UNIVERSITÉ DE NANCY I

Mise en œuvre numérique de la méthode des sources : Application à l'étude d'un champ évolutif de température et d'un champ de contraintes thermo-élastiques

THESE

présentée

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

soutenue le 22 Avril 1971

par

Madame Colette ROLLAND

MEMBRES DU JURY :

[illegible]AS . . . . *Président*

[illegible]AIX
[illegible]RMINI } *Examinateurs*

UNIVERSITÉ DE NANCY I

Mise en œuvre numérique de la méthode des sources : Application à l'étude d'un champ évolutif de température et d'un champ de contraintes thermo-élastiques

THESE

présentée

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

soutenue le 22 Avril 1971

par

Madame Colette ROLLAND

MEMBRES DU JURY :

MM. LEGRAS . . . . *Président*

DEPAIX
GILORMINI } *Examinateurs*

UNIVERSITE NANCY I

N° d'ordre AO 5487

MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DE LA METHODE DES SOURCES : APPLICATION A L'ETUDE D'UN CHAMP EVOLUTIF DE TEMPERATURE ET D'UN CHAMP DE CONTRAINTES THERMO-ELASTIQUES

THESE D'ETAT DE MATHEMATIQUES
soutenue devant le jury
le 22 avril 1971

par

Mme Colette ROLLAND

COMPOSITION DU JURY :

Mr LEGRAS	Président
Mr DEPAIX	Examinateurs
Mr GILORMINI	Examinateurs

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur LEGRAS, Directeur de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique, qui a bien voulu diriger ce travail, m'aider de ses conseils constants et de ses encouragements et m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je remercie Monsieur DEPAIX et Monsieur GILORMINI, Professeurs à l'Université de Nancy I, qui ont bien voulu faire partie du Jury.

Je tiens enfin à exprimer mes remerciements à toute l'équipe du secrétariat pour l'aide aussi efficace que sympathique qu'elle a apportée à la réalisation matérielle de cette thèse.

INTRODUCTION.

Une méthode classique de résolution des équations linéaires aux dérivées partielles (équations de Laplace, de la chaleur ou d'élasticité) consiste à chercher des solutions particulières singulières dites sources et à en faire une sommation continue sous la forme de "simple" ou "double couche". Cette méthode a été employée en mathématique sous le nom de théorie du potentiel et conduit, dans le cas de l'équation de Laplace à déterminer la densité de la couche par une équation intégrale. La mise en oeuvre numérique de cette méthode a conduit à des résultats satisfaisants, car la résolution de cette équation est aisée [réf 14,15]. La même méthode peut s'étendre au problème de la chaleur et la première partie de ce travail est consacrée à l'étude de l'application numérique de la méthode du potentiel dans un problème évolutif de chaleur à deux variables d'espace.

Cette méthode a été également développée par les physiciens sous le nom de méthode des sources et elle conduit dans certains cas à la solution formelle du problème posé. Nous nous sommes proposés de l'appliquer à un problème d'élasticité dont on connait la solution formelle mais qui conduit à des intégrales de calcul numérique délicat. Nous avons ensuite étendu cette solution à des domaines nouveaux en ajoutant à la solution initiale un terme correctif tenant compte des limites.

La formulation théorique relative à la méthode du potentiel utilisée dans la première partie pour résoudre un problème plan du type de la chaleur est ancienne [réf 24]. Mais les intégrales qui interviennent ont des noyaux singuliers et ce fait rend délicat leur calcul numérique. Aussi notre effort a-t-il essentiellement porté sur la mise au point de techniques originales pour le calcul numérique de ces quadratures. La méthode consiste à chercher d'abord une solution particulière de valeur initiale donnée. Les densités sont connues dans ce cas et l'on a une expression formelle de la solution sous forme d'une intégrale double singulière. Pour satisfaire les conditions au contour on superpose à la solution précédente un terme dont l'expression fait intervenir des sources inconnues. La densité de ces sources est déterminée comme solution d'une équation intégrale qui est à la fois de Fredholm par rapport aux variables d'espace et de Volterra par rapport au temps.

Dans la deuxième partie nous appliquerons la méthode des sources à un problème thermo-élastique où elle permettra une étude fine des zones voisines des singularités. Nous définirons d'abord l'expression formelle de la solution dans le cas d'un domaine infini. Une telle recherche associe la méthode des sources tant pour le problème thermique en permettant une étude approfondie du champ des températures que pour l'étude des déformations élastiques en donnant une représentation des contraintes, même dans les régions où celles-ci varient brusquement. Pour nous ramener ensuite à un domaine fini rectangulaire et satisfaire les conditions au contour nous superposerons à la solution précédente un terme correctif. Ce terme sera écrit sous la forme d'une somme de produits de polynômes de Tchebicheff.

PREMIERE PARTIE

I - Rappel de la méthode des sources

1.1. Intégrale de double couche sur la surface.

Soit un domaine D limité par le contour C régulier (sans point anguleux) ; on sait que [réf 8]

$$(1) \qquad \boxed{\varphi_1(M,t) = \frac{k}{4\pi t} \iint_D e^{\frac{-k\overline{MM'}^2}{4t}} g(M')\, dM'}$$

représente la solution du problème de la chaleur défini par les deux conditions :

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta\varphi_1(M,t) = k \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(M,t) & \forall M \in D \\ \varphi_1(M,0) = g(M) & \forall M \in D \end{cases}$$

Le noyau $G_\infty(M,M',t) = \frac{k}{4t} e^{\frac{-k\overline{MM'}^2}{4t}}$ est la fonction de Green du domaine infini. Rappelons ses principales propriétés [réf. 22-24]

- Etant donné un nombre η arbitraire il est toujours possible de trouver $t(\eta, \varepsilon)$ tel que $\begin{Bmatrix} r = \sqrt{\overline{MM'}^2} > \eta \\ t < t(\eta, \varepsilon) \end{Bmatrix}$

  entraîne $|G(M,M',t)| < \varepsilon$

- Si Ω représente un domaine entourant le point M,

$$\lim_{t \to 0} \iint_\Omega G_\infty(M,M',t)\, dM' = 1$$

- Si f(M) est une fonction bornée et définie dans un domaine D

$$\lim_{t \to 0} \iint_D f(M')\, G_\infty(M,M',t)\, dM' = f(M)$$

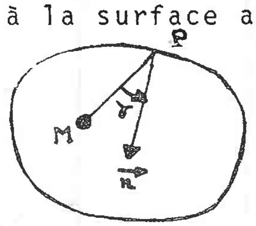
1.2. Problème de donnée initiale nulle

Posons
$$\boxed{\varphi_2(M,t) = \frac{2}{k} \int_0^t d\tau \int_C \frac{dG_\infty}{dn_i}(M,P,t-\tau)\,\mu(P,\tau)\,dP}$$

où $G_\infty(M,P,t-\tau)$ représente la fonction de Green que nous avons précédemment citée. On peut expliciter $\frac{dG_\infty}{dn_i}$ et écrire :

$$\boxed{\varphi_2(M,t) = \frac{k}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_C \frac{r\cos\gamma}{(t-\tau)^2}\, e^{\frac{-k\overline{MP}^2}{4(t-\tau)}}\,\mu(P,\tau)\,dP} \quad (3)$$

γ est l'angle des deux vecteurs $(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{n})$; $\overrightarrow{n}$ étant la normale intérieure à la surface au point mobile P.



$r = \sqrt{\overline{MP}^2}$: distance du point fixe M au point mobile P du contour C.

$\mu(P,t)$ représente la densité inconnue des "doublets" que l'on a répartis uniformément sur le contour C du domaine D. Lorsque M tend vers un point P_0 du contour on sait que [réf 22,24]

$$\lim_{M\to P_0} \frac{k}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_C r\cos\gamma\, \frac{e^{\frac{-kr^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\,\mu(P,\tau)\,dP =$$

$$\mu(P_0,t) + \frac{k}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_C r\cos\gamma\, \frac{e^{\frac{-kr^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\,\mu(P,t)\,dP$$

En écrivant que $\varphi_2(P,t)$ est connue au contour et vaut $\delta(P,t) = h(P,t) - \varphi_1(P,t)$, nous obtenons pour définir $\mu(P,t)$ l'équation intégrale.

$$\mu(P_0,t) + \frac{k}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_C r\cos\gamma\, \frac{e^{\frac{-kr^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, \mu(P,\tau)\, dP =$$

$$\delta(P_0,t) = h(P_0,t) - \varphi_1(P_0,t)$$

Notons que cette équation intégrale est simultanèment "équation de Volterra" pour t et "équation de Fredholm" en P. Elle est des plus singulièrespour $t \equiv \tau$ et $P \equiv P_0$.
Si $\mu(M,P)$ est solution de l'équation intégrale, $\varphi_2(M,t)$ définie par (3) représente la solution du problème de la chaleur, lui-même défini par les trois conditions :

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta \varphi_2(M,t) = k \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(M,t) & \forall M \in D \\ \varphi_2(M,0) = 0 & \\ \varphi_2(P,t) = \delta(P,t) & \forall P \in C \ \text{contour de } D \end{cases}$$

1.3. <u>Superposition des solutions</u>

Considérons maintenant le problème général défini par :

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta \varphi(M,t) = k \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(M,t) & \forall M \in D \\ \varphi(M,0) = g(M) & \\ \varphi(P,t) = h(P,t) & \forall P \in C \ \text{contour de } D. \end{cases}$$

Pour résoudre (5) il suffira de superposer $\varphi_1(M,t)$ défini par (1) à $\varphi_2(M,t)$ défini par (3), où $\mu(P,t)$ est la solution de :

$$\mu(P_0,t) + \frac{k}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_C r\cos\gamma \frac{e^{\frac{-kr^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\,\mu(P,\tau)\,dP =$$

$$\delta(P_0,t) = h(P_0,t) - \varphi_1(P_0,t)$$

$\varphi_1(P_0,t)$ représente la valeur de $\varphi_1(M,t)$ lorsque M vient en P_0 sur le contour C.

II - Techniques numériques de résolution du problème

2.1. Méthode de pas à pas

Afin de suivre l'évolution des températures nous cherchons à représenter la répartition de ces températures dans D à des instants T, 2T, 3T,...mT,... . Pour résoudre ce problème il suffit de pouvoir calculer la répartition à l'instant T connaissant la répartition à l'instant initial zéro et les conditions aux limites et d'utiliser ce mode de calcul comme technique de pas à pas en prenant successivement T, 2T, 3T ... comme instants initiaux. Nous chercherons donc $\varphi(M,t+T)$ sous la forme $\varphi_1(M,t+T) + \varphi_2(M,t+T)$, t, valant successivement 0, T, 2T, ..., mT, ... Une conséquence de ce changement de notation est qu'il nous faudra remplacer la variable t du paragraphe précédent par $t+\tau$ (τ variable), éventuellement par t + s, lorsque le temps "s" est variable d'intégration.

$\varphi_1(M,t+T)$, définie par (1), devient :

$$\varphi_1(M,t+T) = \frac{k}{4\pi(t+T)}\iint_D e^{\frac{-kr^2}{4(t+T)}}\,g(M')\,dM'$$

où g(M) est une fonction donnée. $\varphi_1(M,t+T)$ nécessitera le calcul d'intégrales doubles "pseudo-singulières", coûteuses à calculer par les techniques classiques et qui nécessiteront la mise au point de méthodes particulières (première partie de ce chapître).

Nous aurons besoin de calculer :

- $\varphi_1(M, t + T)$ aux points intérieurs à D, ceci pour le calcul ultérieur de la solution complète.
- $\varphi_1(M, t + \tau)$ aux points du contour C, pour différentes valeurs τ, ceci afin de calculer le second membre de l'équati intégrale, qui devient compte tenu du remplacement de t par $t + \tau$ (ou $t + s$)

$$(6)\qquad \boxed{\mu(P_0, t + \tau) + \frac{k}{4\pi}\int_0^{\tau} ds \int e^{\frac{-kr^2}{4(\tau - s)}} \frac{r\cos\gamma\, \mu(P, t + s)}{(\tau - s)^2}\, d \\ = h(P_0, t + \tau) - \varphi_1(P_0, t + \tau)}$$

Le calcul de $\varphi_2(M, t + T)$, en particulier la résolution de l'équation intégrale (6) et la détermination de la densité $\mu(P, t + s)$ présente de nouvelles difficultés numériques qui font l'objet de la seconde partie de ce chapître.

2.2. <u>Calcul de l'intégrale de double couche</u>

2.2.1. <u>Décomposition en intégrales simples.</u>

Il s'agit de calculer numériquement des intégrales du type

$$\varphi_1(M, t) = \frac{k}{4\pi t} \iint_D e^{\frac{-kr^2}{4t}}\, g(M')\, dM'.$$

Le "noyau exponentiel" peut s'écrire $e^{\frac{-k}{4t}((x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2)}$

en désignant par (α, β) les coordonnées cartésiennes du point fixe M et en désignant par (x,y) celles du point courant M'.
On peut écrire :

$$\varphi_1(M,t) = \frac{k}{4\pi t} \int_{x_0}^{x_n} e^{\frac{-k}{4t}(x-\alpha)^2} dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} e^{\frac{-k}{4t}(y-\beta)^2} g(x,y) dy$$

x_0 et x_n désignent les valeurs des bornes en x du domaine D, $f_1(x)$ et $f_2(x)$, celles des bornes en y pour une valeur x de l'abscisse entre x_0 et x_n.
L'intégrale double se décompose donc en deux intégrales simples

$$J_1(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} e^{\frac{-k}{4t}(y-\beta)^2} g(x,y) dy$$

et

$$\varphi_1(M,t) = \int_{x_0}^{x_n} e^{\frac{-k}{4t}(x-\alpha)^2} J_1(x) dx.$$

Faisons dans $J_1(x)$ le changement de variable suivant :

$$y = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \lambda + \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$$

$$f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x) \iff -1 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

$$J_1(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{-k}{4t}\left(\frac{f_2 - f_1}{2} \lambda + \frac{f_1 + f_2}{2} - \beta\right)^2}$$

$$g\left(x, \frac{f_2 - f_1}{2} \lambda + \frac{f_2 + f_1}{2}\right) d\lambda$$

En posant :

$$\frac{f_2(x) - f_1(x)}{4\sqrt{t}} \sqrt{k} = \eta \quad \text{et} \quad (\beta - \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}) \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{t}} = \gamma$$

$$J_1(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-(\eta\lambda - \gamma)^2} g(x, \frac{f_2 - f_1}{2}\lambda + \frac{f_2 + f_1}{2}) \, d\lambda$$

intégrale simple du type $\int_{-1}^{+1} e^{-(\eta\lambda - \gamma)^2} g^*(\lambda) \, d\lambda$ dont

nous verrons un mode de calcul dans le paragraphe suivant. De la même façon dans $\varphi_1(M,t)$ nous ferons le changement de variable :

$$x = \frac{x_n - x_0}{2} \rho + \frac{x_n + x_0}{2} \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_n \Longleftrightarrow -1 \leqslant \rho \leqslant +1$$

$$\varphi_1(M,t) = \frac{x_n - x_0}{2} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{-k}{4t}(\frac{x_n - x_0}{2} \rho + \frac{x_n + x_0}{2} - \alpha)^2} J_1(\frac{x_n - x_0}{2} \rho + \frac{x_n + x_0}{2}) \, d\rho .$$

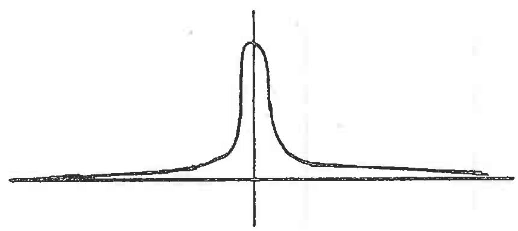
En posant $\frac{\sqrt{k}(x_n - x_0)}{4\sqrt{t}} = \eta$ et $\gamma = (\alpha - \frac{x_n + x_0}{2}) \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{t}}$

$$\varphi_1(M,t) = \frac{x_n - x_0}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-(\eta\rho - \gamma)^2} J_1(\frac{x_n - x_0}{2} \rho + \frac{x_n + x_0}{2}) \, d\rho .$$

$\varphi_1(M,t)$ se réduit aussi au calcul d'une intégrale simple du type précédent.

2.2.2. Intégrales du type $I = \int_{-1}^{+1} e^{-(\eta x - \gamma)^2} g(x)\, dx$.

La fonction $e^{-(\eta x - \gamma)^2}$ est "pseudo-singulière" dès que η devient grand : dans ce cas $e^{-(\eta x - \gamma)^2}$ est très petit sauf au voisinage immédiat de la valeur $x = \frac{\gamma}{\eta}$, valeur pour laquelle la fonction est égale à un. Une telle fonction ayant l'allure de la figure ci-dessous, est difficile à approcher par un polynôme de degré raisonnable. Pour alléger les calculs nous serons alors conduits à approcher la seule fonction $g^{*}(x)$, laissant au noyau $e^{-(\eta x - \gamma)^2}$ son écriture mathématique stricte.



Pour pouvoir approcher g(x) avec une qualité et une stabilité satisfaisantes, nous l'interpolerons dans une base de Tchebicheff [réf 17,21,11]. Nous sommes alors conduits au calcul d'intégrales de la forme

$$I_n = \int_{-1}^{+1} e^{-(\eta x - \gamma)^2} T_n(x)\, dx.$$

2.2.3. Intégrales $I_n = \int_{-1}^{+1} T_n(x)\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx$.

2.2.3.1. Formule de Récurrence

Nous calculons les I_n par récurrence. Le changement $x = \cos\theta$ transforme $T_n(x)$ en $\cos n\theta$ et

$$I_n \text{ en } \int_0^{\pi} e^{-(\eta\cos\theta-\gamma)^2} \cos n\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} e^{-(\eta\cos\theta-\gamma)^2} \frac{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta}{2} d\theta .$$

Posons $J_n = \int_0^{\pi} \sin n\theta \, d\theta$. On a $2I_n = J_{n+1} - J_{n-1}$.

Intégrons J_n par parties :

$$J_n = \frac{(-1)^n e^{-(\eta+\gamma)^2} + e^{(\eta-\gamma)^2}}{n} + \frac{2\eta^2}{n} \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos\theta \sin\theta \, e^{-(\eta\cos\theta-\gamma)^2} d\theta - \frac{2\eta\gamma}{n} \int_0^{\pi} e^{-(\eta\cos\theta-\gamma)^2} \cos n\theta \sin\theta \, d\theta$$

On remarque que :

$$J_n = 2\eta^2\left(\frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2\eta}\right) - \frac{2\eta\gamma}{n} I_n + (-1)^n \frac{e^{-(\eta+\gamma)^2} + e^{-(\eta-\gamma)^2}}{n}$$

En écrivant J_{n+1} et J_{n-1} à partir de la formule précédente et en remplaçant $J_{n+1} - J_{n-1}$ par $2I_n$ on obtient sur I_n la formule de récurrence suivante :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{2\gamma}{\eta} I_{n+1} + 2\left(\frac{\eta+1}{\eta^2} + \frac{1}{n-1}\right) I_n - \frac{2(n+1)}{(n-1)} \frac{\gamma}{\eta} I_{n-1} + \frac{n+1}{n-1} I_{n-2} + \frac{2}{\eta^2(n-1)} \left(e^{-(\eta-\gamma)^2} + (-1)^n e^{-(\eta+\gamma)^2}\right)}$$

A cette formule on associe les termes initiaux I_0, I_1, I_2, I_3 définis par :

$$I_0 = \int_{-1}^{+1} T_0(x)\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx = \int_{-1}^{+1} e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx$$

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} T_1(x)\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx = \int_{-1}^{+1} x\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx$$

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} T_2(x)\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx = \int_{-1}^{+1} (2x^2 - 1)\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx =$$

$$= 2 \int_{-1}^{+1} x^2\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx - I_0$$

$$I_3 = \int_{-1}^{+1} T_3(x)\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx = \int_{-1}^{+1} (4x^3 - 3x)\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx =$$

$$= 4 \int_{-1}^{+1} x^3\, e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx - 3I_1$$

Calcul de I_0 : Faisons le changement de variable $u = (\eta x - \gamma)$

$$I_0 = \frac{1}{\eta} \int_{-(\eta+\gamma)}^{+\eta-\gamma} e^{-u^2} du$$

Rappelons que $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du = ERF(x)$ [fonction Erreur - réf1.]

$$\boxed{I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\eta} (ERF(\eta - \gamma) + ERF(\eta + \gamma))}$$

Calcul de I_1 : Le même changement de variable que précédemment nous donne :

$$I_1 = \frac{1}{\eta^2} \int_{-(\eta+\gamma)}^{\eta+\gamma} u e^{-u^2} du + \frac{\gamma}{\eta^2} \int_{-(\eta+\gamma)}^{\eta-\gamma} e^{-u2} du.$$

$$\boxed{I_1 = \frac{e^{-(\eta+\gamma)^2} - e^{-(\eta-\gamma)^2}}{2\eta^2} + \frac{\gamma}{\eta} I_0}$$

Calcul de I_2 et I_3 : Nous le ferons par une récurrence sur les intégrales $J_n = \int_{-1}^{+1} e^{-(\eta x - \gamma)^2} x^n dx$, qui s'intègrent par parties :

$$J_n = \frac{e^{-(\eta-\gamma)^2} + (-1)^n e^{-(\eta+\gamma)^2}}{n+1} + \frac{2\eta^2}{n+1} \int_{-1}^{+1} x^{n+2} e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx$$

$$- \frac{2\gamma\eta}{n+1} \int_{-1}^{+1} x^{n+1} e^{-(\eta x - \gamma)^2} dx$$

Ce qui se transforme pour donner :

$$\boxed{J_{n+2} = \frac{\gamma}{\eta} I_{n+1} + \frac{n+1}{2\eta^2} J_n - \left(\frac{e^{-(\eta-\gamma)^2} + (-1)^n e^{-(\eta+\gamma)^2}}{2\eta^2}\right)}$$

avec $J_0 = I_0$ et $J_1 = I_1$ déjà calculés.

Nous aurons ainsi I_2 par $\boxed{I_2 = 2J_2 - J_0}$ et $\boxed{I_3 = 4J_3 - 3J_1}$

2.2.3.2. <u>Stabilité de la formule de récurrence vis à vis des erreurs de chute.</u>

La formule de récurrence établie n'est pas partout stable du point de vue numérique. Nous ne connaissons pas de technique mathématique rigoureuse qui permette d'étudier la stabilité d'une forme non linéaire de récurrence. Aussi avons nous dû en référer à l'expérience : nous avons constaté que l'instabilité des résultats varie avec la grandeur de η. Si $\eta \leqslant 1$ et $\forall\ \gamma$ la divergence des résultats est trop rapide pour que l'on puisse utiliser cette méthode. Si $\eta > 1$ la formule est stable jusqu'à des rangs n d'autant plus élevés que η est grand. D'une manière générale la précision du calcul des intégrales simples I_n sera suffisante avec une valeur de n de l'ordre de 10 à 15.

