Sc
N

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

Sc N 69
63

ETUDE DES RAMIFICATIONS ET DES BILANGAGES

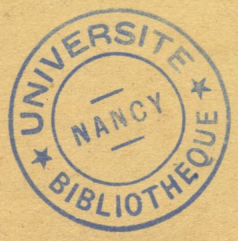
THESE

présentée pour l'obtention du

DOCTORAT DE SPECIALITE MATHEMATIQUES

par

Alain QUERE

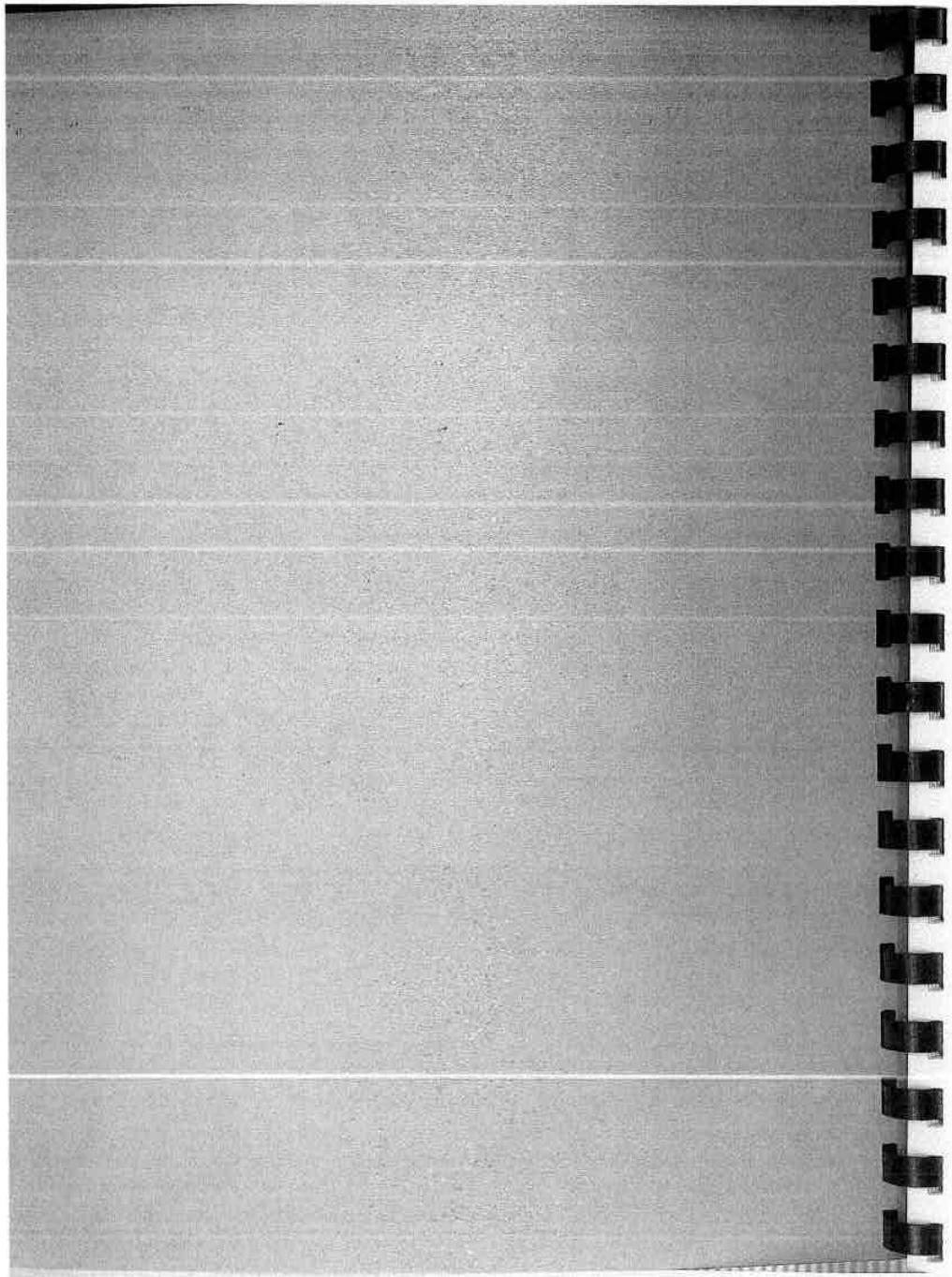


Soutenue le 3 juillet 1969 devant le jury :

M.J. LEGRAS Président

M.C. PAIR
M.C. GILORMINI Examinateurs

69
63



UNIVERSITE de NANCY FACULTE des SCIENCES

ETUDE DES RAMIFICATIONS ET DES BILANGAGES

---

par Alain QUERE.

Université de Nancy — Faculté des Sciences

ANNEE SCOLAIRE 1968/69

DOYEN : M. AUBRY
ASSESSEUR : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JOLY - LAPORTE - EICHBORN - CAPELLE - GODEMENT - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMAN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHL.

Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET - Mle MATHIEU.

PROFESSEURS

MM.	ROUBAULT	Géologie		GAYET	Physiologie
	VEILLET	Biologie animale		HADNI	Physique
	BARRIOL	Chimie théorique	*	BASTICK	Chimie
	BIZETTE	Physique		DUCHAUFOUR	Pédologie
	GUILLIEN	Electronique		GARNIER	Agronomie
	LEGRAS	Mécanique rationnelle		NEEL	Chimie organique industrielle
	BOLFA	Minéralogie		BERNARD	Géologie appliquée
	NICLAUSE	Chimie	*	CHAMPIER	Physique
	FAIVRE	Physique appliquée	*	GAY	Chimie biologique
	AUBRY	Chimie minérale		STEPHAN	Zoologie
	COPPENS	Radiogéologie	*	CONDE	Zoologie
	DUVAL	Chimie	*	WERNER	Botanique
	FRUHLING	Physique		EYMARD	Calcul différentiel et intégral
	HILLY	Géologie			
	LE GOFF	Génie chimique		LEVISALLES	Chimie organique
	SUHNER	Physique expérimentale		FELDEN	Physique
	CHAPON	Chimie biologique	*	GOSSE	Mécanique physique
	HEROLD	Chimie minérale industrielle	*	DAVOINE	Physique (ENSMIN)
	SCHWARTZ B.	Exploitation minière		HORN	Physique (1° cycle)
	MALAPRADE	Chimie	*	ROCCI	Géologie
*	MANGENOT	Botanique	* Mme	LUMER	Mathématiques
				DELPUECH	Chimie physique

N...	Chimie biologique
N...	Mécanique appliquée
N...	Analyse supérieure
N...	Méthodes mathématiques de la physique
N...	Mécanique rationnelle

(*) Professeur titulaire à titre personnel

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme	BASTICK	Chimie P. C. Epinal	MM.	FLECHON	Physique P. C.
MM.	GUDEFIN	Physique	Mle	HUET	Mathématiques C. B. G.
	VUILLAUME	Psychophysiologie		VIGNES	Métallurgie
	FRENTZ	Biologie animale		BALESDENT	Thermodynamique, Chimie appliquée (ENSIC
	MARI	Chimie (ISIN)		BLAZY	Minéralogie appliquée (ENSG)
	AUROUZE	Géologie		JANOT	Physique P. C. Epinal
	DEVIOT	Physique du solide		CACHAN	Entomologie appliquée (ENSA)

MAITRES DE CONFERENCES

MM	JACQUIN	Pédologie et chimie agricoles	MM.	BAVEREZ	Chimie (ENSIC)
	MAINARD	Physique M. P.		CHAMBON	Exploitation minière (Mines)
	MARTIN	Chimie P. C.		HUSSON	Physique (ENSEM)
	PAULMIER	Mécanique expérimentale		GERL	Physique
	PROTAS	Minéralogie		WEISSLINGER	Physique
	JOZEFOWICZ	Physico-chimie		ROQUES	Chimie minérale
	JURAIN	Géologie C. B. G.		PERRIER	Mathématiques
	RIVAIL	Chimie appliquée (CUCES)		N...	Mécanique des fluides (ISIN)
	VILLERMAUX	Génie chimique		N...	Mécanique (ISIN)
	METCHE	Biochimie appliquée (Brasserie)		N...	Mathématiques
				N...	Mathématiques P. C.
	PAIR	Mathématiques appliquées		N...	Mathématiques C. B. G.
	BAUMANN	Physique 1° cycle		N...	Physiologie animale
	DURAND	Physique		N...	Mathématiques M. P.
	GRANGE	Physique (ISIN)			
	DEPAIX	Probabilités et statistiques			

CHARGES D'ENSEIGNEMENTS

MM. AMARIGLIO, COEURE, DAVRAINVILLE, GILORMINI, GIRARDEAU, HILY, MAURIN, NOVERRAZ, OVAERT, RUYER, WEBER.

C'est un grand plaisir pour moi de remercier :

Monsieur le Professeur J. LEGRAS, Directeur de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique qui me fait l'honneur de présider le Jury ;

Monsieur le Professeur C. PAIR. Il sait toute ma gratitude : c'est à lui que je dois non seulement l'idée de ce travail mais aussi la plupart des résultats qui y sont présentés.

Monsieur C. GILORMINI, Maître de Conférence, qui a accepté, avec gentillesse, de faire partie du Jury.

Je tiens également à remercier Melle D. MARCHAND, qui a pris en charge la tâche, souvent ingrate, de réaliser matériellement ce travail ; ainsi que toute l'équipe de l'Institut de Calcul Automatique.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE 0 : RAPPELS SUR LES LANGAGES REGULIERS ET SUR LES LANGAGES A CONTEXTE LIBRE.

0.1 Langages réguliers.
0.2 Langages de Chomsky ; Grammaires.

CHAPITRE 1 : RAMIFICATIONS - BINOÏDE LIBRE - BILANGAGES.

1.1 Définition des ramifications sur un ensemble V.
1.2 Etude algébrique de $\hat{V}$.
1.3 Propriétés fondamentales de $\hat{V}$.
1.4 Bilangages grammaticaux.
1.5 Prolongement de la loi externe, dioïde.

CHAPITRE 2 : FONCTIONS RECURSIVES PRIMITIVES DE RAMIFICATIONS.

2.1 Définitions préliminaires.
2.2 Propriétés immédiates des fonctions récursives primitives.
2.3 Exemples de fonctions récursives primitives.
2.4 Remarques.
2.5 Prédicats.
2.6 Etude du prédicat d'égalité.
2.7 Exemple de prédicat récursif primitif.
2.8 Comparaison avec les fonctions récursives primitives d'entiers.
2.9 Etude d'autres schémas de récurrence.

CHAPITRE 3 : DEFINITION ET ETUDE DES BILANGAGES REGULIERS.

3.1 Définition des bilangages réguliers.
3.2 Exemples de bilangages réguliers.
3.3 Propriétés élémentaires des bilangages réguliers.
3.4 Stabilité des bilangages réguliers relativement à plusieurs opérations.
3.5 Généralisation du théorème de Kleene pour les bilangages réguliers.

CHAPITRE 4 : BILANGAGES ALGEBRIQUES - BIGRAMMAIRES.

4.1 Fonctions polynômiales.

4.2 Systèmes d'équations.

4.3 Bigrammaires.

4.4 Comparaison des systèmes et des bigrammaires.

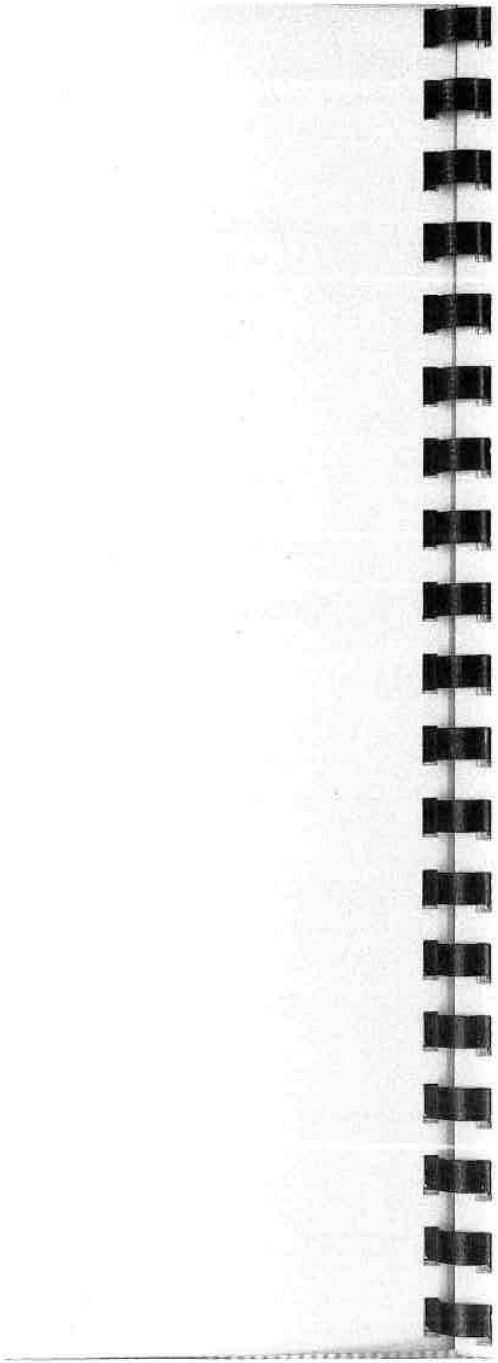
4.5 Bilangages grammaticaux et algébriques.

4.6 Propriétés des bilangages algébriques et des bilangages bigrammaticaux.

4.7 Bilangages bigrammaticaux et bilangages réguliers.

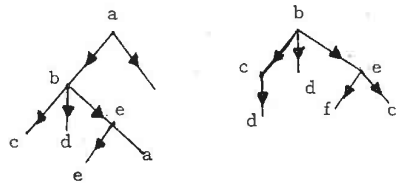
CONCLUSION

REFERENCES



INTRODUCTION

Dans de nombreux domaines du traitement de l'information on emploie des "structures arborescentes", avec éventuellement plusieurs racines, souvent orientées "de gauche à droite" et dont chaque nœud est étiqueté par un nom appartenant à un certain alphabet (Figure 1).



Ramification

Figure 1

En particulier l'étude des langages conduit à considérer des ensembles de telles structures (souvent appelées alors "marqueurs de phrase") comme de véritables "langages à deux dimensions", que nous appellerons ici des bilangages (cf. par exemple BAR-HILLEL, PERLES et SHAMIR (1961) - GINSBURG (1966) - LUCAS (1967)).

Dans l'étude qui suit, après un rappel succinct des principales propriétés des langages réguliers et des langages à contexte libre (Chapitre 0, le lecteur pourra consulter GROSS et LENTIN (1967)), nous présentons une formalisation (PAIR, 2) qui permet de traiter algébriquement ces structures arborescentes nommées ramifications (chap. 1). La notion de calculabilité sur les ramifications est ensuite précisée par l'étude des fonctions récursives primitives de ramifications (chap. 2). Puis les langages réguliers et les langages à contexte libre sont généralisés en bilangages réguliers (chap. 3) et en bilangages algébriques (chap. 4) ; en particulier les bilangages réguliers sont comparés à ceux qui sont engendrés par des grammaires.

CHAPITRE 0

RAPPELS SUR LES LANGAGES REGULIERS ET SUR LES LANGAGES A CONTEXTE-LIBRE

Dans tout, ce qui suit V désigne un ensemble, appelé vocabulaire, qui est choisi fini, sauf mention du contraire : en effet certaines propriétés subsistent pour V infini (voir à ce sujet les introductions des différents chapitres). V^* est le monoïde libre engendré par V, c'est-à-dire l'ensemble des suites finies d'éléments de V (ou mots sur V) y compris le mot vide noté $\wedge$; un langage sur V est une partie de V^*. La loi de concaténation sur V^* est notée additivement ; toutefois, pour alléger l'écriture, il nous arrivera d'omettre le signe + ; ainsi pour α, α' dans V^*, $\alpha\alpha'$ désigne $\alpha + \alpha'$.

0.1 LANGAGES REGULIERS.

0.1.1. Définition et théorème :

Etant donné un ensemble V, un langage K sur V est appelé langage régulier ou langage de Kleene s'il satisfait à l'une des deux conditions équivalentes :

(a) il existe un monoïde fini M, une partie M' de M et un homomorphisme de monoïdes μ de V^* dans M tels que $K = \mu^{-1}(M')$.

(b) il existe un automate fini acceptant K.

On trouvera une définition des automates finis dans RABIN-SCOTT (1959). La notion d'automate fini peut être formalisée de la manière suivante : appelons mémoire sur V un ensemble S muni d'une loi de composition externe à opérateurs dans V notée $\circ$:

$$(s, a) \in S \times V \longmapsto s \circ a \in S.$$

Par exemple V^* est une mémoire sur V en posant, pour $\alpha \in V^*$ et $a \in V$:

$$\alpha \circ a = \alpha a.$$

Un homomorphisme de mémoires de V^* dans S, mémoire sur V, est une application ζ de V^* dans S telle que :

$$\zeta(\alpha \circ a) = \zeta(\alpha) \circ a.$$

Dans ces conditions, (b) est équivalent à l'assertion suivante :

(c) il existe une mémoire finie S, une partie S' de S et un homomorphisme de mémoire ζ de V^* dans S tels que $K = \zeta^{-1}(S')$.

Les assertions (a) et (c) restent équivalentes que V soit fini ou infini.

0.1.2. Langage local:

Etant donné deux sous ensembles D et F de V et un sous-esemble γ de V^2, l'ensemble des mots non vides $a_1 \ldots a_n$ ($a_i \in V$) tels que

$a_1 \in D$, $a_n \in F$ et $(a_i, a_{i+1}) \in \mathcal{T}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$

est un langage régulier. On l'appelle langage local (ou K-langage standard) (GROSS et LENTIN) ; il sera noté $[D, \mathcal{T}, F]$. D sera appelé ensemble des initiales, F ensemble des finales et $\mathcal{T}$ ensemble des transitions.

Les langages réguliers sur un vocabulaire fini sont les transformés des langages locaux par un homomorphisme entre monoïdes libres.

Pour les langages réguliers qui ne contiennent pas le mot vide, cet homomorphisme peut toujours être une transcription, c'est-à-dire un homomorphisme qui transforme toute lettre en une lettre, autrement dit tout mot en un mot de longueur égale. Il en résulte que, pour prouver une propriété sur les langages réguliers il suffit de s'assurer qu'elle est vraie sur les langages locaux et qu'elle est conservée par transcription. C'est en s'inspirant de cette méthode, par exemple, qu'on peut prouver le théorème suivant :

0.1.3. Théorème de Kleene:

L'ensemble des langages réguliers sur un vocabulaire V fini est le plus petit ensemble $\mathcal{H}$ de langages sur V tel que ;

a) $\mathcal{H}$ contient les langages finis

b) Si K et K' appartiennent à $\mathcal{H}$, $K \cup K'$, $K + K'$ et $\star K$ appartiennent à $\mathcal{H}$ (1).

---

(1) Notations : $K + K' = \{\alpha + \alpha' \mid \alpha \in K, \alpha' \in K'\}$; $\star K = \bigcup_{p=0}^{+\infty} p.K$ avec :

$o.K = \{\wedge\}$ et, pour $p \geq 0$ $(p+1).K = p.K + K$.

0.2 LANGAGES DE CHOMSKY ; GRAMMAIRES. (CHOMSKY, GROSS et LENTIN, GINSBURG).

0.2.1. Définition :

Soit un vocabulaire fini T. Considérons un système (S) de n équations à n inconnues $A_1, A_2, \ldots, A_n$ à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{P}(T^* \setminus \{\wedge\})$ des parties de $T^* \setminus \{\wedge\}$:

(S) pour $i=1, \ldots, n$, $A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} B_{ij}^1 \ldots B_{ij}^{q_{ij}}$ avec $B_{ij}^k \in \{A_1, \ldots, A_n\} \cup T$.

(k est un indice).

Si (S) a une solution unique, chaque langage du n-uplet solution est appelé langage à contexte libre.

Remarquons que, d'après cette définition, les langages à contexte libre ne contiennent pas le mot vide.

0.2.2. Définition :

Une grammaire de Chomsky est un quadruplet $G = (T, N, ::=, X)$ où

- T est un ensemble fini non vide appelé vocabulaire terminal ;
- N est un ensemble fini non vide, disjoint de T appelé vocabulaire auxiliaire ou non terminal ;
- ::= est une relation binaire entre N et V^*, telle que le nombre des couples en relation (ou règles) soit fini.
- X est un élément distingué dans N, appelé axiome de G.

Le langage engendré par une grammaire de Chomsky G est l'ensemble des mots $\alpha \in T^*$ tels que

$$X \overset{*}{\rightarrowtail} \alpha$$

où la relation $\overset{*}{\rightarrowtail}$ ("dérive de") est la fermeture transitive de la relation $\rightarrowtail$ ("se réécrit") qui est définie par :

0.2.2.

$(\forall\, \alpha,\ \beta \in V^{*})\quad \alpha \succ\!\!- \beta \Leftrightarrow (\exists\, A \in N,\ \lambda \in V^{*},\ \lambda' \in V^{*},\ \gamma \in V^{*})$

$(\alpha = \lambda\, A\, \lambda'$ et $\beta = \lambda\, \gamma\, \lambda'$ et $A ::= \gamma)$.

Les langages engendrés par une grammaire de Chomsky sont appelés langages de Chomsky.

En comparant les deux définition précédentes on peut prouver le résultat suivant (GINSBURG) :

0.2.3. Théorème :

L'ensemble des langages de Chomsky sur T est formé des langages à contexte libre et des langages à contexte libre réunis au mot vide.

Les grammaires définies en 1.4.1. généralisent les grammaires de Chomsky : l'ensemble des axiomes et l'ensemble des mots α tels que $A ::= \alpha$ sont des langages réguliers qui peuvent être infinis ; de plus, par commodité, on prolonge la relation ::= par $a ::= \wedge$ pour tout $a \in T$.

Rappelons enfin qu'un homomorphisme de monoïdes libres transforme un langage de Chomsky en un langage de Chomsky (BAR-HILLEL, PERLES et SHAMIR).

CHAPITRE 1

RAMIFICATIONS - BINOIDE LIBRE - BILANGAGES

Ce chapitre présente une définition des ramifications : l'ensemble des ramifications sur un alphabet V, noté $\hat{V}$, est construit à partir de certains graphes (arborescences) (1.1) ; puis cet ensemble est étudié d'un point de vue algébrique : il est muni de deux lois, l'une interne, l'autre externe à opérateurs dans V, qui en font ce que nous appelons un binoïde (1.2). Il est possible d'énoncer un principe de récurrence sur $\hat{V}$, ce résultat sera très utilisé dans les démonstrations ultérieures ; l'étude des homomorphismes de binoïdes conduit à nommer $\hat{V}$ binoïde libre sur V (1.3). Les applications dans $\hat{V}$ sont aisément définies par récurrence : nous en donnons quelques exemples qui sont appliqués à la définition des bilangages grammaticaux ; cette dernière définition donne un sens précis à la notion de "marqueur de phrase" relative aux grammaires de Chomsky (1.4). Dans la dernière partie de ce chapitre $\hat{V}$ est muni d'une autre structure comportant deux lois internes (structure de dioïde) ce qui permet de définir des "homomorphismes" entre ensembles de ramifications sur des vocabulaires distincts.

Dans ce chapitre, sauf dans le paragraphe 1.4, il n'est pas nécessaire de supposer V fini.

La définition du binoïde libre $\hat{V}$ qui est présentée ici, a été énoncée par Monsieur PAIR (PAIR, 2) qui en a également (PAIR, 4) donné une définition axiomatique et indiqué d'autres résultats, non repris ici, se rapportant à l'analyse syntaxique.

1.1. DEFINITION DES RAMIFICATIONS SUR UN ENSEMBLE V.

1.1.1. Arborescence (BERGE):

On appelle arborescence un graphe fini sans circuit tel que :

a) il existe un point v qui n'est extrémité d'aucun arc ;

b) tout point $x \neq v$ est l'extrémité d'un arc unique.

v s'appelle la racine de l'arborescence.

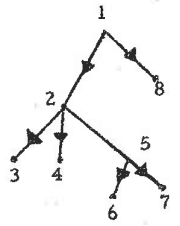


Figure 1 : Arborescence de racine 1

1.1.2. Orientation d'une arborescence :

Une orientation d'une arborescence (E, Γ) [1] est un ordre partiel O dans l'ensemble E tel que :

a) les restrictions de O à chacun des ensembles $\Gamma(x)$, $(x \in E)$ sont des ordres totaux ;

b) si $y \in \Gamma(x)$ et $z \notin \Gamma(x)$, y et z ne sont pas comparables par la relation O.

Un triplet (E, Γ, O) où (E, Γ) est une arborescence et O une de ses orientations s'appelle arborescence orientée.

Soient deux arborescences orientées (E, Γ, O) et (E', Γ', O') ; un isomorphisme de la première sur la deuxième est une bijection h de E sur E'

---

[1] Rappelons qu'un graphe est un couple (E, Γ) formé d'un ensemble E (ensemble des points du graphe) et d'une relation binaire Γ dans E ; on note $\Gamma(x)$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $x \Gamma y$.

telle que :

$(\forall x, y \in E)\ [(x\ \Gamma\ y \Leftrightarrow h(x)\ \Gamma'\ h(y))$ et $(x O y \Leftrightarrow h(x)\ O'\ h(y))]$

1.1.3. Pseudo-arborescence sur un ensemble V :

Etiqueter les points d'une arborescence par des éléments d'un ensemble V revient à définir une application de l'ensemble des points de l'arborescence dans V. Mais il est souhaitable que deux arborescences orientées isomorphes, dont les points qui se correspondent dans l'isomorphisme ont même étiquette, déterminent la même ramification. Aussi sommes-nous conduits à la définition suivante :

Soit un ensemble V. Dans l'ensemble des couples (I, f) formés par une arborescence orientée I dont les points sont des entiers, et une application f de l'ensemble des points de I dans V, introduisons la relation d'équivalence :

$(I, f) \sim (I', f') \Leftrightarrow$ il existe un isomophisme h de I sur I' tel que $f = f' \circ h$. (1)

Une pseudo-arborescence sur V est une classe de cette équivalence.

Elle pourra être représentée par l'un de ses couples (I, f). On appelle taille de cette pseudo-arborescence le nombre des points de l'arborescence I ; pour chaque $a \in V$, on appelle nombre d'occurences de a dans la pseudo-arborescence le nombre de points x de I tels que $f(x) = a$: la taille est la somme des nombres d'occurrences des divers éléments de V.

Une pseudo-arborescence de taille 1 sera identifiée à l'unique élément de V qui y possède une occurrence. Ainsi l'ensemble V est contenu dans l'ensemble des pseudo-arborescences sur lui-même.

L'ensemble des pseudo-arborescences sur V sera noté $\mathcal{A}(V)$.

(1) Le signe $\circ$ désigne la composition des applications.

1.1.4. Ramifications sur un ensemble V :

Nous appellerons ramification sur V toute suite finie de pseudo-arborescences sur V. L'ensemble des ramifications sur V, c'est à-dire le monoïde libre déduit de l'ensemble des pseudo-arborescences sur V, sera noté $\hat{V}$. La loi de composition de ce monoïde sera appelée somme et notée +; l'élément neutre de cette loi sera nommée ramification vide et noté $\wedge$.

La figure 2 schématise deux ramifications r' et r'' et leur somme r' + r''

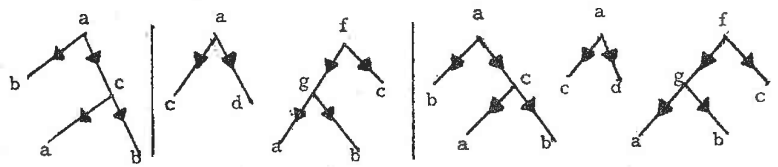


Figure 2

Par définition :

- la longueur d'une ramification est le nombre des pseudo-arborescences qui la constituent ;
- la taille d'une ramification est la somme des tailles des pseudo-arborescences qui la constituent ; dans la suite la taille de $r \in \hat{V}$ sera notée $|r|$.
- le nombre d'occurrences de $a \in V$ dans une ramification est la somme des nombres d'occurrences de a dans les pseudo-arborescences qui la constituent.

De même qu'on appelait langage sur V toute partie de V^*, on appellera bilangage sur V toute partie de $\hat{V}$. Comme V est inclus dans $\mathcal{A}(V)$, V^* est inclus dans $\hat{V}$ et tout langage est un bilangage ; en général, nous

noterons aussi + la concaténation dans V^* (mais, il nous arrivera aussi d'omettre le signe + dans ce cas ; ainsi pour a, b ∈ V, "a b a" signifie "a + b + a").

La somme et la somme itérée (ou opération étoile) sur les langages sont prolongés aux bilangages de la façon suivante :

si L et L' sont deux bilangages sur V

$$L + L' = \{r + r' \mid r \in L,\ r' \in L'\}$$

est appelé somme de L et L' ; en posant $o.L = \{\wedge\}$ et $(p+1).L = p.L + L$ pour $p \geq 0$, on peut définir

$$* L = \bigcup_{p=0}^{+\infty} p.L$$

appelée somme itérée de L.

La définition des ramifications sur V est relativement complexe. La théorie algébrique qui suit permettra d'engendrer les ramifications de $\hat{V}$ à partir de V grâce à la somme et à une loi de composition externe, et ensuite de ne plus guère employer explicitement la définition.

1.2 ETUDE ALGEBRIQUE DE $\hat{V}$.

1.2.1. Enracinement :

Ce sera une loi de composition externe à opérateurs dans l'ensemble V, notée χ avec opérateurs à gauche ; intuitivement, la ramification a χ r est la pseudo-arborescence obtenue en adjoignant à r une racine d'étiquette a. La figure 3 présente b χ r' et a χ r'', r' et r'' étant prises sur la figure 2

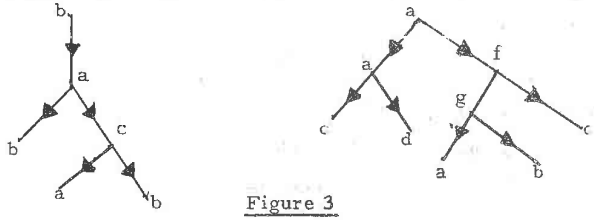


Figure 3

Soit une ramification r sur V, et un élément a de V.

Si r est la ramification vide, a χ r = a.

Supposons que r est une suite de pseudo-arborescences $(E_i, \Gamma_i, O_i, f_i)$, pour i = 1, 2, ..., n ; on peut toujours supposer les ensembles E_i deux à deux disjoints ; désignons par v_i la racine de (E_i, Γ_i); a χ r est la pseudo-arborescence (E, Γ, O, f) définie par :

- E est la réunion des E_i et d'un élément v n'appartenant à aucun E_i ;
- $x \Gamma y \Leftrightarrow (\exists\ i)\ (x \Gamma_i y)$ ou $(x = v$ et $(\exists\ i)\ (y = v_i))$;
- $x O y \Leftrightarrow (\exists\ i)\ (x O_i y)$ ou $((\exists\ i, j)\ (i \leq j$ et $x = v_i$ et $y = v_j))$;
- $f(x) = f_i(x)$ si $x \in E_i$, $f(v) = a$.

On voit aisément que a χ r est bien une pseudo-arborescence et que réciproquement :

1.2.2. Proposition :

Pour toute pseudo-arborescence s sur V, il existe un élément a de V et un seul, une ramification r sur V et une seule, tels que s = a χ r.

Si L est un bilangage on notera a χ L le bilangage $\{a \chi r \mid r \in L\}$ et, pour $E \subset V$, E χ L désigne le bilangage $\{a \chi r \mid a \in E,\ r \in L\}$.

1.2.3. Binoïde sur un ensemble V :

On appelle binoïde sur un ensemble V un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, admettant un élément neutre et d'une loi de composition externe à opérateurs dans V. $\hat{V}$ est donc un binoïde sur V.

Dans la suite les deux lois d'un binoïde sur V seront, en général, notée + et χ et nous conviendrons, pour réduire le nombre des parenthèses, de préserver la priorité habituelle de la loi χ sur la loi + ; l'élément neutre sera noté e, sauf pour $\hat{V}$ dont l'élément neutre est ∧.

De même que pour les structures algébriques classiques, on définit un sous-binoïde de $\mathfrak{B}$ comme une partie $\mathfrak{B}_0$ de $\mathfrak{B}$ qui contient e et qui est stable pour + et χ (si $r \in \mathfrak{B}_0$, $s \in \mathfrak{B}_0$, $a \in V$, alors $r + s \in \mathfrak{B}_0$ et $a \chi r \in \mathfrak{B}_0$).

