

N° 451

Reçu le 16.6.75 122

Dnclg

UNIVERSITE DE NANCY I

Sc. N. 73/144

THESE

présentée à l'Université de Nancy I
pour obtenir le titre de

Docteur en spécialité AUTOMATIQUE

par



J A C Q U E S R I C H A R D

Sujet :

"ETUDE D'UN INTERPOLATEUR ADAPTE A LA
COMMANDE DIRECTE PAR CALCULATEUR D'UNE
MACHINE OUTIL".

soutenue publiquement le 3 Juillet 1973 , devant la Commission
d'Examen :

Membres du Jury :

Messieurs A. FRUHLING
 R. MAINARD
 J. -M. MEYER
 M. VERON

Président
Examineurs

UNIVERSITE DE NANCY I

THESE

présentée à l'Université de Nancy I
pour obtenir le titre de

Docteur en spécialité AUTOMATIQUE

par

J A C Q U E S R I C H A R D

Sujet :

B

"ETUDE D'UN INTERPOLATEUR ADAPTE A LA
COMMANDE DIRECTE PAR CALCULATEUR D'UNE
MACHINE OUTIL".

soutenue publiquement le 3 Juillet 1973 , devant la Commission
d'Examen :

Membres du Jury :

Messieurs A. FRUHLING

Président

R. MAINARD

Examineurs

J. -M. MEYER

M. VERON

AVANT - PROPOS

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Electricité et d'Automatique de l'Université de Nancy I , dans le cadre des activités du Centre Universitaire de Commande Numérique qu'anime avec dynamisme Monsieur M. VERON, que je tiens tout particulièrement à remercier pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée dans la réalisation de ce mémoire et l'estime qu'il me manifeste en participant à mon Jury.

Que Monsieur le Professeur A. FRUHLING, Directeur du Laboratoire d'Electricité et d'Automatique, veuille trouver l'expression de ma profonde gratitude pour la bienveillance qu'il m'a toujours témoignée et pour l'honneur qu'il me fait en présidant la Commission d'Examen.

Monsieur le Professeur R. MAINARD, Directeur de l'I. U. T. , a toujours soutenu les activités du groupe Commande Numérique, la dernière en date étant sa participation à mon Jury. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Je remercie Monsieur J. -P. MEYER de l'Institut de Recherches Nucléaires de Cronenbourg, d'avoir bien voulu prendre connaissance de mon travail et de participer à mon Jury.

J'adresse mes remerciements à tous mes camarades du Laboratoire , et en particulier, à ceux du Groupe "Commande Numérique" pour l'ambiance amicale qu'ils y font régner.

Je remercie également Mademoiselle Jocelyne BOGUET, Secrétaire du Laboratoire, et Monsieur Claude VIGNERON, de s'être acquittés avec amabilité et diligence de la tâche que constitue la présentation de ce travail.

TABLES DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	1
<u>CHAPITRE I - SYSTEMES DNC ET CNC - SYSTEMES D'INTERPOLATION EXISTANTS.</u>	
I-1 Systèmes DNC et CNC	3
I-2 Différentes conceptions des systèmes CNC	6
a)	
b)	
c)	
I-3 Présentation du système étudié	7
I-4 Systèmes d'interpolation existants	9
I. 4.1. Les analyseurs différentiels arithmétiques	
a)	
b)	
c)	
I. 4.2. Les calculateurs utilisant les équations algébriques	
<u>CHAPITRE II - INTERPOLATION PAR RESOLUTION D'UNE EQUATION RECURRENTE</u>	20
II-1	
1. Interpolation circulaire	21
2. Etude de l'erreur	
3. Résultats	
II-2	
1. Interpolation linéaire	30
2. Etude de l'erreur	
II-3	
1. Interpolation parabolique	32
2. Etude de l'erreur	
II-4	
1. Génération d'exponentielle	35
2. Etude de l'erreur	
II-5 Conclusion du chapitre	

<u>CHAPITRE III - ETUDE DE L'INTERPOLATEUR</u>	41
III-1 Dimensionnement et définition de la séquence - Cas de l'interpolation circulaire	42
1. Cas de l'interpolation circulaire	42
2. Cas de l'interpolation linéaire	54
3. Cas de l'interpolation parabolique	58
4. Cas de l'interpolation exponentielle	62
III-2 Contrôle de la vitesse et de l'accélération	64
III-3 Séquence à générer	67
III-4 Initialisation	70
III-5 Schéma de l'interpolateur	73
<u>CHAPITRE IV - PROGRAMMATION DE L'INTERPOLATEUR</u>	80
IV-1 Interpolation circulaire	81
IV-2 Interpolation elliptique	84
IV-3 Interpolation linéaire	88
IV-4 Interpolation parabolique	94
IV-5 Interpolation hyperbolique	98
<u>CHAPITRE V - RESULTATS</u>	102
<u>CONCLUSION</u>	

INTRODUCTION.

Depuis le début de l'utilisation des machines à commande numérique, l'ordinateur apporte son assistance pour les calculs géométriques, la mémorisation des paramètres d'usinage, la gestion des fabrications, l'élaboration et la perforation des rubans de commande.

Vers 1966 certains constructeurs [1] [2] ont envisagé de supprimer les supports intermédiaires d'informations et de piloter directement un ensemble de machines par un calculateur de grande taille (système DNC : "Direct numerical control"), chaque machine pouvant fonctionner en autonome en cas de panne du calculateur. Depuis, l'évolution des "minicalculateurs" a favorisé le remplacement de la logique câblée des armoires de commande classique par une logique programmable, à base d'un petit calculateur industriel. Ce type de système (CNC : "computerized Numerical control") augmente considérablement les performances de la machine commandée grâce à la souplesse et aux possibilités offertes par le calculateur.

Dans le but d'optimiser l'utilisation du calculateur, c'est-à-dire de pouvoir lui confier d'autres tâches que celles de la conduite de la machine, telles que gestion ou aide à la programmation, il est nécessaire de le décharger du maximum d'opérations de routine.

Le CUCN développe un système de commande directe dans lequel la génération de la trajectoire de l'outil est entièrement réalisée en "hardware", ce qui libère considérablement le calculateur.

Ce partage entre "hardware" et "software" constitue vraisemblablement le dispositif optimal pour la commande CNC [3][4].

Les systèmes d'interpolation câblés existants, dont on rappelle le principe et les performances dans le premier chapitre, sont coûteux et difficilement adaptables à la commande directe. La génération de courbes par méthode récurrente [5][6] fournit une solution simple et rigoureuse à ce problème. Le principe de cette méthode est présenté dans le deuxième chapitre. On obtient ainsi une récurrence unique qui permet de décrire des fonctions telles que : droite, parabole, sinussoïde, exponentielle.

Pour la réalisation d'un tel interpolateur, nous nous sommes imposés un cahier des charges correspondant aux possibilités de systèmes industriels les plus performants, soit une précision de un micron à une vitesse d'avance maximale de 10 mètres par minute.

Nous proposons alors la configuration physique de l'interpolateur ainsi que le software de commande nécessaire à l'initialisation des récurrences, dont nous avons testé le fonctionnement par simulation sur ordinateur industriel T 2000 de la Télémécanique Electrique.

CHAPITRE I - SYSTEMES DNC ET CNC - SYSTEMES
D'INTERPOLATIONS EXISTANTS.

I-1. Systèmes DNC et CNC.

L'idée première de commande directe apparue en 1966 a été de transmettre directement les données à la machine, immédiatement après le lecteur de ruban, depuis le fichier fourni par le processeur.

Compte-tenu de la taille importante des calculateurs capables de traiter les langages symboliques tels que APT ou IFAPT, les premières réalisations de commande directe consistaient en des ensembles complexes permettant de commander un grand nombre de machines.

En 1968, Sunstrand Machine tool (U. S. A.) propose le système Omnicontrol [7] où 18 machines, dont plusieurs cinq axes, sont pilotées par un ordinateur IBM 360/44.

Dès lors, un grand nombre d'articles paraissent sur ce sujet et l'exposition internationale de Chicago de 1970 démontre l'avènement industriel de cette technique [8] .

Par ailleurs, grâce au développement des petits calculateurs, les constructeurs envisagent de remplacer la logique câblée de l'armoire par une logique programmée avec tous les avantages que lui confère son software.

Ce type de commande, beaucoup moins ambitieux, devrait intéresser directement un grand nombre de petites et de moyennes

entreprises. L'exposition de Chicago 1972 montre un net revirement des constructeurs vers ces systèmes qui intéressent un plus grand nombre d'utilisateurs [9].

Pour éviter les confusions des deux types de commande par ordinateur, nous rappelons les définitions proposées par l'AFNOR :

- DNC (Direct Numerical Control) :

"Système de commande numérique directe à l'aide d'un ordinateur universel d'un ensemble de machines outils équipées d'un équipement de commande numérique ou d'organes électroniques spécialisés équivalents (interpolateur, ordinateur).

On confie habituellement au ordinateur d'autres fonctions que la conduite des machines, notamment des fonctions d'assistance à la production ou des fonctions d'aide à la programmation".

- CNC (Computerized Numerical Control) :

"Équipement de commande numérique utilisant un ordinateur universel dans lequel un certain nombre de fonctions, habituellement câblées dans les commandes numériques, sont réalisées par un programme enregistré.

Un tel équipement peut commander une seule machine ou un petit nombre de machines outils par multiplexage".

Il est certain qu'un système CNC intéressera beaucoup plus les petites et moyennes entreprises, d'autant plus qu'il peut être le module de base du DNC, permettant ainsi facilement une extension du système.

Selon le point d'intervention du ordinateur dans la chaîne logique de l'armoire de commande (fig. 1), on distingue différentes versions de CNC [10].

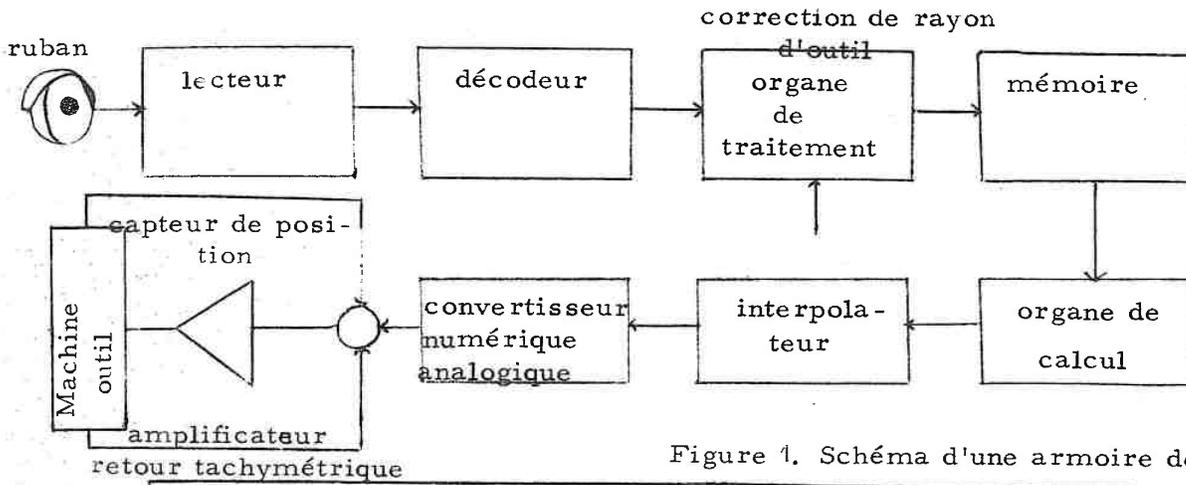


Figure 1. Schéma d'une armoire de commande.

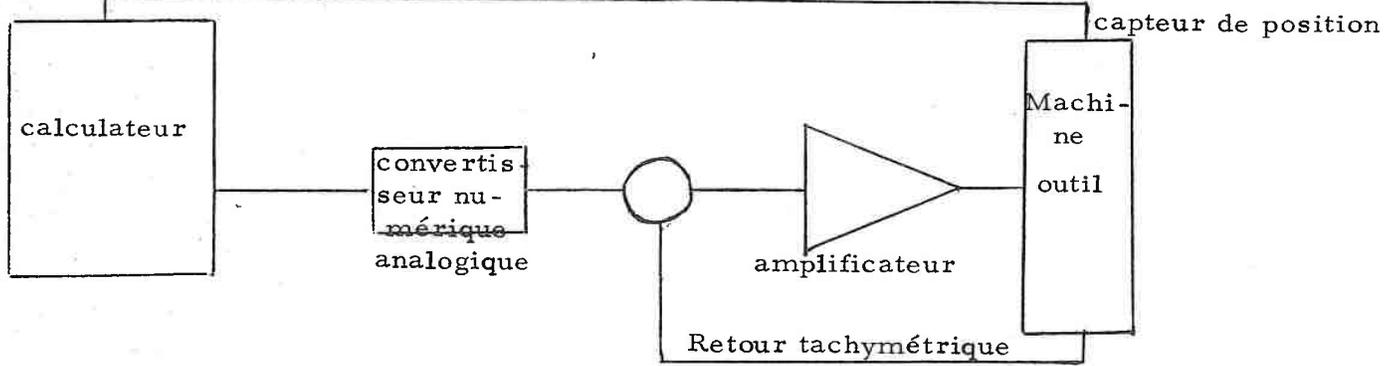


Figure 2.

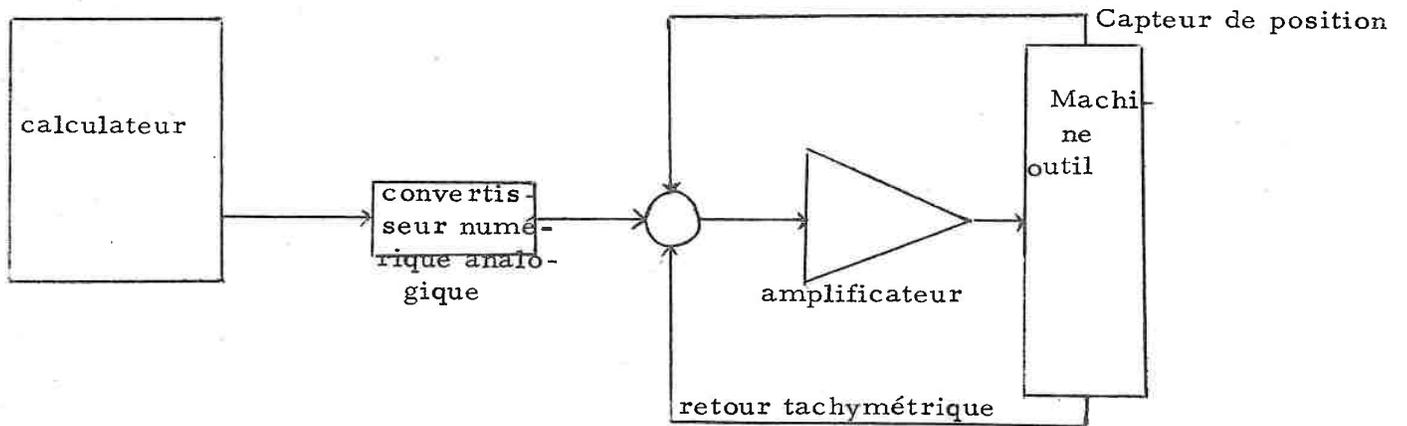


Figure 3.

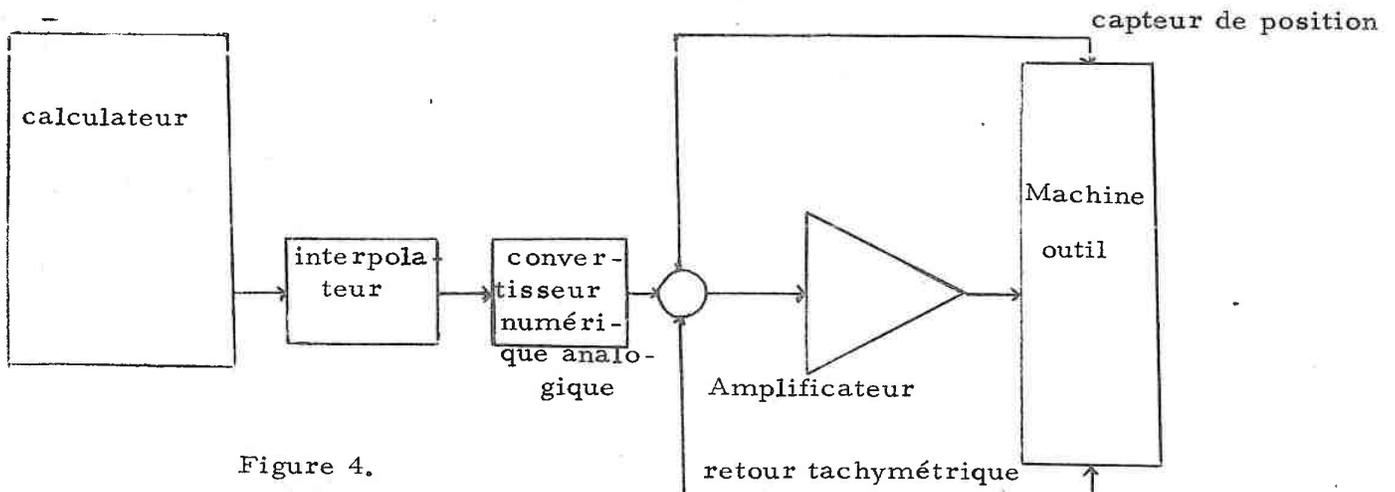


Figure 4.

I-2. Différentes conceptions des systèmes CNC.

a) Dans la première, l'ordinateur assure absolument toutes les fonctions logiques et arithmétiques d'une commande numérique classique, y compris l'interpolation fine et la fermeture des boucles de positionnement (fig. 2).

A intervalle de temps régulier, l'ordinateur acquiert l'image de la position réelle de l'outil dans l'espace, d'autre part il calcule la position à atteindre. De ces deux informations résultera la commande appliquée à l'entrée du système. Le respect de la précision requise ne peut se faire qu'à période d'échantillonnage faible (10 ms). A cause de la servitude des sorties périodiques fréquentes, le nombre d'axes commandés par le système sera forcément limité, tandis que le calculateur sera astreint essentiellement au contrôle de la trajectoire, ceci au détriment d'autres tâches.

De tels systèmes sont actuellement disponibles sur le marché (New World de Westinghouse, CNC 7300 de Allen Bradley, Kongsberg).

b) L'ordinateur n'assure pas la fermeture de la boucle de positionnement mais garde l'interpolation fine.

Les informations élaborées par le calculateur ne sont plus des erreurs mais des consignes de position. L'échantillonnage peut être effectué à une fréquence moins élevée (fig. 3).

c) La troisième version dégage le calculateur du contrôle constant de la trajectoire de l'outil. La fonction d'interpolation est divisée en deux étapes : le calculateur interpole grossièrement la courbe, tandis qu'une logique câblée se charge de l'interpolation

fine. Le calculateur ne fournit que quelques points de la courbe, ce qui diminue considérablement la fréquence d'échantillonnage (fig. 4).

Entre deux échantillonnages, la trajectoire de l'outil suit une droite dont la pente a été définie par l'ordinateur et chaque point par l'interpolateur. La trajectoire n'est rectifiée qu'à l'échantillonnage suivant.

Le contrôle de la position étant impératif, ce système impose son rythme à l'ordinateur qui doit donc, en conséquence, accomplir les autres tâches dans un cycle.

I-3. Présentation du système étudié.

Dans 95 % des cas les pièces ont des profils qui se réduisent à une suite de segments de droites et de cercles. La solution pour dégager au maximum l'ordinateur de la contrainte du contrôle de la trajectoire serait d'initialiser par le calculateur un interpolateur linéaire et circulaire qui simulerait la trajectoire à vitesse déterminée, fournissant ainsi la consigne aux asservissements.

Lorsque le parcours du segment de droite ou de l'arc de cercle est terminé, l'interpolateur serait réinitialisé pour un nouveau parcours.

Ce système permettrait un mode d'échange entre le calculateur et l'interpolateur en interruption prioritaire. L'ensemble machine-interpolateur se comportant comme un périphérique lent. Le nombre des sorties de données étant sensiblement

diminué, l'unité centrale du calculateur serait moins occupée à la gestion des entrées-sorties.

C'est dans le but d'optimiser ce fonctionnement que nous avons étudié un interpolateur "multifonction" spécialement adapté au CNC.

Ainsi il devient possible de commander un plus grand nombre d'axes et (ou) d'utiliser un langage plus puissant.

Le calculateur pourra même, à côté des fonctions de commande de la machine, assurer une aide à la programmation, moyennant une extension de configuration.

C'est dans ce contexte qu'un système d'aide à la programmation des machines outils à commande numérique a été étudié au CUCN [11].

Ainsi, moyennant une configuration somme toute modeste, l'utilisateur disposera d'une commande numérique par calculateur en même temps qu'un système d'aide à la programmation particulièrement intéressant pour les petites et moyennes entreprises.

Le procédé est avantageux s'il n'augmente pas de façon trop sensible le coût de l'ensemble, donc si sa technologie reste simple. Il faut également que la précision requise soit maintenue.

Compte-tenu de ces deux conditions, il est certain que l'interpolateur sera électronique. Nous allons étudier les différents types d'interpolateurs existants à l'heure actuelle.

I-4. Systèmes d'interpolation existants.

Quel que soit le principe qu'utilisent les interpolateurs, ils ont une caractéristique commune : le temps de calcul et la fourniture du résultat sont étroitement liés aux temps des opérations technologiques imposés par la machine outil.

Actuellement, il existe des systèmes calculateurs-interpolateurs dont le rôle exact est de simuler la trajectoire de l'outil. Ces interpolateurs sont de deux types [12] :

a) interpolateurs utilisant les équations différentielles. Les analyseurs différentiels arithmétiques (ADA) résolvent des équations différentielles à l'aide d'intégrateurs numériques.

b) calculateurs utilisant les systèmes d'équations algébriques.

I. 4. 1. Les analyseurs différentiels arithmétiques. Principe.

Ce calculateur est du type incrémental. Il utilise les équations différentielles :

$$\frac{dx}{du} = F(x, y, z, u)$$

qui est remplacée par l'équation aux différences

$$\frac{\Delta x}{\Delta u} = F(x, y, z, u)$$

par un opérateur. Cette substitution sera source d'une erreur systématique.

L'opérateur réalise l'opération :

$$dx_i = f_i(u) du$$

ou encore

$$x_i - x_{o,i} = \int_{u_o}^u f_i(u) \cdot du \quad (1)$$

Une valeur approchée de l'intégrale peut être obtenue par la méthode des rectangles (fig. 5)

$$x_i - x_{o,i} \simeq \sum_{k=0}^n f_i(u_k) \cdot \Delta u_k$$

$$\text{avec } u_k = u_o$$

$$u_n = n$$

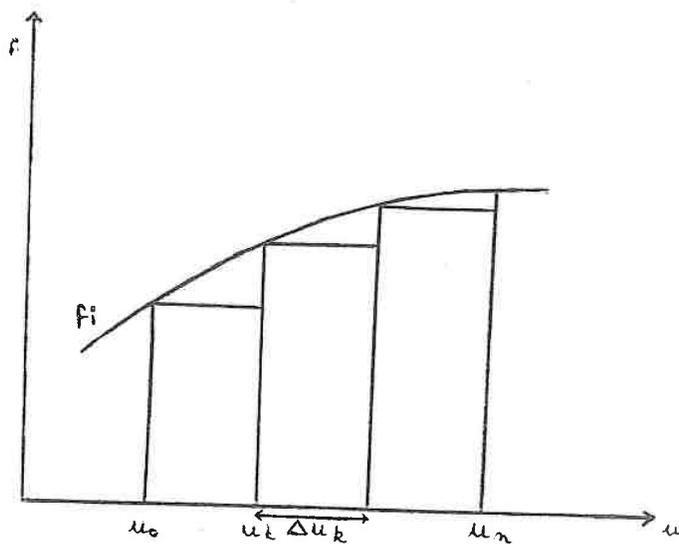


Figure 5.

Si $\Delta u_k = 1$, le calcul de l'intégrale revient à effectuer l'addition

$$x_i = x_o^i + \sum_{k=0}^n f_i(u_k)$$

L'unité de x_i étant faible, un grand nombre de digits sont sans signification. Pour supprimer cet inconvénient, on change d'unité en divisant par 2^n

$$X_i = X_o + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f_i(u_k)}{2^n}$$

X_i est donc la valeur approchée de x_i de l'équation (1).

L'opérateur calcule X_i de la façon suivante (fig. 6) :

le registre X est constitué de deux demi-registres

- le premier contient la partie décimale de X_i
- le deuxième X_i , c'est-à-dire ce résultat.

A chaque pas d'intégration, on réalise l'opération $f_i(u_k) + (x_i - x_i 2^n)$. Le résultat est envoyé dans R et le bit de débordement dans X_i .

On réalise le couplage de plusieurs opérateurs en utilisant X_i de l'intégrateur n pour le registre contenant $f_i(u_k)$ du $(n+1)^{\text{ième}}$ intégrateur. En sortie de l'intégrateur, on obtient des incréments qui sont comptés pour obtenir $F_i(u_k)$.

I. 4. a. Réalisation d'une fonction circulaire par ADA.

Le système d'équations différentielles définissant le cercle est :

$$dx = - yd\theta$$

$$dy = x d\theta$$

soit approximativement

$$\Delta x = -y \Delta \theta$$

$$\Delta y = x \Delta \theta$$

Le schéma de câblage est donné par la figure 7.

Le premier opérateur réalise

$$\Delta x_1 = f_1 \Delta u_1$$

le deuxième opérateur réalise

$$\Delta x_2 = f_2 \Delta u_2$$

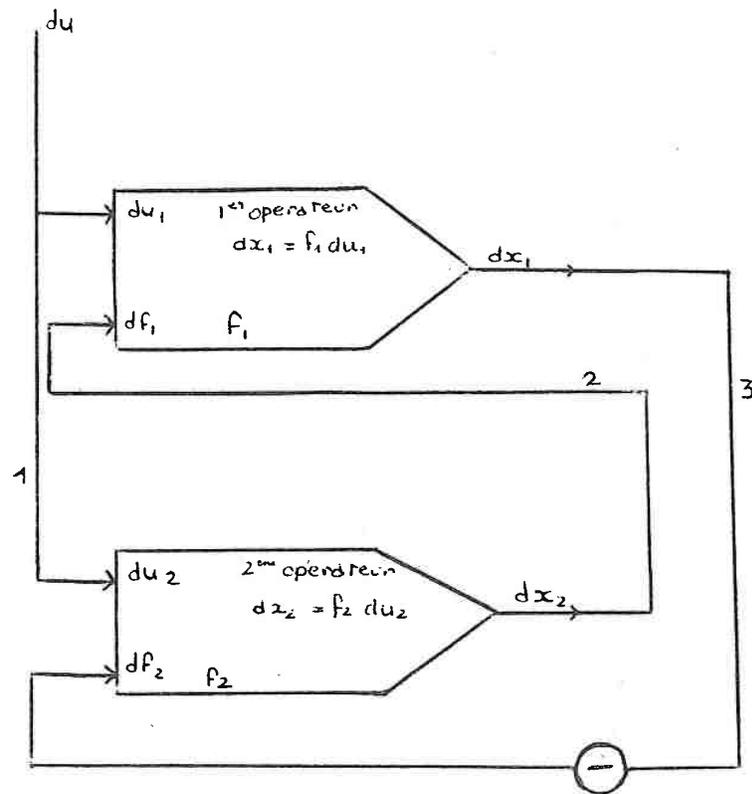
Les connections 2 et 3 réalisent :

$$\Delta f_1 = - \Delta X_2$$

$$\Delta f_2 = \Delta X_1$$

Les valeurs initiales des registres réalisent les conditions initiales de l'intégration.

La vitesse de parcours du cercle est proportionnelle à la fréquence de calcul imposée par l'entrée du.



- 1 $du_1 = du_2$
- 2 $dx_2 = df_1$
- 3 $dx_1 = -df_2$

Figure 7.

L'écart entre X_i et x_i , donc l'erreur introduite par chaque opérateur, a trois causes :

- erreur systématique innérente à l'intégrateur ;
- quantification de f_1 ;
- quantification de X .

Exemple de l'interpolation circulaire - erreur sur le module.

a) erreur systématique

Si R_k^* représente le rayon à la k^{n} itération

$$R_k^* = X_k + jY_k \quad \text{d'après les équations}$$

$$\begin{aligned}
 X_k &= X_{k-1} - Y_{k-1} \delta\theta \\
 Y_k &= Y_{k-1} + X_{k-1} \delta\theta \\
 R_k^* &= X_{k-1} + j Y_{k-1} - Y_{k-1} \delta\theta + j X_{k-1} \delta\theta \\
 &= R_{k-1}^* + \delta\theta [-Y_{k-1} + j X_{k-1}] \\
 &= R_{k-1}^* [1 + j\delta\theta]
 \end{aligned}$$

en module

$$|R_k^*| = |R_{k-1}^*| \cdot \sqrt{1 + \delta\theta^2}$$

après n itérations

$$\begin{aligned}
 |R_n^*| &= |R_0| \left[\sqrt{1 + \delta\theta^2} \right]^n \\
 |\Delta R_n^*| &= |R_0^*| \cdot \frac{n\delta\theta^2}{2}
 \end{aligned}$$

$R_0 \delta\theta = L$ (longueur de l'axe de cercle)

comme $\delta\theta = \frac{1}{2^N}$

$$\Delta R = \frac{L}{2^{N+1}}$$

L'erreur est d'autant plus faible que $\delta\theta$ et que L sont petits.

En passant du pas $\delta\theta$ au pas $\frac{\delta\theta}{2}$ l'erreur $\mathcal{E} = \sum_{i=0}^n S_i$ diminue environ de moitié.

Mais la diminution du pas $\delta\theta$ entraîne une quantification plus grande de $Y_{k-1} \delta\theta$. On peut évaluer la somme de ces deux erreurs.

$$X_k = X_{k-1} - Y_{k-1} \delta\theta - \Delta Y_{k-1} \quad (1)$$

$$Y_k = Y_{k-1} + X_{k-1} \delta\theta + \Delta X_{k-1} \quad (2)$$

ΔY_{k-1} : erreur de Y_{k-1}

ΔX_{k-1} : erreur de X_{k-1}

La relation (1) peut se mettre sous la forme de somme

$$X_k = X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{Y_i}{2^n} + \Delta X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{Y_i}{2^n}$$

$$\text{où } \Delta X_k = \Delta X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\Delta Y_i}{2^n}$$

de même l'erreur ΔY_i s'écrit

$$\Delta Y_i = \Delta Y_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\Delta X_j}{2^n}$$

On voit qu'il est possible d'obtenir mathématiquement à la k^n itération à partir des conditions initiales. Ce calcul est cependant fastidieux et on a recours à l'expérience [12] pour l'évaluer. On montre que l'erreur reste inférieure à 2 fois le nombre d'itérations.

I. 4. c. Correction de rayon d'outil.

Le cercle à usiner étant centré à l'origine, la correction de rayon d'outil revient à calculer le point O_1 , distant de r du point initial A de coordonnées X_0, Y_0 .

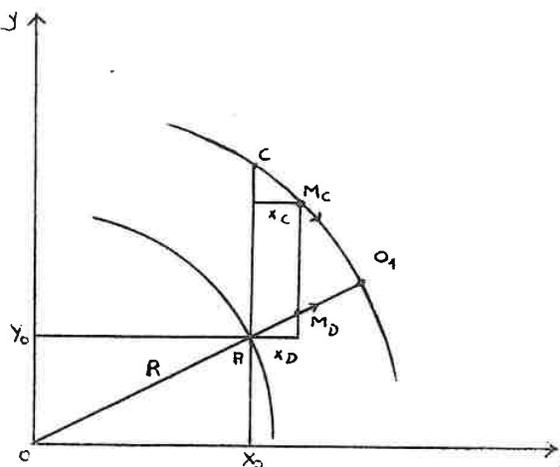


Figure 8.

On asservit deux points M_C et M_D à parcourir respectivement le cercle de rayon $R+r$ et la droite OA , de façon que $X_C = X_D$, à partir des points C et A . Quand $Y_C = Y_D$, les points M_C et M_D sont confondus avec le point O_1 cherché. Ainsi l'obtention des coordonnées du point initial de la trajectoire de l'outil s'obtient par une interpolation circulaire et une interpolation linéaire.

I. 4. 2. Calculateurs utilisant des systèmes d'équations algébriques.

Principe. La courbe $H(x, y) = 0$ partage le plan (x, y) en deux zones :

- dans l'une $H(x, y) < 0$
- dans l'autre $H(x, y) > 0$

Le calculateur fonctionne à la manière d'un asservissement par tout ou rien, c'est-à-dire qu'en fonction du signe de la fonction d'erreur $H(x, y)$ il détermine le sens des asservissements à donner à x ou y .

