de la METHODE de VON NEUMANN

1°) Généralités

Partant de la même idée que Shell, j'ai essayé dans cette méthode d'associer les qualités de la méthode de Von Neumann que je vais exposer ci-dessous à celles des méthodes de transposition. En effet, le gros avantage de la méthode de Von Neumann est sa rapidité relative, mais par contre, elle utilise, pour trier n nombres, n mémoires auxiliaires, les méthodes de transposition n'en utilisant qu'une seule.

2°) Exposé du principe de la méthode de Von Neumann

2. 1. Nous ne ferons qu'un exposé succinct de cette méthode de Von Neumann, car nous y reviendrons longuement au chapitre V.

Supposons toujours que le nombre d'éléments à trier soit

$$n = 2^p$$

La méthode de Von Neumann diffère de la méthode de Shell précédemment décrite en ce sens qu'elle utilise des sous-suites formées d'éléments consécutifs et non distants de $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ comme dans la méthode de Shell.

Au cours du premier passage, les éléments a_i de S1 sont comparés de la façon suivante : soit a_i tel que $i = 1, 3, 5, \dots, n-1$; si $a_i > a_{i+1}$ nous permutons a_i et a_{i+1} .

A l'issue de ce premier passage, nous obtenons $\frac{n}{2}$ sous suites ordonnées, formées de deux éléments consécutifs ; soient f_i^1 ces sous suites où $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$.

Au cours du deuxième passage, nous fusionnons deux à deux ces sous-suites, afin d'obtenir $\frac{n}{4}$ sous-suites ordonnées, formées de quatre éléments, ce que nous symboliserons par :

$$\begin{aligned} f_1^1 + f_1^2 &\longrightarrow f_2^1 \\ f_1^3 + f_1^4 &\longrightarrow f_2^2 \\ \vdots &\vdots \\ f_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{2}-1} + f_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} &\longrightarrow f_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{4}} \end{aligned}$$

A l'issue du p^{e} passage, nous obtiendrons $\frac{n}{2^p} = 1$, sous suite unique ordonnée ; c'est donc la suite finale SR formée de n éléments.

Le tri est alors terminé.

Remarque : Le fusionnement des deux sous-suites f_i^j et f_i^{j+1} est obtenu par une méthode d'insertion (cf. chapitre VI).

Donnons un exemple pour fixer les idées :

N° des mémoires	SI	1	2	3	4
1	3	2	1	1	1
2	2	3	2	2	2
3	1	1	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	16	8	5	5	5
6	8	16	8	8	6
7	9	5	9	9	7
8	5	9	16	16	8
9	15	6	6	6	9
10	6	15	7	7	10
11	7	7	11	10	11
12	11	11	15	11	12
13	12	12	10	12	13
14	14	14	12	13	14
15	13	10	13	14	15
16	10	13	14	15	16

Nous avons symbolisé chaque sous-suite f_i^k par un rectangle vertical :



2. 2. Nombre de tests théoriques dans la méthode de Von Neumann :

Dans la méthode de Von Neumann, le nombre de passages dans la suite est égal à p si $n = 2^p$. D'autre part, un test permet de classer au moins un élément, de sorte que le nombre de tests N est

$$N \leq n \times p \quad \text{avec } p = \log_2 n.$$

Nous verrons dans les résultats que nous sommes loin de ce résultat,

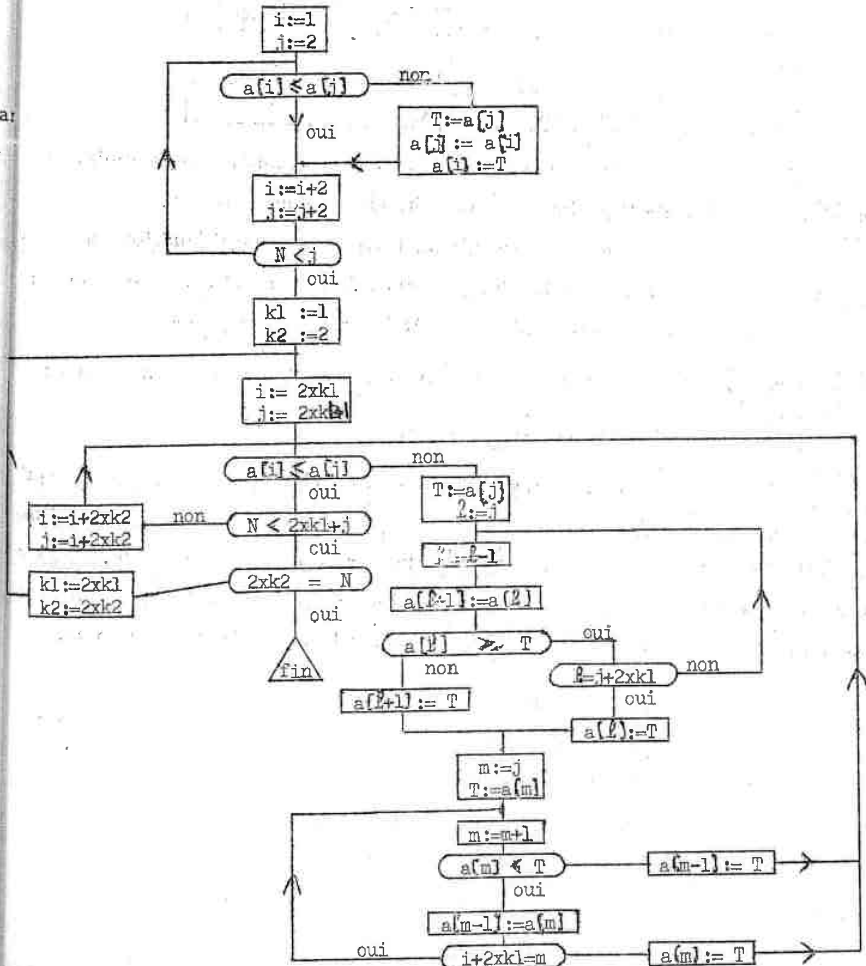
3°) Organigramme

Cet organigramme a été conçu pour un programme écrit dans le langage PASØ IBM.

Soit f_{k-1}^l et f_{k-1}^{l+1} les deux sous-suites consécutives, avant de commencer le k^{e} passage.

i représente l'indice du dernier élément de f_{k-1}^l et dans la suite du tri, il sera remplacé par 1, lequel sera décroissant.

j représente l'indice du premier élément de f_{k-1}^{l+1} , et il sera croissant.



4°) Programme PASØ

C'est le programme n° 6. Il occupe 147 mémoires.

C'est le seul programme à ne pas avoir été écrit sous forme de sous-programme en raison, d'une part de son encombrement, et, d'autre part, des résultats expérimentaux décevants obtenus.

5°) Résultats expérimentaux

	256 Nb	512 Nb
avec SI 1	16 '	68 '
avec SI 2	32 "	3 '

Ces résultats sont assez décevants, tout au moins en fonction des résultats théoriques de la méthode de Von Neumann.

En effet, en faisant l'hypothèse que l'équation du temps de passage est de la forme $T = k n \log_2 n$ avec 256 nombres, nous obtenons :

$$T_1 = k \times 256 \times 8 = 16' \implies k = \frac{16}{256 \times 8}$$

avec 512 nombres, nous devrions obtenir un temps de passage T_2 tel que :

$$T_2 = \frac{16}{8 \times 256} \times 512 \times 9 = 36'$$

Or, le résultat obtenu est très supérieur ; cela s'explique par le fait que nous fusionnons les f_1^e et f_1^{e+1} en utilisant la méthode d'insertion et qu'un seul test ne permet pas de classer au moins un élément. Nous verrons que pour la méthode de tri par insertion, l'équation du temps de passage est en n^2 , et c'est ce que nous constatons dans le cas présent également.

CHAPITRE III LES METHODES DE SELECTION

I - GENERALITES

Les méthodes de transposition ont l'avantage de ne demander qu'une seule mémoire de travail pour trier la suite initiale SI formée de n éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$. Par contre, elles ne sont pas rapides.

Les méthodes de sélection ont des performances nettement meilleures ; par contre elles nécessitent un nombre de mémoires de travail dépendant de n . Elles consistent à extraire, d'après certains critères, un (ou plusieurs) éléments e_i de la suite s et à le (ou les) transférer à une (ou des) place déterminée(s).

II - METHODE de SELECTION ORDINAIRE

1°) Généralités

L'élément e_i extrait sera le plus petit (ou le plus grand) des e_j avec $j = 1, 2, \dots, n$. Cet élément est alors transféré dans une zone de sortie, que nous noterons r_i où il sera mis à sa place définitive dans la suite SR.

2°) Exposé de la méthode

Au premier passage, plaçons a_1 dans la mémoire T, et comparons T à a_j avec $j = 2, \dots, n$.

Si $T \leq a_j$, nous allons consulter l'élément suivant a_{j+1} .

Si $T > a_j$, en T nous plaçons a_j et nous allons consulter

l'élément a_{j+1} .

Après avoir examiné tous les a_j , l'élément a_1^1 , tel que $a_1^1 \leq a_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ va se trouver dans T, et nous aurons bien sélectionné le plus petit de tous les a_j que nous transférerons en r_1 .

Pour sélectionner à l'issue du second passage un nouvel élément a_i^2 (le second plus petit des a_j), il faut remplacer a_1^1 par un élément M tel que $M \geq a_j$ quel que soit $j = 1, 2, \dots, n$.

Ce transfert nous oblige à conserver l'adresse de a_1 .

Sous cette forme, la méthode est donc très lourde et très lente, car il nous faut n passages dans SI pour classer les n éléments, d'où un nombre de tests $N = n(n-1)$, ce qui est beaucoup. De plus, nous avons besoin, pour trier n nombres, de n mémoires auxiliaires, servant de zone de transfert pour les éléments sélectionnés.

Nous éliminons ce dernier inconvénient en combinant la zone de stockage des éléments à trier (initialement SI) avec la zone de sortie pour les éléments sélectionnés. Pour cela, il suffit de libérer une mémoire au début de chaque passage, et d'y transférer alors l'élément sélectionné.

Or, au cours du premier passage, en plaçant a_1 dans T , nous libérons la mémoire m_1 . Soit a_k le premier des éléments a_j suivants a_1 , tel que $a_k < T$ (nous avons $a_j \geq a_1$ pour $j = 1, 2, \dots, k-1$). Nous permutons alors a_k et a_1 , c'est à dire que a_k devient $a'_k = a_1$, et que T contient a_k . Lors- que les éléments a_j ($j = 1, 2, \dots, n$) auront été examinés, T contiendra le plus petit de tous les a_i soit a_1 . La mémoire ayant contenu a_1 étant libre, nous y transférerons alors l'élément a_1 .

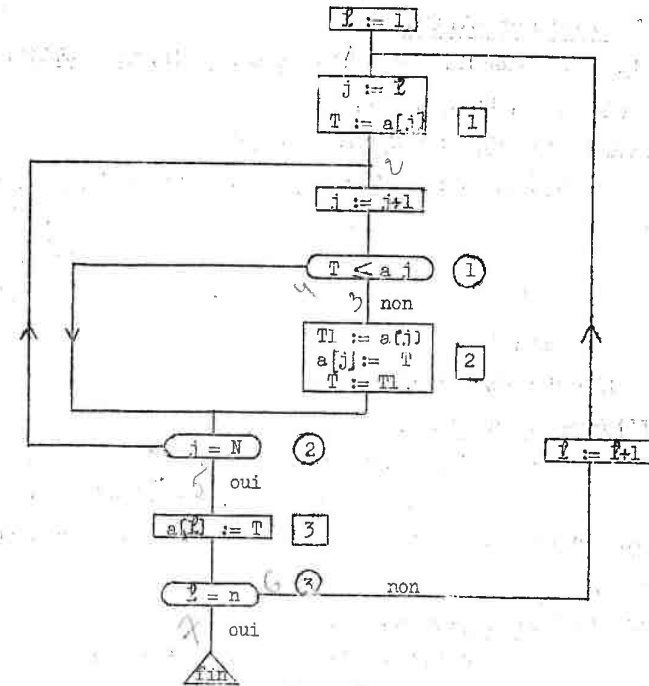
Au second passage, nous placerons alors a_2 dans T , au troisième : a_3 etc...

A l'issue de n passages, tous les éléments seront classés.

2°) Organigramme

l est le numéro du l^o passage

Les éléments $a[1], a[2], \dots, a[l-1]$ sont donc les $(l-1)$ plus petits éléments de SI rangés dans l'ordre $a[1] \leq a[2] \leq \dots \leq a[l-1]$
 j est tel que $1 \leq j \leq n$ le l^o plus petit élément de SI est donc un des a_j .



Remarquons que sous cette forme, cette méthode aurait pu être classée parmi les méthodes de transpositions, car elle n'utilise que deux mémoires auxiliaires de travail.

3°) Nombres de tests théoriques et de transferts

Ceux-ci sont indépendants de la distribution initiale des éléments a_i dans SI. Soit N le nombre de tests, nous avons

$$N = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Le nombre de transferts T , par contre, dépend de l'arrangement initial T ; nous avons $T = 2n + 3N_n$ en appelant N_n le nombre de tests répondant non.

4°) Programme ALGOL

```

PROCEDURE Sélection linéaire (A,N) ; VALEUR N ; TABLEAU A ; ENTIER
DEBUT ENTIER J, 1 ; REEL T, T1 ;
  POUR l := 1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
    DEBUT T := A[l] ; POUR J := l+1 PAS 1 JUSQUA N FAIRE
      SI T > A[J] ALORS DEBUT T1 := A[J] ;
      A[J] := T ;
      T := T1 FIN ;
    FIN ;
  FIN ;

```

FIN Sélection linéaire ;

5°) Programme PASQ

C'est le programme n° 7.

Il occupe 49 mémoires. La mémoire NSELE contient le nombre n d'éléments à trier, lesquels sont rangés en séquence en A0001, ..., A000 n.

6°) Résultats expérimentaux

J'ai obtenu les résultats suivants :

	256 Nb	512 Nb
avec SI1	21'	81'
avec SI2	16'	62'

Ces résultats confirment les résultats théoriques et donnent une équation du temps de passage $f(t)$ de la forme

$$f(t) = k n^2.$$

Les résultats obtenus avec SI2 sont assez proches de ceux obtenus avec SI1, et les performances sont donc très peu améliorées lorsque la suite initiale est déjà plus ou moins triée. Les méthodes précédentes étaient sensiblement plus rapides, avec des suites déjà arrangées.

III - SELECTION QUADRATIQUE

Nous avons vu à propos de la méthode de Shell que le fait de diviser la suite initiale SI en plusieurs sous-suites rendait cette méthode beaucoup plus rapide.

Partageons donc la suite initiale SI, formée de n éléments a_1 , en m sous-suites, formées de $\frac{n}{m}$ éléments et soient $s_1, s_2, \dots, s_m$ ces sous-suites.

Pendant une première phase de tri, nous allons extraire le plus petit élément de s_1 , soit s_1^1 , puis le plus petit élément de s_2 , soit s_2^1 , etc... et enfin le plus petit élément de s_m , soit s_m^1 .

Nous obtenons alors une sous-suite s, comprenant les m éléments définis ci-dessus. Il nous suffira d'extraire le plus petit de ces m éléments pour avoir le plus petit élément de SI, que nous appellerons r_1 . Supposons qu'il appartient à la sous-suite s_j ; c'est donc l'élément que nous avons appelé s_j^1 .

Au cours du second passage, pour obtenir le deuxième plus petit élément de SI, c'est à dire r_2 , il suffit d'extraire le deuxième plus petit élément de s_j , soit s_j^2 afin qu'il vienne remplacer s_j^1 dans la sous-suite s. Le nouveau plus petit élément de s sera le deuxième plus petit élément de SI, c'est à dire r_2 .

A l'issue du k° passage, nous avons donc sélectionné les k premiers plus petits éléments de SI, soit $r_1, r_2, \dots, r_k$. Supposons que r_k est le l^k plus petit élément de la sous-suite s_j , c'est à dire $s_j^{l^k}$ d'après nos notations. Pour obtenir r_{k+1} , il faudra sélectionner $s_j^{l^{k+1}}$, le transférer dans s, à la place de $s_j^{l^k}$, et extraire le plus petit élément de s, c'est à dire r_{k+1} .

Cet élément sera donc obtenu à l'issue de $(\frac{n}{m} + m)$ tests.

Soit $f(m) = \frac{n}{m} + m$ le nombre de tests sera minimum pour $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, c'est à dire $m = \sqrt{n}$.

Nous obtenons alors le nombre de tests N pour trier n éléments $N = n + 2(n-1)\sqrt{n}$, c'est à dire n tests pour obtenir le plus petit et $2\sqrt{n} \times (n-1)$ pour obtenir les (n-1) autres éléments.

Ces résultats sont nettement supérieurs à ceux de la méthode de sélection ordinaire. Néanmoins, la sélection quadratique présente un grave défaut, de sorte qu'elle est peu utilisée.

