

Sc N 80 / 34 B

**PROGRAMMES D'OPTIMISATION  
NON LINEAIRE  
EN RADIOTHERAPIE EXTERNE**

**THESE**

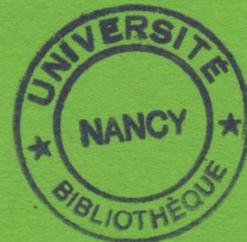
présentée et soutenue publiquement le 4 Juin 1980  
devant la Commission d'Examen

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I  
pour l'obtention du grade de  
**DOCTEUR ES.SCIENCES MATHÉMATIQUES**  
par

**Michel POTDEVIN**

**MEMBRES du JURY**

**Président M. J. LEGRAS**  
**Rapporteurs MM. CI. GILORMINI**  
**M. LUCIUS**  
**Examineurs MM. J.P. HATON**  
**J. L. MALLET**



UNIVERSITÉ DE NANCY I

---

**PROGRAMMES D'OPTIMISATION  
NON LINEAIRE  
EN RADIOTHERAPIE EXTERNE**

---

**THESE**

présentée et soutenue publiquement le 4 Juin 1980  
devant la Commission d'Examen

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I  
pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES**

par

**Michel POTDEVIN**

---

**MEMBRES du JURY**

<b>Président</b>	<b>M. J. LEGRAS</b>
<b>Rapporteurs</b>	<b>MM. Cl. GILORMINI M. LUCIUS</b>
<b>Examineurs</b>	<b>MM. J. P. HATON J. L. MALLET</b>



Que Monsieur le Professeur J. LEGRAS trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour l'aide et le soutien qu'il m'a toujours octroyés. Qu'il sache combien j'ai apprécié sa sollicitude à mon égard.

Je remercie Messieurs les Professeurs GILORMINI et LUCIUS de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur HATON et Monsieur MALLET, Ingénieur au C.N.R.S. d'avoir bien voulu participer au Jury.

Je sais gré au Docteur B. LEGRAS pour ses conseils et encouragements qui ont permis l'aboutissement de cette étude.

Je remercie Monsieur le Professeur J. MARTIN des facilités accordées pour l'utilisation du matériel de la Section d'Informatique Médicale de la Faculté de Médecine.

Il m'est agréable de souligner l'ambiance chaleureuse qui règne au Laboratoire d'Informatique de la Faculté des Sciences et de remercier mes camarades pour la sympathie qu'ils m'ont toujours témoignée.

La réalisation matérielle est due à Madame V. MARCHAND dont j'ai su apprécier la cordialité et l'efficacité.

## **Sommaire**

## **Introduction**

## SOMMAIRE

	Pages
INTRODUCTION	1
<u>Première partie : Techniques et Essais</u>	
I - DOSIMETRIE ET OPTIMISATION EN RADIOTHERAPIE EXTERNE.	4
1 Généralités.	4
2 Méthodes d'optimisation précédemment employées.	6
3 Méthode utilisée dans cette thèse.	7
II - SOURCES DES PRINCIPAUX PROGRAMMES.	9
1 Calcul des doses.	10
2 Optimisation linéaire.	11
3 Optimisation non linéaire.	12
III - POSITION DU PROBLEME ET NOTATIONS.	13
1 Choix de la fonction objectif.	13
2 Variables.	14
3 Support d'optimisation.	15
4 Contraintes.	16
5 Formulation de la fonction objectif.	18
IV - METHODE DU GRADIENT EN PROGRAMMATION LINEAIRE.	20
1 Problème et notations.	20
2 Méthode générale de résolution.	21
3 Phase d'initialisation.	22
4 Phase de saturation.	24
5 Phase d'optimisation.	29
6 Gestion des variables de base.	30