Voici quelques résultats concernant les calculs des I_n successifs. Nous les avons comparés avec le calcul de I_n [réf. 17] par la méthode qui utilise l'interpolation de tout le noyau $f(x) = e^{-(\eta x - \gamma)^2} T_n(x)$. Cette technique nécessite l'emploi de polynômes de degré élevé atteignant 150. Elle est valable mais extrêmement coûteuse.

2.2.3.3, Résultats numériques

η	γ	n	I_n par récurrence	I_n par interpolation numérique directe
0,05	0,05	1	1.9933	1,9933
		2	-0,0033	-0,0033
		3	-0.6653	-0.6653
		4	-0,0025	-0,0019
		5	-0.1416	-0.1323
		6	-1.7	-0.0004
5	6	1	0,027880	0,027880
		2	0.026099	0.026099
		3	0.021157	0.021157
		4	0,014139	0,014139
		5	0,006484	0.006484
		6	-0,000414	-0,000414
		7	-0.005562	-0,005562
		8	-0,008534	-0,008534
		9	-0.009464	-0.009464
		10	-0,008871	-0.008871
		11	-0,007421	-0.007421
		12	-0,005722	-0.005723
		13	-0,004188	-0.004192
20	15	1	0,088622	0.088622
		2	0,066467	0,066467
		3	0.011299	0.011299
		4	-0.048853	-0.048853
		5	-0.083745	-0.083745
		6	-0.076412	-0,076412
		7	-0.031576	-0.031576
		8	+0.027283	+0,027283
		9	+0.070411	0.070412
		10	0.077073	0.077073
		11	0.045680	0.045680
		16	-0,051756	-0.051756
		21	-0.015833	-0.015833
		23	-0.043321	-0.043321
		25	+0,003610	+0.003610

2.2.3.4. Conclusion

Paradoxalement la méthode de récurrence qui à priori devrait être valable dans tous les cas n'est utilisable que dans le domaine où le noyau exponentiel $e^{-(\eta x - \gamma)^2}$ est difficile à approcher. Elle ne l'est plus dans les cas où ce noyau est tout à fait régulier. Nous utiliserons alors la méthode générale pour calculer $I = \int_{-1}^{+1} e^{-(\eta x - \gamma)^2} f(x)\, dx$, méthode basée sur l'interpolation de tout le noyau $f(x) = e^{-(\eta x - \gamma)^2} g(x)$ L'interpolation se fait dans ces cas là (η petit) avec une bonne précision pour peu de points. Le programme utilisé dans la suite de ce travail calcule donc $\int_{-1}^{+1} e^{-(\eta x - \gamma)^2} g(x)\, dx$

par la méthode classique (approximation de toute la fonction à intégrer) lorsque $\eta < 1$ et par la méthode développée au paragraphe 2.2.3 lorsque $\eta \geqslant 1$. Les résultats suivants montrent que cette technique est suffisante.

g	η	γ	n	valeur exacte	valeur approchée
$g(x) = x$	0.5	0.2	10	.11092926	.11092926
	0.05	0.02	10	.00133064	.00133080
$g(x)=e^{\eta^2 x^2}$	0.1	1	5	.74067375	.74067377
	0.05	1	10	.73698576	.73698579
	0.5	1	5	.86466472	.86466569
			10	.86466472	.86466472

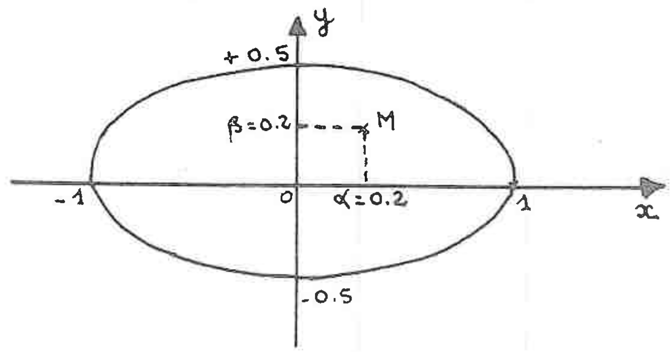
2.2.4. Résultats

Voici quelques résultats de calcul de l'intégrale de double couche dans un domaine D elliptique :

$$I = \frac{k}{4\pi t} \iint_{\text{ellipse}} e^{-\frac{k}{4t}\left((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right)} g(x,y)\, dx\, dy$$

Nous avons choisi pour g(x,y) la fonction

$(\cos \pi x + \frac{\cos 3\pi x}{4})(\cos \pi y + \frac{\cos 2\pi y}{3})$. Nous avons comparé les résultats obtenus par la méthode évoluée que nous venons d'exposer à ceux que nous fournit la technique classique appliquée à chacune des intégrales simples résultant de la décomposition de I. Cette dernière méthode est valable mais nécessite un très grand nombre de points.



Nous noterons par N_1 le nombre de points d'interpolation nécessaires au calcul de I par la méthode évoluée, dans tout le domaine ; par N_2 le nombre de points correspondants pour la méthode de comparaison.

k = 1.

t	N1	Méthode évoluée	N2	Méthode classique
0.25	50 60	0.059928 0.059901	1500	0.059908
0.1	45 50 60	0.173417 0.173423 0.173468	1800	0.173416
0.05	50 60	0.311355 0.311375	2000	0,311378

2.2.5. Choix du réseau

Nous avons vu au paragraphe 21 qu'il était nécessaire de calculer $\varphi_1(M,t+T)$ aux points intérieurs au domaine qui servent à la discrétisation de l'intégrale afin de pouvoir obtenir $\varphi(M,t+T)$ à l'instant $t+T$ et l'utiliser comme "valeur initiale" à l'instant suivant. Ce sont les noeuds du quadrillage nécessaire à la discrétisation de l'intégrale double que nous allons préciser. Nous l'avons décomposée en deux intégrales simples : pour chaque valeur de x comprise entre x_0 et x_n le calcul de $J_1(x)$ nécessitera les valeurs de

$$g\left(x, \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \lambda_i + \frac{f_2(x) + f_1(x)}{2}\right) \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots n.$$

où λ_i désigne la racine d'ordre i du polynôme $T_{n+1}(y)$. Pour chaque x nous devons connaître en conséquence les valeurs de la fonction aux points $y_i = \dfrac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \lambda_i + \dfrac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$. Ce ne sont pas des valeurs équidistantes : dans la transformation qui ramène l'intervalle $(f_1(x), f_2(x))$ à l'intervalle $(-1, +1)$ ce sont les racines du polynôme de Tchebicheff d'ordre n. Dans $\varphi_1(M,t)$ nous avons besoin des valeurs de

$$J_1\left(\frac{x_n - x_0}{2} \gamma_i + \frac{x_n + x_0}{2}\right) \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots m \text{ avec } \gamma_i = \text{racine}$$

d'ordre i du polynôme $T_{m+1}(x)$. x peut prendre les valeurs x_i définies par $x_i = \dfrac{x_n - x_0}{2} \gamma_i + \dfrac{x_n + x_0}{2}$ $\forall i = 0, 1, 2, \dots m$ qui correspondent à des valeurs non équidistantes entre x_0 et x_n telles que, dans la transformation qui ramène (x_0, x_n) à $(-1, +1)$ ce soient les racines de $T_{m+1}(x)$.

En résumé, les valeurs de $g(M')$ nécessaires au calcul de l'intégrale de double couche sont donc les valeurs de $g(x_i, y_j)$

avec $x_i = \frac{x_n - x_0}{2} \gamma_i + \frac{x_n + x_0}{2} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots m.$

γ_i racines de $T_{m+1}(x)$.

$$y_j = \frac{f_2(x_j) - f_1(x_j)}{2} \lambda_j + \frac{f_2(x_i) + f_1(x_i)}{2} \quad \forall j = 0, 1, \dots n.$$

λ_j racines de $T_{n+1}(y)$.

Deux conceptions peuvent, à ce stade, être envisagées. On peut

- prendre toujours le même nombre de points sur chaque verticale, ce qui simplifie la programmation mais introduit des points qui deviennent très voisins lorsque $(f_2(x) - f_1(x))$, longueur de la verticale M_1M_2 devient très petite (fig.1).
- modifier le nombre de points en fonction de la longueur M_1M_2 ; le rendre proportionnel, par exemple à cette longueur. On obtient alors un partage un peu plus régulier (fig.2) et on peut réduire le nombre de points sans réduire la qualité de l'approximation.

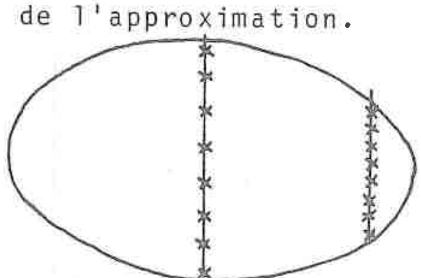


figure 1

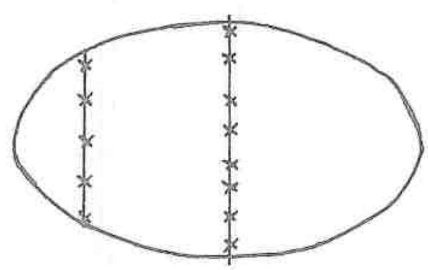


figure 2

2.3. Résolution numérique de l'équation intégrale.

La solution $\varphi(M,t + T)$ est obtenue en superposant à $\varphi_1(M,t + T)$ que nous venons d'étudier une nouvelle fonction $\varphi_2(M,t + T)$ définie par :

$$\varphi_2(M,t + T) = \frac{k}{4\pi} \int_0^T ds \int_c r \cos\gamma \, \frac{e^{-\frac{kr^2}{4(T-s)}}}{(T - s)^2} \mu(P,t + s) \, dP.$$

$\mu(P, t+s)$ représente la densité inconnue des doublets que l'on a répartis sur le contour C du domaine D. Elle est définie par l'équation intégrale (6) :

$$\boxed{\mu(P_0, t+\tau) + \frac{k}{4\pi}\int_0^{\tau} ds \int_C r\cos\gamma \, e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}} \frac{1}{(\tau-s)^2}\,\mu(P, t+s)\,dP = h(P_0, t+\tau) - \varphi_1(P_0, t+\tau) \quad P_0 \in C.}$$

Sous la forme précédente l'équation intégrale se prête mal à une résolution numérique et il est préférable de la transformer. Nous utiliserons pour cette transformation des méthodes déduites de l'étude du noyau au voisinage de la singularité $s = \tau$, $P \equiv P_0$, singularité qui n'empêche pas à l'intégrale d'avoir un sens [réf 22-24].

2.3.1. <u>Etude du noyau : Contribution d'un petit domaine autour du point $P \equiv P_0$ et $s = \tau$.</u>

Soit le domaine D' défini par $\tau - \varepsilon_1 < s < \tau$

$$\sigma_0 - \varepsilon_2 < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon_2$$

σ_0 désignant l'abscisse curviligne de P_0.

Posons

$$I(P_0, t) = \frac{k}{4\pi}\int_{\tau-\varepsilon_1}^{\tau} ds \int_{\sigma_0-\varepsilon_2}^{\sigma_0+\varepsilon_2} r\cos\gamma \; \frac{e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}}}{(\tau-s)^2}\, d\sigma \qquad r^2 = \overline{P_0P}^2$$

Par suite de la régularité du contour C, il existe un nombre A tel que $\left|\frac{\cos\gamma}{r}\right| < A$ quand $P \to P_0$ (P et $P_0 \in C$).

On a alors

$$|I(P_0, t)| \leqslant \frac{kA}{4\pi}\int_0^{\tau} ds \int_{\sigma_0-\varepsilon_2}^{\sigma_0+\varepsilon_2} r^2 \; \frac{e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}}}{(\tau-s)^2}\, ds$$

Faisons le changement de variable $\sigma = \sigma_0 + z \quad -\varepsilon_2 \leqslant z \leqslant \varepsilon_2$

$\tau - s = \dfrac{kz^2}{4u} \qquad \dfrac{kz^2}{4\,\varepsilon_1} \leqslant u < +\infty$

$$d\sigma ds = \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial s}{\partial u} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} & \frac{\partial \sigma}{\partial u} \end{vmatrix} = -kz^2 \frac{du dz}{4u^2}$$

et $|I(P_0,t) \leqslant \dfrac{kA}{4\pi} \displaystyle\int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_2} dz \int_{\frac{kz^2}{4\varepsilon_1}}^{+\infty} e^{-u} z^2 \frac{kz^2}{4u^2} \cdot \frac{16\,u^2}{k^2 z^4} du\, dz$

soit $|I(P_0,t)| \leqslant \dfrac{A}{\pi} \displaystyle\int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_2} dz \int_{\frac{kz^2}{4\varepsilon_1}}^{+\infty} e^{-u}\, du = \frac{A}{\pi} \int_{-\varepsilon_2}^{+\varepsilon_2} e^{-\frac{kz^2}{4\varepsilon}}\, dz.$

Posons $\dfrac{\sqrt{k}}{2\sqrt{\varepsilon_1}}\, z = v.$

$$|I(P_0,t)| \leqslant \frac{2A\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{k}\,\pi} \int_{\frac{-\sqrt{k}\,\varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{\frac{\sqrt{k}\,\varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon}}} e^{-v^2}\, dv = \frac{2A\sqrt{\varepsilon_1}}{\pi\sqrt{k}} \left(\left| ERF\left(\frac{\sqrt{k}\,\varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) - ERF\left(-\frac{\sqrt{k}\,\varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) \right| \right).$$

ERF(x) désigne la fonction erreur $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2}\, du$, fonction bornée par 1.

$|I(P_0,t)| < \dfrac{2A}{\sqrt{k}\,\pi} \sqrt{\varepsilon_1}$ soit $|I(P_0,t)| < B\,\sqrt{\varepsilon_1}$

$|I(M,t)| \longrightarrow 0$ comme $\sqrt{\varepsilon_1}$: la contribution d'un petit domaine autour du point singulier $P \equiv P_0$ et $s = \tau$ dans le calcul de l'intégrale

$$\int_0^{\tau} ds \int_c r \cos\gamma \; \frac{e^{\frac{-kr^2}{4(\tau - s)}}}{(\tau - s)^2} \, dP \text{ tend vers zéro comme } \sqrt{\varepsilon_1}.$$

Introduisons alors $f(P,s)$ et regardons la contribution du domaine D' dans le calcul de l'intégrale

$$\int_0^{\tau} ds \int_c r \cos\gamma \; \frac{e^{\frac{-kr^2}{4(\tau - s)}}}{(\tau - s)^2} \, f(P,s) \, dP.$$

Supposons $f(P,t)$ bornée dans D' par $M(D')$.

Les calculs précédents entraînent que

$$\left| \int_{\tau - \varepsilon_1}^{\tau} ds \int_{\sigma_0 - \varepsilon_2}^{\sigma_0 + \varepsilon_2} r \cos\gamma \; \frac{e^{-\frac{kr^2}{4(\tau - s)}}}{(\tau - s)^2} \, f(P,s) \, dP \right| \leqslant B \sqrt{\varepsilon_1} \; M(D')$$

Pour rendre la contribution d'un domaine D' aussi faible que possible nous avons intérêt à introduire une fonction $f(P,s)$ qui, sur D', reste aussi petite que possible. Un moyen simple est de faire apparaître à la place de f une fonction s'annulant en P_0.

C'est ainsi que nous remplaçons

$$\int_0^{\tau} ds \int_c p(P, t + s) \, \frac{r \cos\gamma}{(\tau - s)^2} \, e^{-\frac{kr^2}{4(\tau - s)}} \, dP$$

$$\text{par} \int_0^{\tau} ds \int_c \left(\mu(P,t+s) - \mu(P_0,t+\tau) \right) \frac{r \cos \gamma}{(\tau - s)^2} \; e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}} \, dP$$

$$+ \mu(P_0,t+\tau) \int_0^{\tau} ds \int_c \frac{r \cos \gamma}{(\tau-s)^2} \; e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}} dP$$

Remarquons de plus que négliger un petit domaine au voisinage de la singularité équivaut dans un traitement numérique à rendre égale à zéro la valeur du noyau à la singularité. Dans les calculs de discrétisation ultérieurs nous poserons donc

$$\left[\left(\mu(P,t+s) - \mu(P_0,t+\tau) \right) \frac{r \cos \gamma}{(\tau-s)^2} \; e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}} \right]_{\substack{\tau = s \\ P \equiv P_0}} = 0$$

2.3.2. <u>Transformation de l'équation intégrale</u>.

Compte tenu des remarques précédentes, nous mettrons l'équation intégrale sous la forme

$$\mu(P_0,t+\tau) + \frac{k}{4\pi} \int_0^{\tau} ds \int_c \mu(P_0,t+\tau) \frac{r \cos \gamma}{(\tau-s)^2} \; e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}} dP$$

$$+ \frac{k}{4\pi} \int_0^{\tau} ds \int_c \left(\mu(P,t+s) - \mu(P_0,t+\tau) \right) \frac{r \cos \gamma}{(\tau-s)^2} \; e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}} dP$$

$$= h(P_0,t+\tau) - \varphi_1(P_0,t+\tau)$$

Posons $L_1 = \frac{k}{4\pi} \int_0^{\tau} ds \int_c \mu(P_0,t+\tau) \frac{r \cos \gamma}{(\tau-s)^2} \; e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}} dP$

$$= \frac{k}{4\pi} \mu(P_0,t+\tau) \int_0^{\tau} ds \int_c r \cos \gamma \; \frac{e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}}}{(\tau-s)^2} dP.$$

Malgré sa singularité l'intégrale est absolument convergente. Nous permutons les signes d'intégration et écrivons :

$$L_1 = \frac{k\mu(P_0,t+\tau)}{4\pi}\int_C r\cos\gamma\,dP\int_0^\tau \frac{e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}}}{(\tau-s)^2}\,ds =$$

$$= \frac{k\mu(P_0,t+\tau)}{4\pi}\int_C r\cos\gamma\left|-4\,\frac{e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}}}{kr^2}\right|_0^\tau dP$$

Soit $L_1 = \mu\,\dfrac{(P_0,t+\tau)}{\pi}\displaystyle\int_C \frac{\cos\gamma}{r}\,e^{-\frac{kr^2}{4\tau}}\,dP.$

Cette expression se prête encore mal au traitement numérique car l'exponentielle est "pseudo-singulière" lorsque r est voisin de zéro. En effet $e^{-\frac{kr^2}{4\tau}}$ est petit si τ est petit sauf au voisinage immédiat de $r = 0$ où la fonction égale l'unité. En utilisant un procédé analogue au précédent nous écrirons :

$$L_1 = \mu\,\frac{(P_0,t+\tau)}{\pi}\int_C \frac{\cos\gamma}{r}\left(e^{-\frac{kr^2}{4\tau}}-1\right)dP + \mu\,\frac{(P_0,t+\tau)}{\pi}\int_C \frac{\cos\gamma}{r}\,dP$$

en isolant l'intégrale singulière $\displaystyle\int_C \frac{\cos\gamma}{r}\,dP$ dont nous connaissons la valeur stricte [réf. 26] égale à :

$$\begin{cases} 2\pi & \text{si M est intérieur à D} \\ 0 & \text{si M est extérieur à D} \\ \pi & \text{si M est sur C, cas qui nous intéresse.} \end{cases}$$

(Cette intégrale représente l'angle sous lequel on voit C depuis M). D'où la forme définitive de L_1 :

$$\boxed{L_1 = \frac{\mu(P_0, t+\tau)}{\pi} \int_C \frac{\cos\gamma}{r} \left(e^{-\frac{kr^2}{4\tau}} - 1\right) dP + \mu(P_0, t+\tau)}$$

La fonction $\frac{\cos\gamma}{r}\left(e^{-\frac{kr^2}{4\tau}} - 1\right)$ est régulière et le calcul numérique de l'intégrale ne présente plus de difficulté.

La forme définitive de l'équation intégrale (6) est alors :

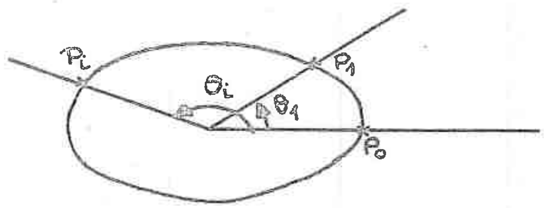
$$\boxed{\begin{aligned} &2\mu(P_0, t+\tau) + \mu\frac{(P_0, t+\tau)}{\pi} \int_C \frac{\cos\gamma}{r}\left(e^{-\frac{kr^2}{4\tau}} - 1\right) dP \; + \\ &+ \int_0^{\tau} ds \int_C \left(\mu(P, t+s) - \mu(P_0, t+\tau)\right) \frac{r\cos\gamma\, e^{\frac{-kr^2}{4(\tau-s)}}}{(\tau-s)^2}\, dP \\ &= h(P_0, t+\tau) - \varphi_1(P_0, t+\tau) \end{aligned}} \tag{7}$$

2.3.3. Discrétisation du problème

Pour résoudre numériquement l'équation intégrale (7) nous procédons par une double discrétisation dans l'espace et dans le temps. Nous obtiendrons alors une équation de la forme $[C^*(P, \tau)][\mu] = f(P, \tau)$ où le vecteur $[\mu]$ contient 2mn inconnues $\mu(P_i, t+\tau_\ell)$ pour i = 0, 1, 2, ... 2m-1 et ℓ = 1, 2, ... n (ces notations seront précisées ultérieurement). Il nous faudra donc écrire 2mn équations. Pour cela nous remplacerons dans l'équation discrétisée le point courant P et le temps τ, respectivement par des points P_j et des valeurs τ_k déjà utilisées dans la discrétisation.

2.3.3.1. Discrétisation sur le contour

On choisit sur le contour C du domaine un certain nombre de points P_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1)$ correspondant à des valeurs de l'angle polaire Θ régulièrement espacées.



Comme nous avons une intégrale de fonction périodique [réf 17] nous remplaçons l'intégrale curviligne

$$\int_C \frac{r\cos\gamma}{(\tau-s)^2}\, e^{-\frac{kr^2}{4(\tau-s)}} \left(\mu(Q,t+s)-\mu(P,t+\tau)\right) dQ$$

que nous noterons $\int_C K(P,Q,\tau-s)(\mu(Q,t+s)-\mu(P,t+\tau)\, dQ$ par

la somme $\frac{\pi}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} K(P,P_j,\tau-s)(\mu(P_j,t+s)-\mu(P,t+\tau))\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{P_j}$.