Si $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ sont deux binoïdes sur le même ensemble V, un homomorphisme de binoïdes (ou, simplement, homomorphisme) de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}'$ est une application ψ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}'$, telle que, pour r et s dans $\mathfrak{B}$ et a dans V :

$$\psi(e) = e, \quad \psi(r + s) = \psi(r) + \psi(s), \quad \psi(a \chi r) = a \chi \psi(r).$$

1.3 PROPRIETES FONDAMENTALES DE $\hat{V}$.

De la définition des ramifications comme suites de pseudo-arborescences et de la proposition 1.2.2 , il résulte immédiatement :

1.3.1. Proposition :

Pour tout $r \in \hat{V}$, non vide, il existe $a \in V$, $r' \in \hat{V}$, $r'' \in \hat{V}$ uniques tels que

$$r = r' + a \chi r''$$

On en déduit un principe de récurrence dans $\hat{V}$.

1.3.2. Principe de récurrence :

Soit ρ un prédicat tel que :

a) $\rho(\wedge)$ soit vrai,

b) $(\forall r, s \in \hat{V})\ \rho(r)$ et $\rho(s) \Rightarrow (\forall a \in V)\ \rho(r + a \chi s)$;

alors $\rho(r)$ est vrai pour tout $r \in \hat{V}$.

La démonstration est immédiate par récurrence sur la taille d'une ramification, grâce à la proposition 1.3.1. ; ce principe de récurrence peut aussi être formulé de la façon suivante :

Soit ρ un prédicat tel que :

a) $\rho(\wedge)$ soit vrai

b) $(\forall r \in \hat{V},\ u \in \mathcal{A}(V))\ (\rho(r)$ et $\rho(u) \Rightarrow \rho(r + u))$

c) $(\forall r \in \hat{V})\ (\forall a \in V)\ (\rho(r) \Rightarrow \rho(a \chi r))$;

alors, $\rho(r)$ est vrai pour tout $r \in \hat{V}$.

Soit $\mathfrak{B}$ un sous-binoïde de $\hat{V}$; en utilisant le principe de récurrence, on voit que toute ramification sur V appartient à $\mathfrak{B}$, autrement dit que $\mathfrak{B} = \hat{V}$: $\hat{V}$ ne contient aucun sous-binoïde autre que lui-même. En particulier, l'ensemble des combinaisons finies, par + et χ, d'éléments de V, qui est un sous-binoïde de $\hat{V}$, est égal à $\hat{V}$: toute ramification non vide sur V est une combinaison finie par + et χ, d'éléments de V.

Exemples : Pour les ramifications de la figure 2 :

$r' = a \chi (b + c \chi a + b)$,

$r'' = a \chi (c + d) + f \chi (g \chi (a + b) + c)$.

1.3.3. Définition par récurrence des applications de $\hat{V}$ dans un ensemble E :

Soient un ensemble E, un élément e de E, deux applications f_1 de $\hat{V} \times \mathcal{A}(V) \times E^2$ dans E et f_2 de $V \times \hat{V} \times E$ dans E. Il existe une application λ et une seule, de $\hat{V}$ dans E, telle que :

a) $\lambda(\wedge) = e$

b) $(\forall r \in \hat{V})\ (\forall u \in \mathcal{A}(V))\ [\lambda(r + u) = f_1(r, u, \lambda(r), \lambda(u))]$

c) $(\forall a \in V)\ (\forall r \in \hat{V})\ \ [\lambda(a \chi r) = f_2(a, r, \lambda(r))]$.

ou encore :

Soient un ensemble E, un élément e de E et, pour tout $a \in V$, une application g_a de $\hat{V}^2 \times E^2$ dans E. Il existe une application f de $\hat{V}$ dans E et une seule, telle que :

a) $f(\wedge) = e$

b) $(\forall a \in V,\ r, s \in \hat{V})\ f(r + a \chi s) = g_a(r, s, f(r), f(s))$.

1.3.4. Théorème :

Pour tout binoïde $\mathfrak{B}$ sur V, il existe un homomorphisme de binoïdes et un seul de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$.

Si ψ est un homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$, ψ vérifie :

(1) $\psi(\wedge) = e$; $(\forall r, s \in \hat{V})\ \psi(r+s) = \psi(r) + \psi(s)$; $(\forall a \in V,\ r \in \hat{V})\ \psi(a \times r) = a \times \psi(r)$;

et donc, nécessairement :

(2) $\psi(\wedge) = e$; $(\forall r \in \hat{V},\ u \in \mathcal{A}(V))\ \psi(r+u) = \psi(r) + \psi(u)$;

$(\forall a \in V,\ r \in \hat{V})\ \psi(a \times r) = a \times \psi(r)$

d'après 1.3.3 il existe une application ψ unique vérifiant (2) ; il reste à prouver que ψ est bien un homomorphisme c'est-à-dire que :

$(\forall r, s \in \hat{V})\quad \psi(r + s) = \psi(r) + \psi(s)$,

ce qui est immédiat par récurrence sur la longueur de s.

Ainsi $\hat{V}$ est la solution du problème universel suivant (solution unique à "un isomorphisme près") :

"Trouver un binoïde sur V tel que, pour tout binoïde $\mathfrak{B}$ sur V, il existe un unique homomorphisme de ce binoïde dans $\mathfrak{B}$ ".

($\hat{V}$ est un objet "universally repelling" de la catégorie des binoïdes (LANG)).

Nous définirons maintenant par récurrence quelques applications simples.

1.3.5. Mot des racines d'une ramification :

Appelons mot des racines de $r \in \hat{V}$ le mot $\rho(r)$ sur le vocabulaire V défini par :

$\rho(\wedge) = \wedge$; $\rho(r + s) = \rho(r) + \rho(s)$; $\rho(a \times r) = a$.

Si le mot des racines de r est $a_1 \ldots a_n$, a_i est appelée la $i^{ème}$ racine de r.

Par exemple, le mot des racines de la ramification r' + r", prise dans la figure 2 est aaf.

1.3.6. Proposition :

Soient α' et α'' deux mots sur V et une ramification r dont le mot des racines est $\alpha' + \alpha''$; il existe deux ramifications r' et r", chacune unique, telles que $\rho(r') = \alpha'$, $\rho(r'') = \alpha''$ et $r = r' + r''$.

(Ce résultat se démontre par récurrence sur la longueur de α'').

1.3.7. Mot des feuilles d'une ramification :

Appelons mot des feuilles de r le mot $\varphi(r)$ sur V tel que :

$\varphi(\wedge) = \wedge$, $\varphi(r + s) = \varphi(r) + \varphi(s)$,

$\varphi(a \times r) =$ Si $\varphi(r) \neq \wedge$ alors $\varphi(r)$ sinon a.

Si le mot des feuilles de r est $a_1 \ldots a_n$, on dit que a_i est la $i^{ème}$ feuille de r.

Sur la figure 2, par exemple : $\varphi(r' + r'') =$ babcdabc.

1.3.8. Familles d'une ramification :

Pour la ramification r' + r" de la figure 2, nous dirons que le mot cd est une famille de prédécesseur a, que le mot vide est une famille de prédécesseur d.

Soit a un élément de V et F_a l'application de $\hat{V}$ dans l'ensemble $\mathfrak{P}(V^*)$ des partie de V^* définie par :

$F_a(\wedge) = \emptyset$, $F_a(r + s) = F_a(r) \cup F_a(s)$,

$F_a(b \times r) =$ Si $b = a$ alors $F_a(r) \cup \{\rho(r)\}$ sinon $F_a(r)$.

Par définition $F_a(r)$ est l'ensemble des familles de prédécesseur a dans r.

Sur la figure 2 par exemple, $F_a(r' + r'') = \{b + c,\ c + d,\ \wedge\}$.

φ, ρ et F_a garderons la même signification dans tout ce qui suit.

1.3.9. Ramification réfléchie d'une ramification :

Intuitivement il s'agit d'inverser l'orientation d'une ramification. Introduisons dans $\hat{V}$ la loi interne $\tilde{+}$: $r \tilde{+} s = s + r$. L'homomorphisme ψ de $(\hat{V}, +, \times)$ dans $(\hat{V}, \tilde{+}, \times)$ transforme toute ramification r en ce que nous nommerons sa ramification réfléchie $\tilde{r}$. La ramification réfléchie de $\tilde{r}$ est r : en effet le carré ψ^2 de l'homomorphisme ψ est l'identité,

puisqu'il vérifie

$$\psi^2(\wedge) = \wedge, \quad \psi^2(r + a \times s) = \psi^2(r) + a \times \psi^2(s).$$

Il est immédiat, par récurrence sur r, que

$$\rho(\tilde{r}) = \widetilde{\rho(r)}, \quad \rho(\tilde{r}) = \widetilde{\rho(r)},$$

et que les familles de prédécesseur a dans $\tilde{r}$ sont les mots réfléchis des familles de prédécesseur a dans r.

Si L est un bilangage sur V le bilangage $\tilde{L} = \psi(L)$ est appelé bilangage réfléchi de L. Il est évident que si L est un langage sur V, $\tilde{L}$ est le langage réfléchi (ou image miroir) de L.

1.3.10. Transcription d'une ramification :

On donne deux ensembles V et V' et une application θ de V dans V'. Remplacer chaque "étiquette" a d'une ramification sur V par $\theta(a) \in V'$ c'est définir une application $\hat{\theta}$ de $\hat{V}$ dans $\hat{V}'$ telle que :

$$\hat{\theta}(\wedge) = \wedge ; \hat{\theta}(r + s) = \hat{\theta}(r) + \hat{\theta}(s) ; \hat{\theta}(a \times r) = \theta(a) \times \hat{\theta}(r).$$

L'application $\hat{\theta}$ s'appelle transcription (associée à θ). Si L est un bilangage sur V nous dirons que $\hat{\theta}(L)$ est transcrit de L.

Il est clair que :

- la restriction à V^* d'une transcription $\hat{\theta}$ est une transcription de monoïdes.
- Pour toute ramification r : $\hat{\theta} \circ \varphi(r) = \varphi \circ \hat{\theta}(r)$, $\hat{\theta} \circ \rho(r) = \rho \circ \hat{\theta}(r)$.

1.4 BILANGAGES GRAMMATICAUX.

1.4.1. Grammaire :

Une grammaire est un triplet G = (V, ::=, X) où

- V est un ensemble fini appelé vocabulaire de la grammaire ;
- ::= une relation binaire entre V et le monoïde libre V^* telle que, pour tout $a \in V$, l'ensemble des mots α tels que $a ::= \alpha$ soit un langage régulier ; si $a ::= \alpha$, on dit que α est une production de a.
- X est un langage régulier sur V, l'ensemble des axiomes de la grammaire. Pour $a \in V$, on notera K_a le langage régulier des productions de a.

1.4.2. Bilangage engendré par une grammaire :

Une ramification sur V est engendrée au sens large par la grammaire G lorsque chacune de ses familles α de prédécesseur a vérifie $a ::= \alpha$ (notons que le mot α peut être le mot vide $\wedge$; a est alors une feuille de la ramification).

Pour tout langage régulier K, notons $\mathfrak{B}(G, K)$ l'ensemble des ramifications engendrées au sens large par G, dont le mot des racines appartient à K ; c'est un bilangage sur V. En particulier :

- $\mathfrak{B}(G, V^*)$, aussi noté $\mathfrak{B}(G)$, est appelé bilangage engendré au sens large par G ;
- $\mathfrak{B}(G, X)$, noté $\mathfrak{S}(G)$, est appelé bilangage engendré au sens strict (ou, simplement, engendré) par G.

Les bilangages engendrés par une grammaire sont dits bilangages grammaticaux.

Pour que la ramification vide appartienne à $\mathfrak{S}(G)$ il faut et il suffit que le mot vide appartienne à X. D'autre part il est immédiat que :

1.4.3. Proposition :

Si r et r' appartiennent à $\hat{V}$ et a à V :

a) $r + r' \in \mathfrak{B}(G) \Leftrightarrow r \in \mathfrak{B}(G)$ et $r' \in \mathfrak{B}(G)$

b) $a \times r \in \mathfrak{L}(G) \Leftrightarrow r \in \mathfrak{L}(G)$ et $a ::= \rho(r)$.

On en déduit immédiatement, en utilisant une démonstration par récurrence dans $\hat{V}$, que $\mathfrak{L}(G)$ est le plus petit bilangage sur V :

- contenant $\wedge$,
- stable pour +,
- contenant $a \times r$ lorsqu'il contient r et que $a ::= \rho(r)$.

1.4.4. Langage engendré par une grammaire :

L'ensemble des mots des feuilles des ramifications de $\mathcal{S}(G)$ s'appelle langage engendré par la grammaire G. Les langages engendrés par une grammaire sont les langages de Chomsky ou C-langages. En effet, on montre (PAIR, 1) que cette définition du langage engendré par G équivaut à celle indiquée en 0.2.2 lorsque les langages K_a sont finis et que G admet un seul axiome de longueur 1, et que, même lorque ces hypothèses ne sont pas satisfaites, le langage engendré par G est encore un langage de Chomsky.

1.5 PROLONGEMENT DE LA LOI EXTERNE, DIOIDE.

Nous nous proposons ici de prolonger la loi $\times$ en une loi interne associative notée aussi multiplicativement; d'où nécessairement :

i) $\quad (a \times r) \times s = a \times (r \times s)$.

Intuitivement la ramification $r \times s$ est obtenue en "accrochant" la ramification s à une feuille de r, par exemple à la première ou à la dernière feuille de r ; d'où deux possibilités :

ii) $\quad (\forall r \neq \wedge)\ (r + t) \times s = r \times s + t$

ii)' $\quad (\forall t \neq \wedge)\ (r + t) \times s = r + t \times s$.

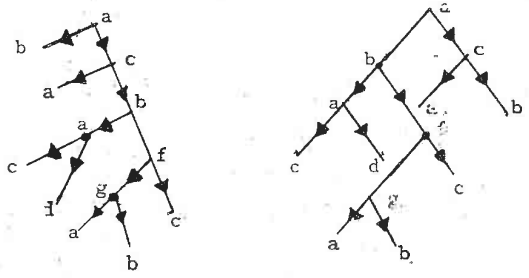
Précisons cela dans la définition suivante :

1.5.1. Produit à droite (resp. à gauche) :

Le produit à droite (resp. à gauche) dans $\hat{V}$, noté $\times_D$, (resp. $\times_G$) est défini par :

$(\forall s \in \hat{V}) \qquad \wedge \times_D s = s \qquad$ (resp. $\wedge \times_G s = s$)

$(\forall r, s, t \in \hat{V}, a \in V)\ (r + a \times t) \times_D s = r + a \times (t \times_D s)$ (resp. $(a \times t + r) \times_G s = a \times (t \times_G s) + r$).



$r' \times_D r''$ $\qquad\qquad$ $r' \times_G r''$

Figure 4 (r' et r'' prises dans la figure 2)

1.5.2. Propriétés immédiates :

Les lois $\times_D$ et $\times_G$ sont associatives, admettent $\wedge$ comme élément neutre ; elles prolongent la loi $\times$ et, de plus :

(a) $(\forall r, s \in \hat{V}) \qquad |r \times_D s| = |r| + |s|$

(b) $(\forall r, s \in V) \qquad \widetilde{r \times_G s} = \tilde{r} \times_D \tilde{s}$

Démonstration immédiate par récurrence.

Dans la suite nous noterons simplement $\times$ le produit à droite.

1.5.3. Dioïde droit, dioïde gauche :

Appelons dioïde droit (resp. gauche) un ensemble $\mathcal{D}$ muni de deux lois internes, notées + et $\times_D$ (resp. $\times_G$), associatives, ayant même élément neutre e, et vérifiant :

$(\forall d_1, d_2, d_3 \in \mathfrak{D},\ d_2 \neq e)\ (d_1 + d_2) \times_D d_3 = d_1 + (d_2 \times_D d_3)$

(resp. $(d_1 \neq e)\quad (d_1 + d_2) \times_G d_3 = (d_1 \times_G d_3) + d_2$).

(Nous dirons "dioïde" à la place de "dioïde droit" et nous noterons $\times$ pour $\times_D$). Un sous-dioïde d'un dioïde $\mathfrak{D}$ est une partie $\mathfrak{D}_0$ de $\mathfrak{D}$ contenant e et stable pour + et $\times$.

Soient deux dioïdes $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ dont les lois sont notées + et $\times$, et les éléments neutres e et e'. Un homomorphisme de dioïde ou D-homomorphisme de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}'$ est une application δ de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}'$ telle que :

$\delta(e) = e'$, $(\forall d_1, d_2 \in \mathfrak{D})\ \delta(d_1+d_2) = \delta(d_1) + \delta(d_2)$, $\delta(d_1 \times d_2) = \delta(d_1) \times \delta(d_2)$.

Les homomorphismes de dioïdes gauches sont appelés G-homomorphismes

Il est clair que tout sous-dioïde de $\hat{V}$ contenant V est un sous-binoïde de $\hat{V}$ d'où le résultat :

1.5.4. Proposition :

Si $\mathfrak{D}$ est un sous-dioïde de $\hat{V}$ contenant V alors $\mathfrak{D} = \hat{V}$.

1.5.5. Remarque :

Soient deux dioïdes libres $\hat{V}$ et $\hat{V}'$; tout D-homorphisme δ de $\hat{V}$ dans $\hat{V}'$ qui ne transforme pas toute ramification de $\hat{V}$ en la ramification vide satisfait à :

(1) $\quad (\forall r \in \hat{V}) \qquad |\delta(r)| \geq |r|$,

d'où, en particulier :

(2) $\quad (\forall a \in V) \qquad \delta(a) \neq \wedge$.

(1) se déduit immédiatement de (2) que nous allons prouver ; supposons qu'il existe $a \in V$ tel que $\delta(a) = \wedge$; d'après l'hypothèse il existe $a' \in V$ tel que $\delta(a') \neq \wedge$ et, dans ces conditions :

$$\delta(a' + a \times a') = \delta(a') + \delta(a \times a') = \delta(a') + \delta(a')$$

ou encore :

$$\delta((a' + a) \times a') = \delta(a'+a) \times \delta(a') = \delta(a') \times \delta(a'),$$

or les deux ramifications $\delta(a') + \delta(a')$ et $\delta(a') \times \delta(a')$ qui n'ont pas même mot des racines ne peuvent être égales, et (2) est vérifié.

Cette remarque justifie la restriction relative à l'application f dans l'énoncé suivant :

1.5.6. Théorème :

Pour tout dioïde $\mathfrak{D}$ et toute application f de V dans $\mathfrak{D}$ telle que $f^{-1}(e) = \emptyset$ il existe un D-homomorphisme et un seul de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{D}$ qui prolonge f.

L'unicité d'un tel D-homomorphisme est évidente, car, si $\bar{f}$ répond à la question, nécessairement :

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{f}(\wedge) = e \\ \bar{f}(r + a \times s) = \bar{f}(r) + (f(a) \times \bar{f}(s)) \end{cases}$$

Réciproquement montrons que $\bar{f}$ définie par (1) est un D-homomorphisme : par récurrence sur la longueur de s il est immédiat que :

$$\bar{f}(r+s) = \bar{f}(r) + \bar{f}(s)\ ;$$

prouvons, par récurrence sur r que :

$$\bar{f}(r \times s) = \bar{f}(r) \times \bar{f}(s)\ ;$$

la relation est évidente pour $r = \wedge$; pour $r = r_1 + a \times r_2$:

$$\begin{aligned} \bar{f}((r_1 + a \times r_2) \times s) &= \bar{f}(r_1 + a \times (r_2 \times s)) \\ &= \bar{f}(r_1) + (f(a) \times \bar{f}(r_2 \times s)) \qquad \text{d'après (1),} \\ &= [\bar{f}(r_1) + f(a)] \times \bar{f}(r_2 \times s) \quad \text{car } f(a) \neq e \\ &= [\bar{f}(r_1) + f(a)] \times \bar{f}(r_2) \times \bar{f}(s) \quad \text{(hypothèse de récurrence et associativité de } \times) \\ &= [\bar{f}(r_1) + f(a) \times \bar{f}(r_2)] \times \bar{f}(s) \\ &= \bar{f}(r_1 + a \times r_2) \times \bar{f}(s). \end{aligned}$$

1.5.7. Notations :

Le produit à droite (ou simplement produit) de deux bilangages L et L' sur V est naturellement défini de la façon suivante :

$$L \times L' = \{r \times r' \mid r \in L,\ r' \in L'\}$$

En posant $L^0 = \{\wedge\}$ et $L^{p+1} = L^p \times L$, nous pouvons définir

$$L^* = \bigcup_{p=0}^{+\infty} L^p$$

appelé produit itéré de L.

CHAPITRE 2
FONCTIONS RECURSIVES PRIMITIVES DE RAMIFICATIONS

Il est souvent utile de définir et d'étudier des transformations de ramifications : nous en avons vu des exemples dans le chapitre précédent ; citons aussi le cas des "grammaires transformationelles" (CHOMSKY, 2 - CULIK) ainsi que les travaux en cours à la Faculté des Sciences de Nancy (LECLAIRE - KHALIL) relatifs à la syntaxe et à la traduction des langages de programmation. Les transformations utilisées dans ces diverses études doivent être "effectives" et c'est ce qui justifie l'étude des fonctions récursives primitives de ramifications.

Comme dans le cas des fonctions récursives primitives d'entiers, l'ensemble de ces fonctions est défini au moyen d'opérateurs (composition et récurrence) et de fonctions de base :

- la constante $\wedge$,
- les fonctions projections,
- des fonctions jouant le rôle de la fonction "successeur", c'est-à-dire que toute ramification de $\hat{V}$ s'obtient, à partir de $\wedge$, par composition de telles fonctions (2.1).

Après l'étude de quelques propriétés immédiates (2.2) nous donnons des exemples en reprenant en particulier, les fonctions déjà présentées au chapitre 1 (mot des feuilles, mot des racines, ...) (2.3).

Parmi les prédicats, nous étudions essentiellement le prédicat d'égalité en montrant que ce prédicat est récursif primitif (2.5, 2.6, 2.7). Il est facile de plonger $\mathbb{N}$ dans $\hat{V}$ ce qui permet d'une part de comparer les fonctions récursives primitives de ramifications et celles d'entiers, et d'autre part de définir de façon récursive primitive quelques fonctions de ramifications à valeurs entières (longueur, taille, ...) (2.8). Enfin nous étudions quelques autres schémas de récurrence (2.9).

Madame PETER montre, dans (PETER, 2) que l'étude des fonctions récursives primitives pour un binoïde libre se rattache à la théprie générale des ensembles holomorphes libres (PETER, 1) ; en (2.9) nous situons cette étude par rapport aux travaux de Madame Peter.

L'exposé fait ici, différe toutefois de ces travaux : d'une part nous présentons une démonstration de la récursivité primitive du prédicat d'égalité, démonstration due à Monsieur Pair (PAIR, QUERE, 2), alors que Madame Peter place ce prédicat parmi les fonctions de base ; d'autre part les preuves de certaines propriétés, présentées ici dans le cas particulier du binoïde libre, sont, de ce fait, plus simples que celles présentées dans le cadre des ensembles holomorphes libres. (voir par exemple 2.9).

2.1 DEFINITIONS PRELIMINAIRES.

Dans ce chapitre V désigne un ensemble fini non vide ; notons $\mathfrak{F}^k$ l'ensemble des fonctions de $\hat{V}^k$ dans $\hat{V}$ (fonctions à k variables, ou à k arguments) en convenant que $\mathfrak{F}^0 = \hat{V}$.

2.1.1. Opérateurs :

a) Nous appelons composition l'opérateur Γ qui, quel que soient les entiers naturels k et ℓ, associe aux fonctions $g_1, \ldots, g_\ell$ de $\mathfrak{F}^k$ et g de $\mathfrak{F}^\ell$ la fonction $f = \Gamma(g, g_1, \ldots, g_\ell)$ de $\mathfrak{F}^k$ définie par :

$(\forall r_1, \ldots, r_k \in \hat{V})\ f(r_1, \ldots, r_k) = g(g_1(r_1, \ldots, r_k), g_2(r_1, \ldots r_k), \ldots, g_\ell(r_1, \ldots, r_k))$.

b) Nous appelons opérateurs de récurrence (ou simplement récurrence) l'opérateur R, qui, quel que soit l'entier naturel k, associe aux fonctions $g \in \mathfrak{F}^k$ et $g_a \in \mathfrak{F}^{k+4}$ pour tout $a \in V$, la fonction $f = R(g, (g_a)_{a \in V})$ de $\mathfrak{F}^{k+1}$ définie par :

$(\forall \ell_1, \ldots, r_k, r, s \in \hat{V},\ a \in V)\ f(r_1, \ldots, r_k, \wedge) = g(r_1, \ldots, r_k)$,

$f(r_1, \ldots, r_k, r+a\times s) = g_a(r_1, \ldots, r_k, r, s, f(r_1, \ldots, r_k, r), f(r_1, \ldots, r_k, s))$.

D'après 1.3.3. la fonction $f = R(g, (g_a)_{a \in V})$ est bien définie de manière unique.

2.1.2. Fonctions de base :

Ce sont les fonctions suivantes :

1) $\wedge \in \mathfrak{F}^0$,

2) Pour tout $a \in V$ la fonction f_a de deux variables définie par

$(\forall r_1, r_2 \in \hat{V})\quad f_a(r_1, r_2) = r_1 + a \times r_2$,

3) Les fonctions projections c'est-à-dire, pour tout $k>0$ et tout $1 \leq i \leq k$ les fonctions p_i^k de k variables définies par :

$(\forall r_1, \ldots, r_k \in \hat{V}) \quad p_i^k (r_1, \ldots, r_k) = r_i$.

2.1.3. Fonctions récursives primitives :

L'ensemble des fonctions récursives primitives (sur $\hat{V}$) est le plus petit ensemble $\mathcal{R}$ contenant les fonctions de base et stable par les opérateurs de composition et de récurrence.

2.2 PROPRIETES IMMEDIATES DES FONCTIONS RECURSIVES PRIMITIVES.

Les propriétés suivantes sont bien connues dans le cas des fonctions récursives primitives d'entiers ; les démonstrations sont identiques.

2.2.1. Proposition :

Une fonction f est récursive primitive si et seulement si elle s'obtient à partir des fonctions de base par un nombre fini de compositions et de récurrences. On dit alors que f est engendrée par les fonctions de base.

2.2.2. Proposition :

L'ensemble des fonctions récursives primitives est dénombrable.

2.2.3. Permutation et identification d'arguments :

Soient une fonction récursive primitive à k arguments et une application ϖ de $\{1, \ldots, k\}$ dans $\{1, \ldots, k\}$;

la fonction g définie par :

$g (r_1, \ldots, r_k) = f (r_{\varpi(1)}, \ldots, r_{\varpi(k)})$

est aussi récursive primitive.

2.2.4. Introduction d'arguments fictifs :

Si $f \in \mathcal{F}^k$ est récursive primitive la fonction $g \in \mathcal{F}^{k+1}$ définie par :

$g (r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}) = f (r_1, \ldots, r_k)$

est aussi récursive primitive.

2.2.5. Définition conditionnelle :

Si f, g_1, g_2 sont des fonctions récursives primitives à k variables la fonction h définie par :

$h (r_1, \ldots, r_k) = SI \ f (r_1, \ldots, r_k) = \wedge \ ALORS \ g_1 (r_1, \ldots, r_k)$

$SINON \ g_2 (r_1, \ldots, r_k)$

est récursive primitive.

Démontrons seulement cette dernière propriété :

la fonction

$cond (r_1, r_2, r_3) = SI \ r_3 = \wedge \ ALORS \ r_1 \ SINON \ r_2$

est récursive primitive car obtenue par l'opérateur de récurrence :

$cond (r_1, r_2, \wedge) = p_1^2 (r_1, r_2)$

$cond (r_1, r_2, r + a \times s) = p_2^2 (r_1, r_2)$

h est alors construite par composition de fonctions récursives primitives :

$h = \Gamma (cond, g_1, g_2, f)$.

Ces propriétés (en particulier 2.2.3 et 2.2.4) seront fréquemment utilisées sans qu'il y soit fait référence.

2.3 EXEMPLES DE FONCTIONS RECURSIVES PRIMITIVES.

2.3.1. Les fonctions constantes :

Prouvons, par récurrence sur $u \in \hat{V}$ que la fonction c_u définie par $(\forall r \in \hat{V}) \ c_u (r) = u$ est récursive primitive ;

en effet : $c_\wedge(\wedge) = \wedge$

$c_\wedge(r + a \times s) = \wedge$;

et, pour $u = u_1 + a \times u_2$, en supposant que c_{u_1} et c_{u_2} sont récursives primitives :

$$c_u(r) = f_a(c_{u_1}(r),\ c_{u_2}(r))$$

ainsi c_u est composée de fonctions récursives primitives.

2.3.2. L'identité :

La fonction identité n'est autre que la fonction de base p_1^1 ; elle est donc récursive primitive.

Dans les cas suivants la récursivité primitive est immédiate :

2.3.3. La concaténation :

$r + \wedge = r$

$r + (s + a \times t) = f_a(r + s, t)$.

2.3.4. L'enracinement :

La fonction qui, pour $a \in V$ fixé associe à $r \in \hat{V}$ la ramification $a \times r$ est définie par :

$$a \times r = f_a(\wedge, r).$$

2.3.5. Le mot des racines :

$\rho(\wedge) = \wedge$

$\rho(r + a \times s) = f_a(\rho(r), \wedge)$.

2.3.6. Le mot des feuilles :

$\varphi(\wedge) = \wedge$

$\varphi(r + a \times s) = \mathrm{cond}(f_a(\varphi(r), \wedge),\ \varphi(r) + \varphi(s), s)$.

2.3.7. Ramification réfléchie :

$\tilde{\wedge} = \wedge$

$\widetilde{r + a \times s} = a \times \tilde{s} + \tilde{r}$.

2.3.8. Produit à droite et à gauche :

a) La fonction de deux variables $(r, s) \mapsto r \times s$ est obtenue par récurrence : $\wedge \times s = s$

$(r_1 + a \times r_2) \times s = f_a(r_1,\ r_2 \times s)$.

b) Le produit à gauche s'en déduit par composition :

$r \times_G s = \widetilde{\tilde{r} \times \tilde{s}}$.

2.4 REMARQUES.

2.4.1. Changement des fonctions de base :

L'ensemble des fonctions engendrées n'est pas modifié si les fonctions de base f_a (2.1.2.2)) sont remplacées par :

2)' pour tout $a \in V$ les fonctions f'_a définies de la façon suivante :

$$f'_a(r_1,\ r_2) = a \times r_1 + r_2,$$

ou encore par :

2)'' les fonctions :

$(r_1,\ r_2) \mapsto r_1 + r_2$ (concaténation)

et, pour tout $a \in V$ $r \mapsto a \times r$ (enracinement).

Pour prouver ce résultat il suffit de montrer :

a) que les fonctions des types 2)' et 2)'' sont engendrées par les fonctions de base choisies en 2.1.2;

b) que, réciproquement, les fonctions f_a sont engendrées par les fonctions de type 1), 3) (2.1.2.) et 2)' et aussi par celles de type 1), 3) (2.1.2.) et 2)''.

a) Les fonctions f'_a sont construites par composition :

$$f'_a(r_1, r_2) = f_a(\widetilde{r_2}, \widetilde{r_1})$$

Les fonctions de type 2)" sont aussi engendrées par les fonctions de base (cf. 2.3.3. et 2.3.4.).

b) Il est immédiat que f_a est engendrée par les fonctions de type 1), 2)" et 3) ; par ailleurs l'application qui, à $r \in \hat{V}$ associe $\widetilde{r}$, est engendrée par les fonctions de type 1), 2)' et 3) car :

$$\widetilde{\wedge} = \wedge$$

$$\widetilde{r + a \times s} = f'_a(\widetilde{s}, \widetilde{r})$$

et finalement f_a est obtenue par composition :

$$f_a(r_1, r_2) = f'_a(\widetilde{r_2}, \widetilde{r_1}),$$

autrement dit f_a est engendrée par les fonctions de type 1) 2)' et 3).

2.4.2. Suppression des fonctions projections

Comme dans le cas "entier", on peut supprimer les projections parmi les fonctions de base, à condition de choisir un autre opérateur de composition Γ' plus général que Γ (OUSPENSKI).