V - OPTIMISATION NON LINEAIRE - METHODE DU GRADIENT PROJETE,	32
1 Définition du problème et notations.	32
2 Méthode de montée simple.	33
3 Détermination de la direction de montée.	33
4 Détermination de $X^{r+1}$ sur D.	38
5 Méthode de montée avec détermination automatique du pas.	40
6 Schéma d'une itération.	43
7 Recherche d'une solution réalisable.	44
VI - SPECIFICITES D'EMPLOI DE LA METHODE D'OPTIMISATION.	45
1 Calcul approché des gradients.	45
2 Non libération des contraintes saturées.	47
3 Passage d'un vecteur -état $X^r$ au suivant $X^{r+1}$ .	47
4 Tolérance de saturation.	49
5 Conditions d'arrêt.	50
6 Détermination d'une solution réalisable.	50
7 Choix des variables de base.	52
8 Conclusion.	52
VII - COMPTE-RENDU DES ESSAIS.	
1 Présentation générale.	54
2 Optimisation dans le seul plan des faisceaux - premier exemple.	55
3 Second exemple d'optimisation dans un plan.	65
4 Exemple d'optimisation dans trois plans.	72
5 Exemple d'optimisation dans un plan.	82
6 Conclusion.	91

Deuxième partie : Programmes

I - INTRODUCTION A LA DESCRIPTION DES PROGRAMMES UTILISES.	II-1
II - CALCUL DES DOSES.	II-3
1 Description des modules.	II-3
2 Organisation des communs.	II-13
III - PROGRAMMATION LINEAIRE PAR LA METHODE DU GRADIENT.	II-20
1 Description des modules.	II-20
2 Codes d'incidents.	II-23
3 Choix de $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ .	II-24
4 Description des communs.	II-25
IV - OPTIMISATION NON LINEAIRE.	II-27
1 Description des modules appelés par le programme principal.	II-27
2 Modules de niveau d'appel inférieur.	II-29
3 Modules spécifiques.	II-32
4 Organisation des communs.	II-34
5 Arbre de recouvrement.	II-39
6 Recherche d'une solution réalisable.	II-40
V - FICHIER DISQUE PREFIX.	II-41
VI - ORGANISATION DES CALCULS DE LA FONCTION OBJECTIF, DES CONTRAINTES ET DES VALEURS APPROCHEES DES DERIVEES.	II-47

VII - COMPLEMENTS.

II-51

CONCLUSION GENERALE.

II-51

ANNEXE - EVOLUTION DE L'INVERSE DE LA  
MATRICE DES CONTRAINTES EN  
PROGRAMMATION LINEAIRE.

A-1

1 Libération d'une contrainte.

A-2

2 Saturation d'une contrainte.

A-5

BIBLIOGRAPHIE.

B-1

-----

## INTRODUCTION

Depuis 1970, dans le cadre de notre emploi de collaborateur technique C.N.R.S., nous avons participé à différents travaux dans les domaines de la dosimétrie radiothérapique et de l'optimisation qui ont conduit à cette thèse. Ces travaux ont été réalisés avec la collaboration de trois équipes : celle du Professeur J. LEGRAS à l'U.E.R. Sciences Mathématiques de l'Université de NANCY I, la Section d'Informatique Médicale de la Faculté de Médecine de NANCY, dirigée par le Professeur J. MARTIN, et les Radiothérapeutes du Centre Régional de Lutte contre le Cancer de NANCY (C.R.C.A.).

Dans un premier temps, nous avons aidé à l'adaptation sur l'ordinateur de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique de Lorraine (I.U.C.A.L.) de programmes de radiothérapie externe et de curithérapie provenant de l'Institut Gustave Roussy de VILLEJUIF. Ils ont permis une exploitation en routine pour le C.R.C.A. jusqu'au moment où celui-ci s'est doté d'un petit système informatique indépendant chargé de la dosimétrie.

Parallèlement, le Professeur J. LEGRAS œuvrait à l'élaboration d'une bibliothèque d'optimisation (réf. 12), et nous avons participé à la mise au point des sous-programmes. Après modification, ces sous-programmes seront utilisés dans notre étude.