Pour tout couple de points (x, y) le calculateur fournit :

- la valeur $H(x, y)$
- la valeur $\Delta H_x = H[(x+1), y] - H(x, y)$
- la valeur $\Delta H_y = H[x, (y+1)] - H(x, y)$

La courbe est supposée divisée en arcs tels que le long d'un arc les variations de x et y soient monotones et leurs signes définissent le sens de parcours.

Ce type de calcul n'introduit aucune erreur systématique autre que celle due à la quantification de l'information numérique.

Problème de la vitesse. Comme on n'émet qu'un seul incrément de valeur i sur l'un ou l'autre des axes, la vitesse tangentielle moyenne a pour valeur

$$V_t = \frac{i}{T} \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta)}$$

avec T période de calcul.

On voit qu'il est nécessaire lors du parcours d'une courbe quelconque de modifier la fréquence de calcul en fonction de l'angle de la tangente avec l'axe des x , si l'on veut obtenir une vitesse constante.

Les deux types d'interpolateurs, analyseurs différentiels arithmétiques et algébriques, sont utilisés sur des systèmes de commande numérique classique. Ils sont de type "hardware"; ils ne demandent donc pas de langage de programmation compliqué et permettent de réaliser facilement des profils simples avec corrections d'outils, mais nécessitent une technologie assez importante.

Pour la méthode algébrique, il faut un organe de calcul pour élaborer $H(x, y)$ et un système de génération de fréquence variable afin de maintenir une vitesse tangentielle constante.

Facilement applicable pour le cercle et l'ellipse, elle ne permet pas d'extension comme la méthode des résolutions des équations différentielles par intégration numérique qui est beaucoup plus souple par sa structure modulaire, et qui permet de réaliser des courbes solutions de toutes équations différentielles avec correction d'outil.

Ces systèmes sont cependant mal adaptés à la commande directe par minicalculateur pour laquelle ils n'ont pas été conçus. Une simple transposition conduirait à un système lourd et onéreux incompatible avec le but poursuivi.

L'interpolateur proposé dans cette étude réalise un bon compromis entre la réalisation "hardware" et les possibilités "software" du calculateur, son principe est présenté dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II - INTERPOLATION PAR RESOLUTION D'UNE
EQUATION RECURRENTE.

Considérons un point M_k , repéré par ses équations paramétriques

$$M_k \left\{ \begin{array}{l} X_k = F_1(k) \\ Y_k = F_2(k) \\ Z_k = F_3(k) \end{array} \right.$$

dans un référentiel parallèle aux axes de la machine. Les valeurs numériques relatives à chaque axe sont obtenues par une équation de récurrence du type :

$$(II-1) \quad X_k = 2A \cdot X_{k-1} - X_{k-2}$$

pour l'axe Ox par exemple qui doit décrire la fonction $F_1(k)$. Le problème étant le même pour chacun des axes, nous ne le traiterons que pour un seul, la synchronisation entre les différentes récurrences assurant la description de la trajectoire géométrique désirée.

Une telle récurrence se prête très bien au calcul en temps réel et à une mise en oeuvre câblée simple. Elle permet selon la valeur du coefficient A de réaliser différents types d'interpolation comme nous allons le voir.

II. 1. 1. Interpolation circulaire.

Considérons $0 < A < 1$ et posons $A = \cos \mathcal{C}$, l'équation (II. 1) devient

$$(II. 2) \quad X_k = 2 \cos \mathcal{C} \cdot X_{k-1} - X_{k-2}$$

qui admet comme solution (annexe I) les valeurs numériques de la fonction sinusoidale, échantillonnée au pas \mathcal{C} , soit

$$(II. 3) \quad X_k = R \cdot \cos(k\mathcal{C} + \varphi)$$

$$\text{avec} \quad \varphi = \text{Arctg} \left[\frac{X_0 \cos \mathcal{C} - X_1}{X_0 \sin \mathcal{C}} \right]$$

$$\text{et} \quad R = \frac{X_0}{\cos \varphi}$$

X_0 et X_1 sont les abscisses des points initiaux M_0 et M_1 du cercle de rayon R , séparés par l'écart angulaire \mathcal{C} .

Pour une valeur donnée de \mathcal{C} , la multiplication de X_{k-1} par $\cos \mathcal{C}$ peut poser des problèmes. Afin d'éliminer cet inconvénient, on donne à $\cos \mathcal{C}$ une valeur binaire simple

$$(II. 4) \quad \cos \mathcal{C} = 1 - 2^{-N}$$

transformant la multiplication en un décalage à droite de N digits et une addition. L'équation 2 devient :

$$X_k = 2 X_{k-1} - 2^{-N+1} X_{k-1} - X_{k-2}$$

$$(II.5) \text{ où } \Delta X_{k-1} - \Delta X_{k-2} + 2^{-N+1} X_{k-1} = 0$$

$$\text{avec } \Delta X_{k-1} = X_k - X_{k-1}$$

Le calcul de X_k peut se faire de la façon suivante

- 1) Calcul de $\Delta X_{k-1} = \Delta X_{k-2} - 2^{-N+1} X_{k-1}$
- 2) Calcul de $X_k = \Delta X_{k-1} + X_{k-1}$

La valeur X_k est obtenue par incrémentation.

La mise en oeuvre apparaît particulièrement simple avec un registre contenant l'incrément ΔX_{k-1} , un registre contenant la valeur courante X_{k-1} , un registre à décalage réalisant la multiplication par 2^{-N+1} et un additionneur (fig. II.1), ce qui fournit X_k .

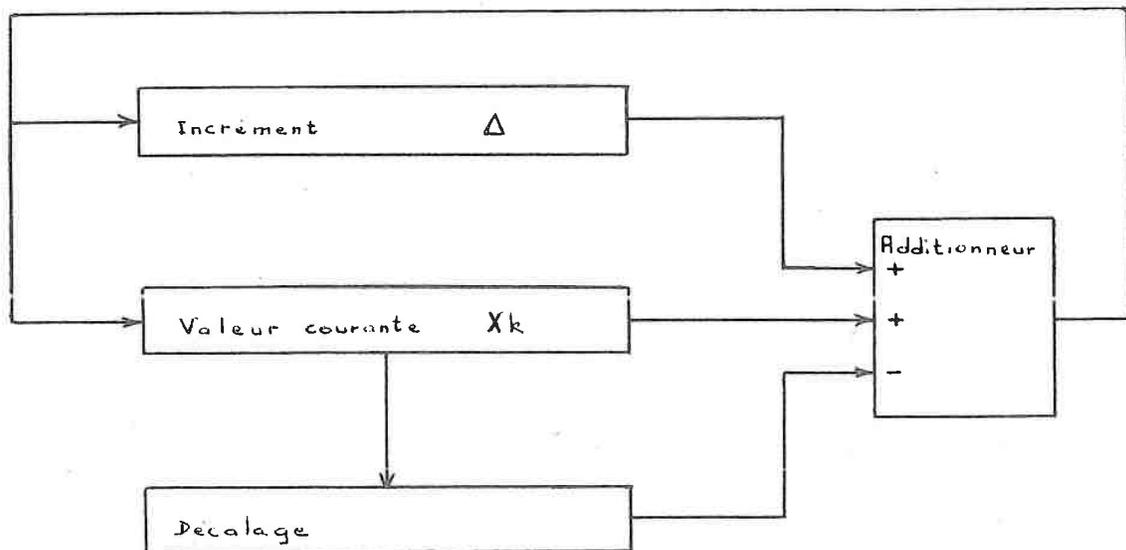


Figure II.1

II. 1. 2. Etude de l'erreur.

Ce procédé en supprimant les N derniers digits de X_k introduit inévitablement une erreur de chute.

Dans le cas d'une représentation en complément à deux, cette erreur est toujours négative quel que soit le signe du nombre tronqué et son module est majoré par le poids du dernier bit du registre à décalage.

Pour évaluer l'écart dû à cette erreur de chute, il faut résoudre

$$(II. 6) \quad X_{k+2} - 2 \cos \mathcal{Z} X_{k+1} + X_k - \mathcal{E}_{(k+1)} = 0$$

où X_{k+2} , X_{k+1} , X_k représentent alors les valeurs numériques.

Sous forme matricielle, en utilisant le formalisme des variables d'état $\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, on obtient :

$$(II. 7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{avec} \quad \begin{bmatrix} X_{k+1}^1 \\ X_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos \mathcal{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^1 \\ X_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V_k \end{bmatrix} \\ X_k^1 = X_k \\ X_k^2 = X_{k+1}^1 = X_{k+i} \\ V_k = \mathcal{E}_{k+1} \end{array} \right.$$

$$\text{Si } \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos \end{pmatrix}, \quad \underline{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} X_{k+1}^1 \\ X_{k+1}^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nous avons

$$\underline{X}_{k+1} = \underline{A} \cdot \underline{X}_k + \underline{I} \cdot \underline{V}_k$$

Cette équation récurrente du 1er ordre avec second membre admet comme solution (annexe II)

$$(II. 8) \quad \underline{X}_k = \underline{A}^k \cdot \underline{X}_0 + \sum_{\ell=0}^{\ell=k-2} \underline{A}^{k-1-\ell} \cdot \underline{V}_\ell + \underline{I} \cdot \underline{V}_{k-1}$$

Les éléments de la matrice de transition \underline{A}^k se déduisent de la matrice \underline{A} (Annexe III)

$$(II. 9) \quad \underline{A}^k = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(k-1)\mathcal{Z}}{\sin \mathcal{Z}} & \frac{\sin k \mathcal{Z}}{\sin \mathcal{Z}} \\ -\frac{\sin k \mathcal{Z}}{\sin \mathcal{Z}} & \frac{\sin(k+1)\mathcal{Z}}{\sin \mathcal{Z}} \end{pmatrix}$$

et la valeur \underline{X}_k (annexe IV).

$$(II. 10) \quad \underline{X}_k = \frac{1}{\sin \mathcal{Z}} \left[-\sin(k-1)\mathcal{Z} \cdot X_0 + X_1 \cdot \sin k \mathcal{Z} \right] \\ + \frac{1}{\sin \mathcal{Z}} \sum_{\ell=1}^{\ell=k-1} \sin(k-\ell)\mathcal{Z} \cdot \underline{E}_\ell$$

X_k est la somme de deux fonctions ; la première représente la fonction trigonométrique $R \cos (k\mathcal{Z} + \varphi)$ générée par la récurrence, sans tenir compte de l'erreur. La deuxième

$$(II. 11) \quad \frac{1}{\sin \mathcal{Z}} \sum_{\ell=1}^{\ell=k-1} \sin (k-\ell) \mathcal{Z} \cdot \mathcal{E}_\ell$$

fonction de toutes les erreurs de chute précédentes, représente l'écart entre X_k et $R \cos (k\mathcal{Z} + \varphi)$, dont nous cherchons un majorant de la limite maximale.

\mathcal{E}_ℓ a pour majorant le poids du dernier bit du registre. Sa valeur moyenne est la moitié de ce poids. Si L est la longueur du registre et le premier bit a pour poids 1, le dernier représente $2^{-(L-1)}$. Ainsi l'erreur (II. 11) peut être majorée

$$\frac{1}{\sin \mathcal{Z}} \sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} \sin (k-\ell) \mathcal{Z} \mathcal{E}_\ell < \frac{1}{\sin \mathcal{Z}} \sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} \sin (k-\ell) \mathcal{Z} \cdot 2^{-(L-1)}$$

pour $\sin (k-\ell) \mathcal{Z} > 0$ donc $(k-\ell) \mathcal{Z} < M$

Dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$ la fonction $\sin k\mathcal{Z}$ est croissante et

$\sum_{\ell=1}^{\ell=k-1} \sin(k-\ell) \mathcal{Z} \cdot 2^{-(L-1)}$ est un minorant de l'intégrale

$$(II. 12) \quad \int_0^{k\mathcal{Z}} \sin x \frac{dx}{\mathcal{Z}} \cdot 2^{-(L-1)} = 2^{-(L-1)} \left[\frac{1 - \cos k\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}} \right]$$

Par symétrie, le majorant de l'erreur pour l'intervalle $0, \Pi$ est :

$$(II. 13) \quad \frac{(1 - \cos \mathcal{U} + 2 \mathcal{U}) 2^{-(L-1)}}{\mathcal{U}} > \sum_{\ell=1}^{\ell=k-1} \sin(k-\ell) \mathcal{U} \cdot 2^{-(L-1)}$$

Pour l'intervalle $\Pi, 2\Pi$ l'erreur devenant négative, son module tend vers zéro.

Ainsi pour une période complète, l'écart maximum \mathcal{E}_{\max} entre la valeur exacte de $R \cos(k\mathcal{U} + \varphi)$ et le résultat obtenu par la récurrence reste inférieur à

$$(II. 14) \quad |\mathcal{E}_{\max}| < \frac{(1+\mathcal{U})2^{-(L-2)}}{\mathcal{U} \sin \mathcal{U}}$$

somme des deux majorants précédents.

Pour un grand nombre de pas, la valeur moyenne de l'erreur de troncature sera égale à la moitié du poids du dernier bit significatif. Si le nombre de décalage est assez petit devant le nombre de bits du registre, le module de l'erreur sera suffisamment aléatoire pour lui donner la valeur moyenne

$$\mathcal{E} = \frac{2^{-(L-1)}}{2} = 2^{-L}$$

Dans ce cas, l'erreur globale sera approchée par l'expression analytique

$$(II. 15) \quad E = \frac{2^{-L}}{\sin \mathcal{U}} \int_0^k \sin x \, dx = \frac{2^{-L}}{\sin \mathcal{U}} \frac{[1 - \cos k\mathcal{U}]}{\mathcal{U}}$$

Cette expression, toujours positive, est indépendante des conditions initiales, donc de l'amplitude et de la phase de la courbe générée. Elle est proportionnelle au poids du dernier bit et au nombre de décalage et suit une loi de variation de même fréquence que la fonction générée. Elle peut être majorée

$$\text{par } \frac{1 + \mathcal{O}}{\mathcal{O} \sin \mathcal{O}} \cdot 2^{-(L-2)} .$$

L'erreurs'annulant après une période comme le montre (II.15), on peut décrire plusieurs arches de sinusoides consécutives sans diverger.

L'effet cumulatif de l'erreur provient du signe toujours négatif de l'erreur de troncature et peut être évitée en prenant un arrondi sur la division par 2^n .

Dans ce cas, le résultat de la division par 2^n sera calculé par excès ou par défaut. Si le nombre de décalage est suffisamment petit devant la longueur du registre, on peut espérer que le signe et le module de l'erreur alternent de façon aléatoire réduisant ainsi le module total de l'erreur.

II.1.3. Résultats.

La génération de la sinusoides a été simulée sur calculateur T 2000 avec des registres de 18 bits ($L = 18$). Des essais avec et sans arrondi ont été effectués pour différentes valeurs de N ($N = 8, 10, 12$). Les tableaux 1 et 2 présentent les résultats obtenus avec $N = 8$, les chiffres précédés par un "*" correspondent aux valeurs calculées pour lesquelles une opération d'arrondi a été effective. On constate que cette opération a bien lieu d'une façon aléatoire.

cos kZ	sin kZ	R ²	cos kZ	sin kZ	R ² 28
+0.98440**00	+0.17590**00	+0.99999**00	+0.98440**00	+0.17590**00	+0.99999**00
+0.96502**00	+0.26213**00	+0.99999**00	+0.96502**00	+0.26213**00	+0.99999**00
+0.93811**00	+0.34633**00	+0.99999**00	+0.93811**00	+0.34633**00	+0.99999**00
+0.90386**00	+0.42781**00	+0.10000**01	+0.90386**00	+0.42781**00	+0.99998**00
+0.86257**00	+0.50596**00	+0.10000**01	+0.86257**00	+0.50596**00	+0.99997**00
+0.81453**00	+0.58016**00	+0.10000**01	+0.81449**00	+0.58013**00	+0.99996**00
+0.76013**00	+0.64982**00	+0.10001**01	+0.76008**00	+0.64979**00	+0.99996**00
+0.69980**00	+0.71441**00	+0.10001**01	+0.69973**00	+0.71437**00	+0.99996**00
+0.63400**00	+0.77343**00	+0.10001**01	+0.63391**00	+0.77337**00	+0.99996**00
+0.56326**00	+0.82640**00	+0.10002**01	+0.56314**00	+0.82638**00	+0.99995**00
+0.48812**00	+0.87293**00	+0.10003**01	+0.48798**00	+0.87283**00	+0.99995**00
+0.40917**00	+0.91264**00	+0.10003**01	+0.40899**00	+0.91251**00	+0.99995**00
+0.32703**00	+0.94522**00	+0.10004**01	+0.32680**00	+0.94506**00	+0.99995**00
+0.24235**00	+0.97043**00	+0.10004**01	+0.24207**00	+0.97023**00	+0.99995**00
+0.15577**00	+0.98806**00	+0.10005**01	+0.15543**00	+0.98782**00	+0.99995**00
+0.67978*-01	+0.99798**00	+0.10006**01	+0.67589*-01	+0.99768**00	+0.99995**00
-0.20340*-01	+0.10001**01	+0.10006**01	-0.20733*-01	+0.99975**00	+0.99994**00
-0.10850**00	+0.99442**00	+0.10006**01	-0.10899**00	+0.99401**00	+0.99993**00
-0.19580**00	+0.98098**00	+0.10006**01	-0.19635**00	+0.98049**00	+0.99993**00
-0.28157**00	+0.95986**00	+0.10006**01	-0.28217**00	+0.95932**00	+0.99993**00
-0.36513**00	+0.93126**00	+0.10006**01	-0.36579**00	+0.93066**00	+0.99993**00
-0.44524**00	+0.89539**00	+0.10004**01	-0.44655**00	+0.89472**00	+0.99994**00
-0.52307**00	+0.85253**00	+0.10004**01	-0.52381**00	+0.85180**00	+0.99995**00
-0.59620**00	+0.80301**00	+0.10003**01	-0.59699**00	+0.80222**00	+0.99998**00
-0.66467**00	+0.74722**00	+0.10001**01	-0.66552**00	+0.74639**00	+0.10000**00
-0.72796**00	+0.68580**00	+0.99998**00	-0.72834**00	+0.68472**00	+0.10000**00
-0.78554**00	+0.61862**00	+0.99978**00	-0.78647**00	+0.61770**00	+0.10001**00
-0.83698**00	+0.54682**00	+0.99936**00	-0.83796**00	+0.54586**00	+0.10001**00
-0.88189**00	+0.47075**00	+0.99933**00	-0.88291**00	+0.46975**00	+0.10001**00
-0.91939**00	+0.39100**00	+0.99907**00	-0.92095**00	+0.38997**00	+0.10002**00
-0.95070**00	+0.30820**00	+0.99882**00	-0.95131**00	+0.30714**00	+0.10003**00
-0.97409**00	+0.22292**00	+0.99857**00	-0.97522**00	+0.22191**00	+0.10003**00
-0.98986**00	+0.13605**00	+0.99833**00	-0.99102**00	+0.13496**00	+0.10003**00
-0.99789**00	+0.48042*-01	+0.99810**00	-0.99906**00	+0.46943*-01	+0.10003**00
-0.99813**00	-0.40336*-01	+0.99789**00	-0.99931**00	-0.41435*-01	+0.10003**00
-0.99056**00	-0.12839**00	+0.99769**00	-0.99175**00	-0.12949**00	+0.10003**00
-0.97525**00	-0.21544**00	+0.99753**00	-0.97644**00	-0.21654**00	+0.10003**00
-0.95231**00	-0.30081**00	+0.99739**00	-0.95349**00	-0.30189**00	+0.10003**00
-0.92193**00	-0.38382**00	+0.99728**00	-0.92310**00	-0.38488**00	+0.10003**00
-0.88434**00	-0.46382**00	+0.99719**00	-0.88551**00	-0.46426**00	+0.10002**00
-0.83984**00	-0.54019**00	+0.99714**00	-0.84099**00	-0.54122**00	+0.10001**00
-0.78878**00	-0.61234**00	+0.99714**00	-0.78891**00	-0.61334**00	+0.10001**00
-0.73154**00	-0.67971**00	+0.99717**00	-0.73264**00	-0.68068**00	+0.10001**00
-0.66860**00	-0.74175**00	+0.99722**00	-0.66967**00	-0.74270**00	+0.10001**00
-0.60042**00	-0.79799**00	+0.99730**00	-0.60145**00	-0.79891**00	+0.10000**00
-0.52755**00	-0.84799**00	+0.99741**00	-0.52854**00	-0.84888**00	+0.99997**00
-0.45056**00	-0.89136**00	+0.99755**00	-0.45150**00	-0.89223**00	+0.99993**00
-0.37004**00	-0.92770**00	+0.99770**00	-0.37093**00	-0.92860**00	+0.99989**00
-0.28663**00	-0.95693**00	+0.99787**00	-0.28746**00	-0.95771**00	+0.99985**00
-0.20097**00	-0.97860**00	+0.99805**00	-0.20176**00	-0.97934**00	+0.99982**00
-0.11375**00	-0.99262**00	+0.99825**00	-0.11447**00	-0.99332**00	+0.99979**00
-0.25627*-01	-0.99889**00	+0.99844**00	-0.26291*-01	-0.99954**00	+0.99977**00
+0.62693*-01	-0.99735**00	+0.99864**00	+0.62095*-01	-0.99794**00	+0.99975**00
+0.15053**00	-0.98801**00	+0.99883**00	+0.15000**00	-0.98855**00	+0.99973**00
+0.23720**00	-0.97095**00	+0.99901**00	+0.23671**00	-0.97144**00	+0.99973**00
+0.32201**00	-0.94620**00	+0.99918**00	+0.32160**00	-0.94674**00	+0.99973**00
+0.40432**00	-0.91425**00	+0.99933**00	+0.40396**00	-0.91464**00	+0.99975**00
+0.48347**00	-0.87505**00	+0.99946**00	+0.48317**00	-0.87539**00	+0.99976**00
+0.55803**00	-0.82901**00	+0.99955**00	+0.55859**00	-0.82931**00	+0.99976**00
+0.62904**00	-0.77648**00	+0.99963**00	+0.62966**00	-0.77675**00	+0.99982**00
+0.69593**00	-0.71789**00	+0.99970**00	+0.69581**00	-0.71813**00	+0.99987**00
+0.75659**00	-0.65368**00	+0.99974**00	+0.75659**00	-0.65368**00	+0.99994**00
+0.81135**00	-0.58436**00	+0.99978**00	+0.81131**00	-0.58455**00	+0.99996**00
+0.85977**00	-0.51047**00	+0.99980**00	+0.85977**00	-0.51064**00	+0.99996**00
+0.90386**00	-0.43289**00	+0.99982**00	+0.90151**00	-0.43274**00	+0.99998**00
+0.94386**00	-0.35133**00	+0.99982**00	+0.94386**00	-0.35145**00	+0.10000**00
+0.97986**00	-0.26732**00	+0.99982**00	+0.97986**00	-0.26732**00	+0.10000**00

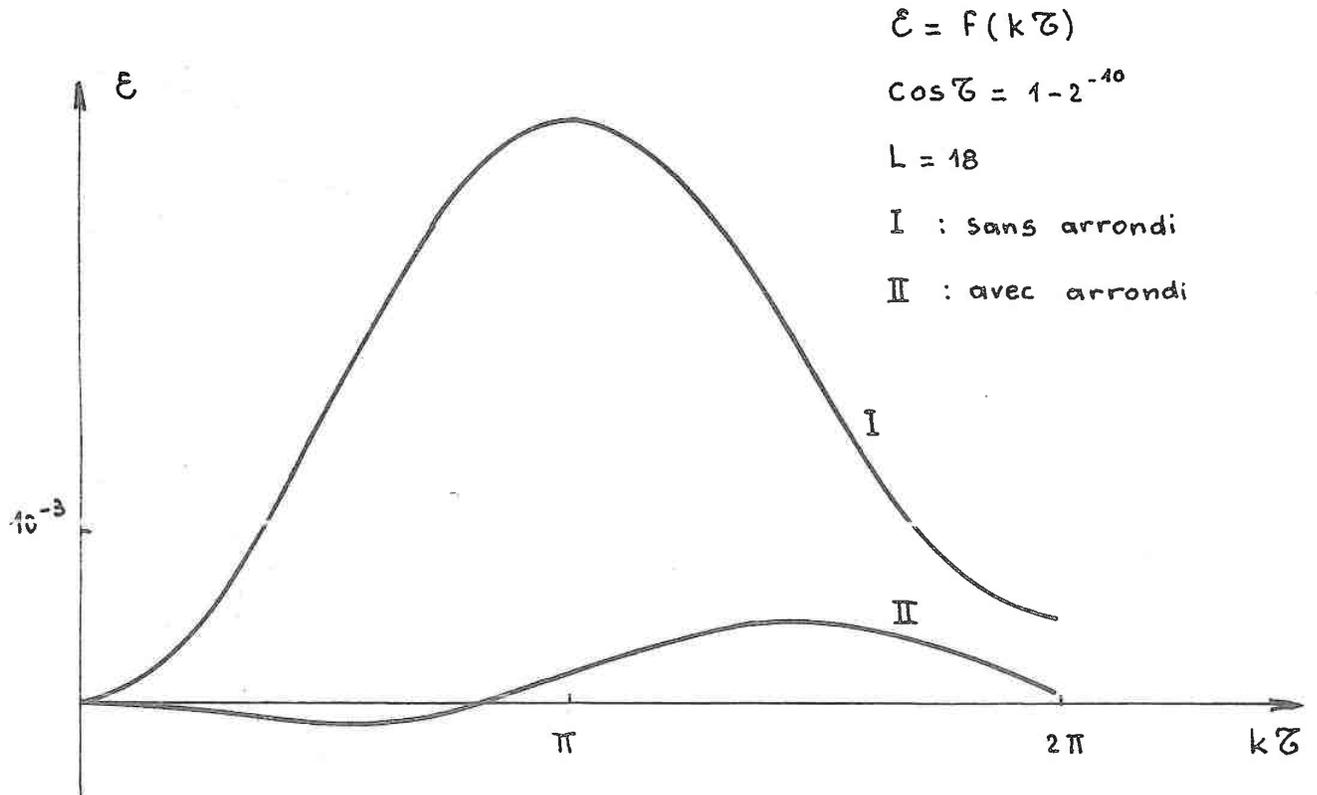
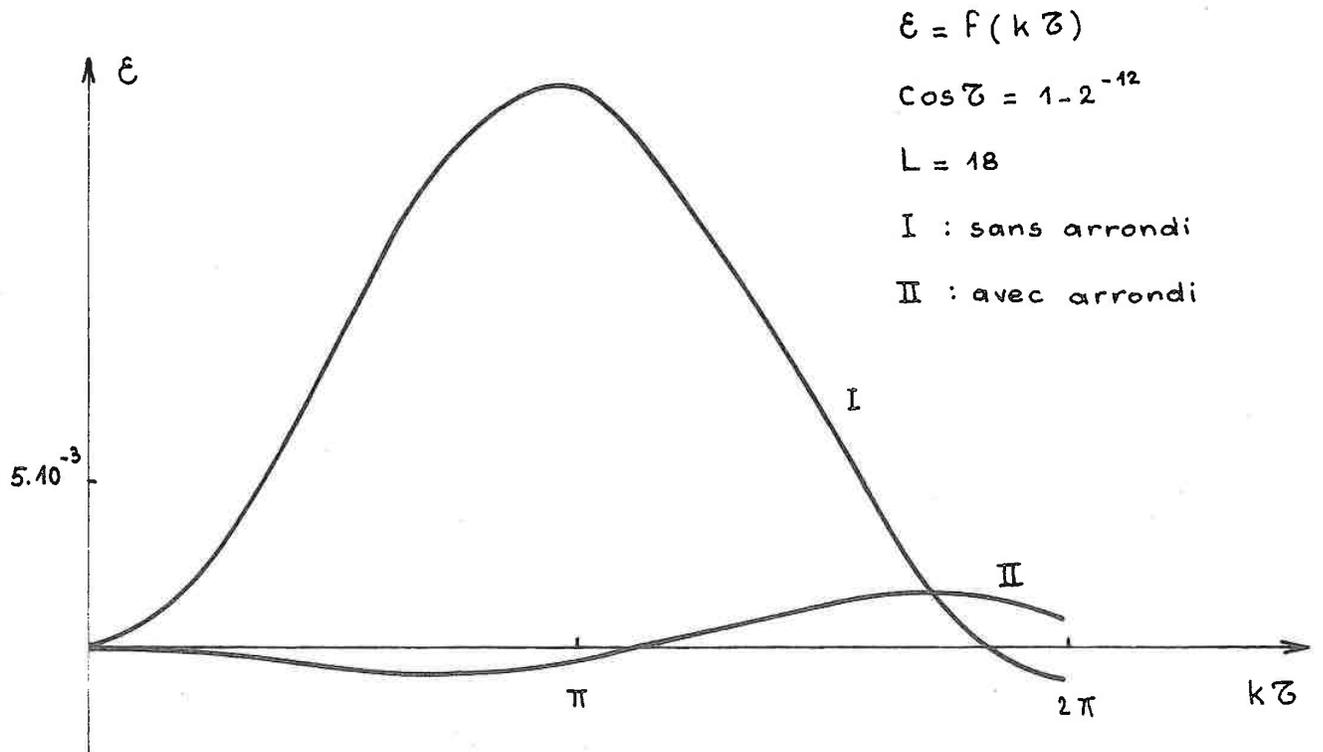


FIGURE II. 2

La figure (II. 2) montre les erreurs obtenues dans les 2 cas pour $N = 10$ et $N = 12$.

Numériquement les écarts maxima sont :

N =	Sans arrondi max	Avec arrondi max	Valeur maximale calculée $2^{-(L-1)} / 1 - \cos \zeta$
8	$9,7 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	$1,9 \cdot 10^{-3}$
10	$3,47 \cdot 10^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-4}$	$7,8 \cdot 10^{-3}$
12	$16,6 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-4}$	$31,25 \cdot 10^{-3}$

On constate que l'arrondi apporte une nette diminution de l'écart, qui restebien inférieur à la valeur majorée calculée, cette diminution est dans le rapport de 1 à 10. Sans arrondi, l'erreur suit une loi de variation du même type que la fonction à générer, ici une sinusoïde.

II-2. Interpolation linéaire.

1) Si on fait $A = 1$ dans l'équation (II. 1) on obtient

$$(II. 16) \quad \begin{aligned} \Delta X_{k-1} &= \Delta X_{k+2} = \Delta X \\ X_k &= \Delta X + X_{k-1} \end{aligned}$$

Cette équation admet comme solution évidente

$$X_k = k \cdot \Delta X + X_0$$

Le schéma de simulation est le suivant (figure II. 3).

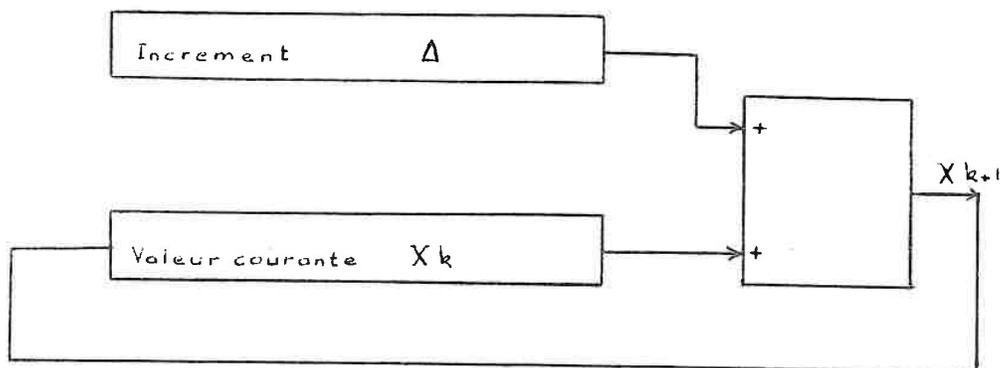


Figure II. 3

II. 2. 1. Etude de l'erreur.

A chaque itération, une erreur est introduite. Cette erreur a pour cause la quantification de l'incrément. Elle est systématique et reste identique tout au long de l'interpolation.

La valeur courante X_k sera effectivement

$$X_k = k\Delta X + X_0 - k\mathcal{E}$$

\mathcal{E} : erreur de quantification.

$k\mathcal{E}$: représente l'écart entre la valeur réelle et la valeur exacte de X_k .

Si avec un pas de 0,25 mm on veut interpoler une droite entre deux points A et B de l'espace distants de 1 mètre avec une précision de 1μ , la quantification de l'incrément devra être inférieure à

$$\mathcal{E} = \frac{1}{k\sqrt{3}} \text{ ce qui, avec } k = \frac{1\,000}{0,25} = 4 \cdot 10^3$$

donne $\mathcal{E} = 0,147 \cdot 10^{-3} \mu$.

Le calcul devra être fait avec 23 digits après le bit représentant les millimètres.

II. 3. 1. Interpolation parabolique.

On remplace dans l'équation (II. 1) le coefficient A par 1 et on ajoute un second membre constant, ce qui donne

$$(II. 17) \quad X_k - 2 \cdot X_{k-1} + X_{k-2} = \delta$$

dont la solution est une parabole comme nous allons le montrer.