Soient $g_1, \ldots, g_\ell \in \mathcal{F}^k$ et $g \in \mathcal{F}^\ell$ on dira que $f \in \mathcal{F}^k$ est déduit de $(g, g_1, \ldots, g_\ell)$ par Γ' si

$(\forall r_1, \ldots, r_k \in \hat{V})\ f(r_1, \ldots, r_k) = g(g'_1(r_1, \ldots, r_k), \ldots, g'_\ell(r_1, \ldots, r_k))$

où $g'_i = g_i$ OU p^k_i OU p^k_{i+1} si $i < k$ et $g'_k = g_k$ OU p^k_k

(c'est-à-dire que le ième argument de g peut être soit $g_i(r_1, \ldots, r_k)$ soit r_i soit r_{i+1} si $i < k$).

Il est clair qu'avec ces modifications on n'engendre à partir des fonctions de base que des fonctions récursives primitives ; pour montrer qu'on les engendre toutes il suffit de prouver qu'on engendre les projections ; or p^1_1 est définie par récurrence :

$$p^1_1(\wedge) = \wedge$$

$$p^1_1(r + a \times s) = g_a(r, s, p^1_1(r), p^1_1(s))$$

où $g_a(r, s, t, u) = f_a(r, s)$ (c'est-à-dire que g_a est obtenue par composition Γ') ; pour tout $k \geq 1$, p^k_1 se déduit de p^1_1 par composition Γ' ; enfin, pour tout k et tout $i < k$ p^k_{i+1} se déduit de p^k_i par composition Γ'.

2.4.3. Modification de l'opérateur de récurrence :

Il est possible de remplacer l'opérateur de récurrence R (2.1.1) par l'opérateur R' associé au schéma suivant :

$$\begin{cases} f(r_1, \ldots, r_k, \wedge) = g(r_1, \ldots, r_k) \\ \text{et pour } a \in V : f(r_1, \ldots, r_k, a \times r+s) = g_a(r_1, \ldots, r_k, r, s, f(r_1, \ldots, r_k, r), \\ \qquad\qquad f(r_1, \ldots, r_k, s)). \end{cases}$$

Cette modification ne change pas l'ensemble des fonctions engendrées. En effet à toute fonction f à k+1 arguments associons la fonction f définie par : $\bar{f}(r_1, \ldots, r_k, r) = f(r_1, \ldots, r_k, \widetilde{r})$

Si f est obtenue par l'opérateur de récurrence R', $\bar{f}$ est obtenue par l'opérateur de récurrence R et $f = \bar{\bar{f}}$ est obtenue par l'opérateur de composition et l'opérateur de récurrence R, et réciproquement.

2.5 PREDICATS.

Nous appelons prédicat sur $\hat{V}^k$ une application de $\hat{V}^k$ dans une partie B de $\hat{V}$ ayant deux éléments et choisie une fois pour toute.

Soit $a_0 \in V$ fixé ; dans toute la suite de ce chapitre nous prendrons :

$$B = \{\wedge, a_0 \times (a_0 + a_0)\} ;$$

par commodité nous poserons $\mathcal{J} = a_0 \times (a_0 + a_0)$. Ce choix pour B peut surprendre a priori, cependant il simplifie la partie technique de certaines

démonstrations (notamment en 2.6.2). ($\wedge$ représente la valeur "vrai" tandis que $\mathcal{f}$ représente la valeur "faux").

2.5.1. Propriétés immédiates:

Si P et Q sont deux prédicats récursifs primitifs sur $\hat{V}^k$, NON P, P ET Q, P OU Q sont récursifs primitifs.

En effet :

$$\text{NON } P = \Gamma(\text{cond}, \mathcal{f}, \wedge, P)$$
$$P \text{ ET } Q = \Gamma(\text{cond}, \wedge, \mathcal{f}, P+Q) \qquad (1)$$
$$P \text{ OU } Q = \text{NON } ((\text{NON } P) \text{ ET } (\text{NON } Q))$$

2.6 ETUDE DU PREDICAT D'EGALITE.

Nous allons démontrer dans ce paragraphe que le prédicat d'égalité est récursif primitif.

Au lieu de comparer directement deux ramifications nous comparerons leurs "représentations parenthésées". Pour introduire ces représentations nous utiliserons une ramification σ définie par

$$\sigma = a_0 \times a_0$$

2.6.1. Mot attaché à une ramification

Une ramification non vide peut être écrite de manière unique, sous forme d'une combinaison d'élément de V par $\times$ et + (1.3.2.) ; par exemple la ramification r de la figure 1

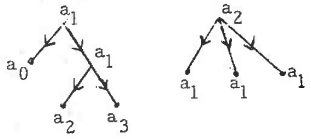


Figure 1

(1) P+Q désigne ici la fonction définie par
$P + Q\,(r_1, \ldots, r_k) = P\,(r_1, \ldots, r_k) + Q\,(r_1, \ldots, r_k)$

s'écrit :

$$r = a_1 \times (a_0 + a_1 \times (a_2 + a_3)) + a_2 \times (a_1 + a_1 + a_1) ;$$

on peut, sans créer d'ambiguïté, remplacer "$a_i \times$(" par la seule lettre "a_i", à condition de conserver la parenthèse fermante correspondante que nous pouvons coder par σ, et remplacer de même les "a_i" qui ne précédent pas $\times$ par "$a_i \sigma$"; ainsi, à partir de r, nous obtenons (en omettant les signes +) :

$$\mu(r) = a_1 a_0 \sigma a_1 a_2 \sigma a_3 \sigma \sigma \sigma a_2 a_1 \sigma a_1 \sigma a_1 \sigma \sigma .$$

Définition :

La fonction μ de $\hat{V}$ dans $(V \cup \{\sigma\})^* \subset \hat{V}$ définie par

$$\mu(\wedge) = \wedge \qquad \mu(r_1 + a \times r_2) = \mu(r_1) + a + \mu(r_2) + \sigma$$

est récursive primitive ; $\mu(r)$ est appelé mot attaché à la ramification r.

Nous allons montrer que deux ramifications qui ont le même mot attaché sont égales. Pour cela étudions l'ensemble P des mots "bien parenthésés" dans $(V \cup \{\sigma\})^*$. Cet ensemble P sera défini en introduisant une transformation ι qui associe à tout mot α de $(V \cup \{\sigma\})^*$, le mot "réduit" obtenu en supprimant toutes les "parenthèses" $a \in V$ et σ qui se correspondent dans α : ainsi P sera l'ensemble des mots qui sont réductibles au mot vide.

Définition :

Soit l'application ι de $(V \cup \{\sigma\})^*$ dans $V^* \cup \{\mathcal{f}\}$ définie par récurrence sur la longueur d'un mot $\alpha \in (V \cup \{\sigma\})^*$:

i) $\iota(\wedge) = \wedge$.

ii) $\forall a \in V \qquad \iota(\alpha + a) = \text{SI } \iota(\alpha) = \mathcal{f} \text{ ALORS } \mathcal{f} \text{ SINON } \iota(\alpha) + a$

iii) SI $\iota(\alpha) = \mathcal{f}$ ou $\wedge$ ALORS $\iota(\alpha + \sigma) = \mathcal{f}$;

SI $\iota(\alpha) = \beta + b$ ($\beta \in V^*$ et $b \in V$) ALORS $\iota(\alpha + \sigma) = \beta$.

P est l'ensemble $\iota^{-1}(\wedge)$.

Lemme 1 : Quels que soient $\alpha, \beta \in (V \cup \{\sigma\})^*$

$$\iota(\alpha) \neq \mathcal{f} \text{ et } \iota(\beta) \neq \mathcal{f} \Rightarrow \iota(\alpha+\beta) = \iota(\alpha) + \iota(\beta)$$

$$\iota(\alpha) = \mathcal{f} \Rightarrow \iota(\alpha+\beta) = \mathcal{f}.$$

Ce résultat se démontre par récurrence sur la longueur de β.

Lemme 2 : Le mot attaché à toute ramification sur V appartient à P.

Se démontre par récurrence sur la ramification donnée, à l'aide du lemme 1.

Réciproquement, tout mot appartenant à P est attaché à une ramification sur V. Nous n'utiliserons pas ici ce résultat.

Proposition:

Deux ramifications sont égales si, et seulement si, elles ont même mot attaché.

Il suffit de prouver que :

$$(\forall r, s \in \hat{V}) \quad \mu(r) = \mu(s) \Rightarrow r = s ;$$

procédons par récurrence sur la longueur de $\mu(r)$:

1) Si $\mu(r) = \mu(s) = \wedge$, alors $r = s = \wedge$.

2) Supposons $\mu(r)$ et $\mu(s)$ différents de $\wedge$, alors r et s ne sont pas vides et s'écrivent :

$$r = r_1 + a \times r_2 \qquad s = s_1 + b \times s_2.$$

Le plus grand facteur gauche strict[1] de $\mu(r) = \mu(r_1) + a + \mu(r_2) + \sigma$ appartenant à P est $\mu(r_1)$; en effet un facteur strict plus grand que $\mu(r_1)$ s'écrit $\mu(r_1) + a + \gamma$ où γ est facteur gauche de $\mu(r_2)$; d'après le lemme 1 :

$$\iota(\mu(r_2)) \neq \mathcal{f} \Rightarrow \iota(\gamma) \neq \mathcal{f}$$

et $$\iota(\mu(r_1) + a + \gamma) = \iota(\mu(r_1)) + a + \iota(\gamma) \neq \wedge ;$$

(1) Rappelons qu'un mot β est facteur gauche (resp. facteur gauche strict) d'un mot α s'il existe γ (resp. s'il existe γ, $\gamma \neq \wedge$) tel que : $\alpha = \beta + \gamma$
γ est alors le quotient à gauche de α par β

ainsi $\mu(r_1)+a+\gamma$ n'est pas dans P. De même, le plus grand facteur gauche strict de $\mu(s)$ appartenant à P est $\mu(s_1)$ et donc :

$$\mu(r) = \mu(s) \text{ entraîne } \mu(r_1) = \mu(s_1),$$

d'où

$$a = b \ , \mu(r_2) = \mu(s_2)$$

et, par hypothèse de récurrence, $r_1 = s_1$, $r_2 = s_2$, soit finalement $r = s$.

2.6.2. Théorème:

Le prédicat d'égalité défini par :

$(\forall r, s \in \hat{V})$ EQ (r, s) = SI $r = s$ ALORS $\wedge$ SINON $\mathcal{f}$

est récursif primitif.

Lemme 3 : Pour tout élément $a \in V \cup \{\sigma\}$ il existe une fonction récursive primitive d_a telle que :

$$(\forall y \in \hat{V})\ (\forall b \in V \cup \{\sigma\})\ d_a(y + b) = \text{SI } b=a \text{ ALORS } y \text{ SINON } \mathcal{f}.$$

Les fonctions d_a répondant à la question sont définies par des récurrences :

1) pour $a \in V$ $\quad d_a(\wedge) = \mathcal{f}$,

$d_a(r_1+b\times r_2) = \mathcal{f}$ pour tout $b \in V$ différent de a,

$d_a(r_1+a\times r_2) = \text{SI } r_2 = \wedge \text{ ALORS } r_1 \text{ SINON } \mathcal{f}$.

2) $\quad d_\sigma(\wedge) = \mathcal{f}$,

$d_\sigma(r_1+a\times r_2) = \mathcal{f}$ pour tout $a \in V$ différent de a_0

$d_\sigma(r_1+a_0\times r_2) = \text{SI } eqa_0(r_2) = \wedge \text{ ALORS } r_1 \text{ SINON } \mathcal{f}$.

où eqa_0 est la fonction récursive primitive définie par :

$eqa_0(\wedge) = \mathcal{f}$

$eqa_0(r_1+a\times r_2) = \mathcal{f}$ pour $a \neq a_0$

$eqa_0(r_1+a_0\times r_2) = r_1 + r_2$;

c'est-à-dire que : $eqa_0(x) = \wedge \Leftrightarrow x = a_0$.

Lemme 4 : Il existe une fonction récursive primitive δ de deux variables telle que lorsque r et s sont dans $(V \cup \{\sigma\})^*$, $\delta(r, s)$ soit le réflechi du quotient à gauche de s par r si r est facteur gauche de s et f sinon.

Il suffit de définir δ par récurrence de la façon suivante :

$$\delta(\wedge, s) = \tilde{s}$$

$$\delta(r_1 + a \times r_2, s) = d_a(\delta(r_1, s)) \quad \text{pour } a \in V \quad a \neq a_0$$

$$\delta(r_1 + a_0 \times r_2, s) = \text{SI } eqa_0(r_2) = \wedge \text{ ALORS } d_\sigma(\delta(r_1, s)) \text{ SINON } d_{a_0}(\delta(r_1, s))$$

Par récurrence sur la longueur de $r \in (V \cup \{\sigma\})^*$, on montre facilement que δ satisfait à la propriété annoncée.

Finalement la fonction EQ (r, s) est définie par :

$$EQ(r, s) = \text{SI } \delta(\mu(r), \mu(s)) = \wedge \text{ ALORS } \wedge \text{ SINON } f,$$

c'est-à-dire que EQ (r, s) est récursive primitive.

2.6.3. Généralisation :

Toute relation binaire sur V peut être prolongée en une relation sur $\hat{V}$: il suffit de convenir que deux ramifications r et s sont en relation si les graphes (forêts) sous-jacents à r et s sont isomorphes et si les points "correspondants" dans ces graphes ont des "étiquettes" en relation dans V ; plus précisément :

Définition et proposition :

Soit Γ un prédicat à deux variables sur V. Prolongeons Γ en un prédicat $\hat{\Gamma}$ sur $\hat{V}$ en posant

$$\hat{\Gamma}(\wedge, \wedge) = \wedge$$

$$\hat{\Gamma}(r_1 + a \times r_2, r'_1 + a' \times r'_2) = \wedge \Leftrightarrow \Gamma(a, a') = \wedge \text{ et } \hat{\Gamma}(r_1, r'_1) = \wedge \text{ et } \hat{\Gamma}(r_2, r'_2) = \wedge.$$

Le prédicat $\hat{\Gamma}$ est récursif primitif.

Il suffit de reprendre la démonstration précédente en remplaçant d_a, pour $a \in V$, par $d_{a,\Gamma}$ définie par :

$$d_{a,\Gamma}(\wedge) = f,$$

$$d_{a,\Gamma}(r_1 + b \times r_2) = f \text{ pour tout a tel que } \Gamma(b, a) = f,$$

$$d_{a,\Gamma}(r_1 + b \times r_2) = \text{SI } r_2 = \wedge \text{ ALORS } r_1 \text{ SINON } f \text{ pour tout a tel que } \Gamma(b, a) = \wedge.$$

2.7 EXEMPLE DE PREDICAT RECURSIF PRIMITIF.

Désignons par $P_a(r, s)$ le prédicat qui prend la valeur "vrai" si et, seulement si, s est une famille de prédecesseur a dans la ramification r (1.3.8.). P_a est récursif primitif, en effet :

$$P_a(\wedge, s) = f,$$

pour $b \neq a$ $\quad P_a(r_1 + b \times r_2, s) = \text{SI } P_a(r_1, s) \text{ OU } P_a(r_2, s) \text{ ALORS } \wedge \text{ SINON } f,$

et $\quad P_a(r_1 + a \times r_2, s) = \text{SI } P_a(r_1, s) \text{ OU } P_a(r_2, s) \text{ OU } \text{[illegible]}(\rho(r_2), s) \text{ [illegible] } \wedge \text{ SINON } f.$

2.8 COMPARAISON AVEC LES FONCTIONS RECURSIVES PRIMITIVES D'ENTIERS.

2.8.1. Identification de $\mathbb{N}$ et d'une partie de $\hat{V}$

L'application qui à $n \in \mathbb{N}$ associe $n.a_0$ (où $n.a_0$ est défini par $o.a_0 = \wedge$, $(n+1).a_0 = n.a_0 + a_0$) est une bijection de $\mathbb{N}$ dans la partie $\{n.a_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ de $\hat{V}$; cette bijection est de plus un homomorphisme pour l'addition des entiers et la loi de concaténation dans $\hat{V}$ qui est justement notée +. Dans la suite de ce chapitre $\mathbb{N}$ et $\{n.a_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ seront identifiés. Ceci permet de comparer les fonctions récursives primitives de ramifications, et les fonctions récursives primitives d'entiers, et aussi, de définir la taille, la longueur d'une ramification, ... comme des fonctions récursives primitives

2.8.2. Proposition :

Toute fonction récursive primitive entière peut-être prolongée en une fonction récursive primitive sur $\hat{V}$.

Il suffit de prouver :

a) que les fonctions de base qui engendrent les fonctions récursives primitives d'entiers vérifient la proposition.

b) que les fonctions déduites par composition et récurrence de fonctions vérifiant la proposition, y satisfont encore.

a) Les fonctions de base d'entiers sont :

- la constante 0 ,
- la fonction successeur ,
- les fonctions projection.

La fonction successeur peut être prolongée par la fonction suc définie sur $\hat{V}$ par :

$\text{suc}(\wedge) = a_0 \qquad \text{suc}(r+a\chi s) = \text{suc}(r) + a_0$

ou encore, d'après l'identification convenue ci-dessus :

$\text{suc}(\wedge) = 1 \qquad \text{suc}(r+a\chi s) = \text{suc}(r) + 1.$

Les prolongements des deux autres types de fonctions de base sont évidents.

b) Soient $g_1, \ldots, g_\ell$ des fonctions d'entiers récursives primitives à k arguments et f une fonction d'entiers récursive primitive à ℓ arguments qu'on peut prolonger en $\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_\ell$, $\hat{f}$ fonctions récursives primitives sur $\hat{V}$, il est clair que $\Gamma(\hat{f}, \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_\ell)$ est un prolongement récursif primitif de $\Gamma(f, g_1, \ldots, g_\ell)$.

Si f et g sont deux fonctions d'entiers récursives primitives de k et k+2 arguments, la fonction h, déduite de f et g par récurrence (sur les entiers), est définie par :

$$(\forall x_1, \ldots, x_k,\ n \in \mathbb{N}) \begin{cases} h(x_1, \ldots, x_k, 0) = f(x_1, \ldots x_k) \\ h(x_1, \ldots, x_k, n+1) = g(x_1, \ldots, x_k, n, h(x_1, \ldots, x_k, n)). \end{cases}$$

Supposons que f et g sont prolongées sur $\hat{V}$ par $\hat{f}$ et $\hat{g}$ récursives primitives ; posons :

$\forall r_1, \ldots, r_k \in \hat{V} \qquad \hat{h}(r_1, \ldots, r_k, \wedge) = \hat{f}(r_1, \ldots, r_k)$

$\forall r, s \in \hat{V}\ a \in V \qquad \hat{h}(r_1, \ldots, r_k, r + a \chi s) = \hat{g}(r_1, \ldots, r_k, r, \hat{h}(r_1, \ldots, r_k, r))$

$\hat{h}$ est récursive primitive et prolonge h.

2.8.3. Longueur taille et hauteur d'une ramification :

La longueur et la taille d'une ramification (1, 1.4.) peuvent être définies comme des fonctions récursives primitives à valeurs dans $\mathbb{N} \subset \hat{V}$ (en notant $\ell(r)$ la longueur de r et $|r|$ sa taille) :

$$\ell(\wedge) = 0 \ , \quad \ell(r+a\chi s) = \ell(r)+1.$$

$$|\wedge| = 0 \ , \quad |r+a\chi s| = |r| + |s| + 1.$$

Dans le but de "mesurer" la "deuxième dimension" d'une ramification $r \in \hat{V}$ introduisons la hauteur de r, de façon que :

i) $h(a\chi r) = h(r) + 1$

ii) $h(r)$ soit la plus grande des hauteurs des pseudo-arborescences qui composent r.

Cette hauteur peut donc être définie par :

$h(\wedge) = 0$

$h(r+a\chi s) =$ SI $h(r) \leq h(s)$ ALORS $h(s) + 1$ SINON $h(r)$;

ainsi h est récursive primitive d'après 2.8.2, car le prédicat associé à la relation $\leq$ sur $\mathbb{N}$ admet au moins un prolongement récursif primitif sur $\hat{V}$; dans le paragraphe suivant nous allons construire un tel prolongement.

2.8.4. Nombre d'occurrences de a ε V dans une ramification :

Ce nombre (cf. 1.1.4.) que nous noterons $n_a(r)$ est aisément défini de façon récursive primitive :

$$n_a(\wedge) = 0,$$

pour $b \neq a$ $\quad n_a(r+b\times s) = n_a(r) + n_a(s)$

et $\quad n_a(r+a\times s) = n_a(r) + n_a(s) + 1$.

2.9 ETUDE D'AUTRES SCHEMAS DE RECURRENCE.

2.9.1. Relation d'ordre sur $\hat{V}$:

Il sera utile dans la suite de considérer des "sous-ramifications" d'une ramification donnée, il est naturellement possible de donner plusieurs significations précises à cette notion de "sous-ramification"; ici nous définissons l'ensemble des sous-ramifications de $s \in \hat{V}$ comme étant la partie de $\hat{V}$ $\mathcal{SR}(s)$ telle que :

$$\mathcal{SR}(\wedge) = \{\wedge\}$$

$$\mathcal{SR}(r+a\times s) = \mathcal{SR}(r) \cup \mathcal{SR}(s) \cup \{r+a\times s\}.$$

Pour se ramener à l'étude de fonctions récursives primitives il est plus commode de définir le prédicat associé à l'application $\mathcal{SR}$:

Définition :

Une ramification r est une sous-ramification de s si SR (r, s) = ∧, où SR est le prédicat récursif primitif défini par :

$$SR(r, \wedge) = EQ(r, s),$$

$$SR(r, s_1 + a\times s_2) = SR(r, s_1) \text{ OU } SR(r, s_2) \text{ OU } EQ(r, s_1 + a\times s_2).$$

La relation "r est une sous-ramification de s" sera notée $r \leq s$.

Montrons qu'il s'agit d'une relation d'ordre ; elle est transitive :

prouvons

(1) $\quad \forall r, s, t \in \hat{V} \quad r \leq s$ et $s \leq t \Rightarrow r \leq t$

par récurrence sur t. Pour $t = \wedge$ c'est immédiat car, nécessairement $r = s = \wedge$, sinon $t = t_1 + a \times t_2$ et :

$s \leq t \Leftrightarrow (s \leq t_1$ ou $s \leq t_2$ ou $s = t) \Rightarrow (r \leq t_1$ ou $r \leq t_2$ ou $r \leq t)$ (hypothèse de récurrence); de toute façon, (1) est vérifié.

Pour montrer que la relation ≤ est antisymétrique, remarquons d'abord que :

(2) $\quad r \leq s$ et $r \neq s \Rightarrow |r| < |s|$

(démonstration immédiate par récurrence sur s).

Si la relation ≤ n'était pas antisymétrique il existerait deux ramifications r et s telles que : $r \leq s$ et $s \leq r$ et $r \neq s$

et, d'après (2) : $|r| < |s|$ et $|s| < |r|$, ce qui est contradictoire.

De plus la relation ≤ est évidemment réflexive. Enfin elle prolonge la relation d'ordre sur les entiers car, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$n.a_0 \leq (n+1).a_0,$$

puisque $(n+1).a_0 = n.a_0 + a_0$.

Nous pouvons énoncer :

Proposition :

La relation ≤ est une relation d'ordre sur $\hat{V}$ qui prolonge la relation d'ordre sur les entiers.

2.9.2. Comparaisons aux travaux de R. PETER :

Mme Peter (PETER, 1) considère d'une part un ensemble H, non vide, d'autre part une famille de fonctions F à arguments dans H et à valeurs dans H. Elle dit que H est un ensemble holomorphe libre s'il admet une partition $(H_i)_{i\geq 0}$ satisfaisant à :

(a) pour $i > 0$

$$x \in H_i \Leftrightarrow (\exists f \in F,\ y_1, \ldots, y_k \in \bigcup_{n=0}^{i=1} H_i,\ p \in \{1, \ldots, k\})\ (x = f(y_1, \ldots, y_k) \text{ et } y_p \in H_{i-1})$$

(b) $f, y_1, \ldots, y_k$ ainsi associés à x sont uniques.

Comme Mme Peter le montre (PETER, 2) $H = \hat{V}$ est un ensemble holomorphe libre en prenant pour famille F les fonctions f_a (pour tout $a \in V$). Intuitivement les ramifications de H_i sont obtenues à partir de $\wedge$ en composant i fois des fonctions f_a ; plus précisément, si l'ordre d'une ramification $\omega(r)$ est défini, de façon récursive primitive, par :

$\omega(\wedge) = 0$

$\omega(r+a\chi s) =$ SI $\omega(s) \leq \omega(r)$ ALORS $\omega(r) + 1$ SINON $\omega(s) + 1$,

nous pouvons poser $H_i = \omega^{-1}(i)$; la partition $(H_i)_{i\geq 0}$ satisfait à (a) et (b).

Parmi les ensembles holomorphes libres Mme PETER distingue ceux qui sont munis d'une relation $\leq$ vérifiant les axiomes suivants :

V1 $(\forall x \in H)\ x \leq x$

V2 $(\forall x \in H \setminus H_0)\ (x = f(y_1, \ldots, y_k) \Rightarrow y_1 < x, \ \ldots, \ y_k < x)$ (1)

V3 $(\forall x, y, z \in H)\ (x < y \text{ et } y < z \Rightarrow x < z)$

V4 $(\forall x \in H_i,\ y \in H_j)\ (x < y \Rightarrow i < j)$

V5 $(\forall x \in H_i,\ y \in H_j)\ (x < y \Rightarrow (\exists z \in H_{j-1})\ (x \leq z \text{ et } z < y)$

V6 en appelant prédécesseur immédiat de $x \in H_i$ tout $y \in H_{i-1}$ tel que $y \leq x$, pour f fixé dans F le nombre des prédecesseurs immédiats de $f(y_1, \ldots, y_k)$ est borné par un nombre indépendant de $y_1, \ldots, y_k$.

Les ensembles satisfaisant à ces axiomes sont appelés ensembles holomorphes libres ordonnés.

Il est immédiat que la relation $\leq$ que nous venons de définir dans $\hat{V}$ satisfait à V1, ..., V6 ; ainsi $\hat{V}$ est un ensemble holomorphe libre ordonné.

Inversement si H est un ensemble holomorphe libre pour une famille F quelconque fonctions, H est en correspondance bijective avec un bilangage sur $H_0 \cup F$; il suffit de définir l'application π de H dans $\widehat{H_0 \cup F}$ par récurrence sur l'ordre de $x \in H$,

(1) "<" signifie "$\leq$ ET $\neq$"

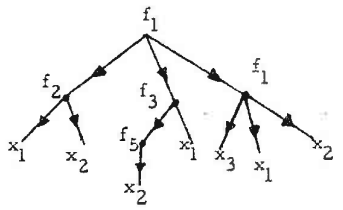
qui est l'entier $\omega(x)$ tel que $x \in H_{\omega(x)}$:

$$(\forall x \in H_0)\ \pi(x) = x ;$$

pour $x \in H$ d'ordre non nul il existe $f \in F$, $y_1, \ldots, y_k \in H$ uniques, tels que $x = f(y_1, \ldots, y_k)$ et $\omega(y_1) < \omega(x), \ldots, \omega(y_k) < \omega(x)$; $\pi(x)$ est alors la ramification

$$f \times (\pi(y_1) + \ldots + \pi(y_k)) ;$$

par exemple, pour $x = f_1(f_2(x_1, x_2), f_3(f_5(x_2), x_1), f_1(x_3, x_1, x_2))$, $\pi(x)$ est la ramification :



Pour montrer que l'application π est injective il suffit de remarquer que si $\pi(x) = \pi(y)$, x et y ont même ordre (en effet, il est immédiat, par récurrence sur $\omega(x)$ que $\omega(x) = h(\pi(x))-1$), on en déduit facilement que :

$$\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow x = y.$$

$\pi(H)$ est le bilangage formé des pseudo-arborescences dont les familles qui ont pour prédécesseur une fonction à k arguments sont de longueur k (en convenant que les éléments de H_0 sont des fonctions à 0 argument) ; c'est-à-dire que, si F et H_0 sont finis, $\pi(H)$ est le bilangage grammatical (1.4) engendré par la grammaire $G = (H_0 \cup F, ::=, H_0 \cup F)$ qui admet les productions suivantes :
pour $x \in H_0$: $K_x = \{\wedge\}$, et pour $f \in F$: $K_f = k.(H_0 \cup F)$ si f est une fonction à k arguments.

Les structures considérées par (THATCHER et WRIGHT) et (BRAINERD) sont analogues.

2.9.3. Fonctions de service :

Nous serons amenés à "coder" une suite de ramifications : par une seule ramification. Pour cela, à $r_1, \ldots, r_k \in \hat{V}$ associons $v_k(r_1, \ldots, r_k)$ définie par :

$$v_k(r_1, \ldots, r_k) = a_0 \times r_1 + \ldots + a_0 \times r_k ;$$

il est immédiat, par récurrence sur k, que les fonctions v_k sont récursives primitives.

Pour "décoder" une suite $v_k(r_1, \ldots, r_k)$ introduisons la fonction récursive primitive $br(r, s)$ qui, pour s entier, associe à r ce que nous appelerons la $s^{\text{ième}}$ branche de r :

$br\ (\wedge, s) = \wedge$

$br\ (r_1 + a \chi r_2, s) = SI\ \ s \preceq \ell\ (r_1)\ \ ALORS\ \ br\ (r_1, s)$

$SI\ \ s = \ell\ (r_1)+1\ \ ALORS\ r_2$

$SINON\ \wedge.$

Dans la suite, nous utiliserons essentiellement la propriété suivante, évidente par récurrence sur k :

$(\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \ldots, k\})\ \ br\ (v_k\ (r_1, \ldots, r_k), i) = r_i$

2.9.4. Réduction:

Les fonctions récursives primitives sont les fonctions obtenues à partir des fonctions de base par compositions et récurrences du type suivant (récurrence sur des fonctions à deux arguments seulement).

$$(a) \quad \begin{cases} f\ (r, \wedge) = g\ (r) \\ f\ (r,\ s + a\ \chi t) = g_a\ (r, s, t, f\ (r, s),\ f\ (r, t)) \end{cases}$$

Montrons en effet que toute fonction h obtenue par l'opérateur de récurrence défini en (2.1.1) est aussi obtenue par compositions et récurrence de type (a) ; par hypothèses :

$h\ (r_1, \ldots, r_k, \wedge) = g^1\ (r_1, \ldots, r_k)$

$h\ (r_1, \ldots, r_k,\ r+a\chi s) = g_a^1\ (r_1, \ldots, r_k, r, s, h\ (r_1, \ldots, r_k, r),\ h\ (r_1, \ldots, r_k, s))$

Posons :

$(\forall t,\ u \in \hat{V})\ \ h'\ (t, u) = h\ (br\ (t, 1), \ldots,\ br\ (t, k), u),$

d'où $h\ (r_1, \ldots, r_k, u) = h'\ (v_k(r_1, \ldots, r_k), u).$

Il reste à prouver que h' est définie par récurrence de type (a), or :

$h'\ (t, \wedge) = g^1\ (br\ (t, 1), \ldots, br\ (t, k),)$

$h'\ (t, r+a\chi s) = g_a^1\ (br(t, 1), \ldots,\ br(t, k),\ r, s, h'(t, r), h'(t, s))$

Ainsi, dans la suite, nous nous limiterons à l'étude des fonctions à deux arguments.

2.9.5. Récurrence simultanée :

Soient deux fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$(S) \begin{cases} f_1\ (r, \wedge) = g_1\ (r)\ ,\quad f_2\ (r, \wedge) = g_2\ (r)\ , \\ f_1\ (r, s+a\chi t) = g_a^1\ (r, s, t,\ f_1\ (r, s),\ f_1\ (r, t),\ f_2\ (r, s),\ f_2\ (r, t)) \\ f_2\ (r, s+a\chi t) = g_a^2\ (r, s, t,\ f_1\ (r, s),\ f_1\ (r, t),\ f_2\ (r, s),\ f_2\ (r, t)). \end{cases}$$

Si les fonctions g_1, g_2, g_a^1, g_a^2 (pour tout $a \in V$) sont récursives primitives, f_1 et f_2 le sont aussi.