En effet, il n'est plus possible d'imbriquer la zone initialement occupée par SI avec la zone de sortie des éléments sélectionnés définitivement. Pour constituer la suite s , il nous faut également Vn mémoires auxiliaires, celles-ci contenant, soit les éléments eux-mêmes, soit leurs adresses. Les éléments s_j^1 des suites s_j peuvent être sélectionnés, soit par la méthode de sélection ordinaire dans sa première version (s_j^1 sera alors transféré dans la zone s , et remplacé dans s_j par M défini plus haut), ou dans sa seconde version (les Vn mémoires auxiliaires contenant les adresses des s_j^1 , la sous-suite s est formée de telle façon que j^o élément soit inclu dans la j^o sous-suite s_j).

Il nous faut donc au total $n + Vn$ mémoires auxiliaires et c'est un très gros handicap pour cette méthode.

Je n'ai pas personnellement essayé cette méthode sur calculateur.

IV - METHODE DE THOMAS N. HIBBARD

1°) Généralités

La méthode de Thomas N. Hibbard [6] est une des approches du problème du tri les plus récentes. A une grande rapidité du tri, elle allie un nombre réduit de mémoires auxiliaires de travail.

2°) Exposé de la méthode

La suite initiale SI de premier élément a_1 est scindée en deux sous-suites I_1 et S_1 . I_1 est formée à partir des éléments $a_i \leq a_1$, que nous notons $i_1, i_2, \dots, i_k$; S_1 est formée à partir des éléments $a_j \geq a_1$, et nous la notons $s_1, s_2, \dots, s_m$; a_1 lui-même n'appartenant ni à I_1 , ni à S_1 . Cette partition est effectuée de telle façon qu'à l'issue du premier passage i_k et s_1 soient séparées par une position de mémoires, cette $(k+1)^o$ mémoire va recevoir a_1 . Or, $(k+1)$ est, par définition, le rang de a_1 dans SR, a_1 est donc mis en place définitivement.

Le processus va alors s'appliquer à I_1 et S_1 séparément et non à leur réunion, car $i_j \leq s_i$ quels que soient j et i .

Si, par exemple, nous choisissons de placer i_1 à son rang définitif dans SR, nous scinderons I_1 en deux nouvelles sous-suites I_2 et S_2 , mais cela impose de conserver les adresses des bornes de S_1 . Nous allons donc constituer une pile (*) dans laquelle nous mettrons à chaque étape les adresses des bornes des sous-suites S_j laissées pour compte. Une sous-suite I_k sera totalement triée au cours d'un passage, lorsqu'elle ne comportera plus que deux éléments. Il ne restera plus qu'à repartir en sens inverse en allant chercher dans le dernier étage de la pile les bornes de la sous-suite à scinder.

Pour constituer les deux sous-suites I_1 et S_1 , et libérer la $(k+1)^o$ mémoire devant recevoir a_1 , nous opérons de la façon suivante :

- a_1 est transféré en T, ce qui libère la 1ère mémoire
- nous commençons l'exploration des a_j à partir de a_n puis a_{n-1} etc... soit a_p le premier de ces éléments inférieur à T ($a_j \geq a_p$ pour $p+1 \leq j \leq n$); a_p est transféré dans la première mémoire, la 1^{re} mémoire devenant libre, nous recommençons l'exploration des a_i à partir de a_2, a_3 etc..

Soit alors a_m le premier élément supérieur à T ($a_i \leq T$ pour $2 \leq i \leq m-1$); a_m est alors transféré dans la 1^{re} mémoire, ce qui libère la m^o mémoire etc... Chaque fois qu'un transfert s'avère nécessaire nous inversons le sens d'exploration des éléments de la suite.

Soient alors i l'indice de ces éléments lorsque nous les explorons par indice croissant, et j l'indice décroissant : lorsque $i = j$ tous les éléments ont été examinés, et éventuellement transférés et T sera transféré dans cette i^o mémoire.

* La notion de pile a été essentiellement utilisée en compilation des langages [9]. Il s'agit en gros d'un mode de stockage analogue à une pile d'objets on ne peut à chaque instant qu'enlever le sommet de la pile, ou placer un nouvel élément en son sommet.

Donnons un exemple : chaque colonne 1, 2, 3, ... représente le contenu des mémoires à l'issue du 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} ... passage. La colonne SI représente la suite initiale et la colonne O le numéro des mémoires. La ligne T représente le contenu de T (c'est à dire l'élément qui sert à partager chaque suite). Dans la pile, les bornes sont notées (e,k), l'évolution d'un étage de la pile se lisant de gauche à droite.

O	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SR
1	7	1	0	0							0
2	4	4	1	1							1
3	9	3	3		2	2					2
4	0	0	4		3	3					3
5	2	2	2		4	4					4
6	6	6	6		5	5	5				5
7	5	5	5		6		6	6			6
8	8	7									7
9	3	8							8		8
10	1	9							9		9
T		7	1	0	3	2	4	5	8		

(3, 7); (5, 7); (6, 7)	2 ^{ème} étage
(9, 10)	1 ^{er} étage
Evolution de la pile	

Dans les colonnes, je n'ai indiqué que le contenu des mémoires sur lesquelles je travaille effectivement au cours du passage correspondant.

Le tri est terminé lorsque la pile est vide, après avoir trié une sous-suite, formée seulement de deux éléments.

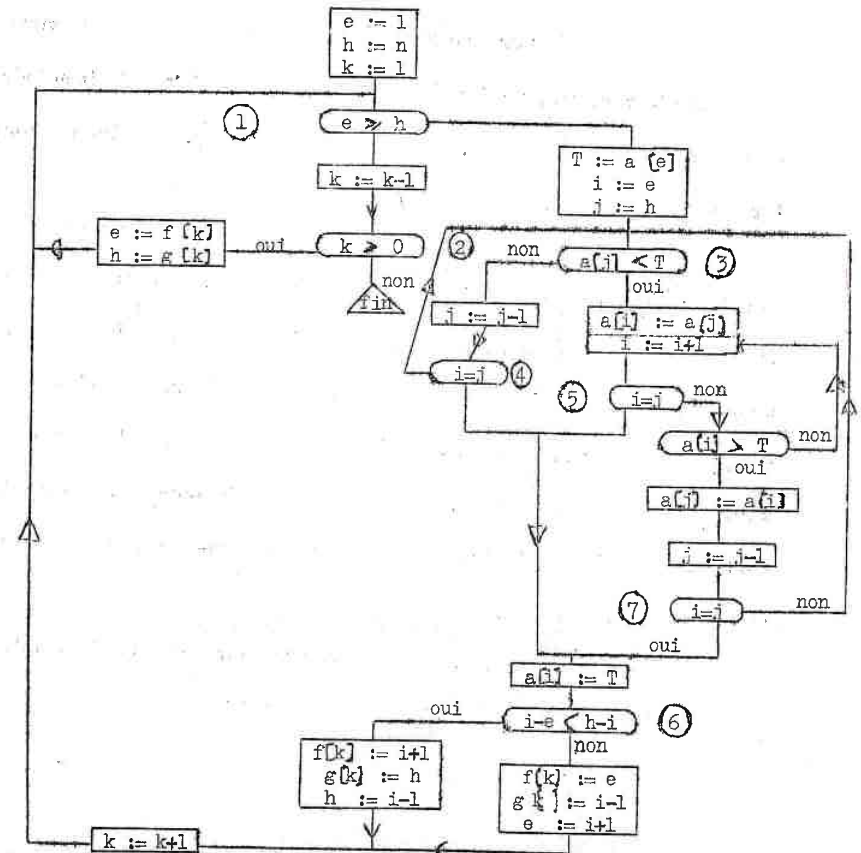
3°) Organigramme

e et h sont les bornes inférieures et supérieures de chaque sous-suite à soigner.

i correspond aux indices qui varient en croissant à partir de e

j correspond aux indices qui varient en décroissant à partir de h

k est le sommet de la pile f et g qui contient e et h.



Remarque : La méthode telle qu'elle est exposée en 2°) nous obligerait à réserver pour la pile n mémoires auxiliaires (la pile atteindrait la hauteur n dans le cas d'une suite SI rangée par exemple dans l'ordre de tri).

Montrons comment le test ⑥ : $i-e < h-i$ qui, parmi les deux sous-suites I_j et S_j qui viennent d'être obtenues, partage à nouveau la plus petite des deux, permet de réduire la hauteur maximum de la pile de n à $\log_2 n$.

Par récurrence :

Cette propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit pour $n = 1, 2, \dots, (m-1)$.

Lorsque le programme trie une suite de longueur m , il détermine le rang du premier élément a_1 de cette suite, puis il scinde la suite en deux, et trie une sous-suite de longueur $m_1 \leq \frac{m}{2}$. La pile a comme hauteur lorsque débute ce tri.

D'après notre hypothèse, il n'y a pas plus de $\log_2 m_1 \leq \log_2 m-1$ nouvelles entrées dans la pile, entrées nécessitées par le tri de cette première sous-suite, c'est à dire pas plus de $\log_2 m$ entrées au total pour trier la sous-suite de longueur m_1 . Lorsque débute le tri de la seconde sous-suite de longueur $m_2 = m-m_1$, la pile est vide, car nous n'avons plus qu'une seule suite de longueur m_2 à trier. Or, $m_2 < m-1$ l'hypothèse, selon laquelle la hauteur de la pile est inférieure ou égale à $\log_2(m-1)$ pour une suite de longueur $m-1$, est encore valable.

Donc, en aucun cas la hauteur de la pile ne dépasse $\log_2$

4°) Nombre de tests théoriques

Hibbard [6] donne pour une suite de nombres répartis au hasard un nombre de tests $N_H = 1,4 n \log_2 n$.

Nous verrons que pour une suite SI , déjà totalement ordonnée, le nombre de tests est très supérieur à N_H .

5°) Programme ALGOL

Ce programme est extrait de l'article de Hibbard [6].

```
PROCEDURE P(a,n); VALEUR n; TABLEAU a; ENTIER n;
DEBUT ENTIER e,h,i,j,k; ENTIER TABLEAU f,g(1:log2n); REEL T;
e := 1; h := n; k := 1;
B : SI e > h ALORS ALLER A C; T := a[e]; i := e; j := h;
E : SI a[j] < T
ALORS DEBUT a[i] := a[j]; i := i+1; SI i=j ALORS ALLER A D FIN
SINON DEBUT j := j-1; SI i=j ALORS ALLER A D; ALLER A E FIN;
F : SI a[i] > T
ALORS DEBUT a[j] := a[i]; j := j-1; SI i=j ALORS ALLER A D;
ALLER A E FIN;
SINON DEBUT i := i+1; SI i=j ALORS ALLER A D; ALLER A F FIN;
D : a[i] := T;
SI i-e < h-i
ALORS DEBUT f[k] := i+1; g[k] := h; h := i-1 FIN;
SINON DEBUT f[k] := e; g[k] := i-1; e := i+1 FIN;
k := k+1; ALLER A B;
C : k := k-1;
SI k > 0 ALORS DEBUT e := f[k]; h := g[k]; ALLER A B FIN;
FIN de la procédure P(a,n);
```

6°) Programme PASCAL

cf. au programme n° 8.

Ce programme occupe 124 mémoires.

7*) Résultats expérimentaux

n	128	256	512
SI1	32"	2'00"	4'15"
SI2	5'20"	23'	86'

Si nous comparons ces résultats avec ceux des méthodes précédentes, nous voyons qu'il sont pratiquement inversés.

En effet, la méthode est extrêmement rapide dans le cas d'une suite initiale d'éléments répartis au hasard. Dès que la suite devient plus ou moins arrangée, le temps de tri augmente de plus en plus, pour devenir aussi médiocre, dans le cas d'une suite totalement ordonnée, que, par exemple, celui de la méthode de sélection ordinaire, dans le cas d'une suite d'éléments répartis au hasard.

a) Montrons, par exemple, ce qui se passe dans le cas d'une suite totalement ordonnée.

Soit $SI = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Au cours du premier passage $e=1, h=9$, et T contient SI est alors partagée en :

$$\begin{cases} I_1 = 1 \\ S_1 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{à l'issue de } n-1 \text{ tests} \\ \text{(dans cet ordre).} \end{array}$$

Au second passage, $e=1, h=1$; I_1 est totalement trié, nous allons trier S_1 . Au cours du troisième passage : $e=2, h=9$, T contient 2 et nous obtenons

$$\begin{cases} I_2 = 2 \\ S_2 = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. \end{cases}$$

Pour trier n nombres totalement ordonnés, nous aurons alors un nombre N de tests tel que

$$N = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

A chaque passage, la suite ne subit aucune modification et le nombre de transfert est donc nul.

b) Envisageons à présent le cas d'une suite totalement rangée dans l'ordre inverse de tri.

Soit $SI = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.

Au premier passage, T contient 9.

Nous obtenons :

$$\underbrace{1, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2}_{I_1}, \underbrace{9}_{S_1}$$

A l'issue du second passage, S_1 est triée totalement.

A l'issue du troisième passage, T contenait 1, et

nous obtenons :

$$\underbrace{1}_{I_3}, \underbrace{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2}_{S_3}$$

La suite ne subit aucune modification.

Nous obtenons le même nombre de tests que dans le cas a) avec, en plus, n transferts.

Ces seuls exemples suffisent à montrer que la méthode de Hibbard est sensible à la distribution des éléments dans la suite SI .

Afin d'éviter cet inconvénient, signalons la méthode de Hoare (Algorithmes n° 63 et 64 : Communications of ACM - avril 1961).

Cette méthode, dans son principe, est la même que celle de Hibbard, mais au lieu de prendre systématiquement le premier élément de chaque suite s pour la scinder, elle choisit un élément quelconque de la suite, soit $a[q]$ et où q est un nombre choisi au hasard, tel que $e \leq q \leq h$ et e et h étant les indices des bornes inférieures et supérieures de s .

CHAPITRE IV

LES METHODES D'INTERCLASSEMENT

I - GENERALITES

Considérons deux suites s et s' déjà ordonnées, et soient $e_1, e_2, \dots, e_n$ les éléments de s et $e'_1, e'_2, \dots, e'_k$ ceux de s' .

Interclasser ces deux suites consiste à les fusionner de façon à obtenir une seule suite SR également ordonnée et formée de ces $n+k$ éléments, que nous noterons r_i .

Nous voulons, d'autre part, que la comparaison d'un élément e_i de s avec un élément e'_j de s' permette de placer définitivement dans SR l'un ou l'autre de ces éléments au moyen d'un seul test et d'un seul transfert.

Supposons que nous avons obtenu les p premiers éléments de SR; le $(p+1)^{\text{e}}$ sera alors, soit l'élément e_i de s , soit l'élément e'_j de s' . (i et j sont tels que $i+j = p+1$).

- si $e_i \leq e'_j$ alors $r_{p+1} = e_i$
et nous comparerons ensuite e_{i+1} à e'_j
- si $e_i > e'_j$ alors $r_{p+1} = e'_j$
et nous comparerons ensuite e'_{j+1} à e_i

Nous devons donc explorer s et s' par indice croissant, et borner s et s' par deux éléments $e_{n+1} = F$ tels que $F > e_i$ avec $1 \leq i \leq n$
 $e'_{k+1} = F$ tels que $F > e'_j$ avec $1 \leq j \leq k$.

Pour obtenir S, nous aurons besoin de $n+k+2$ mémoires auxiliaires.

Enfin, à l'issue de $n+k+1$ tests, tous les éléments de s et s' seront classés.

Bien entendu, cette méthode se généralise à un nombre quelconque l de suites $s_1, s_2, \dots, s_l$ à fusionner en une seule suite SR.

Nous voyons tout de suite les limitations qui apparaissent avec ces méthodes; il nous faut d'une part avoir des sous-suites s et s' déjà ordonnées, et d'autre part, utiliser un nombre de mémoires auxiliaires au moins égal au nombre total d'éléments à trier.

Néanmoins, elles seront intéressantes chaque fois que la suite initiale SI sera formée d'un nombre suffisamment grand de sous-suites adjacentes triées.

II - METHODE de VON NEUMANN

1°) Généralités

Au cours de chaque passage, cette méthode construit un nombre donné P des sous-suites triées et adjacentes, de longueur $\frac{P}{2}$, interclasse pour donner $\frac{P}{2}$ sous-suites adjacentes et triées, de longueur P. En itérant le processus, à l'issue d'un nombre fini de passages, nous n'obtenons plus qu'une seule sous-suite SR totalement triée, et formée de n éléments.

2°) Exposé de la méthode

Le problème est donc de construire puis de fusionner les sous-suites précédentes. Supposons, pour simplifier l'exposé, que la suite initiale SI est formée de n sous-suites adjacentes formées d'un seul élément.

Nous les noterons s_i^1 et nous avons $s_i^1 = a_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Elles sont toutes forcément triées puisqu'elles ne comportent qu'un seul élément. Interclassons alors s_1^1 et s_2^1 nous obtenons une seule sous-suite triée formée de deux éléments et nous la notons s_1^2 (la notation s_j^i représente donc la j^o sous-suite au début du i^o passage).

Nous interclassons donc au cours du premier passage

s_1^1	et	s_2^1		s_1^2
s_3^1	et	s_4^1		s_2^2
$\vdots$				$\vdots$
s_{2p-1}^1	et	s_{2p}^1		s_p^2
s_{n-1}^1	et	s_n^1		$s_{\frac{n}{2}}^2$

A l'issue de ce premier passage, nous obtenons donc $\frac{n}{2}$ sous-suites adjacentes formées de 2 éléments ($1 \leq i \leq \frac{n}{2}$) (lesquelles trouvent en fait dans les mémoires auxiliaires).