En utilisant le formalisme présenté en (II. 7), cette relation devient

$$\begin{bmatrix} X_{k+1}^1 \\ X_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^1 \\ X_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \end{bmatrix}$$

soit

$$\underset{\sim}{X}_{k+1} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{X}_k + \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{\delta}$$

La matrice de transition $\underset{\sim}{A}^k$ a pour éléments (annexe V)

$$\underset{\sim}{A}^k = \begin{bmatrix} 1-k & k \\ -k & 1+k \end{bmatrix}$$

et la solution s'écrit

$$(II. 18) \quad \underset{\sim}{X}_k = \underset{\sim}{A}^k \cdot \underset{\sim}{X}_0 + \sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} \underset{\sim}{A}^{\ell} \cdot \delta$$

Or (annexe VI) on peut écrire

$$\sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} \underset{\sim}{A}^{\ell} = \begin{bmatrix} \frac{k(-k+3)}{2} & (k-1) \frac{k}{2} \\ \frac{k(1-k)}{2} & \frac{k(k+1)}{2} \end{bmatrix}$$

avec le changement de variable $X_k^1 = X_k$, la solution de (II. 17) est donc

$$(II. 19) \quad X_k = \frac{k^2}{2} \delta + k(X_1 - X_0 - \frac{\delta}{2}) + X_0$$

comme on peut d'ailleurs le vérifier facilement directement.

Les points X_k se répartissent en fonction de K sur une parabole d'ordonnée à l'origine X_0 (pour $K = 0$) et d'accélération δ .

Une telle génération est très simple ; en effet (II. 17) se met sous la forme

$$\Delta X_{k+1} = \Delta X_k + \delta$$

ce qui donne le schéma de la figure II. 4.

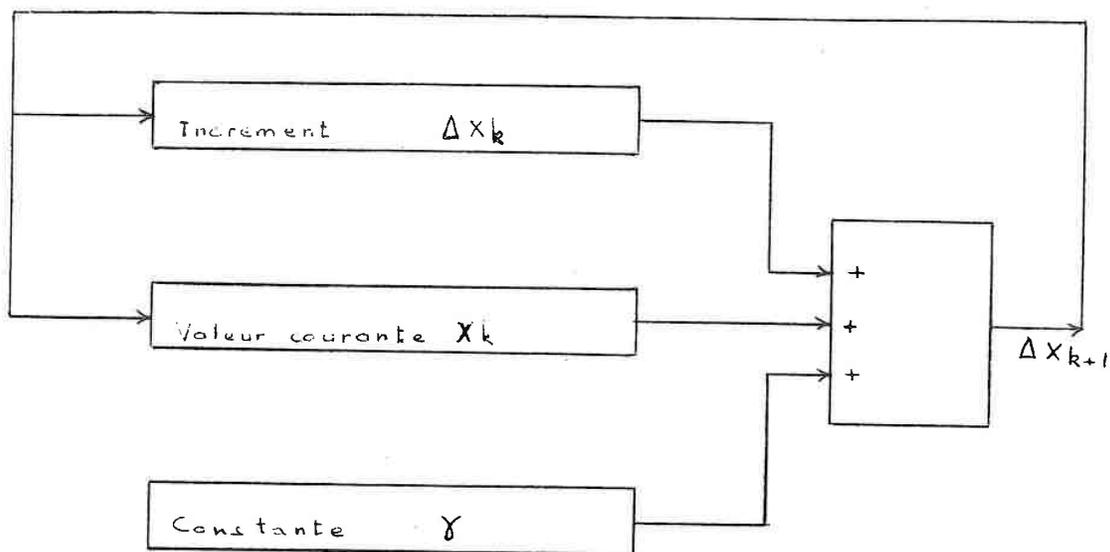


Figure II. 4

II. 3. 2. Précision.

Les sources d'erreur sont dues à la quantification de X_0 (erreur \mathcal{E}_0), de $X_1 - X_0$ (erreur \mathcal{E}_1) et de γ (erreur \mathcal{E}_2).

L'écart \mathcal{E}_k sur le $k^{\text{ième}}$ point X_k est

$$(II. 19 \text{ bis}) \quad \mathcal{E}_k = \mathcal{E}_0 + k \mathcal{E}_1 + k(k-1) \mathcal{E}_2$$

ce qui montre l'importance de l'erreur \mathcal{E}_2 qui fait évoluer l'écart comme le carré du nombre d'itérations et limite donc la longueur d'arc de parabole que l'on peut décrire avec une précision donnée.

II. 4. 1. Génération exponentielle.

Le coefficient A de l'équation (II. 1) doit être alors supérieur à 1 et on pose

$$A = \text{ch } \mathcal{Z}$$

L'équation de récurrence (II. 1) devient alors

$$(II. 20) \quad X_k = 2 \text{ ch } \mathcal{Z} \cdot X_{k-1} - X_{k-2}$$

et a pour solution (annexe VII) les valeurs échantillonnées au pas de \mathcal{Z} d'une combinaison d'exponentielles

$$(II. 21) \quad X_k = \alpha \cdot e^{k\mathcal{Z}} + \beta \cdot e^{-k\mathcal{Z}}$$

avec α et β déterminés par les conditions initiales

$$(II. 22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{X_1 - e^{-\mathcal{Z}} \cdot X_0}{2 \text{ sh } \mathcal{Z}} \\ \beta = \frac{e^{\mathcal{Z}} X_0 - X_1}{2 \text{ sh } \mathcal{Z}} \end{array} \right.$$

Ces récurrences permettent en outre de générer une hyperbole.

Les mouvements sur chaque axe sont déterminés par les équations

$$X_k = \alpha \cdot e^{k\mathcal{Z}} + \beta e^{-k\mathcal{Z}}$$

$$Y_k = \alpha' \cdot e^{k\mathcal{Z}} + \beta' \cdot e^{-k\mathcal{Z}}$$

En annulant β et α' on obtient une description dans le sens des X croissants, dans le sens contraire si on fait $\beta' = \alpha = 0$. Chaque axe sera donc piloté par une récurrence du type (II. 20) et l'outil suivra la courbe $Y_k = \frac{a}{X_k}$ avec $a = \beta\alpha'$ ou $\alpha\beta'$ selon le sens désiré.

La multiplication par $\text{ch } \mathcal{Z}$ est simplifiée en donnant la v valeur binaire simple

$$\text{ch } \mathcal{Z} = 1 + 2^{-N},$$

ce qui donne pour (II. 20)

$$(X_k - X_{k-1}) = (X_{k-1} - X_{k-2}) + 2^{-N+1} X_{k-1}$$

et la valeur de l'incrément

$$(II. 23) \quad \Delta X_{k-1} = \Delta X_{k-2} + 2^{-N+1} X_{k-1}$$

On calcule alors la valeur X_k par

$$(II. 24) \quad X_k = X_{k-1} + \Delta X_{k-1}$$

comme le montre le schéma de la figure (II. 5) identique à celui de la génération de la sinusolde.

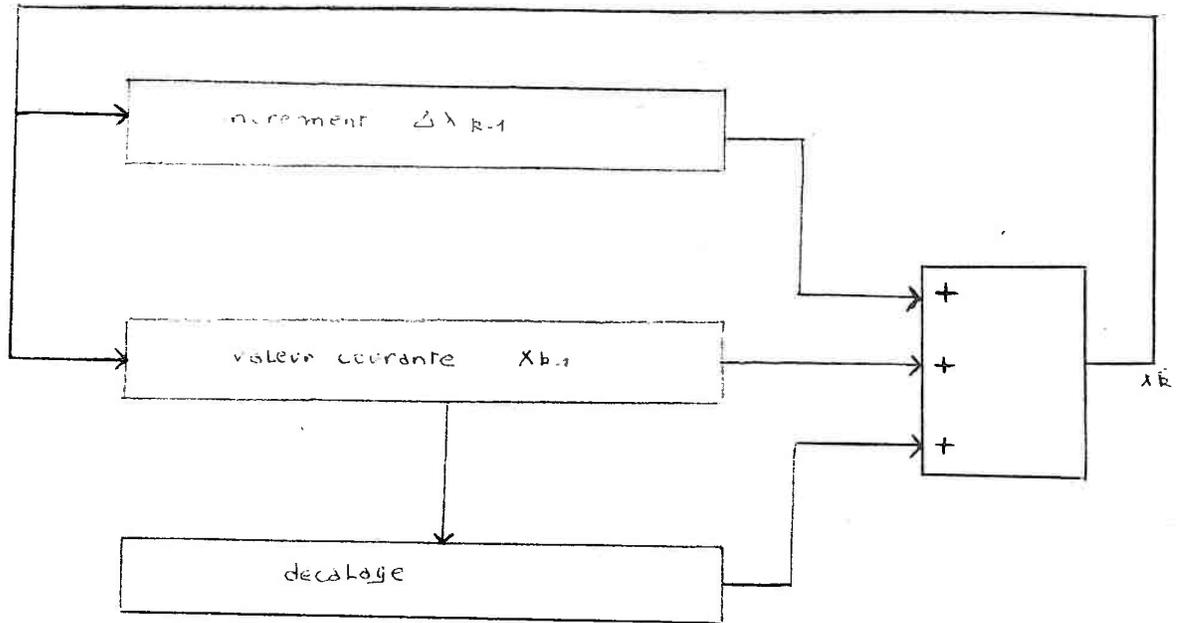


Figure II. 5

II. 4. 2. Etude de l'erreur.

Pour évaluer l'erreur, on doit résoudre l'équation (II. 20) avec \mathcal{E}_{k-1} représentant l'erreur introduite par les décalages, ce qui avec le formalisme déjà utilisé donne

$$(II. 25) \quad \begin{bmatrix} X_{k+1}^1 \\ X_{k+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2eh\mathcal{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k^1 \\ X_k^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V_k \end{bmatrix}$$

avec $X_k^1 = X_k$, $X_k^2 = X_{k+1}$, $V_k = \mathcal{E}_{k+1}$.

La matrice de transition A^k s'en déduit (annexe VIII) et a pour expression

$$A^k = \frac{1}{sh\mathcal{Z}} \begin{bmatrix} -sh(k-1)\mathcal{Z} & sh\ k\ \mathcal{Z} \\ -sh\ k\ \mathcal{Z} & sh\ (k+1)\ \mathcal{Z} \end{bmatrix}$$

ce qui fournit la solution

$$(II. 26) \quad X_k = \frac{1}{\text{sh } \mathcal{Z}} \left[-\text{sh}(k-1)\mathcal{Z} \cdot X_0 + X_1 \cdot \text{sh } k\mathcal{Z} \right] \\ + \frac{1}{\text{sh } \mathcal{Z}} \sum_{\ell=1}^{\ell=k-1} \text{sh}(k-\ell)\mathcal{Z} \cdot \mathcal{E}_\ell$$

qui peut aussi s'écrire, en fonction de $e^{k\mathcal{Z}}$ et $e^{-k\mathcal{Z}}$

$$X_k = e^{+k\mathcal{Z}} \left[\frac{X_1 - e^{-\mathcal{Z}} \cdot X_0}{2 \text{sh } \mathcal{Z}} \right] + e^{-k\mathcal{Z}} \left[\frac{e^{\mathcal{Z}} \cdot X_0 - X_1}{2 \cdot \text{sh } \mathcal{Z}} \right] \\ + \frac{1}{\text{sh } \mathcal{Z}} \sum_{\ell=1}^{\ell=k-1} \text{sh}(k-\ell)\mathcal{Z} \cdot \mathcal{E}_\ell$$

Par comparaison avec l'expression (II. 21) et compte-tenu de (II. 22) l'erreur est représentée par le dernier terme, dont on cherche un majorant.

\mathcal{E}_ℓ est majoré par le poids 2^{-L+1} du dernier bit, et la somme discrète $\sum_{\ell=1}^{\ell=k-1} \text{sh}(k-\ell)\mathcal{Z}$ par $\frac{1}{\mathcal{Z}} \int_0^{k\mathcal{Z}} \text{sh } x \, dx$, cette fonction étant toujours croissante.

On obtient donc

$$(II. 27) \quad \frac{1}{\text{sh } \mathcal{Z}} \sum_{\ell=1}^{\ell=k-1} \text{sh}(k-\ell)\mathcal{Z} \cdot \mathcal{E}_\ell < \frac{2^{-L+1} \cdot (\text{ch } k\mathcal{Z} - 1)}{\mathcal{Z} \cdot \text{sh } \mathcal{Z}}$$

Dans ce cas, l'erreur évolue comme $\text{ch } k\mathcal{Z}$, elle diverge donc, ce qui limite le nombre k d'itérations pour que les valeurs numériques obtenues restent dans les limites de la précision imposée.

La résolution de l'équation aux différences

$$\Delta X_k = \Delta X_{k-1} + P$$

et $X_{k+1} = \Delta X_k + X_k$

permet de générer, selon les valeurs de P, différentes fonctions :

$$P = -2^{-N+1} \cdot X_k \rightarrow \text{sinusoïde} \quad X_k = R \cos(k\mathcal{Z} + \varphi)$$

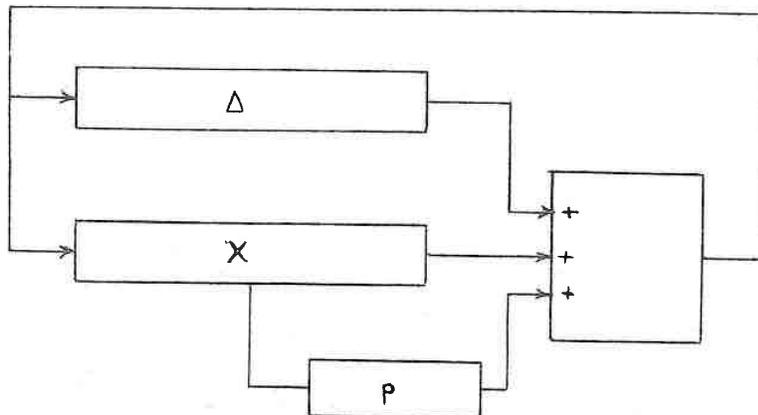
$$P = 0 \rightarrow \text{droite} \quad X_k = A \cdot k + X_0$$

$$P = \frac{V}{2} \rightarrow \text{parabole} \quad X_k = k^2 \frac{V}{2} + B \cdot k + X_0$$

$$P = 2^{-N+1} \rightarrow \text{exponentielle} \quad X_k = \alpha e^{k\mathcal{Z}} + \beta e^{-k\mathcal{Z}}$$

et toutes leurs combinaisons.

L'avantage important réside dans le fait qu'un même schéma de simulation permet de traiter tous les cas, après initialisation et modification de la séquence en fonction de P;



La réalisation de ce système peut être faite simplement à l'aide d'un registre à décalage d'un additionneur et d'une séquence appropriée.

Pour appliquer ces résultats à la conduite de la trajectoire d'un outil , il faut en plus résoudre les problèmes spécifiques à la conduite de la machine :

- précision de la définition de la trajectoire de l'outil ;
- compatibilité des grandeurs de sortie avec la commande en position des asservissements ;
- contrôle de la vitesse d'avance ;
- accélération et déccélération aux points de départ et d'arrivée;
- simplicité maximale de l'ensemble compte-tenu des performances.

Ces problèmes sont directement liés à l'interpolateur lui-même et traités dans le chapitre suivant.

D'autres points, tels que :

- adaptation du référentiel de calcul à celui de la machine ,
- correction de rayon d'outil

sont traités par programmation et appartiennent au software spécifique du calculateur en liaison avec l'interpolateur.

CHAPITRE III - ETUDE DE L'INTERPOLATEUR.

III-1 Dimensionnement et définition de la séquence dans le cas

1. de l'interpolation circulaire
2. de l'interpolation linéaire
3. de l'interpolation parabolique
4. de l'interpolation exponentielle

III-2 Contrôle de la vitesse et de l'accélération

III-3 Séquence à générer pour obtenir les 4 types d'interpolation

III-4 Initialisation

III-5 Schéma de l'interpolateur

On présente dans ce chapitre l'étude de l'interpolateur en vue de sa réalisation. Dans un premier temps, on dimensionne les registres nécessaires à une précision de 1 micron, et on établit la suite logique des opérations pour chaque type d'interpolation. Le problème de l'accélération et du contrôle de la vitesse est alors étudié. Après avoir alors précisé la séquence à générer et résolu les problèmes d'initialisation, on en déduit le schéma fonctionnel de cet interpolateur multifonctions.

Cette étude est basée sur l'utilisation de capteurs de position du type Inductosyn, qui admettent comme plus grand incrément la valeur de $\pm 0,25$ mm par axe pour des règles Inductosyn au pas de 2 mm, pas très couramment utilisé pour les

machines à Commande Numérique.

Ainsi, lorsque l'incrément calculé sera supérieur à cette valeur (0,25 mm) il sera nécessaire de le diviser par des puissances de 2. L'unité utilisée ici est le millimètre.

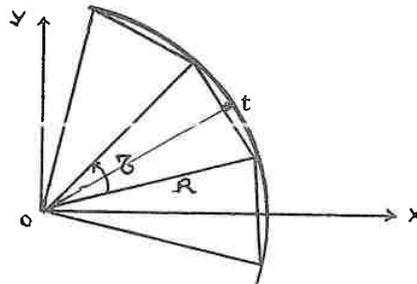
Dans le cas où les mouvements de la Machine sont assurés par des moteurs pas à pas en boucle ouverte, le problème est simplifié, la commande se résumant à l'emploi de compteurs-décompteurs.

III-1 Dimensionnement et définition de la séquence.

1) Cas de l'interpolation circulaire.

a) Dimensionnement :

Nous imposons un rayon maximum programmable de 8 mètres ce qui correspond aux possibilités des systèmes les plus performants et couvre largement les nécessités de l'industrie. Un arc de cercle est approché par un polygone intérieur dont chaque côté correspond à un écart angulaire \mathcal{U} .



L'écart t entre la corde et le cercle

$$(III. 1) \quad t = R \left(1 - \cos \frac{\mathcal{Z}}{2} \right) \neq R \frac{\mathcal{Z}^2}{8}$$

doit être inférieur ou égal à un micron.

Comme $\cos \mathcal{Z} = 1 - 2^{-N}$, soit $\mathcal{Z}^2 \neq 2^{-N+1}$, on en déduit la relation entre R exprimé en microns et le nombre N caractéristique de \mathcal{Z} et définissant le nombre de décalages à effectuer

$$(III. 2) \quad R(\mu) \leq 2^{N+2}$$

R devant être exprimé en millimètres, on fait l'approximation $1 \text{ mm} = 1000 \mu \neq 2^{10} \mu$, ce qui donne

$$(III. 3) \quad R(\text{mm}) \leq 2^{N-8}$$

et fixe ainsi N pour un R donné, en choisissant bien entendu pour N la plus petite valeur.

Comme on l'a vu dans le chapitre II, la précision du calcul par itération est fonction du nombre de décalages N et du nombre L de digits utilisés. D'après l'expression approchée de l'erreur globale (II. 15)

$$(III. 4) \quad E = \frac{2^{-L}}{\sin \mathcal{Z}} \frac{[1 - \cos k\mathcal{Z}]}{\mathcal{Z}}$$

on voit que sa valeur maximale est obtenue pour $\cos k\mathcal{Z} = -1$, soit

$$(III. 5) \quad E_{\text{MAX}} = \frac{2^{-L}}{\sin \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z}} \neq \frac{2^{-L}}{\mathcal{Z}^2} \neq 2^{-L+N}$$

L'utilisation de l'arrondi la divise pratiquement par 10. On impose qu'elle est inférieure à un demi micron, ce qui en millimètres donne

$$(III. 6) \quad \frac{10^{-3}}{2} < \frac{2^{-L+N}}{10}$$

On en déduit le nombre minimum de digits D, de poids faibles, comptés à partir du digit représentant le millimètre inclus, qui assure la précision demandée

$$(III. 7) \quad D = N + 8$$

Le tableau III. 1 indique pour différentes valeurs de R, en millimètres, la valeur de N fixée par la relation (III. 3) et la valeur de D fixée par (III. 7) pour assurer l'approximation du cercle par un polygone distant de moins d'1 micron et la précision des calculs à moins de un demi micron.

Afin de pouvoir représenter 8 mètres, soit $8 \cdot 10^3$ mm, il est nécessaire de disposer d'un registre de poids forts (à partir du digit représentant les millimètres) de 14 bits.

La distance maximale entre deux points successifs pour un axe $d = 2 R \sin \frac{\alpha}{2}$, est donnée dans la dernière colonne du tableau. Cette valeur devient supérieure à l'incrément maximum admissible par les inductosyns, 0,25 mm, pour $R > 8$ mm.

Les schémas (III. 2) précisent dans chaque cas la configuration des registres contenant les grandeurs X, XD représentant X décalée de N-1 bits et l'incrément ΔX . Le cas correspondant à R = 8 mètres nécessite les registres de plus grandes dimensions, ce qui fixe la configuration.

R(mm)		N (cos = 1 - 2 ^{-N})	D	45/ d (mm)
1,25	10 ⁻¹	5	13	3 10 ⁻²
2,5	10 ⁻¹	6	14	4,2 10 ⁻²
5	10 ⁻¹	7	15	6 10 ⁻¹
1	10 ⁰	8	16	8,4 10 ⁻²
2	10 ⁰	9	17	1,2 10 ⁻¹
4	10 ⁰	10	18	1,7
8	10 ⁰	11	19	2,5 10 ⁻¹
1,6	10 ¹	12	20	0,35
3,2	10 ¹	13	21	0,5
6,4	10 ¹	14	22	0,7
1,28	10 ²	15	23	1
2,56	10 ²	16	24	1,4
5,12	10 ²	17	25	2
1,024	10 ³	18	26	2,8
2,048	10 ³	19	27	4
4,096	10 ³	20	28	5,6
8,192	10 ³	21	29	8

Tableau III. 1

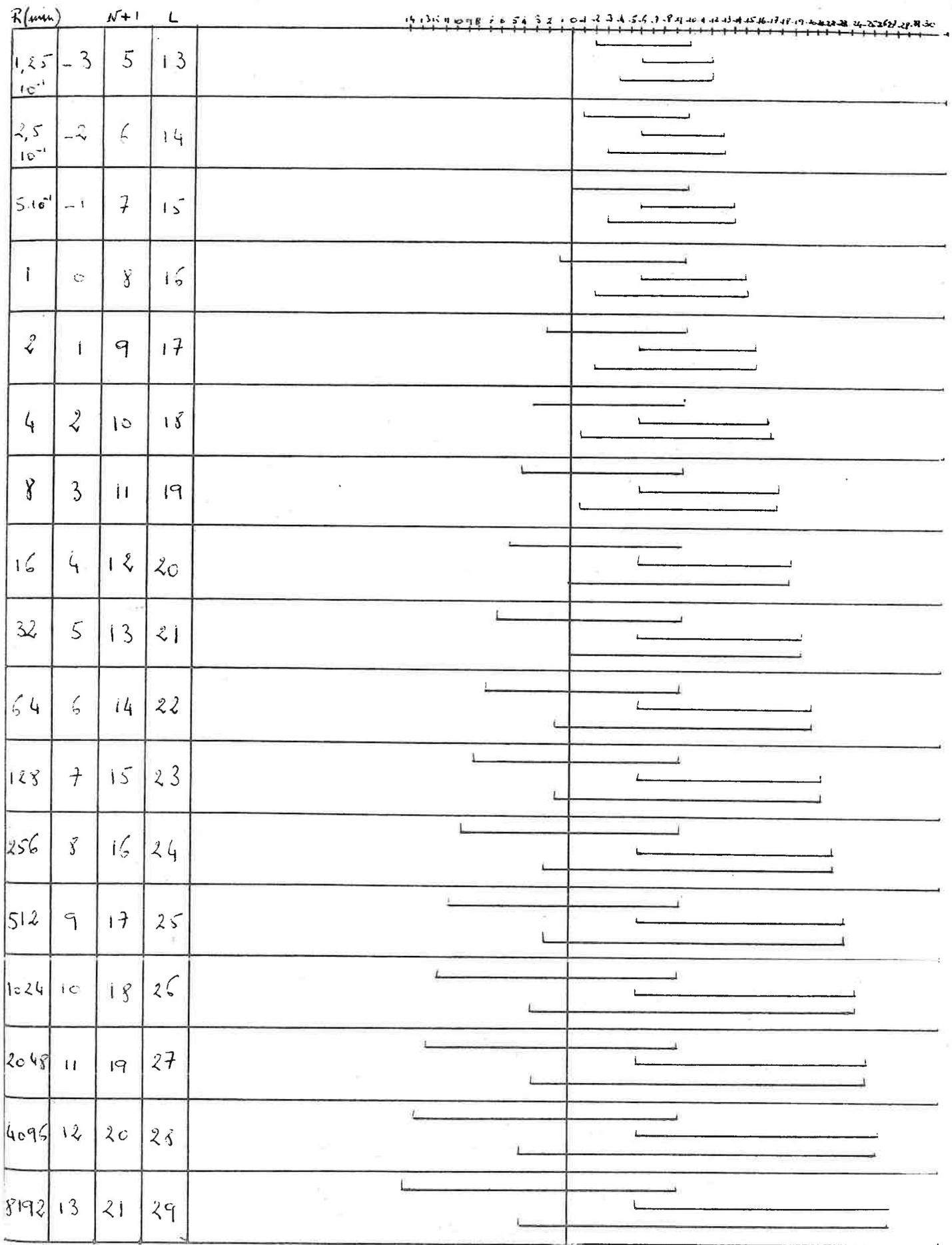


Figure III 2

Pour la réalisation, on utilise un même registre pour X et XD, la position relative étant alors obtenue par le décalage à gauche de N-1 digits du registre ΔX .

b) Séquence :

- Calcul de la valeur X_k .

Le calcul doit être fait au micron, donc avec 10 bits significatifs après le bit 0. Mais l'addition doit être faite sur un plus grand nombre de bits avec un arrondi, afin d'éviter une erreur cumulative. On utilise trois bits supplémentaires avec le report du quatrième sur le troisième.

On décale à droite le registre ΔX jusqu'à ce que les bits 0 coïncident. Afin que les bits de droite ne soient perdus, le décalage est fait en boucle fermée.

D'autre part, lorsque $R > 8$ mm, le pas d est supérieur à 0,25 mm. Il est donc impossible d'ajouter directement le pas à la valeur X_{k-1} pour obtenir la valeur de consigne X_k , il faut donc le diviser.

Pour cela, on décale à droite le registre ΔX de K ce qui divise son contenu par 2^K .

La valeur maximale du pas étant 8 mm pour $R = 8$ m, il faut le diviser par 32, donc le décaler de $K = 5$. Pour ne pas diminuer la précision du calcul, 5 bits supplémentaires sont donc nécessaires.

Les récurrences fournissent les valeurs numériques des incréments qui sont ajoutées au contenu d'un registre X_c dont la valeur initiale correspond au décalage entre le zéro programme et le référentiel de calcul. Cette valeur constitue la consigne envoyée à l'asservissement.

(I) 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18

-19 -20 -21 -22 -23 -24 -25 -26 -27 -28 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18

(II) 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18

-15 -16 -17 -18 -19 -20 -21 -22 -23 -24 -25 -26 -27 -28 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14

CALCUL DE X_k

(I) F. = 8 mm

(II) F. = 8 mètres

Figure III. 3

13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18

(I) 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19 -20 -21 -22

(II) 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18

3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19 -20 -21 -22 -23 -24 -25 -26 -27 -28

Figure III. 4

CALCUL DE ΔX_k

(I) R = 8 mm

(II) R = 8 mètres

Ce registre ne comprend pas de digits de poids supérieurs aux millimètres, ceux-ci étant inutiles à l'élaboration du signal de consigne -analogique.

La figure (III. 3) illustre deux cas relatifs à $R = 8 \text{ mm}$ et $R = 8 \text{ mètres}$.

- Calcul de ΔX_k .

Pour calculer ΔX_k avec X_k et ΔX_{k-1} , on décale le registre contenant ΔX_{k-1} vers la gauche de $N-1$ positions, puis on soustrait à ΔX_{k-1} le contenu du registre X . Les schémas de la figure III. 4 illustrent ce fonctionnement pour $R = 8 \text{ mm}$ et $R = 8 \text{ m}$.

Pour réaliser l'arrondi sur cette soustraction, on teste le bit -9 de X . S'il vaut 1, on complémente à 1 la valeur de X à l'entrée de l'additionneur. S'il vaut 0, on laisse la complémentation à 2 de X . Ce principe est intéressant car il est réalisé en une seule opération.

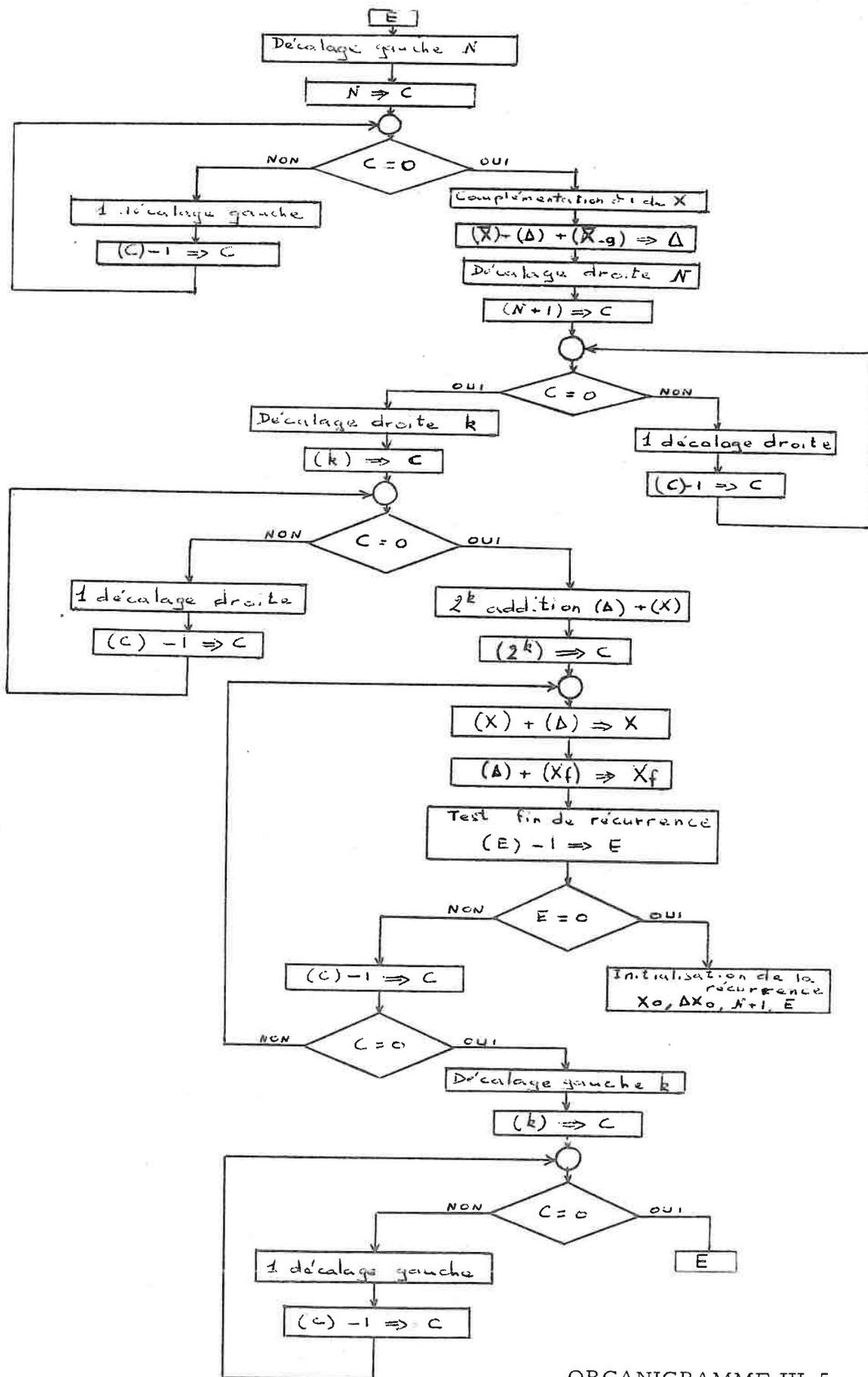
- Suite des opérations.

Les opérations logiques décrites par l'organigramme (III. 5) sont donc :

1) calcul de ΔX_k :

a- positionnement du registre Δ . $N-1$ décalages à gauche par rapport à la position de référence.

b- addition de (Δ) avec $-(X)$ Nota : (Δ) désigne le contenu de Δ jusqu'au bit -8 de X avec arrondi du bit -9 .



ORGANIGRAMME III. 5

On réalise ainsi :

$$(\Delta) + (\bar{X}) + (\bar{X}_{B-9}) \implies \Delta$$

où (X_{B-9}) désigne la valeur du bit -9 de X.

2) calcul de X_k :

a- positionnement de Δ . N-1 décalages à droite pour revenir à la position de référence.

b- deux cas se présentent selon la taille de l'incrément :

- l'incrément est inférieur à 0,25 mm : on l'ajoute à X et X_C pour obtenir X_{k+1} et $X_{C_{k+1}}$.