Posons $\quad \bar{f}\ (r, s) = v_2\ (f_1\ (r, s),\ f_2\ (r, s))\ ;$

ainsi $\quad f_1\ (r, s) = br\ (\bar{f}\ (r, s), 1)\ ,$

$\quad f_2\ (r, s) = br\ (\bar{f}\ (r, s), 2).$

Il suffit donc de prouver que $\bar{f}\ (r, s)$ est récursive primitive ; or :

$\bar{f}\ (r, \wedge) = v_2\ (g_1(r),\ g_2(r)),$

$\bar{f}(r, s+a\chi t) = v_2\ [\ g_a^1\ (r, s, t, br(\bar{f}(r, s), 1),\ br(\bar{f}(r, t), 1), br(\bar{f}(r, s), 2), br(\bar{f}(r, t), 2)),$

$\quad g_a^2\ (r, s, t, br\ (\bar{f}(r, s), 1),\ br\ (\bar{f}(r, t), 1),\ br\ (\bar{f}(r, s), 2), br(\bar{f}(r, t), 2))\ ].$

Cette propriété se généralise immédiatement à n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies de façon simultanée.

2.9.6. Récurrence sur une suite de valeurs :

Suite des sous-ramifications de $r \in \hat{V}$:

C'est une ramification sp (r) dont les branches sont les sous-ramifications de x ; plus précisément :

$$\begin{cases} sp\ (\wedge) = \wedge \\ sp\ (r+a\chi s) = sp\ (r) + sp\ (s) + a_0\ \chi\ (r+a\chi s). \end{cases}$$

sp est récursive primitive.

Suite des valeurs des sous-ramifications de r relativement à une fonction f:

Pour une fonction f de deux variables nous posons :

$sp_f(r, \wedge) = f(r, s)$

$sp_f(r, s+a\chi t) = sp_f(r, s) + sp_f(r, t) + a_0 \chi f(r, s+a\chi t)$

Proposition :

Si les fonctions g et g_a sont récursives primitives, la fonction f définie par

$$(v) \quad \begin{cases} f(r, \wedge) = g(r) \\ f(r, s+a\chi t) = g_a(r, sp(s), sp(t), sp_f(r, s), sp_f(r, t)) \end{cases}$$

est récursive primitive.

Ce résultat signifie que, si une fonction f est construite par récurrence à partir de fonctions récursives primitives dépendant de sous-ramifications quelconques, la fonction f est néanmoins récursive primitive. La démonstration est immédiate :

$sp_f(r, \wedge) = f(r, \wedge)$

$sp_f(r, s+a\chi t) = sp_f(r, s) + sp_f(r, t) + a_0 \chi g_a(r, sp(s), sp(t), sp_f(r, s) sp_f(r, t))$,

ce qui prouve que sp_f est récursive primitive, et f définie en (v) l'est donc aussi.

CHAPITRE 3

DEFINITION ET ETUDE DES BILANGAGES REGULIERS

Dans ce chapitre la notion de langage régulier (0.1.1.) est généralisée en celle de bilangage régulier (3.1) ;

Il s'agit des bilangages reconnus par un "automate" qui explore les ramifications "de bas en haut et de gauche à droite" pour déterminer un "état", appartenant à un ensemble fini, qui ne dépend que des résultats de l'exploration des pseudo-arborescences, composant la ramification, le résultat de l'exploration d'une pseudo-arborescence a χ r ne dépendant à son tour que de a et du résultat de l'exploration de r. Il en est ainsi en particulier pour un bilangage grammatical, c'est-à-dire l'ensemble des "marqueurs de phrases" engendrés par une grammaire : l'exploration se borne à vérifier que, si α est une feuille de prédécesseur a, la grammaire possède une règle $a ::= \alpha$; lorsqu'il en est ainsi, le résultat de l'exploration peut être le mot des racines de la ramification explorée r, de manière à permettre, d'une part, d'utiliser ce résultat pour explorer une ramification "contenant" r et d'autre part, de dire si le mot des racines de r est un axiome de la grammaire.

Parmi les propriétés des bilangages réguliers on peut distinguer celles qui sont des extensions directes des propriétés des langages réguliers : propriétés booléennes, stabilité pour la somme et la somme itérée (3.3, 3.4), de celles qui sont propres à la "nouvelle dimension" des bilangages et liées à la possibilité de faire le produit "vertical" de deux bilangages ou de "greffer" un bilangage sur un autre (3.4). Cette opération de greffe intervient en particulier dans l'extension du théorème de Kleene aux bilangages réguliers (3.5).

Cette extension, due à Monsieur Pair, est énoncée, ainsi qu'une grande partie des résultats de ce chapitre, dans (PAIR - QUERE, 1)

Les études de (THATCHER et WRIGHT) et (BRAINERD) relatives à des pseudo-arborescences d'un type particulier (cf. 2.9.2) et celle de (THATCHER) sur les pseudo-arborescences entrent dans le cadre qui est présenté ici. En particulier on trouvera dans (THATCHER) des théorèmes analogues à (3.2.2) et (3.2.8) et dans (BRAINERD) un résultat comparable à (3.2.9).

3.1 DEFINITION DES BILANGAGES REGULIERS.

3.1.1. Définition :

Un bilangage L sur V est dit régulier s'il existe un binoïde fini $\mathfrak{B}$, une partie $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$ tels que, si ψ est l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$, $L = \psi^{-1}(\mathfrak{B}')$. Nous dirons que L est associé au triplet $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \psi)$.

Il s'agit là d'une généralisation immédiate de la définition des langages réguliers comme images réciproques de parties d'un monoïde fini par un homomorphisme de monoïdes (0.1.1).

Il est possible de donner d'autres définitions analogues pour les bilangages réguliers, en utilisant les dioïdes (1.5), ou même des structures plus simples, telles que les semi-binoïdes que nous allons définir (la structure de semi-binoïde s'apparente à celle de mémoire pour les langes (PAIR, 3). Nous montrerons que toutes ces définitions aboutissent à la même notion de bilangage régulier.

Dans la suite nous dirons qu'un bilangage L sur V est associé au triplet $(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \eta)$ où $\mathfrak{E}$ est un ensemble, $\mathfrak{E}'$ une partie de $\mathfrak{E}$ et η une application de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{E}$ si $L = \eta^{-1}(\mathfrak{E}')$.

3.1.2. Semi-binoïde :

Un semi-binoïde sur V est un ensemble muni d'une loi de composition interne (notée +) et d'une loi de composition externe à opérateurs dans V (notée χ). Appelons semi-homomorphisme à droite une application σ de $\hat{V}$ dans un semi-binoïde $\mathfrak{R}$ sur V telle que :

$$(\forall\, r, s \in \hat{V},\ a \in V) \qquad \sigma(r + a \chi s) = \sigma(r) + a \chi \sigma(s).$$

(Un semi-homomorphisme à gauche est une application de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{R}$ telle que :

$$(\forall\, r, s \in \hat{V},\ a \in V) \qquad \sigma(a \chi r + s) = a \chi \sigma(r) + \sigma(s))$$

3.1.3. Proposition :

Pour tout semi-binoïde $\mathfrak{R}$, quelque soit $e \in \mathfrak{R}$, il existe un semi-homomorphisme à droite unique σ de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{R}$ tel que $\sigma(\wedge) = e$.

Il s'agit là d'une conséquence immédiate de (1.1.3).

3.1.4. Théorème :

Soit un bilangage L sur V ; les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) L est un bilangage régulier.

(b) L est associé à $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \delta)$ où $\mathfrak{D}$ est un dioïde droit fini et δ un D-homomorphisme.

(c) L est associé à $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \sigma)$ où $\mathfrak{R}$ est un semi-binoïde fini et σ un semi-homomorphisme à droite.

Démonstration : Nous suivrons le schéma (a) ⇒ (b) ⇒ (c) ⇒ (a).

(a) ⇒ (b) : L est associé à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \psi)$ (cf. 3.1.1.). Pour tout $r \in \hat{V}$ définissons l'application h_r de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}$ de la façon suivante :

$$h_\wedge = Id \qquad \text{(Id désigne l'identité dans } \mathfrak{B})$$

$$(\forall r, s \in \hat{V}, \forall a \in V, \forall b \in \mathfrak{B}) \quad h_{r+a\chi s}(b) = \psi(r) + a \chi h_s(b).$$

Montrons par récurrence sur r, que :

(1) $\forall r \in \hat{V} \quad h_r(e) = \psi(r)$ (en notant e l'élément neutre de $\mathfrak{B}$).

Pour $r = \wedge$: $h_\wedge(e) = e = \psi(\wedge)$

Pour $r = r_1 + a\chi r_2$ $h_{r_1+a\chi r_2}(e) = \psi(r_1) + a\chi h_{r_2}(e)$

$= \psi(r_1) + a\chi\psi(r_2)$ (hypothèse de récurrence)

$= \psi(r + a\chi r_2)$ (car ψ est un homomorphisme)

(2) $(\forall r, s \in \hat{V}, \forall b \in \mathfrak{B}) \quad h_{r+s}(b) = \psi(r) + h_s(b)$

(immédiat par récurrence sur $\ell(s)$).

(3) $(\forall r, s \in \hat{V}) \quad h_{r\chi s} = h_r \circ h_s$.

Procédons par récurrence sur r ; c'est immédiat pour $r = \wedge$, sinon $r = r_1 + a\chi r_2$ et, pour $b \in \mathfrak{B}$:

$$h_{(r_1+a\chi r_2)\chi s}(b) = h_{r_1+a\chi r_2\chi s}(b)$$

$$= \psi(r_1) + a\chi h_{r_2\chi s}(b)$$

$$= \psi(r_1) + a\chi h_{r_2}(h_s(b))$$

$$= h_{r_1+a\chi r_2} \circ h_s(b).$$

Dans l'ensemble $\mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}$ des applications de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}$ définissons la loi $\star$ par :

$(\forall f, g \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}, \forall b \in \mathfrak{B})$ $(f \star g)(b) = f(e) + g(b)$ pour $g \neq Id$,

$f \star Id = f$.

D'après (1) et (2) nous avons :

(4) $(\forall r, s \in \hat{V}) \qquad h_{r+s} = h_r \star h_s$

L'application $\delta : r \mapsto h_r$ est donc un D-homomorphisme pour les lois +, χ sur $\hat{V}$ et $\star$, $\circ$ sur $\mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}$. Ainsi $\delta(\hat{V})$ est un dioïde fini. De plus :

$$r \in L \Leftrightarrow \psi(r) \in \mathfrak{B}' \Leftrightarrow h_r(e) \in \mathfrak{B}',$$

ou encore $L = \delta^{-1}(\{f \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}} \mid f(e) \in \mathfrak{B}'\})$;

ce qui prouve que L vérifie (b).

(b) ⇒ (c) : L est associé à $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \delta)$ où, par hypothèse, $\mathfrak{D}$ est un dioïde est δ un D-homomorphisme ; les lois sur $\mathfrak{D}$ sont notées + et χ ; posons :

$$(\forall a \in V, \forall d \in \mathfrak{D}) \qquad a \chi' d = \delta(a) \chi d.$$

Il est clair que, pour les lois + et χ', $\mathfrak{D}$ est un semi-binoïde et δ un semi-homomorphisme à droite ; c'est-à-dire que L vérifie (c).

(c) ⇒ (a) : L est associé à $(\mathcal{R}, \mathcal{R}', \sigma)$, et il s'agit de trouver un binoïde fini $\mathfrak{B}$ sur V, une partie $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$ tels que si ψ est l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$, L soit associé à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \psi)$.

Définissons, par récurrence sur $r \in \hat{V}$, une application $\psi(r)$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$:

- $\psi(\wedge)$ est l'identité dans $\mathcal{R}$
- pour $a \in V$, $s, t \in \hat{V}$ et $b \in \mathcal{R}$:

$$\psi(s + a \times t)(b) = \psi(s)(b) + a \times \sigma(t).$$

Il est alors immédiat, par récurrence sur r, que :

(1) si nous posons $e = \sigma(\wedge)$, $\psi(r)(e) = \sigma(r)$,

(2) $(\forall s \in \hat{V})$ $\psi(s + r) = \psi(r) \circ \psi(s)$.

D'après (1) :

(3) $\psi(a \times t)(b) = b + a \times \psi(t)(e)$.

Les assertions (2) et (3) prouvent que ψ est l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans l'ensemble $\mathcal{R}^{\mathcal{R}}$ des applications de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}$, muni des deux lois suivantes, qui en font un binoïde fini :

- $(\forall \lambda, \lambda' \in \mathcal{R}^{\mathcal{R}})$ $\lambda + \lambda' = \lambda' \circ \lambda$
- Pour $a \in V$, $\lambda \in \mathcal{R}^{\mathcal{R}}$ $a \times \lambda$ transforme $b \in \mathcal{R}$ en $b + a \times \lambda(e)$.

Enfin :

$$r \in L \Leftrightarrow \sigma(r) \in \mathcal{R}' \Leftrightarrow \psi(r)(e) \in \mathcal{R}'$$

L est l'image réciproque par ψ de l'ensemble des $\lambda \in \mathcal{R}^{\mathcal{R}}$ tels que $\lambda(e) \in \mathcal{R}'$, ce qui achève la démonstration.

3.1.5. Remarques

a) Dans l'énoncé du théorème 3.1.4. il est possible de remplacer dioïde droit par dioïde gauche, D-homomorphisme par G-homomorphisme, et semi-homomorphisme à droite par semi-homomorphisme à gauche : la démonstration est analogue.

b) La définition 3.1.1. et le théorème 3.1.4. sont valables pour V fini ou non.

3.1.6. Proposition :

L'image par transcription d'un bilangage régulier est un bilangage régulier.

Soient deux ensembles V et V_1, ϱ une transcription de $\hat{V}$ dans $\hat{V}_1$, et L un bilangage régulier sur V, associé au triplet $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \psi)$. Soit ψ_1 l'application de $\hat{V}_1$ dans $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$ définie par :

$$\psi_1(r_1) = \psi(\varrho^{-1}(r_1)), \text{ pour } r_1 \in \hat{V}_1.$$

D'après la définition d'une transcription, il est immédiat que :

(1) pour $r_1, s_1 \in \hat{V}_1$, $\varrho^{-1}(r_1 + s_1) = \varrho^{-1}(r_1) + \varrho^{-1}(s_1)$,

(2) pour $A_1 \in V_1$, $r_1 \in \hat{V}_1$, $\varrho^{-1}(A_1 \times r_1) = \varrho^{-1}(A_1) \times \varrho^{-1}(r_1)$

Par suite :

$$\psi_1(r_1 + s_1) = \psi(\varrho^{-1}(r_1) + \varrho^{-1}(s_1))$$

$$\psi_1(A_1 \times r_1) = \psi(\varrho^{-1}(A_1) \times \varrho^{-1}(r_1))$$

Ainsi, en munissant $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$ de la structure suivante de binoïde sur V_1, ψ_1 est l'homomorphisme de $\hat{V}_1$ dans $\mathcal{P}(\mathfrak{B})$:

pour $\mathbb{M}, \mathbb{M}' \in \mathcal{P}(\mathfrak{B})$, $A_1 \in V_1$, $\mathbb{M} + \mathbb{M}' = \{m + m' \mid m \in \mathbb{M},\ m' \in \mathbb{M}'\}$,

$$A_1 \times \mathbb{M} = \{A \times m \mid m \in \mathbb{M},\ \varrho(A) = A_1\}.$$

De plus :

$$r_1 \in \varrho(L) \Leftrightarrow (\exists r \in L)(\varrho(r) = r_1)$$
$$\Leftrightarrow (\exists r \in \hat{V})(\psi(r) \in \mathfrak{B}' \text{ et } \varrho(r) = r_1)$$
$$\Leftrightarrow \psi(\varrho^{-1}(r_1)) \cap \mathfrak{B}' \neq \emptyset$$

$\varrho(L)$ est l'image réciproque par ψ_1 de l'ensemble des parties $\mathbb{M}$ de $\mathfrak{B}$ qui ne sont pas disjointes de $\mathfrak{B}'$.

3.2 EXEMPLES DE BILANGAGES REGULIERS.

3.2.1. Proposition :

$\hat{V}$, $\{\wedge\}$, $\{a\}$ pour tout $a \in V$, sont des bilangages réguliers sur V.

Construisons dans chacun des cas un couple $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ satisfaisant à la définition 3.1.1. :

1) Pour $\hat{V}$: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = \{e\}$; $e + e = e$; $a \times e = e$.

2) Pour $\{\wedge\}$, $\mathfrak{B} = \{0, e\}$, $\mathfrak{B}' = \{e\}$; pour b, b' dans $\mathfrak{B}$ et a dans V :

$b + b' = SI\ b = b' = e$ ALORS e SINON 0 ; $a \times b = 0$.

3) Pour $\{a\}$, $\mathfrak{B} = \{0, 1, e\}$, $\mathfrak{B}' = \{1\}$, la somme + est commutative et, pour $b \in \mathfrak{B}$:

$0 + b = 0$, $e + b = b$, $1 + b = SI\ b = e$ ALORS 1 SINON 0 ;

$a_1 \times b = 0$ pour $a_1 \neq a$ ou $b \neq e$, $a \times e = 1$.

3.2.2. Théorème :

Tout bilangage grammatical est régulier.

Soit G=(V, ::=, X) une grammaire. Remarquons qu'il existe un monoïde $\mathfrak{M}$ tel que les langages X et K_a (ensemble des productions de a), pour tout $a \in V$, sont images réciproques par un homomorphisme de monoïdes, de parties de $\mathfrak{M}$; ceci résulte du lemme suivant :

3.2.3. Lemme :

Si K_1 et K_2 sont deux langages réguliers sur V, il existe un monoïde fini $\mathfrak{M}$, deux parties $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ de $\mathfrak{M}$ et un homomorphisme μ de V^* dans $\mathfrak{M}$ tels que : $K_1 = \mu^{-1}(\mathfrak{M}_1)$, $K_2 = \mu^{-1}(\mathfrak{M}_2)$.

Par définition, K_1 est associé à un triplet $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_1, \mu_1)$ et K_2 à $(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}'_2, \mu_2)$, où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux monoïdes finis.

Il suffit de prendre pour $\mathfrak{M}$ le monoïde produit $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ et pour μ l'homomorphisme produit :

$$(\forall \alpha \in V^*) \qquad \mu(\alpha) = (\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha))$$

Ainsi

$$K_1 = \mu_1^{-1}(\mathcal{C}'_1) = \mu^{-1}(\mathcal{C}'_1 \times \mathcal{C}_2)$$

$$K_2 = \mu_2^{-1}(\mathcal{C}'_2) = \mu^{-1}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}'_2)$$

ce qui prouve avec le lemme $\mathfrak{M}_1 = \mathcal{C}'_1 \times \mathcal{C}_2$, $\mathfrak{M}_2 = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}'_2$. Ce lemme s'étend naturellement à un nombre fini de langages réguliers.

Par conséquent, chaque langage K_a de la grammaire G peut être associé à un triplet $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_a, \mu)$ et X à $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_X, \mu)$. Ceci nous invite à envisager l'application qui à toute ramification r engendrée au sens large par G associe l'image par μ de son mot des racines ; plus précisément posons, pour $r \in \hat{V}$:

$$\psi(r) = SI\ r \in \mathfrak{B}(G)\ \text{ALORS}\ \mu(\rho(r))\ \text{SINON}\ 0$$

(où 0 est choisi de façon que $0 \notin \mathfrak{M}$). Il reste à munir $\mathfrak{M} \cup \{0\}$ d'une structure de binoïde telle que ψ soit un homomorphisme. D'après 1.5.3. :

$$\psi(r + s) = SI\ r \in \mathfrak{B}(G) \text{ et } s \in \mathfrak{B}(G)\ \text{ALORS}\ \mu(\rho(r) + \rho(s))\ \text{SINON}\ 0$$

$$\psi(a \times r) = SI\ r \in \mathfrak{B}(G) \text{ et } a ::= \rho(r)\ \text{ALORS}\ \mu(a)\ \text{SINON}\ 0.$$

D'où la définition des lois de binoïde sur $\mathfrak{M} \cup \{0\}$ (la loi de monoïde dans $\mathfrak{M}$ est notée .) :

$$m + m' = SI\ m \neq 0 \text{ et } m' \neq 0\ \text{ALORS}\ m.m'\ \text{SINON}\ 0$$

$$a \times m = SI\ m \neq 0 \text{ et } m \in \mathfrak{M}_A\ \text{ALORS}\ \mu(a)\ \text{SINON}\ 0.$$

Ainsi ψ est l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{M} \cup \{0\}$ et :

$$r \in \mathcal{S}(G) \Leftrightarrow r \in \mathfrak{B}(G) \text{ et } \psi(r) \in \mathfrak{M}_X \Leftrightarrow \psi(r) \neq 0 \text{ et } \psi(r) \in \mathfrak{M}_X \Leftrightarrow \psi(r) \in \mathfrak{M}_X,$$

autrement dit $\mathcal{S}(G)$ est le bilangage régulier associé à $(\mathfrak{M} \cup \{0\}, \mathfrak{M}_X, \psi)$.

En particulier tout langage régulier X est le bilangage grammatical engendré par la grammaire (V, ::=, X) où tous les langages K_a sont réduits au mot vide ; c'est-à-dire :

3.2.4. Corollaire :

Les langages réguliers sont des bilanges réguliers.

On retrouve , comme conséquence du théorème 3.2.2., les résultats de la proposition 3.4.1. (1).

3.2.5. Remarque :

Le lemme 3.2.3. s'étend immédiatement aux bilanges réguliers : deux bilangages réguliers sur V sont images réciproques par homomorphisme de parties d'un même binoïde fini.

Nous verrons plus loin (3.4.14.) qu'il existe d'autres bilangages réguliers que les bilangages grammaticaux. Le théorème 3.2.2. admet cependant une réciproque faible (3.2.8.) qui résultera de l'étude suivante.

Parmi les bilangages grammaticaux nous allons envisager les bilangages locaux qui généralisent les langages locaux en ce sens que leurs ramifications ne sont soumises qu'à des contraintes de "voisinage" ; les résultats obtenus sont tout à fait analogues à ceux relatifs aux langages locaux.

3.2.6. Définition :

Etant donné trois sous-ensembles de V^2 : $\mathcal{C}$, d, f et trois sous-ensembles de V : D, F et ϕ, appelons bilangage local défini par $\mathcal{C}$, d, f, D, F, ϕ le bilangage grammatical $\mathcal{G}$ (G) engendré par la grammaire G = (V, ::=, X) où :

- pour tout a $\in$ V l'ensemble des productions de a est le langage régulier formé du langage local $[\{b \mid (a, b) \in d\}, \mathcal{C}, \{b \mid (a, b) \in f\}]$ réuni à $\{\wedge\}$ si a $\in \phi$ (cf. 0.1.2) ;
- X est le langage local $[D, \mathcal{C}, F]$.

(1) D'autre part, si $\langle \Sigma, \sigma \rangle$ est une espèce (species) finie au sens de Thatcher et Wright (1966) l'ensemble des termes T_Σ peut être identifié à un bilangage régulier (engendré par la grammaire de vocabulaire Σ, d'ensemble d'axiomes Σ où, pour tout f $\in \Sigma$, $K_f = \Sigma^{\sigma(f)}$) et les parties de T_Σ qui sont reconnaissables sont les bilangages réguliers contenus dans T_Σ.

Les bilangages locaux sont réguliers. La réciproque est fausse (3.4.14.) ; cependant le théorème suivant donne une nouvelle caractérisation des bilangages réguliers à partir des bilangages locaux :

3.2.7. Théorème :

Les bilangages réguliers ne contenant pas la ramification vide sont les transformés par transcription des bilangages locaux, et eux seuls.

Les bilangages transcrits des bilangages locaux sont réguliers (3.1.6. et ne contiennent pas la ramification vide.

Réciproquement soit L un bilangage régulier, associé à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \psi)$, ne contenant pas la ramification vide. Envisageons l'ensemble fini $\mathcal{V} = \mathfrak{B}^2 \times V$ et l'application δ de $\hat{V}$ dans $\hat{\mathcal{V}}$ définie par :

$\delta(\wedge) = \wedge$,

$\delta(r + a \times r') = \delta(r) + [(\psi(r + a \times r'), \psi(a \times r'), a) \times \delta(r')]$.

Par récurrence sur l'ordre d'une ramification $r \neq \wedge$ de $\hat{V}$, il est facile de prouver que $\delta(r)$ appartient au bilangage local $\mathfrak{L}$ sur $\mathcal{V}$ défini par :

$D = \{(b, b, a)\}$, $\mathcal{C} = \{(b_1, b_2, a), (b_1 + b_2', b_2', a')\}$, $F = \mathcal{V}$,

$d = \mathcal{V} \times D$, $f = \{(b_1, a \times b_1', a), (b_1', b_2', a')\}$, $\phi = \{(b_1, \psi(a), a)\}$,

où b, b_1, b_2, b_1', b_2', décrivent $\mathfrak{B}$ et a, a' décrivent V. De plus r est déduit de $\delta(r)$ par la transcription ϱ de $\hat{\mathcal{V}}$ dans $\hat{V}$ définie par $\varrho(b_1, b_2, a) = a$:

(1) pour tout $r \in \hat{V}$, $\varrho \circ \delta(r) = r$.

Inversement, soit s une ramification de $\mathfrak{L}$. Montrons, par récurrence sur l'ordre de s, que :

(2) $\delta \circ \varrho(s) = s$,

d'où il résulte que la première composante de la dernière racine de s est $(\varrho(s))$.

L'assertion (2) est évidente si s est vide. Sinon,

$$s = s' + ((b_1, b_2, a) \times s'').$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\delta \circ \varrho(s) = \delta(\varrho(s') + a \times \varrho(s''))$$

$$= s' + [(\psi \circ \varrho(s') + a \times \psi \circ \varrho(s''), a \times \psi \circ \varrho(s''), a \times s'')]$$

Toujours d'après l'hypothèse de récurrence, comme s appartient à $\mathfrak{B}$, nécessairement :

$$b_2 = a \times \psi \circ \varrho(s''),$$

$$b_1 = \psi \circ \varrho(s') + b_2 = \psi \circ \varrho(s') + a \times \psi \circ \varrho(s'') ;$$

et finalement $\delta \circ \varrho(s) = s$.

Les assertions (1) et (2) prouvent que δ est une bijection de $\hat{V}$ sur $\mathfrak{B}$, dont la bijection réciproque est la restriction de ϱ à $\mathfrak{B}$.

Comme la première composante de la dernière racine de $\delta(r)$ est $\psi(r)$, L est transformé par δ en un bilangage local $\mathfrak{B}'$ qui diffère de $\mathfrak{B}$ uniquement par son ensemble final

$$F' = \{(b_1, b_2, a) \mid b_1 \in \mathfrak{B}'\}.$$

Autrement dit $\delta(L) = \mathfrak{B}'$ et $\varrho(\mathfrak{B}') = L$.

Le théorème est ainsi démontré. La démonstration prouve de plus qu'un bilangage régulier est déduit bijectivement d'un bilangage local par une transcription.

D'autre part, $L \cup \{\wedge\} = \varrho(\mathfrak{B}' \cup \{\wedge\})$ et $\mathfrak{B}' \cup \{\wedge\}$ est un bilangage grammatical ; il en résulte la première des deux conséquences suivantes :

3.2.8. Conséquences :

a) Tout bilangage régulier est déduit par transcription d'un bilangage grammatical.

b) Tout bilangage grammatical ne contenant pas la ramification vide est déduit par transcription d'un bilangage local.

3.2.9. Théorème :

Les langages de Chomsky sont les ensembles des mots des feuilles des bilangages réguliers et eux seuls.

Les langages de Chomsky sont les ensembles des mots des feuilles des bilangages grammaticaux qui sont réguliers. Réciproquement, tout bilangage régulier L est transcrit d'un bilangage grammatical $\mathfrak{B}$ dont les mots des feuilles forment un langage de Chomsky ; donc les mots des feuilles de L, qui sont les transcrits des mots des feuilles de $\mathfrak{B}$, forment encore un langage de Chomsky.

Examinons aussi l'ensemble des mots des racines d'un bilangage régulier : c'est le transcrit de l'ensemble des mots des racines d'un bilangage grammatical, engendré par une grammaire $G = (V, ::=, X)$; c'est donc le transcrit du langage $X \cap \{a \in V \mid \mathfrak{B}(G, a) \neq \emptyset\}^*$ qui est régulier ; ainsi l'ensemble des mots des racines d'un bilangage régulier est un langage régulier. La réciproque découle de 3.2.4. D'où l'énoncé :

3.2.10. Théorème :

Les langages réguliers sont les ensembles des mots des racines des bilangages réguliers et eux seuls.

En particulier, tout bilangage régulier sur V qui est un langage sur V est un langage régulier.

3.2.11. Contrexemples de bilangages réguliers :

Soient deux ramifications distinctes r et s, et L l'ensemble des n.r + n.s pour n entier. Tout homomorphisme de binoïdes est un homomorphisme de monoïdes pour les lois internes +. Si donc L était un bilangage régulier, ce serait aussi un langage régulier du monoïde libre engendré par r et s : L n'est pas un bilangage régulier.

3.3 PROPRIETES ELEMENTAIRES DES BILANGAGES REGULIERS.

3.3.1. Proposition : Propriétés booléennes :

Le complémentaire dans $\hat{V}$ d'un bilangage régulier sur V est un bilangage régulier. L'intersection et la réunion de deux bilangages réguliers sont des bilangages réguliers.

Si L est le bilangage régulier associé à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \psi)$ $\int_{\mathfrak{V}}^{L}$ est le bilangage régulier associé à $(\mathfrak{B}, \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}, \psi)$.

Si L_1 et L_2 sont deux bilangages réguliers il existe un binoïde fini $\mathfrak{B}$ et deux parties $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ de $\mathfrak{B}$ tels que, si ψ est l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$, $L_1 = \psi^{-1}(\mathfrak{B}_1)$ et $L_2 = \psi^{-1}(\mathfrak{B}_2)$ (cf. 3.2.5.). Dans ces conditions :

$$L_1 \cap L_2 = \psi^{-1}(\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2), \quad L_1 \cup L_2 = \psi^{-1}(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2).$$

3.3.2. Proposition :

Le bilangage réfléchi d'un bilangage régulier est régulier.

Soit un bilangage régulier L associé à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{S}', \psi)$; définissons l'application $\tilde{\psi}$ de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$ par :

$$\tilde{\psi}(r) = \psi(\tilde{r}),$$

en particulier : $\tilde{\psi}(r + s) = \tilde{\psi}(s) + \tilde{\psi}(r)$

$$\tilde{\psi}(a \times r) = a \times \tilde{\psi}(r).$$

Par conséquent $\tilde{\psi}$ est l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$ muni de la structure de binoïde sur V définie par la loi de composition interne $\tilde{+}$:

$$b \tilde{+} b' = b' + b$$

et la loi de composition externe $\times$.

Enfin, il est clair que $\tilde{L} = \tilde{\psi}^{-1}(\mathfrak{B}')$; donc $\tilde{L}$ est régulier.

3.4 STABILITE DES BILANGAGES REGULIERS RELATIVEMENT A PLUSIEURS OPERATIONS.

3.4.1. Proposition :

Si L et L' sont deux bilangages réguliers sur un vocabulaire V, les bilangages L + L' et $\star$ L sont réguliers.

Nous savons que :

- tout bilangage régulier est transcrit d'un bilangage grammatical ;
- le transcrit d'un bilangage grammatical est un bilangage régulier.

En outre, si θ est une transcription, il est clair que $\theta(L + L') = \theta(L) + \theta(L')$ et $\theta(\star L) = \star\, \theta(L)$.

Par conséquent il suffit de montrer que si L et L' sont deux bilangages engendrés par les grammaires $G = (V, ::=, X)$ et $G' = (V', ::=', X')$, sur deux vocabulaires V et V' qu'on peut toujours supposer disjoints, L + L' (resp. $\star$ L) sont des bilangages grammaticaux sur $V \cup V'$ resp. V).

Il est évident que L + L' est inclus dans le bilangage $\mathcal{S}(G_0)$ engendré par $G_0 = (V \cup V', ::= \underline{\text{OU}} ::=', X + X')$. Réciproquement soit $r \in \mathcal{S}(G_0)$; le mot des racines de r appartient à X + X' donc il existe deux ramifications s et s' telles que $r = s + s'$, $\rho(s) \in X$, $\rho(s') \in X'$ (1.3.6.). On voit par récurrence, en utilisant (1.5.3.), que, si t appartient à $\mathfrak{L}(G_0)$ et $\rho(t)$ à V^*, alors t appartient à $\mathfrak{L}(G)$, car V et V' sont disjoints ; ainsi s est dans $\mathfrak{L}(G)$ et, comme $\rho(s)$ est dans X, s appartient à L ; de même

façon, s' appartient à L', ce qui achève la démonstration.