L'équation intégrale sera approchée par sa forme discrétisée suivante :

$$\frac{\pi}{m}\int_0 \sum_{j=0}^{2m-1} K(P,P_j,\tau-s)(\mu(P_j,t+s)-\mu(P,t+\tau))\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{P_j} ds + 2\mu(P,t+\tau)$$

$$+\ \frac{\mu(P,t+\tau)}{\pi}\int_C \frac{\cos\gamma}{r}\left(e^{-\frac{k\overline{PQ}^2}{4\tau}}-1\right) dQ = h(P,t+\tau)-\varphi_1(P,t+\tau).$$

En posant $B(P,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{\cos\gamma}{r}\left(e^{-\frac{k\overline{PQ}^2}{4\tau}}-1\right) dQ + 2$

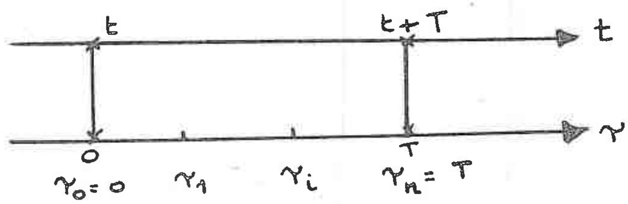
$$f(P,\tau) = h(P,t+\tau)-\varphi_1(P,t+\tau)$$

L'expression précédente devient:

(8) $$\boxed{\sum_{j=0}^{2m-1}\frac{\pi}{m}\int_0^{\tau} K(P,P_j,\tau-s)(\mu(P_j,t+s)-\mu(P,t+\tau)\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{P_j} ds + B(P,\tau)\mu(P,t+\tau) = f(P,\tau)}$$

2.3.3.2. Discrétisation dans le temps

Rappelons qu'au cours de notre calcul T et t sont des constantes: on calcule en effet la solution à l'instant t + T par une méthode de pas à pas (T est le pas) à partir des valeurs de la solution obtenues à l'instant t. t prend successivement les valeurs 0, T, 2T, ...nT. Nous désignons par γ la variable temps qui varie de 0 à T lorsque t varie de t à t + T, et par s la variable d'intégration de 0 à γ.



Pour calculer chaque intégrale

$$\frac{\pi}{m} \int_0^{\gamma} K(P,P_j, \gamma - s)\left(\beta(P_j,t + s) - \beta(P_i,t + \gamma)\right)\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{P_j} ds$$

nous approchons $\beta\,(P,t + s)$ par un polynôme d'interpolation en s défini sur le support $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \frac{T}{n}$, $\gamma_2 = \frac{2T}{n}$,... $\gamma_n = T$. Au cours de ce calcul interviendront des intégrales de la forme

$I_q(P,P_j, \gamma) = \int_0^{\gamma} s^q K(P,P_j, \gamma - s)\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{P_j}$ ds dont le calcul explicite sera développé ultérieurement (paragraphe 2.3.3.5).On peut alors approcher chaque intégrale $\frac{\pi}{m} \int_0^{\gamma} K(P,P_j, \gamma - s)\left(\beta(P_j,t + s) -\right.$

$\left. - \beta(P_i,t + \gamma)\right)\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{P_j}$ ds par une expression de la forme

$\left[I_j(P, \gamma)\right] \quad \left[\Delta \beta_j(P, \gamma)\right]$; où :

. $[I_j(P,\tau)]$ représente une matrice ligne dont les éléments sont des combinaisons linéaires des $I_q(P,P_j,\tau)$ et des termes de la matrice de Lagrange de dimension $(n + 1, n + 1)$ [réf 25].

. $[\Delta\varphi_j(P,\tau)]$ est une matrice colonne dont les termes correspondent aux valeurs $\varphi(P_j,t + \tau_\ell) - \varphi(P,t + \tau)$ pour $\ell = 0, 1, 2,\ldots n$.

Après cette nouvelle discrétisation (8) se met sous la forme

$$\sum_{j=0}^{2m-1} [I_j(P,\tau)]\ [\Delta\varphi_j(P,\tau)] + B(P,\tau)\,\varphi(P,t+\tau) = f(P,\tau)$$

pour tout point P de C et tout instant $t + \tau$;

Soit sous forme matricielle :

$$\Big[[I_0(P,\tau)]\ [I_1(P,\tau)]\ [I_2(P,\tau)]\ \ldots\ [I_{2m-1}(P,\tau)]\Big] \begin{bmatrix} [\Delta\varphi_0(P,\tau)] \\ [\Delta\varphi_1(P,\tau)] \\ \vdots \\ [\Delta\varphi_{2m-1}(P,\tau)] \end{bmatrix}$$

$$+ B(P,\tau)\,\varphi(P,t+\tau) = f(P,\tau).$$

Rappelons que $[I_j(P,\tau)]$ est elle-même une matrice ligne de $(n + 1)$ éléments et $[\Delta\varphi_j(P,\tau)]$ une matrice colonne de $(n + 1)$ éléments. Nous mettrons en évidence des matrices respectivement ligne ou colonne de 2m éléments dont chacun d'eux est lui-même une sous-matrice de n + 1 termes respectivement ligne ou colonne.

Il faut remarquer que parmi les $2m(n + 1)$ termes du vecteur $[\Delta\varphi]$ certains $\varphi(P_j,t + \tau_\ell)$ sont déjà connus. En effet chaque valeur initiale d'un pas est identique à la valeur finale du pas précédent. Donc, à chaque pas (autre que le pas initial) les éléments $\varphi(P_j,t)$ calculés au pas précédent sont connus. L'instant initial $t = 0$ pose un problème particulier. Supposons qu'il n'y ait pas de choc thermique c'est à dire que $\mu(P_j,0) = g(P_j) = \lim_{M \to P_j} g(M)$

(la valeur est la même à l'instant initial au contour et en un point intérieur infiniment voisin).

Dans l'équation intégrale (6) (où l'intégrale est nulle puisque $T = 0$) $\mu(P_j,0) = h(P_j,0) - \varphi_1(P_j,0)$. Or $\varphi_1(P_j,0) = g(P_j) = h(P_j,0)$

Par conséquent $\mu(P_j,0)$ est connu et égal à zéro à l'instant initial. Dans les $2m(n + 1)$ $\mu(P_j,t + \gamma_\ell)$, en fait, $2mn$ sont inconnues et $2m$ donnés.

Remarquons que les termes connus sont ceux dont les indices valent 1, $2 + n$, $2n + 3$, ...$2m(n + 1) - n$. Nous désignerons par $\bar{\bar{\bar{\gamma}}}$ l'ensemble de ces indices.

Notons enfin par $[C(P,\gamma)]$ la matrice ligne formée de $2m$ sous-matrices du type $[I_j(P,\gamma)]$:

$$[C(P,\gamma)] = \Big[[I_0(P,\gamma)] \quad [I_1(P,\gamma)] \quad [I_2(P,\gamma)] \quad \ldots [I_{2m-1}(P,\gamma)]\Big]$$

et $[\Delta\mu(P,\gamma)$ le vecteur $\begin{bmatrix} [\Delta\mu_0(P,\gamma)] \\ [\Delta\mu_1(P,\gamma)] \\ \vdots \\ [\Delta\mu_{2m-1}(P,\gamma)] \end{bmatrix}$

La discrétisation de l'équation intégrale nous conduit, pour tout point P du contour et tout instant $t + \gamma$ entre τ et $\tau + \gamma$ a

$$[C(P,\gamma)] \quad [\Delta\mu(P,\gamma)] + B(P,\gamma)\,\mu(P,t + \gamma) = f(P,\gamma).$$

2.3.3.3. <u>Forme du système approché</u>.

Puique nous avons $2mn$ inconnues nous écrirons l'équation précédente aux $2m$ points P_i (pour $i = 0,1,2,\ldots 2m-1$) et pour les n valeurs τ_k (pour k = 1, 2,..,n) déjà utilisées pour la discrétisation. Pour chaque groupe (i,k) l'équation précédente s'écrit :

$$[C(P_i,t+\tau_k)] \quad [\Delta\varphi(P_i,t+\tau_k)] + B(P_i,t+\tau_k)\ \varphi(P_i,t+\tau_k) = $$
$$= f(P_i,t+\tau_k)$$

Le vecteur $\Delta\varphi(P_i,t+\tau_k)$ est formé de sous-matrices $\Delta\varphi_j(P_i,t+\tau_k)$ dont les éléments sont des différences $\varphi(P_j,t+\tau_\ell) - \varphi(P_i,t+\tau_k)$.

On peut en fait se ramener à un vecteur $[\varphi]$de 2m éléments $[\varphi_j]$ et composé chacun de n + 1 termes de la forme $\varphi(P_j,t+\tau_\ell)$ ℓ = 0, 1, 2,...n. Il suffit d'écrire le produit matriciel précédent sous la forme :

$$\Big[[I_0(P_i,t+\tau_k)] \quad [I_1(P_i,t+\tau_k)] \ldots [X(P_i,t+\tau_k)] \ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots [I_{2m-1}(P_i,t+\tau_k)]\Big] \quad \begin{bmatrix} [\varphi_0] \\ [\varphi_1] \\ \vdots \\ [\varphi_{2m-1}] \end{bmatrix}$$
$$= f(P_i,t+\tau_k)$$

où la matrice $[C^*(P_i,t+\tau_k)] = \Big[[I_0(P_i,t+\tau_k)] \quad [I_1(P_i,t+\tau_k)]$ $\ldots\ldots [I_{2m-1}(P_i,t+\tau_k)]\Big]$ se déduit de la matrice $[C(P_i,t+\tau_k)]$. Elle s'obtient en remplaçant dans $[C(P_i,t+\tau_k)]$ le $(i+1)^{\text{ème}}$ élément $I_{i+1}(P_i,t+\tau_k)$ par la sous-matrice $[X(P_i,t+\tau_k)]$. Cette dernière se déduit de l'élément correspondant en ajoutant au dernier terme le nombre $B(P_i,t+k)$

diminué de la somme des éléments de la matrice $C(P_i, t + \gamma_k)$.
Nous avons montré au paragraphe précédent que le noyau peut être remplacé par zéro dans le calcul numérique lorsque i = j et $\ell = k$: tous les éléments de $[X(P_i, t + \gamma_k)]$ sont donc nuls à l'exception du $(n + 1)^{ème}$.
En regroupant toutes les lignes du type précédent pour tous les couples (i,k), i = 0, 1, 2,...,2m-1 et k = 1, 2,...n, on obtient le système :

$$(9) \quad \boxed{[A]\,[\mu] = [f]}$$

où (A) est une matrice rectangulaire (2mn - 2m(n + 1)) :

$$\begin{bmatrix} [X_0] & [I_{01}] & [I_{02}] & \ldots & [I_{0\,2m-1}] \\ [I_{10}] & [X_1] & [I_{12}] & \ldots & [I_{1\,2m-1}] \\ [I_{20}] & [I_{21}] & [X_2] & \ldots & [I_{2\,2m-1}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [I_{2m-1\,0}] & [I_{2m-1\,1}] & \ldots & \ldots & [X_{2m-1}] \end{bmatrix}$$

dont les éléments $[I_{ij}]$ et $[X_i]$ sont des sous-matrices rectangulaires (n, n + 1) :

$$[I_{ij}] = \begin{bmatrix} [I_j(P_i, t + \gamma_1)] \\ [I_j(P_i, t + \gamma_2)] \\ \ldots \\ [I_j(P_i, t + \gamma_n)] \end{bmatrix} \qquad [X_i] = \begin{bmatrix} [X(P_i, t + \gamma_1)] \\ [X(P_i, t + \gamma_2)] \\ \ldots \\ [X(P_i, t + \gamma_n)] \end{bmatrix}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} [f_0] \\ [f_1] \\ \vdots \\ [f_{2m-1}] \end{bmatrix} \qquad \text{avec } [f_i] = \begin{bmatrix} f(P_i, t + \gamma_1) \\ f(P_i, t + \gamma_2) \\ \ldots \\ f(P_i, t + \gamma_n) \end{bmatrix}$$

où $[I_j(P_i, t + \tau_k)]$, $[X_i(t + \tau_k)]$ et $f(P_i, t + \tau_k)$ ont les significations données précédemment.

$[\mu]$ est le vecteur des 2mn inconnues :

$$[\mu] = \begin{bmatrix} [\mu_0] \\ [\mu_1] \\ \vdots \\ [\mu_{2m-1}] \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad [\mu_j] = \begin{bmatrix} \mu(P_j, t) \\ \mu(P_j, t + \tau_1) \\ \vdots \\ \mu(P_j, t + \tau_n) \end{bmatrix}$$

2.3.3.4. <u>Mise sous forme canonique</u>

Rappelons que les éléments $\mu(P_j, t)$ sont connus. Le système (9) ne peut être résolu sous cette forme. Il faut modifier $[A]$, $[\mu]$ et $[f]$ en faisant passer au 2° membre les termes connus.

Dans le cas général où l'on peut faire apparaître dans $[A]$ deux sous-matrices contiguës $[\bar{A}]$ et $[\bar{\bar{A}}]$ et dans $[\mu]$ deux sous-vecteurs $[\bar{\mu}]$ et $[\bar{\bar{\mu}}]$ on écrit :

$$[A]\,[\mu] \equiv [\bar{A} \quad \bar{\bar{A}}] \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\bar{\mu}} \end{bmatrix} = [\bar{A}]\,[\bar{\mu}] + [\bar{\bar{A}}]\,[\bar{\bar{\mu}}]$$

et $[A]\,[\mu] = [f]$ est équivalent à $[\bar{A}][\bar{\mu}] = [f] - [\bar{\bar{A}}][\bar{\bar{\mu}}]$

Généralisons cette notion de sous-matrices, dans notre cas et désignons par $[\bar{\bar{\mu}}]$ le vecteur dont les termes sont obtenus en prenant dans $[\mu]$ (et dans l'ordre croissant des indices) les termes dont les indices appartiennent à $\bar{\bar{\gamma}}$ (que nous avons défini précédemment). De même $[\bar{\mu}]$ est le vecteur des termes restants de $[\mu]$.

Désignons de même par $[\bar{\bar{A}}]$ la matrice obtenue en prenant dans A et dans l'ordre croissant des indices, les colonnes dont les indices appartiennent au même ensemble $\bar{\bar{\gamma}}$ et par $[\bar{A}]$ la matrice A tronquée des colonnes figurant dans $\bar{\bar{A}}$. Il est facile de vérifier que, comme dans le cas général le système (9) se met sous la forme

$$[\bar{A}][\mu] = [f] - [\bar{\bar{A}}][\bar{\bar{\mu}}] = [\bar{f}]$$

$[\bar{A}]$ est alors une matrice carrée (2mn, 2mn), $[\bar{\mu}]$ est le vecteur des 2mn densités inconnues et $[\bar{f}]$ le vecteur des 2mn données.

2.3.3.5. <u>Eléments de A</u>

Tous les éléments de la matrice $[A]$ sont obtenus par les sous-matrices ligne que nous avons notées $[I_j(P,\gamma)]$ dont les éléments sont obtenus à partir des

$$I_q(P,P_j,\gamma) = \frac{\pi}{m} \int_0^{\pi} K(P,P_j,\gamma-s)\, s^q \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{P_j} ds.$$

Ces intégrales sont de la forme $J_\ell = \displaystyle\int_0^{\gamma} s^\ell \, e^{-\frac{kr^2}{4(\gamma-s)}} \frac{ds}{(\gamma-s)^2}$

Posons $\frac{1}{\gamma-s} = u$ d'où $J_\ell = \displaystyle\int_{1/\gamma}^{+\infty} e^{-\alpha u} (\gamma - \frac{1}{u})^\ell \, du$ avec $\alpha = \frac{kr^2}{4}$

$$J_\ell = \int_{1/\gamma}^{+\infty} e^{-\alpha u} \left(\sum_{n=0}^{n=\ell} C_\ell^n (-1)^n \gamma^{\ell-n} u^{-n} \right) du$$

$$J_\ell = \sum_{n=0}^{n=\ell} (-1)^n C_\ell^n \gamma^{\ell-n} I_n \quad \text{avec} \quad I_n = \int_{1/\gamma}^{+\infty} u^{-n} e^{-\alpha u} du$$

Intégrant I_n par parties on trouve :

$$\boxed{I_n = \frac{\alpha}{1-n} I_{n-1} - \frac{\gamma^{n-1} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{1-n}}$$

formule de récurrence dont les termes initiaux sont :

$$I_0 = \int_{1/\gamma}^{+\infty} e^{-\alpha u}\, du = \frac{e^{-\frac{\alpha}{\gamma}}}{\alpha}$$

$$I_1 = \int_{1/\gamma}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha u}}{u}\, du = - EI(-\frac{\alpha}{\gamma})$$

où $EI(-x)$ est "l'exponentielle intégrale" définie par :

$$-EI(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$ [réf 1].

Toute intégrale J_ℓ est la somme d'intégrales I_n :

$$\boxed{J_\ell = \sum_{n=0}^{n=\ell} (-1)^n\, C^n_\ell\, \gamma^{\ell-n}\, I_n}$$

La matrice $\left[I_j(P,\gamma)\right]$ est alors définie par le produit matriciel :

$$\left[I_j(P,\gamma)\right] = \frac{\pi}{m}\, r \cos\gamma\, \left[J_0\ J_1\ J_2\ \ldots .\ J_n\right]\ \left[M_{Lagrange}\right]$$

où $\left[M_{Lagrange}\right]$ est la matrice de Lagrange de dimension (n + 1, n + 1).

2.3.4. Inversion du système

Nous sommes en mesure de calculer les éléments de $[\bar{\mu}]$:

Il suffit pour cela de résoudre le système $[\bar{A}]\,[\bar{\mu}] = [\bar{f}]$.

Cette résolution ne présente pas de difficultés en général : la matrice $[\bar{A}]$ est franche et les méthodes classiques de résolution donnent de bons résultats. [réf 17].

2.4. Recherche de la solution $\varphi(M,t + T)$

2.4.1. Calcul de $\varphi_2(M,t + T)$

Nous cherchons $\varphi_2(M,t + T)$ aux noeuds du quadrillage défini dans D. $[\bar{\mu}]$ étant déterminé le problème est pratiquement résolu puisque nous avons :

$$\varphi_2(M,t+T) = \frac{k}{4\pi} \int_0^T ds \int_c \frac{e^{-\frac{kr^2}{4(T-s)}}}{(T-s)^2} \mu(P,t+s)\, dP.$$

Nous remplaçons l'intégrale curviligne, comme dans le chapitre précédent, par une somme finie :

$$\varphi_2(M,t+T) = \frac{k}{4\pi} \int_0^T ds \, \frac{\pi}{m} \left(\sum_{i=0}^{2m-1} \frac{e^{-\frac{kr^2}{4(T-s)}}}{(T-s)^2} \, r \cos\gamma \, \mu(P,t+s) \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{P_i} \right)$$

que nous traitons sous la forme :

$$\varphi_2(M,t+T) = \frac{k}{4m} \sum_{i=0}^{2m-1} r \cos\gamma \left(\int_0^T \frac{e^{-\frac{kr^2}{4(T-s)}}}{(T-s)^2} \mu(P,t+s) \left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_{P_i} ds \right)$$

On discrétise ensuite l'intégrale dans le temps suivant la technique exposée aux paragraphes 2.3.2.

$\varphi_2(M,t+T)$, pour tout point M_i intérieur au domaine se met alors sous la forme d'un produit matriciel [ligne] [colonne] .

Les termes de la matrice ligne sont du type $I_j(P_i,T)$. Le vecteur colonne $[\mu]$ est le vecteur des densités.

On écrit $\varphi_2(M,t+T)$ pour tous les points M_i choisis dans le domaine D et ceci à l'instant t + T qui nous intéresse.

$\varphi_2(M,t+T)$ apparaît alors sous la forme d'un vecteur :

$$[\varphi_2] = \begin{bmatrix} \varphi_2(M_0,t+T) \\ \varphi_2(M_1,t+T) \\ \varphi_2(M_2,t+T) \\ \cdots\cdots \\ \varphi_2(M_z,t+T) \end{bmatrix}$$

$[\varphi_2]$ est le résultat du produit matriciel $[B][\bar{\mu}]$ où $[\bar{\mu}]$ est le vecteur des densités et $[B]$ une matrice en général rectangulaire de 2mn colonnes et de z lignes.

2.4.2. Calcul de $\varphi(M,t+T)$

Pour avoir la solution $[\varphi]$ cherchée, aux divers points M_i ($\forall_i = 0, 1, 2, \dots z$) dans le domaine D à l'instant t + T, il suffit d'ajouter à $[\varphi_2]$ le vecteur $[\varphi_1]$:

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi(M_0, t+T) \\ \varphi(M_1, t+T) \\ \varphi(M_2, t+T) \\ \vdots \\ \varphi(M_z, t+T) \end{bmatrix} \qquad [\varphi_1] = \begin{bmatrix} \varphi_1(M_0, t+T) \\ \varphi_1(M_1, t+T) \\ \varphi_1(M_2, t+T) \\ \vdots \\ \varphi_1(M_z, t+T) \end{bmatrix}$$

chacun des termes de $[\varphi_1]$ est le résultat d'une intégrale double du type étudié au paragraphe 22.

2.4.3. Résultats numériques.

2.4.3.1. Domaine circulaire.

Pour tester la méthode nous avons choisi un domaine circulaire pour lequel nous avons pris la solution particulière suivante :

$$\varphi_{n,k} = J_n(\rho a_k^{(n)}/R)(A \sin n\theta + B \cos n\theta)\, e^{-\frac{1}{k}(a_k^{(n)}/R)^2 t}$$

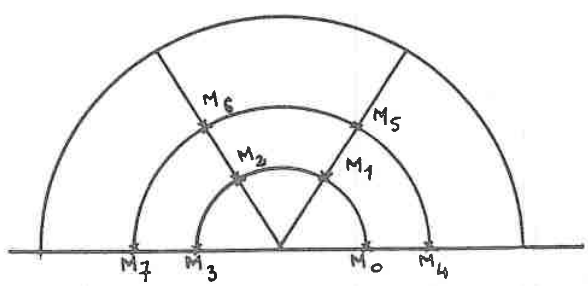
A et B sont des constantes, R le rayon du cercle, J_n la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n et $a_k^{(n)}$ le zéro d'ordre k de cette fonction. Nous avons choisi en particulier :

$$\varphi(M,t) = J_1(3.8317\,\rho/R)\cos\theta\, e^{-\left(\frac{3.8317}{R}\right)^2 t} \qquad \forall M(\rho,\theta) \in D$$

solution du problème de la chaleur défini pour les 3 conditions :

$$\begin{cases} \Delta\varphi(M,t) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(M,t) & \forall M \in \text{cercle de rayon } R = 1 \\ \varphi(M,0) = J_1(3.8317\ \rho/R)\cos\theta & \\ \varphi(P,t) = 0 & \forall P \in C \end{cases}$$

Cette solution correspond à un champ de températures constamment symétrique par rapport à Ox. Il suffira donc de se placer dans le demi-cercle supérieur. Le cas traité servant essentiellement de vérification numérique à la méthode , nous n'avons cherché la solution qu'aux points indiqués sur le schéma ci-dessous aux trois instants $t_0 = 0$, $t_1 = 0.02$, $t = 0.06$.



La discrétisation de l'intégrale curviligne s'appuye sur 2m = 6 points P_i régulièrement espacés de $\pi/3$ en $\pi/3$.