Au cours du second passage, nous interclassons les sous-suites s_1^2 et s_2^2 , pour obtenir la sous-suite s_1^3 ,

c'est à dire que s_1^2 et s_2^2 nous donne s_1^3

s_1^2	et	s_2^2		s_1^3
$\vdots$				$\vdots$
s_{2p-1}^2	et	s_{2p}^2		s_p^3
$\vdots$				$\vdots$
$s_{\frac{n}{2}-1}^2$	et	$s_{\frac{n}{2}}^2$		$s_{\frac{n}{4}}^3$

Nous obtenons donc à présent $\frac{n}{4}$ sous-suites triées notées : ($1 \leq i \leq \frac{n}{4}$) et formée de 4 éléments.

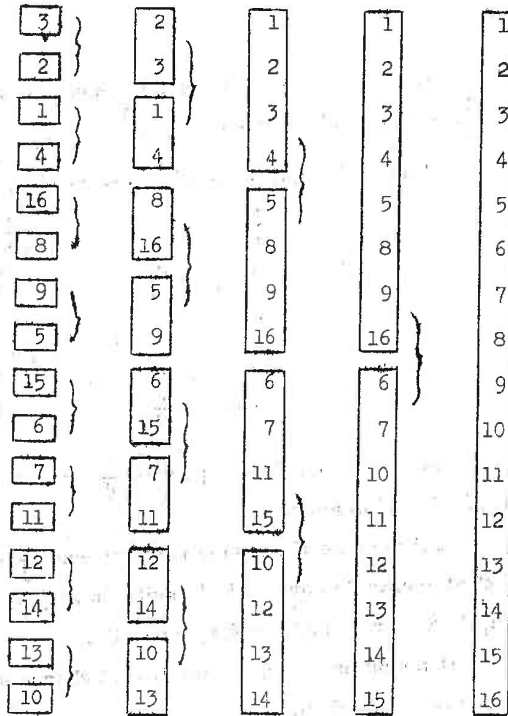
A l'issue du j^o passage nous aurons $\frac{n}{2^j}$ sous-suites triées formées de 2^j éléments de sorte qu'à la suite du k^o passage ($n=2^k$) tous les éléments a_i de SI seront triés et formeront SR.

Donnons un exemple dans lequel chaque sous-suite est encadrée dans un rectangle vertical,

L'accolade symbolise l'interclassement des deux sous-suites qu'elle relie.

D'autre part, si k est pair, la suite SR se trouve dans les mémoires qui contenaient initialement SI.

Si k est impair, la suite SR se trouve dans les mémoires auxiliaires.



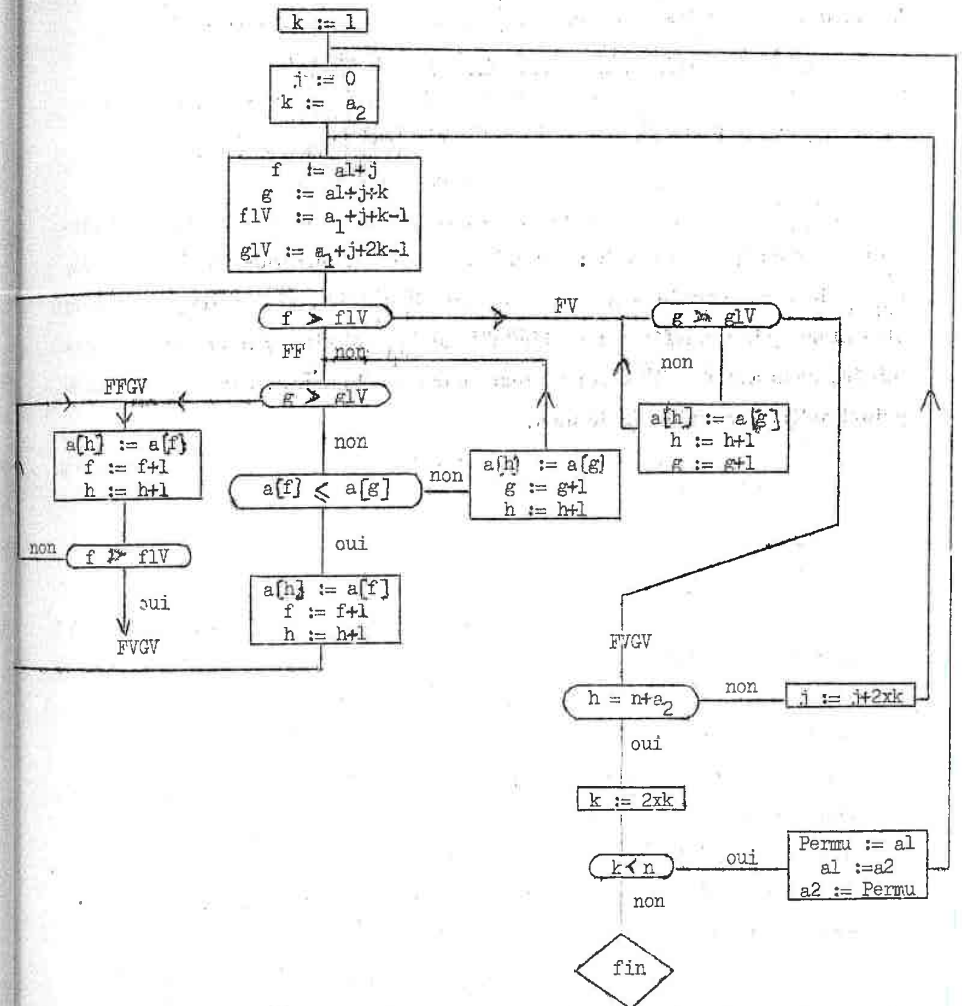
3°) Organigramme

Nous ne pouvons plus, ainsi que nous l'avons fait dans les généralités sur les méthodes d'interclassement, borner chaque sous suite s_j^i par l'élément F que nous avons introduit alors. Cet élément était simplement destiné dans le cas où $e_n < e'_k$ (cf paragraphe 1) à permettre le transfert total jusqu'en e'_k de s_j^i dans la suite SR. Dans le cas présent, nous le remplacerons par un calcul sur les indices n et k de e_n et e'_k , indices que nous noterons respectivement flV et glV.

L'indice des éléments dans la sous-suite s_{2p-1}^i est repéré par f, celui des éléments dans la sous suite s_{2p}^i par g.

La suite SI est initialement stockée dans les n mémoires consécutives commençant en a_1 , les n mémoires auxiliaires commençant en a_2 .

L'organigramme est alors le suivant :



j est l'indice qui, au cours du i° passage, permet de passer de l'interclassement des sous-suites s_{2p-1}^i et s_{2p}^i à l'interclassement des sous-suites s_{2p+1}^i et s_{2p+2}^i

k est la longueur des sous-suites s_m^i au cours du i° passage ($k=2^i$)

4°) Nombre de tests et de transferts théoriques

Le nombre de transferts au cours d'un passage est égal à n , d'où le nombre de transferts $T = n \log_2 n$

Au cours d'un passage, le nombre de tests sur les éléments eux-mêmes est inférieur à n , par suite de la suppression de l'élément F de chaque sous-suite. En effet, supposons que tous les éléments de s_{2p-1}^i aient été examinés (ce que nous savons par le test $f > flv$), il ne reste plus alors qu'à transférer les éléments de s_{2p}^i qui n'ont pas encore été examinés, sans avoir à effectuer de tests sur ces éléments, car nous savons a priori qu'ils sont triés également.

D'où le nombre total de tests à l'issue du k° passage :

$$\begin{aligned} N &\leq n \times k \\ &\leq n \log_2 n. \end{aligned}$$

5°) Programme ALGOL

PROCEDURE Interclassement ($a, al, a2, n$); VALEUR $n, al, a2$; TABEAU a ;

ENTIER $al, a2, n$;

DEBUT-ENTIER $j, k, f, g, h, flv, glv, Permu$; $k := 1$; $al := 1$; $a2 := n+1$;

$B1 : j := 0$; $h := a2$;

$B2 : f := al+j$; $g := al+j+k$; $flv := g-1$; $glv := flv+k$;

$F : \text{Si } f > flv \text{ ALORS ALLERA FV}$;

$FF : \text{Si } g > glv \text{ ALORS ALLERA FFGV}$;

SI $a[f] \leq a[g]$ ALORS DEBUT $a[h] := a[f]$; $f := f+1$; $h := h+1$;
ALLERA F FIN;

SINON DEBUT $a[h] := a[g]$; $g := g+1$; $h := h+1$;

ALLERA F F FIN;

$FFGV : a[h] := a[f]$; $f := f+1$; $h := h+1$;

ALLERA SI $f > flv$ ALORS FVGV SINON FFGV;

$FV : \text{SI } g > glv \text{ ALORS ALLERA FVGV}$;

$a[h] := a[g]$; $g := g+1$; $h := h+1$; ALLERA FV;

$FVGV : \text{SI } h = a2+n-1 \text{ ALORS ALLERA Modik}$; $j := j+2xk$; ALLERA B2;

$\text{Modik} : k := k \times 2$;

SI $k < n$ ALORS DEBUT $Permu := al$; $al := a2$; $a2 := Permu$; ALLERA B1 FIN;

FIN Procédure Interclassement;

Cette procédure correspond à l'organigramme du paragraphe 3. Elle est relativement longue, car, sous cette forme, elle reprend plusieurs fois des éléments du programme qui existaient déjà : ceci est simplement destiné à éviter des tests, soit sur g (soit sur f) dont on connaît a priori la réponse, du fait que l'indice g (ou f) n'a pas été modifié.

Donnons un second programme ALGOL, dont l'écriture est plus condensée, mais qui fait intervenir un plus grand nombre de tests.

PROCEDURE Interclassement ($a, al, a2, n$); VALEUR $n, al, a2$;

ENTIER $n, al, a2$; TABEAU a ;

DEBUT ENTIER $j, f, g, h, flv, glv, Permu$; $k := 1$; $al := 1$; $a2 := n+1$;

$B1 : j := 0$; $h := a2$;

$B2 : f := al+j$; $g := al+j+k$; $flv := g-1$; $glv := flv+k$;

$F : \text{SI } f > flv \text{ ALORS ALLERA SI } g > glv \text{ ALORS FVGV SINON M}$;

SI $g > glv$ ALORS N : DEBUT $a[h] := a[f]$; $f := f+1$; ALLER A R FIN;
SINON ALLERA SI $a[f] \leq a[g]$ ALORS N SINON M;

$M : a[h] := a[g]$; $g := g+1$;

$R : h := h+1$; ALLERA F;

$FVGV : \text{SI } h = a2+n-1 \text{ ALORS ALLERA Modik}$; $j := j+2xk$; ALLERA B2

$\text{Modik} : k := k \times 2$;

SI $k < n$ ALORS DEBUT $Permu := al$; $al := a2$; $a2 := Permu$;

ALLER A B1 FIN;

FIN;

6°) Programme PASØ

C'est le programme n° 9. Il occupe 147 mémoires.

7°) Résultats expérimentaux

Les essais ont été faits avec une méthode ne permettant de trier n nombres que si $n = 2^k$. Nous verrons comment il est possible de classer n nombres lorsque n n'est pas égal à 2^k .

	128 Nb	256 Nb	512 Nb
SI1	$T_1 = 1'2''$	$T_2 = 2'17''$	$T_3 = 5'5''$
SI2		2'	4'28''

Nous voyons donc que la méthode est très rapide et très intéressante. De plus, le temps de tri, comparé, par exemple, à la méthode de Monsieur Thomas N. Hibbard, au lieu d'être allongé lorsque la suite est déjà plus ou moins arrangée, est, au contraire, légèrement plus court. Cela provient de la réduction du nombre de tests sur les a_i : en effet, dans le cas d'une suite SI totalement rangée lorsque tous les éléments de $s_{2^{p-1}}^i$ sont transférés dans les mémoires auxiliaires (c'est à dire à la suite du k^o test sur f et sur a_i , si k est la longueur de $s_{2^{p-1}}^i$), il n'y a plus un seul test sur les a_i , mais uniquement un test sur g et un transfert.

Cas où n est différent d'une puissance entière de 2

Posons alors $n = 2^{k-1} + \alpha$ où $\alpha < 2^{k-1}$
c'est à dire que nous avons $2^{k-1} < n < 2^k$.

a) on peut, soit compléter SI avec des éléments M tels que $M > a_i$ quel que soit i .

Le nombre de tests sera alors au plus égal à $2^k \times k$.

L'inconvénient de ce procédé est de nécessiter un nombre de mémoires auxiliaires supérieur à n .

b) on peut diviser SI en deux sous-suites s_1 et s_2 , telles que s_1 soit formée des 2^{k-1} premiers éléments de SI et s_2 des α derniers éléments de SI.

Nous trierons alors s_1 par la méthode de Von Neumann.

Soit $sR1$ la suite obtenue de $sR1$, nous extrayons les α premiers éléments, nous

appelons $sR1'$ la sous-suite obtenue, et nous formons une seconde sous-suite avec les $2^{k-1} - \alpha$ éléments restants auxquels nous ajoutons les α éléments de s_2 . Nous obtenons alors une nouvelle sous-suite s_2' formée de 2^{k-1} éléments, et que nous trions par la méthode de Von Neumann. Nous obtenons alors une seconde sous-suite ordonnée $sR2$.

Il ne nous reste plus qu'à interclasser $sR1'$ et $sR2$ (en utilisant $2^{k-1} + \alpha = n$ mémoires auxiliaires) pour obtenir la suite finale SR , issue de n éléments de SI.

Le nombre de tests est alors au plus égal à :

$$\begin{aligned} 2^{k-1} \times (k-1) & \text{ pour trier } s_1 \\ 2^{k-1} \times (k-1) & \text{ pour trier } s_2' \\ 2^{k-1} + \alpha & \text{ pour interclasser } sR1' \text{ et } sR2. \end{aligned}$$

$$\text{d'où } N \leq 2^k \times k + \alpha$$

Il est supérieur à celui obtenu en a), néanmoins, cette seconde solution est intéressante car elle n'utilise que n mémoires auxiliaires.

c) on peut également trier les α derniers éléments par une méthode différente de la méthode de Von Neumann.

Soit $sR2'$ la sous-suite obtenue, il ne reste plus alors qu'à interclasser $sR1$ et $sR2'$.

III - IDEE d'UNE AUTRE METHODE de TRI par INTERCLASSEMENT

On recherche dans SI les sous-suites s_i maximales formées d'éléments consécutifs, et déjà ordonnées.

Par exemple, soit $SI = 1, 2, 3, 7, 9, 5, 2, 4, 8, 6$.

Nous avons dans SI les sous-suites ordonnées suivantes :

1, 2, - 1, 2, 3 - 1, 2, 3, 7, - 1, 2, 3, 7, 9 - 5 - 2, 4, - 2, 4, 8 - 6 -

Sont maximales les sous-suites suivantes :

$$\begin{aligned} 1, 2, 3, 7, 9 & = s_1 \\ 5 & = s_2 \\ 2, 4, 8 & = s_3 \\ 6 & = s_4 \end{aligned}$$

Soit m le nombre de sous-suites maximales incluses dans SI . Pour trier SI , nous pourrions alors procéder comme dans la méthode de Von Neumann, à cette différence près, que les sous-suites obtenues au cours d'un passage n'auront pas une longueur constante. Au cours du premier passage, nous interclasserons s_1 et s_2 , puis s_3 et s_4 , etc... Nous obtiendrons $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1$ sous-suites à l'issue de ce premier passage. En itérant le processus, la suite SI sera totalement triée à l'issue du k' passage, k' étant défini par la relation

$$2^{k'-1} < m \leq 2^{k'}$$

Il nous faut alors procéder de la façon suivante :

a) déterminer les extrémités de deux sous-suites consécutives s_{2p-1} et s_{2p} . (un test de la forme $a_i \leq a_{i+1}$ permet de déterminer ces extrémités.) Soient alors ℓ et p les longueurs respectives de s_{2p} et s_{2p-1} : $\ell + p$ tests seront nécessaires pour obtenir ces extrémités de sorte que n tests sur a_i , au cours d'un passage, permettront de déterminer les extrémités de toutes les sous-suites maximales incluses dans la suite obtenue à partir de SI .

Pour les k' passages, nous obtenons un nombre N' de tests sur les a_i , tel que :

$$N' = k' \times n = \left(\left\lceil \log_2 m \right\rceil + 1 \right) \times n$$

b) interclasser s_{2p-1} et s_{2p} en $\ell + p$ tests au plus sur les a_i .

Pour les k' passages, cela nous donne un nombre N'' de tests sur les a_i , tel que :

$$N'' \leq k' \times n \leq \left(\left\lceil \log_2 m \right\rceil + 1 \right) \times n$$

Le nombre total N de tests à effectuer sur les a_i est donc :

$$N = N' + N'' \leq 2n \left(\left\lceil \log_2 m \right\rceil + 1 \right)$$

Quant aux nombres de transferts T , il est encore égal à

$$\left(\left\lceil \log_2 m \right\rceil + 1 \right) \times n.$$

Von Neumann :

α) supposons pour cela que $n = 2^k$ et $m = 2^{k'}$

Posons N_1 = nombre total de tests sur les a_i avec la méthode de Von Neumann

N_2 = " " avec cette nouvelle méthode.