- l'incrément est supérieur à 0,25 mm : on le décale K fois à droite, on l'ajoute à X et $X_{C_{k+1}}$ pour obtenir X_{k+1} et $X_{C_{k+1}}$; on réalise 2^K fois cette opération puis Δ est repositionné.

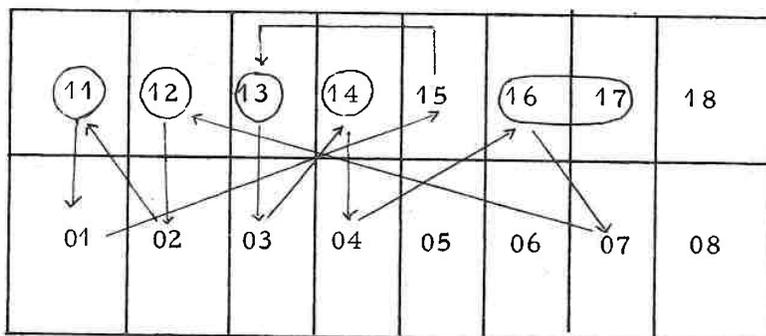
Si nous affectons à chaque opération un état

	Etat
- décalage gauche de N-1	1
- décalage gauche de K	2
- décalage droite de N-1	3
- décalage droite de K	4
- soustraction de X à Δ , résultat dans Δ avec arrondi sur le bit -9	5
- addition de X à Δ et résultat dans X, jusqu'au bit -18 avec arrondi	6
- addition de Δ à X_C	7
- addition de Δ à X résultat dans Δ	8

et au compteur de décalage deux états C_1 et C_0 , C_1 si sa valeur est différente de 0, C_0 si son contenu est nul ; on peut alors dresser le tableau de la succession des phases Z_t relatives à la génération de la sinusoïde, repérée par le symbole S dans X_t .

X_{t_i}	C_{t_i}	Z_{t_i}	$Z_{t_{i+1}}$
S	C_1	1	1
S	C_0	1	5
S	C_1	5	3
S	C_1	3	3
S	C_0	3	4
S	C_1	4	4
S	C_0	4	6
S	C_1	6	7
S	C_1	7	6
S	C_1	6	7
S	Test	Fin récurrence	initialisation
S	C_0	7	2
S	C_1	2	2
S	C_0	2	1
S	C_1	1	1

On en déduit la succession et la transition des états données dans le tableau suivant où le premier chiffre représente l'état du compteur et le deuxième l'opération effectuée [14].

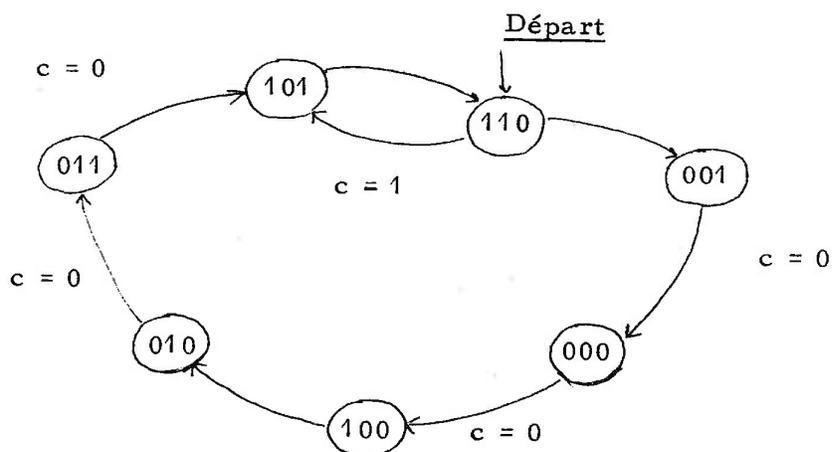


Bien que 7 opérations soient suffisantes pour générer la sinusoïde, nous en prévoyons une huitième pour traiter tous les cas d'interpolation. Nous proposons le code suivant :

Opération	Code binaire
1	000
2	001
3	010
4	011
5	100
6	101
7	110
8	111

dans lequel le premier bit définit la fonction (addition ou décalage).

Ce code définit alors la séquence binaire à générer lorsque la commande "sinus" est appliquée, en fonction de l'état du compteur C.



III. 1. 2. Cas de l'interpolation linéaire.

a) Dimensionnement :

L'interpolation linéaire est réalisée en ajoutant l'incrément constant Δ à la valeur X_k à chaque itération. Pour interpoler entre deux points distants de plus d'un mètre, il est nécessaire d'utiliser 23 digits au moins après le bit représentant les millimètres comme on l'a vu au paragraphe II. 2. 2.

b) Séquence :

Pour conserver la précision, nous procédons de la façon suivante :

- dans le registre Δ nous avons l'incrément défini avec 24 bits après le mm.

- dans le registre X les bits -19 à -24 de l'incrément.
- on réalise d'abord l'addition de X et Δ . Le résultat est conservé dans le registre X à partir du bit -19 ainsi que le bit de débordement B.
- on réalise ensuite l'addition

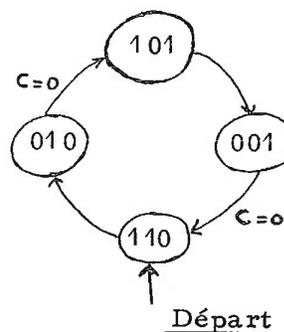
$$(\Delta) + (X_c) + (B) \Rightarrow X_c$$

comme le montre le schéma suivant (figure III. 6. a).

L'organigramme (III. 6) précise la suite des opérations et le tableau suivant la succession des états

X_{t_i}	C_{t_i}	Z_{t_i}	$Z_{t_{i+1}}$
D	C_o	6	2
D	C_1	2	2
D	C_o	2	7
D	C_o	7	3
D	C_1	3	3
D	C_o	3	6

En utilisant le code défini dans le paragraphe précédent, la séquence binaire à générer pour réaliser l'interpolation linéaire est représentée par le cycle suivant :



B -19 -20 -21 -22 -23 -24 -25 -26 -27 -28

3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19 -20 -21 -22 -23 -24 -25 -26 -27 -28

1) Le registre Δ est décalé de 18 positions à gauche.

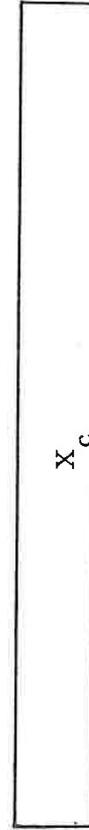
- On additionne les bits -19 à -28 de X aux bits -19 à -28 de Δ . Le résultat est stocké dans le registre X.

- Le bit de débordement est mémorisé.

-19 -20 -21 -22 -23 -24 -25 -26 -27 -28

3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18

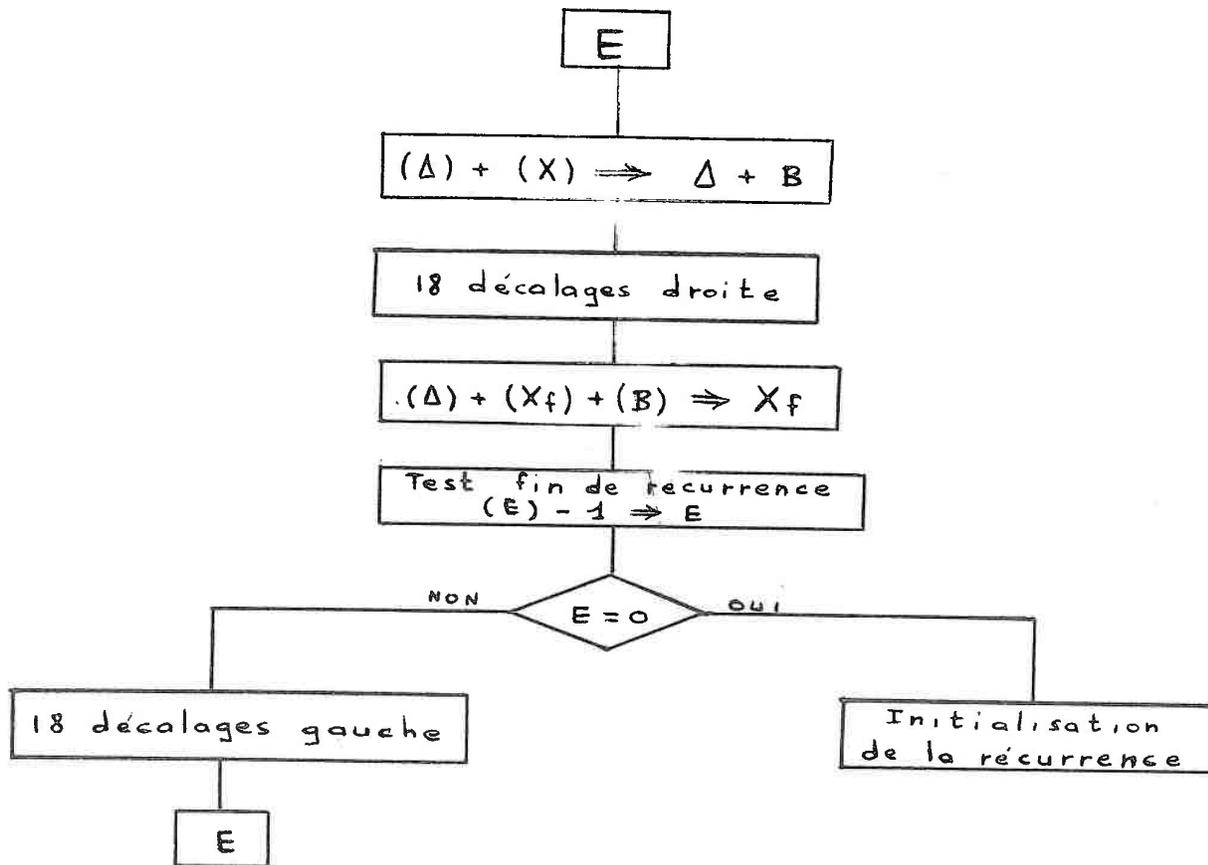
+B



2) Le registre Δ est décalé de 18 positions à droite.

- La valeur de consigne X_c est obtenue par l'addition : $(\Delta) + (X_c) + B \Rightarrow X_c$

Figure III. 6. a



Organigramme III. 6

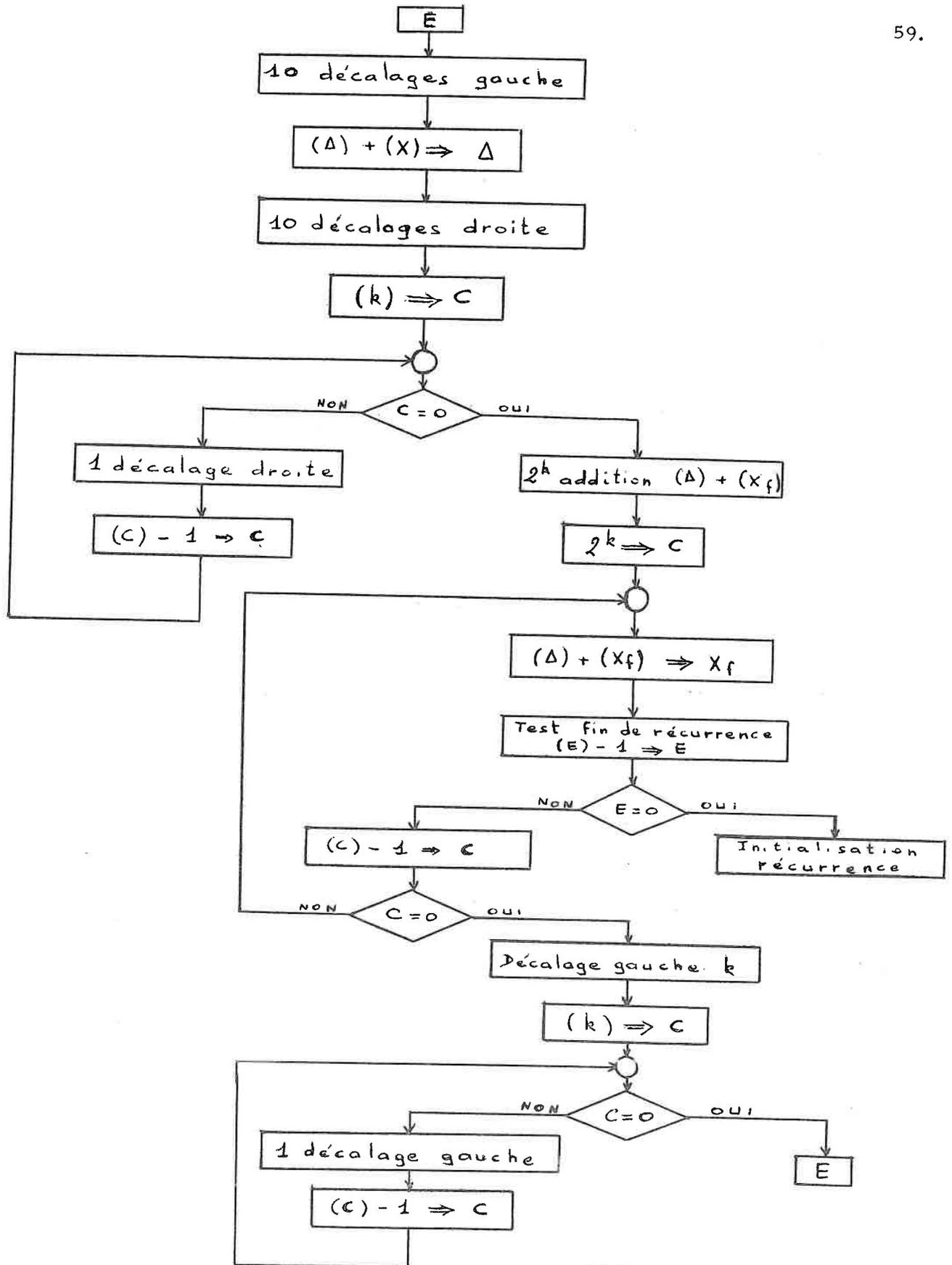
III. 1. 3. Cas de l'interpolation parabolique.

Dans ce cas, comme pour l'interpolation exponentielle, l'erreur étant proportionnelle au nombre d'itérations, il est impossible de limiter la dimension des registres afin d'assurer une précision demandée.

Cependant, pour diminuer l'erreur, le calcul de l'incrément est fait de la façon suivante : (figure III. 7. a)

- le registre X contient l'incrément de l'incrément cadré à gauche. (le bit 10 de X représente les mm).
- le registre Δ contient l'incrément également cadré à gauche.
- on effectue d'abord le calcul de l'incrément $(X) + (\Delta) \rightarrow \Delta$ avec donc 28 bits après le mm.
- on décale l'incrément afin de calculer la valeur courante X_k .
- si le pas est supérieur à 0,25 mm, on le décale k fois et on réalise k fois l'addition $(\Delta) + (X_c) \rightarrow X_c$.

L'organigramme (III. 7) indique la suite des opérations à effectuer et les tableaux suivants la succession des séquences binaires en utilisant les mêmes codes que les paragraphes précédents.



ORGANIGRAMME III. 7

3 2 1 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28

1) Calcul de l'incrément. Le registre Δ est décalé 10 fois à gauche.

Le calcul $(X) + (\Delta) \rightarrow (\Delta)$ est réalisé avec 28 bits après le mm.

19 20 21 22 23 24 25 26 27 28

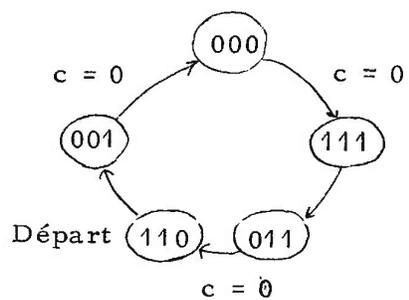
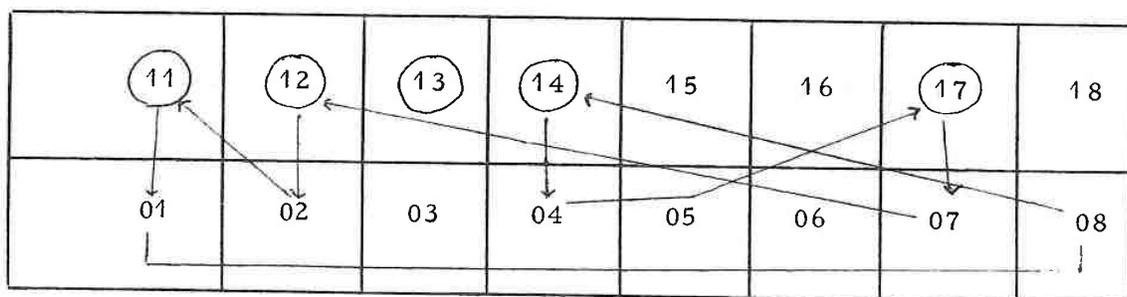
3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18



2) Calcul de la valeur X_c . Le registre Δ est décalé 10 fois à droite, ou $(10 + k)$ fois si l'incrément est supérieur à 0,25 mm pour être ajouté à X_c .

Figure III. 7. a

X_{t_i}	C_{t_i}	Z_{t_i}	$Z_{t_{i+1}}$
P	C_1	1	1
P	C_0	1	8
P	C_0	8	4
P	C_1	4	4
P	C_0	4	7
P	C_1	7	7
P	C_0	7	2
P	C_1	2	2
P	C_0	2	1



III. 1. 4. Cas de l'interpolation exponentielle.

La génération exponentielle est identique à celle du sinus si l'on substitue à l'opération

$$(\Delta) - (X) \longrightarrow \Delta$$

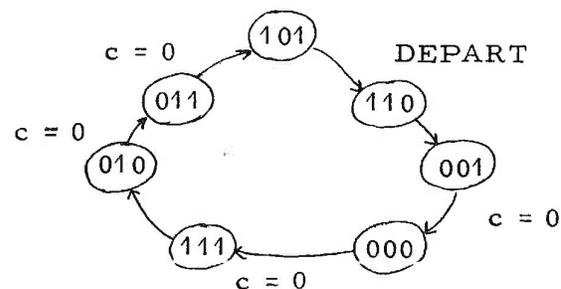
l'opération

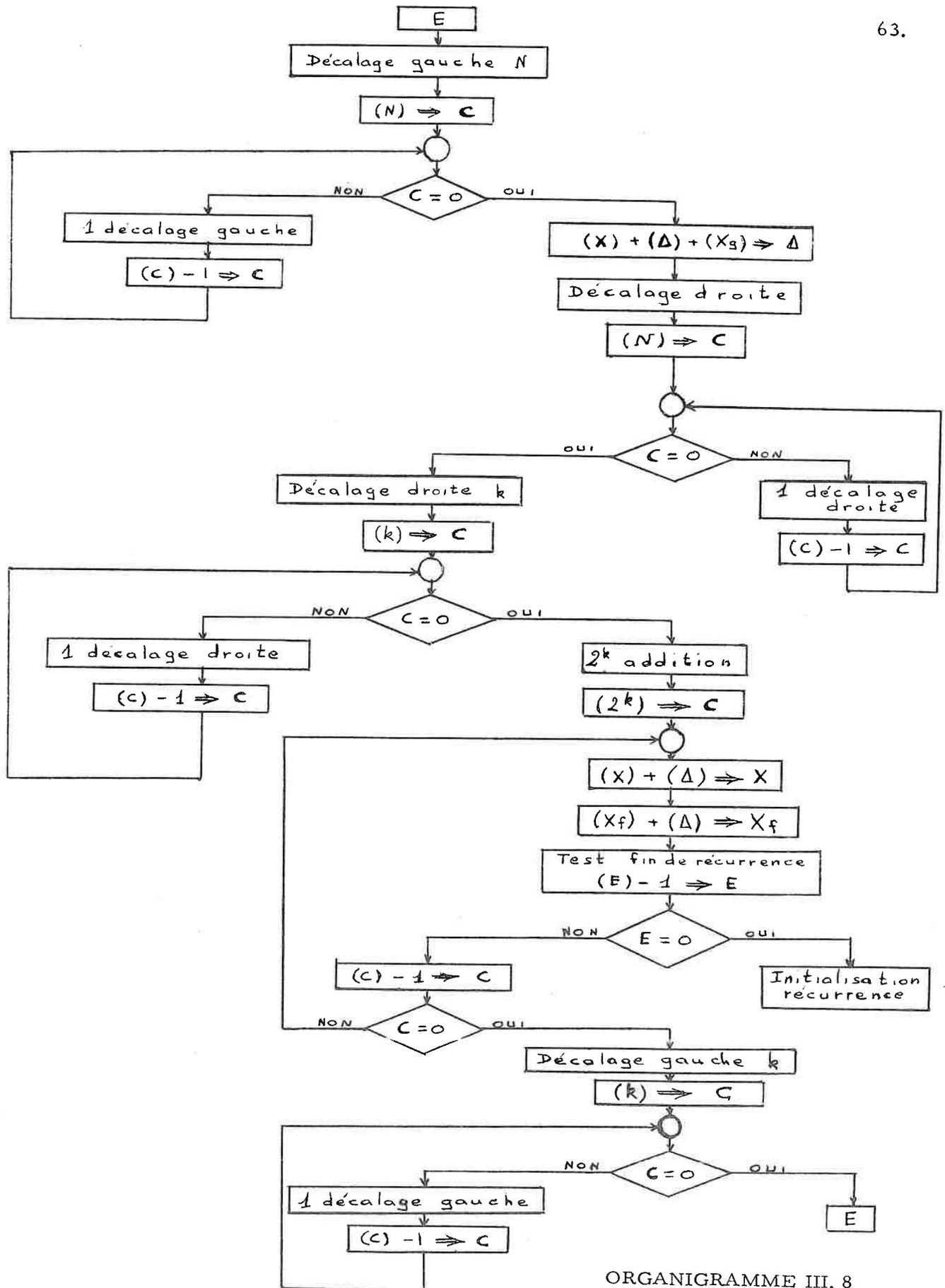
$$(\Delta) + (X) \longrightarrow \Delta$$

On réalise la même fonction arrondie en ajoutant à l'opération le dernier bit décalé.

De même que pour la fonction sinus, l'incrément sera décalé k fois si son module dépasse $0,25$ mm. La longueur de la courbe est limitée par le nombre d'itérations.

L'organigramme (III. 8) indique la suite des opérations à effectuer et la séquence binaire précisée par le schéma ci-dessous.



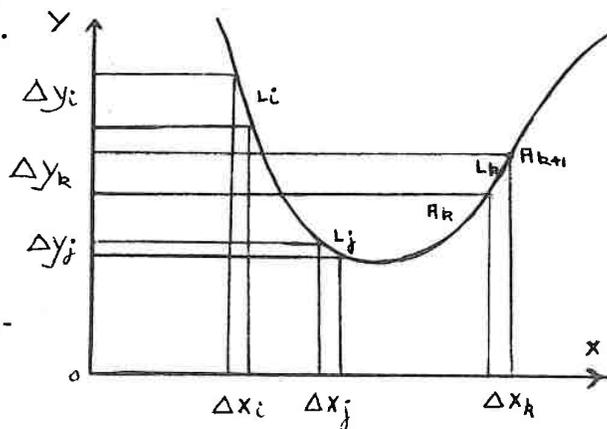


ORGANIGRAMME III. 8

III. 2 Contrôle de la vitesse et de l'accélération.

Lors de l'interpolation parabolique, hyperbolique ou ellipsoïdale, obtenue par la résolution sur chaque axe de sinusôides d'amplitude différente, les segments, de composantes ΔX_k , ΔY_k (dans le cas du plan) calculés par les récurrences synchrones relatives aux axes OX et OY, n'ont pas une longueur L constante.

On peut remarquer que L_k diminue avec le rayon de courbure. Si les valeurs numériques des coordonnées des points A_k sont calculées à cadence fixe, de fréquence F, la vitesse réelle de l'outil le long de trajectoire, correspondant au déplacement élémentaire L_k est



$$V_k = L_k \cdot F$$

La vitesse diminue donc avec le rayon de courbure, ce qui constitue un facteur favorable pour la précision compte-tenu des inerties des mobiles en mouvement et des possibilités des asservissements [15].

Une description de la trajectoire à vitesse constante V nécessiterait une variation de la fréquence F pour chaque segment :

$$F_k = \frac{V}{L_k}, \text{ ce qui complique inutilement le système.}$$

Nous choisissons donc, pour tous les types d'interpolation, de travailler à fréquence imposée ce qui, pour les interpolations linéaire et circulaire, donne une vitesse d'avance V constante,

les segments obtenus ayant tous la même longueur L , connue à l'avance.

Nous allons étudier pour ces derniers cas la réalisation de la fréquence F , correspondant à la vitesse d'avance programmée et les problèmes d'accélération et de décélération.

La fréquence F est limitée par la rapidité du calcul, or dans le cas le plus défavorable, le calcul d'un incrément de $0,125\text{mm}$ est obtenu après 3 additions et 80 décalages, opérations nécessitant de l'ordre de $60\ \mu\text{s}$, ce qui correspondrait à $V = 2\text{m/s}$. En fait, pour une vitesse de contournage maximum de 10m/minute , l'échantillonnage est de $1,33\ \text{ms}$, ce qui est très largement supérieur à la durée de calcul la plus longue.

La vitesse d'avance programmée V est obtenue par un diviseur de fréquence programmable qui à partir d'une fréquence d'impulsions f donnée par une horloge, fournit une fréquence $\alpha_n f$, α_n nombre inférieur ou égal à un, correspond à la vitesse nominale, tel que

$$\alpha_n = \frac{L \cdot f}{V}$$

Les périodes d'accélération et de décélération peuvent être obtenues par variation exponentielle de la fréquence f . On utilise pour cela un compteur-décompteur et un diviseur de fréquence [4].

Si R est le contenu du diviseur de fréquence et L son nombre de bits, il fournit à partir de la fréquence fixe f_e , la fréquence f :

$$f = f_e \frac{R}{2^L}$$

Le nombre R est le contenu du compteur-décompteur qui additionne les impulsions de fréquence fixe f_a et soustrait celles de fréquence f . On peut approcher cette opération par l'intégrale

$$R = \int_0^t (f_a - f) dt$$

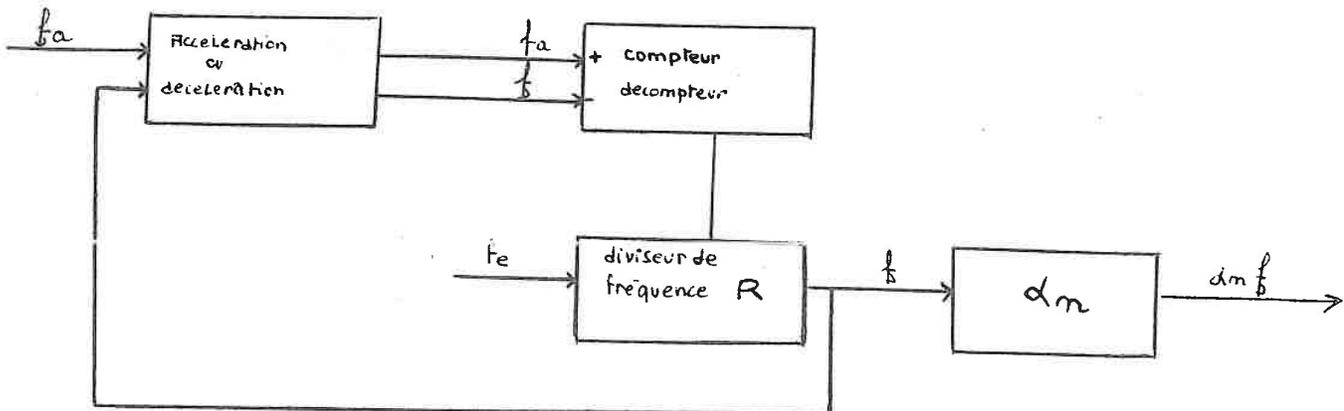
ce qui fournit la loi de variation

$$f = f_a \left[1 - e^{-\frac{f_e t}{2L}} \right]$$

Pour décélérer, on intervertit f et f_a à l'entrée du compteur-décompteur. Dans ce cas, la fréquence f s'écrit :

$$f = f_a \left[2 - e^{-\frac{f_e t}{2L}} \right]$$

La décélération doit être interrompue avant que la fréquence ne passe par zéro. Pour cela, un circuit logique bloque le comptage lorsque f est suffisamment faible, maintenant la fréquence constante jusqu'à l'arrêt.



Avec un tel système, on obtient des périodes d'accélération et de décélération constantes.

III. 3 Séquence à générer pour obtenir les quatre types d'interpolation.

Suivant les quatre modes d'interpolations, nous avons quatre séquences principales à générer dont les états successifs sont définis par trois bits comme on l'a vu dans le paragraphe III. 1.

Chaque bit de la séquence est fonction de six variables binaires

- des trois bits précédents
- de l'état du compteur
- des deux bits définissant la fonction à générer.

On peut exprimer chaque variable booléenne en fonction des six autres, comme l'indiquent les tableaux III. 9 et III. 10, et obtenir une machine séquentielle avec 3 bascules en réalisant par câblage les équations logiques du tableau (III. 11).

Une autre solution consiste à stocker les différentes séquences dans des mémoires mortes et de les lire comme des micro-programmes selon la commande.

Le démarrage de la séquence se fait au point 110 (addition de l'incrément à X_c) donné par le flanc positif du signal de départ "TOP", qui charge le registre X_c et incrémente le compteur E qui décompte le nombre d'itérations.

Commande			S(t)			S(t+1)		
0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0	1

TABLEAU III. 9

Commande			S(t)			S(t+1)		
1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1

TABLEAU III. 10

	000	001	011	010	110	111	101	100
000	1				1			1
001			1					
011	1				1			1
010			1					
110		1				1	1	
111								
101	1	1					1	1
100								

	000	001	011	010	110	111	101	100
000					1			1
001				1				
011		1			1	1	1	
010	1	1	1				1	1
110			1	1		1		
111					1	1	1	1
101	1	1					1	1
100	1	1						

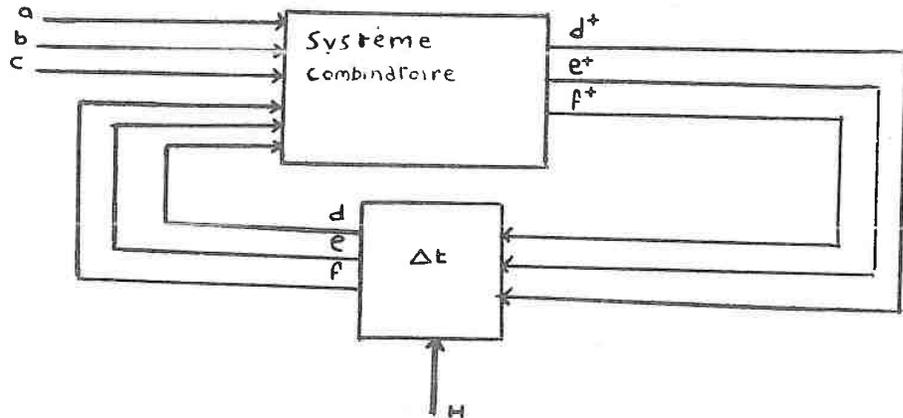
$$d^+ = \bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{b}\bar{c} + d\bar{e}\bar{f}ac + d\bar{e}\bar{f}\bar{b} + d\bar{e}\bar{f}\bar{b}c + \bar{d}efc(\bar{b} + ab) + \bar{a}bc\bar{d}(\bar{e}f + \bar{f}e) + abc\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}$$

$$e^+ = \bar{d}\bar{e}\bar{f}c(a + \bar{a}b) + abef + acef + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}e + \bar{d}ef\bar{b} + \bar{a}bcef + d\bar{e}\bar{f}ab + \bar{a}\bar{b}d\bar{e} + \bar{a}\bar{b}df + abcde$$

	000	001	011	010	110	111	101	100
000					1			1
001		1	1			1	1	
011	1	1				1	1	1
010	1			1				1
110	1	1			1		1	1
111					1	1		
101			1	1				
100								

$$f^+ = \bar{d}\bar{e}\bar{f}ac + c\bar{d}f(\bar{e}a + a) + \bar{d}ef\bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}f + \bar{d}\bar{f}ac + d\bar{f}e(\bar{b} + \bar{a}b) + deab(\bar{c} + f)$$

TABLEAU III. 11.