Etant donné le vecteur initial $[\varphi(M,0)] = \begin{bmatrix} 51,69 \\ 25,84 \\ -25,84 \\ -51,69 \\ 48,31 \\ 24,15 \\ -24,15 \\ -48,31 \end{bmatrix}$

Voici les résultats obtenus :

Points	Instants	Valeur approchée	Valeur exacte	Points	Instants	Valeur approchée	Valeur exacte
	0.02	38.54	38.54		0.02	35.77	36.02
M_0	0.04	28.77	28.73	M_4	0.04	25.26	26.85
	0.06	21.46	21.42		0.06	18.54	20.02
	0.02	19.27	19.27		0.02	17.88	18.01
M_1	0.04	14.38	14.36	M_5	0.04	12.63	13.42
	0.06	10.73	10.71		0.06	9.27	10.01
	0.02	-19.27	-19.27		0.02	-17.88	-18.01
M_2	0.04	-14.38	-14.36	M_6	0.04	-12.63	-13.42
	0.06	-10.73	-10.71		0.06	- 9.27	-10.01
	0.02	-38.54	-38.54		0.02	-35.77	-36.02
M_3	0.04	-28.77	-28.73	M_7	0.04	-25.26	-26.05
	0.06	-21.46	-21.46		0.06	-18.54	-20.02

Ces résultats ne constituent qu'un test de la méthode, le nombre de points de la discrétisation au contour est en particulier insuffisant.

2.4.3.2. <u>Domaine elliptique</u>

Nous avons ensuite résolu le problème dans le cas général d'un domaine elliptique de grand axe $a = 1$ et de petit axe $b = 0.5$. Le fait qu'il existe une représentation paramétrique simple de l'ellipse n'enlève rien à la généralité de la méthode et n'apporte qu'une commodité d'écriture en programmation.

La discrétisation au contour s'appuye sur $2m = 12$ points P_i correspondants à des valeurs de l'angle paramétrique telles que les points associés sur le grand cercle soient régulièrement espacés de $\pi/6$ en $\pi/6$ (figure 3).

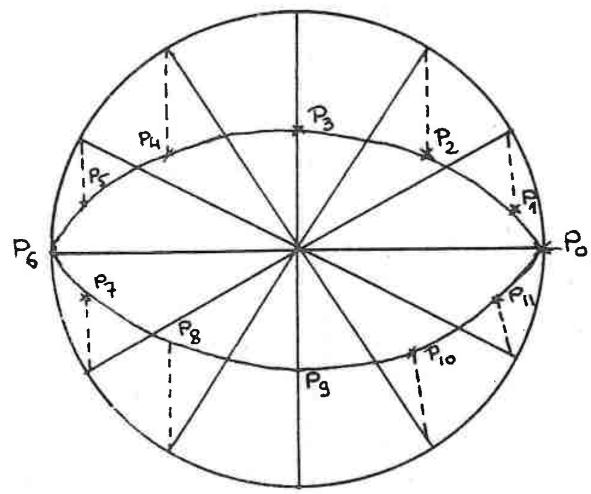


figure 3

Pour construire une solution particulière qui nous permettra de caractériser la qualité de la solution numérique, nous opérons comme suit : plaçons l'ellipse dans le carré unitaire (figure 4).

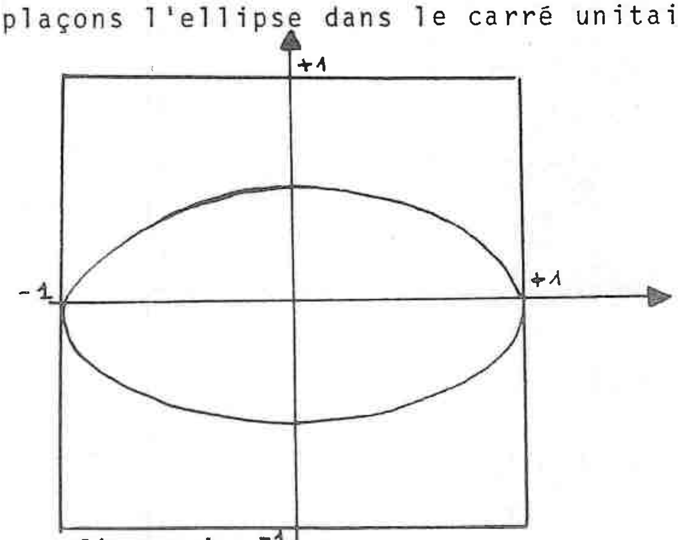


figure 4.

On connait dans un domaine carré une solution stricte du problème de la chaleur :

$$\phi(M,t) = \sin \pi x \ \ \sin \pi y \ e^{-2\pi^2 t}$$

Il suffit donc de choisir comme condition initiale

$$\varphi(M,0) = \sin \pi x \ \ \sin \pi y$$

et comme condition au contour :

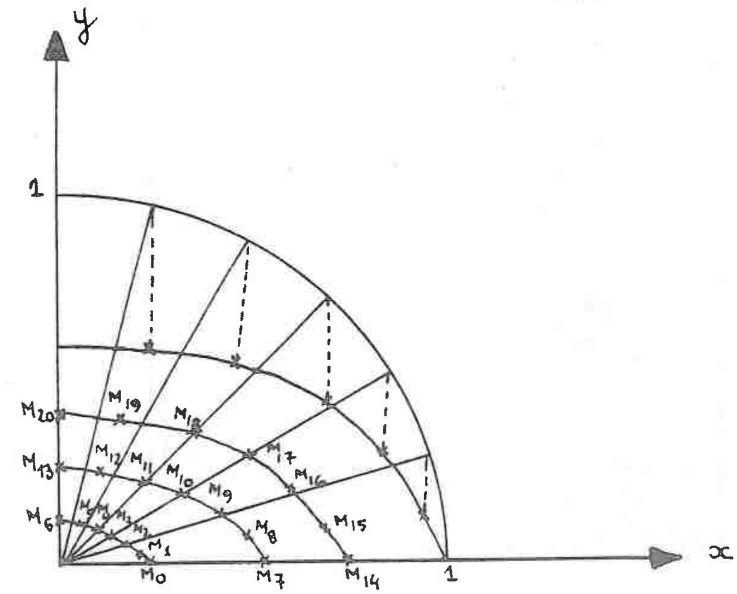
$$\varphi(P,t) = \sin \pi x \ \ \sin \pi y \ e^{-2\pi^2 t} \qquad (\text{avec } x^2 + 4y^2 = 1)$$

pour avoir en tout point intérieur à l'ellipse la solution stricte du problème de la chaleur défini par les 3 conditions :

$$\begin{cases} \Delta\varphi(M,t) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(M,t) \\ \varphi(M,0) = \sin\pi x \sin\pi y \\ \varphi(P,t) = \sin\pi x \sin\pi y \; e^{-2\pi^2 t} \quad \text{avec } P\in C \Longleftrightarrow x^2 + 4y^2=1 \end{cases}$$

sous la forme $\varphi(M,t) = \sin\pi x \sin\pi y \; e^{-2\pi^2 t}$.

La solution présentant des symétries, nous ne l'avons calculée que dans un quart de l'ellipse et aux 21 points M_i placés sur les 3 ellipses concentriques de grands axes respectifs 0.25, 0.5 et 0.75.



Pour chaque point M_i nous donnons la solution aux trois instants $t_1 = \dfrac{0.05}{3}$, $t_2 = 2 \times \dfrac{0.05}{3}$, $t_3 = 0.05$.

Temps	Points	Valeur approchée	Valeur exacte	Temps	Points	Valeur approchée	Valeur exacte	Temps	Points	Valeur approchée	Valeur exacte
t_1		0.11390	0.11390	t_1		0.34472	0.34472	t_1		0.44651	0.44705
t_2	M_1	0.11022	0.11022	t_2	M_8	0.33360	0.33358	t_2	M_{15}	0.43112	0.43258
t_3		0.10665	0.10665	t_3		0.32082	0.32078	t_3		0.42056	0.41858
t_1		0.13920	0.13920	t_1		0.46365	0.46361	t_1		0.75632	0.75196
t_2	M_2	0.13469	0.13469	t_2	M_9	0.44858	0.44860	t_2	M_{16}	0.72118	0.72762
t_3		0.13037	0.13037	t_3		0.43294	0.43300	t_3		0.70876	0.70407
t_1		0.11455	0.11455	t_1		0.40409	0.40400	t_1		0.73314	0.73117
t_2	M_3	0.11084	0.11094	t_2	M_{10}	0.39078	0.39088	t_2	M_{17}	0.70284	0.70751
t_3		0.10727	0.10726	t_3		0.37830	0.37823	t_3		0.68356	0.68461
t_1		0.07705	0.07704	t_1		0.27967	0.27971	t_1		0.53848	0.53252
t_2	M_4	0.07455	0.07455	t_2	M_{11}	0.27057	0.27066	t_2	M_{18}	0.51038	0.51528
t_3		0.07224	0.07223	t_3		0.26180	0.26190	t_3		0.49655	0.49861
t_1		0.03824	0.03823	t_1		0.14058	0.14069	t_1		0.27893	0.27395
t_2	M_5	0.03699	0.03698	t_2	M_{12}	0.13600	0.13613	t_2	M_{19}	0.26686	0.26509
t_3		0.03580	0.03579	t_3		0.13160	0.13173	t_3		0.25865	0.25651

Les résultats sont très satisfaisants dans la zone centrale mais un peu moins sur l'ellipse la plus proche du contour. Nous retrouvons le fait qui est déjà apparu dans l'application de la méthode du potentiel à des problèmes permanents [14,16] : le calcul de la densité des simples ou doubles couches se fait avec une précision satisfaisante, mais le champ est difficile à calculer au voisinage du contour.

2.4.4. Conclusion

Les résultats précédents montrent que, malgré les difficultés du calcul des intégrales intervenant dans ce problème on obtient la valeur numérique de la solution avec une approximation satisfaisante. La première programmation peut paraître assez lourde mais il suffit de mettre au point les procédures correspondantes. Sur gros ordinateur (essais faits sur Univac 1108) les temps de calcul pour un pas dans le temps sont alors de quelques dizaines de seconde.

La méthode des sources présente en outre par rapport aux méthodes classiques de réseau un double intérêt. Elle permet d'une part d'introduire des domaines de forme quelconque (il suffit par exemple d'avoir une représentation paramétrique approchée du contour) sans aucune difficulté supplémentaire. Elle s'impose, d'autre part, pour l'étude de régions fortement perturbées où la solution par réseau n'a plus grande significatic C'est dans cette direction que nous l'avons développée dans la II$^{\text{ème}}$ partie où elle permettra une étude fine des problèmes thermo-élastiques lorsque les conditions au contour présentent des discontinuités.

Notons enfin l'intérêt que présente cette méthode pour les problèmes "extérieurs", lorsque le domaine est infini.

Deuxième Partie

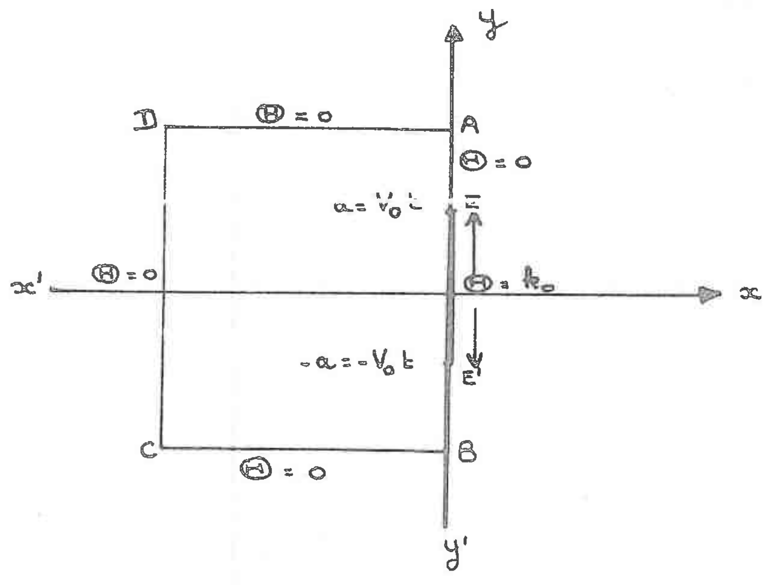
Introduction au problème

Nous cherchons à déterminer les contraintes thermo-élastiques qui naissent dans un parallélépipède rectangle d'épaisseur infinie sous l'effet des dilatations dûes à l'échauffement partiel d'une de ses faces. Nous nous limiterons à un problème bi-dimensionnel et n'étudierons que les déformations planes. Le plan de figure est le plan de section droite où nous mettons en évidence le rectangle ABCD, section du parallélépipède, et les axes Ox et Oy.

- Nous supposons que la température initiale du rectangle est nulle

$$\Theta(x, y, 0) = 0$$

- tout le contour reste à la température zéro sauf une portion du côté AD définie de la manière suivante : introduisons le segment E'E de bornes variables (-a, +a) où $a = V_0 t$, segment qui se réduit au point 0 à l'instant initial. V_0 est une constante qui caractérise l'évolution du segment E'E. Nous supposons que sur ce segment $\Theta(M,t)$ est une constante k_0.



Ce problème est inspiré de l'étude des contraintes dans la paroi d'une lingotière lors de la coulée de l'acier en fusion. L'axe de symétrie Ox correspond au fond de la lingotière et V_0 est la vitesse de montée de l'acier liquide dans la lingotière.

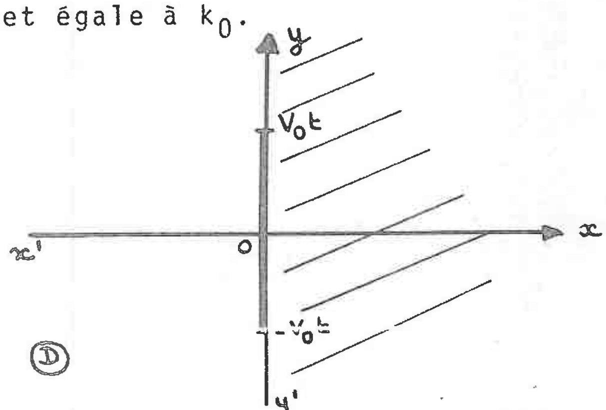
Les contraintes comme la température dépendent du temps mais nous nous intéressons seulement au phénomène à un instant fixé T. Nous cherchons donc, d'abord, à suivre l'évolution des températures pour $0 \leqslant t \leqslant T$, puis à l'instant T, à calculer les contraintes correspondantes au champ des dilatations.

1 - Formalisation de la solution

1.1. Détermination de la température.

La méthode développée comporte deux phases :

1) l'extension du problème au demi-plan des $x < 0$ où nous supposons la température initiale nulle. Sur la droite y'y limitant le demi-plan la température est nulle sauf sur le segment de bornes variables $(-V_0t, V_0t)$ où elle est constante et égale à k_0.



L'intérêt d'une telle extension est que la méthode des sources [réf 19,27] nous permet d'obtenir directement la solution formelle du problème. Notons la différence avec les problèmes traités en première partie où la méthode du potentiel conduisait à une équation intégrale dont il fallait chercher numériquement la solution.

2) L'adjonction à la solution du problème précédent d'un terme correctif qui permet de tenir compte du contour réel du rectangle*.

1.1.1. Cas du demi-plan

La fonction $\Theta(M,t)$ est la solution du système d'équations

$$(10)\quad \begin{cases} \Delta\Theta(M,t) = k\,\dfrac{\partial\Theta}{\partial t}(M,t) & \forall M \in D \\ \Theta(P,t) = h(P,t) & \forall P \in C \text{ contour de } D \\ \Theta(M,0) = 0 & \end{cases}$$

k est une constante thermique égale à $\rho c/\lambda$ [réf 7].

On connait la solution d'un tel problème de donnée initiale nulle dans le cas d'un domaine D de contour C et nous l'avons définie à l'aide de la méthode du potentiel dans la première partie. [réf 4,2].

L'expression de la solution se simplifie dans le cas du demi-plan et l'on sait [réf 12] que :

$$(11)\quad \boxed{\Theta(x,y,t) = -\frac{kx}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta,\tau)\, \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, d\eta}$$

Dans notre problème particulier :

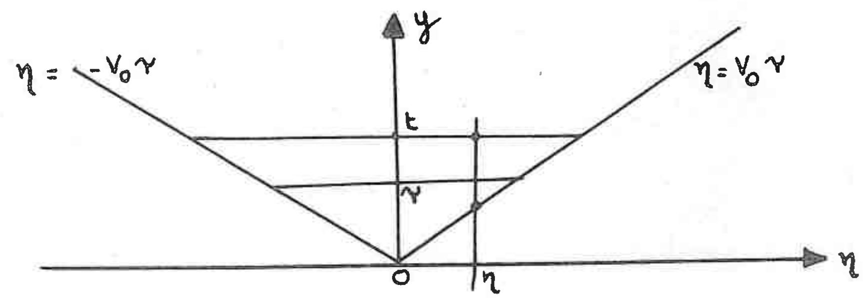
$$h(\eta,\tau) = k_0 \text{ si } \eta \in [-V_0\tau, V_0\tau]$$
$$= 0 \text{ si } \eta \in]-\infty, -V_0\tau[\ ,\ ]V_0\tau, +\infty[$$

* Notons que dans l'application numérique que nous ferons, ce terme correctif n'intervient pas dans le calcul de la température mais seulement dans celui des contraintes.

L'expression de $\Theta(M,t)$ se simplifie donc en :

$$(12) \quad \boxed{\Theta(x,y,t) = -k\,\frac{k_0 x}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_{-V_0\tau}^{V_0\tau} \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, d\eta}$$

nous pouvons intervertir les signes d'intégration :



$$\Theta(x,y,t) = -k\frac{k_0 x}{4\pi}\left\{\int_{-V_0 t}^{0} d\eta \int_{-\eta/V_0}^{t} \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, d\tau \right. +$$

$$\left. + \int_0^{V_0 t} d\eta \int_{\eta/V_0}^{t} \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, d\tau \right\}$$

$\int_a^b \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2}\, d\tau$ s'intègre strictement $\left| \frac{4e^{-\frac{k(x^2(y-\eta)^2)}{4(t-\tau)^2}}}{k(x^2+(y-\eta)^2)} \right|_a^b$

d'oū :

$$\Theta(x,y,t) = -\frac{k_0 x}{\pi}\left[\int_0^{V_0 t} \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2+(y-\eta)^2} + \int_{-V_0 t}^{0} \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2}{4(t+\eta/V_0)}}}{x^2+(y-\eta)^2}\, d\eta\right.$$

En changeant η en $-\eta$ dans la deuxième intégrale on obtient finalement comme expression de la température :

$$(13) \quad \boxed{\Theta(x,y,t) = -\frac{k_0 x}{\pi}\int_0^{V_0 t}\left(\frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2+(y-\eta)^2} + \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y+\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2+(y+\eta)^2}\right)d\eta}$$

1.2. Détermination des contraintes

1.2.1. Mise en équation : Cas de la déformation plane.

Des contraintes peuvent naître dans un corps élastique par suite de la non uniformité de la température. Si l'on désigne par γ la dilatation ou variation unitaire de longueur au point (x,y) et si l'on suppose que les liaisons extérieures ne provoquent aucune réaction, les composantes du tenseur de déformation $\mathcal{D}'$ due à la variation γ sont :

$$e'_1 = e'_2 = \gamma \qquad g'_3 = 0$$

Si les composantes satisfont aux conditions d'intégrabilité aucune contrainte ne prend naissance dans le corps, mais si les composantes de la déformation $\mathcal{D}'$ ne vérifient pas les conditions d'intégrabilité, il se superposera à la déformation thermique $\mathcal{D}'$ une déformation élastique $\mathcal{D}''$ telle que la déformation totale $\mathcal{D}=\mathcal{D}'+\mathcal{D}''$

vérifie les conditions d'intégrabilité. On peut alors trouver le déplacement (u,v) et le tenseur des contraintes $(n_1,n_2,n_3,t_1,t_2,t_3)$ vérifient les équations d'équilibre. On connait [réf 6] les composantes de la déformation totale sous leur forme simplifiée dans le cas d'une déformation plane.

$$\begin{cases} e_1 = -\left(\frac{-1+\sigma}{E}\right)((1-\sigma)\ n_1 - \sigma n_2) + (1+\sigma)\gamma & g_1 = 0 \\ e_2 = -\frac{(1+\sigma)}{E}\ ((1-\sigma)\ n_2 - \sigma n_1) + (1+\sigma)\gamma & g_2 = 0 \\ e_3 = 0 & g_3 = -\frac{(1+\sigma)}{E} t_3 \end{cases}$$

Réciproquement on obtient le tenseur des contraintes

$$\begin{cases} n_1 = \frac{-E}{(1-2\sigma)}\left(\frac{\sigma e_2}{1+\sigma} + \frac{1-\sigma e_1}{1+\sigma} - \gamma\right) & t_1 = 0 \\ n_2 = \frac{-E}{(1-2\sigma)}\left(\frac{\sigma e_1}{1+\sigma} + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} e_2 - \gamma\right) & t_2 = 0 \\ n_3 = \frac{-E}{1-2\sigma}\left(\frac{\sigma e_1 + e_2}{1+\sigma} - \gamma\right) & t_3 = \frac{-E}{1+\sigma} g_3 \end{cases}$$

La dilatation cubique θ se réduit à $\theta = e_1 + e_2$ et les formules précédentes deviennent :

$$\begin{cases} n_1 = \frac{-E}{(1-2\sigma)}\left(\frac{\sigma\theta}{1+\sigma} + \frac{(1-2\sigma)e_1}{1+\sigma} - \gamma\right) & t_1 = 0 \\ n_2 = \frac{-E}{(1-2\sigma)}\left(\frac{\sigma\theta}{1+\sigma} + \frac{(1-2\sigma)e_2}{1+\sigma} - \gamma\right) & t_2 = 0 \\ n_3 = \frac{-E}{1-2\sigma}\left(\frac{\sigma\theta}{1+\sigma} - \gamma\right) & t_3 = \frac{-E}{1+\sigma} g_3. \end{cases}$$

Les composantes de la déformation (e_1,e_2,g_3) et le tenseur des contraintes (n_1,n_2,t_3) doivent vérifier :

$$\begin{cases} \text{les équations d'équilibre} \\ \text{la condition d'intégrabilité} \\ \text{les conditions aux limites} \end{cases}$$

1) Les équations d'équilibre.

X,Y,Z désignent les composantes de la force de volume, les équations se réduisent dans le cas d'une déformation plane (Z est nul) [réf 6].

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_1}{\partial x} + \dfrac{\partial t_3}{\partial y} = X \\ \dfrac{\partial t_3}{\partial x} + \dfrac{\partial n_2}{\partial y} = Y \end{cases}$$

En supposant X et Y nuls le système précédent devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_1}{\partial x} + \dfrac{\partial t_3}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial t_3}{\partial x} + \dfrac{\partial n_2}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Le système des relations précédentes entraîne l'existence d'une fonction φ (fonction d'Airy) telle que.

$$\boxed{n_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad n_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad t_3 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}} \tag{14}$$

Les conditions d'équilibre sont alors automatiquement vérifiées

2) La condition d'intégrabilité

Elle se réduit [réf 6] , dans le cas d'une déformation plane à :

$$\frac{2\,\partial^2 g_3}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 e_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2}$$

Un calcul élémentaire conduit à :

(15) $$\boxed{\Delta\Delta\varphi = \frac{E}{1-\sigma}\,\Delta\gamma}$$

Le problème se ramène à la recherche d'une solution de cette équation vérifiant les conditions aux limites convenables.