Déterminons m pour que cette méthode soit plus intéressante que la précédente, c'est à dire que $N_2 \leq N_1$.

$$2n \log_2 m \leq n \log_2 n \quad \text{c'est à dire} \quad m \leq \sqrt{n}$$

β) Dans le cas général, c'est à dire $n = 2^{k'-1} + \alpha$ et $n \neq 2^{k'}$

Nous avons :

$$N_1 = 2 \times (2^{k'-1}) \left(\left\lceil \log_2 n \right\rceil + 1 \right) + \alpha$$

$$N_2 = 2 (2^{k'-1} + \alpha) \times \left(\left\lceil \log_2 m \right\rceil + 1 \right)$$

La valeur de m pour laquelle $N_2 \leq N_1$ est alors fonction de α et, de toute façon, elle est supérieure à celle obtenue dans le cas α), de sorte que cette deuxième méthode peut devenir très intéressante.

CHAPITRE V LES METHODES D'INSERTION

I - GENERALITES

Soit toujours SI la suite initiale formée des n éléments a_i à trier. A l'issue de la j° étape, la sous-suite s_j obtenue à partir des j premiers éléments de SI est triée. On place alors a_{j+1} par rapport aux éléments e_i de s_j , c'est à dire que nous allons "insérer" a_{j+1} dans s_j de façon à obtenir une sous-suite s_{j+1} , également triée, et composée des $(j+1)$ premiers éléments de SI (nous noterons les éléments de s_{j+1} e'_i pour les distinguer des e_i).

Il s'agit donc de déterminer l'élément e_m de s_j tel que

$$e_m \leq a_{j+1}$$

$$e_{m+1} > a_{j+1}$$

Cet élément e_m étant déterminé, il suffira de déplacer $e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_j$, d'une position vers la droite, et de transférer a_{j+1} à la place de e_{m+1} .

La suite s_{j+1} est alors construite, et nous pouvons alors placer a_{j+2} dans s_{j+1} .

Le tri sera totalement terminé lorsque nous aurons placé a_n dans la suite s_{n-1} , et nous avons alors $SR = s_n$.

II - La METHODE d'INSERTION ORDINAIRE

1°) Généralités

Le classement de a_{j+1} est fait, théoriquement, par un produit de transposition. Mais nous verrons dans l'exposé de la méthode que ces transpositions ne sont pas complètement effectuées. Ces transpositions incomplètes permettent de déplacer les e_i d'une position vers la droite, et nous allons donc comparer a_{j+1} successivement à $e_j, e_{j-1}, e_{j-2}, \dots$ etc... jusqu'à e_m .

c) Nombre de tests et nombres de transferts théoriques

Soit SI la suite initiale des n éléments à trier. Soit, au j passage, N_j le nombre de tests nécessaires pour placer le $(j+1)^{\circ}$ élément de SI, le nombre de transferts t_j correspondant est égal à $N_j - 1$. Envisageons les différents cas qui peuvent se présenter (le nombre de passages dans SI est toujours égal à $n-1$).

- SI est une suite totalement rangée.

Nous avons, en appelant N le nombre de tests totaux, et T le nombre de transferts associés :

$$N = n-1$$

$$T = (n-1) - (n-1) = 0$$

- SI est une suite totalement rangée dans l'ordre inverse

de tri.

Il faut 1 test pour trier le 2ème élément

2 tests pour trier le 3ème élément

⋮

$n-1$ tests pour trier le $n^{\text{ème}}$ élément

$$\text{d'où } N = \sum_{i=1}^{n-1} 1 = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{et} \quad T = \frac{n^2 - n - 2(n-1)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

- SI est une suite quelconque de nombres :

Soit $f(j)$ le nombre total de tests nécessaires pour trier tous les $j!$ arrangements possibles des j premiers éléments de SI. Pour classer a_{j+1} , il y a $j+1$ places possibles dans la sous-suite s'_{j+1} correspondant à $e'_1, e'_2, \dots, e'_{j+1}$. Pour chacun des $j!$ arrangements possibles, ces $j+1$ places possibles nécessitent respectivement j tests, $j-1$ tests, $\dots$, 1 test. D'où le nombre total $f(j+1)$ de tests correspondant aux $j+1$ possibilités de placement de a_{j+1} parmi les $j!$ arrangements possibles des j premiers éléments de SI.

$$\begin{aligned} f(j+1) &= (j+1) f(j) + j! \sum_{i=1}^j i \\ &= (j+1) f(j) + (j+1)! \times \left(\frac{j}{2}\right) \end{aligned}$$

La fonction $f(j) = \frac{j! (j-1) j}{4}$ est solution de cette équation, et elle correspond aux $j!$ arrangements possibles, D'où le nombre de tests N_j correspondant à un seul d'entre eux

$$N_j = \frac{f(j)}{j!} = \frac{j(j-1)}{4}$$

D'où, pour n éléments à trier, nous obtenons le nombre de tests

$$N = \frac{n(n-1)}{4} \quad \text{et} \quad T = \frac{n^2 - 5n + 4}{4}$$

3°) Programme ALGOL

PROCEDURE Insertion (A,N); VALEUR N; TABLEAU A; ENTIER N;

DEBUT ENTIER I,J; REEL T;

POUR J := 1 PAS 1 JUSQUA N-1 FAIRE

DEBUT T := A [J+1];

POUR I := J PAS -1 JUSQUA 1 FAIRE

DEBUT SI T < A[I] ALORS A[I+1] := A[I]

SINON DEBUT A[I+1] := T;

ALLER A B FIN ;

FIN ; A [1] := T ;

B : FIN;

FIN de la procédure d'insertion ;

4°) Programme PASC pour IBM 650

Le programme n'occupe que 49 mémoires.

5°) Résultats expérimentaux

J'ai obtenu les résultats expérimentaux suivants :

Temps de passage avec	128 Nb	256 Nb	512 Nb
SI 1	2' 55"	12 '	44 '
SI 2		20 "	2' 30"

Ces résultats nous montrent que la méthode d'insertion est sensible à la distribution, et que ses performances sont très nettement améliorées lorsque la suite SI est déjà "un peu arrangée". Ceci est en accord avec le calcul précédent du nombre de tests théoriques.

D'autre part, en comparant cette méthode à la méthode de Bubble, il n'existe pas dans le cas présent d'éléments a_j (cf. au chapitre II §) tel que cet élément puisse imposer un nombre de passages $m \geq a_j - p$ (où p est l'indice de l'élément à insérer) comme cela se passait avec cette méthode. La méthode d'insertion sera dans tous les cas meilleure que celle de Bubble.

III - METHODE d'INSERTION DICHOTOMIQUE

1°) Généralités

Cette méthode diffère de la précédente dans la façon de déterminer la place de a_{j+1} dans la sous-suite s_j . En effet, le nombre de tests nécessaires pour déterminer l'élément e_m (tel que $e_m \leq a_{j+1}$ et $e_{m+1} > a_{j+1}$) sera rendu plus faible si, au lieu de comparer a_{j+1} aux éléments de s_j dans l'ordre décroissant systématiquement, nous divisons s_j en intervalles partiels successifs de longueur sensiblement égale à $\frac{j}{2}$, $\frac{j}{4}$, ..., 1, et si nous déterminons à chaque fois dans quel intervalle a_{j+1} viendra se placer.

2°) Exposé de la méthode

Bornons nous dans cet exposé à donner un organigramme possible de la méthode.

j est l'indice de l'élément à insérer

$i = j-1, j-2, \dots, p$

p et q sont les bornes de chaque intervalle partiel

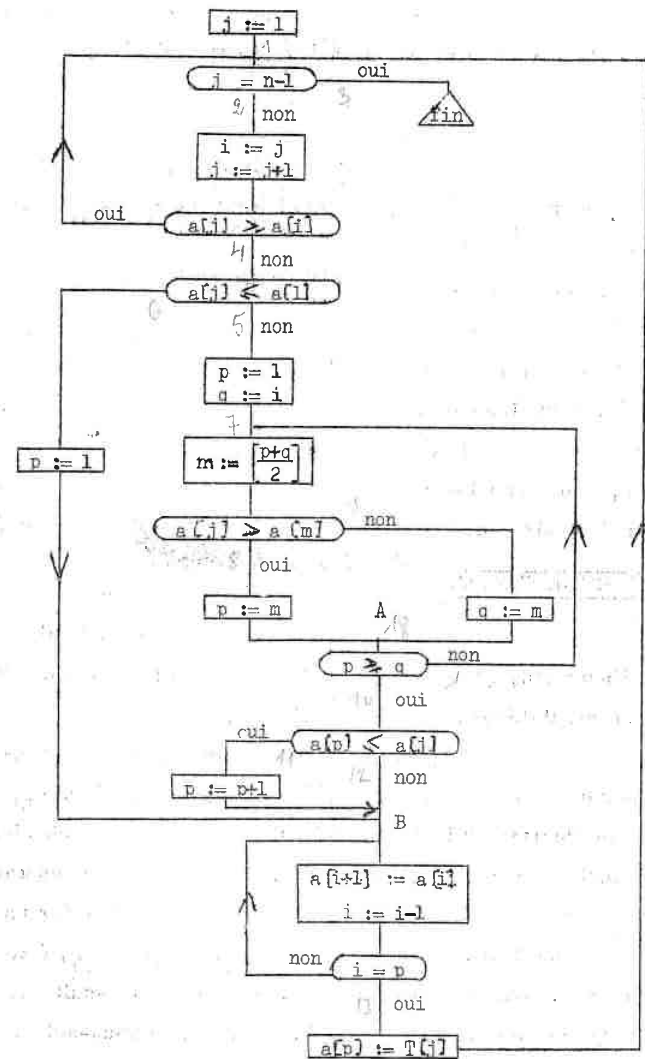
lorsque $p = q$ l'intervalle ne comprend plus un seul élément :

il reste alors à déterminer si

$a[p] \leq a[j]$ si oui $p=m$

si non $p=m+1$

$\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor$ signifie partie entière de $\frac{p+q}{2}$



Nombre de tests et de transferts théoriques :

Le nombre de transferts est bien entendu le même dans cette méthode que dans la méthode d'insertion ordinaire, c'est à dire :

$$T = \frac{n^2 - n}{4}$$

Iverson ([1] page 236) a donné un nombre de tests égal à $n \log_2 n$. Malheureusement, chaque test fait intervenir un calcul d'indice compliqué $m = \left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil$ ce qui vient beaucoup alourdir la méthode. D'autre part, il convient de remarquer que lorsque e_m est déterminé, il reste encore à effectuer le décalage de tous les e_i tels que $m+1 \leq i \leq j$. Ces transferts dans la méthode d'insertion ordinaire se font très facilement, juste après les tests, de sorte que les calculs d'indice correspondant sont très rapides.

Je n'ai pas personnellement essayé cette méthode, et personne, à ma connaissance, n'a obtenu de résultats très intéressants susceptibles de venir concurrencés ceux de la méthode de Hibbard (cf. chapitre IV).

IV - METHODE d'INSERTION et METHODE de SHELL

Nous avons supposé, dans les généralités sur les méthodes d'insertion, que la suite s était formée d'éléments consécutifs $e_1, e_2, \dots, e_j$ et que l'élément à insérer était a_{j+1} .

Nous pouvons concevoir une méthode dans laquelle les éléments sont $e_{h1}, e_{h2}, \dots, e_{hj}$, l'élément à insérer étant e_{hj+1} , l'indice hj symbolisant "certains" indices particuliers et non le produit d'un indice h par un autre indice j et tel que $hk+f = hk+1$, f étant un entier constant.

Nous pourrions par cette méthode trier une première sous-suite issue de SI , et commençant en $a_1, a_{1+f_1}, a_{1+2f_1}$, f ayant une certaine valeur f_1 , nous obtenons alors s_1 , première sous-suite ordonnée, puis f ayant toujours cette même valeur f_1 , une seconde sous-suite, commençant en a_2 , ce qui nous donnera une seconde sous-suite ordonnée s_2^1 etc... c'est à dire que nous obtiendrons f_1 sous-suites ordonnées s_i^1 avec $1 \leq i \leq f_1$, tous les éléments a_i de SI ayant été examinés.

Nous pouvons alors recommencer le processus avec une nouvelle valeur de f , soit $f_2 < f_1$, pour obtenir f_2 sous-suites ordonnées s_i^2 .

Le tri sera alors totalement terminé lorsque f sera égal à 1, la sous-suite ordonnée obtenue ayant n éléments.

Ceci est exactement le principe de la méthode de Shell dans laquelle nous avons $f_1 =$ partielle de $\left(\frac{n}{2}\right)$ et $f_i =$ partie entière de $\left(\frac{f_{i-1}}{2}\right)$.

Les résultats expérimentaux obtenus montrent que dans le cas d'une suite initiale SI de nombres répartis au hasard, la méthode de Shell est meilleure que la méthode d'insertion ordinaire.

CHAPITRE VI

METHODES UTILISANT DES PILES SIMPLES

I - GENERALITES

C. PAIR [7], [8] a introduit la notion de "pile simple" et montré qu'une pile simple fait passer d'une permutation donnée d'un ensemble fini E (permutation d'entrée) à une autre permutation de E (permutation de sortie). Soient P et S les ordres totaux de E définis respectivement par les permutations d'entrée et de sortie. Nous dirons que P et S sont l'ordre d'entrée et l'ordre de sortie de la pile.

On associe à la pile simple l'ordre partiel R de E tel que

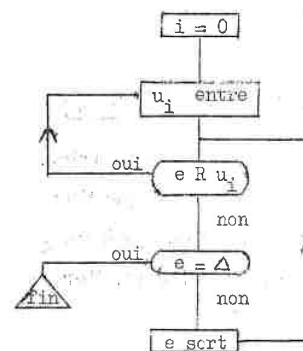
$$\alpha R \beta \iff \alpha P \beta \text{ et } \beta S \alpha$$

On déduit de cette définition :

$$\alpha P \beta \iff \alpha R \beta \text{ ou } (\alpha P \beta \text{ et } \beta \bar{R} \alpha) \quad (1)$$

$$\alpha S \beta \iff \beta R \alpha \text{ ou } (\alpha P \beta \text{ et } \alpha \bar{R} \beta)$$

Le passage de la permutation d'entrée à la permutation de sortie est décrit par l'organigramme ci-dessous :



u_i est le premier élément susceptible d'entrer dans la pile

" u_i entre" veut dire que l'élément u_i entre dans la pile, puis que i augmente d'une unité

e est le sommet de la pile

$\Delta = u_0$ et il est tel que

$\Delta R u_i$ quel que soit i

" e sort" veut dire que le sommet de la pile sort, puis que la hauteur de la pile décroît d'une unité.

Nous dirons que u est un R -successeur de e lorsque d'une part $e R u$, et, d'autre part $e R v R u$ entraîne $e = v$ ou $v = u$.

Enfin, on montre :

Théorème 1 :

Pour qu'il existe une pile simple sur E dont un ordre total donné P soit un ordre d'entrée et un ordre donné R soit l'ordre associé, il faut et il suffit que pour tout α appartenant à E, $R(\alpha)^{(2)}$ soit un P-intervalle de premier élément α .

Théorème 2 :

Pour qu'il existe une pile simple sur E dont un ordre total donné S soit un ordre de sortie et un ordre donné R soit l'ordre associé, il faut et il suffit que pour tout α appartenant à E, $R(\alpha)$ soit un S-intervalle de dernier élément α .

Il n'existe pas en général de pile simple faisant passer de SI, permutation d'entrée, à SR, permutation de sortie. Mais on peut :

1 - Soit s'arranger pour que SR soit la permutation de sortie. Alors, en général, les éléments n'entrent pas dans l'ordre où ils sont donnés dans SI ;

2 - Soit choisir SI pour permutation d'entrée. Alors, en général, SR ne sera pas la permutation de sortie, mais on montrera qu'on peut parvenir à SR en itérant le processus.

I - PREMIERE METHODE : l'ordre de tri est l'ordre de sortie S.

Soit une suite $u_1, u_2, \dots, u_n$ d'éléments à trier.

Nous pouvons construire une pile telle que l'ordre de sortie S soit l'ordre de tri cherché, c'est à dire dans le cas présent $\leq$.

On démontrerait que dans ces conditions, l'ordre R est tel que $\alpha R \beta \iff \alpha P \beta$ et $\beta S \alpha$ et

$$(\forall \gamma \in]\beta, \alpha[_s, \alpha P \gamma)$$

où la notation $] \beta, \alpha[_s$ désigne un intervalle pour l'ordre S.

L'ordre d'entrée associé n'est pas l'ordre P précédent, mais un autre ordre P_1 . Il est tel que

$$\alpha P_1 \beta \iff \alpha R \beta \text{ ou } (\alpha S \beta \text{ et } \beta R \alpha) \quad (1)$$

(2) $R(\alpha)$ est l'ensemble des α tels que $\alpha R \beta$

1°) Soit e le sommet de la pile : le problème est de savoir si e sort ou si un élément u entre, et lequel :

Or, $u \text{ entre} \implies e R u$ et u pas entré

$\implies e P u$ et $u S e$ et u pas encore entré

S'il n'existe pas un tel u, e sort.