III. 4. Initialisation de l'interpolateur.

L'interpolateur pour générer une courbe a besoin d'un certain nombre d'informations. Ces informations fournies par l'ordinateur au départ de chaque courbe à générer sont :

- la nature de la courbe. Ce mot de deux bits commande la séquence à effectuer.
- le nombre N de décalages. Dans le cas de la droite et de la parabole, ce nombre est fixe (5 digits sont nécessaires).
- le nombre K représentant le nombre de décalages de l'incrément afin de le rendre compatible avec les inductosyns (3 digits).
- le nombre E d'incréments à générer pour interpoler la portion de courbe désirée. Avec 17 digits, on peut interpoler sur une longueur de 10 mètres.
- la consigne de vitesse et d'accélération. Des vitesses de 10m/mm avec un pas de 1 mm/mn nécessitent 14 bits. Pour l'accélération deux bits suffisent pour la définir : positive, négative ou nulle.
- les valeurs initiales pour chaque axe commandé, soit pour l'axe OX

par exemple :

X_0	24 digits
$X_1 - X_0$	13 digits
X_c	11 digits

Il faut en tout deux mots de 24 bits pour initialiser la commande de l'interpolation et deux mots de 24 bits par axe à commander, les bits non utilisés, étant réservés pour l'adresse de l'interpolateur.

Le chargement de l'interpolateur se déroule de la façon suivante : le système "contrôle de la vitesse" fournit des impulsions, constituant le signal TOP, dont la fréquence est proportionnelle à la vitesse.

Le flanc positif de chacune des impulsions lance la séquence de calcul de X_c .

Le calcul est terminé avant le flanc négatif de TOP. L'information est traitée entre deux signaux TOP. Chaque impulsion est décomptée dans le compteur E, lorsque son contenu passe à zéro, le nombre de pas a été effectué et l'interpolateur doit être réinitialisé.

Le flanc positif de l'impulsion suivante déclenche un signal sur la ligne d'interruption prioritaire.

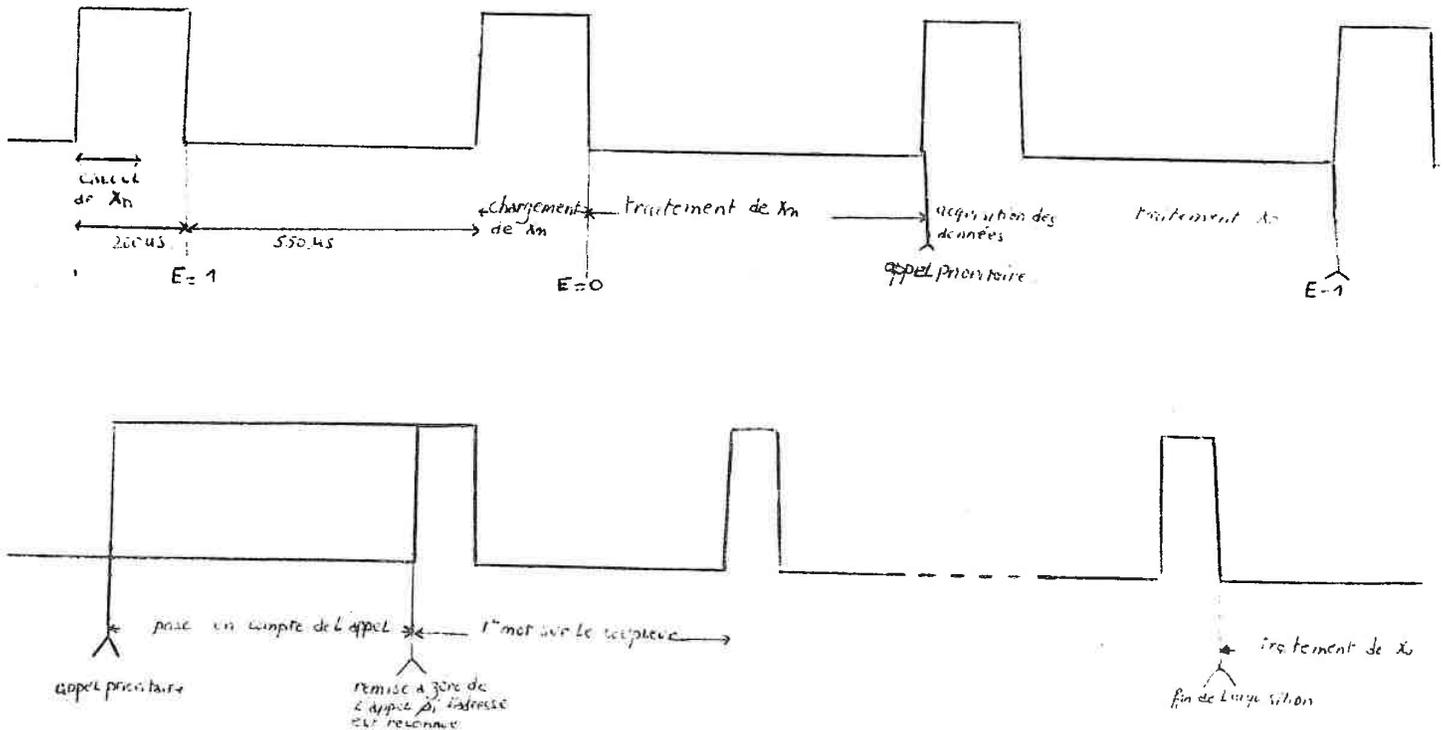
Lorsque l'appel prioritaire est pris en compte, le programme principal est interrompu et sauvegardé. Il est remplacé par le sous-programme de chargement des valeurs initiales. Celles-ci sont rangées en mémoire à une place déterminée.

L'unité centrale va chercher ces mots en mémoire et les fournit à la sortie du coupleur de l'interpolateur. Lorsque l'information est présentée sur le registre tampon du coupleur le calculateur émet un signal qui incrémente un compteur lorsque l'adresse de l'interpolateur est reconnue dans le premier mot. Le contenu du compteur est l'adresse du mot dans l'interpolateur.

Dans le premier mot se trouve le contenu du compteur qui passera à l'état 1 annulant ainsi l'appel prioritaire.

Lorsque le compteur a enregistré $(2 + 2\ell)$ mots validés par l'adresse, ℓ étant le nombre d'axes, l'enveloppe du signal acquisition de donnée retombe à zéro et le contenu de X_c est la consigne donnée à l'asservissement. La séquence est au point 101.

A l'impulsion TOP suivante, la valeur X_{c_1} est chargée dans le registre, le compteur est alors diminué d'une unité.



III. 5 Schéma de l'interpolateur.

On peut alors définir la structure de l'interpolateur. Il est donc composé de 4 modules :

1) La partie principale constituée (figure III. 12) des trois registres X , Δ et X_e , de l'opérateur additionneur-soustracteur à trois entrées

- du registre à décalage
- du décompteur de décalage.

2) La partie séquentielle qui génère les signaux de commande des opérateurs en fonction de l'interpolation désirée (figure III. 13).

3) Du système de contrôle de la vitesse qui fournit les impulsions du signal TOP, qui donnent le rythme d'interpolation (fig. III. 14).

4) Du système d'entrée sortie permettant d'initialiser l'interpolateur (figure III. 15).

Chaque axe doit disposer des modules 1 et 2, alors que les modules 3 et 4 sont communs aux différents axes. On verra dans le chapitre suivant le soft nécessaire à la programmation de l'interpolateur.

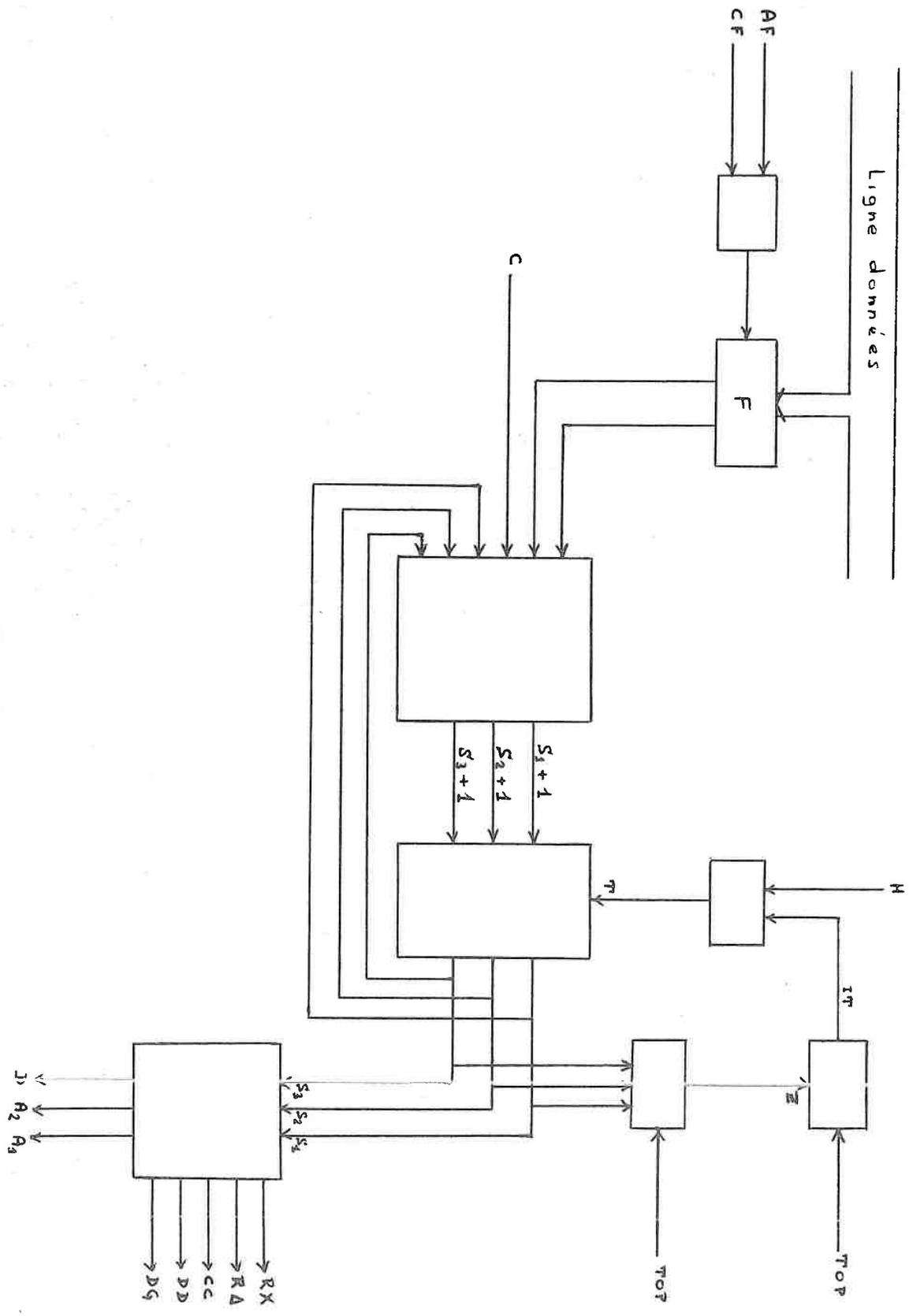


Figure III. 13

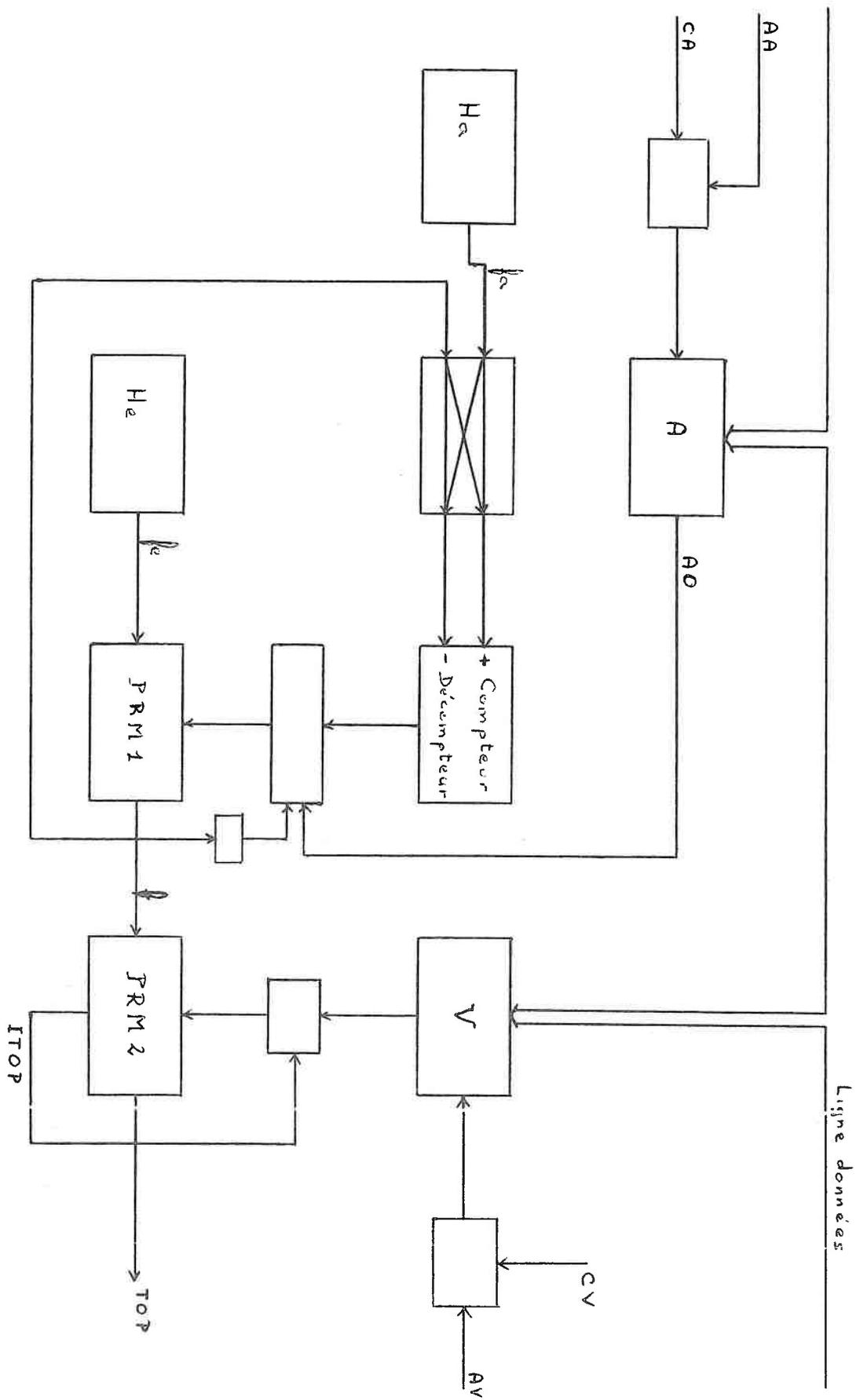


Figure III. 14

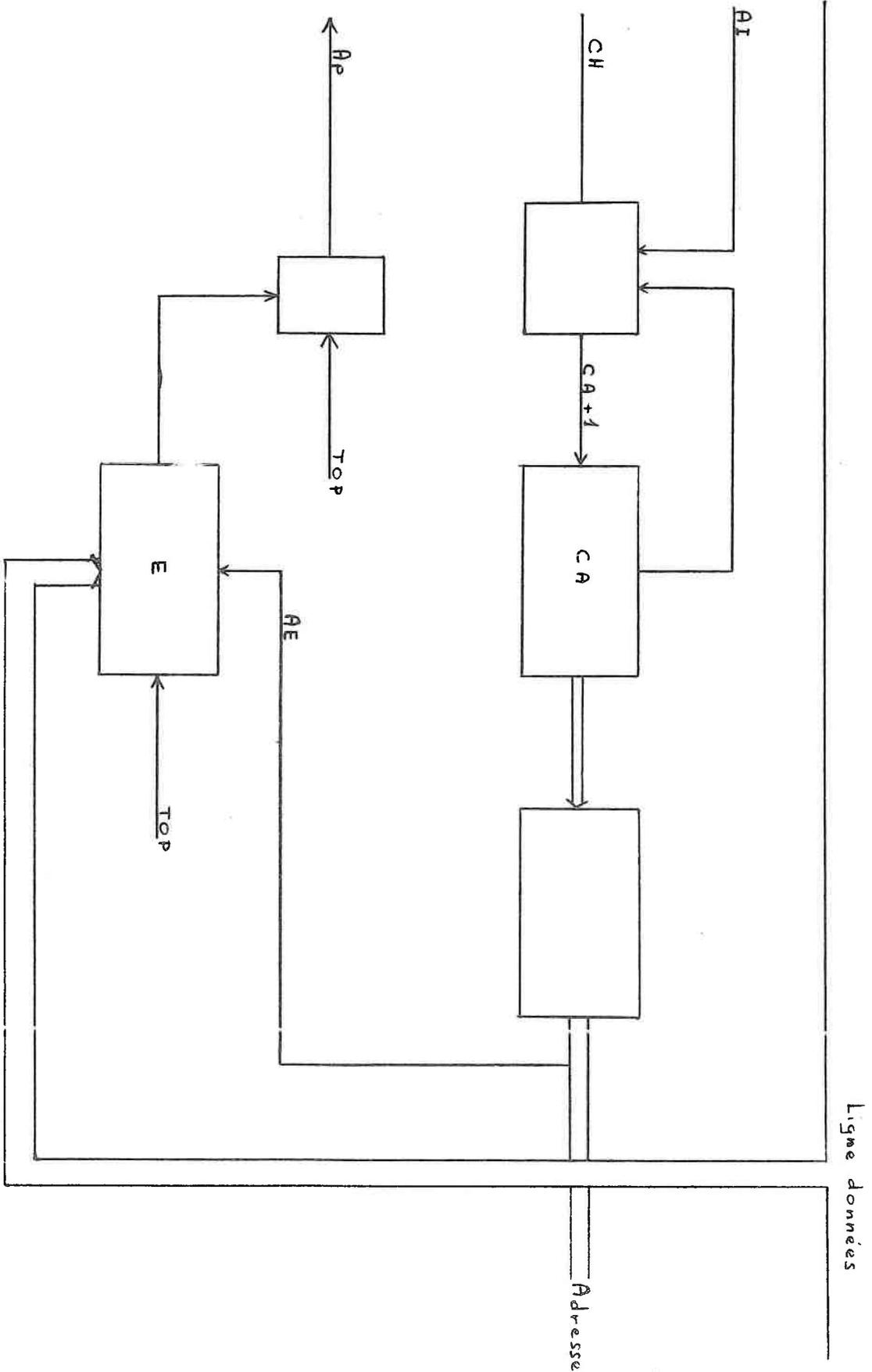


Figure III. 15

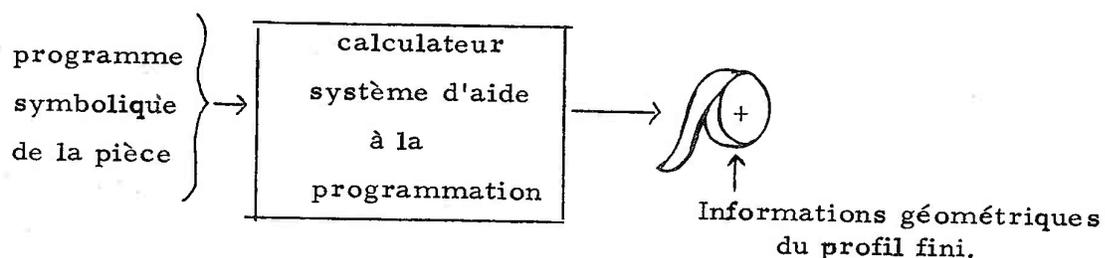
D : décalage N ou K
 CC : chargement compteur
 AX : adresse X
 A Δ : adresse Δ
 AX_c : adresse X_c
 DD : décalage droite
 DG : décalage gauche
 CX : chargement initial X
 C Δ : chargement initial Δ
 RX : résultat dans X
 R Δ : résultat dans Δ
 A₁A₂ : commande de l'additionneur multiplexeur
 CX_c : chargement X_c
 E : compteur
 CIX_c : chargement initial de IX_c
 AI : adresse interpolateur
 CH : chargement du registre du tampon du coupleur
 CA : contenu du compteur - adresse des mots
 CAH : CH(A + CA) incrémentation du compteur
 AE : adresse du mot E
 AP : TOPE \bar{E} appel prioritaire
 AC : adresse fonction
 CF : chargement fonction
 IT : inhibition T
 T : avancement séquence
 Z : RAS IT
 S₁)
 S₂ } sortie séquence
 S₃)
 AA : adresse de A

CA : chargement de A
AV : adresse de V
CV : chargement de V
 f_e : fréquence de sortie de l'horloge H_e
ITOP : chargement de V
TM : entrée des impulsions du compteur de décalage
AO : vitesse constante - inhibition du chargement PRM1
AN : adresse N
AK : adresse K
CK : chargement de K
CN : chargement de N
C : état du compteur
H : horloge

CHAPITRE IV - PROGRAMMATION DE L'INTERPOLATEUR.

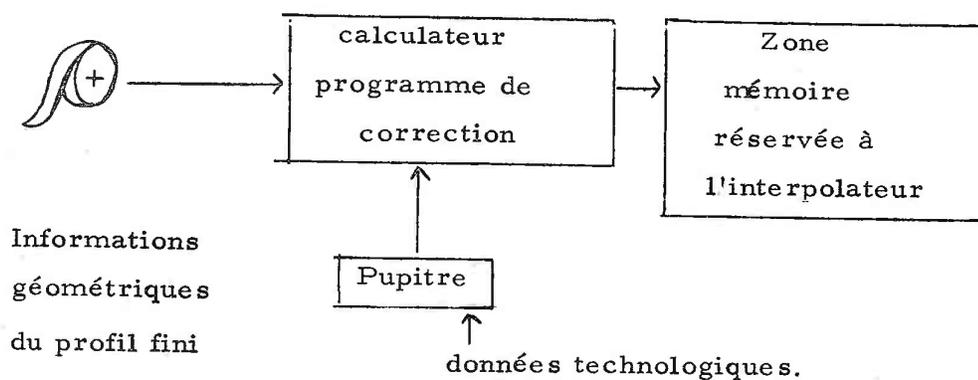
Le système de commande directe envisagé fonctionne comme suit [16] :

- dans un premier temps, le calculateur, chargé d'un langage d'aide à la programmation, traite le programme symbolique particulier à la pièce à réaliser et fournit les informations géométriques du profil fini sous forme de bande perforée.

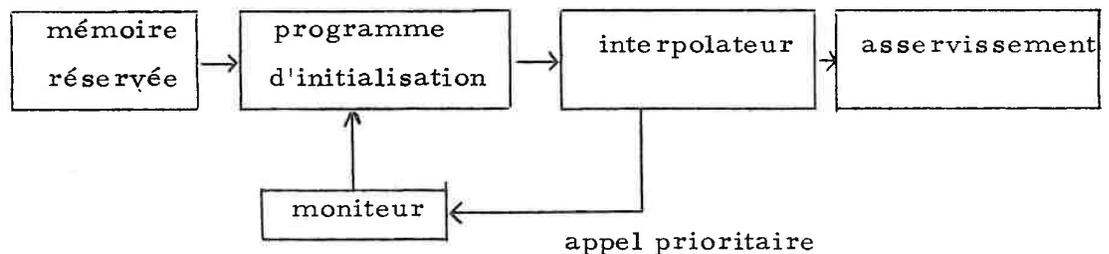


Ce traitement est effectué une seule fois par type de pièce.

- pour l'exécution de la pièce, on doit tenir compte des données technologiques immédiates : rayon d'outil utilisé, décalage du référentiel (X_M, Y_M, Z_M), grandeurs affichées par l'opérateur. Le programme de correction traite un certain nombre de blocs d'informations géométriques du profil fini et les range en mémoire sous forme de grandeurs directement utilisables par l'interpolateur.



Pendant l'usinage, l'interpolateur lance un appel prioritaire lorsqu'il a besoin de nouvelles données. Elles lui sont fournies immédiatement, le calculateur abandonnant toutes autres fonctions pour ce chargement, ce qui n'est pas gênant puisqu'il ne dure que de l'ordre de $100 \mu\text{s}$ et n'est renouvelé qu'à des instants très espacés, laissant un temps largement suffisant pour les calculs. Lorsque le nombre de blocs en mémoire devient inférieur à une limite donnée, le calculateur acquiert une nouvelle série d'informations, les traite et les stocke en zone mémoire réservée.



Dans les paragraphes suivants, les différents types d'interpolation sont traités.

IV-1 Interpolation circulaire.

Nous nous limitons à l'interpolation circulaire dans un plan. On étendra l'interpolation circulaire à celle de l'ellipse dans le paragraphe suivant.

L'arc de cercle à usiner est défini par les paramètres suivants :

- R le rayon du cercle
- θ secteur angulaire de l'arc à décrire donc le signe définit le sens de parcours

- φ angle entre l'axe OX et le point initial
- X, Y, coordonnées du centre du cercle par rapport à l'origine de cotation de la pièce.

Les données géométriques invariantes avec les corrections à fournir par le calculateur, sont

- N définissant le pas angulaire ($\cos \mathcal{Z} = 1 - 2^{-N}$)
- X'_0 et $X'_1 - X'_0$
- Y'_0 et $Y'_1 - Y'_0$ coordonnées et incréments dans un repère issu du centre du cercle.

N est calculé par la relation (III. 3)

$$N-7 < R \leq 2^{n-8}$$

En virgule flottante, N se déduit immédiatement de l'exposant. En virgule fixe, il faut faire la comparaison de 2^{N-8} et R en augmentant N à partir de 8. Connaissant N, nous en déduisons \mathcal{Z}

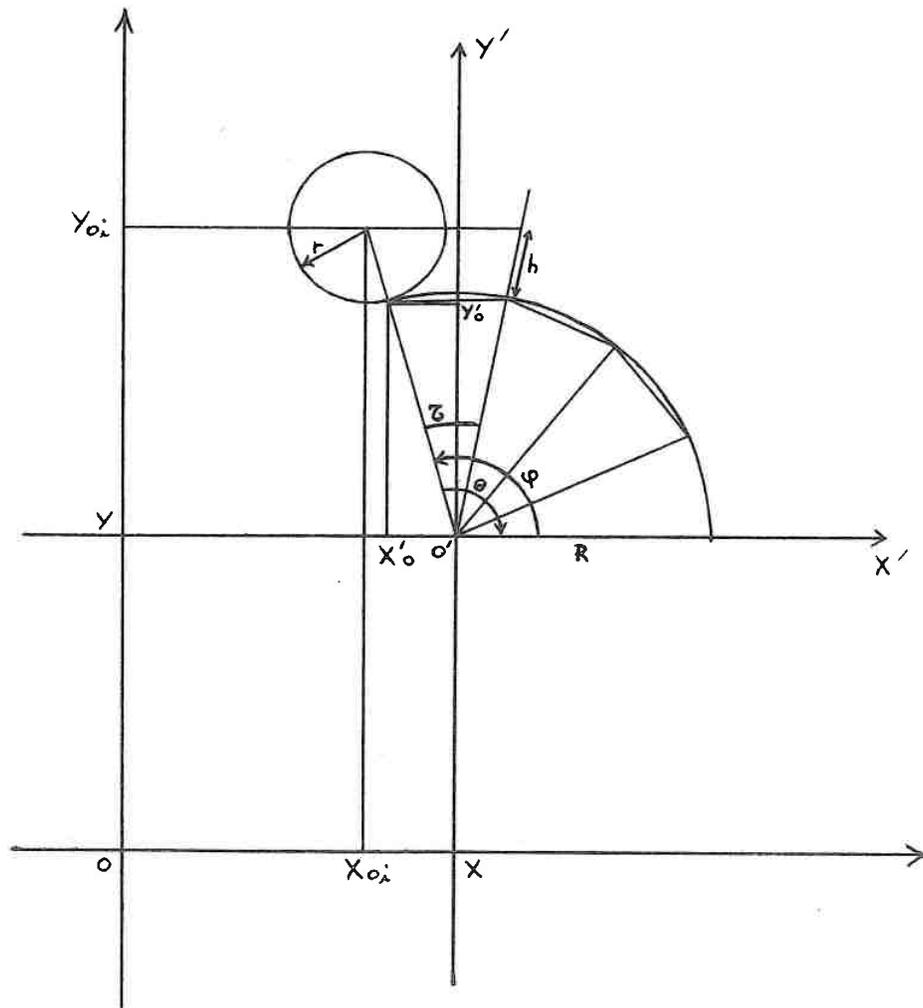
$$\mathcal{Z} = \text{Arcos} (1 - 2^{-N})$$

auquel on affecte le même signe que θ , ce qui donne le sens de parcours.

Les coordonnées X'_0 , $X'_1 - X'_0$, Y'_0 et $Y'_1 - Y'_0$ se déduisent des relations

$$\begin{aligned} X'_0 &= R \cos \varphi \\ X'_1 - X'_0 &= R \cos (\varphi + \mathcal{Z}) - R \cos \varphi \\ Y'_0 &= R \sin \varphi \\ Y'_1 - Y'_0 &= R \sin (\varphi + \mathcal{Z}) - R \sin \varphi \end{aligned}$$

Correction d'outil : Pour usiner le cercle de rayon R il faut programmer le cercle de rayon $R + h$ avec $h = \frac{r}{\cos \frac{\zeta}{2}}$



On multiplie donc l'amplitude de chaque sinusoïde définissant le cercle dans le repère $X'O'Y'$ par le terme correctif

$$\alpha = \left[1 + \frac{r}{R \cos \frac{\zeta}{2}} \right]$$

ce qui permet de calculer le nombre K qui détermine le nombre de décalages à effectuer pour ramener l'incrément à une valeur inférieure à 0,25 mm

$$2^K < \frac{\alpha \cdot Z \cdot R}{0,25 \cdot 10^{-3}}$$

Le nombre E d'incréments pour décrire l'arc à usiner est fixé par

$$E = \text{partie entière de } \left[\frac{\theta}{Z} \cdot 2^K \right]$$

et le temps entre le calcul de deux incréments

$$\Delta T = \frac{Z R \alpha}{2^K \cdot V}$$

où V est la vitesse d'avance programmée.

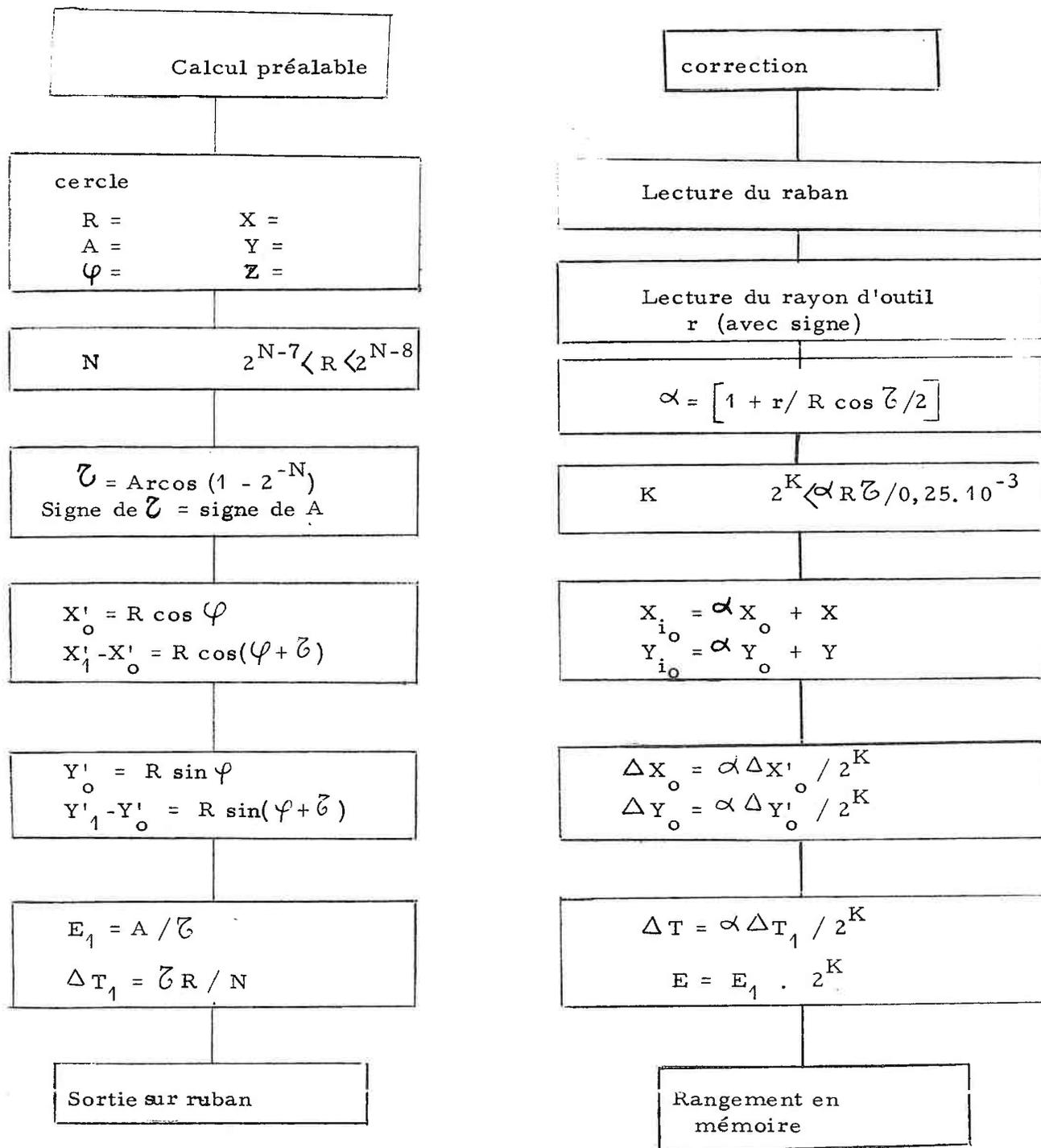
L'organigramme (IV.1) montre la suite du calcul nécessaire à l'initialisation.