3) <u>Conditions aux limites</u>

On établit que [réf 6]

$$\begin{cases} \alpha n_1 + \beta t_3 + \bar{X} = 0 \\ \alpha t_3 + \beta n_2 + \bar{Y} = 0 \end{cases}$$

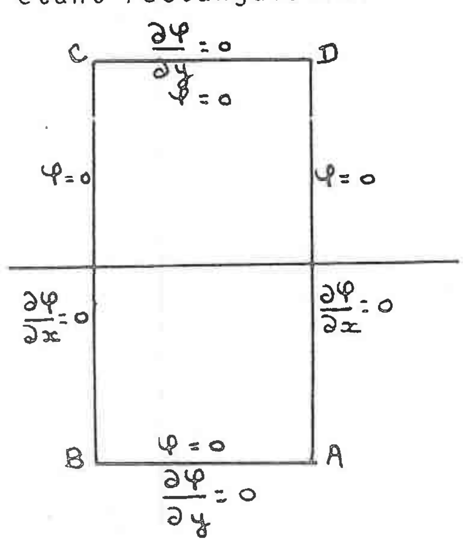
α et β sont les composantes de la normale extérieure à la surface externe. Dans le cas particulier d'un contour libre, le système précédent se réduit à :

$$\begin{cases} \alpha n_1 + \beta t_3 = 0 \\ \alpha t_3 + \beta n_2 = 0 \end{cases}$$

φ devra donc satisfaire :

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \beta \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} \\ \alpha \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \beta \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \end{cases}$$

Le contour étant rectangulaire.



Elles se réduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = 0 & \text{sur BC et AD} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = 0 & \text{sur AB et CD} \end{cases}$$

En intégrant le long du contour du rectangle on peut les transforme en :

$$(16) \qquad \boxed{\begin{array}{lll} \varphi = 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 & \text{sur BC et AD} \\[2ex] \varphi = 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 & \text{sur AB et CD} \end{array}}$$

Rappelons enfin que la dilatation γ est reliée à la température Θ par la relation $\gamma = \alpha\, \Theta$ (où α est une constante).

En réunissant les résultats obtenus en (14), (15), (16) on voit que le problème posé se ramène à la recherche d'une fonction d'Airy φ vérifiant :

$$(17) \qquad \boxed{\begin{array}{l} \Delta \Delta \varphi = \dfrac{E \alpha}{1 - \sigma}\, \Delta \Theta \\[2ex] \left.\begin{array}{r} \varphi = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \text{pour tout point de BC et de AD} \\[3ex] \left.\begin{array}{r} \varphi = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \text{pour tout point de AB et de CD} \end{array}}$$

Nous poserons par la suite $K = \dfrac{E \alpha}{1 - \sigma}$

Rappelons que E est le module d'Young, σ un coefficient sans dimension ou coefficient de Poisson et α une constante.

Les contraintes sont exprimées par

$$(18) \quad \boxed{\begin{aligned} n_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ n_2 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ n_3 &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} \end{aligned}}$$

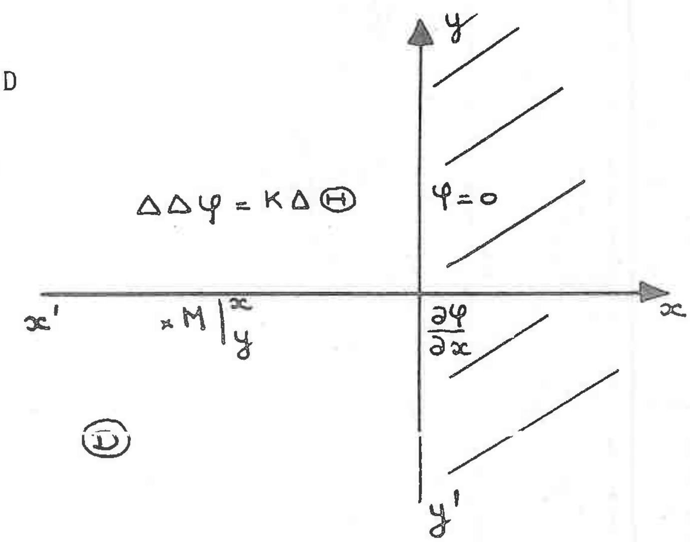
1.2.2. Méthode de calcul de la fonction d'Airy

Nous procédons ici encore en deux phases : extension au demi-plan des x négatifs, puis adjonction d'un terme complémentaire tenant compte des conditions au contour :

1) Extension du problème au demi-plan des $x < 0$:

Nous cherchons à déterminer une fonction φ vérifiant les conditions :

$$(19) \left\{ \begin{aligned} &\Delta\Delta\varphi = K \ \Delta \Theta \qquad \forall M \in D \\ &\left.\begin{aligned} \varphi &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \ \forall y \in x = 0 \end{aligned} \right.$$



Cette extension a l'avantage ici encore de permettre la formulation de la fonction d'Airy. Cette fonction $\varphi(M,t)$ dépend en fait du temps comme $\Theta(M,t)$ mais nous nous contenterons de la calculer à un instant T fixé pour lequel on veut connaître les contraintes correspondantes au champ des dilatations. La méthode des sources permet d'obtenir directement l'expression de la solution stricte du problème mais le calcul des intégrales qui le composent présente des difficultés tout à fait comparables à celles que nous avons rencontrées dans la première partie.

2) Adjonction d'un terme complémentaire

Nous superposerons un terme $\varphi^*(M,t)$ qui permet de tenir compte des conditions au contour.

1.2.3. Cas du demi-plan $x < 0$.

La fonction $\varphi_1(M,t)$ vérifiant le système

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1(M,t) = K \; \Theta(M,t) & \forall M \in D \\ \varphi_1(P,t) = 0 & \forall P \in C \end{cases}$$

est une solution particulière de $\Delta\Delta\varphi(M,t) = K\Delta\Theta(M,t)$.

Pour satisfaire à toutes les conditions au contour du système (19) il faudra ajouter une fonction bi-harmonique $\varphi_2(M,t)$. La solution du système (19) est alors $\varphi(M,t) = \varphi_1(M,t) + \varphi_2(M,t)$

$\varphi(M,t)$ vérifie en effet $\Delta\Delta\varphi = \Delta\Delta(\varphi_1 + \varphi_2) = K\Delta\Theta$ et nous pouvons imposer à φ_2 des conditions au contour convenables pour que φ vérifie toutes les équations du système (19).

1.2.3.1. Forme explicite de $\varphi_1(M,t)$

On sait que le système

$$\begin{cases} \Delta u = f(M) & \forall M \in D \\ u = g(P) & \forall P \in C \end{cases}$$

a pour solution [réf 12,18]

$$u(M) = \int_C g(P) \frac{dG(M,P)}{dn} ds + \iint_D G(M,M') f(M') dM'.$$

où $\mathcal{G}(M,M')$ est la fonction de Green du problème homogène. On connait $G(M,M')$ dans le cas particulier au demi-plan $x < 0$:

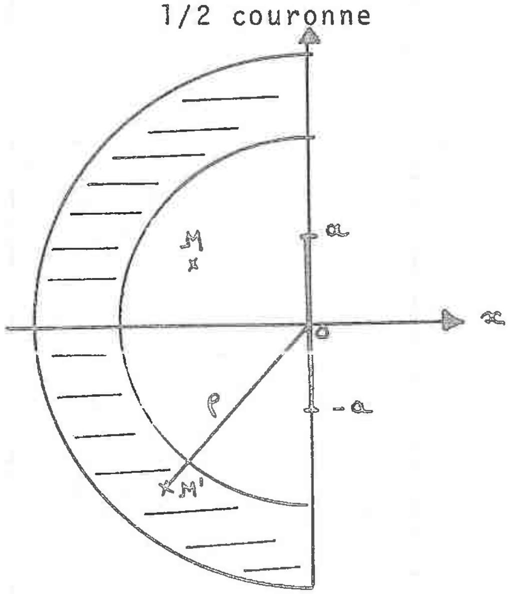
$G(M,M') = \mathrm{Log}\,\dfrac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'}}$. M_1 est le symétrique de M par rapport à l'axe Oy. Puisque $g(P) \equiv 0$ sur $y'y$ il restera donc :

$$\boxed{\varphi_1(M,t) = \frac{k}{2\pi} \iint_D \frac{\log \overline{MM'}}{\overline{M_1M'}}\, \Theta(M',t)\, dM'.} \tag{20}$$

1.2.3.2. <u>Existence de l'intégrale</u>.

Remarquons d'abord que la fonction intégrée possède une singularité logarithmique lorsque $M \longrightarrow M'$, mais cette singularité n'empêche pas à l'intégrale d'avoir un sens. D'autre part, D étant infini il nous faut vérifier que l'intégrale est convergente, ce qui sera vérifié si $\forall \varepsilon > 0, \exists R_0(\varepsilon)$ tel que si R_1 et $R_2 > R_0(\varepsilon)$ on a :

$$\left| \iint_{1/2 \text{ couronne}} \mathrm{Log}\, \frac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'}}\, \Theta(M,M',t)\, dM' \right| < \varepsilon$$



a) <u>majoration de $\Theta(M,t)$</u>

$$\Theta(M',t) = -\frac{k_0 x'}{\pi} \int_0^{V_0 t} \left(\frac{e^{-\frac{k(x'^2+(y'-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x'^2+(y2-\eta)^2} + \frac{e^{-\frac{k(x'^2+(y'+\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x'^2+(y'+\eta)^2} \right) d\eta$$

Pour majorer $\Theta(M,t)$ en valeur absolue on peut minorer $4(t - \eta/V_0)$ par $4t$:

$$|\Theta(M',t)| \leqslant \frac{k_0 |x'|}{\pi} \int_0^{V_0 t} \left(\frac{e^{-\frac{k(x'^2+(y'-\eta)^2)}{4t}}}{x'^2 + (y'-\eta)^2} + \frac{e^{-\frac{k(x'^2+(y'+\eta)^2)}{4t}}}{x'^2+(y'+\eta)^2} \right) d\eta$$

$$\frac{x'^2 + (y'-\eta)^2}{x'^2 + y'^2} = 1 + \frac{\eta^2 - 2\eta y'}{x'^2 + y'^2} \qquad \text{Posons } x'^2 + y'^2 = \rho^2$$

$$\frac{|\eta^2 - 2\eta y'|}{x'^2 + y'^2} \leqslant \frac{\eta^2}{\rho^2} + \frac{2\eta\rho}{\rho^2} \leqslant \frac{a^2}{\rho^2} + \frac{2a\rho}{\rho^2}$$

quand $\rho \to \infty \quad \frac{a^2}{\rho^2} + \frac{2a\rho}{\rho^2} \to 0$

$\exists$ donc un nombre R_1 tel que $\rho^2 > R^2 \Rightarrow \frac{a^2}{\rho^2} + \frac{2a\rho}{\rho^2} < \varepsilon$

On a ainsi $\quad 1 - \varepsilon < \frac{x'^2 + (y'-\eta)^2}{x'^2 + y'^2} < 1 + \varepsilon$

De la même façon on démontrerait que $\left| \frac{x'^2 + (y'+\eta)^2}{x'^2 + y'^2} \right|$

peut être majoré par $1 + \frac{a^2}{\rho^2} + \frac{2a\rho}{\rho^2}$ et que l'on a

$$1 - \varepsilon < \frac{x'^2 + (y'+\eta)^2}{x'^2 + y'^2} < 1 + \varepsilon .$$

d'où $\quad |\Theta(M',t)| \leqslant K_0 \, |x'| \quad \frac{e^{-k(1-\varepsilon)(x'^2 + y'^2)}}{(1-\varepsilon)(x'^2 + y'^2)}$

ou encore :

$$\boxed{\left|\Theta(M',t)\right| \leqslant K_1 \, |x'| \, \frac{e^{-k''(x'^2+y'^2)}}{x'^2+y'^2}} \qquad (21)$$

b) <u>Existence de l'intégrale.</u>

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'}} = \frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2}{(x'+x)^2+(y'-y)^2}$$. Posons comme précédemment $\left| \begin{array}{l} x' = \rho\cos\theta \\ y' = \rho\sin\theta \end{array}\right.$

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'}} = \frac{\rho^2+x^2-2x\rho\cos\theta+y^2-2\rho x\sin\theta}{\rho^2+x^2+2x\rho\cos\theta+y^2-2y\rho\sin\theta} =$$

$$= \frac{\rho^2+x^2+y^2-2\rho(x\cos\theta+y\sin\theta)}{\rho^2+x^2+y^2-2\rho(y\sin\theta-x\cos\theta)}$$

quand $\rho \to \infty$ $\quad \frac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'}} \longrightarrow 1$ et $\operatorname{Log}\frac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'}} \longrightarrow 0$

$\exists$ donc un nombre R' tel que, pour tout M' extérieur au cercle de rayon R' on ait $\left|\operatorname{Log}\frac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'}}\right| < K_2$

Si on choisit pour $R_0 = \max(R,R')$, pour tout R_1 et tout $R_2 > R_0(\varepsilon)$ on aura en passant en coordonnées polaires :

$$\iint_{1/2 \text{ couronne}} \left|\operatorname{Log}\frac{\overline{MM'}}{\overline{M_1M'}}\right| \left|\Theta(M',t)\right| dM' \leqslant K_1K_2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{R_1}^{R_2} \rho|\cos\theta| \, \frac{e^{-k\rho^2}}{\rho^2}\,\rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= 2K_1K_2 \int_{R_1}^{R_2} e^{-k\rho^2} d\rho .$$

$$\text{Or} \int_{R_1}^{R_2} e^{-k\rho^2} d\rho \leqslant \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{R_0} e^{-k\rho^2} d\rho = \frac{-1}{2kR_0}\left| e^{-k\rho^2}\right|_{R_1}^{R_2} ,$$

expression qui tend vers zéro quand R_1 et R_2 augmentent indéfiniment

1.2.3.3. Forme explicite de $\varphi_2(M,t)$.

Nous devons écrire que $\varphi(P,t) = 0 \ \forall P \in y'y$. Comme $\varphi_1(P,t) = 0$, $\forall P \in y'y$, cela entraîne $\varphi_2(P,t) = 0 \ \forall P \in y'y$.

Or on sait que si ψ est une fonction harmonique $x\psi$, $y\psi$ et $(x^2 + y^2)\psi$ sont des fonctions bi-harmoniques [réf 10].

Pour satisfaire à la condition $\varphi_2(P,t) = 0 \quad \forall P \in y'y$, il est naturel de choisir $\varphi_2(M,t) = x\,\psi(M,t)$ où $\psi(M,t)$ est une fonction harmonique que nous allons déterminer à partir de la deuxième condition au contour à imposer à φ_2.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(P,t) = 0 \quad \forall P \in y'y \Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vec{n}}(P,t) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vec{n}}(P,t) \quad \forall P \in y'y$$

Soit $x\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(P,t) + \psi_1(P,t) = -\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(P,t) \quad \forall P \in y'y$

$$\psi_1(P,t) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(P,t) \quad \forall P \in y'y.$$

La recherche de $\varphi_2(M,t)$ est ramenée à celle d'une fonction $\psi(M,t)$, solution du système :

$$\begin{cases} \Delta\psi(M,t) = 0 & \forall M \in D \\ \psi_1(P,t) = -\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(P,t) = h(P,t) & \forall P \in y'y \end{cases}$$

Nous avons rappelé au paragraphe 12.31 qu'une telle solution peut s'écrire :

$$\psi(M,t) = \int_C h(P,t)\,\frac{d}{d\vec{n}}\,G(M,P)\,dP.$$

avec $G(M,M') = \dfrac{1}{2\pi}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\overrightarrow{M_1M'}}$ dans le demi-plan $x < 0$.

D'où l'expression de $\psi(M,t)$:

$$\boxed{\psi(M,t) = -\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(y,t)}{\alpha^2+(y-\beta)^2}\,dy}$$ (M a pour coordonnées α, β)

Calcul de $h = -\ \partial\varphi_1 / \partial x$

Rappelons que $h(P,t) = -\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(P,t)$ où

$$\varphi_1(M',t) = \frac{k}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\text{Log}\left(\frac{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2}{(\xi+x')^2+(\eta-y')^2}\right)\Theta(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta .$$

Nous ne pouvons pas dériver sans précaution sous le signe somme :

$$\text{Posons } h_1(M',t) = -\frac{k}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\Theta(\xi,\eta,t)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\text{Log}\left(\frac{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2}{(\xi+x')^2+(\eta-y')^2}\right)d\xi\,d$$

$$\text{soit}\quad h_1(M't) = -\frac{k}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{-2(\xi-x')}{(\xi-x')^2+(\eta-y')^2}-\frac{2(\xi+x')}{(\xi+x')^2+(\eta-y')^2}\right)$$

$$\Theta(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta$$

qui devient lorsque $M' \in y'y$:

$$h_1(P,t) = h_1(y,t) = \frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{\xi}{\xi^2+(\eta-y)^2}\,\Theta(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta$$

Si $h_1(P,t)$ existe et converge uniformément par rapport à y, alors $h_1(P,t)$ est égal, pour tout y, à $-\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(P,t)$.

Etudions d'abord la contribution d'un domaine fini entourant la singularité $\xi = 0$, $\eta = y$, point où $\dfrac{\xi}{\xi^2+(\eta-y)^2}$ n'est pas défini.

Posons $\xi = \rho\cos\theta$

$\eta = y + \rho\sin\theta$

et isolons le point $P(\xi = 0,\ \eta = y)$ par un arc de courbe de rayon ε.

$$\left| h_1(P,t)\right| \leqslant \frac{k}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_{\varepsilon}^{R} \left|\Theta(\rho\cos\theta,\ y+\rho\sin\theta,t)\right| |\rho|\, |\cos\theta| \frac{|\rho|}{\rho^2}\, d\rho$$

$$\leqslant \frac{k}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos\theta|\, d\theta \int_{\varepsilon}^{R} \left|\Theta(\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta,t)\right| d\rho$$

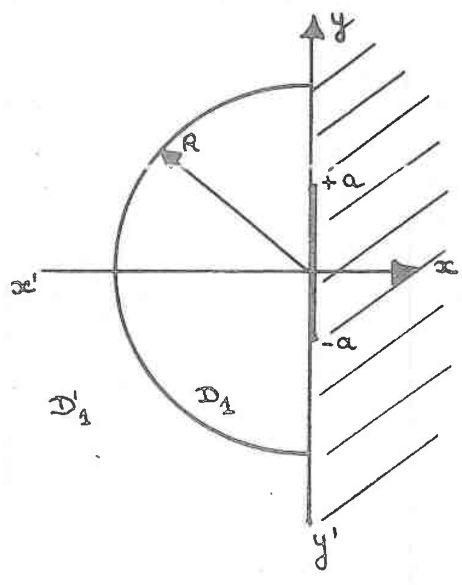
ρ n'apparait plus au dénominateur et nous obtenons une intégrale régulière par rapport aux variables ρ et θ et il n'y a aucune difficulté à faire tendre ε vers zéro.

Etudions maintenant la convergence à l'infini.

Nous avons montré [cf (21)] qu'il $\exists$ un nombre R tel que :

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2 > R^2 \gg a^2 \Longrightarrow |\Theta(\xi,\eta,t)| \leqslant K_1 |\xi| \frac{e^{-k''(\xi^2+\eta^2)}}{(\xi^2+\eta^2)}$$

Découpons alors le demi-plan en deux domaines : D_1 intérieur au cercle de rayon R et D'_1 extérieur au cercle :



Dans D'_1 $|\Theta(M,t)|$ est majorée par la valeur ci-dessus.

Dans D_1, comme dans tout le plan d'ailleurs, $|\Theta(M,t)|$ peut être majorée par sa valeur au contour soit k_0. (Propriété des fonctions calorifiques [réf 10]).

On peut en effet majorer les exponentielles par l'unité dans l'expression de $\Theta(M,t)$ et :

$$|\Theta(M,t)| \leqslant k_0 \frac{|x|}{\pi} \int_0^{V_0 t} \left(\frac{1}{x^2+(y-\eta)^2} + \frac{1}{x^2+(y+\eta)^2}\right) d\eta$$

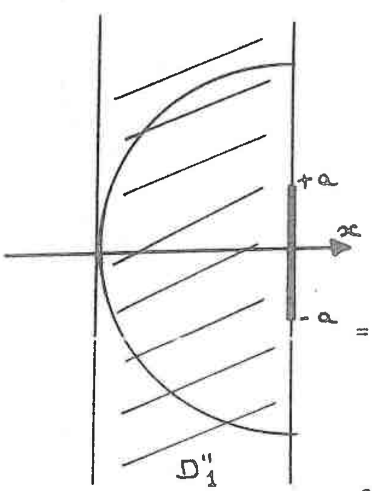
$$\leqslant \frac{k_0}{\pi} \left| \mathrm{Arctg}\left(\frac{y-\eta}{x}\right) + \mathrm{Arctg}\left(\frac{y+\eta}{x}\right) \right|_0^{V_0 t}$$

Chacun des arcs-tangentes prend, entre 0 et $V_0 t$, une valeur inférieure à $\frac{\pi}{2}$, d'où $|\Theta(M,t)| \leqslant k_0$.

On a ainsi :

$$|h_1(P,t)| \leqslant k_0 \iint_{D_1} \frac{|\xi|}{\xi^2+(\eta-y)^2} d\xi d\eta + K_1 \iint_{D'_1} \frac{\xi^2 e^{-k''(\xi^2+\eta^2)}}{(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+(\eta-y)^2)}$$

Soit D''_1 la bande infinie définie par $-R \leqslant \xi \leqslant 0$



$$\iint_{D_1} \frac{|\xi|}{\xi^2+(\eta-y)^2} d\xi\, d\eta \leqslant \iint_{D''_1} \frac{|\xi|\, d\xi\, d\eta}{\xi^2+(\eta-y)^2} = \int_0^R \xi d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\xi^2+(\eta-y)^2}$$

$$= \int_0^R d\xi \left| \mathrm{Arctg}\, \frac{\eta-y}{\xi} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \pi R$$

Dans D'_1 $\frac{\xi^2}{\xi^2+(\eta-y)^2}$ peut être majoré par 1 et :

$$K_1 \iint_{D'_1} \frac{\xi^2 e^{-k''(\xi^2+\eta^2)}}{(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+(\eta-y)^2)} \leqslant K_1 \iint_{D'_1} \frac{e^{-k''(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2} d\xi d\eta$$

quantité qui, nous l'avons montré, tend vers zéro $\forall y$ quand $R \longrightarrow \infty$. D'où :

$$|h_1(P,t)| \leqslant k_0 \pi R + K_1 \iint_{D'_1} \frac{e^{-k''(\xi^2+\eta^2)}}{(\xi^2+\eta^2)}\, d\xi\, d\eta$$

$h_1(P,t)$ est donc majorée en valeur absolue par une quantité bornée indépendamment de y.