2°) Supposons qu'un tel u entre : nous avons :

$e P u$ et $u S e$ et u pas encore entré.

Or, pour que $e R u$, il faut et il suffit que quel que soit

$$\gamma \in]u, e[_s, e P \gamma$$

Soit $u S \gamma S e$. Si $e \bar{P} \gamma$ alors $\gamma P e$,

mais $\gamma P e$ et $\gamma S e \implies e \bar{R} \gamma \implies \gamma P_1 e$ d'après (1)

γ entre avant e ; donc γ est sorti quand e est au sommet

de la pile et par suite u est sorti car $u S e$ ce qui est impossible car u n'est pas encore entré, d'où $e R u \iff e P u$ et $u S e$ et u pas encore entré.

Donc, s'il existe un u tel que

$e P u$ et $u S e$ et u pas encore entré, e ne sort pas. L'un

des u entre : reste à savoir lequel.

3°) Ordre dans lequel entrent les successeurs de e :

Les successeurs de e ne sont pas comparables par R.

D'après (1), les successeurs de e entrent donc dans l'ordre S.

Soit β un successeur de e et α le premier des successeurs de e qui entre après β .

Montrons que $\beta P \alpha$; sinon $\alpha P \beta$ mais $\beta S \alpha$ et $\alpha R \beta$.

D'après la définition de R, il reste γ tel que

$$\beta S \gamma S \alpha \text{ et } \gamma P \alpha P \beta \implies \alpha \bar{R} \gamma \text{ et } \gamma R \beta$$

De plus, $e R \beta$ et $e R \alpha \implies e R \gamma$

Il existe donc δ successeur de e, tel que $e R \delta R \gamma$ et $\delta \neq \alpha$

$$\implies \beta S \gamma S \delta S \alpha$$

ce qui est impossible, car α par hypothèse est le premier successeur de e qui suit β dans l'ordre S.

Donc, $\beta P \alpha$, ce qui montre que les successeurs de e

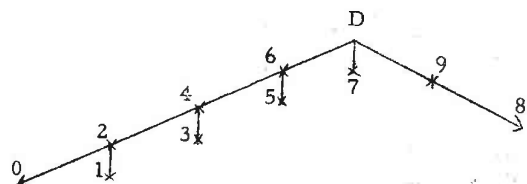
entrent dans l'ordre P.

Donnons également l'arbre de SI pour la relation R défini par :

$$aRb \iff aPb \text{ et } b \leq a$$

L'ordre d'entrée P1 dans la pile est D, 6, 4, 2, 0, 1, 3, 5, 7, 9

L'ordre de sortie est l'ordre de tri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9



Nombres de tests et de transferts théoriques

Pour nous placer dans les mêmes conditions de calculs du nombre de tests théoriques que pour les méthodes précédentes (c'est à dire que nous négligeons les tests portant sur les indices) nous ne tiendrons pas compte des tests $a_i = f$ et $e = d$.

Par contre, en fonction du calculateur utilisé, nous sommes obligés de faire intervenir deux sortes de tests : les tests de la forme " a_i non entré" que nous noterons N, et les tests sur les a_i eux-mêmes de la forme " $a_i \leq e$ " que nous noterons N'.

a) Soit une suite totalement rangée dans l'ordre inverse de tri ($a_i \geq a_{i+1}$ quel que soit i) et n le nombre d'éléments à trier ; au premier passage, tous les a_i rentrent dans la pile qui atteint alors la hauteur n+1.

Nous avons alors

$$N'_a = \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

b) Soit une suite totalement rangée dans l'ordre de tri ; la pile à chaque étape ne comporte qu'un seul étage (un seul élément entre, puis sort avant qu'un autre ne rentre dans la pile)

Nous avons alors

$$N'_b = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$N_b = N'_b$$

c) Soit une suite SI d'éléments répartis au hasard :

- nombre de tests " a_i est-il entré ?" : chaque élément

α quand il est au sommet de la pile, est comparée dans le test " a_i est-il entré ?" une fois et une seule à tous les éléments qui le suivent puisque si β vient au dessus de α dans la pile nous repartons, après la sortie de β , à l'élément qui suit β dans l'ordre P. Le nombre de tests N_c " a_i est-il entré ?" est donc :

$$N_c = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

- nombre de tests " a_i Se" : il est égal au nombre de tests " a_i est-il entré ?" qui répondent non.

Le nombre de tests " a_i Se" qui répondent oui est évidemment égal au nombre d'entrées dans la pile, c'est à dire n.

Le nombre de tests " a_i Se" qui répondent non correspond aux couples d'éléments tels que ePa_i et eSa_i . D'où le nombre de tests " a_i Se" à réponse non est égal au nombre de combinaisons (a_i, e) tels que ePa_i et eSa_i .

Calculons le nombre moyen de combinaisons tels que ePa_i et eSa_i : supposons tous les ordres P "également possibles". Il y a autant d'ordres P tels que ePa_i et eSa_i que d'ordres tels que ePa_i et a_iSe .

La probabilité pour un couple donné d'être dans P ordonné dans l'ordre S est $\frac{1}{2}$, d'où le nombre moyen de tests a_iSe à réponse non est égal à $\frac{n(n-1)}{4}$.

Le nombre moyen total de tests " a_iSe " est donc :

$$N'_e = \frac{n(n-1)}{4} + n = \frac{n(n+3)}{4}$$

Dans tous les cas, le nombre de transferts est constant et égal à $2n$ (n transferts pour transférer les éléments dans la pile et n autres pour les en sortir).

Longueur de la zone de travail :

Nous avons besoin de conserver intégralement tous les a_i . Comme, d'autre part, la pile est susceptible d'avoir une hauteur égale à n+1, il nous faut une zone de travail de $n+1+2=n+3$ mémoires en plus des

n mémoires contenant les a_i . Pour construire la suite résultat SR (lorsque e sort), il nous faudrait en plus n mémoires, mais celles-ci sont obtenues en imbriquant la zone réservée à la pile et la zone de rangement B lorsque les e sortent (l'extrémité de l'une prise avec un indice croissant, étant égale à l'origine de l'autre, prise avec un indice décroissant).

Programme PASØ pour IBM 650

Cf. au programme n° 4

Nous avons placé les éléments a_i à trier de u0002 à u000N+1.
u0001 = D, u000N+2 = F.

Le fait d'imbriquer la zone réservée à la pile par numéro de mémoires croissant et la zone de sortie des nombres triés par numéro de mémoires décroissant nous donne en fait une suite SR rangée dans l'ordre inverse de tri.

Le programme ainsi conçu utilise 116 mémoires.

Résultats expérimentaux

Pour réaliser le test "a_i est-il entré ?", j'ai utilisé sur le calculateur IBM 650 du Centre de Calcul de Nancy, un test SD0, c'est à dire que ce test donne également deux sorties "oui, non" mais il est plus rapide qu'un test de la forme $u_i \leq e$.

Voici les résultats que j'ai obtenus :

	256 Nb	512 Nb
avec SII	22'30"	88'

II - SECONDE METHODE : l'ordre de tri est l'ordre d'entrée P dans la pile

Construisons une pile dans laquelle l'ordre d'entrée est l'ordre P. On démontre qu'il faut alors choisir R de telle sorte que :

$$\alpha R \beta \iff \alpha P \beta \text{ et } \beta S \alpha \text{ et } (\forall \gamma \in]\alpha, \beta[_P, \gamma S \alpha)$$

où $] \alpha, \beta[_P$ désigne un intervalle pour l'ordre P.

L'ordre de sortie n'est plus S, mais un ordre S_1 tel que :

$$\alpha S_1 \beta \iff \beta R \alpha \text{ ou } (\alpha P \beta \text{ et } \alpha \bar{R} \beta) \text{ ②}$$

1°) Soit un couple déjà rangé à l'entrée dans l'ordre S, c'est à dire tel que $\alpha P \beta$ et $\alpha S \beta$.

Le problème est de savoir s'il le restera dans l'ordre S_1 à la sortie ? La réponse est oui : en effet :

$$\alpha P \beta \text{ et } \alpha S \beta \implies \alpha \bar{R} \beta.$$

$$\text{Comme } \alpha P \beta \implies \alpha S_1 \beta \text{ d'après ②.}$$

2°) A quelles conditions un couple non encore rangé peut-il le devenir à la sortie ?

Nous avons donc $\alpha P \beta$ et $\beta S \alpha$.

$$\text{Or } \beta S_1 \alpha \iff \alpha R \beta \text{ ou } (\beta P \alpha \text{ et } \beta \bar{R} \alpha)$$

$$\iff \alpha R \beta \text{ car } \alpha P \beta$$

$$\text{mais } \alpha R \beta \iff \alpha P \beta \text{ et } \beta S \alpha \text{ et } (\forall \gamma \in]\alpha, \beta[_P, \gamma S \alpha)$$

Pour qu'à la sortie le couple (α, β) devienne bien rangé dans l'ordre S_1 , il faut et il suffit qu'aucun des éléments γ de l'intervalle $] \alpha, \beta[_P$ ne soit bien rangé avec α à l'entrée.

Autrement dit, si γ est le premier élément bien rangé avec α suivant α dans l'ordre P, tous les éléments compris entre α et γ seront bien rangés avec α dans l'ordre S_1 .

Les conséquences sont nombreuses :

a) Le dernier élément δ de E pour S sera aussi le dernier pour l'ordre S_1 . En effet,

- si $\alpha P \delta$, α et δ restent bien rangés dans l'ordre S_1
- si $\delta P \beta$ entre δ et β aucun élément n'est bien rangé avec δ donc $\beta S_1 \delta$.

b) Si δ est déjà le dernier élément dans l'ordre P, il le restera. Mais alors, si δ' est l'avant dernier élément de E pour S, il restera bien rangé avec δ et le deviendra par rapport à tous les α tels que $\alpha P \delta'$ et à tous les β tels que $\delta' P \beta$.

c) Plus généralement, si les q derniers éléments de E, pour l'ordre S, sont déjà bien rangés, c'est le (q-1)^o qui sera rangé.

Nous voyons donc qu'il y a toujours au moins un élément de plus qui vient se placer au bon endroit en queue de liste. Par conséquent, si nous reprenons l'ensemble E, avec pour nouvel ordre P, l'ordre S_1 précédent, nous obtenons un nouvel ordre de sortie S_2 etc... et il est clair qu'au bout d'un nombre fini d'itérations (au plus égal à n, si E comporte n éléments) tous les éléments de E seront bien rangés dans l'ordre S .

3°) Test d'entrée dans la pile :

Soient e le sommet de la pile, et u le premier élément de E susceptible d'y entrer :

$$e R u \implies u S e$$

Réciproquement, supposons $u S e$; or, $e P u$ puisque e est entré avant u ; soit alors $e P \not\propto$ montrons que $\not\propto S e$: $\not\propto$ est entré puisque e est encore dans la pile, mais comme e est le sommet de la pile, $\not\propto$ est sorti, d'où $\not\propto S e$.

Donc, le test $e R u$ est équivalent à $u S e$.

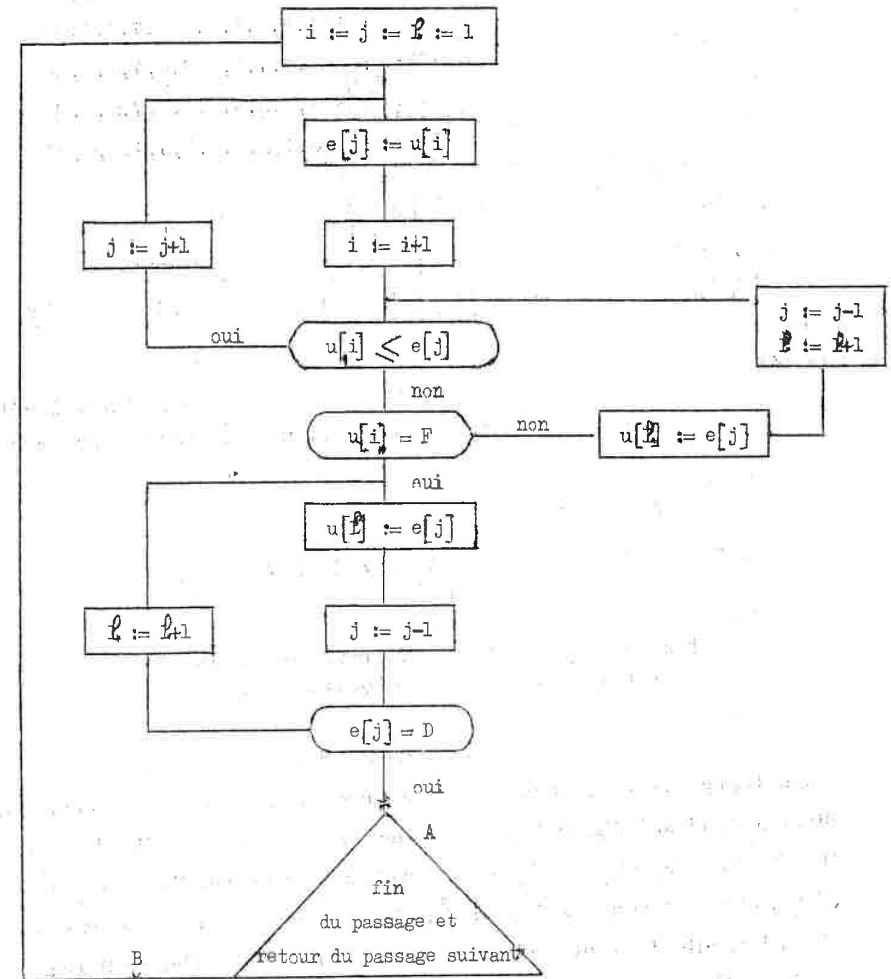
4°) Organigramme :

Donnons pour l'instant l'organigramme qui permet le passage d'un ordre P_i au suivant P_{i+1} .

L'ensemble E est composé des éléments $u[i]$, la pile est désignée par $e[j]$ à leur sortie de la pile, les éléments $e[j]$ sont transférés en $u[j]$; ils ne peuvent pas venir se substituer à des $u[i]$ non encore examinés, car nous avons :

$$i \geq j + 2$$

(La suite est toujours encadrée par $u[1] = D$ et $u[N+2] = F$.)



Il nous manque pour l'instant un test de fin : voyons sur un exemple quelle forme nous allons lui donner.

Soit SI la suite des nombres à trier, telle que

7, 5, 4, 9, 1, 3, 0, 2, 8, 6.

Nous l'encadrons par D et F, tels que $F \geq D$, et

$\forall \alpha, D > \alpha$ et $D R \alpha$ et $\alpha R F$.

Etat de la suite après le 1er passage : D 4, 5, 7, 1, 0, 2, 3, 6, 8, 9, F

2ème : D 4, 5, 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, F

3ème : D 4, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, F

4ème : D 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, F

5ème : D 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, F

4 5 6

7 8

9

D

Evolution de la pile au
cours du 1er passage

0

1 2 3 6

4 5 7 8 9

D

Evolution de la pile au
cours du 2ème passage

0 1 2 3

4 5 6 7 8 9

D

Evolution de la pile au
cours du 3ème passage

0 1 2

3 4 5 6 7 8

D

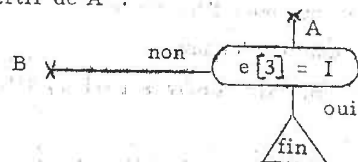
Evolution de la pile au
cours du 4ème passage

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

D

Evolution de la pile au
cours du 5ème passage

Nous voyons donc que l'ensemble E sera totalement ordonné lorsque tous ses éléments seront entrés dans la pile, puis sortis immédiatement, c'est à dire qu'à aucun moment la hauteur de la pile n'excède deux : il suffit donc de mettre un indicatif I quelconque au début d'un passage dans $e[3]$, c'est à dire après $i := j := 0 := 1$, et de garder à la fin de ce passage si cet indicatif s'y trouve encore : donnons la transformation de l'organigramme à partir de A :



5°) Reprenons plus en détail l'étude du paragraphe 2

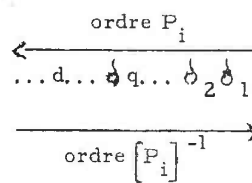
Nous constatons que, moins il y a de couples bien rangés au début d'un passage, et plus il y en aura de bien rangés à l'issue de ce passage, de sorte qu'au passage suivant, nous rangerons moins de couples que pendant ce même passage.

Il va donc se produire un freinage d'autant plus efficace qu'il y a plus de couples rangés.

Pour éviter cet inconvénient, nous pouvons repartir à chaque fois dans l'ordre inverse de sortie, c'est à dire que P_i (ordre P au i^o passage) est tel que

$$P_i = [S_{i-1}]^{-1} \quad \text{ou encore} \quad [P_i]^{-1} = S_{i-1}$$

Montrons qu'ici encore, si les q S-derniers éléments de E sont déjà à leur place dans l'ordre $[P_i]^{-1}$, il le seront également dans l'ordre S.