IV.2.1. Interpolation elliptique.

Pour l'ellipse oblique, le problème se complique du fait du plus grand nombre de paramètres et de la correction d'outil.

Les paramètres définissant l'ellipse sont :

- le grand axe a
- le petit axe b
- les coordonnées des points initial $A(X'_O, Y'_O)$ et final $B(X'_F, Y'_F)$
- la rotation α de l'ellipse.



ORGANIGRAMME IV. 1

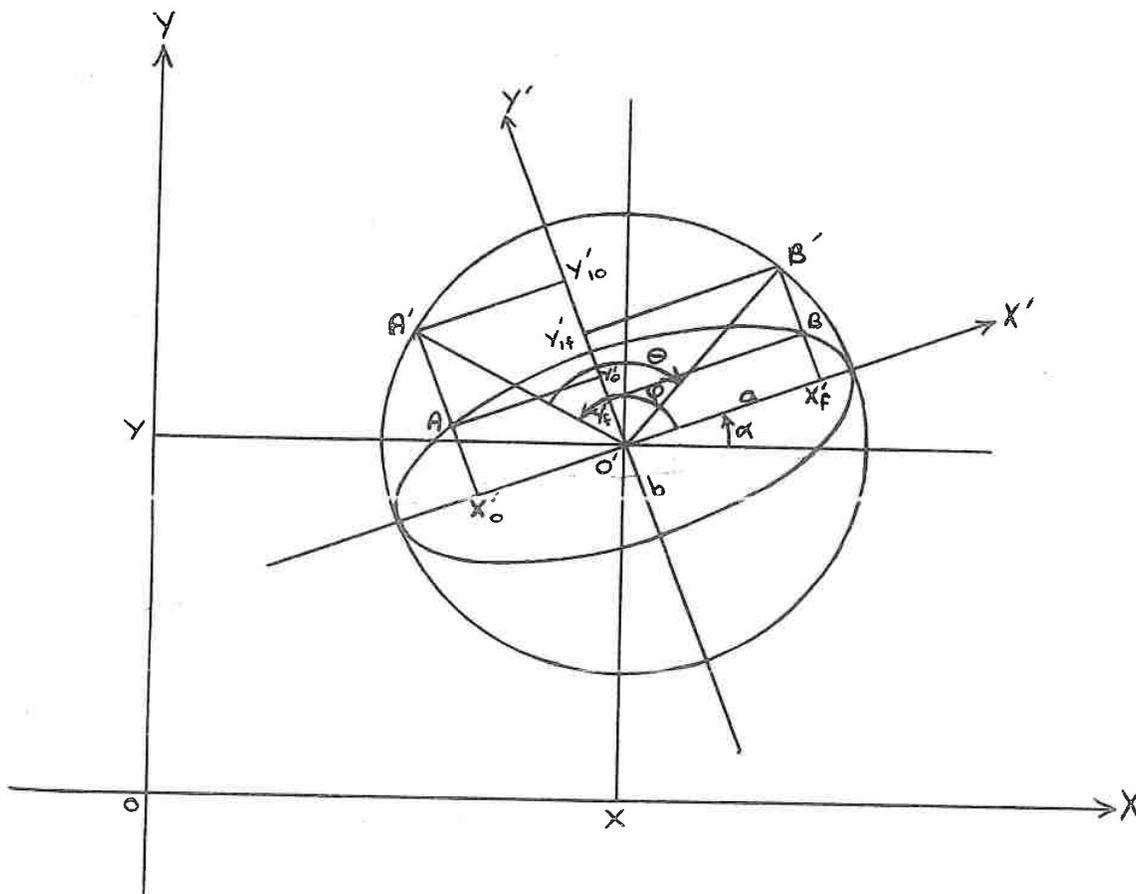
Cas du cercle

En passant au cercle affine de l'ellipse, de rayon a , on en déduit l'initialisation dans le repère $X'OY'$ des points A' et B' dont l'écart angulaire Θ et l'angle $O'X'$, $O'A'$ sont définis par

$$\varphi = \text{Arctg} \frac{a y'_o}{b x'_o}$$

$$\theta = \text{Arctg} \frac{a y'_f}{b x'_f}$$

en tenant compte des positions des points A et B dans les différents quadrans.



Le signe de Θ détermine le sens de parcours. Le calcul se poursuit alors de la même façon que pour le cercle.

On obtient : $X'_1 - X'_0$, X'_0 , $Y'_{11} - Y'_{10}$, Y'_{10}

le nombre de décalage N, E le nombre de pas et K le nombre de décalages de l'incrément.

On repasse en l'ellipse dans le repère $Y'O'X'$ en multipliant $Y'_{11} - Y'_{10}$ et Y'_{10} par le rapport d'affinité $\frac{b}{a}$.

Pour repasser dans le repère XOY , on utilise la transformation

$$\begin{aligned} X_0 &= X + \cos \alpha X'_0 - \sin \alpha Y'_0 \\ Y_0 &= Y + \sin \alpha X'_0 + \cos \alpha Y'_0 \end{aligned}$$

Correction d'outil : Lorsque le centre de l'outil décrit une ellipse, la courbe usinée n'est pas une ellipse mais une courbe parallèle à l'ellipse.

L'écart entre l'ellipse d'axes $a + r$ et $b + r$ où r est le rayon d'outil et la courbe usinée a pour expression (annexe IX)

$$\mathcal{E} = r \left(1 - \cos \left[t - \text{Arctg} \left(\frac{a}{b} \text{tg } t \right) \right] \right)$$

qui a pour maximum

$$\mathcal{E}_{\max} = r \left[1 - \sin \left(2 \text{Arctg} \sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right]$$

La figure IV. 1 donne la variation de $\frac{\mathcal{E}}{r}$ en fonction de t pour différentes valeurs du rapport b/a .

Pour ne pas entamer le profil elliptique à obtenir, il faut ajouter \mathcal{E}_{\max} au rayon de l'outil.

Le profil ainsi usiné n'est pas une ellipse mais l'approche à \mathcal{E}_{\max} près, ce qui peut être suffisant pour une ébauche. Le profil exact ne pourrait être obtenu, avec ce type d'interpolateur, qu'en divisant l'ellipse en secteurs pour lesquels on calculerait la correction \mathcal{E} à apporter sur le rayon r de l'outil pour chacun d'eux.

Cela montre les difficultés pour usiner un profil elliptique avec précision.

La suite des opérations à effectuer pour l'interpolation elliptique est donnée par l'organigramme (IV. 3).

IV. 3 Interpolation linéaire.

Dans l'espace, le segment de droite est défini par ses coordonnées initiales X_o, Y_o, Z_o et finales X_f, Y_f, Z_f .

Pour déterminer l'incrément relatif à chaque axe, on calcule les rapports

$$\frac{X_o - X_f}{Y_o - Y_f} = a, \text{ si } |a| > 1 \quad \text{on calcule } a' = \frac{1}{a}$$

$$\frac{Z_o - Z_f}{Y_o - X_f} = b, \text{ si } |b| > 1 \quad \text{on calcule } b' = \frac{1}{b}$$

$$\frac{Z_o - Z_f}{Y_o - Y_f} = c, \text{ si } |c| > 1 \quad \text{on calcule } c' = \frac{1}{c}$$

Correction de rayon d'outil pour l'ellipse

$$Y = 1 - \cos \left[t - \text{Arctg} \left(\frac{a}{b} \text{tg } t \right) \right]$$

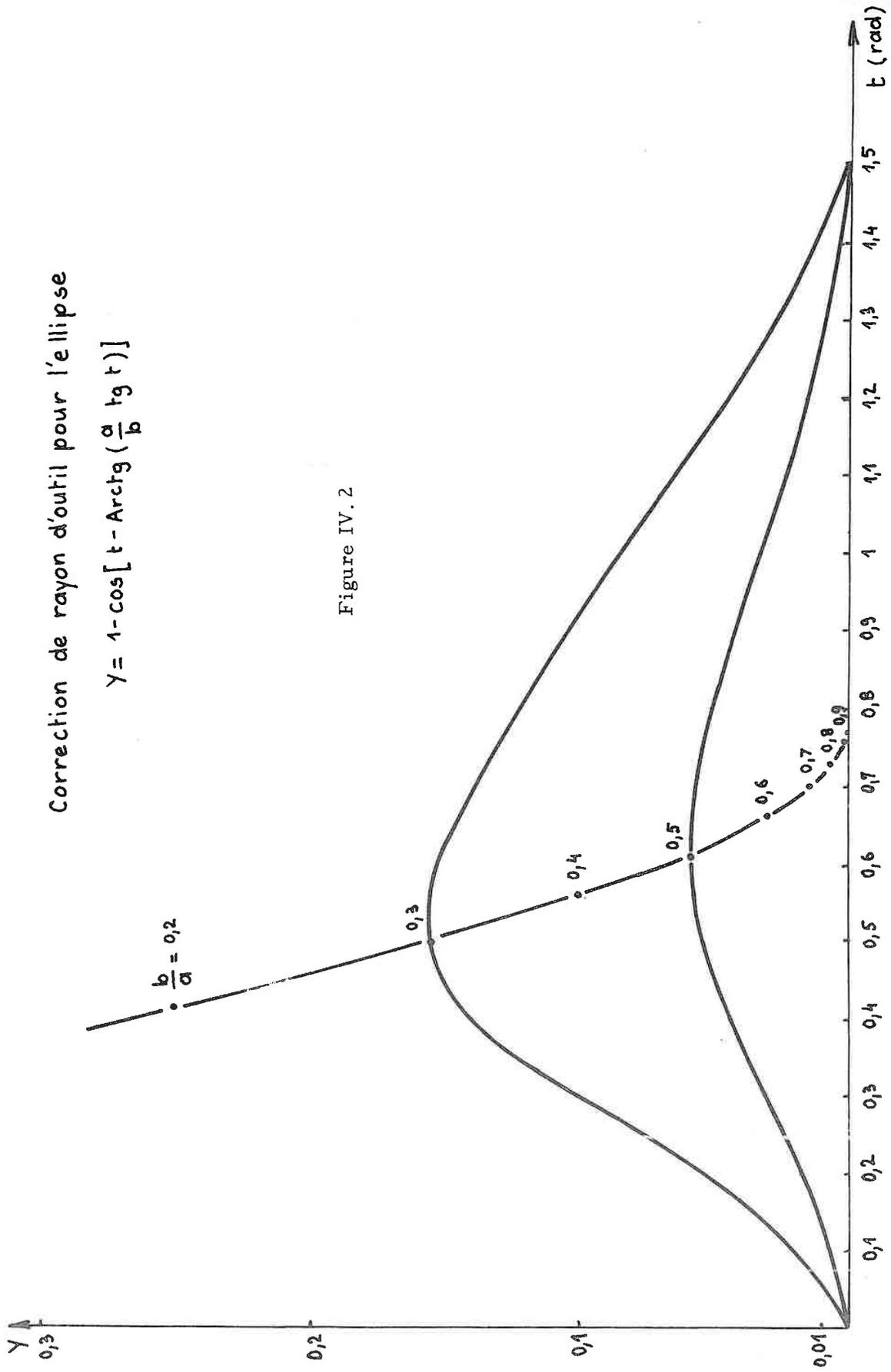


Figure IV. 2

Calcul préalable

Ellipse

$$\begin{array}{ccc} X' & X'_f & X \\ Y'_o & Y'_f & Y \\ a & b & \alpha \end{array}$$

S sens de parcours

$$\varphi = \text{Arctg}(aY'_o / bX'_o)$$

$$\theta = S(\varphi - \text{Arctg}(aX'_f / bY'_f))$$

Interpolation circulaire

$$\begin{array}{ccc} X'_o & & Y'_{10} \\ X'_1 - X'_o & & Y'_{11} - Y'_{10} \\ \Delta T_1 & E_1 & \zeta \quad N \end{array}$$

$$Y'_o = Y'_{10} \cdot b/a$$

$$Y'_{10} - Y'_o = (Y'_{11} - Y'_{10}) \cdot b/a$$

$$E_1 = [1 - \sin(2 \text{Arctg} \sqrt{a/b})]$$

Sorties sur ruban

ORGANIGRAMME IV. 3

Cas de l'ellipse

Correction

Lecture du ruban

Lecture du rayon d'outil r
avec signe

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \cdot r$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\varepsilon_m + r + a) / a \\ \alpha_2 &= (\varepsilon_m + r + b) / b \end{aligned}$$

$$K \quad 2^k < \alpha_1 \cdot a \cdot \zeta / 0,25 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} X' &= \alpha_1 X'_o \\ Y' &= \alpha_2 Y'_o \\ \Delta X' &= \alpha_1 \Delta X'_o \\ \Delta Y' &= \alpha_2 \Delta Y'_o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \cos \alpha X' - Y' \sin \alpha \\ \Delta X_o &= \cos \alpha \Delta X' - \Delta Y' \sin \alpha \\ Y_o &= \sin \alpha X' + \cos \alpha Y' \\ \Delta Y_o &= \sin \alpha \Delta X' + \cos \alpha \Delta Y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_c &= X_o + X \\ Y_c &= Y_o + Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta T &= \alpha_1 \Delta T_1 / 2^k \\ E &= \Delta E_1 \cdot 2^k \end{aligned}$$

Rangement en mémoire

L'incrément de taille maximum est donné à un axe et les autres incréments sont calculés d'après cette valeur. Pour cela, on choisit le rapport $\neq 0$ dont le module est le plus petit. L'incrément de $|0,25 \text{ mm}|$ est attribué à l'axe dont le symbole se trouve au dénominateur du rapport.

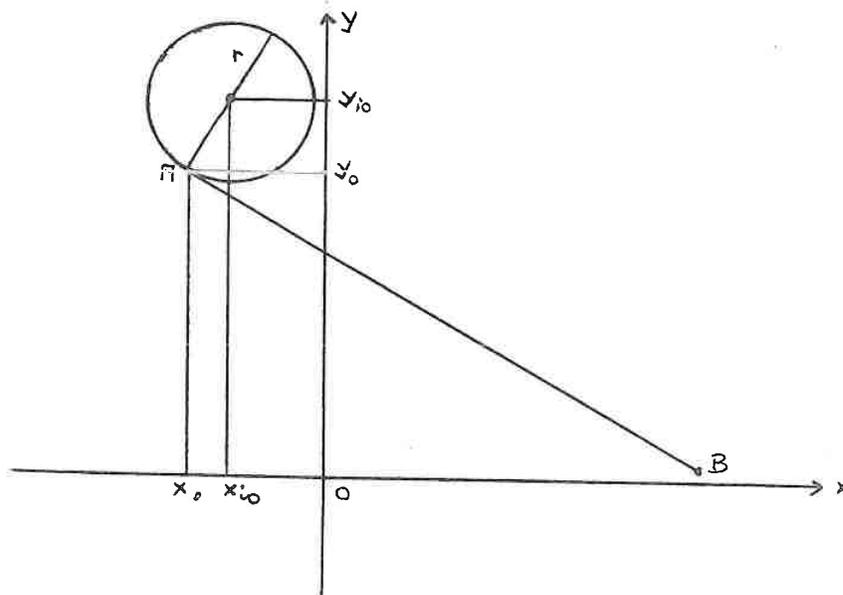
Le nombre E d'itérations est le résultat entier de la division de la plus grande variation sur une coordonnée par $0,25 \text{ mm}$.

Le temps ΔT entre deux itérations est le rapport du module A_k , A_{k-1} par la vitesse de contournage V programmée

$$\Delta T = \frac{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}}{V}$$

Correction d'outil : Nous nous limitons à la correction d'outil dans le plan XOY .

Pour la correction d'outil le problème revient à générer la droite parallèle distante de r .



Nous affectons un signe à r : s'il doit se trouver, par rapport à la droite du côté des y positifs, il est considéré comme positif, négatif dans l'autre cas.

Le point initial du centre de l'outil a pour coordonnées X_{i_0} et Y_{i_0} telles que

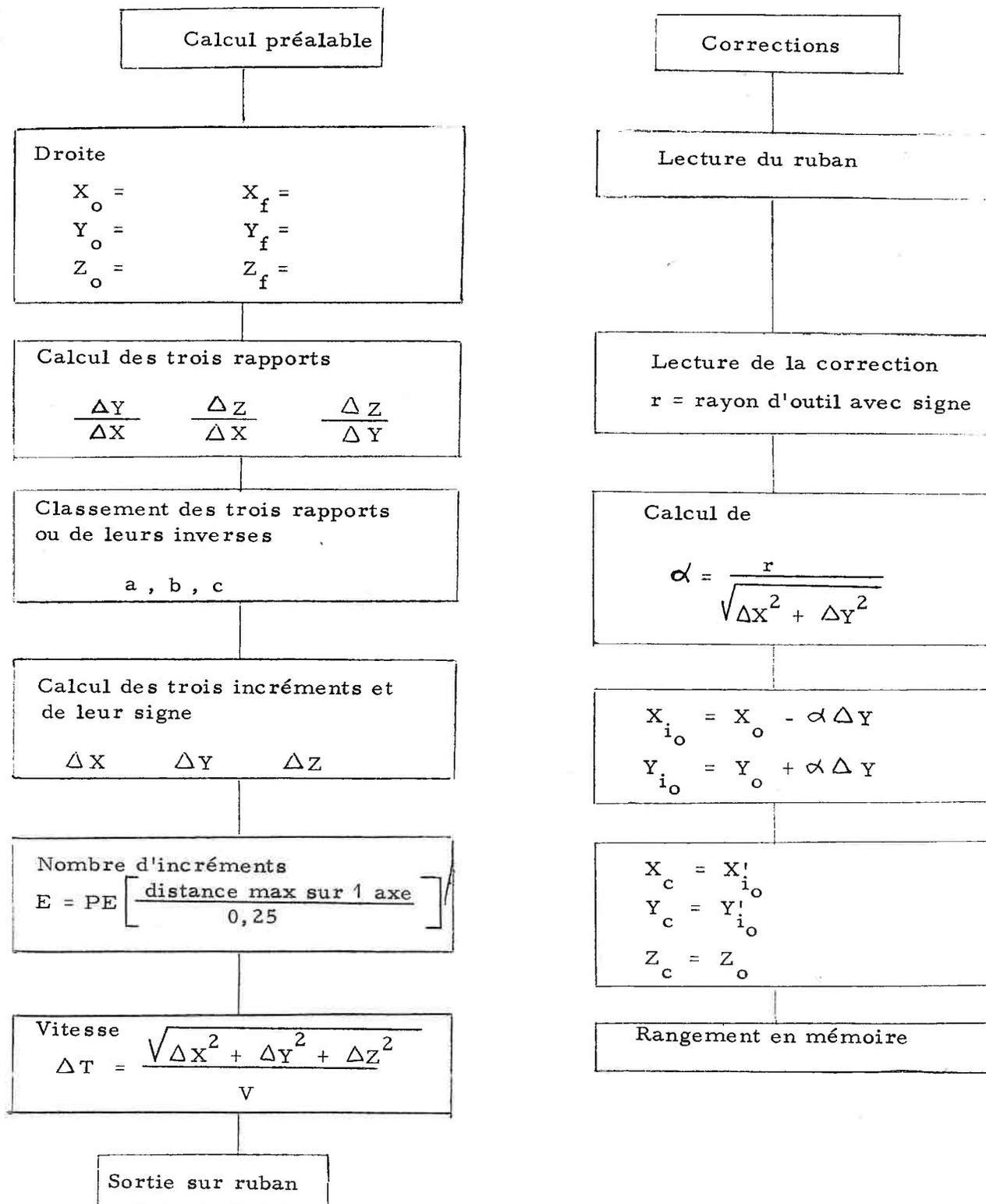
$$\begin{aligned} X_{i_0} &= X_0 - \alpha \Delta Y \\ Y_{i_0} &= Y_0 + \alpha \Delta X \end{aligned}$$

avec
$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}}$$

et avec les conventions :

- signe moins à ΔY lorsque le rapport $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ est négatif
- signe plus à ΔY lorsque le rapport $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ est positif
- signe plus à ΔY lorsque ΔX est nul.

L'organigramme IV. 4 décrit la suite des calculs.



ORGANIGRAMME IV. 4

Cas de l'interpolation linéaire.

IV - 4 Interpolation parabolique.

L'arc de parabole A B est défini dans le repère X'O'Y' par les coordonnées des points A et B et par la valeur de l'accélération δ .

Le calcul d'initialisation est fait dans le repère X'O'Y'. On calcule d'abord l'incrément. Pour cela, on considère les pentes aux points A et B $\delta X'_o$ et $\delta X'_f$.

Si elles ont toutes deux un module inférieur à 1, on choisit comme incrément initial $\Delta X' = 0,175$ mm pour que $\Delta X'_o$ soit $< 0,25$ mm.

Si une pente a un module supérieur à 1, égale à α' , on calcule $\Delta X'_o$ avec

$$\Delta X'_o = \frac{0,25}{\sqrt{1 + \alpha'^2}}$$

Lorsque l'incrément $\Delta X'_o$ est calculé, on en déduit E, nombre d'itérations

$$E = \text{partie entière} \left[\frac{X'_o - X'_f}{\Delta X'_o} \right]$$

qui doit rester inférieur à un nombre E_L , tel que d'après (II.19 bis)

$$\mathcal{E}_k < E_L^2 \cdot \mathcal{E}_2$$

où \mathcal{E}_2 représente l'erreur de quantification de δ et \mathcal{E}_k l'erreur maximum admissible.

Si $E > E_L$, il faut diminuer le nombre I d'itérations relatif à la récurrence, donc augmenter la taille de l'incrément $\Delta X'_o$, en

le multipliant par 2^k , tel que $I = \text{partie entière} \frac{X'_o - X'_f}{\Delta X'_o \cdot 2^k} \ll E_L$

L'interpolateur calculera par récurrence E points appartenant à la parabole et en fournira I aux asservissements pour limiter les incréments aux valeurs admissibles par les inductosyns.

On gagne ainsi en précision de calcul mais on perd sur l'approximation de la parabole par une ligne polygonale dont les segments sont plus longs.

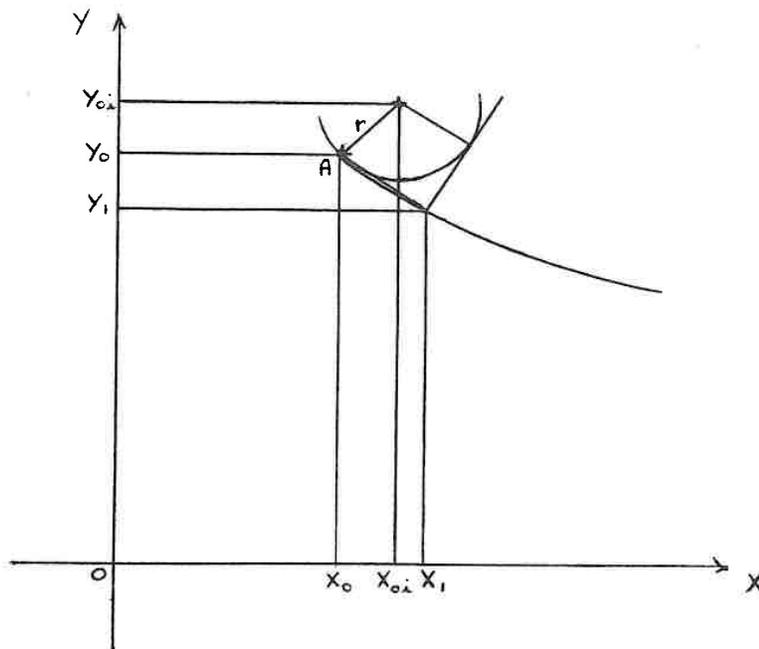
La parabole oblique d'axes $X'O'Y'$ est obtenue dans le repère XOY par la génération de deux paraboles d'accélération

$$\delta X = - \delta \sin \alpha$$

$$\delta Y = \delta \cos \alpha$$

à partir des 2 points initiaux X_o , Y_o et X_1 et Y_1 .

Correction d'outil : Les coordonnées initiales du centre de l'outil sont obtenues de la même façon que pour l'interpolation linéaire.



$$X_{0i} = X_0 - \alpha \Delta Y_0$$

$$Y_{0i} = Y_0 - \alpha \Delta X_0$$

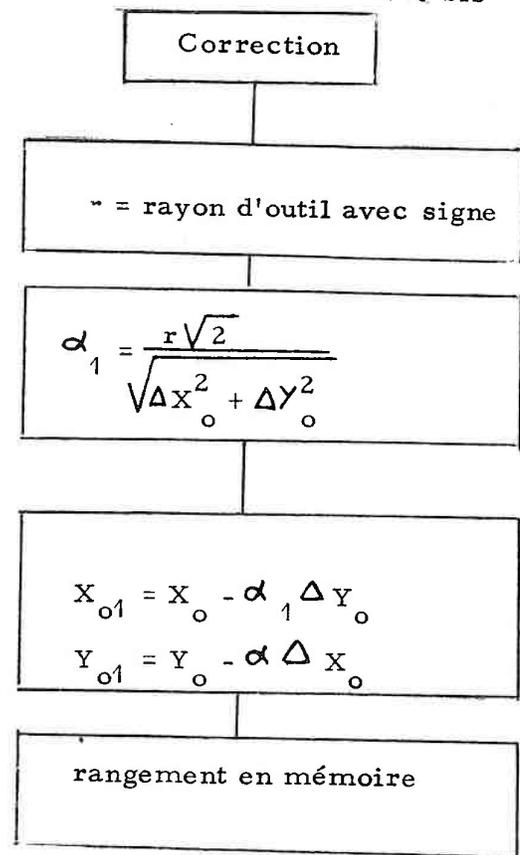
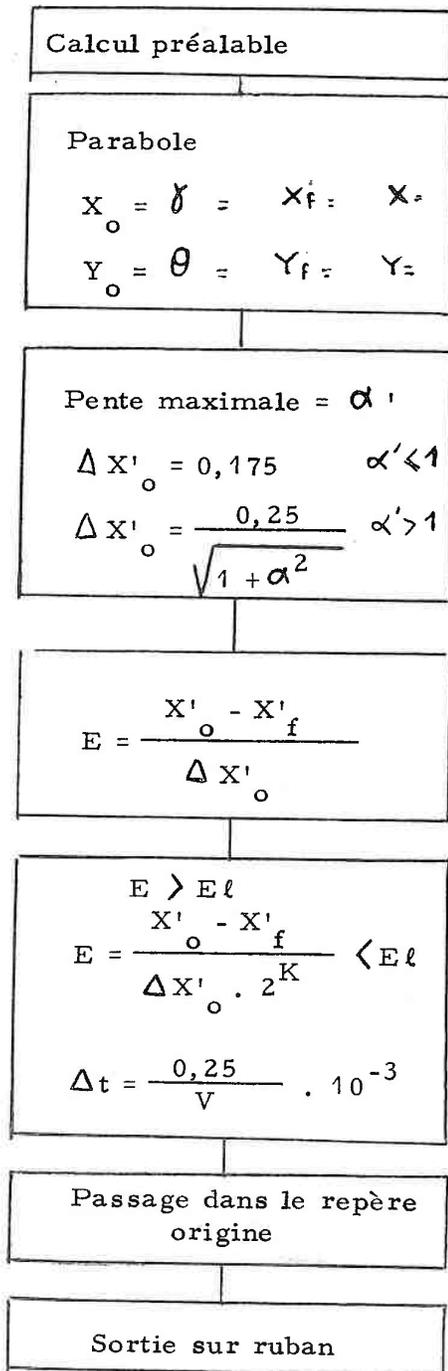
avec $\alpha = \frac{r}{\sqrt{\Delta X_0^2 + \Delta Y_0^2}}$

La courbe, parallèle à la parabole, distante de r dans le repère $X'O'Y'$, a pour expression

$$Y' = \frac{\delta X'^2}{2} + r \frac{[\delta X' + 1]}{\sqrt{\delta^2 X'^2 + 1}}$$

L'interpolateur ne pouvant générer cette courbe, nous devons l'approximer. Nous ajoutons r à l'abscisse et retranchons r à l'ordonnée lorsque la pente est positive, si la pente est négative, nous retranchons r aux deux coordonnées, r étant positif s'il se trouve à l'extérieur de la parabole.

L'arc de parabole se trouve usiné à $r \left[\sqrt{2} - 1 \right]$. L'erreur étant maximale lorsque la pente $\delta X' = 1$. La suite des calculs est donnée par l'organigramme IV. 5.

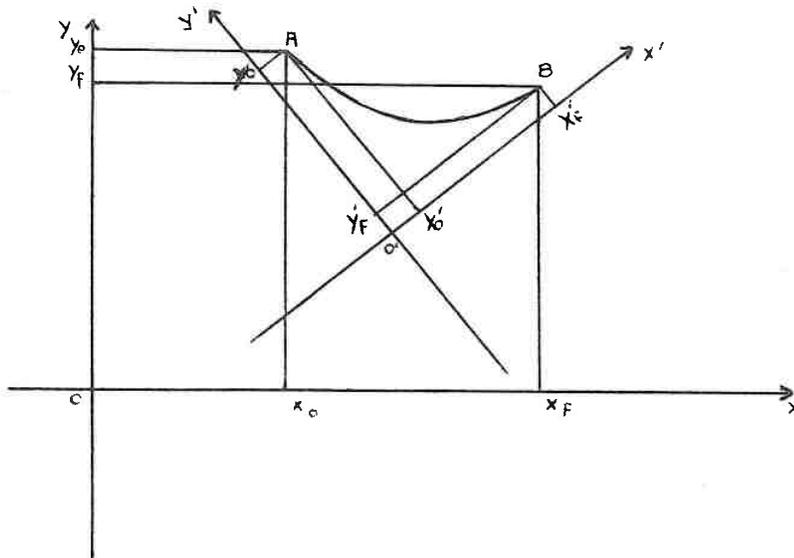


ORGANIGRAMME IV. 5

Parabole

IV - 5 : Interpolation hyperbolique.

L'arc d'hyperbole est défini dans le repère $X'O'Y'$ par ses coordonnées initiales X'_o, Y'_o et finales X'_f, Y'_f .



On déduit les équations paramétrées dans le repère $Y'O'X'$ par le sens de parcours

$$\begin{aligned} X' &= X'_o e^{k\zeta} \\ Y' &= Y'_o e^{-k\zeta} \quad \text{si } X \text{ est croissant ou} \\ X' &= X'_o e^{-k\zeta} \\ Y' &= Y'_o e^{k\zeta} \quad \text{si } Y \text{ est croissant.} \end{aligned}$$

Des quatre valeurs X'_o, Y'_o, X'_f, Y'_f celle dont le module est le plus grand correspond à l'incrément le plus grand, soit sur la figure Y'_f .

On choisit l'incrément $< 0,175$ mm (pour ne pas dépasser 0,25 mm dans le repère XOY).

On en déduit e^{ζ}

$$|Y'_f| (e^{\zeta} - 1) = 0,175 \text{ mm}$$

De la valeur de e^{ζ} on déduit N, nombre de décalage par la relation

$$\text{ch } \zeta = 1 + 2^{-N}$$

On peut calculer alors le nombre d'itérations

$$E = \text{partie entière} \left[\frac{1}{\zeta} \text{Log} \frac{Y'_f}{Y'_o} \right]$$

Ce nombre doit être inférieur à une valeur limite E_ℓ pour éviter une erreur de calcul trop importante (relation II.27). Comme pour la parabole, on est amené à calculer moins de points appartenant à la courbe et par interpolation linéaire, limiter la taille des incréments à la valeur maximale de 0,25 mm.

L'hyperbole est obtenue dans les axes XOY par les transformations

$$\begin{aligned} X_o &= X'_o \cos \alpha - Y'_o \sin \alpha \\ \Delta X_o &= \Delta X'_o \cos \alpha - \Delta Y'_o \sin \alpha \\ Y_o &= Y'_o \cos \alpha + X'_o \sin \alpha \\ \Delta Y_o &= \Delta Y'_o \cos \alpha + \Delta X'_o \sin \alpha \end{aligned}$$

ce qui permet d'initialiser les récurrences relatives aux axes concernés.

Correction d'outil : De même que pour l'interpolation parabolique, le point de départ est modifié par la relation

$$\begin{aligned} X_{o_i} &= X_o - \alpha \Delta Y_o & \alpha &= \frac{r}{\sqrt{\Delta X_o + \Delta Y_o}} \\ Y_{o_i} &= Y_o - \alpha \Delta X_o \end{aligned}$$

La courbe parallèle dans $X'OY'$ à générer pour obtenir une hyperbole a pour équation

$$Y = \frac{A}{X} + \frac{r \left[-\frac{A}{X^2} + 1 \right]}{\sqrt{\frac{A^2}{X^2} + 1}}$$

L'interpolateur ne peut générer cette courbe, nous l'approximons en ajoutant r à l'abscisse et en le retranchant à l'ordonnée lorsque la pente est positive. Si la pente de la courbe est négative, nous ajoutons r aux deux coordonnées.