Montrons que l'itéré $\star L$ n'est autre que le bilangage engendré par $G_1 = (V, ::=, \star X)$. Il est évident que $\star L$ est inclus dans $\mathcal{S}(G_1)$. Réciproquement soit $r \in \mathcal{S}(G_1)$; $\rho(r)$ appartient à $\star X$ et r s'écrit $r_1 + \ldots + r_p$ où les ramifications $r_1, \ldots, r_p$ ont leur mot des racines dans X. Comme $\mathcal{R}(G_1) = \mathcal{R}(G)$, $r_1, \ldots, r_p$ appartiennent à $\mathcal{R}(G)$ et, aussi à $\mathcal{S}(G) = L$; autrement dit, r appartient à $\star L$.

3.4.2. Proposition :

(a) Si L_1 et L_2 sont deux bilangages réguliers sur V, les bilangages $L_1 \times_D L_2$ et $L_1 \times_G L_2$ sont réguliers.

(b) Si L est un bilangage régulier, L^* est régulier.

Lemme : Si L_1 et L_2 sont deux bilangages réguliers il existe un binoïde fini $\mathfrak{B}$, deux parties $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ de $\mathfrak{B}$ telles que, si ψ est l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$ et e l'élément neutre de $\mathfrak{B}$:

$L_1 = \psi^{-1}(\mathfrak{B}_1)$, $L_2 = \psi^{-1}(\mathfrak{B}_2)$ et $\{\wedge\} = \psi^{-1}(e)$.

Soit $\mathfrak{B}_0$ un binoïde fini tel que L_1 et L_2 soient images réciproques de parties de $\mathfrak{B}_0$ par l'homomorphisme ψ_0 de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}_0$ (3.2.5.) ; notons e_0 l'élément neutre de $\mathfrak{B}_0$; e étant un élément qui n'appartient pas à $\mathfrak{B}_0$; prolongeons à $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \cup \{e\}$ les lois de binoïde de $\mathfrak{B}_0$ en posant :

pour $b \in \mathfrak{B}$ $\quad e + b = b + e = b$

pour $a \in V$ $\quad a \times e = a \times e_0$.

L'application ψ de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$ définie par

$\psi(r) = \psi_0(r)$ si $r \neq \wedge$

$\psi(\wedge) = e$

est l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{B}$. Il est clair que $\psi^{-1}(e) = \{\wedge\}$ et que L_1 et L_2 sont images réciproques de parties de $\mathfrak{B}$.

Revenons à la démonstration de (a) : L_1 et L_2 sont associés à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \psi)$ et $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_2, \psi)$ satisfaisants au lemme. Dans un premier temps nous supposerons que L_1 et L_2 ne contiennent pas $\wedge$. Soit l'application ξ de $\hat{V}$ dans l'ensemble produit $\mathfrak{H} = \mathcal{P}(\mathfrak{B}) \times \{0,1\}$ définie par :

$$\xi(r) = \{(\psi(r), 0)\} \cup \{(\psi(r'), 1) \mid r \in r' \times_D L_2 \text{ et } r' \neq \wedge\} ;$$

ainsi $\quad L_1 \times_D L_2 = \{r \in \hat{V} \mid \xi(r) \cap (\mathfrak{B}_1 \times \{1\}) \neq \emptyset\}$.

Il reste à munir l'ensemble fini $\mathfrak{H}$ d'une structure de binoïde de façon que ξ soit un homomorphisme ; examinons donc $\xi(\wedge)$, $\xi(r+s)$ et $\xi(a \times r)$:

$\xi(\wedge) = \{(e, 0)\}$

$\xi(r+s) = \{(\psi(r)+\psi(s), 0)\} \cup \{(\psi(r'), 1) \mid r+s \in r' \times_D L_2 \text{ et } r' \neq \wedge\}$,

or, si s n'est pas vide :

$(r' \neq \wedge)$ et $(r+s \in r' \times_D L_2) \Leftrightarrow (\exists\, r'' \neq \wedge)\ (r' = r+r'' \text{ et } s \in r'' \times_D L_2)$

et, donc pour $s \neq \wedge$:

$$\xi(r+s) = \{(\psi(r) + \psi(s), 0)\} \cup \{(\psi(r) + \psi(r''), 1) \mid s \in r'' \times_D L_2 \text{ et } r'' \neq \wedge\}.$$

D'autre part :

$$\xi(a \times r) = \{(a \times \psi(r), 0)\} \cup \{(\psi(r'), 1) \mid a \times r \in r' \times_D L_2 \text{ et } r' \neq \wedge\} ;$$

et :

$(r' \neq \wedge)$ et $(a \times r \in r' \times_D L_2) \Leftrightarrow (r' = a \text{ et } r \in L_2)$ OU $(\exists\, r'' \neq \wedge, r' = a \times r'' \text{ et } r \in r'' \times_D L_2)$,

d'où

$$\xi(a \times r) = \{(a \times \psi(r), 0)\} \cup \{(a \times \psi(r''), 1) \mid r \in r'' \times_D L_2 \text{ et } r'' \neq \wedge\} \quad \text{si } r \notin L_2 ,$$

$$\xi(a \times r) = \{(a \times \psi(r), 0)\} \cup \{(a \times \psi(r''), 1) \mid r \in r'' \times_D L_2 \text{ et } r'' \neq \wedge\} \cup \{(\psi(a), 1)\} \text{ si } r \in L_2$$

Il suffit donc de munir $\mathfrak{H}$ des lois suivantes (notées + et $\times$) : pour $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'' \in \mathfrak{H}$ et $a \in V$:

- Si $\mathfrak{B}'' \neq \{(e,0)\}$,

  $\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' = \{(b'+b'',0) \mid (b',0) \in \mathfrak{B}',\ (b'',0) \in \mathfrak{B}''\} \cup \{(b'+b'',1) \mid (b',0) \in \mathfrak{B}',\ (b'',1) \in \mathfrak{B}''\}$

- $\mathfrak{B}' + \{(e,0)\} = \mathfrak{B}'$,

- $a \times \mathfrak{B}' = \{(a \times b',0) \mid (b',0) \in \mathfrak{B}'\} \cup \{(a \times b',1) \mid (b',1) \in \mathfrak{B}'\}$ si $\mathfrak{B}' \cap (\mathfrak{B}_2 \times \{0\}) = \emptyset$,

- $a \times \mathfrak{B}' = \{(a \times b',0) \mid (b',0) \in \mathfrak{B}\} \cup \{(a \times b',1) \mid (b',1) \in \mathfrak{B}'\} \cup \{(\psi(a),1)$ si

$\mathfrak{B}' \cap (\mathfrak{B}_2 \times \{0\}) \neq \emptyset$.

$L_1 \times_D L_2$ est donc régulier.

Si L_1 ou L_2 contient $\wedge$ il est facile de se ramener au cas précédent :

$\wedge \in L_1,\ \wedge \notin L_2 \Rightarrow L_1 \times_D L_2 = (L_1 \setminus \{\wedge\}) \times_D L_2 \cup L_2$

$\wedge \notin L_1,\ \wedge \in L_2 \Rightarrow L_1 \times_D L_2 = L_1 \times_D (L_2 \setminus \{\wedge\}) \cup L_1$

$\wedge \in L_1,\ \wedge \in L_2 \Rightarrow L_1 \times_D L_2 = (L_1 \setminus \{\wedge\}) \times_D (L_2 \setminus \{\wedge\}) \cup L_1 \cup L_2$.

Enfin $L_1 \times_G L_2$ est régulier car $L_1 \times_G L_2 = \widetilde{L_1 \times L_2}$.

La démonstration de (b) est tout à fait analogue. Remarquons tout d'abord que, pour tout bilangage L :

$$(L \setminus \{\wedge\})^* = L^*$$

Il suffit donc d'étudier le cas où L ne contient pas $\wedge$. L est associé à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \psi)$ où ψ satisfait au lemme. Soit ξ l'application de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{B}) \times \{0,1\}$ définie par :

$\xi(r) = \{(\psi(r),0)\} \cup \{(\psi(r'),1) \mid r \in r' \times L^*$ et $r' \neq \wedge\}$;

alors :

$r \in L^* r = \wedge$ OU $(\exists\, r' \in L)\ (r \in r' \times L^*) \Leftrightarrow \xi(r) = \{(e,0)\}$ ou $\xi(r) \cap (\mathfrak{B}_1 \times \{1\}) \neq \emptyset$.

C'est-à-dire que L^* est l'image réciproque par ξ d'une partie de $\mathfrak{P}$ que nous noterons $\mathfrak{P}'$.

Etudions l'application ξ :

$\xi(\wedge) = \{(e,0)\}$,

pour $s \neq \wedge$:

$\xi(r+s) = \{(\psi(r) + \psi(s),0)\} \cup \{(\psi(r) + \psi(r''),1) \mid s \in r'' \times L^*$ et $r'' \neq \wedge\}$,

d'autre part :

$\xi(a \times r) = \{(a \times \psi(r),0)\} \cup \{(a \times \psi(r''),1) \mid r \in r'' \times L^*$ et $r'' \neq \wedge\}$ si $r \notin L^*$,

$\xi(a \times r) = \{(a \times \psi(r),0)\} \cup \{(a \times \psi(r''),1) \mid r \in r'' \times L^*$ et $r'' \neq \wedge\} \cup \{(\psi(a),1)\}$ si $r \in L^*$.

Finalement il suffit de munir $\mathfrak{P}$ de la même loi interne qu'en (a), et de la loi externe :

$a \times \mathfrak{B}' = \{(a \times b',0) \mid (b',0) \in \mathfrak{B}'\} \cup \{(a \times b',1) \mid (b',1) \in \mathfrak{B}'\}$ si $\mathfrak{B}' \notin \mathfrak{P}'$,

$a \times \mathfrak{B}' = \{(a \times b',0) \mid (b',0) \in \mathfrak{B}'\} \cup \{(a \times b',1) \mid (b',1) \in \mathfrak{B}'\} \cup \{(\psi(a),1)\}$ si $\mathfrak{B}' \in \mathfrak{P}'$.

3.4.3. Corollaire

Si L est un bilangage régulier sur V, pour tout $a \in V$, $a \times L$ est un bilangage régulier.

Dans le chapitre suivant nous serons amené à étudier des fonctions polynômiales dans $\hat{V}$ (4.1.) ce qui permettra de généraliser les propositions 3.4.1 et 3.4.2 (4.1.4).

Introduisons maintenant un nouveau produit entre deux bilangages L et L', qui consiste, intuitivement, à associer à L et L' l'ensemble des ramifications obtenues en "greffant" à toute feuille a d'une ramification de L, une ramification de L'.

3.4.4. Greffe, greffe itérée :

La greffe en a d'un bilangage L sur une ramification r est le bilangage, noté $\mathcal{G}_a(r, L)$, ou $r_a L$, défini de la façon suivante, par récurrence sur la ramification r : pour $a, b \in V$, $r, s \in \hat{V}$,

$\mathcal{G}_a(\wedge, L) = \{\wedge\}$,

$\mathcal{G}_a(r + s, L) = \mathcal{G}_a(r, L) + \mathcal{G}_a(s, L)$,

$\mathcal{G}_a(b \times r, L) = b \times \mathcal{G}_a(r, L)$ si $b \neq a$ ou $r \neq \wedge$,

$\mathcal{G}_a(a, L) = a \times L$.

La greffe en a d'un bilangage L sur un bilangage L' notée $L' \dot{a} L$ est le bilangage

$$\bigcup_{r \in L'} r .{}_{a} L.$$

La greffe itérée en a d'un bilangage L est le bilangage $L^{\star a}$ défini par :

$L^{0,a} = \{\wedge\}$, $L^{p,a} = L .{}_{a} L^{p-1,a}$ pour $p \geq 1$ et $L^{\star a} = \bigcup_{p=0}^{+\infty} L^{p,a}$

Le bilangage $\bigcup_{p=1}^{+\infty} L^{p,a}$ est noté $\bar{L}^{a}$.

Avant de montrer que la classe des bilangages réguliers est stable pour ces nouvelles opérations, indiquons quelques propriétés simples qui nous seront utiles.

3.4.5. Proposition :

Soient a un élément de V, L_1 et L_2 deux bilangages sur V, L_1 ne contenant pas la ramification vide :

$$r \dot{a} (L_1 \dot{a} L_2) = (r \dot{a} L_1) \dot{a} L_2$$

La proposition se démontre par récurrence sur r, en quatre étapes :

(a) = $r = \wedge$

(b) = $r = r' + r''$

(c) $r = b \times r'$ avec $b \neq a$ ou $r \neq \wedge$

(d) $r = a$

Nous ne traiterons que ce dernier cas, les autres étant immédiats :

$$a .{}_{a} (L_1 \dot{a} L_2) = a \times (L_1 \dot{a} L_2)$$
$$= a \times (\bigcup_{r \in L_1} r .{}_{a} L_2)$$
$$= \bigcup_{r \in L_1} a \times (r \dot{a} L_2)$$

$$= (\bigcup_{r \in L_1} a \times r) .{}_{a} L_2 \text{ car } L_1 \text{ ne contient pas } \wedge$$
$$= (a \times L_1) \dot{a} L_2$$
$$= (a .{}_{a} L_1) .{}_{a} L_2.$$

3.4.6. Conséquence:

Soient L, L_1, L_2 des bilangages sur V, L_1 ne contenant pas $\wedge$:

$$L \dot{a} (L_1 \dot{a} L_2) = (L \dot{a} L_1) \dot{a} L_2$$

3.4.7. Proposition :

Si s appartient à $\mathcal{G}_a(r, L)$, alors $\rho(s) = \rho(r)$.

Ce résultat est immédiat par récurrence sur r.

3.4.8. Conséquence :

Si s appartient à $\bar{L}^{a}$, $\rho(s)$ est le mot des racines d'une ramification de L.

La démonstration est immédiate pour $s \in L^{n,a}$ par récurrence sur $n \geq 1$.

3.4.9. Proposition :

Toute famille de prédécesseur b différent de a dans une ramification de $\mathcal{G}_a(r, L)$ est une famille de prédécesseur b dans r ou dans une ramification de L. Toute famille de prédécesseur a dans une ramification de $\mathcal{G}_a(r, L)$ est :

- soit une famille non vide de prédécesseur a dans r,
- soit une famille de prédécesseur a dans une ramification de L,
- soit le mot des racines d'une ramification de L.

(Immédiat par récurrence sur r).

3.4.10. Conséquence :

Toute famille de prédécesseur b dans une ramification de $\bar{L}^a$ est une famille de prédécesseur b dans une ramification de L, ou, lorsque b = a, le mot des racines d'une ramification de L.

3.4.11. Proposition :

Si L_1 et L_2 sont deux bilangages réguliers $L_1 \dot{a} L_2$ est régulier.

L_1 et L_2 peuvent être associés respectivement à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \psi)$ et $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_2, \psi)$ où ψ satisfait au lemme (3.4.2.) $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{B}) \times \{0,1\}$ est un ensemble fini ; soit l'application ξ de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{P}$ définie par :

$$\xi(r) = \{(\psi(r), 0)\} \cup \{\psi(r'), 1) \mid r \in \mathcal{G}_a(r', L_2)\}.$$

Alors $L_1 \dot{a} L_2 = \{r \in \hat{V} \mid \xi(r) \cap (\mathfrak{B}_1 \times \{1\}) \neq \emptyset\}$.

Afin de munir $\mathfrak{P}$ de lois telles que ξ soit un homomorphisme examinons $\xi(\wedge)$, $\xi(r+s)$ et $\xi(a_1 x r)$:

$\xi(\wedge) = \{(e, 0), (e, 1)\}$ où e est l'élément neutre de $\mathfrak{B}$.

$\xi(r+s) = \{(\psi(r+s), 0)\} \cup \{(\psi(t'), 1) \mid r + s \in \mathcal{G}_a(t', L_2)\}$

$= \{(\psi(r) + \psi(s), 0)\} \cup \{(\psi(r') + \psi(s'), 1) \mid r \in \mathcal{G}_a(r', L_2)$ et $s \in \mathcal{G}_a(s', L_2)\}$; en effet, comme r + s et t' ont même mot des racines (3.4.7.), il résulte de la proposition 1.3.6. que :

$r + s \in \mathcal{G}_a(t', L_2) \Rightarrow (\exists\, r'$ et $s')\ (r' + s' = t'$ et $r \in \mathcal{G}_a(r', L_2)$ et $s \in \mathcal{G}_a(s', L_2))$ la réciproque est évidente.

$$\xi(a_1 x r) = \{(\psi(a_1 x r), 0)\} \cup \{(\psi(r'), 1) \mid a_1 x r \in \mathcal{G}_a(r', L_2)\}$$

Or, comme $a_1 \times r$ et r' ont même racine a_1, pour $a_1 \neq a$:

$$a_1 \times r \in \mathcal{G}_a(r', L_2) \Leftrightarrow (\exists\, r'')\ (r' = a_1 \times r'' \text{ et } r \in \mathcal{G}_a(r'', L_2)).$$

D'autre part :

$$a x r \in \mathcal{G}_a(r', L_2) \Leftrightarrow (\exists\, r'')\ (r'' \neq \wedge \text{ et } r' = a x r'' \text{ et } r \in \mathcal{G}_a(r'', L_2)) \text{ ou } (r' = a \text{ et } r \in L_2).$$

Par suite :

$$\xi(a_1 x r) = \{(a_1 x \psi(r), 0)\} \cup \{(a_1 x \psi(r''), 1) \mid r \in \mathcal{G}_a(r'', L_2)\} \text{ si } a_1 \neq a,$$

$$\xi(a x r) = \{(a x \psi(r), 0)\} \cup \{(a x \psi(r''), 1) \mid r \in \mathcal{G}_a(r'', L_2) \text{ et } r'' \neq \wedge\} \text{ si } r \notin L_2$$

$$\xi(a x r) = \{(a x \psi(r), 0)\} \cup \{(a x \psi(r''), 1) \mid r \in \mathcal{G}_a(r'', L_2) \text{ et } r'' \neq \wedge\} \cup \{(\psi(a), 1)\} \text{ si } r \in L_2.$$

Pour que ξ soit l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{P}$, il suffit donc de munir $\mathfrak{P}$ de la structure suivante de binoïde sur V :

pour $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'' \in \mathfrak{P}$, A, B $\in$ V :

$\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' = \{(b'+b'', 0) \mid (b', 0) \in \mathfrak{B}'$ et $(b', 0) \in \mathfrak{B}''\} \cup \{(b'+b'', 1) \mid (b', 1) \in \mathfrak{B}'$ et $(b'', 1) \in \mathfrak{B}''\}$,

$a_1 x \mathfrak{B}' = \{(a_1 x b', 0) \mid (b', 0) \in \mathfrak{B}'\} \cup \{(a_1 x b', 1) \mid (b', 1) \in \mathfrak{B}'\}$ si $a_1 \neq a$

$a x \mathfrak{B}' = \{(a x b', 0) \mid (b', 0) \in \mathfrak{B}'\} \cup \{(a x b', 1) \mid (b', 1) \in \mathfrak{B}'$ et $b' \neq e\}$ si $\mathfrak{B}' \cap (\mathfrak{B}_2 \times \{0\}) = \emptyset$

$a x \mathfrak{B}' = \{(a x b', 0)\ (b', 0) \in \mathfrak{B}'\} \cup \{(a x b', 1) \mid (b', 1) \in \mathfrak{B}'$ et $b' \neq e\} \cup \{(a x e, 1)\}$ si $\mathfrak{B}' \cap (\mathfrak{B}_2 \times \{0\}) \neq \emptyset$.

$L_1 \dot{a} L_2$ est donc régulier.

3.4.12. Proposition :

Si L est un bilangage régulier, L^{*a} est un bilangage régulier.

L est associé à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \psi)$ où ψ satisfait au lemme (3.4.2.). Envisageons l'ensemble fini $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\mathfrak{B})$, et soit ξ l'application de $\hat{V}$ dans $\mathfrak{P}$ définie par :

$$\xi(r) = \{\psi(r') \mid r \in \mathcal{G}_a(r', L^{*a})\}.$$

Alors :

$r \in L^{*a} \Leftrightarrow r = \wedge$ ou $(\exists\, r' \in L)\ (r \in \mathcal{G}_a(r', L^{*a})) \Leftrightarrow \xi(r) = \{e\}$ ou $\xi(r) \cap \mathfrak{B}_1 \neq \emptyset$.

De même que précédemment :

$\xi(\wedge) = \{e\}$

$\xi(r+s) = \{\psi(r') + \psi(s') \mid r \in \mathcal{G}_a(r', L^{*a})$ et $s \in \mathcal{G}_a(s', L^{*a})\}$

$\xi(a_1 x r) = \{a_1 \times \psi(r'') \mid r \in \mathcal{G}_{a_1}(r'', L^{*a})\}$ si $a_1 \neq a$

$\xi(a \times r) = \{a \times \psi(r'') \mid r \in \mathcal{G}_a(r'', L^{*a}) \text{ et } r'' \neq \wedge\}$ si $r \notin L^{*a}$

$\xi(a \times \hat{r}) = \{a \times \psi(r'') \mid r \in \mathcal{G}_a(r'', L^{*a}) \text{ et } r'' \neq \wedge\} \cup \{\psi(a)\}$ si $r \in L^{*a}$

$\mathbb{B}$ est muni d'une structure de binoïde telle que ξ soit l'homomorphisme de $\hat{V}$ dans $\mathbb{B}$ si on pose :

$\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' = \{b' + b'' \mid b' \in \mathfrak{B}',\ b'' \in \mathfrak{B}''\}$

$a_1 \times \mathfrak{B}' = \{a_1 \times b' \mid b' \in \mathfrak{B}'\}$ si $a_1 \neq a$

$a \times \mathfrak{B}' = \{a \times b' \mid b' \in \mathfrak{B}' \text{ et } b' \neq e\}$ si $\mathfrak{B}' \neq \{e\}$ et $\mathfrak{B}' \cap \mathfrak{B}_1 = \emptyset$

$a \times \mathfrak{B}' = \{a \times b'\ b' \in \mathfrak{B}' \text{ et } b' \neq e\} \cup \{a \times e\}$ si $\mathfrak{B}' = \{e\}$ ou $\mathfrak{B}' \cap \mathfrak{B}_1 \neq \emptyset$.

Les parties finies de $\hat{V}$ sont des réunions finies de ramifications, qui sont des combinaisons finies par + et $\times$ d'éléments de V ; d'où le résultat suivant (en appliquant : 3.2.1 , 3.3.1 , 3.4.1 et 3.4.3) :

3.4.13. Proposition :

Les parties finies de $\hat{V}$ sont des bilangages réguliers.

3.4.14. Remarque :

L'ensemble des bilangages grammaticaux sur un vocabulaire fini V n'est pas stable pour les opérations de réunion, somme, produit et greffe. En effet, définissons par exemple, L_1 par son axiome {a} et les productions de a, $K_{1,a} = \{a, \wedge\}$, et L_2 par son axiome {b}, les productions de b, $K_{2,b} = \{b, a\}$, et les productions de a, $K_{2,a} = \{\wedge\}$. Si une grammaire engendrait $L_1 \cup L_2$ (resp. $L_1 + L_2$) elle devrait comprendre les règles relatives à L_1 et celles relatives à L_2 de sorte qu'elle engendrerait des ramifications telles que : $b \times a \times a$ (resp. $a + b \times a \times a$) qui n'est pas dans $L_1 \cup L_2$ (resp. $L_1 + L_2$). De même il est aisé de prouver que si $L_1 \times L_2$ ou $L_1 \grave{a} L_2$ étaient grammaticaux, ces bilangages contiendraient des ramifications telles que $a \times b \times a \times b \times a$ ce qui n'est pas possible. Les

bilangages $L_1 \cup L_2$, $L_1 + L_2$, $L_1 \times L_2$, $L_1 \grave{a} L_2$ sont donc des exemples de bilangages réguliers et non grammaticaux.

3.5 GENERALISATION DU THEOREME DE KLEENE POUR LES BILANGAGES REGULIERS.

3.5.1. Définition :

On appelle bilangages complétement réguliers sur un ensemble V les bilangages sur V qui appartiennent au plus petit ensemble des parties de $\hat{V}$ contenant les parties finies et stable par réunion, somme, somme itérée ainsi que par greffe et greffe itérée en tout élément de V.

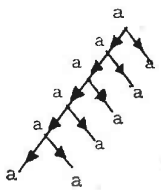
Il résulte donc des propositions 3.4.13, 3.3.1, 3.4.1, 3.4.11 et 3.4.12 que tout bilangage complétement régulier est régulier. Inversement, tout langage régulier est un bilangage complétement régulier d'après le théorème de Kleene. Mais il est faux que tout bilangage régulier soit complétement régulier, comme en témoigne l'exemple suivant.

3.5.2. Exemple :

Soit la grammaire G définie sur le vocabulaire $V_1 = \{a, b\}$ par son unique axiome a et les langages des productions de a et de b : $K_a = \{a + b, \wedge\}$, $K_b = \{\wedge\}$. L_0 est le bilangage défini sur $V = \{a\}$ comme transcrit du bilangage grammatical $\mathcal{S}(G)$ engendré par G, dans la transcription qui transforme a en a et b en a. Ainsi L_0 est un bilangage régulier infini. Plus précisément :

$$\mathcal{S}(G) = a \times (\{\wedge\} \cup (\mathcal{S}(G) + b))$$

$$L_0 = a \times (\{\wedge\} \cup (L_0 + a))$$



Ramification de L_0

Figure 1

Montrons que L_0 n'est pas complétement régulier. Disons qu'un ensemble E de bilangages non vides se déduit d'un ensemble F par l'opération $\boxtimes$ ($\boxtimes$ désignant $\cup$, + ou $\dot{a}$) si on passe de E à F en remplaçant un des bilangages L de E par deux bilangages L' et L'' de F tels que $L = L' \boxtimes L''$, $L' \neq L$, $L'' \neq L$ (ce qui, si $\boxtimes$ est $\dot{a}$ impose $L'' \neq \{\wedge\}$). Disons de même que E se déduit de F par l'opération $\boxtimes$, égale à $*$ ou $*a$, si on passe de E à F en remplaçant L de E par L' de F tel que $L = L' \boxtimes$ et $L' \neq L$ (ce qui impose $L' \neq \{\wedge\}$).

Pour qu'un bilangage F_0 non vide soit complétement régulier, il faut et il suffit qu'il existe un entier $n \geq 0$, une suite $F_1, \ldots, F_n$ d'ensembles de bilangages non vides et une suite d'opérations $\boxtimes_i$ telles que, pour $1 \leq i \leq n$, F_{i-1} se déduise de F_i par $\boxtimes_i$ et que F_n soit formé de bilangages finis.

Supposons $F_0 = L_0$. Montrons, par récurrence sur i, que si L appartient à F_i,

$$L \subset L_0 \cup (L_0 \rightarrow a) \cup \{\wedge\}$$

et que, pour $i > 0$, $\boxtimes_i$ n'est ni $*$ ni $*a$. Comme F_n est formé de bilangages finis, il en résulte que tout F_i est formé de bilangages finis, ce qui contredit le fait que L soit infini.

Supposons que la propriété vraie à l'indice i (évident pour i = 0). Nous montrerons que $\boxtimes_{i+1}$ ne peut être $*$ ni $*a$ et que les deux bilangages L' et L'' qui, dans F_{i+1}, remplacent $L \in F_i$, sont contenus dans $L_0 \cup (L_0 + a) \cup \{\wedge\}$.

a) $\boxtimes_{i+1} = \cup$, $L = L' \cup L''$: l'assertion est évidente car L' et L'' sont contenus dans L.

b) $\boxtimes_{i+1} = +$, $L = L' + L''$: tout $r \in L$ s'écrit $r = r' + r''$ avec $r' \in L'$ et $r'' \in L''$; si r appartient à $L_0 \cup \{\wedge\}$, alors $r = r'$ et $r'' = \wedge$, ou $r = r''$ et $r' = \wedge$; si r

appartient à $L_0 + a$, il existe une autre possibilité : $r' \in L_0$ et $r'' = a$. En tout cas, r' et r'' sont contenus dans $L_0 \cup (L_0 + a) \cup \{\wedge\}$.

c) $\boxtimes_{i+1} = \dot{a}$, $L = L' \dot{a} L''$, $L'' \neq \{\wedge\}$: par récurrence sur r, on voit que, pour $r \neq a$, $\varphi_a(r, L'')$ n'est pas contenu dans $L_0 \cup (L_0 + a)$; donc nécessairement $L' = \{a\}$, $L = a \times L''$: L est contenu dans L_0 qui est égal à $a \times (\{\wedge\} \cup (L_0 + a))$, et par suite L'' est dans $\{\wedge\} \cup (L_0 + a)$.

d) $\boxtimes_{i+1} = *$, $L = * L'$, $L' \neq \{\wedge\}$: L ne peut être contenu dans $L_0 \cup (L_0 + a) \cup \{\wedge\}$ car la longueur de ses ramifications n'est pas bornée.

e) $\boxtimes_{i+1} = *a$ $L = L'^{*a}$, $L' \neq \{\wedge\}$: L contient $L' \dot{a} L'$; d'après l'étude faite en (c), nécessairement $L' = \{a\}$ et $L' \subset \{\wedge\} \cup (L_0 \rightarrow a)$, ce qui est impossible.

3. 5. 3. Théorème :

Un bilangage est régulier si, et seulement si, il est déduit d'un bilangage complétement régulier par une transcription.

Autrement dit, la classe des bilangages réguliers est la plus petite classe contenant les bilangages finis et stable par réunion, somme, somme itérée, greffe, greffe itérée et transcription.

Le transcrit d'un bilangage complétement régulier est un bilangage régulier d'après 3. 1. 6. La réciproque résulte immédiatement du théorème 3. 2. 8 et du résultat suivant :

3. 5. 4. Proposition :

Tout bilangage grammatical est complétement régulier.

Les notations sont celles de 1. 4. 2. Soit une grammaire G. Montrons que $\mathcal{S}(G)$ est complétement régulier, par récurrence sur le nombre de $a \in V$ tels que K_a contienne un mot non vide.

a) Si pour tout $a \in V$, $K_a = \{\wedge\}$ ou $K_a = \emptyset$, $\mathcal{S}(G)$ est l'ensemble des mots de X formés des lettres a telles que $K_a = \{\wedge\}$: c'est un langage régulier, donc un bilangage complétement régulier.

b) Soit a un élément de V tel que K_a contienne un mot non vide. Désignons par G' la grammaire obtenue en remplaçant dans G le langage K_a par $\{\wedge\}$. Nous montrerons que :

(1) si $\wedge \notin K_a$, $\mathcal{S}(G) = \mathcal{S}(G') \dot{a} \overline{\mathcal{L}(G', K_a)}^a \dot{a} \emptyset$

(le produit est alors associatif d'après 3. 4. 6).

(2) si $\wedge \in K_a$, $\mathcal{S}(G) = \mathcal{S}(G') \dot{a} \overline{\mathcal{L}(G', K_a)}^a$.

L'hypothèse de récurrence assure que $\mathcal{S}(G')$ et $\mathcal{L}(G', K_a)$ sont des bilangages complétement réguliers. Il en est donc de même pour

$$\overline{\mathcal{L}(G', K_a)}^a \text{ et } \mathcal{L}(G', K_a) \dot{a} \mathcal{L}(G', K_a)^{*a} \text{ et pour } \mathcal{S}(G).$$

(1) et (2) résultent des lemmes qui suivent.

Notons $\mathcal{L}_n(G; K)$, resp. $\mathcal{L}_n(G)$, l'ensemble des ramifications de $\mathcal{L}(G, K)$, resp. $\mathcal{L}(G)$, où le nombre d'occurrences de a est strictement inférieur à n ; en particulier $\mathcal{L}_0(G, L) = \emptyset$.