Soient $d_1 \dots d_q$ ses éléments,
nous avons :
 $d_q S \dots S d_2 S d_1$

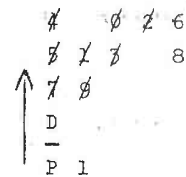
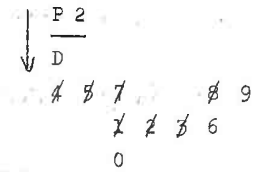
Pour $[P_i]^{-1}$ tout élément d_j est mal rangé avec tout ordre, donc, d'après les résultats du paragraphe 2°) il deviendra bien rangé avec tout autre à la sortie S, et avec le précédent d_{q+1} également. Le processus convergera donc également, et permettra de ranger tous les éléments au bout d'un nombre fini d'itérations.

Longueur de la zone de travail

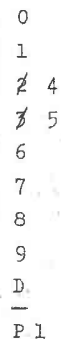
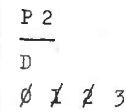
Pour mettre en oeuvre cette méthode, il nous faut réserver n+3 mémoires de travail pour ranger n éléments : n+1 mémoires pour la pile elle-même, et 2 mémoires pour encadrer S par D et F.

D'autre part, afin d'économiser des transferts, nous avons été conduits à envisager une seconde pile P2 imbriquée dans la première, son extrémité coïncidant avec le second étage de la pile P1. Elle est telle que l'ordre de sortie de la première pile P1 est l'ordre d'entrée dans la seconde pile P2.

Exemple : Soit SI : 7,5,4,9,1,3,0,2,8,6, que nous encadrons par D et F.



Evolution de P1 et P2
au cours du 1er passage



Evolution de P1 et P2
au cours du 2ème passage

Etat de la suite s : initialement $\xrightarrow{P}$ D,7,5,4,9,1,3,0,2,8,6
: après le 1er passage $\xleftarrow{P}$ D,4,5,0,1,2,3,6,7,8,9
: après le 2ème passage $\xrightarrow{P}$ D,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0

Test d'élimination des éléments déjà rangés :

Tous les éléments u_i qui, à partir du dernier élément sorti de P2, sont entrés dans P2, puis sortis immédiatement, sont bien rangés.

Ces éléments sont tous supérieurs au dernier élément v entré dans le 3ème étage de P2, et le test $u_i > v$ permet donc de les éliminer.

Programme PASØ

Afin de tenir compte de tous les résultats de l'étude précédente, j'ai été amené à écrire plusieurs programmes, dont voici les principaux :

a) Le programme n° 5 (dénommé P2) et qui ne possède aucun des perfectionnements mentionnés dans cette étude. Il correspond simplement à l'organigramme du paragraphe 4°).

Ce programme occupe 95 mémoires.

b) Le programme n° 5-bis, dont l'organigramme figure ci-dessous. Il occupe 177 mémoires.

Dans ce programme, l'ordre de sortie S_{i-1} est le nouvel ordre d'entrée P_i ; nous inversons donc le sens de lecture à chaque fois. J'utilise deux piles P1 et P2. Les $u_i > v$ ne sont éliminés qu'au cours d'un passage sur deux pour des raisons de commodité de mise en œuvre de la méthode.

A leur sortie de P2, les éléments sont transférés dans les mémoires libérées par les u_i qui sont entrés, soit dans P1, soit dans P2. La suite SI est encadrée par deux éléments D et F (définis comme dans la première méthode), mais, comme j'inverse à chaque fois le sens de lecture, il m'a fallu prendre $D = F$.

Donnons un exemple :

SI	$\xrightarrow{\quad}$	F,6,4,2,0,5,7,2,9,1,8,3,F
Etat de SI à l'issue du 1er passage	$\xleftarrow{\quad}$	F,0,2,4,5,2,6,1,3,F,7,8,9
2ème	$\xrightarrow{\quad}$	F,6,5,4,3,2,2,0,1,F
3ème	$\xleftarrow{\quad}$	F,0,1,F,2,2,3,4,5,6
4ème	$\xrightarrow{\quad}$	F,1,0,F,
5ème	$\xrightarrow{\quad}$	FF,0,1,

NB : La flèche du j° passage représente le sens de lecture des éléments pour le passage suivant.

P 2	P 2	P 2
D	D	D
0 2 4 5 7 9	1 3 4 5 6	2 2 3 4 5 6
2 1 3	2 2	0 1
	0	
		0 1
0	0	2 2
2 3	2	3
4 5 7 8	4	4
6 7 9	5	5
	6	6
D	D	D
P 1	P 1	P 1

Evolution des 2 piles au cours du 1er passage

2ème passage

3ème passage

P 2	P 2
D	D
0 1	0 1
1	1
D	D
P 1	P 1

4ème passage

5ème passage

L'organigramme est le suivant :

u_i est l'élément susceptible d'entrer dans P1

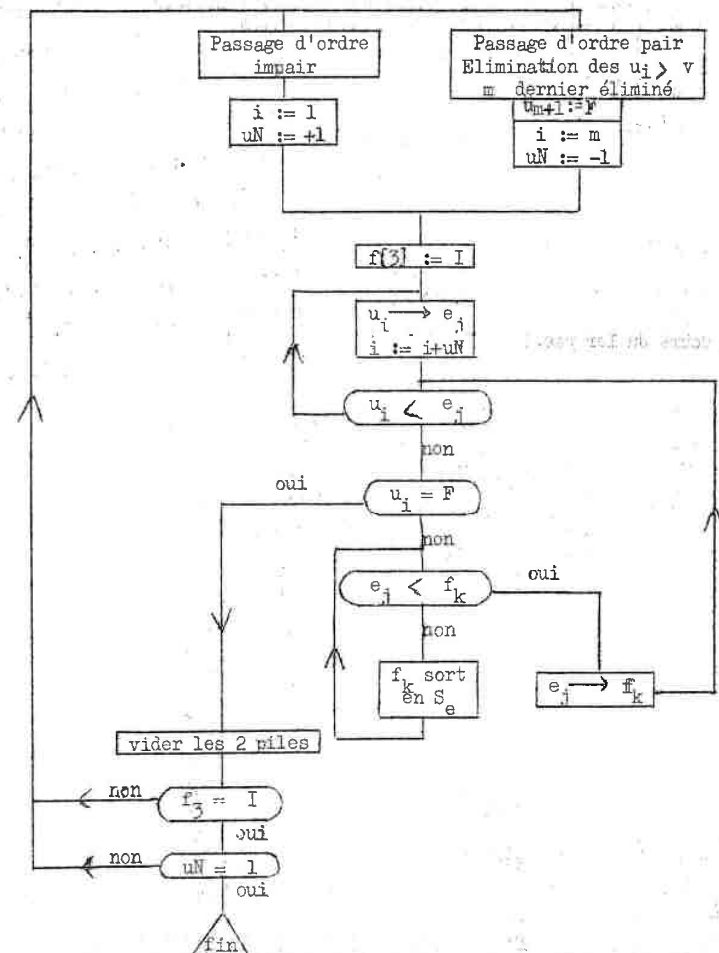
e_j est le sommet de P1

f_k est le sommet de P2

$u_i \rightarrow e_j$ veut dire : u_i vient au sommet de P1, la hauteur de P1 augmente d'une unité

$e_j \rightarrow f_k$ veut dire : e_j vient en f_k , la hauteur de P1 diminue d'une unité, celle de P2 augmente d'une unité

" f_k sort en S_e " f_k est transféré en S_e et la hauteur de P2 diminue d'une unité



c) Le programme n° 5-ter et qui occupe 223

mémoires :

J'ai encore utilisé les deux piles P1 et P2. Le sens de lecture est inversé à chaque passage, et les u_i sont éliminés à chaque passage également. Pour obtenir ce résultat, j'ai été obligé de déplacer à chaque passage, soit le symbole F supérieur (à la fin des passages impairs), soit le symbole F inférieur (à la fin de chaque passage pair).

Nous voyons alors qu'il n'est plus possible de transférer les u_i définitivement triés dans la zone qui initialement contenait SI, car nous obtiendrions plusieurs suites rangées en ordre croissant ou décroissant, et séparées les unes des autres par le symbole F. Nous avons choisi de transférer ces éléments dans la zone occupée par la première pile, l'origine de cette pile étant alors décalée à chaque passage.

Reprenons l'exemple donné en b) :

SI : $\rightarrow$ F,6,4,2,0,5,7,2,9,1,8,3,F

Etat de SI à l'issue du 1er passage : $\leftarrow$ F,0,2,4,5,2,6,1,3,F,8,9

2ème : $\rightarrow$ F,6,5,4,F,2,2,0,1F

3ème : $\rightarrow$ F,0,1,2,2,F

P 2	P 2	P 2
D 2	D 2	D 2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
2 1 3	2 2	3
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
v	v	v
	0	0
	2	2
	2	2
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7
	8	8
	9	9
	F1	P1

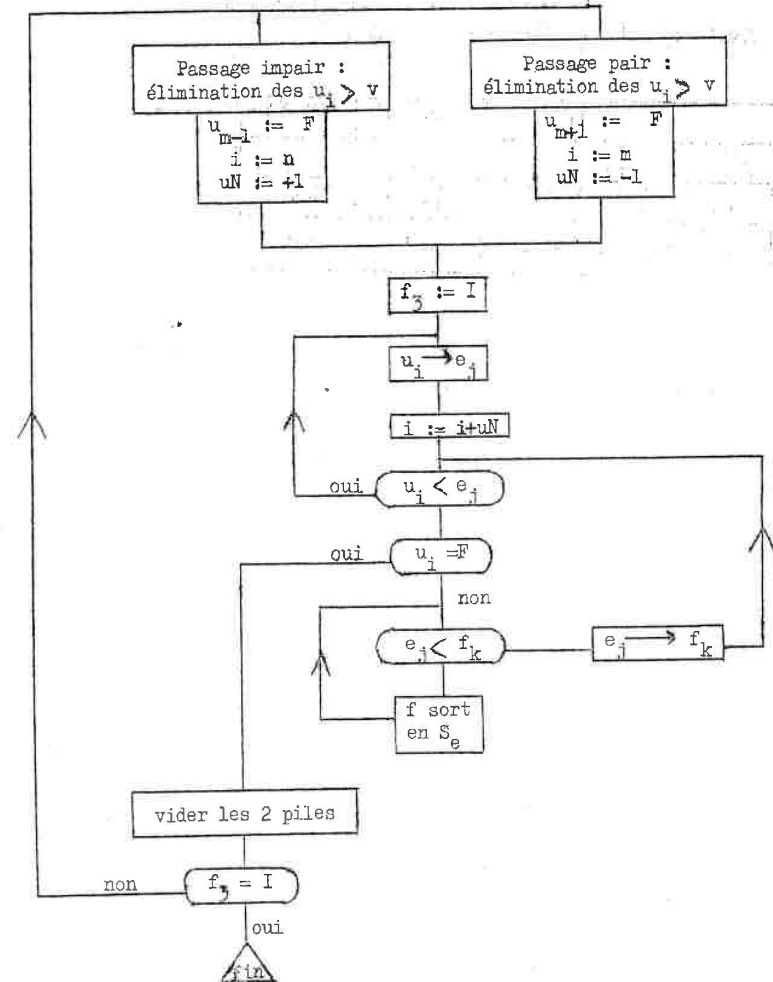
Evolution des piles 1ère passage 2ème passage 3ème passage

L'organigramme est le suivant :

n = indice du dernier élément éliminé au cours d'un passage impair

m = indice du dernier élément éliminé au cours du passage pair

Les autres notations sont les mêmes que dans l'organigramme précédent.



Résultats expérimentaux :

Avec SI 1, j'ai obtenu :

	256 Nb	512 Nb
Programme n° 5	65'	
Programme n° 5-bis	20' 45''	79'
Programme n° 5-ter	20'	75'

CHAPITRE VII COMPARAISON DES METHODES

La comparaison peut porter par exemple :

- sur le nombre total de tests
- sur le nombre total de transferts
- sur le nombre de mémoires auxiliaires nécessaires
- sur la complexité des calculs d'indice

La suite SI étant donnée, il s'agit de déterminer la méthode qui nous donnera la suite SR dans le minimum de temps et en tenant compte, évidemment, du nombre n d'éléments à trier et des particularités éventuelles de SI.

Nous pourrions penser qu'il suffit de choisir la méthode qui nous a donné les meilleurs résultats expérimentaux. En fait, il n'en est rien. En effet, le temps $\mathcal{E}(n)$ nécessaire pour trier les n éléments dépend d'une part du nombre total $C(n)$ de tests à effectuer sur les éléments a_1 , et du nombre total $t(n)$ de transferts.

$$\text{Nous avons : } \mathcal{E}(n) = a C(n) + b t(n)$$

a et b étant des constantes, fonction du calculateur. La connaissance de $C(n)$ et $t(n)$ est donc du plus grand intérêt.

D'autre part, il nous faut tenir compte du nombre n d'éléments à trier. En effet, soit N le nombre de mémoires disponibles dans le calculateur, et soit N_1 le nombre de mémoires nécessaire à l'utilisation d'une méthode donnée pour trier les n nombres.

Supposons que, dans une première analyse, ce soit la méthode que nous appellerons (1) qui est la plus rapide. Et que, d'autre part, cette méthode nécessite N_1 mémoires, mais que N_1 soit supérieur à N . Pour trier SI totalement, il nous faudra alors avoir recours à des organes annexes de stockage, ce qui risque d'augmenter considérablement le temps de tri. Il sera alors peut être possible de trouver une méthode (2) à priori moins rapide que la méthode (1) mais nécessitant un nombre N_2 de mémoires tel que $N_2 \leq N$ et il est possible que dans ces conditions, le temps de tri total obtenu soit inférieur à celui de la méthode (1).

Avantages et inconvénients de chaque méthode

1°) Méthode de Bubble

La méthode est simple et n'utilise pas de mémoires auxiliaires de travail,

Malheureusement, elle est très lente, par suite du nombre élevé de tests à effectuer pour trier SI. La rapidité est très améliorée lorsque SI est arrangée, mais l'influence de l'élément a_j , dont nous avons parlé au cours de l'exposé sur la méthode, ne permet pas à cette amélioration d'être vraiment importante. La méthode d'insertion est supérieure à cette méthode, quelle que soit la suite initiale SI.

2°) Méthode de Shell

Cette méthode est relativement rapide et n'utilise aucune mémoire de travail. De plus, ces performances sont très nettement améliorées lorsque la suite SI est déjà plus ou moins triée. La méthode d'inter-classement et la méthode de Thomas N Hibbard sont plus rapides, mais font usage de mémoires auxiliaires. Si le nombre N de mémoires disponibles sur le calculateur est tel qu'il permet de trier les n éléments de SI par la méthode de Shell sans avoir à faire appel aux organes annexes de stockage, alors que les deux autres méthodes y auraient recours, la méthode de Shell peut devenir très intéressante.

3°) Méthode déduite de celle de Von Neumann

Je ne la cite que pour mémoire, car elle présente peu d'intérêt.

4°) Méthode de sélection linéaire

Elle est très simple, et n'utilise pas de mémoires auxiliaires. Néanmoins, elle est tellement lente, que son emploi ne présente aucun intérêt.

5°) Méthode de Hibbard

Dans le cas d'une suite d'éléments répartis au hasard, c'est une des meilleures méthodes disponibles actuellement, en dépit de ses deux défauts : d'une part elle utilise $\log_2 n$ mémoires auxiliaires de travail, d'autre part, et cela est plus grave, elle est sensible à la distribution des éléments dans la suite SI. Ainsi, pour une suite SI totalement rangée initialement, le temps de tri est considérablement augmenté, à tel point que la méthode perd tout intérêt.

6°) Méthode d'insertion

Si la suite SI est déjà plus ou moins rangée, cette méthode est vraiment rapide. D'autre part, elle n'utilise aucune mémoire auxiliaire de travail, de sorte que chaque fois qu'on aura des raisons de penser que la suite est un peu rangée, cette méthode sera intéressante.

7°) Méthode d'insertion dichotomique

Tous les résultats que nous venons d'énoncer à propos de la méthode d'insertion ordinaire sont valables dans le cas présent. Le nombre de tests théoriques est inférieur à ceux de la méthode précédente, et elle devrait donc à priori être meilleure. En fait, ce n'est pas certain, car les calculs d'indices sont longs et compliqués, car ils font intervenir l'opérateur

$$\left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor$$

8°) Méthode d'inter-classement de Von Neumann

Elle est au moins aussi rapide que la méthode de Monsieur Hibbard, et, de plus, contrairement à celle-ci, ses performances sont améliorées lorsque la suite SI est déjà un peu arrangée. Toutefois, elle présente l'inconvénient de nécessiter n mémoires auxiliaires pour trier n nombres, de sorte que, pour n suffisamment grand, il faudra avoir recours aux organes annexes de stockage, et cela ralentit beaucoup le processus de tri.

9°) Méthode utilisant une pile simple, dans laquelle l'ordre de sortie est l'ordre de tri

Cette méthode est lente et utilise n mémoires auxiliaires. Le temps de tri diminue très peu lorsque la suite est plus ou moins arrangée, de sorte que l'utilisation de cette méthode est à déconseiller.