$h(P,t)$ représente $h(P,t) = -\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \pi}(P,t)$ et $\Psi(M,t)$ a donc pour expression :

$$\boxed{\Psi(M,t) = \Psi(\alpha, \beta, t) = -\frac{\alpha k}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty}\int^{0} \frac{\xi \Theta(\xi,\eta,t)\, d\xi\, d\eta}{(\xi^2+(\eta-y)^2)(\alpha^2+(y-\beta)^2)}}$$

<u>Transformation de Ψ.</u>

Nous venons de voir que l'on peut majorer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} \frac{\xi\Theta(\xi,\eta,t)}{\xi^2+(\eta-y)^2}\, d\xi\, d\eta$

par une quantité de la forme $k\pi R + \varepsilon = K$.

On a donc :

$$|\Psi(M,t)| \quad \frac{\alpha k\ K}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\alpha^2+(y-\beta)^2}$$

, intégrale qui a un sens sur un domaine infini.

L'intégrale est absolument convergente : on peut prendre un ordre quelconque pour les intégrations et écrire :

$$\Psi(M,t) = -\frac{\alpha k}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} \Theta(\xi,\eta,t)\, d\xi\, d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(\xi^2+(\eta-y)^2)(\alpha^2+(y-\beta}$$

Posons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(\xi^2+(\eta-y)^2)(\alpha^2+(y-\beta)^2)}$ et $y-\beta = Y$

On a alors : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{(\alpha^2+Y^2)(\xi^2+(\eta-\beta)^2 - 2(\eta-\beta)Y+Y^2)}$

Notons $a = \alpha^2$, $b = -2(\eta-\beta)$, $c = \xi^2 + (\eta-\beta)^2$ et décomposons la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(Y^2 + a)(Y^2 + bY + c)} = \frac{\alpha Y + \beta}{a + Y^2} + \frac{\gamma Y + \delta}{Y^2 + bY + C}$$

On trouve $\alpha = \frac{-b}{ab^2 + (c-a)^2}$; $\beta = \frac{c - a}{(c-a)^2 + ab^2}$; $\gamma = \frac{b}{ab^2 + (c-a)}$

$$\delta = \frac{b^2 + a - c}{(c-a)^2 + ab^2}$$

d'où $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha Y + \beta}{a + Y^2}\, dY + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma Y + \delta}{Y^2 + bY + c}\, dY.$

$$I = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{YdY}{a + Y^2} + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{a + Y^2} + \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{YdY}{Y^2 + bY + c} + \delta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{Y^2 + bY +}$$

$$\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{YdY}{a + Y^2} = \frac{\alpha}{2} \Big| \mathrm{Log}\,(a + Y^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{a + Y^2} = \frac{\beta}{\sqrt{a}} \Big| \mathrm{Arctg}\, \frac{Y}{\sqrt{a}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\beta\pi}{\sqrt{a}}$$

$$\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y\,dY}{Y^2 + bY + c} = \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2Y + b}{Y^2 + bY = c}\, dY - \frac{b\gamma}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{Y^2 + bY + c} =$$

$$\frac{\gamma}{2} \left| \mathrm{Log}(Y^2 + bY + c) \right|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{b\gamma}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{Y^2 + bY + c}$$

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{Y^2 + bY + c} = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{(2Y+b)^2 + 4c - b^2}$$

Si $4c - b^2 > 0$ on a $\delta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{(2Y+b)^2 + 4c - b^2} = \frac{2\delta}{\sqrt{4c - b^2}} \left| \mathrm{Arctg}\, \frac{2Y+b}{\sqrt{4c-b^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty}$

$$= \frac{2\pi\delta}{\sqrt{4c - b^2}}$$

Or $4c - b^2 = \xi^2$. Nous ne changeons pas la valeur de l'intégrale en supprimant un ensemble de mesure nulle et supposant $\xi > 0$.

On obtient ainsi :

$$I = \frac{\beta\pi}{\sqrt{a}} + \left(\delta - \frac{b\gamma}{2}\right) \frac{2\pi}{\sqrt{4c-b^2}} + \frac{\alpha}{2} \left| \mathrm{Log}(a+Y^2) \right|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\gamma}{2} \left| \mathrm{Log}(Y^2+bY+c) \right|_{-\infty}^{+\infty}$$

On constate sur les expressions de α, β, γ, δ que $\alpha = -\gamma$:

$$\frac{\alpha}{2} \left| \mathrm{Log}(a+Y^2) \right|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\gamma}{2} \left| \mathrm{Log}(Y^2+bY+c) \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\alpha}{2} \left(\mathrm{Log}\left(\frac{Y^2+a}{Y^2+bY+c}\right) \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Finalement :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dY}{Y^2 + bY + c} = \frac{\beta\pi}{\sqrt{a}} + \left(\delta - \frac{b\gamma}{2}\right) \frac{2\pi}{\sqrt{4c - b^2}}$$

En revenant aux notations initiales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{((\eta - y)^2 + \xi^2)(\alpha^2 + (y-\beta)^2)} = \frac{\beta\pi}{|\alpha|} + \frac{\delta + (\eta - \beta)\gamma}{|\xi|}\pi$$

et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi dy}{(\xi^2 + (\eta - y)^2)(\alpha^2 + (y-\beta)^2)} = \left(\xi \frac{\beta\pi}{|\alpha|} + \xi \frac{(\delta + (\eta-\beta)\gamma)}{|\xi|}\pi\right) =$$

$$\pi \left(\frac{\xi\beta}{|\alpha|} - \frac{3(\eta - \beta)^2 + \alpha^2 - \xi^2 - 2(\eta - \beta)^2}{(\xi^2 - \alpha^2 + (\eta - \beta)^2)^2 - 4\alpha^2(\eta - \beta)^2}\right) =$$

$$- \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{(\xi + \alpha)((\eta - \beta)^2 + (\xi - \alpha)^2)}{4\alpha^2(\eta - \beta)^2 + (\xi^2 + (\eta - \beta)^2 - \alpha^2)^2}\right) = - \frac{\pi}{\alpha} \frac{(\xi + \alpha)}{(\eta - \beta)^2 + (\xi + \alpha)^2}$$

En effet $4\alpha^2(\eta - \beta)^2 + (\xi^2 + (\eta - \beta)^2 - \alpha^2)^2 =$

$$(\eta - \beta)^4 + 2(\eta - \beta)^2(\xi^2 + \alpha^2) + (\xi^2 - \alpha^2)^2 = ((\eta - \beta)^2 + (\xi - \alpha)^2)$$
$$((\eta - \beta)^2 + (\xi + \alpha)^2).$$

D'où l'expression définitive de $\Psi(M,t)$

$$\boxed{(22) \quad \Psi(M,t) = \frac{K}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{(\xi + \alpha)\ \Theta(\xi, \eta, t)}{(\eta - \beta)^2 + (\xi + \alpha)^2}\, d\xi\, d\eta}$$

1.2.3.4. Forme explicitée de $\varphi(M,t)$

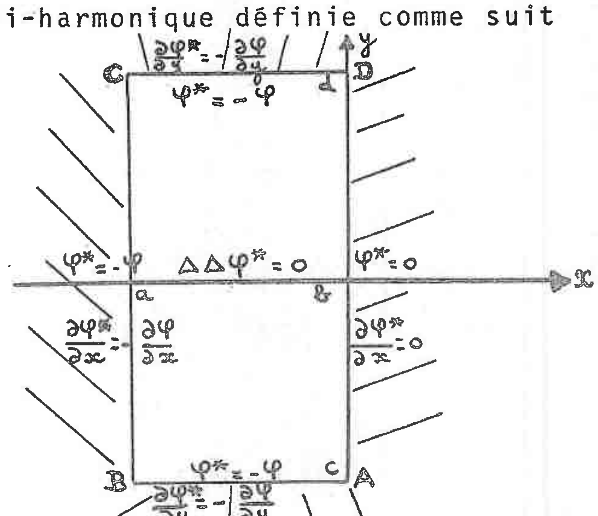
Comme nous avons posé $\varphi(M,t) = \varphi_1(M,t) + x\psi(M,t)$, compte tenu des relations (21) et (22) nous obtenons la solution du système (19) sous la forme :

$$\boxed{\varphi(M,t) = \frac{k}{\pi}\left\{ \alpha \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} \frac{(\xi+\alpha)\Theta(\xi,\eta,t)}{(\eta-\beta)^2\,(\xi+\alpha)^2}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{Log}\left(\frac{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}{(\xi+\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}\right)\Theta(\xi,\eta,t)\, d\xi\, d\eta \right\}} \tag{23}$$

1.2.4. Retour au cas du rectangle : recherche du terme complémentaire.

Pour tenir compte des conditions au contour et donner une solution du problème limité au rectangle et posé en (17) nous superposons à $\varphi(M,t)$ un terme correctif $\varphi^*(M,t)$, fonction bi-harmonique définie comme suit

$$(24)\quad \begin{cases} \Delta\Delta\varphi^*(M,t) = 0 & \forall M \in D \\ \varphi^*(P,t) = -\varphi(P,t) & \forall P \in C \\ \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial\vec{n}}(P,t) = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}(P,t) & \forall P \in AB,\ BC \text{ ou } CD \\ \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial\vec{n}}(P,t) = 0 & \forall P \in AD \end{cases}$$



La fonction $\varphi^*(M,t)$ est donc régulière et l'on sait résoudre numériquement un tel problème ; la méthode la plus couramment utilisée est sans doute, celle des différences finies.

Cependant pour obtenir une bonne qualité d'approximation cette méthode nécessite un grand nombre de points, ce qui conduit à la résolution de très gros systèmes. Elle limite d'autre part, le calcul de la solution aux noeuds du réseau utilisés pour la discrétisation, ce qui peut être insuffisant, dans les zones fortement perturbées par exemple où l'on souhaite avoir les résultats sur un quadrillage plus serré.

Signalons enfin la difficulté d'étendre cette méthode à des domaines quelconques. Nous lui avons préféré la méthode de collocation généralisée [réf 17], méthode qui a déjà été testée à l'I.U.C.A. [réf 28]. Elle consiste à approcher $\varphi^*(M,t)$ par des combinaisons linéaires de polynômes. Pour éviter les erreurs de chute nous avons choisi les polynômes de Tchebicheff. [réf 20,28]

1.2.4.1. <u>Forme de la solution</u>

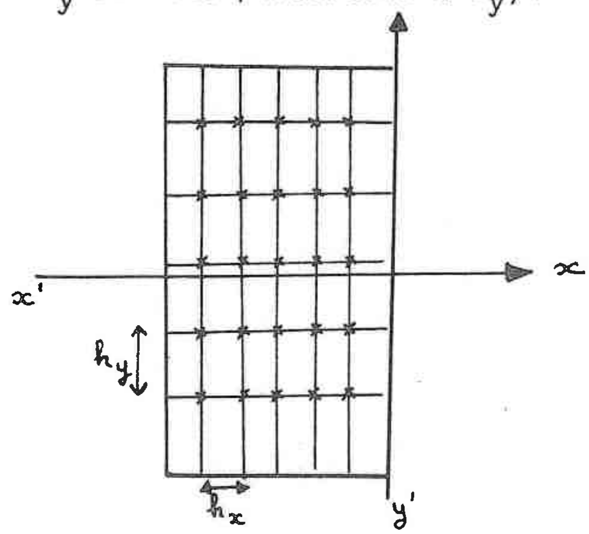
Après avoir fait les changements de variables

$$x = \frac{b-a}{2} X + \frac{b+a}{2} \; ; \; y = \frac{d-c}{2} Y + \frac{d+c}{2},$$

ramenant les variables $x \in [a,b]$ et $y \in [c,d]$ à des intervalles $(-1,+1)$, nous cherchons la fonction $\varphi^*(M,t)$ sous la forme d'une somme de produits de polynômes de Tchebicheff. On pose

$\varphi^*(M,t) = \sum_{i \leqslant n} \sum_{j \leqslant n} a_{ij} T_i(X) T_j(Y)$ et l'on cherche à déterminer les coefficients a_{ij} par la méthode de collocation généralisée [réf 17,28] en écrivant que $\varphi^*(M,t)$ vérifie en un certain nombre de points du domaine et de sa frontière les équations du système (24).

On définit à l'intérieur de D un réseau à mailles rectangulaires comportant $p_0 = n_x \times n_y$ points (distants de h_x sur les parallèles à 0_x et de h_y sur les parallèles à 0_y).



Sur un noeud (x_k, y_ℓ) on écrit $\Delta\Delta\varphi^*(X_k, Y_\ell, t) = 0$ soit

$$\frac{\partial^4 \varphi^*}{\partial x^4}(X_k, Y_\ell) + \frac{2\,\partial^4 \varphi^*}{\partial x^2\,\partial y^2}(X_k, Y_\ell) + \frac{\partial^4 \varphi^*}{\partial y^4}(X_k, Y_\ell) = 0$$

ou, sous forme matricielle :

$$[0 \quad \Delta\Delta(T_0(X_k)\,T_1(Y_\ell)) \quad \Delta\Delta(T_1(X_k)T_0(Y_\ell)) \;\ldots\; \Delta\Delta(T_0(X_k)T_n(Y_\ell)) \;\ldots$$
$$\ldots\Delta\Delta(T_n(X_k)T_0(Y_\ell))]\;[a] = 0$$

où $[a]$ est la matrice des a_{ij} et

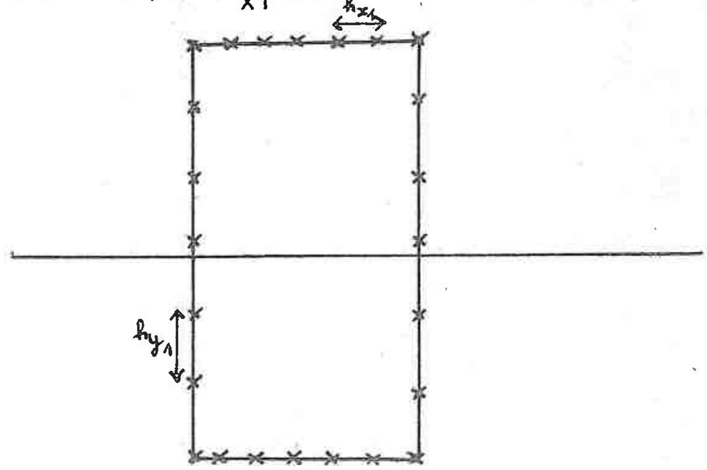
$$\Delta\Delta(T_i(X_k)T_j(Y_\ell)) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}(T_i(X_k)).T_j(Y_\ell) + \frac{2\,\partial^2}{\partial x^2}T_i(X_k)\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}T_j(Y_\ell) +$$
$$+ \frac{\partial^4}{\partial y^4}(T_j(Y_\ell))\,T_i(X_k)\;.$$

En répétant cette équation aux p_0 noeuds du quadrillage, on obtient un système rectangulaire de p_0 lignes et $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ colonnes

(25) $\left[0 \quad \Delta\Delta(T_0(X_k)T_1(Y_\ell)\ \Delta\Delta(T_1(X_k)T_0(Y_\ell)) \ \ldots \ \Delta\Delta(T_0(X_k)T_n(Y_\ell)) \ \ldots\right.$

$\left.\ldots \quad \Delta\Delta(T_n(X_k)T_0(Y_\ell))\right] \quad [a] = [0]$

Sur les côtés AB, BC, CD et AD on définit p_1 points répartis régulièrement avec un pas h_{x1} sur AB et CD et un pas h_{y1} sur BC et AD.



Pour tout noeud du contour (x_k, y_ℓ) on écrit

$\varphi^*(X_k,Y_\ell,t) = -\varphi(X_k,Y_\ell,t)$ soit (en notant $\varphi_{k\ell} = \varphi(X_k,Y_\ell,t)$) :

$\left[1 \quad T_0(X_k)T_1(Y_\ell) \quad T_1(X_k)T_0(Y_\ell) \ \ldots \ T_0(X_k)T_n(Y_\ell) \ \ldots\right.$

$\left.\ldots \ T_n(X_k)T_0(Y_\ell)\right] \quad [a] = \ -\varphi_{k\ell}$

Les p_1 équations obtenues aux p_1 points du contour définissent un système rectangulaire de dimension (p_1,N).

(26) $\left[1 \quad T_0(X_k)T_1(Y_\ell) \quad T_1(X_k)T_0(Y_\ell) \ \ldots \ T_0(X_k)T_n(Y_\ell) \ \ldots\right.$

$\left.\ldots \ T_n(X_k)T_0(Y_\ell)\right] \ [a] = \left[-\varphi_{k\ell}\right]$

De même on écrit au noeud (x_k,y_ℓ), la condition

$\frac{\partial\varphi^*}{\partial n}(X_k,Y_\ell,t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}(X_k,Y_\ell,t)$ c'est-à-dire, selon les cas

$\frac{\partial\varphi^*}{\partial x}(X_k,Y_\ell,t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X_k,Y_\ell,t)$, ou $\frac{\partial\varphi^*}{\partial y}(X_k,Y_\ell,t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(X_k,Y_\ell,t)$

Cette relation devient :

$$\left[0 \ \frac{\partial}{\partial \vec{n}}(T_0(X_k)T_1(Y_\ell)) \ \frac{\partial}{\partial \vec{n}}(T_1(X_k)T_0(Y_\ell)) \ldots \frac{\partial}{\partial \vec{n}}(T_0(X_k)T_n(Y_\ell)) \ldots\right.$$

$$\left. \ldots \frac{\partial}{\partial \vec{n}}(T_n(X_k)T_0(Y_\ell))\right] [a] = - \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(X_k, Y_\ell, t).$$

On obtient en écrivant cette relation pour les p_1 points du contour, le système rectangulaire de dimension (p_1, N) suivant :

$$(27) \quad \left[0 \ \frac{\partial}{\partial \vec{n}}(T_0(X_k)T_1(Y_\ell)) \ \frac{\partial}{\partial \vec{n}}(T_1(X_k)T_0(Y_\ell)) \ldots \frac{\partial}{\partial \vec{n}}(T_0(X_k)T_n(Y_\ell)) \ldots\right.$$

$$\left. \ldots \frac{\partial}{\partial \vec{n}}(T_n(X_k)T_0(Y_\ell))\right] [a] = \left[- \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(X_k, Y_\ell, t)\right]$$

En regroupant en un seul système les trois systèmes (25), (26), (27) on obtient finalement un système rectangulaire sur-dimensionné [réf 17] :

$$(28) \quad \boxed{[A][a] = [B]}$$

où $[A]$ est une matrice de $p = p_0 + 2p_1$ lignes et N colonnes composée de trois sous-matrices :

$$[A] = \begin{bmatrix} \left[\text{——} \ \frac{\partial^4}{\partial x^4}(T_i(X_k))T_j(Y_\ell) + \frac{2\partial^2}{\partial x^2}T_i(X_k).\frac{\partial^2}{\partial y^2}T_j(Y_\ell) + \frac{\partial^4}{\partial y^4}(T_j(Y_\ell))T_i(X_k) \ \text{——} \right] \\ \left[\text{————} \ T_i(X_k)T_j(Y_\ell) \ \text{————} \right] \\ \left[\text{——} \ \frac{\partial}{\partial x}(T_i(X_k))T_j(Y_\ell) \ \text{ou} \ \frac{\partial}{\partial y}(T_j(Y_\ell))T_i(X_k) \ \text{——} \right] \end{bmatrix}$$

$[a]$ est le vecteur des coefficients a_{ij} cherchés et $[B]$ le vecteur de N données :

$$[B] = \begin{bmatrix} [0] \\ \left[-\varphi(X_k, Y_\ell, t)\right] \\ \left[-\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}(X_k, Y_\ell, t)\right] \end{bmatrix}$$

Rappelons que φ et $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ sont nuls aux points de Oy.

On sait trouver la pseudo-solution d'un système rectangulaire tel que (28) [réf 3,9,13,16] et trouver $[a]$.

Connaissant $[a]$ on exprime $\varphi^*(M,t)$ en un point M(x,y) du domaine en faisant le produit matriciel.

$$[1 \quad T_0(X)T_1(Y) \quad T_1(X)T_0(Y) \ldots . T_0(X)T_n(Y) \ldots . T_n(X)T_0(Y)] [a] .$$

1.2.4.2. <u>Expression des termes du système matriciel.</u>

Les éléments A_{ij} de la matrice $[A]$ s'expriment à partir des polynômes de Tchebicheff $T_i(X)$, $T_j(Y)$ et de leurs dérivées d'ordre 1, 2 ou 4. Ils sont de la forme :

$$A_{ij} = T_i(X)\ T_j(Y)$$

$$A_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x}(X) . T_j(Y) \quad \text{ou } T_i(X) . \frac{\partial T_j}{\partial y}(Y)$$

$$A_{ij} = \frac{\partial^4 T_i}{\partial x^4}(X) + 2 \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}(X) . \frac{\partial^2 T_j}{\partial y^2}(Y) + \frac{\partial^4 T_j}{\partial y^4}(Y)$$

Les polynômes de Tchebicheff et leurs dérivées peuvent s'exprimer [réf 11,21] à partir de polynômes $U_n(X)$ définis par la récurrence :

$$U_n(X) = 2X\ U_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)$$

$$U_0 = 1$$

$$U_1 = 2X$$

Rappelons que X est la variable réduite appartenant à l'intervalle $[-1, +1]$.

On rappelle que : $T_i(X) = XU_i(X) - U_{i-1}(X)$

$$X \neq \pm 1 \begin{cases} \dfrac{\partial T_i(X)}{\partial x} = iU_i(X) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 T_i(X)}{\partial x^2} = \dfrac{i}{1-X^2}\left((1-i)X\, U_i(X) + i\, U_{i-1}(X)\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^4 T_i(X)}{\partial x^4} = 3\left(\dfrac{(3-2i^2)}{1-X^2} \cdot \dfrac{\partial^2 T_i}{\partial X^2} + \dfrac{15X^2 \cdot \dfrac{\partial^2 T_i}{\partial X^2} + 5i^2(1-i^2)T_i}{(1-X^2)^2}\right) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad T_i^{(q)}(\pm 1) = (\pm 1)^{i+q} \prod_{j=0}^{j=q-1} \frac{i^2 - j^2}{2j+1}$$

Les éléments du vecteur colonne B s'expriment en fonction de φ et de ses deux dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$. $\varphi_{ij} = \varphi(x_i, y_j, t)$ sera calculé à partir de (23). Exprimons $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ au point M(x'y).