Comme pour la parabole, l'arc d'hyperbole est approché à $r(\sqrt{2} - 1)$ lorsque la pente est égale à 1.

L'organigramme (IV. 6) montre la suite des calculs nécessaires à l'initialisation.

Hyperbole

$$\begin{array}{l} X'_o \quad X'_f \quad X \quad \alpha \\ Y'_o \quad Y'_f \quad Y \end{array}$$

Calcul de e

$$|Y'_1| (e^{\zeta} - 1) = 0,175 \cdot 10^{-2}$$

Calcul de N

$$2^{-N} = \frac{e^{\zeta} + e^{-\zeta}}{2} - 1$$

Calcul de E

$$E = PE \left[\frac{1}{\zeta 2^k} \text{Log} \left(\frac{Y'_t}{Y'_o} \right) \right]$$

$$E < E_s$$

$$\Delta t = \frac{0,25}{V} \cdot 10^{-3}$$

$$X_o = X'_o \cos \alpha - Y'_o \sin \alpha$$

$$Y_o = Y'_o \cos \alpha + X'_o \sin \alpha$$

$$\Delta Y_o = \Delta X'_o \cos \alpha - \Delta Y'_o \sin \alpha$$

$$\Delta Y_o = \Delta Y'_o \cos \alpha + \Delta X'_o \sin \alpha$$

Sortie du ruban

Correction d'outil

r = rayon d'outil avec signe

$$\alpha_1 = \frac{r \sqrt{2}}{\sqrt{\Delta X_o^2 + \Delta Y_o^2}}$$

$$X_{o_i} = X_o - \alpha_1 \Delta Y_o$$

$$Y_{o_i} = Y_o - \alpha_1 \Delta X_o$$

Rangement en mémoire

ORGANIGRAMME IV. 6
Cas de l'hyperbole

CHAPITRE V - RESULTATS.

L'interpolateur a été testé sur calculateur T 2000 de la Télémécanique Electrique.

La précision a été contrôlée en utilisant les sorties numériques. Pour un rayon de 8 mètres, l'écart maximum entre le centre du cercle et la courbe est de 1 micron.

Les deux colonnes de gauche des tableaux V.1 et V.2 représentent les coordonnées du point courant et la colonne de droite, le carré divisé par 10^4 de la distance du point calculé au centre du cercle, pour un écart angulaire tel que $\cos \zeta = 1 - 2^{-21}$.

Le carré du rayon exact, exprimé en mm et divisé par 10^4 pour éviter les débordements vaut 64.10^2 , les écarts sont de l'ordre de 16.10^{-2} , ce qui correspond à une précision de 1 micron et vérifie l'étude relative au dimensionnement des registres.

Nous avons ensuite programmé l'interpolateur et contrôlé la géométrie des trajectoires sur table traçante Benson.

L'interpolateur se programme de la façon suivante pour le cercle :

- c fonction (cercle)
- R rayon du cercle
- A angle d'ouverture de l'arc à usiner - Le signe détermine le sens de rotation
- I angle initial
- X } coordonnées des points de départ par rapport au centre du cercle
- Y }
- O rayon d'outil (avec signe)

Nous avons programmé le profil fini et la trajectoire de l'outil du quart de cercle de rayon 100 mm et du cercle de rayon 20 mm, pour un rayon d'outil de 10 mm. La planche V3 indique la programmation nécessaire et les tracés obtenus.

Les tableaux V. 4 , V. 5, V. 6 présentent les résultats numériques relatifs au quart de cercle de rayon 100 mm, la colonne de droite représente le carré de la distance du point au centre qui est toujours inférieure à $(100 \pm 10^{-3})^2$ soit 1 0000, ± 2 , ce qui garantit la précision du micron.

Nous avons ensuite programmé deux demi-ellipses avec correction d'outil (planche V. 7). La planche V. 8 illustre le cas de l'interpolation parabolique. Le point de départ est confondu avec l'origine des axes et l'accélération est programmé uniquement selon l'axe Y.

Le cas de l'hyperbole est présenté planche V. 10 et les tableaux V. 11 et V. 12 donnent les valeurs numériques obtenues.

On remarque que le produit XY reste inférieur à 100 ± 10^{-2} ce qui garantit 1 micron de précision, même après 200 itérations. On peut ainsi générer avec la précision voulue des courbes de 50 centimètres de longueur.

Nous nous sommes limités à présenter quelques résultats numériques types, qui permettent de vérifier la précision obtenue pour les différents types d'interpolation, et le fonctionnement de l'interpolateur et de sa commande par le calculateur.

R = 8 m

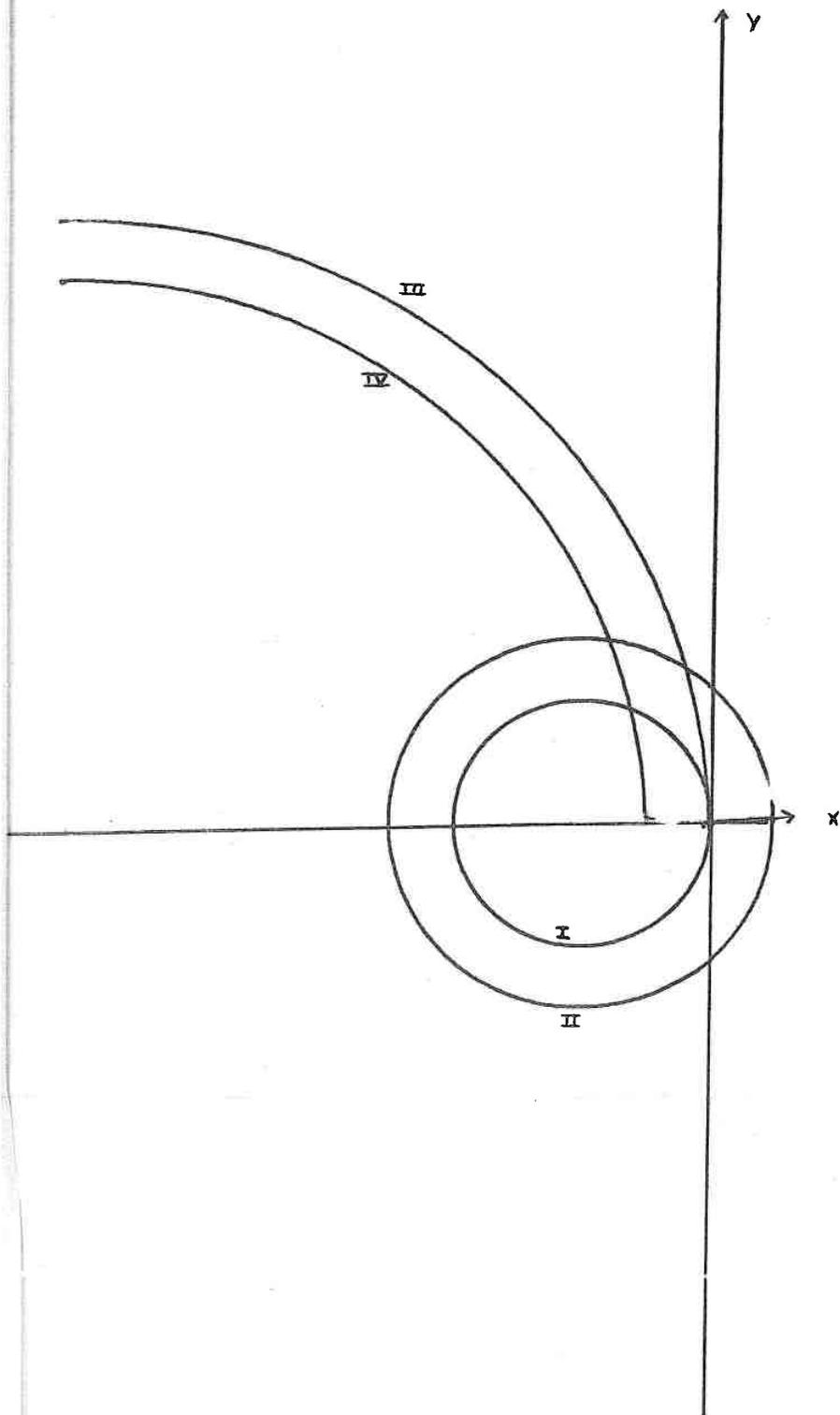
$$\frac{X^2 + Y^2}{10^4}$$

X	Y	$\frac{X^2 + Y^2}{10^4}$
+ 7999.99618	+ 7.81248	+ 6399.99938
+ 7999.98486	+ 15.62500	+ 6400.00000
+ 7999.96582	+ 23.43750	+ 6400.00000
+ 7999.93920	+ 31.25000	+ 6400.00000
+ 7999.90478	+ 39.06250	+ 6400.00000
+ 7999.86279	+ 46.87475	+ 6399.99999
+ 7999.81323	+ 54.68701	+ 6399.99998
+ 7999.75610	+ 62.49926	+ 6399.99999
+ 7999.69116	+ 70.31152	+ 6399.99998
+ 7999.61865	+ 78.12377	+ 6399.99998
+ 7999.53857	+ 85.93579	+ 6399.99998
+ 7999.45092	+ 93.74780	+ 6399.99998
+ 7999.35546	+ 101.55981	+ 6399.99997
+ 7999.25244	+ 109.37158	+ 6399.99997
+ 7999.14184	+ 117.18334	+ 6399.99997
+ 7999.02368	+ 124.99487	+ 6399.99996
+ 7998.89770	+ 132.80639	+ 6399.99995
+ 7998.76416	+ 140.61767	+ 6399.99993
+ 7998.62304	+ 148.42895	+ 6399.99992
+ 7998.47436	+ 156.23999	+ 6399.99990
+ 7998.31787	+ 164.05102	+ 6399.99989
+ 7998.15380	+ 171.86181	+ 6399.99987
+ 7997.98217	+ 179.67236	+ 6399.99985
+ 7997.80297	+ 187.48291	+ 6399.99983
+ 7997.61596	+ 195.29321	+ 6399.99980
+ 7997.42138	+ 203.10327	+ 6399.99977
+ 7997.21923	+ 210.91308	+ 6399.99974
+ 7997.00952	+ 218.72265	+ 6399.99969
+ 7996.79223	+ 226.53222	+ 6400.00025
+ 7996.56713	+ 234.34155	+ 6399.99959
+ 7996.33447	+ 242.15063	+ 6400.00016
+ 7996.09423	+ 249.95947	+ 6400.00009
+ 7995.84643	+ 257.76806	+ 6400.00003
+ 7995.59082	+ 265.57641	+ 6399.99995
+ 7995.32763	+ 273.38452	+ 6399.99988
+ 7995.05688	+ 281.19238	+ 6399.99979
+ 7994.77856	+ 289.00000	+ 6400.00032
+ 7994.49243	+ 296.80737	+ 6400.00022
+ 7994.19873	+ 304.61425	+ 6400.00012
+ 7993.89746	+ 312.42089	+ 6399.99998
+ 7993.58862	+ 320.22729	+ 6399.99985
+ 7993.27221	+ 328.03344	+ 6400.00034
+ 7992.94799	+ 335.83911	+ 6400.00018
+ 7992.61621	+ 343.64453	+ 6400.00001
+ 7992.27685	+ 351.44970	+ 6400.00046
+ 7991.92993	+ 359.25439	+ 6400.00025
+ 7991.57519	+ 367.05883	+ 6400.00006
+ 7991.21289	+ 374.86303	+ 6400.00047
+ 7990.84301	+ 382.66674	+ 6400.00025
+ 7990.46557	+ 390.47021	+ 6400.00065
+ 7990.08056	+ 398.27319	+ 6400.00040
+ 7989.68774	+ 406.07568	+ 6400.00074
+ 7989.28735	+ 413.87792	+ 6400.00045
+ 7988.87939	+ 421.67968	+ 6400.00077
+ 7988.46386	+ 429.48120	+ 6400.00045
+ 7988.04077	+ 437.28222	+ 6400.00073
+ 7987.60986	+ 445.08276	+ 6400.00096
+ 7987.17138	+ 452.88305	+ 6400.00061
+ 7986.72534	+ 460.68286	+ 6400.00084

TABLEAU V.1

+ 7985.81054	+ 476.28100	+ 6400.00106
+ 7985.34155	+ 484.07934	+ 6400.00124
+ 7984.86499	+ 491.87719	+ 6400.00074
+ 7984.38085	+ 499.67456	+ 6400.00089
+ 7983.88916	+ 507.47143	+ 6400.00098
+ 7983.38989	+ 515.26806	+ 6400.00105
+ 7982.88281	+ 523.06420	+ 6400.00115
+ 7982.36816	+ 530.85961	+ 6400.00119
+ 7981.84594	+ 538.65454	+ 6400.00119
+ 7981.31616	+ 546.44897	+ 6400.00117
+ 7980.77880	+ 554.24291	+ 6400.00113
+ 7980.23364	+ 562.03637	+ 6400.00104
+ 7979.68090	+ 569.82934	+ 6400.00094
+ 7979.12060	+ 577.62182	+ 6400.00082
+ 7978.55273	+ 585.41357	+ 6400.00065
+ 7977.97729	+ 593.20483	+ 6400.00107
+ 7977.39426	+ 600.99560	+ 6400.00083
+ 7976.80346	+ 608.78564	+ 6400.00119
+ 7976.20507	+ 616.57519	+ 6400.00093
+ 7975.59912	+ 624.36425	+ 6400.00117
+ 7974.98559	+ 632.15258	+ 6400.00084
+ 7974.36450	+ 639.94042	+ 6400.00106
+ 7973.73583	+ 647.72753	+ 6400.00122
+ 7973.09960	+ 655.51416	+ 6400.00132
+ 7972.45556	+ 663.30004	+ 6400.00146
+ 7971.80395	+ 671.08520	+ 6400.00089
+ 7971.14477	+ 678.86987	+ 6400.00086
+ 7970.47802	+ 686.65380	+ 6400.00083
+ 7969.80371	+ 694.43725	+ 6400.00074
+ 7969.12182	+ 702.21997	+ 6400.00124
+ 7968.43237	+ 710.00195	+ 6400.00108
+ 7967.73510	+ 717.78320	+ 6400.00147
+ 7967.03027	+ 725.56372	+ 6400.00119
+ 7966.31787	+ 733.34375	+ 6400.00085
+ 7965.59790	+ 741.12304	+ 6400.00111
+ 7964.87036	+ 748.90161	+ 6400.00070
+ 7964.13525	+ 756.67944	+ 6400.00084
+ 7963.39257	+ 764.45654	+ 6400.00092
+ 7962.64233	+ 772.23291	+ 6400.00094
+ 7961.88452	+ 780.00854	+ 6400.00156
+ 7961.11889	+ 787.78344	+ 6400.00146
+ 7960.34570	+ 795.55761	+ 6400.00136
+ 7959.56494	+ 803.33105	+ 6400.00113
+ 7958.77661	+ 811.10375	+ 6400.00091
+ 7957.98071	+ 818.87548	+ 6400.00117
+ 7957.17724	+ 826.64648	+ 6400.00076
+ 7956.36621	+ 834.41674	+ 6400.00096
+ 7955.54760	+ 842.18627	+ 6400.00103
+ 7954.72143	+ 849.95483	+ 6400.00105
+ 7953.88769	+ 857.72265	+ 6400.00101
+ 7953.04638	+ 865.48974	+ 6400.00151
+ 7952.19750	+ 873.25585	+ 6400.00134
+ 7951.34082	+ 881.02124	+ 6400.00165
+ 7950.47656	+ 888.78588	+ 6400.00136
+ 7949.60473	+ 896.54956	+ 6400.00155
+ 7948.72534	+ 904.31250	+ 6400.00108
+ 7947.83837	+ 912.07446	+ 6400.00115
+ 7946.94384	+ 919.83569	+ 6400.00116
+ 7946.04174	+ 927.59594	+ 6400.00112
+ 7945.13208	+ 935.35522	+ 6400.00094
+ 7944.21484	+ 943.11376	+ 6400.00124
+ 7943.29003	+ 950.87133	+ 6400.00095
+ 7942.35766	+ 958.62792	+ 6400.00113
+ 7941.41772	+ 966.38378	+ 6400.00118
+ 7940.47021	+ 974.13867	+ 6400.00124
+ 7939.51513	+ 981.89257	+ 6400.00118
+ 7938.55249	+ 989.64550	+ 6400.00098
+ 7937.58927	+ 997.39746	+ 6400.00133
		+ 6400.00094

TABLEAU V.2



```

C
R
I +000020.00000
A
+000006.28320
I
+000000.00000
X
-000020.00000
Y
+000000.00000
O
+000000.00000
C
R
II +000020.00000
A
+000006.28320
I
+000000.00000
Y
-000020.00000
Y
+000000.00000
O
+000010.00000
C
R
III +000100.00000
A
+000001.57080
I
+000000.00000
X
-000100.00000
Y
+000000.00000
O
+000000.00000
C
R
IV +000100.00000
A
+000001.57080
I
+000000.00000
X
-000100.00000
Y
+000000.00000
O
-000010.00000
    
```

X	Y	X ² + Y ²
+ 99.99694	+ 0.78123	+ 9999.99998
+ 99.98779	+ 1.56250	+ 10000.00014
+ 99.97265	+ 2.34350	+ 10000.02401
+ 99.95141	+ 3.12451	+ 10000.04813
+ 99.92407	+ 3.90527	+ 10000.07137
+ 99.89062	+ 4.68579	+ 10000.09359
+ 99.85107	+ 5.46606	+ 10000.11487
+ 99.80541	+ 6.24584	+ 10000.13248
+ 99.75366	+ 7.02539	+ 10000.14921
+ 99.69580	+ 7.80444	+ 10000.16202
+ 99.63183	+ 8.58300	+ 10000.17075
+ 99.56176	+ 9.36108	+ 10000.17545
+ 99.48559	+ 10.13867	+ 10000.17641
+ 99.40332	+ 10.91552	+ 10000.16882
+ 99.31494	+ 11.69165	+ 10000.15227
+ 99.22045	+ 12.46728	+ 10000.13267
+ 99.12011	+ 13.24194	+ 10000.14669
+ 99.01367	+ 14.01586	+ 10000.15180
+ 98.90112	+ 14.78906	+ 10000.14850
+ 98.78247	+ 15.56127	+ 10000.12992
+ 98.65795	+ 16.33251	+ 10000.14406
+ 98.52734	+ 17.10278	+ 10000.14265
+ 98.39062	+ 17.87207	+ 10000.12598
+ 98.24804	+ 18.64013	+ 10000.13341
+ 98.09936	+ 19.40722	+ 10000.12590
+ 97.94482	+ 20.17309	+ 10000.14237
+ 97.78417	+ 20.93774	+ 10000.13492
+ 97.61767	+ 21.70092	+ 10000.14088
+ 97.44506	+ 22.46289	+ 10000.12280
+ 97.26660	+ 23.22338	+ 10000.11755
+ 97.08227	+ 23.98266	+ 10000.13645
+ 96.89184	+ 24.74047	+ 10000.12103
+ 96.69555	+ 25.49658	+ 10000.10636
+ 96.49340	+ 26.25122	+ 10000.10441
+ 96.28540	+ 27.00415	+ 10000.10246
+ 96.07153	+ 27.75561	+ 10000.11366
+ 95.85180	+ 28.50537	+ 10000.12501
+ 95.62622	+ 29.25341	+ 10000.13654
+ 95.39477	+ 29.99951	+ 10000.13387
+ 95.15747	+ 30.74389	+ 10000.13139
+ 94.91430	+ 31.48632	+ 10000.11446
+ 94.66552	+ 32.22680	+ 10000.12913
+ 94.41088	+ 32.96533	+ 10000.12901
+ 94.15039	+ 33.70190	+ 10000.11440
+ 93.88427	+ 34.43652	+ 10000.13167
+ 93.61230	+ 35.16894	+ 10000.11830
+ 93.33471	+ 35.89916	+ 10000.11975
+ 93.05151	+ 36.62719	+ 10000.13577
+ 92.76245	+ 37.35302	+ 10000.12099
+ 92.46777	+ 38.07666	+ 10000.12117
+ 92.16748	+ 38.79785	+ 10000.11774
+ 91.86157	+ 39.51660	+ 10000.11025
+ 91.55004	+ 40.23315	+ 10000.11814
+ 91.23291	+ 40.94726	+ 10000.12245
+ 90.91015	+ 41.65869	+ 10000.10307
+ 90.58203	+ 42.36767	+ 10000.12433
+ 90.24829	+ 43.07397	+ 10000.12131
+ 89.90893	+ 43.77758	+ 10000.09388
+ 89.56420	+ 44.47875	+ 10000.10759
+ 89.21386	+ 45.17700	+ 10000.07559
+ 88.85815	+ 45.87255	+ 10000.06321
+ 88.49707	+ 46.56542	+ 10000.07069
+ 88.13061	+ 47.25537	+ 10000.07543
+ 87.75878	+ 47.94238	+ 10000.07712
+ 87.38150	+ 48.62646	+ 10000.07566

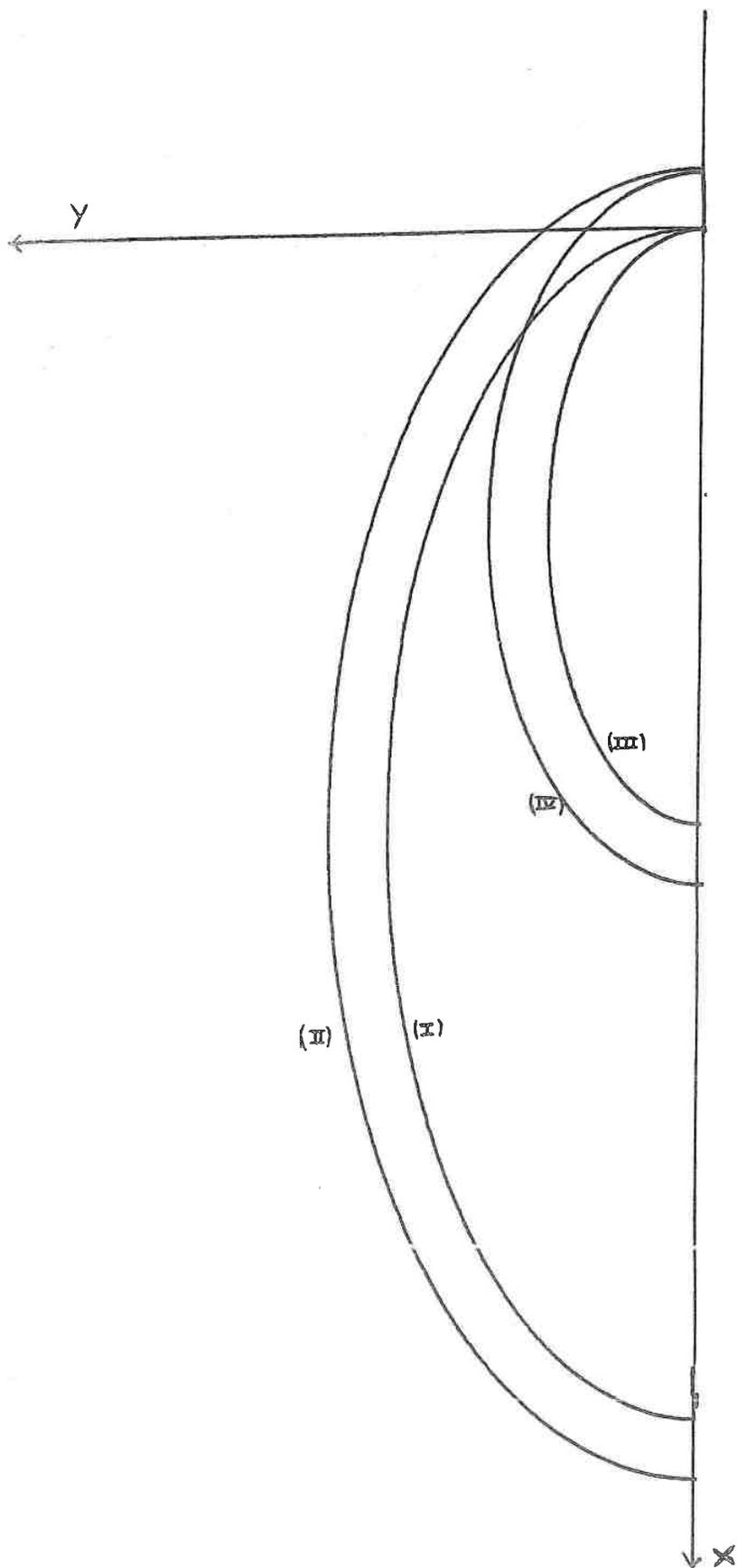
TABLEAU V. 4

+	86.81106	+	49.98300	+	10000.06404
+	85.21801	+	50.66088	+	10000.07219
+	85.81958	+	51.33300	+	10000.07801
+	85.41601	+	52.00195	+	10000.09885
+	85.00708	+	52.66772	+	10000.09287
+	84.59301	+	53.33032	+	10000.10189
+	84.17382	+	53.98950	+	10000.09965
+	83.74951	+	54.64550	+	10000.11223
+	83.32006	+	55.29809	+	10000.11317
+	82.88549	+	55.94726	+	10000.10231
+	82.44580	+	56.59301	+	10000.07970
+	82.00122	+	57.23585	+	10000.08566
+	81.55151	+	57.87426	+	10000.08022
+	81.09692	+	58.50952	+	10000.07515
+	80.63745	+	59.14135	+	10000.09868
+	80.17285	+	59.76953	+	10000.08299
+	79.70336	+	60.39404	+	10000.06747
+	79.22900	+	61.01489	+	10000.05217
+	78.75000	+	61.63208	+	10000.07579
+	78.26611	+	62.24536	+	10000.06949
+	77.77734	+	62.85498	+	10000.06377
+	77.28393	+	63.46069	+	10000.06629
+	76.78588	+	64.06250	+	10000.07660
+	76.28295	+	64.66040	+	10000.05720
+	75.77539	+	65.25439	+	10000.04582
+	75.26318	+	65.84448	+	10000.04266
+	74.74658	+	66.43041	+	10000.05221
+	74.22534	+	67.01245	+	10000.06997
+	73.69946	+	67.59033	+	10000.06381
+	73.16918	+	68.16406	+	10000.06969
+	72.63452	+	68.73364	+	10000.08732
+	72.09521	+	69.29907	+	10000.08141
+	71.55151	+	69.86010	+	10000.05371
+	71.00366	+	70.41699	+	10000.07281
+	70.45141	+	70.96948	+	10000.06945
+	69.89477	+	71.51782	+	10000.07852
+	69.33398	+	72.06176	+	10000.09973
+	68.76879	+	72.60131	+	10000.09911
+	68.19946	+	73.13623	+	10000.07494
+	67.62597	+	73.66674	+	10000.06246
+	67.04833	+	74.19287	+	10000.06199
+	66.46655	+	74.71435	+	10000.03754
+	65.88085	+	75.23144	+	10000.05799
+	65.29101	+	75.74389	+	10000.05457
+	64.69726	+	76.25170	+	10000.05929
+	64.09960	+	76.75488	+	10000.07195
+	63.49804	+	77.25341	+	10000.09254
+	62.89257	+	77.74707	+	10000.08332
+	62.28320	+	78.23608	+	10000.08222
+	61.67016	+	78.72021	+	10000.08159
+	61.05322	+	79.19970	+	10000.08958
+	60.43261	+	79.67431	+	10000.09791
+	59.80834	+	80.14404	+	10000.10630
+	59.18041	+	80.60888	+	10000.11471
+	58.54882	+	81.06884	+	10000.12333
+	57.91381	+	81.52368	+	10000.12102
+	57.27514	+	81.97363	+	10000.11887
+	56.63305	+	82.41870	+	10000.14540
+	55.98754	+	82.85864	+	10000.16027
+	55.33862	+	83.29345	+	10000.16318
+	54.68627	+	83.72314	+	10000.15407
+	54.03051	+	84.14770	+	10000.13309
+	53.37158	+	84.56713	+	10000.12670
+	52.70922	+	84.98144	+	10000.10881
+	52.04370	+	85.39062	+	10000.10566
+	51.37500	+	85.79467	+	10000.11735
+	50.70312	+	86.19335	+	10000.10208
+	50.02832	+	86.58691	+	10000.12651
+	49.35024	+	86.97500	+	10000.12384

TABLEAU V. 5

+	48.66943	+	87.35791	-	10000.11822
+	47.98535	+	87.73535	+	10000.08587
+	47.29833	+	88.10766	+	10000.09375
+	46.60864	+	88.47436	+	10000.07886
+	45.91601	+	88.83569	+	10000.06090
+	45.22070	+	89.19165	+	10000.06248
+	44.52246	+	89.54223	+	10000.06161
+	43.82153	+	89.88720	+	10000.03675
+	43.11791	+	90.22680	+	10000.03165
+	42.41162	+	90.56079	+	10000.00246
+	41.70288	+	90.88940	+	10000.01408
+	40.99145	+	91.21240	+	10000.00172
+	40.27758	+	91.52978	+	9999.98565
+	39.56127	+	91.84155	+	9999.96562
+	38.84252	+	92.14770	+	9999.94163
+	38.12133	+	92.44824	+	9999.91388
+	37.39794	+	92.74316	+	9999.90108
+	36.67236	+	93.03247	+	9999.90283
+	35.94433	+	93.31616	+	9999.90139
+	35.21411	+	93.59423	+	9999.91507
+	34.48193	+	93.86645	+	9999.91513
+	33.74755	+	94.13305	+	9999.93006
+	33.01123	+	94.39379	+	9999.93059
+	32.27270	+	94.64892	+	9999.94664
+	31.53222	+	94.89819	+	9999.94841
+	30.78979	+	95.14160	+	9999.93581
+	30.04565	+	95.37915	+	9999.92366
+	29.29956	+	95.61108	+	9999.94362
+	28.55175	+	95.83715	+	9999.96376
+	27.80224	+	96.05737	+	9999.98379
+	27.05102	+	96.27172	+	10000.00368
+	26.29809	+	96.48022	+	10000.02357
+	25.54345	+	96.68261	+	9999.99666
+	24.78735	+	96.87915	+	9999.98266
+	24.02978	+	97.06982	+	9999.98134
+	23.27075	+	97.25463	+	9999.99263
+	22.51025	+	97.43334	+	9999.96914
+	21.74829	+	97.60620	+	9999.95866
+	20.98510	+	97.77319	+	9999.97207
+	20.22070	+	97.93408	+	9999.96125
+	19.45507	+	98.08911	+	9999.97382
+	18.68823	+	98.23803	+	9999.96196
+	17.92016	+	98.38110	+	9999.97387
+	17.15112	+	98.51806	+	9999.97042
+	16.38085	+	98.64892	+	9999.94311
+	15.60961	+	98.77392	+	9999.94862
+	14.83740	+	98.89282	+	9999.93880
+	14.06445	+	99.00561	+	9999.92068
+	13.29052	+	99.11254	+	9999.93544
+	12.51586	+	99.21337	+	9999.94153
+	11.74047	+	99.30810	+	9999.93864
+	10.96435	+	99.39672	+	9999.92672
+	10.18750	+	99.47924	+	9999.90594
+	9.40991	+	99.55590	+	9999.92530
+	8.63183	+	99.62646	+	9999.94108
+	7.85327	+	99.69091	+	9999.95299
+	7.07421	+	99.74926	+	9999.96095
+	6.29467	+	99.80151	+	9999.96509
+	5.51489	+	99.84765	+	9999.96849
+	4.73461	+	99.88769	+	9999.96829
+	3.95410	+	99.92163	+	9999.96723
+	3.17333	+	99.94946	+	9999.96521
+	2.39233	+	99.97119	+	9999.96236
+	1.61132	+	99.98681	+	9999.95983
+	0.83007	+	99.99633	+	9999.95661
+	0.04882	+	99.99975	+	9999.95355
-	0.73242	+	99.99707	+	9999.95051
-	1.51367	+	99.98828	+	9999.94760