10°) Méthode utilisant une pile simple dans laquelle l'ordre d'entrée est l'ordre de tri

Elle est beaucoup plus intéressante que la précédente, bien qu'elle utilise également n mémoires auxiliaires. En effet, ses résultats sont bien meilleurs lorsque la suite SI est déjà un peu arrangée. De plus, elle permet d'obtenir de nombreuses sous-suites ordonnées, et les résultats pourront être très bons en combinant cette méthode avec une méthode d'inter-classement telle que celle exposée au chapitre IV § III.

Néanmoins le nombre important de mémoires occupées par le programme correspondant (c'est le programme le plus volumineux de tous ceux qui ont été essayés), est un obstacle à une telle conception de l'usage de cette méthode, car le nombre de mémoires utilisables se trouve très réduit.

Tous ces résultats se trouvent résumés dans le tableau ci-joint,

En conclusion, nous pouvons dire que la méthode d'inter classement de Von Neumann sera intéressante chaque fois que le nombre de mémoires disponibles sera suffisant. Si ce n'est pas le cas, nous pourrions alors envisager l'utilisation de la méthode de T. N. Hibbard, ou, à la rigueur, celle de Shell. Finalement, lorsque nous aurons de sérieuses raisons de penser que la suite initiale est plus ou moins triée, nous pourrions avoir recours à la méthode d'insertion.

Programme n° 1 : Méthode de Bubble

```

BUBLE  TDI  RUBSO
        AAD  CTES2
        TRD  BTES2  BB1
BB1     EDI  BTEST
        TDI  BAI
        EDI  CORD1
        TDI  BORD1
        EDI  CORD2
        TDI  BORD2
        EDI  CORD3
        TDI  BORD3
        EDI  CORD4
        TDI  BORD4  BORD1
        TAI1  TDI  PAI1  BORD2
        BTES1  ANG  BCOMU
        TDI  BAI  BORD4
        BSUI4  EDI  PAI1  BORD3
        BCOMU  RAD  BORD2
        AAD  1COL5
        TRD  BORD2
        EDI  BORD3
        SBF  BORD3
        RAD  BORD1
        AAD  1COL5
        TRD  BORD1
        EDI  BORD4
        SBF  BORD4
        SAD  BTES2
        ANG  BORD1
        RAD  BAI
        SAD  BTEST
        ANN  RUBSO
        RAD  BTES2
        SAD  1COL5
        TRD  BTES2  BB1
        CTES2  RAD  A0001  TAI1
        1COL5  00  0001  000
        CORD4  TDI  A0002  BSUI4
        CORD3  TDI  A0001  BCOMU
        CORD2  SAD  A0001  BTES1
        BTEST  99  9999  9999
        CORD1  RAD  A0002  TAI1

```

Programme n° 2 : Méthode de Shell

```

SHELL TDI SHLSO
      TRD MEM
      TDI MEN SHEL1
SHEL1 RAD MEM
      DRR 2COL5
      DAG 0004
      TRD MEM
      ANN SHLSO
      RSD 8002
      AAD MEN
      TRD MEK
      EDI 1COL5
      TDI MEJ IJ
IJ RAD MEJ
      AAD AO
      EDI CSAI
      SBF SAI
      EDI CTAI
      SBF TAI
      AAD MEM
      EDI CRAIN
      SBF RAIM
      EDI CTAIM
      SBF TAIM RAIM
TRANS TDI AIM SAI
TEST ANG TAIM JPLU1
SUI1 EDI AIM TAI
SUI2 RAD SAI
      SAD MEM
      SAD CSAI
      ANG JPLU1
      AAD CSAI
      TRD SAI
      EDI TAI
      SBF TAI
      AAD MEM
      EDI RAIM
      SBF RAIM
      EDI TAIM
      SBF TAIM RAIM
CTAIM TDI 0000 SUI1
CTAI TDI 0000 SUI2
AO 00 A0000
1COL5 00 0001 000
2COL5 00 0002 000
CSAI SAD A0001 TEST
CRAIN RAD A0001 TRANS
JPLU1 RAD MEJ
      AAD 1COL5
      TRD MEJ
      RSD 8002
      AAD MEK
      ANG SHEL1 IJ

```

Programme n° 3 : Méthode d'insertion

```

INSERT TDI ISORT
      TRG NINSR
      AAG IC1
      TDI ORD1
      SAG UN
      TRG TEST1 B1
B1 RAD ORD1
      EDI IC2
      SBF ORD2
      AAD UN
      TRD ORD1
      EDI IC3
      SBF ORD3
      RAD TEST1
      SAD ORD1
      ANG ISORT ORD1
      TDI AI ORD2
      ANG ORD3
      RAD IC4
      EDI ORD3
      SBI ORD4
      EDI AI ORD4
TEST3 RAD ORD2
      SAD J2
      ANG OUI
      RAD ORD2
      EDI ORD3
      SBF ORD3
      SAD UN
      TRD ORD2
      RAD AI ORD2
      EDI AI
      TDI A0001 B1
      J2 SAD A0002 IIS2
      UN 00 0001 000
      IC1 RAD A0001 IIS1
      IC2 SAD 0000 IIS2
      IC3 TDI 0000 TEST3
      IC4 00 0000 B1

```

Programme n° 4 : Première méthode des piles : ordre de tri = ordre de sortie de la pile.

```

P1      TDI P1SOR
      TRG CNK
      AAG CSTF
      TRG TRANF
      RAD C8
      TDI ORD8
      AAD CNK
      TRD C18
      EDI C9
      TDI ORD9 INIT
INIT     RAD C18
      SAD ORD8
      ANG DEBUT ORD8
18      AAD 8 ORD9
19      RAD ORD8
      AAD UN
      TRD ORD8
      EDI ORD9
      SBF ORD9 INIT
DEBUT    EDI F TRANF
IF        EDI D
      TDI U0001
      RAD CNK
      AAD C7
      TRD ORD7
      EDI C1
      TDI ORD1
      EDI C2
      TDI ORD2
      EDI C3
      TDI ORD3
      EDI ED
      TDI NENT
      EDI U0001
      TDI UI B1
      EDI ORD3 ORD2
12      RAD UI
      AAD 10 ORD3
B2      RAD ORD3
      AAD UN
      TRD ORD3
      EDI C5
      SBF ORD5 ORD5
15      SDO HUIT ENTRE
HUIT     TDI UI NENT
SUIT     EDI C4
      SBF ORD4 8001
  
```

```

14      AAD 10
      AAD UI
      ANG B2
      RAD ORD2
      AAD UN
      TRD ORD2
      EDI NENT
      SBF NENT B1
ENTRE    SAD F
      ANN P2
      RAD NENT
      SAD ED
      ANN P1SOR
      RAD C10
      EDI NENT
      SBI ORD11 8001
110      EDI C11
      SBF ORD11 8001
SUIT1    TDI P0001
      PFO P0001 SUIT2
SUIT2    RAD ORD7
      SAD UN
      TRD ORD7
      RAD ORD2
      SAD UN
      TRD ORD2
      EDI NENT
      SBF NENT
      RAD ORD11
      AAD UN
      EDI ORD3
      SBF ORD3
      EDI ORD5
      SRF ORD5 8001
C2      TDI E0001 12
C3      TRD U0001 B2
C4      RSD 0000 14
C5      RAD 0000 15
C7      TDI E0003 SUIT1
C8      RAD U0002 18
C9      TRD U0002 19
C10      0 110
C11      EDI 0000 ORD7
D        88 9999 9999
F        99 9999 9999
CSTF     TDI U0002 IF
ED        RAD E0001 SUIT
8         80 00
UN        00 0001 000
10        10 00
  
```

Programme n° 5 : Tri par pile : l'ordre d'entrée est l'ordre de tri.

P2	TDI	P2SOR	
	TRG	CNK	
	AAG	CSTF	
	TRG	TRANF	
	TRD	P0001	
	EDI	F	TRANF
IF	EDI	D	
	TDI	U0001	DEB
DEB	EDI	C1	
	TDI	ORD1	
	EDI	F	
	TDI	E0003	
	EDI	C2	
	TDI	ORD2	
	EDI	C5	
	TDI	ORD5	
	EDI	C4	
	TDI	ORD4	ORD1
I2	RAD	ORD1	
	AAD	UN	
	TRD	ORD1	
	EDI	C3	
	SBF	ORD3	ORD3
I3	TDI	UI	ORD4
I4	TDI	EJ	
	ANG		NON1
	RAD	ORD2	
	AAD	UN	
	TRD	ORD2	
	EDI	ORD4	
	SBF	ORD4	ORD1
NON1	RAD	UI	
	SAD	F	
	ANN		NON2
	EDI	EJ	ORD5
I5	RAD	ORD2	
	SAD	UN	
	TRD	ORD2	
	EDI	ORD4	
	SBF	ORD4	
	RAD	ORD5	
	AAD	UN	
	TRD	ORD5	ORD3
NON2	RAD	C6	
	EDI	ORD4	
	SBI	ORD6	
	RAD	C7	
	EDI	ORD5	
	SBI	ORD7	B1

B1	EDI	EJ	ORD7
I7	RAD	ORD6	
	SAD	UN	
	TRD	ORD6	
	RAD	E0001	ORD6
I6	TDI	EJ	
	ANN		NON3
	RAD	ORD7	
	AAD	UN	
	TRD	ORD7	B1
NON3	RAD	E0003	
	SAD	F	
	ANN	DEB2	P2SOR
C1	EDI	U0001	ORD2
C2	TDI	E0001	I2
C3	RAD	0000	I3
C4	SAD	E0001	I4
C5	TDI	S0001	I5
C6	O		I6
C7	O		I7
E2	TDI	E0002	I2
D	89	9999	9999
F	99	9999	9999
CSTF	TDI	U0002	IF
UN	00	0001	000
IS	ART	1111	1111
N			7
SO			1

Programme n° 5 bis : Méthode de tri par pile : l'ordre de tri est l'ordre d'entrée dans la pile,

```

P29      TD1 P2SOR
          TRG CNK
          AAG CTD2
          TRG TD2
          RAD CNK
          AAD CELIM
          TRD ELIME
          AAD 1COL5
          EDI CRANG
          SBF RANGE
          EDI CSTF
          SBF TRANF
          RAD CNK
          AAD CNEUF
          TRD NEUF
          EDI CTRAF
          SBF TRAF3
          EDI CTEST
          SBF TEST8
          EDI D1
          TD1 E0001
          EDI D2      TD2
          EDI F        TRANF
ALORS
IF        TD1 U0001
          EDI 8COL1
          TD1 TEST    B4
          EDI TEST
          SD1 HUIT    NEUF
HUIT      EDI 1COL5
          TD1 UN
          EDI C1
          TD1 ORD1
          EDI 9COL1
          TD1 TEST
          EDI U0002    COMUN
DANN      ANG RANGE    NON
SUIT      TD1 P0001
          PFO P0001
          RAD ELIME
          EDI RANGE
          SBF RANGE
          SAD 1COL5
          TRD ELIME    NEUF
NON       RAD SUI
          EDI RANGE
          SBI TRFER
          EDI F        TRFER
ENSUI     EDI 8COL1
          TD1 TEST
          RSD 1COL5
          TRD UN
          RAD ELIME
          EDI C1
          SBF ORD1
          EDI CINIT
          SBF T        8001

```

```

COMUN    TD1 UI
          RAD ORD1
          EDI C4
          SBF ORD4
          EDI F      TRAF3
SUI3      EDI C2
          TD1 ORD2
          EDI C3
          TD1 ORD3
          RAD C7
          AAD CNK
          TRD ORD7    B1
B1         EDI UI      ORD2
PROG1     RAD ORD1
          AAD UN
          TRD ORD1    8002
TUI       TD1 UI      ORD3
TEST3     ANG TEST4
          RAD ORD2
          AAD 1COL5
          TRD ORD2
          EDI ORD3
          SBF ORD3    B1
TEST4     TD1 EJ
          RAD UI
          SAD F
          ANN B5      NON4
B5         RAD EJ      ORD7
TEST5     ANG ORD4
          RAD ORD7
          SAD 1COL5
          TRD ORD7
          EDI CTEJ
          SBF TEJ
          EDI EJ      TEJ
SUIT9     RAD ORD2
          SAD 1COL5
          TRD ORD2
          EDI ORD3    BCLE
BCLE      SBF ORD3    ORD1
SUIT4     RAD ORD7
          AAD 1COL5
          TRD ORD7
          RAD ORD4
          AAD UN
          TRD ORD4    B5
NON4      RAD ORD3
          EDI C5
          SBF ORD5
          RAD ORD7
          EDI C8
          SBF ORD8
          RAD ORD4
          EDI C6
          SBF ORD6    ORD5

```

```

SUITS  TDI  EJ      ORD8
TEST6  ANG      TEST7
      RAD  ORD8
      SAD  1COL5
      TRD  ORD8
      EDI  CTEJP
      SBF  TEJP
      EDI  EJ      TEJP
IFP     RAD  ORD5
      SAD  1COL5
      TRD  ORD5      8002
TEST7   TDI  FK
      RAD  8001
      SAD  D2
      ANN      TEST8
      EDI  FK      ORD6
IF6     RAD  ORD8
      AAD  1COL5
      TRD  ORD8
      RAD  ORD6
      AAD  UN
      TRD  ORD6      ORD5
ENFIN   SAD  F
      ANN  B4
      RAD  UN
      ANG  B4      P2SOR
CTEJ    TDI  E0002  SUIT9
C7      SAD  E0002  TEST5
C2      TDI  E0002  PROGI
C3      AAD  E0002  TEST3
C4      TDI  0000   SUIT4
CINIT   EDI  0000   COMUN
9COL1   00      9
SUI     00      0000  ENSUI
C1      RSD  U0002  TUI
1COL5   00      0001  000
8COL1   00      0      8
F        99      9999  9999
P2SOR   ART  1234   1234
CNK      00      0016  000
D1       89      9999  9999
CSTF    TDI  U0002  IF
CELM    SAD  U0001  DANN
CNEUF   RAD  E0000  ELIME
CRANG   TDI  U0002  SUIT
CTD2    TDI  E0002  ALORS
CTRAF   TDI  E0000  SUIT3
CTEST   RAD  E0000  ENFIN
C6      TDI  0000   IF6
D2       88      9999  9999
CTEJP    TDI  0000   IFP
C8      SAD  0000   TEST6
C5      RAD  0000   SUITS

```

Programme n° 5 ter : Méthode de tri par piles : l'ordre de tri est
l'ordre d'entrée dans la pile
Nombre de mémoires occupées : 226.

```

P29HI  TDI  P2SOR
      TRG  CNK
      AAG  CTD2
      TRG  TD2
      RAD  CSTF
      AAD  CNK
      TRD  UOM
      AAD  1COL5
      TRD  TRNF
      EDI  CUON
      TDI  UON
      RAD  CNK
      AAD  CSF3
      TRD  SF3
      EDI  CFIN9
      SBF  FIN9
      EDI  CTRAF
      SBF  TRAF3
      EDI  CTRF
      SBF  TRF3
      EDI  CRANG
      TDI  RANGE
      EDI  D2      TD2
ALORS   EDI  F      TRNF
IF      TDI  U0001  TRF3
INIT8   EDI  D2
      TDI  TEST      B4
F        99      9999  9999
D2       88      9999  9999
CRANG    TDI  E0001  TPFO
CUON     00      U0002  000
CFIN9    RAD  0000   SUIT9
CTRAF    TDI  0000   SUIT2
CTRF     TDI  0000   INIT8
CSF3     RAD  E0003  ELIME
CSTF     TDI  U0001  IF
1COL5    00      0001  000
CELM     SAD  0000   TEST2
CTD2     TDI  E0005  ALORS
P2SOR    ART  1234   1234
CNK      00      0256  000
B4       EDI  TEST
      SDO  HUIT      NEUF
HUIT     RAD  UON
      EDI  CELIM
      SBF  ELIME
      EDI  1COL5
      TDI  UN
      RAD  CUONP
      EDI  CORD
      SBF  ORD
      EDI  F
      TDI  TEST      SF3

```

```

RAD UOM
EDI CELIM
SBF ELIME
RSD 1COL5
TRD UN
RAD CUOMP
EDI CORD
SBF ORD
EDI D2
TDI TEST SF3
TEST2 ANG RANGE NON2
TPFO TDI 1977
PFO 1977
RAD RANGE
AAD 1COL5
TRD RANGE
RAD ELIME
AAD UN
TRD ELIME SF3
NON2 TDI UI
RAD ELIME
SAD UN
EDI CTFER
SBF TRFER
EDI F TRFER
REINI RAD ELIME ORD
SUIT1 EDI CORD1
SBF ORD1
EDI CORD4
SBF ORD4
RAD RANGE
EDI CORD2
SBF ORD2
EDI CORD3
SBF ORD3
CORD3 AAD 0000 TEST4
CORD2 TDI 0000 PROGI
CORD1 RSD 0000 TUI
CORD TDI 0000 SUIT1
CUOMP 00 UOM 0
CUONP 00 UON 0
CTFER TDI 0000 REINI
EDI CTD1
SBF TD1
RAD CNK
AAD CORD7
TRD ORD7
EDI F TRAF3
SUIT2 EDI D1 TD1
B1 RAD ORD2
AAD 1COL5
TRD ORD2
EDI ORD3
SBF ORD3
EDI UI ORD2
PROGI RAD ORD1