Nous ne pouvons pas dériver sans précaution sous le signe somme : dérivons formellement sous le signe intégrale. Nous obtenons :

$$h_1(M,t) = h_1(\alpha, \beta, t) = \frac{K}{\pi} \iint_D \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\alpha(\xi+\alpha)}{(\eta-\beta)^2 + (\xi+\alpha)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \operatorname{Log}\left(\frac{(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2}{(\xi+\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2}\right)\right) \Theta(\xi, \eta, t)\, d\xi\, d\eta$$

et étudions la convergence de cette intégrale.

$$h_1(\alpha, \beta, t) = \frac{K}{\pi} \iint_D \frac{\xi}{(\eta-\beta)^2 + (\xi+\alpha)^2} + \frac{2\alpha(\eta-\beta)^2}{(\eta-\beta)^2 + (\xi+\alpha)^2} -$$

$$- \frac{\xi((\eta-\beta)^2 + (\xi^2 - \alpha^2))}{((\eta-\beta)^2 + (\xi+\alpha)^2)((\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2)} \Theta(\xi, \eta, t)\, d\xi\, d\eta$$

Des calculs élémentaires permettent d'écrire :

$$h_1(\alpha,\beta,t) = \frac{K}{\pi}\,2\alpha \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{-\xi(\xi-\alpha)}{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2} + \frac{(\eta-\beta)^2}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}\right)$$

$$\frac{\Theta(\xi,\eta,t)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}\,d\xi\,d\eta .$$

Etudions d'abord cette intégrale dans un domaine fini englobant la singularité ($\xi=\alpha$ et $\eta=\beta$) et posons :

$\xi = \alpha + \rho\cos\theta$

$\eta = \beta + \rho\sin\theta$ et isolons M par un cercle de rayon ε.

$$h_1(\alpha,\beta,t) = \frac{2\alpha K}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_{\varepsilon}^{R} \left| \frac{-\rho\cos\theta(\alpha+\rho\cos\theta)}{\rho^2} + \frac{\rho^2\sin^2\theta}{4\alpha^2}\right|$$

$$|\Theta(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta)|\;\rho\,d\rho\,d\theta.$$

$$h_1(\alpha,\beta,t) \leqslant \frac{K}{2\pi\alpha}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_{\varepsilon}^{R} |4\alpha^2\cos\theta(\alpha+\rho\cos\theta) - \rho^3\sin^2\theta\,||$$

$$|\Theta(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta,t)|\;d\rho$$

Par suite de la disparition du terme en ρ^2 au dénominateur nous pouvons faire tendre sans difficulté ε vers zéro.

Etudions la convergence à l'infini. En procédant exactement comme au paragraphe 1.2.3.3. on obtient :

$$|R_1(M,t)| \leqslant \frac{K}{\pi}k_0 \iint_{D_1} \frac{|-\xi(\xi-\alpha)}{(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2} + \frac{(\eta-\beta)^2}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}\Big|\,\frac{d\xi\,d\eta}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}$$

$$+ K_1 \iint_{D'_1} |\xi| \left| -\frac{\xi(\xi-\alpha)}{(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2} + \frac{(\eta-\beta)^2}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} \right| e^{-k''(\xi^2+\eta^2)} \frac{d\xi\, d\eta}{(\xi^2+\eta^2)\left((\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2\right)}$$

Or $\left|\left(\frac{-\xi(\xi-\alpha)}{(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2} + \frac{(\eta-\beta)^2}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}\right) \frac{1}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}\right| \leqslant$

$$\left| \frac{\xi(\xi-\alpha)}{((\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2)((\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2)} \right| + \frac{(\eta-\beta)^2}{((\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2)^2}$$

et $\xi(\xi-\alpha) = \xi^2 - \alpha\xi < \xi^2 - \alpha\xi + \alpha^2 + 3\alpha\xi$ puisque α et ξ sont toujours de même signe.

$\xi(\xi-\alpha) \leqslant (\xi+\alpha)^2$. D'oū :

$$\frac{(\eta-\beta)^2}{((\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2)^2} < 1 \text{ et } \frac{(\xi+\alpha)^2}{((\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2)\left((\xi+\alpha)^2+(\eta-\beta)^2\right)} < 1$$

et $|h_1(M,t)| \leqslant 2Kk_0R + 2K_1 \iint_{D'_1} |\xi| \frac{e^{-k''(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2} d\xi\, d\eta$

Nous avons vu que l'intégrale double ci-dessus tend vers zéro. $h_1(M,t)$ est donc majorée en valeur absolue par une quantité bornée, indépendamment de α et β. $h_1(M,t)$ représente donc la dérivée $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\beta,t)$.

$$\boxed{(29)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\beta,t) = \frac{K.2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{(\eta-\beta)^2}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} - \frac{\xi(\xi-\alpha)}{(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2}\right) \frac{\Theta(\xi,\eta,t)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} d\xi\, d\eta}$$

Nous procédons pour $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}(\alpha, \beta, t)$ de la même façon en posant :

$$h_2(M,t) = \frac{K}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\alpha(\xi+\alpha)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}+\frac{1}{4}\mathrm{Log}\left(\frac{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}{(\xi+\alpha)^2+(\eta+\beta)^2}\right)\right)\Theta(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta$$

$$h_2(M,t) \equiv h_2(\alpha,\beta,t) = \frac{K}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{2\alpha(\xi+\alpha)(\eta-\beta)}{((\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2)^2}+\frac{\alpha\xi(\eta-\beta)}{((\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2)((\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2)}\right)$$

$$\Theta(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta$$

$$h_2(\alpha,\beta,t) = \frac{\alpha K}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{(\eta-\beta)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}\left(\frac{2(\xi+\alpha)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}+\frac{\xi}{(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2}\right)$$

$$\Theta(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta$$

Comme pour $h_1(M,t)$, le noyau intégral de $h_2(M,t)$ est singulier quand $\eta = \beta$ et $\xi = \alpha$.

Dans un domaine fini, en posant comme précédemment

$$\xi = \alpha + \rho\cos\theta$$

$$\eta = \beta + \rho\sin\theta$$

$$|h_2(\alpha,\beta,t)| \leqslant \frac{\alpha K}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\rho\sin\theta}{4\alpha^2}\left(2\frac{(2\alpha+\rho\cos\theta)}{4x^2}+\frac{\alpha+\rho\cos\theta}{\rho^2}\right)$$

$$\Theta(\alpha+\rho\cos\theta, \beta+\ \sin\theta, t)\ \rho\, d\rho$$

$$|h_2(\alpha,\beta,t)| \leqslant \frac{K}{4\pi\alpha}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta\int_{\varepsilon}^{R}(2\rho^2(2\alpha+\rho\cos\theta)+4\alpha^2(\alpha+\rho\cos\theta))\Theta(\alpha+\rho\cos\theta,\beta+\rho\sin\theta,t)\,d\rho$$

C'est une intégrale régulière où l'on peut faire tendre ε vers zéro.

Pour étudier la convergence de $h_2(M,t)$ à l'infini, on peut, comme précédemment, utiliser les résultats du paragraphe 1.2.3.3. pour écrire :

$$|h_2(\alpha,\beta,t)| \leqslant \frac{Kk_0}{\pi} \iint_{D_1} \left| \frac{(\eta-\beta)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} \left(\frac{2(\xi+\alpha)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} + \frac{\xi}{(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2} \right) \right| d\xi\, d\eta$$

$$+ K_1 \iint_{D'_1} |\xi| \left| \frac{(\eta-\beta)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} \left(\frac{2(\xi+\alpha)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} + \frac{\xi}{(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2} \right) \right| \frac{e^{-k''(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}\, d\xi\, d\eta .$$

On peut remarquer que :

$$\frac{|(\xi+\alpha)(\eta-\beta)|}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} < 1 \quad \text{puisque} \quad ab < a^2+b^2.$$

et

$$\frac{|\xi(\eta-\beta)|}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} \leqslant \frac{|(\xi+\alpha)(\eta-\beta)|}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} \leqslant 1$$

puisque α et ξ étant < 0 $\quad |\xi| < |\xi+\alpha|$

D'où :

$$|h_2(\alpha,\beta,t)| \leqslant 3Kk_0\, R + 3K_1 \iint_{D'_1} |\xi|\, \frac{e^{-k''(\xi^2+\eta^2)}}{\xi^2+\eta^2}\, d\eta ,$$

majoration permettant d'affirmer la convergence uniforme de $h_2(M,t)$ qui représente bien $\frac{\partial}{\partial\beta}\varphi(\alpha,\beta,t)$.

$$\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}(\alpha,\beta,t) = \frac{K\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} \frac{(\eta-\beta)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} \left(\frac{2(\xi+\alpha)}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2} + \frac{\xi}{(\eta-\beta)^2+(\xi-\alpha)^2} \right) \Theta(\xi,\eta,t)\, d\xi\, d\eta .} \tag{30}$$

2. Application numérique

2.1. Description du problème.

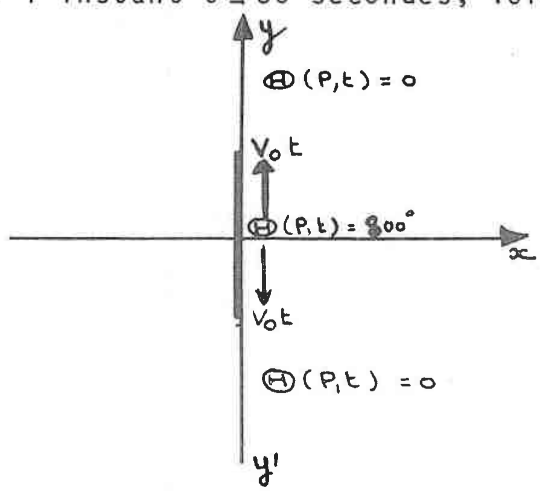
Pour appliquer les résultats théoriques obtenus au chapître précédent nous avons pris les données suivantes :

pour la définition de $\Theta(M,t)$ $k_0 = 800°$

$V_0 = 1{,}33$ cm/s

$k = \frac{\rho c}{\lambda}$ avec $\begin{cases} \rho = 7{,}25 \text{ g/cm} \\ \lambda = 0{,}1 \text{ cal/cm sec } 0°\text{C} \\ C = 0{,}13 \text{ cal/g } 0°\text{C} \end{cases}$

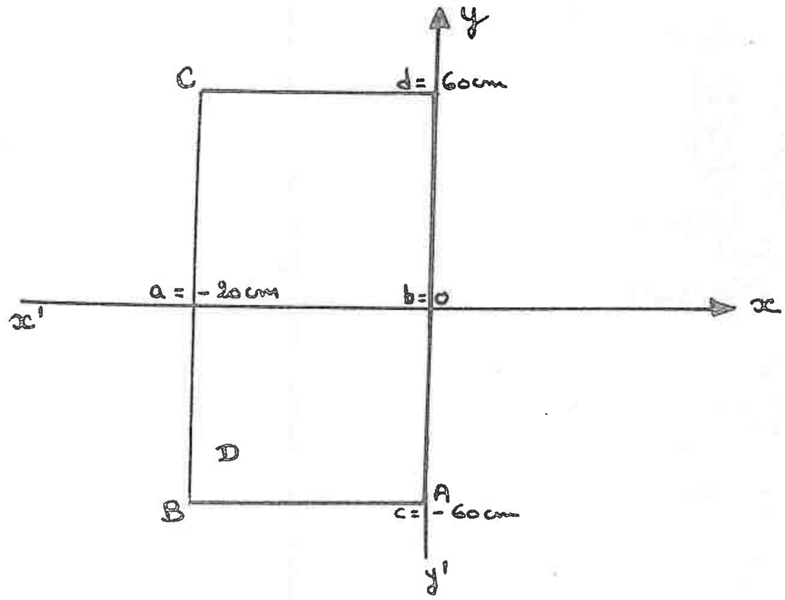
Nous donnerons la répartition des températures dans le domaine à l'instant $t \simeq 30$ secondes, lorsque $V_0 t = 41$ cm.



pour le calcul des contraintes

Nous donnerons le champ des contraintes au même instant $t \simeq 30$ secondes dans le demi-plan $x < 0$ ou dans le rectangle ABCD pour lequel $-20 \leqslant x \leqslant 0$

$- 60 \leqslant y \leqslant +60$



La constante $K = \dfrac{E\alpha}{1-\sigma}$ correspond aux valeurs suivantes :

$$E = 8000 \text{ kg/mm}^2$$

$$\alpha = 10^{-5}/\text{degré}$$

$$\sigma = 0{,}3$$

2.2. Calcul numérique de $\Theta(M,t)$

2.2.1. Transformation de $\Theta(M,t)$

Rappelons que $\Theta(M,t)$ a pour expression :

$$\Theta(x,y,t) = -\frac{k_0 x}{\pi}\left\{\int_0^{V_0 t}\left[\frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2+(y-\eta)^2}\,d\eta + \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y+\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2+(y+\eta)^2}\,d\eta\right]\right\}$$

L'exponentielle $\dfrac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2+(y-\eta)^2}$ peut être extrêmement petite

si $\eta \longrightarrow V_0 t$ sauf lorsque $x \longrightarrow 0$ et $\eta \longrightarrow y$, point où la fonction prend la valeur 1. Le noyau est de plus singulier lorsque simultanément $x = 0$ et $\eta = y = V_0 t$. Nous dirons que l'exponentielle est "pseudo-singulière" au voisinage du contour, zone où elle est difficile à approcher numériquement. Comme dans la première partie, nous isolons cette singularité dans un terme que nous intégrons strictement en écrivant :

$$L_1 = -\frac{k_0 x}{\pi}\int_0^{V_0 t} \frac{e^{\frac{-k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2+(y-\eta)^2}\,d\eta = -\frac{k_0 x}{\pi}\int_0^{V_0 t} \frac{e^{\frac{-k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}-1}{x^2+(y-\eta)^2}\,d\eta$$

$$-\frac{k_0 x}{\pi}\int_0^{V_0 t} \frac{d\eta}{(x^2+(y-\eta)^2)}$$

$$\text{Or } -x\int_0^{V_0 t} \frac{d\eta}{x^2+(y-\eta)^2} = \Big| \text{Arctg}\left(\frac{y-\eta}{x}\right)\Big|_0^{V_0 t} = \text{Arctg}\left(\frac{y-V_0 t}{x}\right)$$

$$-\text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{d'où } L_1 = -\frac{k_0 x}{\pi}\int_0^{V_0 t} \frac{e^{\frac{-k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}-1}{x^2+(y-\eta)^2}\,d\eta + \frac{k_0}{\pi}\left(\text{Arctg}\left(\frac{y-V_0 t}{x}\right) -\right.$$

$$\left. - \text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$\displaystyle\int_0^{V_0 t} \frac{e^{\frac{-k(x^2+(y-\eta)^2}{4(t-\eta/V_0)}}-1}{x^2+(y-\eta)^2}$ est alors un terme régulier dont le noyau

est uniformément borné.

En effet

$$|N| \leqslant \left| x\left(\frac{e^{-\frac{k(x^2 + (y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}} - 1}{x^2 + (y-\eta)^2} \right) \right| \leqslant |x| \quad \left| \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4t}} - 1}{x^2 + (y-\eta)^2} \right|$$

en minorant $4(t - \eta/V_0)$ par sa plus petite valeur soit 4t.
D'autre part, au voisinage de X = 0, on peut majorer e^X et trouver une constante telle que $|1 - e^X| \leqslant k_1 X$. En particulier, au voisinage de x = 0, y = η, où l'on peut trouver Δ tel que $-\Delta \leqslant -(x^2 + (y-\eta)^2) \leqslant 0$, on écrira :

$$\left|1 - e^{-\frac{k(x^2 + (y-\eta)^2)}{4t}}\right| < \frac{k_1 k}{4t} (x^2 + (y-\eta)^2)$$

d'où $|N| \leqslant \frac{k_1 k}{4\pi} |x|$, quantité qui tend vers zéro si $x \longrightarrow 0$.

$\Theta(x,y,t)$ étant une fonction symétrique en y la "pseudo-singularité" que nous venons d'étudier sur le terme
$e^{-\frac{k(x^2 + (y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}$ quand y est positif, apparaît de la même façon sur le terme $e^{-\frac{k(x^2 + (y+\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}$ lorsque y est négatif. Nous utiliserons cette symétrie pour nous ramener dans tous les cas à $y > 0$. On calculera alors $\Theta(x,y,t)$ au voisinage du contour par l'expression :

$$\boxed{\Theta(x,y,t) = -\frac{k_0 x}{\pi}\left(\int_0^{V_0 t} \frac{e^{-\frac{k(x^2 + (y+\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2 + (y+\eta)^2} d\eta + \int_0^{V_0 t} \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}} - 1}{x^2 + (y-\eta)^2} d\eta \right) + \frac{k_0}{\pi}\left(\mathrm{Arctg}\left(\frac{y - V_0 t}{x}\right) - \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)} \qquad (31)$$

A l'intérieur du domaine et suffisamment loin du contour le calcul de $\Theta(x,y,t)$ sera fait, plus simplement, à partir de son expression initiale :

$$\boxed{\Theta(x,y,t) = -\frac{xk_0}{\pi}\int_0^{V_0t} \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y+\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2+(y+\eta)^2}\,d\eta + \frac{e^{-\frac{k(x^2+(y-\eta)^2)}{4(t-\eta/V_0)}}}{x^2+(y-\eta)^2}\,d\eta} \tag{32}$$

Une étude numérique expérimentale permet de distinguer facilement ces deux domaines.

Les intégrales simples qui interviennent dans les expressions ci-dessus sont calculées par interpolation du noyau par une somme de polynômes de Tchebicheff sur un support de Tchebicheff [réf 17].

2.2.2. Résultats numériques

Rappelons que nous avons calculé la répartition des températures à l'instant $t \simeq 30''$ (lorsque V_0t = 41 cm). En raison de la symétrie de $\Theta(M,t)$ nous nous limitons au quart de plan .

Remarque :

Pour calculer $\Theta(M,t)$ au voisinage du contour par l'expression (31), nous interpolons le noyau par un polynôme de degré 40. Les résultats sont alors obtenus avec la précision maximum de l'ordinateur (10^{-7}).

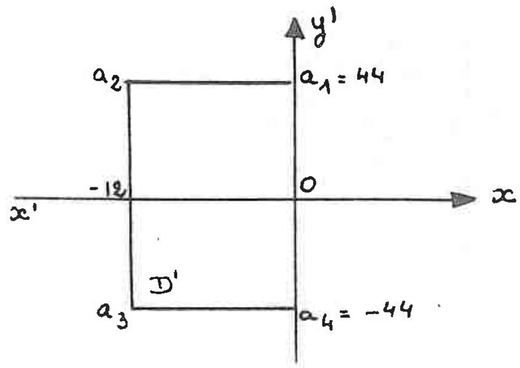
A l'intérieur de D et suffisamment loin du contour un polynôme de degré 30 suffit pour calculer $\Theta(M,t)$ à partir de l'expression (32) et avec la même précision.

Par contre le calcul de $\Theta(M,t)$ au voisinage du contour par l'expression (32) en utilisant un polynôme d'interpolation de degré 100 ne donne des résultats qu'avec trois chiffres exacts. D'autre part quel que soit le degré du polynôme nous n'avons pu dépasser une précision de l'ordre de 10^{-4}.

2.2.3. Cas du rectangle

On remarque sur les résultats précédents que la température tend rapidement vers zéro à l'intérieur du demi-plan. $\Theta(M,t)$ est en fait nulle à l'extérieur d'un domaine rectangulaire D' délimité par $-12 \leqslant x \leqslant 0$

$-44 \leqslant y \leqslant 44$.



Les conditions au contour du système d'équations (17) dans le cas du domaine rectangulaire sont donc automatiquement vérifiées et le terme correctif sur la température est nul.

2.3. Calcul numérique des contraintes : cas du demi-plan.

2.3.1. Remplacement par un domaine fini

$\Theta(M,t)$ étant nulle à l'extérieur du domaine D', le calcul de toute intégrale de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{0} K(M,M',t)\ \Theta(M',t)\ dM'$ étendue au demi-plan $x < 0$ peut être remplacé par celui de l'intégrale $\iint_{D'} K(M,M',t)\ \Theta(M,t)$ étendue au domaine fini D'. D'où l'express de $\varphi(M,t)$

$$\boxed{\varphi(M,t) = \frac{K}{\pi}\left\{ \alpha \iint_{D'} \frac{\xi+\alpha}{(\eta-\beta)^2+(\xi+\alpha)^2}\ \Theta(\xi,\eta,t)\ d\xi d\eta + \frac{1}{4}\iint_{D'} \mathrm{Log}\left(\frac{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}{(\xi+\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}\right)\ \Theta(\xi,\eta,t)\ d\xi d\eta \right\}} \tag{33}$$

Répartition des températures à l'instant t = 30".

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	44
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.80	42
0	0	0	0	0	0	0	0	0.04	45.18	40
0	0	0	0	0	0	0	0.05	03.91	105.84	38
0	0	0	0	0	0	0.02	0.84	19.19	280.35	36
0	0	0	0	0	0	0.17	0.73	43.17	240.72	34
0	0	0	0	0	0	0.75	9.31	67.48	282.37	32
0	0	0	0	0	0.04	2.03	17.20	92.40	314.99	30
0	0	0	0	0.09	0.44	4.17	26.74	115.86	340.98	28
0	0	0	0	0.09	0.98	07.18	37.33	137.39	362.38	26
0	0	0	0.02	0.22	1.84	11.01	48.48	157.39	380.39	24
0	0	0	0.05	0.45	3.05	15.55	59.86	175.55	395.82	22
0	0.01	0.01	0.11	0.81	4.63	20.60	71.23	192.24	409.22	20
0	0.	0.02	0.20	1.31	6.57	26.13	82.45	207.54	420.99	18
0	0	0.05	0.35	1.98	8.86	31.99	93.41	221.64	431.44	16
0	0.01	0.09	0.57	2.82	11.45	38.10	104.06	234.60	440.82	14
0	0.02	0.15	0.85	3.84	14.83	44.37	114.37	246.70	449.28	12
0	0.04	0.24	1.22	5.04	17.45	50.74	124.30	257.90	456.95	10
0	0.07	0.37	1.79	6.41	20.78	57.16	133.87	268.34	463.97	8
0.01	0.10	0.53	2.22	7.93	24.26	63.54	243.02	278.03	470.37	6
0.02	0.15	0.71	2.81	9.51	27.70	69.60	151.42	286.67	476.04	4
0.04	0.20	0.88	3.33	10.84	30.49	74.37	157.90	293.33	480.30	2

−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0

Figure 5

2.3.2. Calcul de $\varphi(M,t)$

Avant de calculer numériquement $\varphi(M,t)$ nous apporterons une dernière transformation à son expression ci-dessus. En effet si Log $\overline{M_1M'}$ est régulier dans D', Log $\overline{MM'}$ est infini quand M et M' sont confondus. Aussi, pour tenir compte de la pseudo-singularité du logarithme au voisinage du point $M \equiv M'$, nous écrirons $\varphi_1(M,t)$ sous la forme :

$$\varphi_1(M,t) = \frac{K}{4\pi}\left\{\iint_{D'} \text{Log}\, \overline{MM'}(\Theta(M',t) - \Theta(M,t))dM'\right.$$

$$\left. + \Theta(M,t) \iint_{D'} \text{Log}\, \overline{MM'}\, dM' - \iint_{D'} \text{Log}\, \overline{M_1M'}\, \Theta(M,t)\, dM'.\right\}$$

En isolant la singularité dans le terme $\iint_{D'} \text{Log}\, \overline{MM'}\, dM'$

dont on peut faire un calcul exact à partir des intégrales de la forme $\int_0^a \int_0^b \text{Log}\,(X^2 + Y^2)\, dX\, dY$ (a et b $\geq$ 0).