En 1977, H.A. AHMED soutenait une thèse sur les techniques d'optimisation en radiothérapie externe (réf. 2). L'optimisation était principalement linéaire. Ce travail n'a pas donné lieu à une exploitation en routine parce que les programmes avaient été mis au point sur le gros ordinateur de l'I.U.C.A.L., et que les doses étaient calculées à l'aide de formules approchées.

Ceci nous a conduit, sous la direction du Docteur B. LEGRAS collaborateur du Professeur J. MARTIN, et qui était alors en fonction au C.R.C.A., à mettre en place des modules d'optimisation linéaire dans le logiciel de dosimétrie de l'ordinateur du C.R.C.A. Nous avons rencontré des difficultés liées à des contraintes de place mémoire, de temps d'exécution et à une utilisation en routine par du personnel non spécialisé. Les résultats obtenus ont été présentés dans la thèse de biologie humaine du Docteur B. LEGRAS (réf. 11) et publiés (réf. 14).

C'est alors que fut entamée l'étude présentée ici qui poursuit le travail de H.A. AHMED, et s'en distingue sur les points suivants :

a) la technique développée par H.A. AHMED se limitait à l'optimisation dans un seul plan, et était principalement linéaire ; la phase non linéaire, faisant appel à une technique de quadratisation (réf. 12 page 21) ne pouvait servir qu'à une première amélioration, car la technique cessait d'être utilisable dès qu'une nouvelle contrainte devenait saturée.

La technique du gradient projeté que nous utiliserons permet d'aller jusqu'à l'obtention de l'optimum. De plus, nos programmes permettent l'optimisation dans un volume tant en optimisation linéaire qu'en optimisation non linéaire.

b) les algorithmes utilisés par H.A. AHMED ont été mis au point sur gros ordinateur, et les programmes correspondants sont inutilisables, tels quels, sur un petit ordinateur.

Nous avons opté pour une organisation modulaire de nos programmes. Nous avons de plus donné un développement important à la description détaillée des sous-programmes, ainsi qu'aux contraintes

informatiques correspondantes, facilitant leur adaptation à tout matériel et leur éventuelle mise en routine.

La mise au point des programmes, l'exécution des exemples traités dans ce travail ont été effectuées sur un MITRA 125 de 32 K mots de mémoire centrale utilisé en mode MITRA 15.

c) Notons enfin que, tandis que H.A. AHMED utilisait pour le calcul des doses des formules grossièrement approchées, nous avons introduit dans nos programmes, les formules précises de CUNNINGHAM. Le lecteur trouvera de plus, en 2<sup>ème</sup> partie, les indications lui permettant d'adapter à nos programmes d'optimisation toute formule de calcul de doses qu'il jugera bon d'utiliser.

-----

**1ère Partie**

**Techniques et Essais**

## I - DOSIMETRIE et OPTIMISATION en RADIOTHERAPIE

### EXTERNE

#### 1 - GENERALITES

La radiothérapie consiste à distribuer dans un volume de l'organisme contenant une lésion habituellement cancéreuse, une dose de radiations adéquate.

Nous nous limiterons au cas de la radiothérapie externe, où la dose est délivrée en exposant le sujet à des photons émis par une source extérieure à l'organisme.

Il n'est pas possible d'éviter l'irradiation de tissus sains situés sur la trajectoire du faisceau. Pour remédier à cet inconvénient, on utilise la technique des "feux croisés" en faisant se recouper au niveau de la tumeur plusieurs faisceaux d'intensité moindre : on obtient ainsi une plus faible irradiation sur un ensemble de tissus sains toutefois plus vaste.