TABLEAU V. 6



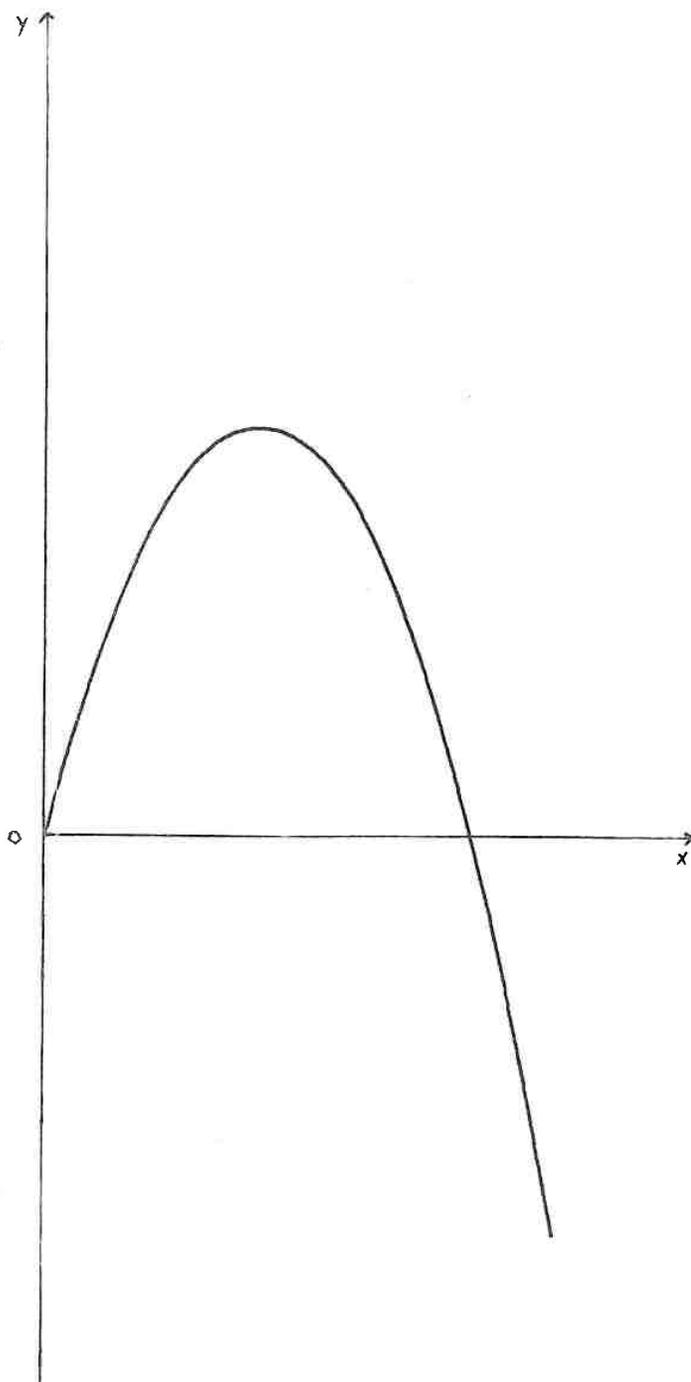
I
 E
 F
 +000000.50000
 P
 +000100.00000
 I
 +000000.00000
 A
 +000003.14160
 Y
 -000100.00000
 X
 +000000.00000
 O
 +000000.00000

II
 E
 F
 +000000.52545
 P
 +000100.00000
 I
 +000000.00000
 A
 +000003.14160
 Y
 -000100.00000
 X
 +000000.00000
 O
 +000010.00000

III
 E
 F
 +000000.50000
 P
 +000050.00000
 I
 +000000.00000
 A
 +000003.14160
 Y
 -000050.00000
 X
 +000000.00000
 O
 +000000.00000

IV
 E
 F
 +000000.58333
 P
 +000050.00000
 I
 +000000.00000
 A
 +000003.14160
 X
 -000050.00000
 Y
 +000000.00000
 O
 +000010.00000

Interpolation elliptique



P
X
+000000.00000
A
+000000.00000
D
+000000.06250
Y
+000000.00000
B
+000001.00000
E
+000000.25000

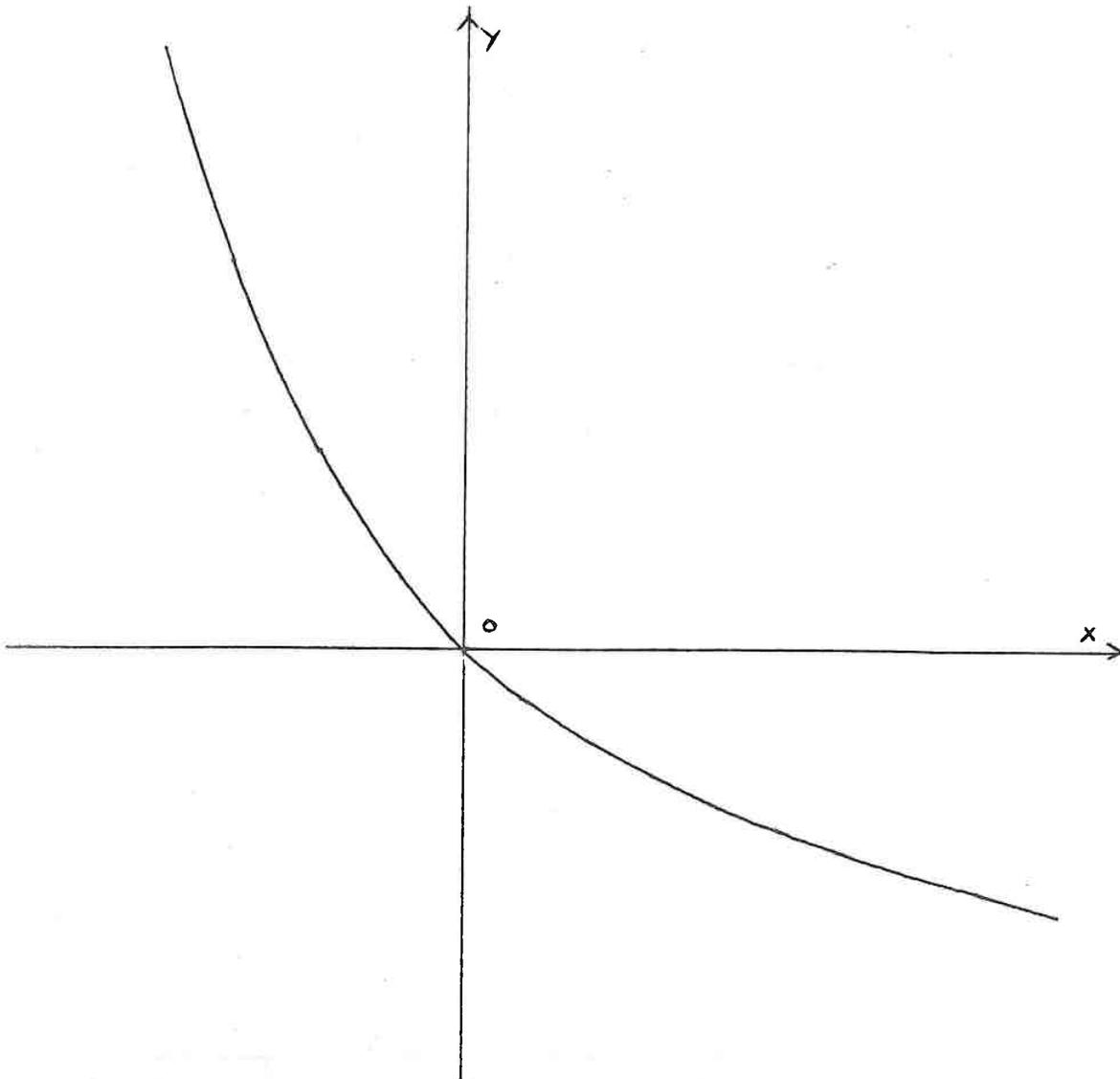
PARABOLE

Fonction générée $Y = -X(X - 62,5)$

	Y		X
D			
X			
	+000000.00000		
Z			
	+000000.00000		
D			
	+000000.06250		
F			
	+000000.00000		
D			
	+000001.00000		
F			
	+000000.25000		
	+ 0.00000		+ 0.00000
	+ 0.24951		+ 0.06250
	+ 0.49853		+ 0.12500
	+ 0.74707		+ 0.18750
	+ 0.99511		+ 0.25000
	+ 1.24267		+ 0.31250
	+ 1.48974		+ 0.37500
	+ 1.73632		+ 0.43750
	+ 1.98242		+ 0.50000
	+ 2.22802		+ 0.56250
	+ 2.47314		+ 0.62500
	+ 2.71777		+ 0.68750
	+ 2.96191		+ 0.75000
	+ 3.20556		+ 0.81250
	+ 3.44873		+ 0.87500
	+ 3.69140		+ 0.93750
	+ 3.93359		+ 1.00000
	+ 4.17529		+ 1.06250
	+ 4.41650		+ 1.12500
	+ 4.65722		+ 1.18750
	+ 4.89746		+ 1.25000
	+ 5.13720		+ 1.31250
	+ 5.37646		+ 1.37500
	+ 5.61523		+ 1.43750
	+ 5.85351		+ 1.50000
	+ 6.09130		+ 1.56250
	+ 6.32861		+ 1.62500
	+ 6.56542		+ 1.68750
	+ 6.80175		+ 1.75000
	+ 7.03759		+ 1.81250
	+ 7.27294		+ 1.87500
	+ 7.50781		+ 1.93750
	+ 7.74218		+ 2.00000
	+ 7.97607		+ 2.06250
	+ 8.20947		+ 2.12500
	+ 8.44238		+ 2.18750
	+ 8.67480		+ 2.25000
	+ 8.90673		+ 2.31250
	+ 9.13818		+ 2.37500
	+ 9.36914		+ 2.43750
	+ 9.59960		+ 2.50000
	+ 9.82958		+ 2.56250
	+ 10.05903		+ 2.62500
	+ 10.28803		+ 2.68750
	+ 10.51660		+ 2.75000
	+ 10.74462		+ 2.81250
	+ 10.97216		+ 2.87500
	+ 11.19921		+ 2.93750
	+ 11.42578		+ 3.00000

TABLEAU V.9

INTERPOLATION HYPERBOLIQUE



Fonction générée : $Y - 50 = \frac{2\,500}{X - 50}$

HYPERBOLE

X	Y	X . Y
9.92218	10.07842	99.99996
9.84497	10.15747	100.00000
9.76831	10.23706	99.99878
9.69233	10.31738	100.00002
9.61694	10.39819	99.99883
9.54199	10.47973	99.99755
9.46777	10.56201	99.99873
9.39404	10.64477	99.99747
9.32104	10.72827	99.99869
9.24853	10.81250	99.99978
9.17651	10.89721	99.99845
9.10498	10.98266	99.99695
9.03417	11.06884	99.99795
8.96386	11.15576	99.99876
8.89404	11.24316	99.99718
8.82470	11.33129	99.99539
8.75610	11.42016	99.99615
8.68798	11.50976	99.99670
8.62036	11.60009	99.99703
8.55322	11.69116	99.99711
8.48657	11.78295	99.99692
8.42041	11.87548	99.99647
8.35498	11.96850	99.99663
8.29003	12.06225	99.99657
8.22558	12.15673	99.99629
8.16162	12.25219	99.99779
8.09814	12.34838	99.99903
8.03515	12.44531	100.00003
7.97265	12.54296	100.00077
7.91064	12.64135	100.00128
7.84912	12.74047	100.00155
7.78808	12.84033	100.00160
7.72753	12.94091	100.00144
7.66748	13.04248	100.00296
7.60791	13.14477	100.00426
7.54882	13.24780	100.00538
7.48999	13.35180	100.00489
7.43164	13.45654	100.00418
7.37377	13.56201	100.00328
7.31640	13.66845	100.00398
7.25952	13.77563	100.00451
7.20312	13.88378	100.00666
7.14697	13.99267	100.00526
7.09130	14.10229	100.00372
7.03613	14.21289	100.00378
6.98144	14.32446	100.00545
6.92700	14.43676	100.00351
6.87304	14.55004	100.00316
6.81958	14.66406	100.00274
6.76660	14.77905	100.00395
6.71386	14.89501	100.00318
6.66162	15.01171	100.00238
6.60986	15.12939	100.00322
6.55834	15.24804	100.00202
6.50732	15.36767	100.00244
6.45678	15.48828	100.00453
6.40649	15.60986	100.00449
6.35668	15.73217	100.00456
6.30712	15.85546	100.00248
6.25805	15.97973	100.00209
6.20947	16.10498	100.00343
6.16113	16.23120	100.00258
6.11328	16.35839	100.00349
6.06567	16.48681	100.00365

TABLEAU V. 11

HYPERBOLE

X	V	X. Y
+ 6.01855	+ 16.61621	+ 100.00557
+ 5.97167	+ 16.74658	+ 100.00522
+ 5.92529	+ 16.87792	+ 100.00667
+ 5.87915	+ 17.01025	+ 100.00584
+ 5.83349	+ 17.14355	+ 100.00685
+ 5.78808	+ 17.27807	+ 100.00695
+ 5.74316	+ 17.41357	+ 100.00901
+ 5.69843	+ 17.55004	+ 100.00871
+ 5.65405	+ 17.68774	+ 100.00743
+ 5.61010	+ 17.82641	+ 100.00810
+ 5.56640	+ 17.96630	+ 100.00777
+ 5.52319	+ 18.10717	+ 100.00944
+ 5.48022	+ 18.24926	+ 100.01008
+ 5.43750	+ 18.39233	+ 100.00831
+ 5.39526	+ 18.53662	+ 100.00905
+ 5.35327	+ 18.68188	+ 100.00919
+ 5.31152	+ 18.82836	+ 100.00732
+ 5.27026	+ 18.97607	+ 100.00891
+ 5.22924	+ 19.12500	+ 100.00936
+ 5.18847	+ 19.27490	+ 100.00737
+ 5.14819	+ 19.42602	+ 100.00893
+ 5.10815	+ 19.57836	+ 100.00932
+ 5.06835	+ 19.73193	+ 100.00852
+ 5.02880	+ 19.88671	+ 100.00650
+ 4.98974	+ 20.04272	+ 100.00810
+ 4.95092	+ 20.19995	+ 100.00849
+ 4.91235	+ 20.35839	+ 100.00764
+ 4.87402	+ 20.51806	+ 100.00553
+ 4.83618	+ 20.67895	+ 100.00717
+ 4.79853	+ 20.84106	+ 100.00759
+ 4.76123	+ 21.00463	+ 100.00792
+ 4.72412	+ 21.16943	+ 100.00696
+ 4.68725	+ 21.33544	+ 100.00470
+ 4.65087	+ 21.50268	+ 100.00638
+ 4.61474	+ 21.67138	+ 100.00794
+ 4.57885	+ 21.84130	+ 100.00823
+ 4.54321	+ 22.01269	+ 100.00835
+ 4.50781	+ 22.18530	+ 100.00718
+ 4.47265	+ 22.35937	+ 100.00579
+ 4.43774	+ 22.53466	+ 100.00308
+ 4.40332	+ 22.71142	+ 100.00568
+ 4.36914	+ 22.88964	+ 100.00809
+ 4.33520	+ 23.06909	+ 100.00924
+ 4.30151	+ 23.25000	+ 100.01019
+ 4.26806	+ 23.43237	+ 100.01092
+ 4.23486	+ 23.61621	+ 100.01142
+ 4.20190	+ 23.80151	+ 100.01168
+ 4.16918	+ 23.98828	+ 100.01168
+ 4.13671	+ 24.17651	+ 100.01143
+ 4.10449	+ 24.36621	+ 100.01092
+ 4.07250	+ 24.55737	+ 100.01013
+ 4.04077	+ 24.75000	+ 100.00909
+ 4.00927	+ 24.94409	+ 100.00778
+ 3.97802	+ 25.13964	+ 100.00620
+ 3.94702	+ 25.33691	+ 100.00534
+ 3.91625	+ 25.53564	+ 100.00421
+ 3.88574	+ 25.73583	+ 100.00283
+ 3.85546	+ 25.93774	+ 100.00215
+ 3.82543	+ 26.14111	+ 100.00124
+ 3.79565	+ 26.34619	+ 100.00103
+ 3.76611	+ 26.55273	+ 100.00060
+ 3.73681	+ 26.76098	+ 100.00089
+ 3.70776	+ 26.97094	+ 100.00189
+ 3.67895	+ 27.18237	+ 100.00272
+ 3.65039	+ 27.39550	+ 100.00430
+ 3.62207	+ 27.61025	+ 100.00652

TABLEAU V. 12

CONCLUSION.

Pour la commande directe des Machines Outils par calculateur industriel, les systèmes existant d'interpolation circulaire ou linéaire sont mal adaptés. Nous proposons dans cette étude un interpolateur hardware dont le fonctionnement est basé sur la résolution pour chaque axe commandé de l'équation de récurrence

$$X_k = 2 A \cdot X_{k-1} - X_{k-2}$$

qui permet, selon la valeur de A relative à chaque axe, de générer dans l'espace des droites, et dans le plan des sinusoides, des cercles, des ellipses, des exponentielles, des paraboles, des hyperboles.

La mise en oeuvre d'une telle récurrence nécessite une réalisation hardware simple et peu onéreuse, le dialogue avec le calculateur de commande est réduit à des appels prioritaires et au chargement des registres de l'interpolateur pour l'initialisation. Les erreurs dues aux calculs itératifs n'augmentent essentiellement que dans le cas des paraboles, des exponentielles et leurs combinaisons (hyperboles) ce qui réduit la longueur des arcs de courbes à générer, mais l'erreur reste cependant inférieure au micron pour des longueurs de l'ordre du mètre, correspondant à la dimension des déplacements possibles sur la majorité des Machines Outils.

Par contre, pour les sinusoides et les figures qui s'en déduisent, l'erreur n'est pas cumulative et le dimensionnement proposé permet de définir un cercle de 8 mètres de rayon au micron.

Le temps de calcul est très bref ce qui permet son utilisation en temps réel avec des vitesses d'avance largement supérieures aux vitesses couramment utilisées en usinage (10 mètres par minute).

Cet interpolateur est bien adapté pour l'usinage de droites et de cercles, avec correction de rayon d'outil. Pour les autres courbes, cependant, si les points appartenant aux figures géométriques elles-mêmes sont faciles à obtenir par récurrence, la génération de la courbe parallèle rigoureuse est impossible par cette méthode. Les corrections proposées débouchent sur une approximation du profil fini, qui peut être utile pour l'ébauche mais inutilisable pour la finition. La seule méthode valable de correction d'outil étant, à partir de deux points successifs calculés, d'en déduire la normale et le déport du rayon d'outil.

Les essais montrent la facilité de programmation de l'interpolateur et les résultats numériques vérifient que la précision du micron est bien obtenue.

Un tel système sera réalisé physiquement et utilisé sur le système CNC que développe le Centre Universitaire de Commande Numérique de NANCY.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. E. WILBURN - Future marriage of NC and computer control automation - Janvier 1966 - p. 78 - 83.
- [2] Computer to control NC machines - Automation - Février 1967.
Optimal contouring control system for digital applications.
- [3] L. EVANS - Paper presented at the CIRP - 3^d international Seminar on optimisation of manufacturing systems.
PISA - Italy 24-25 - June 1971.
- [4] J. PLAS - J. BLOMMAERT - A stepping motor drive assembly especially designed for CNC systems.
Paper presented at the XIII MTDR. Conference of Birmingham September 1972.
- [5] M. VERON - Méthode de simulation numérique des systèmes physiques par formulation récurrente déduite de la transformée en Z. Thèse de Docteur-Ingénieur présentée le 12 novembre 1970 à la Faculté des Sciences de Nancy - N° CNRS : AO 4859
- [6] M. VERON - J. -P. MUSSE - Génération numérique de courbes Mécanique - Matériaux - Electricité - N° 270-271 - Juin Juillet 1972 p. 16-19.
- [7] G. GANATTI - NC Machine Tools under direct computer control - Machinery and production Engineering - July 1969 , p. 2-9.
- [8] R. L. HATSCHEK - Computers take control at Chicago show Metal working production - septembre 1970 - p. 30-34.

- [9] M. VERON - Systemes de commande directe présentée à l'exposition de Chicago en septembre 1972. Exposé au séminaire R10 - ADEPA CUCN - Nancy - 1.12.72.
- [10] J. PLAS - Commande directe des Machines outils par petits calculateurs - Exposé au Séminaire R10 ADEPA CUCN Nancy - 1.12.72.
- [11] J. -P. MUSSE - "Etude d'un système d'aide à la programmation des machines outils à commande numérique par ordinateur industriel" Thèse de Docteur-Ingénieur présentée à la Faculté des Sciences de Nancy - Mars 1973 - N° CNRS AO 8185.
- [12] Laboratoire Alcatel - Commande numérique des machines outils
Commande continue de profil appliquée à une fraiseuse à banc.
Etude du calculateur - interpolateur - Rapp DGRST - Contrat n° 6500272 - Février 1967.
- [13] R. C. DORF - Les variables d'état dans l'analyse et la synthèse des systèmes de commande - DUNOD.
- [14] S. KUNTZMANN - Algèbre de Boole et Machines logiques - P. NASLIN - DUNOD - Paris 1967.
- [15] R. M. BURKLEY - Dynamic Model for contouring NC devices - W. B. BROADWELL - Annual meeting of technical conference - Numerical control society - Chicago.
- [16] DON DEILY - ten seconds in the life of a control computer - Annual Meeting of technical conference. Numerical control society - Chicago - 17-19 Avril 1972.

ANNEXE I : Solution de l'équation récurrente

$$X_k = 2 \cos \quad X_{k-1} - X_{k-2}$$

ANNEXE II : Solution avec second membre d'une équation récurrente du premier ordre.

ANNEXE III : Calcul de la matrice de transition.

ANNEXE IV : Calcul de X_k en fonction des CI.

ANNEXE V : Matrice de transition - Cas de la parabole.

ANNEXE VI : Solution avec second membre - Cas de la parabole.

ANNEXE VII : Solution de l'équation $X_k = 2 \operatorname{ch} \quad X_{k-1} - X_{k-2}$

ANNEXE VIII : Matrice de transition - Cas de l'exponentielle.

ANNEXE IX : Correction d'outil pour l'ellipse.

Solution de l'équation récurrente

$$X_k = 2 \cos \zeta \cdot X_{k-1} - X_{k-2} \quad (1)$$

Posons $X_k = KA^k$

en remplaçant dans l'équation (1) on obtient :

$$KA^k = 2 \cos \zeta KA^{k-1} - KA^{k-2}$$

en divisant par KA^{k-2} :

$$A^2 - 2 \cos \zeta A + 1 = 0$$

$$A_1 = \cos \zeta + j \sin \zeta$$

$$A_2 = \cos \zeta - j \sin \zeta$$

on en déduit :

$$X_k = K_1 [\cos k \zeta + j \sin k \zeta] + K_2 [\cos k \zeta - j \sin k \zeta]$$

ou
$$X_k = \sqrt{2 [K_1^2 + K_2^2]} \cos \left[k \zeta + \text{Arct} \left(\frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \right) \right]$$

en exprimant l'amplitude et la phase d'après les conditions initiales X_0 et X_1

$$X_0 = R \cos \varphi$$

$$X_1 = R \cos (\zeta + \varphi)$$

$$\varphi = \text{Arctg} \frac{X_0 \cos \zeta - X_1}{X_0 \sin \zeta}$$

$$R = \frac{X_0}{\cos \varphi}$$

Solution avec second membre d'une équation récurrente du premier ordre des conditions initiales, on déduit \underline{X}_1

$$\underline{X}_1 = A \underline{X}_0 + I \underline{V}_0 \quad (1)$$

de meme \underline{X}_2

$$\underline{X}_2 = A \underline{X}_1 + I \underline{V}_1 \quad (2)$$

en remplaçant \underline{X}_1 dans (2) par son expression de (1)

$$\underline{X}_2 = A \left[A \underline{X}_0 + I \underline{V}_0 \right] + I \underline{V}_1$$

$$\underline{X}_2 = A^2 \underline{X}_0 + A \underline{V}_0 + I \underline{V}_1$$

on généralise à \underline{X}_k

$$\underline{X}_k = A^k \underline{X}_0 + \sum_{\ell=0}^{\ell=k-2} A^{k-1-\ell} \cdot \underline{V}_\ell + I \underline{V}_{k-1}$$

Calcul de la matrice de transition.

La matrice $\underline{\underline{A}}$ a pour équation caractéristique

$$D [\lambda I - A] = 0$$

$$\text{où } \lambda^2 - 2 \lambda \cos \zeta + 1 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = e^{j\zeta} \\ \lambda_2 = e^{-j\zeta} \end{cases}$$

Or la matrice est solution de son équation caractéristique

$$\underline{\underline{A}}^2 = 2 \cos \zeta \underline{\underline{A}} - I$$

On en déduit que :

$$\underline{\underline{A}}^k = \alpha_1 \underline{\underline{A}} + \alpha_0 I \quad (\alpha)$$

où α_1 et α_0 sont des scalaires tels que :

$$\begin{aligned} (\lambda_1)^k &= e^{jk\zeta} = \alpha_0 + \alpha_1 e^{j\zeta} \\ (\lambda_2)^k &= e^{-jk\zeta} = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-j\zeta} \end{aligned}$$

De ce système d'équation on tire

$$\alpha_1 = \frac{\sin k \zeta}{\sin \zeta}$$

$$\alpha_0 = \frac{-\sin (k-1) \zeta}{\sin \zeta}$$

et d'après (α)

$$\underline{\underline{A}}^k = \frac{1}{\sin \zeta} \begin{bmatrix} -\sin (k-1) \zeta & \sin k \zeta \\ -\sin k \zeta & \sin (k+1) \zeta \end{bmatrix}$$

ANNEXE IV.

Calcul de X_k en fonction des conditions initiales.

La suite
$$X_k = A^k X_0 + \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-1-\ell} \cdot V_{\ell} + I V_{k-1}$$

s'écrit

$$\begin{matrix} X_k^1 \\ X_k^2 \end{matrix} = \frac{1}{\sin \zeta} \begin{bmatrix} -\sin(k-1)\zeta & \sin k\zeta \\ -\sin(k\zeta) & \sin(k+1)\zeta \end{bmatrix} \begin{matrix} X_0^1 \\ X_0^2 \end{matrix} +$$

$$\frac{1}{\sin \zeta} \begin{bmatrix} -\sin(k-2)\zeta & \sin(k-1)\zeta \\ -\sin(k-1)\zeta & \sin k\zeta \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \mathcal{E}_1 \end{matrix} + \frac{1}{\sin \zeta} \begin{bmatrix} -\sin(k-3)\zeta & \sin(k-2)\zeta \\ -\sin(k-2)\zeta & \sin(k-1)\zeta \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \mathcal{E}_2 \end{matrix}$$

$$+ \dots + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\cos \zeta \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \mathcal{E}_{k-1} \end{matrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \mathcal{E}_k \end{matrix}$$

avec $X_k^1 = X_k$ $X_0^1 = X_0$ $X_0^2 = X_1$ $V_k = \mathcal{E}_{k+1}$

on obtient :

$$X_k = \frac{1}{\sin \zeta} \left[-X_0 \sin(k-1)\zeta + X_1 \sin k\zeta \right] + \frac{1}{\sin \zeta} \sum_{\ell=1}^{k-1} \sin(k-\ell)\zeta \cdot \mathcal{E}_\ell$$

Matrice de transition - Cas de la parabole.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique de la matrice a une racine double

$$\lambda = 1$$

La matrice est solution de

$$A^2 = -2A - 1$$

donc

$$\Phi(k) = \underline{\underline{A}}^k = \alpha_0 \underline{\underline{I}} + \alpha_1 \underline{\underline{A}} \quad (1)$$

Calculons α_0 et α_1 :

$$(\lambda)^k = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$\lambda = 1$$

$$1 = \alpha_0 + \alpha_1$$

Comme λ est racine double, on utilise la relation

$$\frac{d(\lambda)^k}{d\lambda} = \frac{d[\alpha_0 + \alpha_1 \lambda]}{d\lambda}$$

donc

$$\alpha_1 = k \lambda^{k-1}$$

On en déduit :

$$\alpha_1 = k$$

$$\alpha_0 = 1 - k$$

D'après (1)

$$\Phi(kI) = \begin{bmatrix} 1-k & k \\ -k & 1+k \end{bmatrix}$$

ANNEXE VI.

Solution avec second membre - cas de la parabole.

La matrice

$$\sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} \Phi(\ell) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} A^k$$

a pour éléments :

$$\begin{bmatrix} \sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} 1-\ell & \sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} \ell \\ \sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} \ell & \sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} 1+\ell \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} \ell = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} 1-\ell = \frac{k(-k+3)}{2}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} 1+\ell = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\ell=k-1} \Phi(\ell) = \begin{bmatrix} \frac{k(-k+3)}{2} & \frac{k(k-1)}{2} \\ \frac{k(1-k)}{2} & \frac{k(k+1)}{2} \end{bmatrix}$$

Solution de l'équation.

$$(1) \quad X_{(k+2)} - 2 \operatorname{ch} \zeta X_{(k+1)} + X_k = 0$$

La méthode utilisée est identique à celle de la résolution de l'opération $X_{k+2} - 2 \cos \zeta X_{(k+1)} + X_k = 0$ (annexe I)

En posant $X^k = A^k$ dans l'équation (1) on obtient :

$$A^2 - 2 \operatorname{ch} \zeta A + 1 = 0$$

On en déduit que

$$(2) \quad X_k = \alpha e^{k\zeta} + \beta e^{-k\zeta}$$

$$(3) \text{ avec } X_0 = \alpha + \beta$$

$$(4) \text{ et } X_1 = \alpha e^{\zeta} + \beta e^{-\zeta}$$

On résoud ce système (3) (4), on obtient :

$$\alpha_1 = \frac{X_1 - e^{-\zeta} X_0}{2 \operatorname{sh} \zeta}$$

$$\beta = \frac{e^{\zeta} X_0 - X_1}{2 \operatorname{sh} \zeta}$$

Calcul de la matrice de transition. Cas de l'exponentielle.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \operatorname{ch} \zeta \end{bmatrix}$$

La méthode utilisée est la même que celle utilisée dans l'annexe III: une équation caractéristique

$$\lambda^2 - 2 \lambda \operatorname{ch} \zeta + 1 = 0$$

a pour solutions

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{\zeta} \\ \lambda_2 &= e^{-\zeta} \end{aligned}$$

On sait que

$$\underline{A}^k = \alpha_1 \underline{A} + \alpha_0 \underline{I}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1^k &= e^{k\zeta} = \alpha_0 + \alpha_1 e^{\zeta} \\ \lambda_2^k &= e^{-k\zeta} = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\zeta} \end{aligned}$$

De ce système d'équation, on déduit

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{\operatorname{sh}(k-1)\zeta}{\operatorname{sh} \zeta} \\ \alpha_1 &= \frac{\operatorname{sh} \zeta \cdot k}{\operatorname{sh} \zeta} \end{aligned}$$

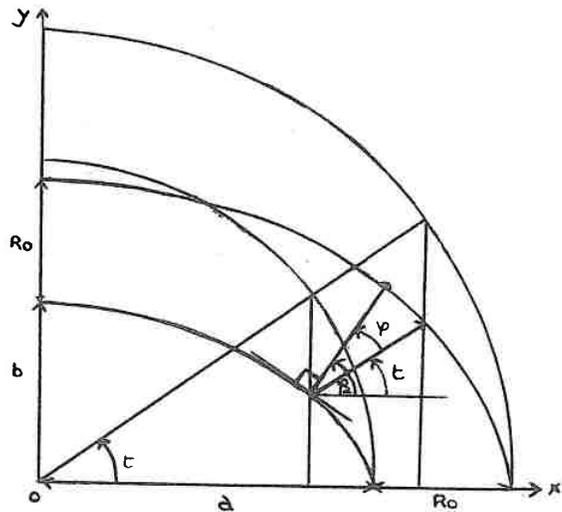
et

$$\underline{A}^k = \frac{1}{\operatorname{sh} \zeta} \begin{bmatrix} -\operatorname{sh}(k-1)\zeta & + \operatorname{sh} k \zeta \\ -\operatorname{sh} k \zeta & \operatorname{sh}(k+1)\zeta \end{bmatrix}$$

ANNEXE IX.

Correction d'outil pour l'ellipse

$$\begin{cases} x = a \cos t & \dot{x} = -a \sin t \\ y = b \sin t & \dot{y} = b \cos t \end{cases}$$

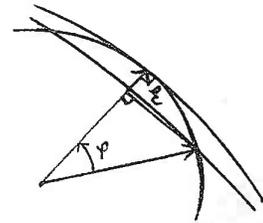


$$E = R_o \left[1 - \cos \varphi \right]$$

$$\varphi_2 = \text{Arctg} \left(\frac{a}{b} \text{tgt} \right)$$

$$E = R_o \left[1 - \cos \left(t - \text{Arctg} \left(\frac{a}{b} \text{tgt} \right) \right) \right]$$

$$\text{avec } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$



L'erreur E sera maximale si $t - \text{Arctg} \left(\frac{a}{b} \text{tgt} \right)$ est maximal

$$\text{donc } \text{tgt} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

On en déduit

$$E_{\max} = R_o \left[1 - \sin \left(2 \text{Arctg} \sqrt{\frac{a}{b}} \right) \right]$$

NOM DE L'ETUDIANT : RICHARD Jacques

Nature de la thèse : Doctorat de Spécialité en AUTOMATIQUE

Vu, Approuvé

et permis d'imprimer

Nancy, le 3 Mars 1977

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY

J. R. HELLUY