Des calculs élémentaires donnent

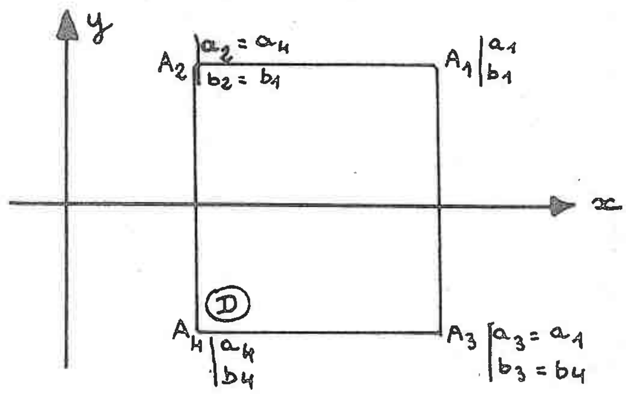
$$\boxed{\int_0^a \int_0^b \text{Log}(X^2 + Y^2)\, dX\, dY = ab\, \text{Log}(a^2+b^2) + a^2 \text{Arctg}\, \frac{b}{a} - 3ab + b^2\, \text{Arctg}\, \frac{a}{b}} \tag{34}$$

D'autre part, en raison de la symétrie du logarithme on a $\forall$a et b :

$$\int_a^b \int_0^b \text{Log}(X^2 + Y^2)\, dX\, dY = \text{signe}(a,b) \int_0^{|a|} \int_0^{|b|} \text{Log}(X^2+Y^2) dX\, dY = S(OA)$$

(A étant le point de coordonnées (a,b) dans le repère d'axes rectangulaires Ox,Oy).

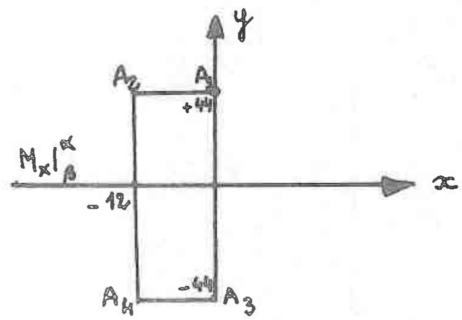
Enfin quel que soit le domaine D.



On peut toujours écrire $\iint_D \text{Log}(X^2 + Y^2)\, dX\, dY = S(OA_1) - S(OA_2) - S(OA_3) + S(OA_4)$

On calculera ainsi $\iint_D \text{Log}((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2)\,dx\,dy$ par la quantité

$S(MA_1) + S(MA_4) - S(MA_2) - S(MA_3)$.



On peut remarquer que la formule (34) est valable quel que soient les signes de a et b et dans tous les cas de figure.

Le terme Log $\overline{MM'}(\Theta(M',t) - \Theta(M,t))$ est alors régulier et le calcul de son intégrale sur un domaine fini ne pose plus de problèmes.

Les intégrales doubles qui restent alors dans l'expression de $\varphi(M,t)$ sont calculées par une succession de deux intégrales simples, dont les noyaux sont interpolés par une somme de polynômes de Tchebicheff sur un support de Tchebicheff [réf 17].

2.3.3. Calcul des contraintes

Nous avons fait un calcul approché des contraintes en interpolant la fonction $\varphi(M,t)$ par une somme de polynômes de Tchebicheff sur un support de Tchebicheff [réf 11,17,21].

Nous nous limiterons aux résultats obtenus sur la contrainte $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ et dans un quart de plan en raison de la symétrie par rapport à Ox. (figure 6).

2.4. Calcul numérique des contraintes : cas du rectangle.

Comme dans le cas du demi-plan nous nous limiterons au calcul de la contrainte $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

2.4.1. Résultats numériques.

Ces résultats correspondent aux chois des données suivantes* :

$$\begin{matrix} h_x = 4 & & n_x = 4 \\ & \text{soit} & \\ h_y = 6 & & n_y = 9 \end{matrix}$$

Ce qui permet d'écrire l'équation (1) du système (13) en 36 points intérieurs au domaine.

$$\begin{matrix} h_{x1} = 2.5 & & \\ & \text{soit} & p_1 = 46 \\ h_{y1} = 4. & & \end{matrix}$$

Ce qui correspond à 46 points répartis sur le contour C de D où l'on écrit que les équations (2) et (3) du système (13) sont vérifiées.

* La signification de ces constantes a été donnée au paragraphe 1.2.4.

Nous avons choisi d'autre part une silhouette homogène de produits de polynômes de la forme $T_i(X).T_j(Y)$ de degré $i \leqslant 9$ en x et degré $j \leqslant 9$ en y. On a donc à résoudre un système rectangulaire de 128 équations à 55 inconnues.

Connaissant le vecteur $[a]$ des 55 coefficients par la résolution du système, on peut calculer les valeurs de la contrainte $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ en superposant aux valeurs du terme initial, celles du terme correctif $\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2}$. Rappelons que pour un point (x_i, y_j) du domaine D la valeur du terme $\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2}$ est obtenue par le produit matriciel :

$$\left[0 \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[T_0(X_i)T_1(Y_j)\right] \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[T_1(X_i)T_0(Y_j)\right] \quad \cdots \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[T_0(X_i)T_n(Y_j)\right] \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[T_n(X_i)T_0(Y_j)\right]\right] [a] .$$

$$\text{où } X_i = \frac{b-a}{2} x_i + \frac{b+a}{2}$$

$$Y_j = \frac{d-c}{2} Y_j + \frac{d+c}{2}$$

Les résultats obtenus sur le calcul de la contrainte $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ apparaissent sur la figure 7, sous forme d'isocontraintes dans le 1/4 de plan $x \leqslant 0$ en raison de la symétrie des courbes par rapport à Ox.

La figure 8 représente les valeurs du terme correctif dans le même domaine.

<u>Remarque</u> : Les résultats portés sur les figures 7 et 8 résultent de calculs exécutés en simple précision sur 10070.
La matrice intervenant dans la méthode de collocation généralisée est en effet trop volumineuse pour la capacité de mémoire centrale disponible pour que nous puissions exécuter tous les calculs en double précision.
Par contre les nombres de la fig.6 ont été obtenus par des calculs faits en double précision.

CONTRAINTES DANS LE DEMI-PLAN INFINI

COURBES $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \text{cste}$

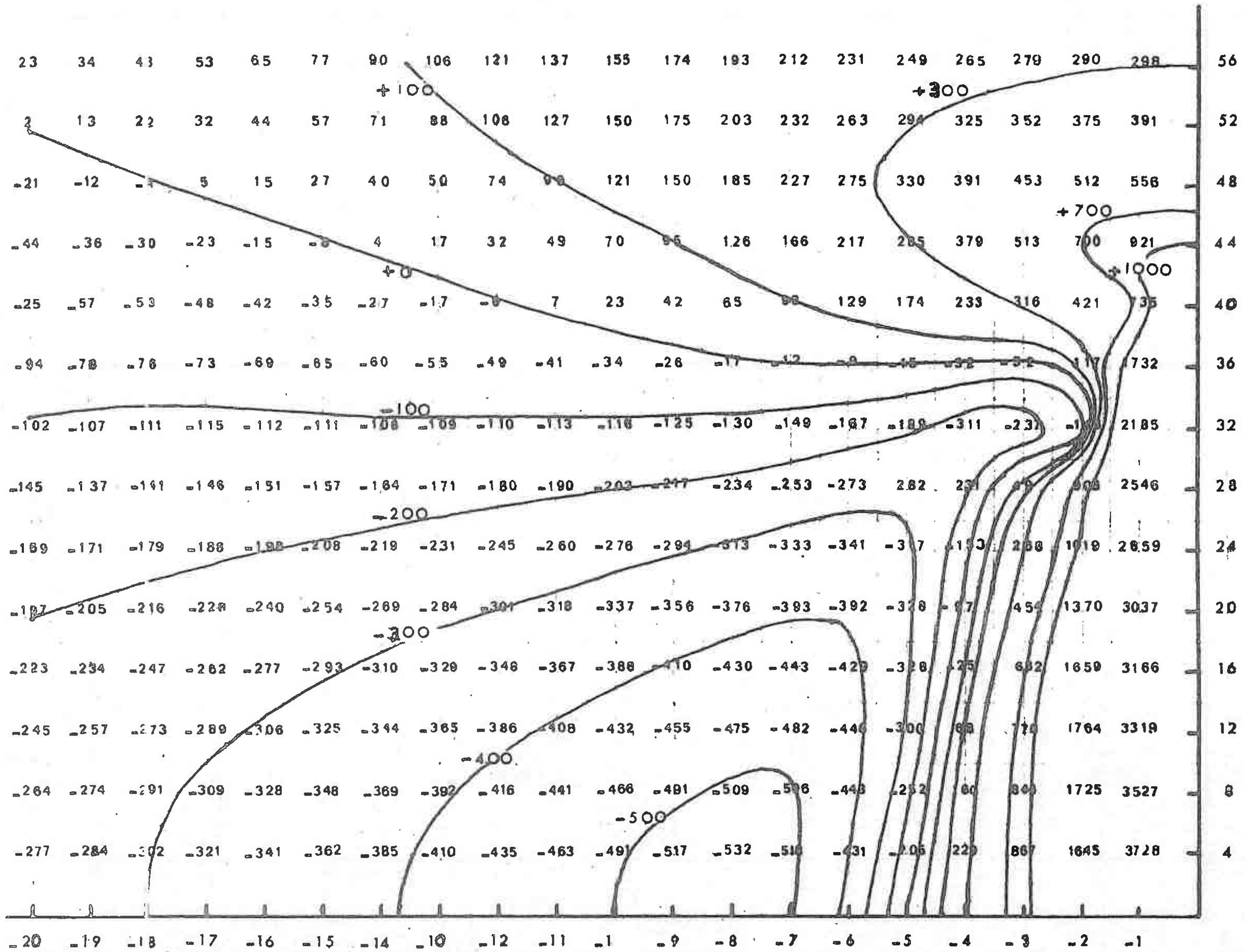


FIGURE 6

CONTRAINTES DANS LE DOMAINE RECTANGULAIRE

$-20 \leq x \leq 0$

$-60 \leq y \leq 60$

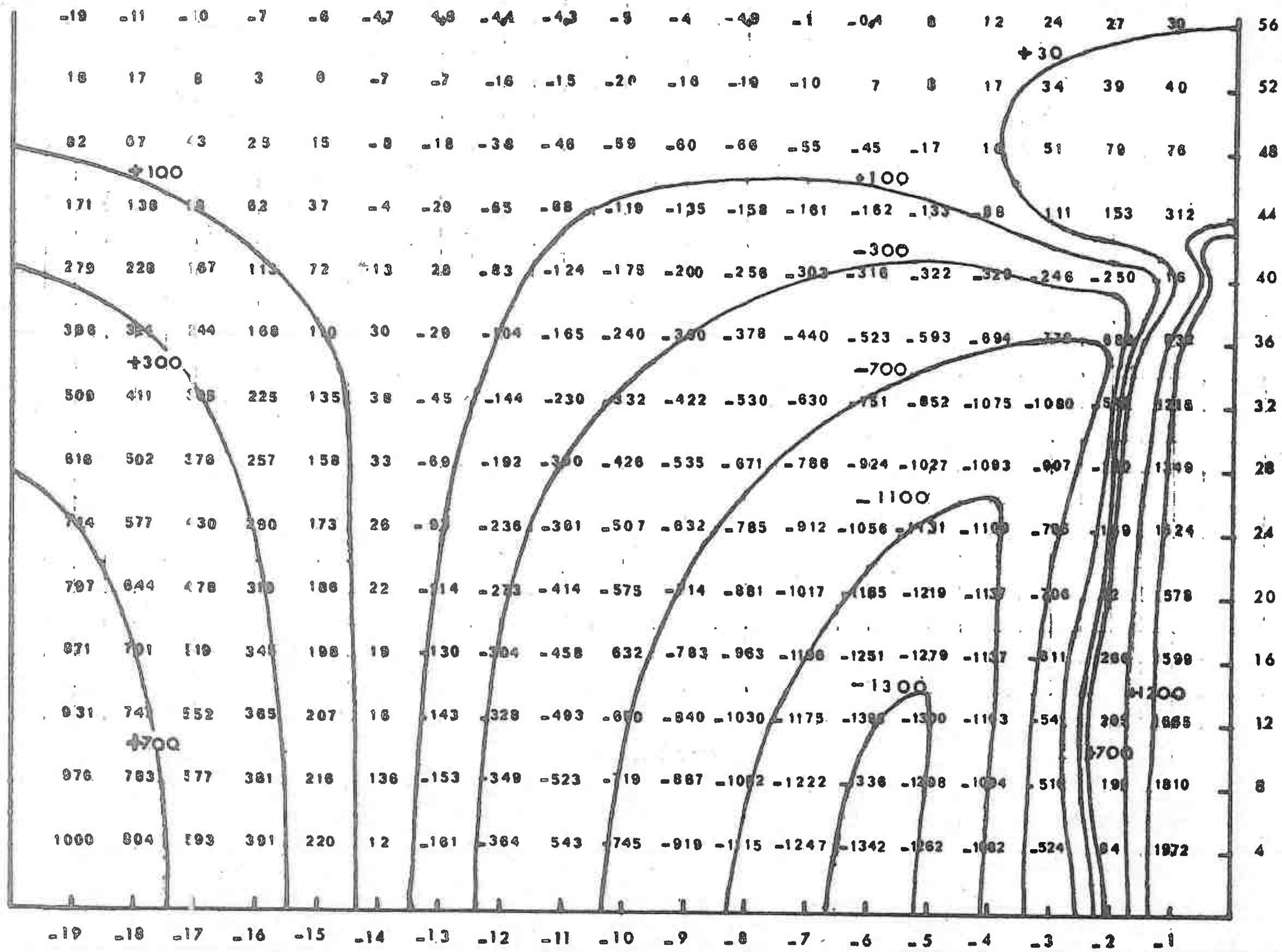


FIGURE 7

~~VALEURS DU~~

TERME CORRECTIF

	-18	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2
56	-60	-70	-93	-123	-158	-196	-229	-251	-266
52	-12	-38	-76	-120	-168	-219	-268	-305	-340
48	63	13	-45	-110	-177	-249	-318	-377	-437
44	159	80	-5	-94	-186	-281	-376	-463	-551
40	269	158	43	-75	-195	-317	-441	-557	-676
36	388	243	95	-52	-203	-356	-510	-657	-809
32	509	329	149	-30	-211	-394	-578	-757	-843
28	629	414	202	-8	-218	-431	-645	-855	-1075
24	741	494	252	13	-226	-466	-709	-948	-1197
20	843	567	297	31	-232	-498	-766	-1032	-1308
16	931	629	336	48	-238	-526	-815	-1104	-1403
12	1002	680	368	62	-242	-548	-855	-1162	-1480
8	1055	718	391	72	-246	-565	-885	-1204	-1537
4	1087	741	406	77	-247	-575	-903	-1271	-1571

FIGURE 8

LIGNES D'ISOCONTRAINTE EN $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ DANS LE DOMAINE $-1 < x < 0$, $36 < y < 44$

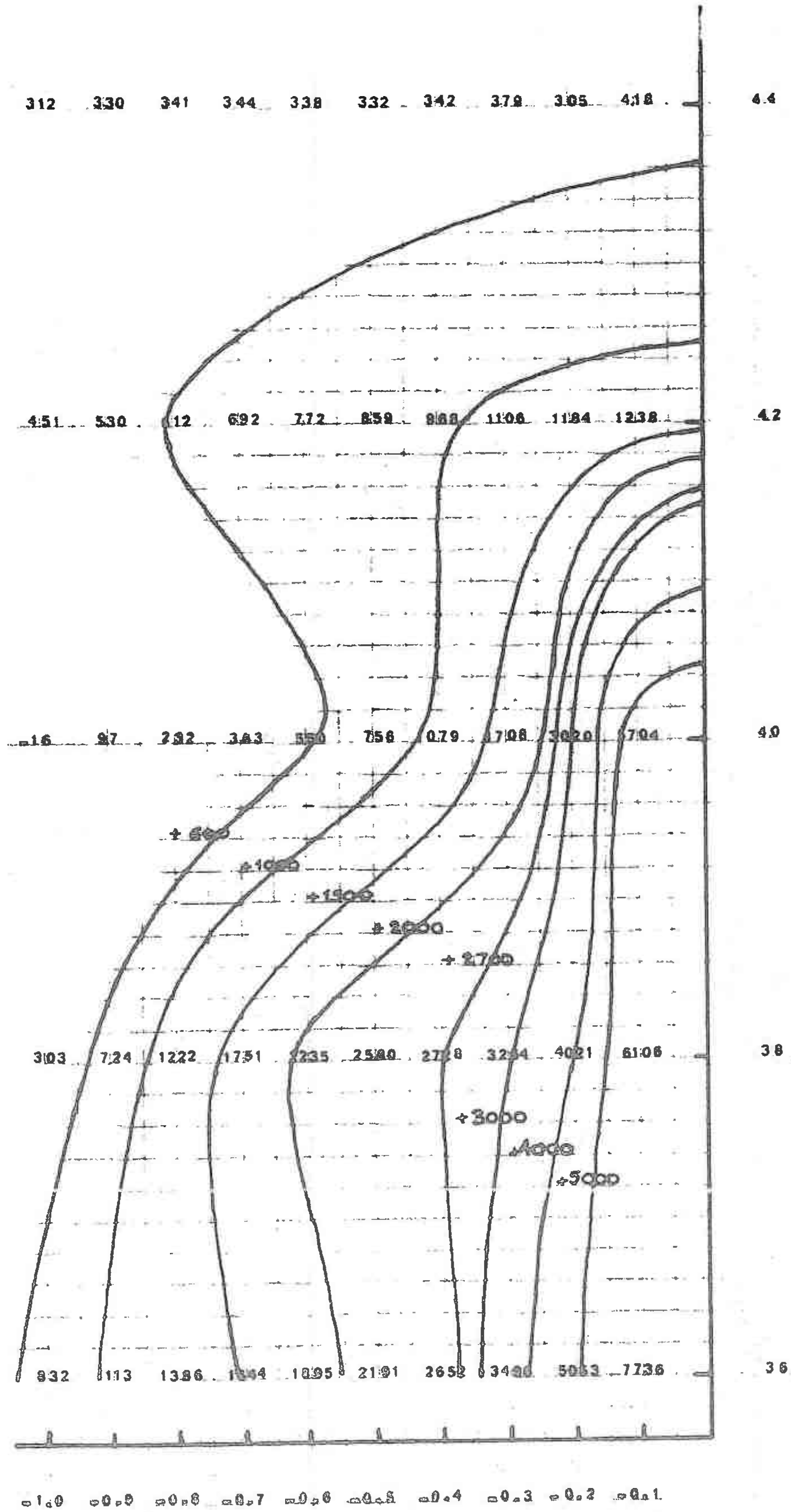


FIGURE 9

2.4.2. Interprétation des résultats.

La méthode utilisée nous a conduits à construire la solution sous forme d'une somme de deux termes :

- Le premier terme dont l'écriture a pu être explicitée, permet une étude stricte du problème infini, en particulier au voisinage de la singularité (discontinuité des températures aux points $V_0 t = 41$ cm et $-V_0 t = -41$ cm de Oy).
- Le second terme est un terme correctif qui tient compte des conditions aux limites et que nous avons approché.

On remarque, par comparaison des figures 6 et 7 que l'adjonction de ce terme correctif ne modifie pas de façon essentielle l'allure des courbes isocontraintes au voisinage du segment EE'. Néanmoins les valeurs sont modifiées et l'approximation par le demi-plan infini n'est qu'une approche assez grossière.

D'autre part la figure 8 montre la régularité du terme correctif et justifie l'approximation faite pour le calcul de ce dernier.

On notera que la représentation adoptée nous permet une étude fine de la zone fortement perturbée, aussi bien pour le domaine fini que pour le domaine infini, et pour illustrer cette possibilité nous avons reproduit les lignes d'isocontraintes en $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ dans le domaine $-1 < x < 0$, $36 < y < 44$ (figure 9).

En résumé l'exemple traité montre qu'en associant des méthodes strictes, telles que la méthode des sources, à des méthodes numériques (différences finies - collocation) on peut étendre à une nouvelle classe de problèmes des solutions valables jusqu'à maintenant pour quelques cas limités. C'est un nouvel intérêt de ces solutions particulières bien connues des spécialistes.

Les méthodes de calcul développées dans la 2ème partie de cette étude, permettent, à coût raisonnable, une bonne approximation des intégrales intervenant dans la méthode stricte et rendent utilisables des méthodes analogues à celle que nous avons développée.

REFERENCES

1 - ANGOT André : Compléments de mathématiques.

2 - BERGMANN, SCHIFFER : Kernel Functions and differential equations

3 - P. BUSINGER, G.GOLUB : Linear Least squares solutions by Householder Transformation.

4 - CARSLAW, JAEGER : Conduction of heat in solids.

5 - COURAND und HILBERT : Mathematische Physik.

6 - COURBON : Cours de résistance des matériaux.

7 - DARDEL Yves : La transmission de la chaleur au cours de la solidification, du réchauffage et de la trempe de l'acier.

8 - DATZEFF Arsène : Sur le problème de la propagation de la chaleur dans les corps solides.

9 - Mme FADEEVA, MM FADEEV, KUBLANDVSKAYA : Sur les systèmes algébriques de matrices rectangulaires et mal conditionnées - (Colloque C.N.R.S. Besançon).

10 - FAVARD : Théorie des équations aux dérivées partielles.

11 - FOX.L, B.PARKER : Chebyschev polynomials in numerical analysis.

12 - FRIEDRICHS K.O : Methods of mathematical Physics.

13 - G. GOLUB : Numerical Methods for solving linear least squares problems.

14 - HAURAT Alain : Equations intégrales intervenant dans la méthode du potentiel.(thèse NANCY).

15 - HIRSCH Gérard : Méthode du potentiel : application à des problèmes de"barrière" plans et de révolution. (thèse NANCY).

16 - KORGANOFF, PAVEL, PARVU : Eléments de théorie des matrices carrées et rectangles en analyse numérique.

17 - LEGRAS Jean :Méthodes et techniques de l'analyse numérique.

18 - LANCZOS Cornelius : Linéar differential operators.

19 - LIAPOUNOFF : Sur les problèmes de doubles couches.

20 - LIONS J.L : Méthodes d'approximation numérique des problèmes aux limites de la physique mathématique.

21 - MARTIN, AVERY, SNYDER : Chebyschev methods in numerical approximatiōn

22 - S.G. MICHLIN : Applications des équations intégrales.

23 - S.G. MICHLIN, K.L SMOLITSKIY : Approximation methods for solution of differential and integral equation

24 - MUNTZ. G : Equations intégrales - I partie.

25 - NOEL Philippe : Réduction des erreurs de chute par la représentation Lagrangienne des polynômes. (thèse NANCY).

26 - PETROUSKY. I.G : Lecture on partial differential equations.

27 - SOMMERFIELD Arnold : Partial Differential equations in Physics.

28 - VILLARD J.M : Methode de collocation généralisée par la résolution d'équations aux dérivées partielles (journées d'analyse numérique - BORDEAUX).

NOM DE L'ETUDIANT : Madame ROLLAND Colette

Nature de la thèse : Thèse de Docteur ès Sciences Mathématiques

Vu, Approuvé

et permis d'imprimer

NANCY, le 23.Mars 1971

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY I

J.R. HELLUY