Lemme 1 : Pour tout langage régulier K et tout entier naturel n,

$$\mathcal{L}_{n+1}(G, K) \subset \mathcal{L}(G', K) \dot{a} \mathcal{L}_n(G, K_a).$$

Soit $s \in \mathcal{L}_{n+1}(G)$. Nous montrerons, par récurrence sur s, qu'il existe $r \in \mathcal{L}(G')$ tel que $s \in \mathcal{G}_a(r, \mathcal{L}_n(G, K)_a)$; comme alors r et s ont le même mot des racines (3. 4. 7) si $s \in \mathcal{L}_{n+1}(G, K)$, $r \in \mathcal{L}(G', K)$.

a) Si $s = \wedge$, $r = \wedge$ convient.

b) Soit $s = s' + s''$: s' et s'' appartiennent à $\mathcal{L}_{n+1}(G)$:

$s' \in \mathcal{G}_a(r', \mathcal{L}_n(G, K_a))$ et $s'' \in \mathcal{G}_a(r'', \mathcal{L}_n(G, K_a))$ entraine $s'+s'' \in \mathcal{G}_a(r'+r'', \mathcal{L}_n(G, K_a))$

$r' \in \mathcal{L}(G')$ et $r'' \in \mathcal{L}(G')$ entraine $r' + r'' \in \mathcal{L}(G')$.

c) Soit $s = b \times s'$, avec $b \neq a$: $s' \in \mathcal{L}_{n+1}(G)$, $\rho(s') \in K_b$;

$s' \in \mathcal{G}_a(r', \mathcal{L}_n(G, K_a))$ entraine $b \times s' \in \mathcal{G}_a(b \times r', \mathcal{L}_n(G, K_a))$ et $\rho(r') \in K_b$;

$r' \in \mathcal{L}(G')$ entraîne alors $b \times r' \in \mathcal{L}(G')$.

d) Soit $s = a \times s'$: comme $s \in \mathcal{L}_{n+1}(G)$ et $\rho(s) = a$, $s' \in \mathcal{L}_n(G, K_a)$:

$$s \in \mathcal{G}_a(a, \mathcal{L}_n(G; K_a)) \text{ et } a \in \mathcal{L}(G').$$

Lemme 2 : $\mathcal{S}(G) = \mathcal{S}(G') \dot{a} \mathcal{L}(G, K_a)$.

Du lemme 1, avec $K = X$, résulte que toute ramification de $\mathcal{S}(G)$ appartient à $\mathcal{S}(G') \dot{a} \mathcal{L}(G, K_a)$.

Réciproquement, d'après la proposition 3. 4. 9, il est immédiat que si $r \in \mathcal{L}(G')$ et $s \in \mathcal{G}_a(r, \mathcal{L}(G, K_a))$, alors $s \in \mathcal{L}(G)$. De plus, r et s ont le même mot des racines, ce qui achève de démontrer le lemme puisque G et G' admettent les mêmes axiomes.

Lemme 3 : Si K_a ne contient pas le mot vide, $\mathcal{L}(G, K_a) = \overline{\mathcal{L}(G', K_a)}^a \dot{a} \emptyset$

a) Soit $r \in \overline{\mathcal{L}(G', K_a)}^a$ et $s \in \mathcal{G}_a(r, \emptyset)$. Le mot des racines de s appartient à K_a ; d'autre part, d'après les propositions 3. 4. 9 et 3. 4. 10, toute famille de prédécesseur b dans s est une famille de prédécesseur b dans r ; pour $b \neq a$, c'est une famille de prédécesseur b dans une ramification de $\mathcal{L}(G', K_a)$, elle appartient à K_b ; si b = a, elle est non vide et c'est le mot des racines d'une ramification de $\mathcal{L}(G', K_a)$: elle appartient à K_a ; s appartient à $\mathcal{L}(G, K_a)$.

b) Montrons, par récurrence sur n, que

$$\mathcal{L}_n(G, K_a) \subset [\mathcal{L}(G', K_a)]^{n, A} \dot{a} \emptyset$$

La propriété est évidente pour n = 0. Supposons la vraie pour l'entier n ; d'après le lemme 1 avec $K = K_a$, nous en déduisons

$$\mathcal{L}_{n+1}(G, K_a) \subset \mathcal{L}(G', K_a) \grave{a} [\mathcal{L}(G', K_a)]^{n, a} \grave{a} \emptyset$$

$$\mathcal{L}_{n+1}(G, K_a) \subset [\mathcal{L}(G', K_a)]^{n+1, a} \grave{a} \emptyset,$$

car le produit est associatif puisque, la ramification vide n'appartient pas à $\mathcal{L}(G', K_a)$.

Lemme 4 : Si K_a contient le mot vide, $\mathcal{L}(G, K_a) = \overline{\mathcal{L}(G', K_a)}^a$

a) Si $r \in \overline{\mathcal{L}(G', K_a)}^a$ le mot des racines de r appartient à K_a (3.4.8) et toute famille de prédécesseur b dans r est une famille de prédécesseur b dans une ramification de $\mathcal{L}(G', K_a)$ ou, dans le cas b = a, le mot des racines d'une telle ramification : $r \in \mathcal{L}(G, K_a)$.

b) De la même façon qu'au lemme 3, on montre que

$$\mathcal{L}_n(G, K_a) \subset [\mathcal{L}(G', K_a)]^{n, a}.$$

CHAPITRE 4

BILANGAGES ALGEBRIQUES - BIGRAMMAIRES

Dans ce chapitre nous nous proposons de généraliser aux bilangages la notion de langage de Chomsky : cette généralisation est sans surprise. L'objet du premier paragraphe est de définir des fonctions polynomiales qui "substituent" aux nœuds d'une ramification d'autres ramifications ; ces fonctions seront des intermédiaires "techniques" commodes d'une part pour étudier des systèmes d'équations sur des ramifications (4.2), d'autre part pour définir des "grammaires" sur $\Diamond$ dont les seconds membres des règles sont des ramifications, et que nous appelons bigrammaires (4.3) Les définitions des bilangages engendrés par les systèmes (bilangages algébriques) et de ceux engendrés par les bigrammaires (bilangages bigrammaticaux) sont en fait "presque" équivalentes comme le montre le théorème (4.4). Les bilangages bigrammaticaux peuvent aussi être définis à partir des grammaires de Chomsky (voir 0.2.2) et de certaines transformations (4.5). Enfin nous étudions quelques propriétés de ces bilangages et, en particulier nous caractérisons les bilangages réguliers parmi les bilangages bigrammaticaux (4.6, 4.7).

Dans tout ce chapitre on suppose V fini.

Dans tout ce chapitre V désigne un ensemble fini disjoint de $\mathbb{N}$; de plus pour $k \in \mathbb{N}$ nous noterons $[k]$ l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$ des entiers inférieurs ou égaux à k.

4. 1 FONCTIONS POLYNOMIALES.

4. 1. 1. Définition :

Soit k entier supérieur ou égal à 1 ; associons à tout $r \in \widehat{V \cup [k]}$ la fonction $\sigma_{r,k}$ de $\hat{V}^k$ dans $\hat{V}$ appelée fonction polynômiale (ou substitution) et définie par récurrence sur r :

$$\sigma_{\wedge, k}(r_1, \ldots, r_k) = \wedge,$$

$$\sigma_{s+s', k}(r_1, \ldots, r_k) = \sigma_{s, k}(r_1, \ldots, r_k) + \sigma_{s', k}(r_1, \ldots, r_k),$$

pour $a \in V$ $\quad \sigma_{a \times s, k}(r_1, \ldots, r_k) = a \times \sigma_{s, k}(r_1, \ldots, r_k)$,

pour $i \in [k]$ $\quad \sigma_{i \times s, k}(r_1, \ldots, r_k) = r_i \times \sigma_{s, k}(r_1, \ldots, r_k)$.

(Lorsqu'il n'y aura pas ambiguité nous noterons aussi σ_r à la place de $\sigma_{r,k}$)

Exemples :

$$\sigma_{1+2}(r_1, r_2) = r_1 + r_2$$

Avec $r = a \times 1 \times (a+b)$ $\quad \sigma_r(a+c \times a) = a \times (a+c \times a) \times (a+b)$.

4. 1. 2. Propriétés immédiates :

(a) en notant $n_a(r)$ le nombre d'occurrences de a dans r :

$$|\sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_k)| = |r| + \sum_{i=1}^{k} n_i(r)\,(|r_i| - 1)$$

(b) $\mathfrak{S}_k = \{\sigma_{r,k} \mid r \in \widehat{V \cup [k]}\}$ peut être muni d'une structure de dioïde en posant :

(1) $\quad (\forall f, g \in \mathfrak{S}_k)\ (f+g)(r_1, \ldots, r_k) = f(r_1, \ldots, r_k) + g(r_1, \ldots, r_k)$,

(2) $\quad (\forall f, g \in \mathfrak{S}_k)\ (f \times g)(r_1, \ldots, r_k) = f(r_1, \ldots, r_k) \times g(r_1, \ldots, r_k)$.

ou d'une structure de binoïde sur $V \cup [k]$ avec la loi interne définie en (1) et loi externe définie par :

$(\forall a \in V \cup [k],\ \forall f \in \mathfrak{C}_k)\ (a \chi f)\ (r_1, \ldots, r_k) = (\sigma_{a,k} \chi f)\ (r_1, \ldots, r_k)$.

Le dioïde (resp. le binoïde) $\mathfrak{C}_k$ est isomorphe au dioïde (resp. au binoïde) $\widehat{V \cup [k]}$.

(c) La fonction constante $\wedge$, les fonctions f_a et p_i^k (cf. 2.1.2) sont polynômiales.

(d) Toute fonction polynômiale est récursive primitive, mais la réciproque est fausse.

(a) Immédiat par récurrence sur r.

(b) Par définition $\sigma_{r+r',k} = \sigma_{r,k} + \sigma_{r',k}$,

et, par récurrence $\sigma_{r \chi r',k} = \sigma_{r,k} \chi \sigma_{r',k}$;

par suite l'application $\delta : r \longmapsto \sigma_{r,k}$ est un D-homomorphisme et un homomorphisme de binoïde ; montrons que δ est une application bijective de $\widehat{V \cup [k]}$ dans $\mathfrak{C}_k$: la surjectivité de δ est évidente ;

pour prouver l'injectivité de δ, remarquons d'abord que, d'après (a) (avec $|r_1| = \ldots = |r_k| = 1$) si $\sigma_{r,k} = \sigma_{r',k}$, r et r' ont même taille; ainsi nous pouvons raisonner par récurrence sur cette taille commune :

si $|r| = |r'| = 0$ alors $r = r' = \wedge$ sinon, la récurrence est immédiate lorsque les dernières racines de r et r' sont toutes deux entières et toutes deux dans V ;

prouvons qu'il en est toujours ainsi ; en effet, si nous avions

$$r = s + a \chi t, \quad r' = s' + i \chi t' \qquad (a \in V,\ i \in [k])$$

en prenant, par exemple $r_i = b$ $(b \neq a)$, les ramifications $\sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_i, \ldots r_k)$ et $\sigma_{r',k}(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_k)$ n'auraient pas même dernière racine et, a fortiori :

$$\sigma_{r',k} \neq \sigma_{r,k}$$

ce qui contredirait l'hypothèse.

(c) $\sigma_{\wedge,k}$ est la fonction constante $\wedge$;

$f_a(r, s) = \sigma_{1+a\chi 2}(r, s)$;

$p_i^k(r_1, \ldots, r_k) = \sigma_{i,k}(r_1, \ldots, r_k)$.

(d) Il est est immédiat, par récurrence sur r, que $\sigma_{r,k}$ est récursive primitive ; cependant il existe des fonctions récursives primitives autres que les $\sigma_{r,k}$; étudions le cas de la fonction φ : supposons qu'il existe $r \in \widehat{V \cup [1]}$ telle que $\varphi = \sigma_{r,1}$; pour $a \in V$ $\varphi(a) = \sigma_{r,1}(a) = a$,

donc, d'après (a) $|\sigma_{r,1}(a)| = |r| = 1$

or r = 1 ne convient pas car $\sigma_{1,1}$ est l'identité, ni $r = b$ $(b \in V)$, car

$$\sigma_{b,1}(a+a) = b \chi \sigma_{\wedge,1}(a+a) = b \neq \varphi(a+a).$$

Finalement φ qui est récursive primitive n'est pas polynomiale.

Indiquons maintenant une nouvelle caractérisation des fonctions polynomiales :

4. 1, 3. Théorème :

Notons $\pi_{i,k}$ (pour $1 \leq i \leq k$) la fonction de $\hat{V}^k$ dans $\hat{V}^{k-1}$ définie par :

$$\pi_{i,k}(r_1, \ldots, r_k) = (r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots r_k)$$

a) Soit $\wp_1$ le plus petit ensemble de fonctions de $\hat{V}$ dans $\hat{V}$ tel que :

(1) $\wp_1$ contient les fonctions constantes $\wedge$ et a (pour tout $a \in V$)

(2) $\wp_1$ contient l'identité.

(3) $\wp_1$ est stable pour les lois + et χ (définies en 4. 1. 2 (1) et (2))

b) Pour $k > 1$, soit $\wp_k$ le plus petit ensemble de fonctions de $\hat{V}^k$ dans $\hat{V}$ tel que :

(4) $\wp_k$ contient $f \circ \pi_{i,k}$ pour tout $f \in \wp_{k-1}$ et tout i=1, . . . , k.

(5) $\wp_k$ est stable pour les lois + et χ.

Dans ces conditions pour tout $k \geq 1$:

$$\wp_k = \mathfrak{C}_k$$

Autrement dit $\mathcal{G}_1$ (resp. $\mathcal{G}_k$ pour $k > 1$) est le plus petit sous-dioïde du dioïde des fonctions de $\hat{V}$ (resp. $\hat{V}^k$) dans $\hat{V}$ satisfaisant à (1) et (2) (resp. à (4)).

Il est facile de montrer que $\mathcal{G}_1$ vérifie (1), (2), (3) et que $\mathcal{G}_k$ vérifie, pour $k > 1$, (4) et (5) ce qui prouve que :

pour $k > 0$ $\qquad \rho_k \subset \mathcal{G}_k$.

Envisageons δ^{-1} le D-homomorphisme inverse de δ (cf. 4. 1. 2 démonstration (b)) ($\delta^{-1}(\sigma_{r,k}) = r$) ; il est immédiat, par récurrence sur k que :

$$\forall a \in V \cup [k] \quad \sigma_{a,k} \in \rho_k$$

c'est-à-dire : $\qquad V \cup [k] \subset \delta^{-1}(\rho_k)$;

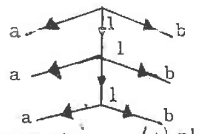
ainsi, comme ρ_k, $\delta^{-1}(\rho_k)$ est un dioïde et contient $V \cup [k]$; d'après (1. 5. 4) $\delta^{-1}(\rho_k) = \widehat{V \cup [k]}$ et donc : $\rho_k = \delta(\widehat{V \cup [k]}) = \mathcal{G}_k$.

4. 1. 4. Remarque :

Si $L_1, \ldots, L_p$ sont des bilangages réguliers sur T, pour $r \in \widehat{T \cup [p]}$ le bilangage $\sigma_{r,p}(L_1, \ldots, L_p)$ est régulier (ce résultat est immédiat par récurrence sur r) ; par contre si L est régulier sur $T \cup [p]$ il n'est pas exact que $\sigma_{L,p}(L_1, \ldots, L_p)$ soit régulier (sauf dans le cas particulier où $L, L_1, \ldots, L_p$ sont des langages (GINSBURG)) : voici un contrexemple :

L est le bilangage grammatical sur V = {1, a, b} engendré par la grammaire G = (V, ::=, 1) dont les productions sont :

$K_1 = \{ab, alb\}$, $K_a \{\wedge\}$, $K_b = \{\wedge\}$.



Ramification de L

Il est facile de prouver que $\sigma_{L,1}(\wedge)$ n'est autre que le langage $\{a^n b^n \mid n>0\}$ qui n'est pas un bilangage régulier (3. 2. 10).

4. 1. 5. Définition :

Nous dirons qu'une fonction polynomiale $\sigma_{r,k}$ est propre si r est une ramification où aucun $a \in V$ n'admet d'occurrence et où tout $i \in [k]$ admet au plus une occurrence :

$$((\forall a \in V)\ n_a(r) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall i \in [k])\ n_i(r) \leq 1).$$

La propriété 4. 1. 2 (a) appliquée aux fonctions polynomiales propres s'écrit :

$$|\sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_k)| = \sum_{n_i(r) \neq 0} |r_i|.$$

Le nombre de fonctions polynomiales propres, pour k fixé, est fini.

4. 1. 6. Exemple :

Toute ramification $r \in \hat{V}$ peut s'écrire à l'aide d'une substitution propre pour cela construisons une ramification $\nu(r) \in \hat{\mathbb{N}}$ qui sera appelée la ramure de r et qui représente la forêt "sous jacente à r" :

$\nu(\wedge) = \wedge$

$\nu(s+a\chi t) = \nu(s) + \theta_{|s|}(1) \times \theta_{suc(|s|)}(\nu(t))$

où suc est la fonction entière successeur et θ_i est la transcription de $\mathbb{N}$ dans $\hat{\mathbb{N}}$ définie par :

$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad \theta_0(k) = k$

$(\forall i, k \in \mathbb{N}) \qquad \theta_{suc(i)}(k) = suc \circ \theta_i(k)$.

(c'est-à-dire que $\theta_i(k)$ est l'entier k+i).

Pour $r \in \hat{V}$ notons $\mathcal{E}(r)$ le mot d'entrée de r défini par :

$\mathcal{E}(\wedge) = \wedge$

$\mathcal{E}(s+a\chi t) = \mathcal{E}(s) + a + \mathcal{E}(t)$

Dans ces conditions, il est immédiat que $\sigma_{\nu(r),|r|}$ est propre et que, si $b_1 \ldots b_{|r|}$ est le mot d'entrée de r :

$$r = \sigma_{\nu(r),\,|r|}\,(b_1, \ldots, b_{|r|}).$$

Par exemple si r' est prise dans la figure 2 (chapitre 1) nous avons :

$$\varepsilon(r') = abcab\,, \quad \nu(r') = 1 \times (2+3\times(4+5)).$$

4.2 SYSTEMES D'EQUATIONS.

4.2.1. Définition des bilangages algébriques

Soient un vocabulaire fini T et un système (S) de n équations à n inconnues $A_1, \ldots, A_n$ à valeurs dans $\mathcal{P}(\hat{T} \setminus \{\wedge\})$:

(S) pour $i = 1, \ldots, n \quad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} R_{ij}$ où $R_{ij} \in \widehat{T \cup N} \setminus \{\wedge\}$

(en posant $N = \{A_1, \ldots, A_n\}$).

Si (S) a une solution unique, chaque bilangage qui est une composante du n-uplet solution est appelé bilangage algébrique sur T.

La ramification R_{ij} est appelée $j^{\text{ème}}$ terme de la $i^{\text{ème}}$ équation.

Si les R_{ij} sont des mots nous retrouvons la définition des langages à contexte libre (c'est-à-dire que tout langage à contexte libre est un bilangage algébrique contenu dans T^*).

Il serait possible d'étudier directement la réciproque ; toutefois nous la retrouverons comme conséquence de (4. 6. 8.).

Un bilangage L qui est composante d'une solution d'un système (S) sera dit engendré par (S).

Si L est bilangage fini non vide ne contenant pas $\wedge$, L est algébrique car c'est l'unique solution d'un système du type :

$$A_1 = r_1 \cup \ldots \cup r_p \quad \text{avec, pour } i=1, \ldots, p, \quad r_i \in \hat{T} \setminus \{\wedge\}.$$

4.2.3. Premier théorème d'unicité :

Si le système (S) est tel que tout terme de taille 1 est élément de T alors (S) admet au plus une solution dans $\mathcal{P}(\hat{T} \setminus \{\wedge\})$.

Il est plus commode d'écrire le système (S) d'une autre manière soit la transcription ϱ de $\widehat{T \cup N}$ dans $\widehat{T \cup [n]}$ définie par :

$$(\forall\, a \in T)\ \varrho(a) = a,$$
$$(\forall\, i \in [n])\ \varrho(A_i) = i\ ;$$

dans ces conditions :

$$R_{ij} = \sigma_{\varrho(R_{ij})}\,(A_1, \ldots, A_n)$$

ainsi en posant $r_{ij} = \varrho(R_{ij})$ le système (S) s'écrit :

(S)' pour $i = 1, \ldots, n$, $A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \sigma_{r_{ij},\,n}\,(A_1, \ldots, A_n)$ avec $r_{ij} \in \widehat{T \cup [n]} \setminus \{\wedge\}$

Par hypothèse :

$$|r_{ij}| = 1 \Rightarrow r_{ij} \in T.$$

La démonstration est la même que celle faite pour les langages (PAIR, 3

a) Appelons Φ l'application de $\mathcal{P}(\hat{T} \setminus \{\wedge\})^n$ dans $\mathcal{P}(\hat{T} \setminus \{\wedge\})^n$ qui à

$\mathcal{E} = (E_i)_{1 \le i \le n}$ associe $\Phi(\mathcal{E}) = (E'_i)_{1 \le i \le n}$ avec

$$E'_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \sigma_{r_{ij},\,n}\,(E_1, \ldots, E_n)$$

b) Définissons l'ordre de E_i et l'ordre de $\mathcal{E}$ en posant :

$$\text{ordre}\,[E_i] = \min_{r \in E_i} |r| \qquad \text{si } E_i \neq \emptyset$$

$$\text{ordre}\,[\emptyset] = +\infty$$

et, pour $\mathcal{E} = (E_i)_{1 \le i \le n}$: $\text{ordre}\,[\mathcal{E}] = \min_{1 \le i \le n} (\text{ordre}\,[E_i])$

Si E et F sont deux parties de $\hat{T}$ rappelons que la différence symétrique de E et F, notée $E \Delta F$, est définie par :

$$E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F).$$

Pour la différence symétrique de deux n-uplets $\mathcal{E} = (E_i)_{1 \le i \le n}$ et $\mathcal{F} = (F_i)_{1 \le i \le n}$ il est naturel de poser

$$\mathcal{E} \Delta \mathcal{F} = (E_i \Delta F_i)_{1 \le i \le n}.$$

Lemme : Sous les hypothèses du théorème et avec les notations introduites:

$$(\mathcal{E} \neq \mathcal{F}) \Rightarrow \text{ordre}\,[\Phi(\mathcal{E}) \Delta \Phi(\mathcal{F})] > \text{ordre}\,[\mathcal{E} \Delta \mathcal{F}].$$

Prouvons d'abord ce lemme.

Si $\Phi(\mathcal{E}) = \Phi(\mathcal{F})$ le résultat est immédiat ; supposons donc $\Phi(\mathcal{E})$ et $\Phi(\mathcal{F})$ distincts : il existe i tel que $E'_i \neq F'_i$ et tel que

(1) ordre $[E'_i \Delta F'_i]$ = ordre $[\Phi(\mathcal{E}) \Delta \Phi(\mathcal{F})]$;

Il existe $R \in E'_i \Delta F'_i$ tel que :

(2) ordre $[E'_i \Delta F'_i] = |R|$

Supposons par exemple, $R \in E'_i$ et $R \notin F'_i$; alors R appartient à l'un des termes de E'_i noté $\sigma_{r_{ij}}(E_1, \ldots, E_n)$ sans appartenir au terme correspondant de F'_i $\sigma_{r_{ij}}(F_1, \ldots, F_n)$; c'est-à-dire qu'il existe $s_1 \in E_1, \ldots, s_n \in E_n$ tels que :

i) $R = \sigma_{r_{ij}}(s_1, \ldots, s_n)$,

ii) il existe k, ayant une occurence dans r_{ij} avec $s_k \notin F_k$.

D'après ii) et l'hypothèse, la taille de r_{ij} est strictement supérieure à 1 et finalement :

$$|R| \geq |r_{ij}| - 1 + |s_k| > |s_k| \geq \text{ordre } [\mathcal{E} \Delta \mathcal{F}]$$

Or R a été choisi de façon que $|R|$ = ordre $[\Phi(\mathcal{E}) \Delta \Phi(\mathcal{F})]$; le lemme est donc démontré.

Revenons au théorème : si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux solutions distinctes du système (S) :

$$\Phi(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$$

et $$\Phi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$$

ce qui contredit le lemme.

4.2.4. Deuxième théorème d'unicité :

Soit le système (S) défini plus haut. Munissons $N = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de la relation ::= définie par $A_i ::= A_j$ si A_j est terme de la $i^{ème}$ équation de (S). Si le graphe (N, ::=) est sans circuit le système (S) admet au plus une solution dans $\mathcal{P}(\hat{T} \setminus \{\wedge\})^n$.

La démonstration est la même que celle qui est faite pour les langages (PAIR, 3).

4.2.5. Théorème d'existence

Tout système d'équations du type défini en 4.2.1 admet au moins une solution.

Conservons les notations introduites en 4.2.3. Soit un système (S). Remarquons que pour deux n-uplets $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \Phi(\mathcal{E}) \subset \Phi(\mathcal{F}) ;$$

d'où par récurrence sur k entier, en notant $\emptyset_n$ le n-uplet dont chaque composante est l'ensemble vide :

$$\Phi^k(\emptyset_n) \subset \Phi^{k+1}(\emptyset_n)$$

ce qui entraîne :

$$\Phi^k(\emptyset_n) = \bigcup_{i=0}^{k} \Phi^i(\emptyset_n),$$

et :

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=0}^{+\infty} \Phi^i(\emptyset_n) &\Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{N},\ k \neq 0) \quad x \in \Phi^k(\emptyset_n) \\ &\Leftrightarrow (\exists\, k \in \mathbb{N},\ k \neq 0)\ (\exists\, y \in \Phi^{k-1}(\emptyset_n)\ (x = \Phi(y)) \\ &\Leftrightarrow x \in \Phi\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \Phi^i(\emptyset_n)\right). \end{aligned}$$

Finalement :

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} \Phi^i(\emptyset_n) = \Phi\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \Phi^i(\emptyset_n)\right),$$

ce qui prouve que $\bigcup_{i=0}^{+\infty} \Phi^i(\emptyset_n)$ est solution du système (S).

4.3 BIGRAMMAIRES.

4.3.1. Définition :

Une bigrammaire BG est un quadruplet $(T, N ::=, X)$ où

- T et N sont deux ensembles finis disjoints. T est le vocabulaire terminal, N le vocabulaire non-terminal (ou auxiliaire).
- $::=$ est une relation de N dans $\widehat{N \cup T}$ dont le nombre des couples est fini ; une règle est l'un de ces couples.
- X est un élément de N ; X est l'axiome de BG.

Dans la suite V désignera la réunion de N et T.

Pour définir des relations de réécriture et de dérivation il est utile de considérer l'ensemble des ramifications $\Delta(r, s, A)$ obtenu en "substituant" à une occurrence de A dans r la ramification s ; plus précisément :

4.3.2. Définition :

Notons Δ l'application de $(\hat{V} \times \hat{V} \times N)$ dans $\mathcal{P}(\hat{V})$ définie par

$$\Delta(\wedge, s, A) = \emptyset$$

$$(\forall\, r, t \in \hat{V})\quad \Delta(r+t, s, A) = (\Delta(r, s, A) + t) \cup (r + \Delta(t, s, A))$$

$$\forall\, b \in \hat{V}\quad \Delta(b \times r, s, A) = \text{SI } b \neq A \text{ ALORS } b \times \Delta(r, s, A)$$

$$\text{SINON } (s \times r) \cup (A \times \Delta(r, s, A)).$$

Remarquons que si s est distinct de $\wedge$ la taille des ramifications de $\Delta(r, s, A)$ et supérieure ou égale à la taille de r.

4.3.3. Dérivation :

Soit une bigrammaire BG ; la relation de réécriture dans $\hat{V}$ notée $\overset{}{\underset{BG}{\rightarrowtail}}$ (ou simplement $\rightarrowtail$) est définie de la façon suivante :

$$(\forall\, r, t \in \hat{V})\ r \rightarrowtail t \Leftrightarrow (\exists\, A \in N,\ s \in \hat{V})\ (A ::= s \text{ et } t \in \Delta(r, s, A)).$$

Une dérivation de r à t est un chemin du graphe $(\hat{V}, \rightarrowtail)$ (en particulier la longueur d'une dérivation est la longueur d'un tel chemin). La fermeture transitive de la relation $\rightarrowtail$ est appelée relation de dérivation et notée $\overset{*}{\rightarrowtail}$; enfin $r \overset{n}{\rightarrowtail} t$ signifie qu'il existe une dérivation de r à t de longueur inférieure ou égale à n.

4.3.4. Bilangage engendré :

Le bilangage engendré par une bigrammaire BG est l'ensemble L (BG) des ramifications de T dérivant de X :

$$L(BG) = \{r \in \hat{T} \mid X \overset{*}{\rightarrowtail} r\}.$$

Un bilangage qui est engendré par une bigrammaire est un bilangage bigrammatical.

Pour $A \in V$ nous noterons L (BG, A), ou simplement L (A), l'ensemble des ramifications de $\hat{T}$ dérivant de A ; ainsi L (BG) = L (BG, X).

4.3.5. Remarque :

Il est facile de constater que les bigrammaires dont les seconds membres des règles sont des mots, sont des grammaires de Chomsky (0.2.2.) ; la relation $\overset{*}{\rightarrowtail}$ est alors la relation de dérivation définie habituellement sur les grammaires ; autrement dit : les langages de Chomsky sont des langages engendrés par des bigrammaires. (pour la réciproque voir (4.6.8.)).

Avant d'étudier les bilangages bigrammaticaux nous allons signaler quelques propriétés simples des relations $\rightarrowtail$ et $\overset{*}{\rightarrowtail}$, qui seront utilisées dans la suite.

4.3.6. Lemme :

Pour une bigrammaire BG, la relation $\rightarrowtail$ est compatible avec les lois de composition interne + et $\times$:

(a) $(\forall r, t \in \hat{V})$ $\quad r \succ\!\!\!- t \Rightarrow (\forall v \in \hat{V})\ (v+r \succ\!\!\!- v+t \text{ et } r+v \succ\!\!\!- t+v)$,

(b) $(\forall r, t \in \hat{V})$ $\quad r \succ\!\!\!- t \Rightarrow (\forall v \in \hat{V})\ (v \chi r \succ\!\!\!- v \chi t \text{ et } r \chi v \succ\!\!\!- t \chi v)$.

(a) Immédiat car :

$$v + \Delta(r, s, A) \subset \Delta(v+r, s, A)$$

(b) Il suffit de prouver, par récurrence sur v que :

$$v \chi \Delta(r, s, A) \subset \Delta(v \chi r, s, A).$$

4.3.7. Lemme :

Si $\sigma_{r,k}$ est une fonction polynômiale propre :

$$\Delta(\sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_k), s, A) = \bigcup_{i \in \{i \mid n_i(r) \neq 0\}} \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_{i-1}, \Delta(r_i, s, A), r_{i+1}, \ldots r_k)$$

Ce lemme se démontre par récurrence sur r en utilisant notamment les propriétés évidentes suivantes :

- $(\forall r, t \in \hat{V})$ $\quad \Delta(r \chi t, s, A) = (r \chi \Delta(t, s, A)) \cup (\Delta(r, s, A) \chi t)$
- $n_i(r) = 0 \Rightarrow (\forall r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_k, r'_i \in \hat{V})(\sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_p) = \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r'_i, \ldots, r_p))$.

4.3.8. Propriétés de la relation de dérivation

(a) $r_i \overset{*}{\succ\!\!\!-} r'_i \Rightarrow \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_i, \ldots r_k) \overset{*}{\succ\!\!\!-} \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r'_i, \ldots r_k)$

(b) la relation de dérivation est le plus petit préordre compatible avec les lois + et χ et qui contient ::=.

(c) Si $\sigma_{r,k}$ est une fonction polynomiale propre :

$$(\forall B_1, \ldots, B_k \in V)(\sigma_{r,k}(B_1, \ldots, B_k) \overset{*}{\succ\!\!\!-} r' \Rightarrow (\exists r_1, \ldots, r_k \in \hat{V})\cdot$$
$$((\forall i = 1, \ldots, k,\ B_i \overset{*}{\succ\!\!\!-} r_i) \text{ et } (r' = \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_k)))).$$

De plus les dérivations $B_i \overset{*}{\succ\!\!\!-} r_i$ obtenues peuvent être choisies de longueur inférieure ou égale à celle de la dérivation de $\sigma_{r,k}(B_1, \ldots, B_k)$ à r'.

(a) : Par récurrence sur r en appliquant le lemme 4.3.6.