```

```

AAD UN
TRD ORD1 8002
TUI TDI UI ORD3
TEST4 ANG B1
TDI EJ
RAD UI
SAD F
ANN B5 NON5
B5 RAD EJ ORD7
TEST7 ANG ORD4
RAD ORD7
SAD 1COL5
TRD ORD7
EDI CTEJ
SBF TEJ
EDI EJ TEJ
SUIT3 RAD ORD2
SAD 1COL5
TRD ORD2
EDI ORD3
SBF ORD3 ORD1
SUIT4 RAD ORD7
AAD 1COL5
TRD ORD7
CORD4 TDI 0000 SUIT4
CTEJ TDI 0000 SUIT3
D1 89 9999 9999
CTD1 TDI 0000 B1
CORD7 SAD E0005 TEST7
RAD ORD4
AAD UN
TRD ORD4 B5
NON5 RAD ORD3
EDI CORD5
SBF ORD5
RAD ORD7
EDI CORD8
SBF ORD8
EDI CTEJP
SBF TEJP
RAD ORD4
EDI CORD6
SBF ORD6 ORD5

```

```

SUIT5  TDI  EJ      ORD8
TEST6  ANG      TFK
      RAD  ORD5
      SAD  1COL5
      TRD  ORD5
      RAD  TEJP
      SAD  1COL5
      EDI  EJ      8002
TFK    TDI  FK
      RAD  8001
      SAD  D2
      ANN      FIN9
      RAD  ORD8
      AAD  1COL5
      TRD  ORD8
      EDI  TEJP
      SBF  TEJP
      EDI  FK      ORD6
SUIT6  RAD  ORD6
      AAD  UN
      TRD  ORD6  ORD5
SUIT9  SAD  F
      ANN  B4
      EDI  TEST
      SDO  HUITP  NEUFP
HUITP  RAD  UON
      EDI  CFIN
      SBF  FIN
      EDI  1COL5
      TDI  UN      COMUN
NEUFP  RAD  UOM
      EDI  CFIN
      SBF  FIN
      RSD  1COL5
      TRD  UN      COMUN
CTUJ   TDI  0000  TES11
CORD6  TDI  0000  SUIT6
CORD8  SAD  0000  TEST6
CORD5  RAD  0000  SUIT5
COMUN  RAD  RANGE
      EDI  CTUJ
      SBF  TUJ      FIN
TES11  SAD  F
      ANN      P2S0R
      RAD  TUJ
      AAD  1COL5
      TRD  TUJ
      RAD  FIN
      AAD  UN
      TRD  FIN      8002
CTEJP  TDI  0000  ORD6
CFIN   RAD  0000  TUJ

```

Programme n° 6 : Méthode issue de celle de Von Neumann

```

DEBUT  EDI  C3
      TDI  ODRE3
      EDI  C4
      TDI  ODRE4  ODRE3
IS3     TDI  T2      ODRE4
IS4     TDI  T1
      ANG  OUI
      ANN      OUI
      RAD  ODRE3
      EDI  C5
      SBF  ODRE5
      AAD  CST1
      EDI  C6
      SBF  ODRE6
      EDI  T1      ODRE5
IS5     EDI  T2      ODRE6
OUI     RAD  ODRE3
      AAD  C2
      TRD  ODRE3
      RAD  ODRE4
      AAD  C2
      TRD  ODRE4
      RSD  8001
      AAD  CJ
      ANG  DEB      ODRE3
C2      00      0002      000
C3      RAD  A0001  IS3
C4      SAD  A0002  IS4
C5      TDI  0000  IS5
C6      TDI  0000  OUI
CJ      SAD  A1024  IS4
DEB     RAG  C2
      TDI  2K1
      MUL  CST2
      TRD  2K2      B1
B1      RAD  CAO
      AAD  2K1
      EDI  CST3
      SBF  ORD3
      AAD  CST1
      EDI  CST4
      SBF  ORD4      ORD3
AIS4    ANG  OUI1
      ANN  OUI2      OUI1
OUI1    RAD  CNJ
      SAD  2K1
      SAD  ORD4
      ANG  OUI3
      RAD  ORD3
      AAD  2K2
      TRD  ORD3
      RAD  ORD4
      AAD  2K2
      TRD  ORD4      ORD3

```

OUI3 RAG 2K2
SAG CNK
GNN PFO
RAG 2K1
MUL CST2
TRD 2K1
RAG 2K2
MUL CST2
OUI2 TTD 2K2 B1
TDI T
RAG 8004
EDI CST5
SBF ORD5
AAD CST1
EDI CST6
SBF ORD6 B2
B2 RAD ORD5
SAD CST1
TRD ORD5
RAD ORD6
SAD CST1
TRD ORD6 ORD5
A IS6 RAD 8001
SAD T
ANG OUI4
ANN A IS7
RAD ORD4
SAD 2K1
EDI ORD5
SBF T1
RSG 8001
AAG ORD5
GNN B2
RAD ORD5
EDI CST7
SBF ORD7
EDI T ORD7
OUI4 RAD CST7
EDI ORD6
SBI ORD8
EDI T ORD8
A IS7 RAD ORD4
EDI CST9
SBF ORD9
EDI CST10
SBF T1 8001
A IS10 TDI T B3
B3 RAD ORD9
AAD CST1
TRD ORD9 ORD9

A IS9 TDI T2
SAD T
ANG NON6
RAD ORD9
SAD CST1
EDI CST11
SBF ORD11
EDI T2 ORD11
A IS11 RAD ORD3
AAD 2K1
EQI ORD9
SBF T2
RAG 8001
SAG ORD9
GNN B3 COMUN
COMUN AAD ORD9
EDI CST12
SBF ORD12
EDI T ORD12
NON6 RSD CST1 COMUN
CST1 00 0001 00
CST2 00 2
CST3 RAD 0000 ORD4
CST4 SAD 0000 A IS4
CST5 EDI 0000 ORD6
CST6 TDI 0000 A IS6
CST7 TDI 0000 A IS7
CST9 RAD 0000 A IS9
CST10 EDI 0000 A IS10
CST11 TDI 0000 A IS11
CST12 TDI 0000 ORD3
CAO 00 A0000
CNJ SAD A1024 A IS4
CNK 00 A1024 000

Programme n° 7 - Sélection ordinaire

```

SELEC  TDI  SSORT
        TRG  NSELE
        SAG  UN
        AAG  SC2
        TDI  SORD2
        TRG  SCNJ
        SAG  SC2
        SAG  UN
        AAG  SC1
        TRG  SCNI
        EDI  SC4
        TDI  SORD4  SB1
SB1      RAD  SORD2
        EDI  SC1
        SBF  SORD1  SORD2
SI2      TDI  AJ      SB2
SB2      RAG  SORD1
        AAG  UN
        TRG  SORD1
        RAD  AJ      SORD1
SI1      ANG  TEST2
        TDI  AI
        RAD  SORD1
        EDI  SC3
        SBF  SORD3
        EDI  AJ      SORD3
SI3      EDI  AI
        TDI  AJ      TEST2
TEST2    RAG  SCNI
        SAG  SORD1
        ANG  SB2
        EDI  AJ      SORD4
SI4      RAD  SCNJ
        SAD  SORD2
        ANG  SSORT
        RAD  SORD2
        AAD  UN
        TRD  SORD2
        EDI  SORD4
        SBF  SORD4  SB1
SC1      SAD  A0001  SI1
SC2      EDI  A0001  SI2
SC3      TDI  A0001  SI3
SC4      TDI  A0001  SI4
UN        OO  0001  000
AO        OO  A0001  A0001

```

Programme n° 8 - Tri par la méthode de Hibbard

```

HINAR  TDI  HIRSO
        TRD  H
        EDI  UNS
        TDI  E
        TDI  K      B3
BH      RAD  E
        SAD  H
        ANG
        RAD  E      MODIK
        AAD  CTRAD  8002
TRAD    TDI  D
        SAD  CTRAD
        EDI  AFECI
        SBF  AFECI
        EDI  TESA I
        SBF  TESA I
        RAD  H
        EDI  AFECJ
        SBF  AFECJ
        EDI  TESA J
        SBF  TESA J  BE
BE      RSD  D      TESA J
TEST    ANG  AFECI  REGRJ
REGRJ   RAD  TESA J
        SAD  UNS
        TRD  TESA J
        EDI  AFECJ
        SBF  AFECJ  IEGJ
IEGJ     RAD  CREGR
        EDI  AFECI
        SBI  QCO
        RAG  8001
        SAG  AFECJ
        GNN  PE      BD
CREGR    OO  0000  REGRJ
TESAJ    AAD  0000  TEST
AFECJ    TDI  0000  REGRJ
TESAJ    SAD  0000  TESTP
AFECI    TDI  0000  PROG I
CTRAD    EDI  A0000  TRAD
UNS      OO  0001  000
PROGI    RAD  TESA I
        AAD  UNS
        TRD  TESA I
        EDI  AFECI
        SBF  AFECI  JEGI
JEGI     RAD  CREGR
        EDI  AFECI
        SBI  QCO
        RAG  8001
        SAG  AFECJ
        GNN  BF      BD

```

```

BF      RAD D      TESA I
TESTP   ANG AFECJ PROG I
BO      RAD TESA I
        EDI CAID
        SBF CAID
        EDI D      CAID
SUI      EDI N
        SBF I
        RAD 8001
        AAD 8001
        SAD E
        SAD H
        ANG OUI
        RAD K
        AAD CFKNO
        TRD FKNON
        SAD CFKNO
        AAD CGKNO
        TRD GKNON
        EDI E      FKNON
SUIN     RAD I
        SAD UN5    GKNON
SUINP    AAD DEUX5
        TRD E      COMUN
COMUN     RAD K
        AAD UN5
        TRD K      BB
DEUX5    OO 0002 000
CGKNO    TRD G0000 SUINP
CFKNO    TDI F0000 SUIN
CAID     TDI 0000 SUI
OUI      RAD K
        AAD CFKOU
        TRD FKOU I
        SAD CFKOU
        AAD CGKOU
        TRD GKOU I
        RAD I
        AAD UN5    FKOU I
        EDI H      GKOU I
SUIO     SAD DEUX5
SUIOP    TRD H      COMUN
MODIK    RAD K
        SAD UN5
        TRD K
        ANG HIBSO
        ANN      HIBSO
        AAD CFK 8002
TDIE     TDI E
        SAD CFK
        AAD CGK 8002
TDIH     TDI H      BB
CGK      EDI G0000 TDIH
CFK      EDI F0000 TDIE
CGKOU    TDI G0000 SUIOP
CFKOU    TRD F0000 SUIO

```

Programme n° 9 - Interclassement par la méthode de Von Neumann

```

NEUMA    TDI NEUSO
        TRD N
        AAD CA1
        TDI A1
        TRD AN1
        EDI UN5
        TDI K
        EDI DEUX5
        TOI 2K      INIT
INIT      RAD AN1
        AAD CH1
        TRD H1
        AAD N
        SAD DEUX5
        TRD HN
        EDI A1
        TDI A1J      BCLE
BCLE      RAD A1J
        AAD CF1
        TRD F1
        AAD K
        EDI CG1
        SBF G1
        SAD UN5
        TRD F1V
        AAD K
        EDI CG1
        SBF G1V      F
F          RAD F1V
        SAD F1
        ANG FVGF      FF
FF         RAD G1V
        SAD G1
        ANG FFGV
        RAD 8001
        EDI CSADA
        SBF SADAG
        RAD F1
        EDI CRADA
        SBF RADAF 8001
TEST      ANG      G1
        RAD H1
        EDI CH1P
        SBF H1P
        AAD UN5
        TRD H1      F1

```

SUI1P RAD F1
 AAD UN5
 TRD F1 F
 SUI1 RAD G1
 AAD UN5
 TRD G1
 RAD H1
 AAD UN5
 TRD H1 FF
 FFGV RAD F1
 EDI CF2
 SBF F2
 AAD UN5
 TRD F1
 RAD H1
 EDI CH2P
 SBF H2P
 AAD UN5
 TRD H1 F2
 SUI2P RAD F1V
 SAD F1
 ANG FVG V FFGV
 FVG RAD G1V
 SAD G1
 ANG FVG V
 RAD G1
 EDI CG2
 SBF G2
 AAD UN5
 TRD G1
 RAD H1
 EDI CH2
 SBF H2
 AAD UN5
 TRD H1 G2
 FVG RAD HN
 SAD H1
 ANG OUI
 RAD A1J
 AAD 2K
 TRD A1J BCLE
 OUI RAD 2K
 TDI K
 AAD 8001
 TRD 2K
 SAD K
 SAD N
 ANG NON
 EDI A1
 TDI PERMU
 EDI AN1
 TDI A1
 EDI PERMU
 TDI AN1 INIT

NON RAD AN1
 AAD N
 SAD UN5
 DAD 0004
 AAD AN1
 TRD NTRE NEUSO
 CH2 TDI 0000 FVG F
 CG2 EDI 0000 H2
 CH2P TDI 0000 SUI2P
 CF2 EDI 0000 H2P
 CH1P TDI 0000 SUI1P
 CRADA RAD 0000 SADAG
 CSADA SAD 0000 TEST
 CG1 EDI 0000 H1
 CF1 EDI 0000 H1P
 CH1 TDI 0000 SUI1
 DEUX5 00 0002 000
 UN5 00 0001 000
 CA1 00 A0001 000

METHODE	Nombre de membrures variables	Nombre de Tests sur les π			Nombre de Paramètres			Temps de Tr.		Temps de Tr.		Mémoriser calculs par le Programme
		MOYEN	MINI	MAXI	MOYEN	MINI	MAXI	51.1	51.2	51.1	51.2	
BRUTTE	0	$> \frac{n^2 \pi}{n}$	$n-1$	$\frac{n^2 - n}{2}$	$> \frac{n^2 - n}{n}$	0	$\frac{n^2 - n}{2}$	29'	28'	115'	2'30"	
SMILL	0	$n^{1/2} \pi$	$n \log_2 n$	$\frac{n^2 - n}{2}$	$\frac{n^2 - n}{n}$	0	$\frac{n^2 - n}{2}$	4'30"	4'45"	44'45"	3'42"	
DECORTE DE VON NEUMANN	0							15'	32"	68"	3'	
DETECTION LINEAIRE	0	$\frac{n^2 - n}{2}$	$\frac{n^2 - n}{2}$	$\frac{n^2 - n}{2}$	$> \frac{n^2 - n}{n}$	0	$\frac{n^2 - n}{2}$	21'	16'	91'	64'	
SELECTION QUADRATIQUE	$n + \sqrt{n}$	$n+2(n-1)\sqrt{n}$	$n+2(n-1)\sqrt{n}$	$n+2(n-1)\sqrt{n}$	$> \frac{n^2 - n}{n}$							
de HIBBARD	$\log_2 n$			$\frac{n^2 - n}{2}$		0	$\frac{n^2 - n}{2}$	2'	23'	4'45"	66'	
INSERTION	0											
INSERTION DISTINCTIVE	0	$n \log_2 n$	$n-1$	$n \log_2 n$	$\frac{n^2 - n}{n}$	0	$\frac{n^2 - n}{2}$					
INTER CLASSEMENT VON NEUMANN		$n \log_2 n$	$n \log_2 n$	$n \log_2 n$	$n \log_2 n$	0	$n \log_2 n$	2'19"	2'	5'50"	4'28"	
PILE N° 1								12'30"		98"		
PILE N° 2								65'				
N° 2 bis								66'45"		79'		
N° 2 ter								66'		15'		

BIBLIOGRAPHIE

- [1] IVERSON et KENNETH "A programming language" John Wiley and Sons
1962 - pages 176 - 246
- [2] SHELL D. L. "A high speed sorting procedure" Communications
ACM 2 (1959) - pages 30-32
- [3] FRANK R. M. ; LAZARUS R. B. "A high speed sorting procedure" Commu-
nication ACM 3 (1960) - pages 20-22
- [4] PICARD C. Théorie des questionnaires - CNRS - Institut
Blaise Pascal (publication n° 19, 3, 3/BI) page 147
- [5] BOTTENBRUCH Structure and use of ALGOL 60 - ORNL -
Report 3148 - AskRidge (1961)
- [6] HIBBARD T. N. Some combinational properties of certain trees
with applications to scareling and sorting -
Journal of ACM - (1962) - pages 25-28
- [7] PAIR C. Arbres, piles et compilation - Revue française
de traitement de l'information - Chiffres
(Vol. 7, 1964, pages 199-216)
- [8] PAIR C. Séminaire de Programmation 1963-1964 - Centre
de Calcul Automatique de Nancy
- [9] SAMELSON et BAUER Sequential formula of translation - Communica-
tions of ACM - n° 3 - (1963) - pages 76-86
- [10] HALL M. M. A method of comparing the time requirements of
sorting methods - Communications of ACM -n° 5
(mai 1963) - pages 259-263



Vu et Approuvé

Nancy, le 15/12/64

Le Doyen de la Faculté
des Sciences de NANCY

M. AUBRY

Vu et Permis d'imprimer

Nancy, le 17/12/64

le Recteur :

Président du Conseil de

l'Université

P. IMBS