(b) la relation $\overset{*}{\succ\!\!\!-}$ est un préordre compatible avec + et χ (4.3.6) et contient la relation ::= ; reste à prouver que c'est la plus petite : soit $\mathcal{R}$ un autre préordre compatible avec les lois + et χ et contenant ::=. Il est facile de prouver, que $\mathcal{R}$ est un préordre compatible avec toute fonction polynomiale[1] (il suffit, en fait, de montrer par récurrence sur r que :

$$r_i \mathcal{R} r'_i \Rightarrow \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_i, \ldots r_k) \mathcal{R} \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r'_i, \ldots r_k)).$$

Supposons alors que $r \succ\!\!\!- r'$; il existe s, A tels que A ::= s et $r' \in \Delta(r, s, A)$ or, d'après 4.1.6, la ramification r s'écrit :

$$r = \sigma_{t,p}(B_1, \ldots, B_p) \quad \text{avec } \sigma_{t,p} \text{ fonction polynomiale propre}$$

et $B_1, \ldots, B_p \in V$ et, d'après 4.3.7:

$$(\exists i \in [p]) \quad (B_i = A \text{ et } r' = \sigma_{t,p}(B_1, \ldots, B_{i-1}, s, B_{i+1}, \ldots, B_p));$$

comme $\mathcal{R}$ contient ::= et est compatible avec $\sigma_{t,p}$:

$$\sigma_{t,p}(B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_p) \mathcal{R} \sigma_{t,p}(B_1, \ldots, B_{i-1}, s, B_{i+1}, \ldots, B_p)$$

soit : $\quad r \mathcal{R} r'$

Ainsi $\mathcal{R}$ contient $\succ\!\!\!-$; comme $\mathcal{R}$ est un préordre, $\mathcal{R}$ contient $\overset{*}{\succ\!\!\!-}$ ce qui achève la démonstration.

(c) Se démontre par récurrence sur la longueur n de la dérivation :

pour n = 0 c'est évident.

Supposons que : $\quad \sigma_{r,p}(B_1, \ldots, B_p) \overset{n}{\succ\!\!\!-} r'' \succ\!\!\!- r'$.

Par hypothèse de récurrence il existe k ramifications $r_1, \ldots, r_k$ telles que :

$$B_i \overset{n}{\succ\!\!\!-} r_i \quad \text{et } r'' = \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_k) ;$$

comme r' dérive de $\sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_k)$; il existe A et s tels que A ::= s et $r' \in \Delta(\sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r_k), s, A)$, d'où, d'après le lemme 4.3.7 :

(1) Précisons qu'une relation $\mathcal{R}$ dans $\hat{V}$ est compatible avec $\sigma_{r,k}$ si
$(\forall i=1, \ldots, k) \quad r_i \mathcal{R} r'_i \Rightarrow \sigma_{r,k}(r_1, \ldots r_k) \mathcal{R} \sigma_{r,k}(r'_1, \ldots, r'_k)$.

$(\exists j \in [k])\ ((n_i(r) \neq 0)$ et $(r' \in \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, \Delta(r_j, s, A), \ldots, r_k)))$;

autrement dit : il existe r'_j tel que $r_j \rightarrowtail r'_j$ et $r' = \sigma_{r,k}(r_1, \ldots, r'_j, \ldots, r_k)$ et les ramifications r'_j et r_i pour $i \neq j$ répondent bien à la question.

4.3.9. Remarque :

1) Une conséquence immédiate de 4.3.8 (b) est que la relation de dérivation est le plus petit préordre compatible avec les fonctions polynômiales et qui contient ::= .

2) Pour la propriété 4.3.8 (c) il est possible de choisir les B_i non seulement dans V mais aussi dans $\hat{V}$ (la démonstration est inchangée).

4.4 COMPARAISON DES SYSTEMES ET DES BIGRAMMAIRES.

4.4.1. Lemme :

Soit une bigrammaire BG = (T, N, ::=, X). Supposons qu'il existe p règles de premier membre $A \in N$; ces règles s'écrivent :

pour $j = 1 \ldots p$ $\quad A ::= \sigma_{r_j, q_j}(B_j^1, \ldots, B_j^{q_j})$

où les σ_{r_j, q_j} sont des fonctions polynômiales propres et où les B_j^k sont des éléments de V. Dans ces conditions :

$$L(A) = \bigcup_{j=1}^{p} \sigma_{r_j, q_j}(L(B_j^1), \ldots, L(B_j^{q_j})).$$

Soit $r \in \sigma_{r_j, q_j}(L(B_j^1), \ldots, L(B_j^{q_j}))$: il existe $s_1, \ldots, s_{q_j} \in \hat{T}$ tels que

pour $k = 1 \ldots q_j$ $\quad B_j^k \overset{*}{\rightarrowtail} s_k$

et $\quad r = \sigma_{r_j, q_j}(s_1, \ldots, s_{q_j})$;

donc $A \rightarrowtail \sigma_{r_j, q_j}(B_j^1, \ldots, B_j^{q_j}) \overset{*}{\rightarrowtail} r$ (compatibilité $\overset{*}{\rightarrowtail}$ avec σ_{r_j, q_j}) ;

par suite $r \in L(A)$.

Réciproquement soit $r \in L(A)$:

$$A \overset{*}{\rightarrowtail} r \quad \text{et} \quad r \in \hat{T}$$

A est élément de N donc A et r sont distincts et toute dérivation de A à r est du type :

$$A \rightarrowtail \sigma_{r_i, q_i}(B_i^1, \ldots, B_i^{q_i}) \overset{*}{\rightarrowtail} r \qquad \text{avec } 1 \leq i \leq p.$$

D'après 4.3.8. (c) il existe $s_1, \ldots, s_{q_i} \in \hat{V}$ tels que :

pour $k = 1, \ldots, q_i$, $\quad B_i^k \overset{*}{\rightarrowtail} s_k$

et $\quad r = \sigma_{r_i, q_i}(s_1, \ldots, s_{q_i})$

Finalement, comme r appartient à $\hat{T}$:

$$r \in \bigcup_{j=1}^{p} \sigma_{r_j, q_j}(L(B_j^1), \ldots, L(B_j^{q_j})).$$

4.4.2. Proposition :

Tout bilangage algébrique est un bilangage bigrammatical.

Le système (S) associé à un bilangage algébrique L sur le vocabulaire T s'écrit :

pour $i = 1, \ldots, n$ $\quad \mathfrak{A}_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \sigma_{r_j, q_{ij}}(\mathfrak{B}_{ij}^1, \ldots, \mathfrak{B}_{ij}^{q_{ij}})$

où les $\mathfrak{A}_i$ sont les inconnues et les $\mathfrak{B}_{ij}^k$ des éléments de $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\} \cup T$; de plus le système (S) est présenté de telle façon que les fonctions polynômiales $\sigma_{r_{ij}, q_{ij}}$ sont propres. Supposons en outre que L est le bilangage solution relatif à l'inconnue $\mathfrak{A}_1$. Définissons la bigrammaire BG = (T, N, ::=, A_1) avec :

- pour vocabulaire non terminal $N = \{A_1, \ldots, A_n\}$;
- pour régles : $A_i ::= \sigma_{r_{ij}, q_{ij}}(B_{ij}^1, \ldots, B_{ij}^{q_{ij}})$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, p_i$,

où les B_{ij}^k sont les éléments de $N \cup T$ tels que :

$$\mathfrak{B}_{ij}^{k} = \mathfrak{a}_q \Rightarrow B_{ij}^{k} = A_q$$
$$\mathfrak{B}_{ij}^{k} \in T \Rightarrow B_{ij}^{k} = \mathfrak{B}_{ij}^{k}.$$

D'après le lemme 4. 4. 1. le n-uplet des $L(A_i)$ est solution du système (S) ; or (S) admet une solution unique ; donc L est bien le bilangage $L(A_1)$ engendré par BG.

La bigrammaire BG que nous venons de construire n'admet pas de règle $A::=\wedge$: nous dirons qu'elle est $\wedge$-libre ; de plus BG a été construite à partir du système (S) : nous dirons que la bigrammaire BG et le système (S) sont liés ; réciproquement il est possible de construire formellement un système (S) lié à une bigrammaire BG, mais, a priori, il n'est pas certain que le système (S) défini ainsi admette une solution unique ; ceci justifie l'étude qui va suivre.

4. 4. 3. Lemme :

Tout bilangage engendré par une bigrammaire $\wedge$-libre n'admettant pas de règles du type A::=A' (où A et A' sont non-terminaux) est un bilangage algébrique.

Soit un bilangage L engendré par une bigrammaire BG = (T, N, ::=, X) ; comme BG et $\wedge$-libre, pour tout $A \in N$, les bilangages L (BG, A) ne contiennent pas $\wedge$ (voir à ce sujet la remarque en 4. 3. 2). Le système (S) lié à BG admet une solution unique dans $\mathcal{P}(\hat{T} \setminus \{\wedge\})$ (premier théorème d'unicité 4. 2. 3). Le lemme 4. 4. 1 prouve que L est une composante de la solution de (S), c'est-à-dire que L est un bilangage algébrique.

4. 4. 4. Lemme :

Soit un bilangage L engendré par une bigrammaire BG $\wedge$-libre; il existe une bigrammaire BG' $\wedge$-libre qui engendre L et qui n'admet pas de règles du type A::=A'

BG = (T, N, ::=, X) ; introduisons BG' = (T, N, ::=', X) où ::=' est défini par :

$A::='\ s \Leftrightarrow (|s| \geq 2$ ou $s \in T)$ et $((\exists\, B \in N)\ (A \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} B$ et $B::=s))$

Il est immédiat que :

(1) $\quad \forall\, s, t \in \hat{V} \qquad s \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} t \Rightarrow s \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} t.$

En effet $\overset{*}{\underset{BG}{\succ}}$ est un préordre compatible avec + et $\times$ et contenant ::=' (4. 3. 8).

Montrons maintenant, qu'inversement :

(2) $\quad (\forall\, A \in N,\ t \in \hat{T}) \quad A \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} t \Rightarrow A \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} t$

Cette assertion se démontre par récurrence sur la taille de t. Comme t appartient à $\hat{T}$ toute dérivation de A à t est de la forme :

$$A \overset{}{\underset{BG}{\succ}} A_1 \overset{}{\underset{BG}{\succ}} \ldots \overset{}{\underset{BG}{\succ}} A_k \overset{}{\underset{BG}{\succ}} s \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} t$$

avec $k \geq 0$, $A_1, \ldots, A_k \in N$ et $s \in T$ ou $|s| \geq 2$ (car il n'est pas possible d'avoir : $A_k \overset{}{\underset{BG}{\succ}} \wedge$ d'après l'hypothèse). Nous avons donc :

(3) $\quad A ::=' s.$

Si $s \in T$, $t = s$ donc

$$A \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} t,$$

sinon nous avons $|s| \geq 2$; posons alors (notations de 4. 1. 6) :

$$\varepsilon(s) = B_1 \ldots B_q,$$

d'où $\quad s = \sigma_{\nu(s),\, q}\ (B_1, \ldots, B_q).$

D'après (4. 3. 8 (c)) il existe $t_1, \ldots, t_q \in \hat{T}$ tels que :

$$\text{pour } i = 1, \ldots, q \qquad B_i \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} t_i \quad \text{et} = \sigma_{\nu(s),\, q}\ (t_1, \ldots, t_q).$$

or, comme les t_i ne sont pas vides et que $|s| \geq 2$ il est immédiat (voir 4. 1. 5) que $\quad |t_i| < |t| ;$

ainsi, par hypothèse de récurrence : $\quad B_i \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} t_i$

et, par compatibilité $\quad s \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} t ;$

finalement $A \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} s \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} t$, soit $A \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} t$.

Les assertions (1) et (2) prouvent que BG et BG' engendrent le même bilangage ; de plus il est clair que la grammaire BG' satisfait aux hypothèses du lemme 4.4.3 ; d'où :

4.4.5. Proposition :

Tout bilangage engendré par une bigrammaire $\wedge$-libre est un bilangage algébrique.

Il reste à préciser ce qu'il en est pour des bigrammaires qui admettent des règles du type $A ::= \wedge$: c'est l'objet du théorème suivant qui entre autres, résume les résultats précédents.

4.4.6. Théorème :

L'ensemble des bilangages grammaticaux sur un vocabulaire T est formé des bilangages algébriques et des bilangages algébriques réunis à la ramification vide.

D'après 4.4.2 il est clair que tout bilangage algébrique et tout bilangage algébrique réuni à $\{\wedge\}$ est un bilangage bigrammatical. Pour la réciproque il suffit de montrer que, si une bigrammaire BG admet des règles du type $A ::= \wedge$, il existe une bigrammaire BG' $\wedge$-libre et satisfaisant à :

$$L(BG) = L(BG') \quad \text{ou} \quad L(BG) = L(BG') \cup \{\wedge\}.$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle faite habituellement pour les langages (GINSBURG):

Soit BG = (T, N, ::=X). Convenons, pour simplifier, de noter r la ramure (4.1.6) d'une ramification quelconque de $\hat{V}$, q sa taille et $B_1 \ldots B_q$ son mot d'entrée (4.1.6). Définissons la bigrammaire BG' = (T, N, ::=', X)

en posant :

$$(\forall A \in N,\ \forall B'_1, \ldots, B'_q \in V \cup \{\wedge\})\ \ A ::='\sigma_{r,q}(B'_1, \ldots, B'_q)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\exists B_1, \ldots, B_q \in V)\ \big((B'_i = B_i) \text{ ou } (B'_i = \wedge \text{ et } B_i \in N_0) \text{ pour } i=1, \ldots, q) \text{ et}$$

$$((\exists i,\ 1 \le i \le q)\ (B_i = B'_i)) \text{ et } (A ::= \sigma_{r,q}(B_1, \ldots, B_q))\big)$$

où $N_0 = \{A \in N \mid A \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} \wedge\}$.

D'après cette définition $\wedge$ n'est jamais second membre d'une règle de BG'. De plus il est immédiat que :

$$A ::=' s \quad \Rightarrow \quad A \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} s,$$

et, comme $\overset{*}{\underset{BG}{\succ}}$, est le plus petit préordre contenant $::='$:

(1) $\qquad (\forall t,\ s \in \hat{V}) \quad (t \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} s \Rightarrow t \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} s).$

Réciproquement il est facile de prouver par récurrence sur la longueur des dérivations :

(2) $\qquad (\forall A \in N) \quad A \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} s$ et $s \neq \wedge \Rightarrow A \overset{*}{\underset{BG'}{\succ}} s.$

Enfin :

- si X n'appartient pas à N_0 :

$$L(BG) = \{s \in \hat{T} \setminus \{\wedge\} \mid X \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} s\} = L(BG'),$$

- si X appartient à N_0 :

$$L(BG) = \{\wedge\} \cup \{s \in \hat{T} \setminus \{\wedge\} \mid X \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} s\} = \{\wedge\} \cup L(BG').$$

4. 5 BILANGAGES GRAMMATICAUX ET ALGEBRIQUES.

Dans ce paragraphe nous montrons que les bilangages algébriques sont obtenus en transformant des bilangages grammaticaux.

4. 5. 1. Transformation associée à une grammaire de Chomsky:

Soit une grammaire de Chomsky $G = (T, N, ::=, X)$ $\wedge$-libre (i.e ne comportant pas de règle $A ::= \wedge$) qui sera identifiée à la grammaire (1. 4. 1.) sur $V = T \cup N$ obtenue en prolongeant la relation ::= de G par :

$a ::= \wedge$ pour tout $a \in T$.

(Ainsi une occurrence de $C \in V$ dans $r \in \mathcal{L}(G)$ est une feuille de r si et seulement si C appartient à T).

A chaque règle $A ::= \alpha$ de G, telle que A appartient à N, associons une unique fonction polynômiale propre de $\hat{T}^{|\alpha|}$ dans $\hat{T}$, notée $S_{A, \alpha}$. Appelons S l'ensemble de ces fonctions.

Enfin convenons de noter $c_i(r)$ la $i^{ème}$ pseudo-arborescence d'une ramification r.

Dans ces conditions définissons une application $\Phi_{G, S}$ (notée, simplement Φ s'il n'y a pas ambiguité) de $\mathcal{L}(G)$ dans $\hat{V}$ en posant :

$\Phi(\wedge) = \wedge$,

$\Phi(a) = a$ pour $a \in T$,

$\Phi(AXr) = S_{A, \rho(r)} (\Phi \circ c_1(r), \ldots, \Phi \circ c_{|\rho(r)|}(r))$ pour $AXr \in \mathcal{L}(G)$,

$\Phi(r+s) = \Phi(r) + \Phi(s)$ pour $r, s \in \mathcal{L}(G)$.

4. 5. 2. Théorème :

Si G et S satisfont aux hypothèses précédentes : $\Phi_{G, S}(\mathcal{S}(G))$ est un bilangage algébrique ; réciproquement à tout bilangage algébrique L on peut associer une grammaire de Chomsky G et une famille de fonctions S

telles que $L = \Phi_{G, S}(\mathcal{S}(G))$.

Etude directe : Soit $BG = (T, N, ::\simeq, X)$ la bigrammaire dont les règles sont définies par :

$(\forall A \in N,\ B_1, \ldots, B_p \in N \cup T)\ (A ::\simeq S_{A, B_1, \ldots, B_p}(B_1, \ldots, B_p) \Leftrightarrow A ::= B_1 \ldots B_p)$

Montrons que :

$(\forall C \in N \cup T)$ $L(BG, C) = \Phi(\mathcal{L}(G, C))$ (notations définies en 1. 4. 2 et 4. 3. 4)

(1) $(\forall C \in N \cup T)$ $L(BG, C) \subset \Phi(\mathcal{L}(G, C))$.

Cette assertion se démontre par récurrence sur la longueur n d'une dérivation de C à $r \in L(BG, C)$. Pour n=0, nécessairement $C \in T$ et, comme $\Phi(C) = C$, (1) est vérifiée. Admettons (1) pour des dérivations de longueur n et soit une dérivation de C à r de longueur n+1 :

$$C \underset{BG}{\succ} t \overset{n}{\underset{BG}{\succ}} r \quad \text{avec } r \in \hat{T}.$$

Par définition de BG il existe $B_1 \ldots B_p \in V^*$ tel que :

$$t = S_{C, B_1 \ldots B_p}(B_1, \ldots, B_p) \text{ et } C ::= B_1 \ldots B_p .$$

D'après 4. 3. 8, comme $S_{C, B_1 \ldots B_p}$ est propre, il existe $r_1, \ldots, r_p \in \hat{T}$ tels que :

$$B_i \overset{n}{\underset{BG}{\succ}} r_i \quad \text{et} \quad r = S_{C, B_1 \ldots B_p}(r_1, \ldots, r_p) ;$$

par hypothèse de récurrence, pour i=1, ..., p il existe $u_i \in \mathcal{L}(G, B_i)$ tel que :

$$\Phi(u_i) = r_i ;$$

$$u = C \times (u_1 + \ldots + u_p) ;$$

il est clair que u appartient à $\mathcal{L}(G, C)$ et que :

$$\Phi(u) = r$$

Prouvons réciproquement, par récurrence sur la hauteur de $u \in \mathcal{L}(G, C)$ que

(2) $(\forall C \in N \cup T)$ $\Phi(\mathcal{L}(G, C)) \subset L(BG, C))$.

Si h (u) = 1 (notation de 2. 8. 3), nécessairement u = C appartient à T et l'assertion est évidente ; sinon h (u) = n+1 et, dans ces conditions, il existe des pseudo-arborescences $u_1, \dots, u_p$ telles que :

$u = C \times (u_1 + \dots + u_p)$, $C ::= \rho(u_1) \dots \rho(u_p)$ et $u_i \in \mathcal{L}(G, \rho(u_i))$.

Donc, d'après la définition de BG :

$$C \xrightarrow[BG]{} \mathbb{S}_{C, \rho(u_1)\dots\rho(u_p)}(\rho(u_1), \dots, \rho(u_p)),$$

et, par hypothèse de récurrence :

pour i=1, ..., p $\quad \rho(u_i) \xrightarrow[BG]{*} \Phi(u_i)$

Finalement, comme $\xrightarrow[BG]{*}$ est compatible avec les fonctions polynômiales :

$$C \xrightarrow[BG]{*} \mathbb{S}_{C, \rho(u_1)\dots\rho(u_p)}(\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_p)) = \Phi(u)$$

Ainsi $\Phi(u)$ appartient à L (BG, C) ce qui achève la démonstration de (2). Les assertions (1) et (2) prouvent la première partie du théorème.

Pour la réciproque remarquons que toutes les règles d'une bigrammaire $\wedge$-libre BG = (T, N, $::\simeq$, X) peuvent se mettre sous la fomre :

$$A ::= \mathbb{S}_{A, B_1 \dots B_p}(B_1, \dots, B_p)$$

où $\mathbb{S}_{A, B_1 \dots B_p}$ est une fonction polynômiale propre (4. 1. 6) ; d'après l'étude directe, la grammaire G = (T $\cup$ N, ::=, X) définie par :

$(\forall A \in N,\ B_1, \dots, B_p \in N \cup T)\quad (A ::= B_1 \dots B_p \Leftrightarrow A ::\simeq \mathbb{S}_{A, B_1 \dots B_p}(B_1, \dots, B_p))$

et $(\forall a \in T) \qquad a ::= \wedge,$

est telle que : $\Phi_{G, S}(\mathcal{T}(G)) = L(BG, X)$.

L'intérêt de ce thèorème et plutôt négatif : en effet si, partant d'un langage de Chomsky on applique aux ramifications associées à ce langage une transformation $\Phi_{G, S}$ on obtient un bilangage bigrammatical ; or nous verrons (4. 6. 8) que les mots des feuilles d'un tel bilangage forment encore un langage de Chomsky ; par conséquent les transformations du type $\Phi_{G, S}$ ne permettent pas de généraliser les langages de Chomsky.

4. 6 PROPRIETES DES BILANGAGES ALGEBRIQUES ET DES BILANGAGES BIGRAMMATICAUX.

Dans ce paragraphe nous généraliserons aux bilangages algébriques quelques propriétés classiques des langages de Chomsky $\wedge$-libres. A chaque propriété de ces bilangages correspond immédiatement (d'après 4. 4. 6) une propriété analogue pour les bilangages bigrammaticaux. (En général celle-ci ne sera pas énoncée pour ne pas alourdir l'exposé).

4. 6. 1. Remarque :

Tout bilangage algébrique est engendré (4. 2. 1) par un système vérifiant l'hypothèse du premier théorème d'unicité.

En effet, soit un bilangage algébrique L ; d'après 4. 4. 2 et 4. 4. 4, L est engendré par une bigrammaire $\wedge$-libre n'admettant pas de règle du type A::=A' ; c'est-à-dire que L est engendré par le système lié à cette bigrammaire, or ce système vérifie l'hypothèse du premier théorème d'unicité ; d'où le résultat annoncé.

Dans la suite chaque fois que, pour un bilangage algébrique donné, nous choisirons un système (S) qui l'engendre, il s'agira toujours d'un système satisfaisant à l'hypothèse du premier théorème d'unicité.

4. 6. 2. Théorème :

Les bilangages algébriques sont décidables.

Soit L un bilangage algébrique ; L est associé à la première inconnue d'un système (S) :

(S) pour i=1, ..., n $\quad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_{ij}} \sigma_{r_{ij}, n}(A_1, \dots, A_n)$ (notation de 4. 2. 3.)

Posons $\omega = \min_{i, j} |r_{ij}|$, $\Omega = \min_{r_{ij} \neq T} |r_{ij}|$; enfin notons π_i l'application qui, à un n-uplet de $\mathcal{P}(\hat{T})^n$ associe sa $i^{ème}$ composante.

Dans ces conditions et avec les notations de 4.2.3 et 4.2.5 :

(1) $\quad r \in [\pi_i \circ \Phi^k(\Phi_n) \setminus \pi_i \circ \Phi^{k-1}(\Phi_n)] \Rightarrow |r| \geq (\Omega-1)(k-1) + \omega$

Démontrons (1) par récurrence sur k : pour k=1 c'est évident car r est un terme du système ; admettons (1) à l'ordre k et soit r une ramification de $\pi_i \circ \Phi^{k+1}(\Phi_n) \setminus \pi_i \circ \Phi^k(\Phi_n)$: il existe j tel que :

$$r \in \sigma_{r_{ij,n}}(\pi_1 \circ \Phi^k(\Phi_n), \ldots, \pi_n \circ \Phi^k(\Phi_n))$$

c'est-à-dire qu'il existe $r_1 \in \pi_1 \circ \Phi^k(\Phi_n), \ldots, r_n \in \pi_n \circ \Phi^k(\Phi_n)$ tels que :

$$r = \sigma_{r_{ij,n}}(r_1, \ldots, r_n)$$

De plus, $r \notin \pi_i \circ \Phi^k(\Phi_n)$ entraine qu'il existe q, $1 \leq q \leq n$ tel que : $r_q \notin \pi_i \circ \Phi^{k-1}(\Phi_n)$ et q a au moins une occurrence dans r_{ij}, et (d'après 4.1.2(a)) :

$$|r| \geq |r_{ij}| + (|r_q| - 1)$$

or r_{ij} n'appartient pas à $\hat{T}$ et r_q satisfait à l'hypothèse de récurrence :

$$|r| \geq \Omega + (\Omega-1)(k-1) + \omega - 1 = (\Omega-1)k + \omega$$

ce qui prouve (1).

Pour que r appartienne au bilangage L, il faut et il suffit donc que

$$r \in \pi_1 \circ \Phi^k(\Phi_n)$$

où k est le plus petit entier strictement positif tel que

$$|r| \leq (\Omega-1)(k-1) + \omega.$$

Il existe bien un tel k car (S) vérifie l'hypothèse du premier théorème d'unicité c'est-à-dire que $\Omega-1$ est strictement positif.

4.6.3. Proposition :

(a) La réunion de deux bilangages algébriques est un bilangage algébrique.

(b) Si L est un bilangage algébrique $\bigcup_{n=1}^{+\infty} n.L$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} L^n$ le sont aussi.

(c) Si L est un bilangage algébrique sur $T \cup [p]$, si $L_1, \ldots, L_n$ sont des bilangages algébriques sur T

$$\sigma_{L,p}(L_1, \ldots, L_p) = \bigcup_{r \in L} \sigma_{r,p}(L_1, \ldots, L_p)$$

est un bilangage algébrique.

En particulier si L_1 et L_2 sont deux bilangages algébriques $L_1 + L_2$ et $L_1 \times L_2$ le sont aussi.

La démonstration est tout à fait analogue à celle faite à propos des langages à contexte libre :

(a) Appelons A_1, (resp. A'_1) l'inconnue relative au bilangage algébrique L (resp. L') dans un système (S) (resp. (S'))(1). Envisageons le système :

$$\begin{cases} X = A_1 \cup A'_1 \\ (S) \\ (S') \end{cases}$$

où la nouvelle inconnue X est distinctes des inconnues de (S) et de (S').

Le nouveau système admet une solution unique dont $L \cup L'$ est une composante ; c'est-à-dire que $L \cup L'$ est un bilangage algébrique.

(b) Avec les mêmes notations, il suffit d'envisager les systèmes :

$$\begin{cases} X = A_1 \cup (X + A_1) \\ (S) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X = A_1 \cup (X \times A_1) \\ (S) \end{cases}$$

(c) Soient A_1 l'inconnue relative à L dans un système (S) qui a pour autres inconnues $A_2, \ldots, A_n$, et X_i l'inconnue associée à L_i dans un système (S_i) (pour i=1, ..., p). Le système (S) s'écrit :

$$(S) \text{ pour } i=1, \ldots, n \qquad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \hat{R}_{ij}$$

(1) Dans cette démonstration les noms des inconnues des différents systèmes introduits sont tous supposés distincts.

Considérons le système suivant :

$$\mathcal{S}\begin{cases} \text{pour } i = 1, \ldots, n \quad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \sigma_{R_{ij},\,p}\,(X_1, \ldots, X_p) \\ (S_1) \\ \vdots \\ (S_p) \end{cases}$$

comme les systèmes (S), $(S_1), \ldots, (S_p)$ satisfont aux hypothèses du premier théorème d'unicité, $\mathcal{S}$ satisfait aux hypothèses du deuxième théorème d'unicité ; par ailleurs $\sigma_{L,\,p}\,(L_1, \ldots, L_p)$ est engendré par $\mathcal{S}$; c'est donc un bilangage algébrique.

En particulier si L_1 et L_2 sont deux bilangages algébriques :

$$L_1 + L_2 = \sigma_{1+2,\,2}\,(L_1, L_2) \qquad L_1 \times L_2 = \sigma_{1\times 2,\,2}\,(L_1, L_2)$$

or $\{1+2\}$ et $\{1\times 2\}$ sont des bilangages algébriques (ils sont en effet finis et ne contiennent pas $\wedge$) ; par suite $L_1 + L_2$ et $L_1 \times L_2$ sont algébriques.

4.6.4. Proposition :

Le réflechi d'un bilangage algébrique est un bilangage algébrique.

En effet, si L est engendré par le système :

$$(S) \quad \text{pour } i=1, \ldots, n \qquad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} R_{ij},$$

$\widetilde{L}$ est engendré par le système :

$$\text{pour } i=1, \ldots, n \qquad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \widetilde{R}_{ij}.$$

4.6.5. Lemme :

Une transcription transforme un bilangage algébrique en un bilangage algébrique.

En effet, soient T et T' deux vocabulaires, φ une transcription de $\hat{T}$ dans dans $\hat{T}'$; si L est un bilangage algébrique engendré par :

$$(S) \quad \text{pour } i=1, \ldots, n \qquad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} R_{ij}$$

il est immédiat que si φ' est la transcription de $\widehat{T \cup \{A_1, \ldots, A_n\}}$ dans $\widehat{T' \cup \{A_1, \ldots, A_n\}}$ prolongeant φ et laissant invariants $A_1, \ldots A_n$, $\varphi(L)$ est engendré par le système :

$$\text{pour } i = 1, \ldots, n \qquad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \varphi'(R_{ij})$$

qui vérifie lui aussi le premier théorème d'unicité (car $|\varphi'(R_{ij})| = |R_{ij}|$) ; ce qui prouve que $\varphi(L)$ est un bilangage algébrique.

De ce résultat nous allons déduire le théorème suivant qui est plus général :

4.6.6. Théorème :

Le transformé par homomorphisme de dioïde[1] d'un bilangage algébrique est un bilangage algébrique.

Soient $T = \{a_1, \ldots, a_p\}$ et T' deux vocabulaires, δ un D-homomorphisme de $\hat{T}$ dans $\hat{T}'$,[1] et L un bilangage algébrique sur T. Introduisons la transcription φ de $\hat{T}$ dans $\widehat{[p]}$ définie par : $\varphi(a_i) = i$.

Par récurrence sur $r \in \hat{T}$ il est immédiat que :

$$\delta(r) = \sigma_{\varphi(r),\,p}\,(\delta(a_1), \ldots, \delta(a_p))$$

d'où

$$\delta(L) = \sigma_{\varphi(L),\,p}\,(\delta(a_1), \ldots, \delta(a_p)).$$

Or, comme δ est un D-homomorphisme, pour tout $i=1, \ldots, p$, $\delta(a_i)$ n'est pas vide (1.5.5) c'est-à-dire que $\{\delta(a_i)\}$ est un bilangage algébrique. D'après 4.6.5, $\varphi(L)$ est aussi un bilangage algébrique ; d'où le résultat en appliquant 4.6.3 (c).

Nous nous proposons maintenant d'étudier le langage des mots des feuilles (ou des mots des racines) d'un bilangage bigrammatical ; comme

(1) différent de la fonction constante $\wedge$

nous travaillerons sur les bigrammaires, il est utile de choisir les bigrammaires les plus "simples" possibles ; c'est l'objet du lemme suivant :

4. 6. 7. Lemme:

Tout bilangage algébrique est engendré par une bigrammaire $BG = (T, N, ::=, X)$ n'admettant que des règles des types suivants :

$A ::= B+C$, $A ::= B \times C$, $A ::= a$, avec $A, B, C \in N$, $a \in T$.

La démonstration est analogue à celle qui est faite pour obtenir un résultat similaire à propos des grammaires :

Tout d'abord donnons quelques définitions qui nous seront utiles : Deux bigrammaires sont équivalentes si elles engendrent le même bilangage. La taille d'une règle $A ::= s$ est la taille de s. L'ordre d'une bigrammaire est la taille maximale de ses règles.

Soit L un bilangage algébrique. L est engendré par une bigrammaire $BG_0 = (T, N_0, ::\overset{0}{=}, X)$ $\wedge$-libre et n'admettant pas de règle du type $A::=A'$. Prouvons d'abord que :

(a) BG_0 est équivalente à une bigrammaire $BG_1 = (T, N_1, ::\overset{1}{=}, X)$ telle que :

(1) $(\forall A \in N_1,\ r \in \widehat{N_1 \cup T})\ (A ::\overset{1}{=} r \Rightarrow (|r| \geq 2 \text{ et } r \in \hat{N_1}) \text{ ou } r \in T)$.

A chaque $a \in T$, associons $\dot{a}$ n'appartenant pas à $N_0 \cup T$; soit $\dot{T}$ l'ensemble de ces $\dot{a}$; posons :

$$N_1 = N_0 \cup \dot{T}$$

et modifions les règles de BG_0 de taille supérieure à 2 :

$A ::\overset{0}{=} \sigma_{r,q}(B_1 \dots, B_q)$ (où r est la ramure d'une ramification dont $B_1 \dots B_q$ est le mot d'entrée (4. 1. 6)) est remplacée par les règles :

$$A ::\overset{1}{=} \sigma_{r,q}(B'_1, \dots, B'_q) \quad \text{avec } B'_i = B_i \text{ si } B_i \in N,\ B'_i = \dot{B}_i \text{ si } B_i \in T.$$

et $\dot{a} ::\overset{1}{=} a$ pour tout $a \in T$.

Il est clair que le système (S_1) lié à BG_1 satisfait à l'hypothèse du premier théorème d'unicité et engendre L. Par suite BG_1 engendre L et satisfait, par construction, à (1).

Montrons que BG_1 est équivalente à une bigrammaire $BG_2 = (T, N_2, ::\overset{2}{=}, X)$ qui engendre L et n'admet que des règles du type :

$$A::= B+C \ , \quad A::= B \times C \ , \quad A ::= a \quad \text{avec } A, B, C \in N_2 \quad a \in T.$$

Supposons que BG_1 est d'ordre $p > 2$; il suffit de prouver que BG_1 est équivalente à une bigrammaire BG' satisfaisant toujours à (1), d'ordre p au plus et contenant strictement moins de règles de taille p.

Soit R un terme de taille $p > 2$ dans le système (S_1) lié à BG_1 ;

R, qui n'est pas vide s'écrit : $R = R_1 + B \times R_2$ avec $B \in N_1$, et trois cas sont possibles :

(i) $R_1 \neq \wedge$ et $R_2 \neq \wedge$,

(ii) $|R_1| \geq 2$ et $R_2 = \wedge$,

(iii) $R_1 = \wedge$ et $|R_2| \geq 2$.

Remplaçons le système (S_1) par le système (S') obtenu

- en introduisant une nouvelle inconnue Y,
- en remplaçant le terme R, selon les cas par :

(i) $R_1 + Y$,

resp. (ii) $Y + B$,

resp. (iii) $B \times Y$.

- en ajoutant aux équations de (S_1) l'équation :

(i) $Y = B \times R_2$

resp. (ii) $Y = R_1$

resp. (iii) $Y = R_2$

Finalement le système (S') admet une solution unique dont L est composante et la bigrammaire BG' liée à (S') répond à la question ; ce qui achève la démonstra-

tion.

4.6.8. Théorème :

Les langages de Chomsky sont les ensembles des mots des feuilles (resp. des racines) des bilangages bigrammaticaux et eux seuls.

a) Tout langage de Chomsky L est un bilangage bigrammatical et, comme $\varphi(L) = \rho(L) = L$, L est donc bien à la fois l'ensemble des mots des feuilles et l'ensemble des mots des racines d'un bilangage bigrammatical.

b) Pour étudier la réciproque dans le cas du mot des feuilles on a déjà vu que, pour $r_1, r_2 \in \hat{V}$:

$$\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2).$$

Pour $\alpha \in V^*$ notons $\vec{\alpha}$ le mot obtenu en supprimant dans α la dernière lettre : c'est-à-dire que $\vec{\alpha}$ est défini par :

$$(\forall \alpha \in V^*, \forall a \in V) \quad \vec{\wedge} = \wedge, \quad \overrightarrow{\alpha a} = \alpha.$$

Il est immédiat que :

$$(\forall r_1, r_2 \in \hat{V}) \quad \varphi(r_1 \times r_2) = \overrightarrow{\varphi(r_1)} + \varphi(r_2).$$

Ainsi pour un bilangage bigrammatical L il faut étudier simultanément la nature de $\varphi(L)$ et celle de $\overrightarrow{\varphi(L)}$. Même si L et $\varphi(L)$ ne contiennent pas $\wedge$ il est possible que $\overrightarrow{\varphi(L)}$ le contienne et que $\overrightarrow{\varphi(L)}$ ne puisse pas être considéré comme composante de la solution d'un système : c'est ce qui explique l'emploi, un peu lourd, des bigrammaires dans cette démonstration.

D'après 4.4.6, il suffit de prouver que si L est un bilangage algébrique, $\varphi(L)$ est un langage de Chomsky ; L est engendré par une bigrammaire $BG = (T, N, ::=, X)$ qui satisfait au lemme 4.6.7. Envisageons la grammaire de Chomsky (0.2.2) : $G = (T, N \cup \vec{N}, ::=', X)$ (où $\vec{N}$ est l'ensemble des éléments $\vec{A}$ associés à tout $A \in N$), définie par :

$A ::= B + C \Leftrightarrow A ::=' B + C$ et $\vec{A} ::=' B + \vec{C}$

$A ::= B \times C \Leftrightarrow A ::=' \vec{B} + C$ et $\vec{A} ::=' \vec{B} + \vec{C}$

$A ::= a \Leftrightarrow A ::=' a$ et $\vec{A} ::=' \wedge$.

Dans ces conditions il est facile de prouver par récurrence sur la longueur d'une dérivation que :

(1) $(\forall A \in N, \alpha \in T^*)\ (A \overset{*}{\underset{G}{\succ}} \alpha \Rightarrow \alpha \neq \wedge)$.

De même, en utilisant de plus (1) :

(2) $(\forall A \in N, \alpha \in T^*)\ (A \overset{p}{\underset{G}{\succ}} \alpha \Rightarrow \vec{A} \overset{p}{\underset{G}{\succ}} \vec{\alpha})$,

(3) $(\forall A \in N, \alpha \in T^*)\ (\vec{A} \overset{p}{\underset{G}{\succ}} \alpha \Rightarrow (\exists \beta \in T^*)\ (A \overset{p}{\underset{G}{\succ}} \beta \text{ et } \vec{\beta} = \alpha))$.

Démontrons, toujours par récurrence sur la longueur d'une dérivation que :

(4) $(\forall A \in N, r \in \hat{T}) \quad (A \overset{*}{\underset{BG}{\succ}} r \Rightarrow A \overset{*}{\underset{G}{\succ}} \varphi(r))$;

Si cette longueur est 1, l'assertion est évidente, sinon une dérivation de A à r s'écrit :

$$A \overset{}{\underset{BG}{\succ}} s \overset{p}{\underset{BG}{\succ}} r \qquad \text{avec } p > 0.$$

Il faut envisager deux cas :

i) $s = B + C$: d'après 4.3.8 il existe r_1 et r_2 tels que :

$$r = r_1 + r_2 \qquad B \overset{p}{\underset{BG}{\succ}} r_1 \text{ et } C \overset{p}{\underset{BG}{\succ}} r_2 ;$$

par hypothèse de récurrence :

$$B \overset{*}{\underset{G}{\succ}} \varphi(r_1), \qquad C \overset{*}{\underset{G}{\succ}} \varphi(r_2)$$

De plus, par définition de G nous avons :

$$A ::=' B + C$$

d'où $A \overset{*}{\underset{G}{\succ}} \varphi(r_1) + \varphi(r_2) = \varphi(r)$.

ii) $s = B \times C$: il existe r_1 et r_2 tels que :

$$r = r_1 \times r_2 \qquad B \overset{p}{\underset{BG}{\succ}} r_1 \text{ et } C \overset{p}{\underset{BG}{\succ}} r_2 ;$$

par hypothèse de récurrence :

$$B \overset{*}{\underset{G}{\succ}} \varphi(r_1), \qquad C \overset{*}{\underset{G}{\succ}} \varphi(r_2).$$

D'après (2), $\overrightarrow{B} \underset{G}{\overset{*}{\succ}} \overrightarrow{\varphi(r_1)}$ et, finalement :

$$A \underset{G}{\succ} \overrightarrow{B} + C \underset{G}{\overset{*}{\succ}} \overrightarrow{\varphi(r_1)} + \varphi(r_2) = \varphi(r_1 \times r_2)$$ (r_2 n'est pas vide car BG $\wedge$-libre).

Prouvons de même que :

(5) $(\forall A \in N, \alpha \in T^*)$ $(A \underset{G}{\overset{*}{\succ}} \alpha \Rightarrow (\exists r \in \hat{T})\ (\varphi(r) = \alpha \text{ et } A \underset{BG}{\overset{*}{\succ}} r))$;

pour une dérivation de longueur 1, le résultat est immédiat ; sinon une dérivation de A à α s'écrit :

$$A \underset{G}{\succ} \beta \underset{G}{\overset{p}{\succ}} \alpha \qquad \text{avec } p > 0.$$

i) $\beta = B + C$: il existe α_1, α_2 tels que :

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \qquad B \underset{G}{\overset{p'}{\succ}} \alpha_1 \text{ et } C \underset{G}{\overset{p}{\succ}} \alpha_2 ;$$

par hypothèse de récurrence il existe r_1 et r_2 tels que :

$$\varphi(r_1) = \alpha_1 , \quad \varphi(r_2) = \alpha_2 \text{ et } B \underset{BG}{\overset{*}{\succ}} r_1, \quad C \underset{BG}{\overset{*}{\succ}} r_2.$$

Finalement :

$$A \underset{BG}{\succ} B + C \underset{BG}{\overset{*}{\succ}} r_1 + r_2 \qquad \text{et } \varphi(r_1 + r_2) = \alpha.$$

ii) $\beta = \overrightarrow{B} + C$: il existe α_1, α_2 tels que :

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \qquad \overrightarrow{B} \underset{G}{\overset{p}{\succ}} \alpha_1 \text{ et } C \underset{G}{\overset{p}{\succ}} \alpha_2 ;$$

d'après (3) il existe α_1' tel que :

$$B \underset{G}{\overset{p}{\succ}} \alpha_1' \qquad \text{et } \overrightarrow{\alpha_1'} = \alpha_1.$$

Par hypothèse de récurrence il existe r_1 et r_2 tels que :

$$\varphi(r_1) = \alpha_1' , \quad \varphi(r_2) = \alpha_2 \text{ et } B \underset{BG}{\overset{*}{\succ}} r_1, \quad C \underset{BG}{\overset{*}{\succ}} r_2 ,$$

et, finalement :

$$A \underset{BG}{\succ} B \times C \underset{BG}{\overset{*}{\succ}} r_1 \times r_2 , \quad \varphi(r_1 \times r_2) = \overrightarrow{\alpha_1'}\ \alpha_2 = \alpha.$$

ce qui achève la démonstration de (5).

Les assertions (4) et (5) prouvent que $\varphi(L)$ est engendré par la grammaire G c'est-à-dire que $\varphi(L)$ est un langage de Chomsky.

c) Etudions la réciproque dans le cas du mot des racines :

Il suffit de prouver cette réciproque pour un bilangage L non vide engendré par

BG = (T, N, ::=, X) satisfaisant au lemme 4.6.7. Soit la grammaire de Chomsky G = (T, N, ::='', X) définie par :

A::= B + C $\Leftrightarrow$ A ::='' B + C

A::= B x C $\Leftrightarrow$ A ::='' B

A::= a $\Leftrightarrow$ A ::='' a

Il est alors immédiat, par récurrence sur la longueur des dérivations que :

(6) $(\forall A \in N, r \in \hat{T})$ $(A \underset{BG}{\overset{*}{\succ}} r \Rightarrow A \underset{G}{\overset{*}{\succ}} \rho(r))$

(7) $(\forall A \in N, \alpha \in T^*)$ $(A \underset{G}{\overset{*}{\succ}} \alpha \Rightarrow (\exists r \in \hat{T})\ (\rho(r) = \alpha \text{ et } A \underset{BG}{\overset{*}{\succ}} r))$

(Pour prouver (7) il faudra supposer que la bigrammaire n'admet pas, dans ses règles, de symbole non terminal C tel que L (BG, C) = $\emptyset$: on peut toujours se ramener à ce cas en éliminant dans BG les règles qui comportent de tels symboles).

Finalement (6) et (7) prouvent que :

$$\rho(L) = \{\alpha \in T^* \mid X \underset{G}{\overset{*}{\succ}} \alpha\}$$

Ce théorème est à rapprocher de 3.2.9 : l'ensemble des $\varphi(L)$ tels que L soit un bilangage bigrammatical n'est pas plus "vaste" que l'ensemble des $\varphi(L)$ tels que L soit un bilangage régulier.

Si nous appliquons ce théorème aux bilangages bigrammaticaux (resp. algébriques) qui sont des langages, nous obtenons le résultat suivant (annoncé en 4.2.1 et 4.3.5) :

4.6.9. Proposition :

Les bilangages bigrammaticaux (resp. algébriques) qui sont des langages sont les langages de Chomsky (resp à contexte libre) et eux seuls.

Par suite les propriétés "négatives" des langages de Chomsky se "prolongent" aux bilangages bigrammaticaux ; par exemple l'intersection de deux bilangages bigrammaticaux n'est pas nécessairement un bilangage bigrammatical.

4.7 BILANGAGES BIGRAMMATICAUX ET BILANGAGES REGULIERS.

Nous avons déjà vu que les bilangages finis non vides sont algébriques ; de plus l'ensemble vide qui est un langage à contexte libre est aussi un bilangage algébrique : Les bilangages finis sont donc des bilangages bigrammaticaux. Plus généralement nous pouvons énoncer le résultat suivant :

4.7.1. Théorème :

Les bilangages réguliers sur T sont bigrammaticaux. Ce sont les bilangages engendrés par les bigrammaires dont toutes les règles sont du type :

(a) $A ::= B + a \chi C$ ou $A ::= \wedge$, avec A, B, C non terminaux et $a \in T$.

Soit L un bilangage régulier sur T ; L est associé à $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \psi)$ où $\mathfrak{B}$ est un binoïde fini, $\mathfrak{B}'$ une partie de $\mathfrak{B}$ et ψ l'homomorphisme de $\hat{T}$ dans $\mathfrak{B}$ (3.1.1).

Posons $e = \psi(\wedge)$ et, pour $b \in \mathfrak{B}$: $L(b) = \psi^{-1}(b)$.

$r \in L(b) \Leftrightarrow (r=\wedge$ et $b=e)$ ou $((\exists\, a \in T, s, t \in \hat{T})\ (r=s+a\chi t$ et $b=\psi(s)+a\chi\psi(t)))$

$\Leftrightarrow (r=\wedge$ et $b=e)$ ou $((\exists a \in T, s, t \in \hat{T}, c, d \in \mathfrak{B})\ (r=s+a\chi t$ et $b=c+a\chi d$ et $s \in L(c)$ et $t \in L(d)))$

d'où :

$$\begin{cases} L(b) = \bigcup_{\{(a,c,d)\,|\,b=c+a\chi d\}} (L(c) + a \chi L(d)) & \text{si } b \neq e \\ L'(e) = \bigcup_{\{(a,c,d)\,|\,e=c+a\chi d\}} (L(c) + a \chi L(d)) & \text{avec } L'(e) = L(e) \setminus \{\wedge\} \end{cases}$$

Le système obtenu en remplçant partout L (e) par L' (e) $\cup \{\wedge\}$ admet une solution unique (4.2.3). Ainsi le langage

$$L \setminus \{\wedge\} = \bigcup_{b \in \mathfrak{B} \setminus \{e\}} L(b)$$

est algébrique et il est engendré par une bigrammaire dont les règles sont du type :

(b) $A ::= B + a \chi C$ ou $A ::= a \chi C$ ou $A ::= B+a$ ou $A ::= a$.

Finalement, pour engendrer L on peut facilement se ramener à une bigrammaire ne comportant que des règles du type :

$$A ::= B + a \chi C \quad \text{ou } A ::= \wedge.$$

Réciproquement, soit L un bilangage engendré par une bigrammaire $BG = (T, N, ::=, X)$ dont les règles sont du type :

$$A ::= B + a \chi C \quad \text{ou } A ::= \wedge \quad \text{avec } A, B, C \in N \text{ et } a \in T.$$

Introduisons l'ensemble fini $\mathfrak{R} = \mathcal{P}(N) \cup T \times \mathcal{P}(N)$, et munissons $\mathfrak{R}$ des lois suivantes de semi-binoïde sur T :

(1) $(\forall a \in T,\ E \in \mathfrak{R})\ \ a \chi E =$ SI $E \in \mathcal{P}(N)$ ALORS $\{(a, C) \,|\, C \in E\}$

SINON $\emptyset$,

(2) $(\forall E, E' \in \mathfrak{R})\ \ E + E' =$ SI $E \in \mathcal{P}(N)$ et $E' \in T \times \mathcal{P}(N)$ ALORS

$\{A \,|\, (\exists\, B \in E, \exists\, (a, C) \in E')\ (A ::= B + a \chi C)\}$

SINON $\emptyset$.

Soit σ l'unique semi-homomorphisme à droite de $\hat{T}$ dans $\mathfrak{R}$ tel que $\sigma(\wedge) = \{A \mid A ::= \wedge\}$ (3.1.3).

Remarquons d'abord que pour $r \in \hat{V}$, $\sigma(r)$ appartient à $\mathfrak{P}(N)$ (immédiat par récurrence sur r).

Prouvons par récurrence sur la longueur p d'une dérivation que :

(3) $(\forall A \in N,\ r \in \hat{T})\quad (A \overset{*}{\rightarrowtail} r \Rightarrow A \in \sigma(r))$

Pour p = 1 nécessairement $r = \wedge$ et l'assertion est vérifiée.

A l'ordre p+1 la dérivation s'écrit :

$$A \rightarrowtail B + a \times C \overset{p}{\rightarrowtail} r$$

Nécessairement (4.3.8) $r = r_1 + a \times r_2$ et $B \overset{p}{\rightarrowtail} r_1$, $C \overset{p}{\rightarrowtail} r_2$.

Par hypothèse de récurrence :

$$B \in \sigma(r_1),\quad C \in \sigma(r_2)$$

et, comme $\sigma(r_2)$ appartient à $\mathfrak{P}(N)$: $(a, C) \in a \times \sigma(r_2)$; d'après (2):

$$A \in \sigma(r_1) + a \times \sigma(r_2) = \sigma(r).$$

Réciproquement montrons par récurrence sur $r \in \hat{T}$ que :

(4) $(\forall A \in N,\ r \in \hat{T})\quad (A \in \sigma(r) \Rightarrow A \overset{*}{\rightarrowtail} r)$

Pour $r = \wedge$ le résultat est immédiat ; sinon $r = r_1 + a \times r_2$ et :

$$A \in \sigma(r_1) + a \times \sigma(r_2)\ ;$$

d'après (2), il existe $B \in \sigma(r_1)$ et $(a, C) \in a \times \sigma(r_2)$ tel que $A ::= B + a \times C$;

d'après (1), C appartient à $\sigma(r_2)$ et, par hypothèse de récurrence :

$$B \overset{*}{\rightarrowtail} r_1$$

$$C \overset{*}{\rightarrowtail} r_2$$

donc $$A \rightarrowtail B + a \times C \overset{*}{\rightarrowtail} r_1 + a \times r_2.$$

Finalement (3) et (4) prouvent que :

$$r \in L \Leftrightarrow X \in \sigma(r)$$

c'est-à-dire que :

$$L = \sigma^{-1}(\{E \in \mathfrak{R} \mid X \in E\}).$$

4. 7. 2. Remarque :

Au cours de la démonstration précédente nous avons également prouvé (b) que tout bilangage régulier ne contenant pas $\wedge$ est engendré par une bigrammaire BG = (T, N, ::=, X) ne comportant que des règles du type :

(a') $A ::= B + a \times C$. avec $A \in N$, $B, C \in N \cup \{\wedge\}$ et $a \in T$.

Réciproquement tout bilangage engendré par une bigrammaire de type (a') est aussi engendré par une bigrammaire de type (a) (démonstration immédiate), c'est-à-dire que c'est un bilangage régulier. Ainsi les règles du type (a') permettent de caractériser les bilangages réguliers ne contenant pas $\wedge$.

Par "passage au réfléchi" il est facile de déduire du théorème précédent le résultat qui suit :

4. 7. 3. Conséquence :

Les bilangages réguliers sur T sont les bilangages bigrammaticaux sur T, qui sont engendrés par les bigrammaires dont toutes les règles sont du type :

$$A ::= a \times B + C \quad \text{ou } A ::= \wedge \text{ avec A, B, C non terminaux et } a \in T$$

4. 7. 4. Théorème :

Le transformé d'un bilangage régulier par un homomorphisme de dioïdes est un bilangage régulier.

Il suffit de prouver ce théorème pour un bilangage régulier L ne contenant pas $\wedge$ et pour un homomorphisme δ qui ne transforme pas toute ramification en $\wedge$.

Reprenons les notations de la démonstration du théorème 4.6.6 ; nous obtenons :

$$\delta(L) = \sigma_{\varrho(L),\,p}\,(\delta(a_1), \ldots, \delta(a_p)).$$

$\varrho(L)$ est régulier (d'après 4.6.5) et ne contient pas $\wedge$; donc $\varrho(L)$ est associé à l'inconnue A_1 d'un système :

(S) pour $i = 1, \ldots, n$ $\quad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} R_{ij}$.

En outre, d'après 4.7.2, on peut choisir ce système de façon que tout terme R_{ij} soit de la forme $B_{ij} + q_{ij} \times C_{ij}$ où q_{ij} est un entier compris entre 1 et p et où B_{ij} et C_{ij} sont soit des inconnues, soit $\wedge$.

Finalement $\delta(L)$ est la première composante de l'unique solution du système :

(S_δ) $$A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \sigma_{R_{ij},\,p}\,(\delta(a_1), \ldots, \delta(a_p))$$

La bigrammaire BG = (T, N, ::=, X) liée à ce système et engendrant $\delta(L)$ n'admet que des règles du type :

$$A ::= B + r \times C \quad \text{avec} \quad A \in N,\ B,\ C \in N \cup \{\wedge\},\ r \in \hat{T} \setminus \{\wedge\}.$$

Il reste à montrer qu'une telle bigrammaire que nous dirons <u>régulière</u> est équivalente à une bigrammaire n'admettant que des règles du type (a') (4.7.2). Dans ce but appelons <u>degré d'une règle</u> $A ::= B + r \times C$ la taille de r, <u>degré d'une bigrammaire</u> le plus grand degré de ses règles, et montrons que toute bigrammaire BG de degré $k > 1$ est équivalente à une bigrammaire BG', de degré k au plus, et comportant strictement moins de règles de degré k.

Soit $A ::= B + r \times C$ une règle de degré k dans BG ; nécessairement $r = r_1 + a \times r_2$; indiquons les remplacements à effectuer dans les différents cas pour obtenir BG' :

i) $r_1 \neq \wedge$: remplacer $A ::= B + r_1 + a \times r_2 \times C$ par $A ::= B' + a \times r_2 \times C$ et $B' ::= B + r_1$ (avec $B' \notin N$).

ii) $r_1 = \wedge$: nécessairement r_2 n'est pas vide ; remplacer $A ::= B + a \times r_2 \times C$ par

$A ::= B + a \times C'$ et $C' ::= r_2 \times C$ (avec $C' \notin N$).

Dans les deux cas les règles de la nouvelle bigrammaire BG' sont du type voulu et BG' engendre bien le même langage que BG (il suffit de comparer les systèmes liés à BG et BG') ; ce qui achève la démonstration

4.7.5. <u>Théorème</u> :

L'intersection d'un bilangage bigrammatical et d'un bilangage régulier est un bilangage bigrammatical.

Il suffit de prouver que l'intersection d'un bilangage algébrique L sur T et d'un bilangage régulier K sur T est un bilangage algébrique.

K est associé à $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \delta)$ (où $\mathfrak{D}$ est un dioïde fini, $\mathfrak{D}'$ une partie de $\mathfrak{D}$ et δ un D-homomorphisme).

Remarquons d'abord que, pour $r \in \widehat{[k]}$, la définition des fonctions polynômiales $\sigma_{r,\,k}$ s'étend aisément en remplaçant $\hat{V}$ par un dioïde quelconque ; plus précisément posons :

$(\forall\, d_1, \ldots, d_k \in \mathfrak{D})$ $\quad \sigma'_{\wedge,\,k}(d_1, \ldots, d_k) = e$ (e élément neutre de $\mathfrak{D}$)

et, pour $r_1, r_2 \in \widehat{[k]}$ et $i \in [k]$:

$$\sigma'_{r_1 + i \times r_2,\ k}(d_1, \ldots, d_k) = \sigma'_{r_1,\,k}(d_1, \ldots d_k) + d_i \times \sigma'_{r_2,\,k}(d_1, \ldots, d_k).$$

Alors, pour $r \in \widehat{[k]}$ et $r_1, \ldots, r_k \in \hat{T}$:

$$\delta(\sigma_{r,\,k}(r_1, \ldots, r_k)) = \sigma'_{r,\,k}(\delta(r_1), \ldots, \delta(r_k)).$$

L est associé à l'inconnue A_1 d'un système (S) qui s'écrit :

(S) pour $i = 1, \ldots, n$ $\quad A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \sigma_{r_{ij},\,q_{ij}}(B_i^1, \ldots, B_i^{q_{ij}})$

avec $r_{ij} \in \widehat{[q_{ij}]}$ et $B_i^k \in N \cup T$.

Notons $L(A_i)$ la composante de la solution (S) associée à A_i (par

exemple $L = L(A_1)$), et posons :

$$\text{pour } d \in \mathfrak{D} \qquad L(A_i, d) = L(A_i) \cap \delta^{-1}(d).$$

Les $L(A_i, d)$ sont caractérisés de la façon suivante :

$$r \in L(A_i, d) \Leftrightarrow (\exists\, j \in [p_i],\ r_1 \in L(B_i^1), \ldots, r_{q_{ij}} \in L(B_i^{q_{ij}}))$$

$$(r = \sigma_{r_{ij}, q_{ij}}(r_1, \ldots r_{q_{ij}}) \text{ et } \sigma'_{r_{ij}, q_{ij}}(\delta(r_1), \ldots, \delta(r_{q_{ij}})) = d)$$

$$\Leftrightarrow (\exists\, j \in [p_i],\ d_1, \ldots, d_{q_{ij}} \in \mathfrak{D})\ (r \in \sigma_{r_{ij}, q_{ij}}(L(B_i^1, d_1), \ldots, L(B_i^{q_{ij}}, d_{q_{ij}}))$$

$$\text{et } \sigma'_{r_{ij}, q_{ij}}(d_1, \ldots, d_{q_{ij}}) = d) ;$$

par suite :

$$L(A_i, d) = \bigcup_{j=1}^{p_i} \bigcup_{(d_1, \ldots, d_{q_{ij}}) \in \Delta_{ij}} \sigma_{r_{ij}, q_{ij}}(L(B_i^1, d_1), \ldots, L(B_i^{q_{ij}}, d_{q_{ij}}))$$

En convenant que Δ_{ij} est l'ensemble des $(d_1, \ldots, d_{q_{ij}})$ tels que $\sigma'_{r_{ij}, q_{ij}}(d_1, \ldots, d_{q_{ij}}) = d$.

Par conséquent les $L(A_i, d)$ sont des bilangages algébriques et

$$K \cap L(A_1) = \bigcup_{d \in \mathfrak{D}'} L(A_1, d)$$

en est également un.

CONCLUSION

Il est possible de poursuivre cette étude de différentes façons :

1) De nombreux points ont été abordés ici de façon superficielle et pourraient être examinés avec plus de soin : par exemple il est possible
- de définir des "fonctions calculables" de ramifications en s'inspirant de la définition des fonctions calculables d'entiers,
- d'étudier les propriétés de décidabilité et d'indécidabilité pour les bilangages en suivant les études faites à ce sujet sur les langages,
- de généraliser les bigrammaires comme cela été fait pour les grammaires, ...

2) La grande similitude des résultats obtenus ici avec ceux de la théorie des langages invite à penser qu'il faudrait chercher une théorie qui recouvre toutes ces études. Comme les définitions préliminaires du monoïde libre et du binoïde libre peuvent être présentées en termes de "problème universel", il serait intéressant de réexaminer ces questions dans le cadre de la théorie des catégories ; c'est d'ailleurs la démarche suivie dans (EILENBERG - WRIGHT)[1].

3) Les bilangages ont été considérés comme des "langages à deux dimensions" particuliers puisque formé de ramifications. Mais, en interprétant autrement les deux lois de composition interne + et x d'un dioïde, on peut aussi considérer comme bilangages des langages à deux dimensions beaucoup plus généraux : soit un ensemble fini F (alphabet) formé de courbes "orientées", c'est-à-dire munies d'une origine et d'une extrémité (figure 1) ; interprétons les lois de composition interne + et x, respectivement, comme la "mise en série", et la "mise en parallèle" de deux courbes orientées (figure 2) ; une partie de $\hat{F}$ peut alors être interprétée comme un ensemble de courbe orientées ; en particulier, les bigrammaires permettent de définir des parties de $\hat{F}$, et d'analyser les figures appartenant à $\hat{F}$.

Figure 1

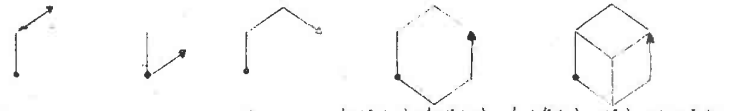


Figure 2

(1) EILENBERG S. and WRIGHT J. B. (1967) Automata in general algebras - I. B. M. Research Note NC 725.

REFERENCES

BAR-HILLEL Y., PERLES M., AND SHAMIR E. (1961)

On formal properties of simple phrase structure grammars, Z. Phonetik, Sprachwiss., Kommunikationsforsch. 14, 143-172.

BERGE C. (1958)

Théorie des graphes et ses applications - Dunod, Paris.

BRAINERD W. (1968)

Tree generating regular systems - Information and Control. 14, 217-231 (1969).

CHOMSKY N. (1) (1963)

Formal properties of grammars - Handbook of mathematical psychology, (Luce, Bush and Galanter editors), Wiley and Sons, New York, 323-418.

CHOMSKY N. (2) (1965)

Aspects of the theory of syntax - The M.I.T. Press, Cambridge.

CULIK K. (1967)

On some transformations in context-free grammars and languages - Czechoslovak Mathematical Journal 17 (1967), 278-311.

GINSBURG S. (1966)

The mathematical theory of context-free languages - Mc Graw-Hill, New York.

GROSS M. ET LENTIN A. (1967)

Notions sur les grammaires formelles - Gauthier-Villars, Paris.

KHALIL R.

Thèse de spécialité à paraître, Faculté des Sciences de Nancy.

LECLAIRE J.M.

Thèse de spécialité à paraître, Faculté des Sciences de Nancy.

OUSPENSKI V.A. (1966)

Leçons sur les fonctions calculables - Hermann, Paris, 32-33.

PAIR C. (1) (1965)

Etude de la notion de pile, application à l'analyse syntaxique. Collection des thèses de la Faculté des Sciences, Université de Nancy.

PAIR C. (2) (1967)

Préliminaires à l'étude algébrique des ramifications - Communication soumise au congrès 1968 de l'I.F.I.P.

PAIR C. (3) (1968)

Notions sur la théorie des langages - Cours, Institut Universitaire de Calcul Automatique, Nancy.

PAIR C. (4) (1969)

Sur des notions algébriques liées à l'analyse syntaxique - Exposé fait au Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines, Fontainebleau, mars 1969.

PAIR C. ET QUERE A. (1) (mai 1968)

Définition et étude des bilangages réguliers - Information and Control, 13, 565-593 (1968)

PAIR C. ET QUERE A. (2) (février 1969)

Sur les fonctions récursives primitives de ramifications - Faculté des Sciences de Nancy, à paraître dans Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.

PETER Rozsa (1) (1962)

Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche - Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus XII, Fasc. 3-4, 1961 - Tomus XIII, Fasc. 1-2, 1962.

PETER Rozsa (2) (octobre 1968)

Die Pair-Quéré schen freien Binoïden als Spezialfälle der angeordneten freien holomorphen Mengen - Eötvös Loránd Universität Budapest.

RABIN M. O. AND SCOTT D. (1959)

Finite automata and their decision problems - I. B. M. Journal of research and devlopment 3, 114-125.

THATCHER J. W. (1967)

Characterizing derivation trees of context-free grammars through generalized finite automata theory - I. B. M. Research Note NC 719.

THATCHER J. W. AND WRIGHT J. B. (1966)

Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second order logic - I. B. M. Research Report RC 1713.

NOM DE L'ETUDIANT : QUERÉ Alain

Nature de la thèse : Spécialité en Mathématiques Appliquées

Vu, Approuvé

et Permis d'Imprimer

NANCY, le 20 Juin 1959

Le DOYEN :

J. AUBRY