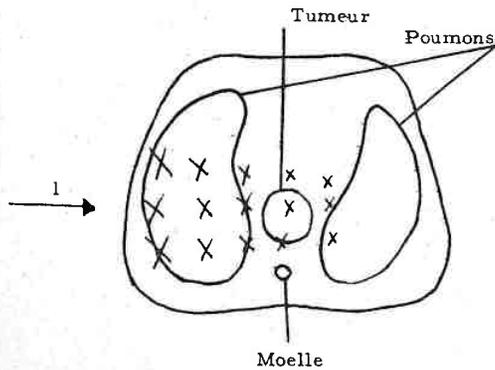
Le problème consiste à trouver la disposition de faisceaux délivrant :

- ) à la tumeur, une dose supérieure à la dose tumoricide pour éviter tout risque de récurrence ;
- ) aux tissus sains, une dose inférieure à toute dose susceptible de provoquer des accidents sévères, voire mortels.

Illustration de la technique des feux croisés : coupe thoracique avec tumeur à l'œsophage :

a) Cas d'un faisceau latéral unique

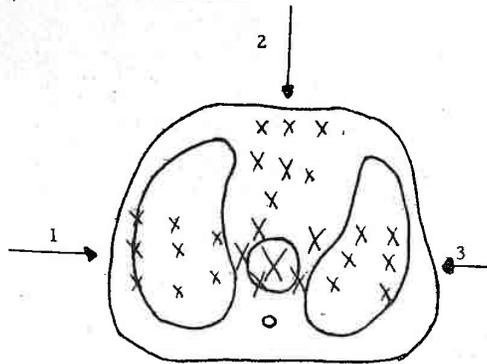
- 5 -



au niveau du poumon gauche, l'irradiation importante est indispensable pour obtenir une irradiation suffisante à la tumeur.

Le compromis est délicat entre les risques de nécrose par sur-dosage, et de récurrence par sous-dosage.

b) cas de trois faisceaux



du fait de l'addition des doses délivrées par les trois faisceaux, l'irradiation sera élevée au niveau de la tumeur, tout en restant limitée dans les différents tissus sains.

En général, le traitement est déterminé de la façon suivante :

- le radiothérapeute définit un protocole de traitement en fixant la géométrie des faisceaux et la dose émise par chacun d'eux ;
- le logiciel de dosimétrie permet à l'ordinateur de fournir des doses à l'intérieur du contour du sujet ;
- au vu de cette distribution, le protocole de traitement est soit adapté, soit corrigé par la modification de certains paramètres jusqu'à ce que les corrections apportées paraissent suffisantes.

Notre souci est de remplacer cette optimisation visuelle et subjective par une optimisation systématique et objective à l'aide d'une définition précise, quantitative de la solution optimale.

- 6 -

Les paramètres d'un traitement de radiothérapie sont très nombreux : nombre de faisceaux, types des appareils utilisés, énergie du rayonnement, distances source-peau ou source-tumeur, utilisation ou non de filtres en coin, géométrie des faisceaux, coefficients de pondération de chacun d'eux...

Dans toute cette étude, nous supposons les axes des faisceaux concourants et coplanaires ; le plan des axes sera fixé. Nous prendrons comme variables :

- les coordonnées du point de concours des axes
- les angles polaires des axes des faisceaux
- les coefficients de pondération des faisceaux.

## 2 - METHODES D'OPTIMISATION PRECEDEMMENT EMPLOYEES

### i) Méthode des fonctions-score

Cette méthode, développée par HOPE à GLASGOW (réf. 8), consiste à définir différentes fonctions conduisant à un score de zéro pour la solution idéale et à un score de un pour la situation juste acceptable sur le plan clinique. L'optimisation consiste à étudier toutes les combinaisons et à déterminer la distribution optimale - celle correspondant au score total minimal.

Les articles publiés ne permettent pas de savoir si cette optimisation est appliquée fréquemment en routine.

### ii) Programmation linéaire

Un choix de la position des axes des faisceaux, au moins approximatif est souvent imposé par des considérations cliniques. Les seules

variables sont alors les coefficients de pondération qui interviennent linéairement dans le calcul des doses. On est alors ramené à un problème classique de programmation linéaire.

Cette méthode a déjà été utilisée en radiothérapie externe (Réf. 1, 4, 6, 7, 9, 10) et nous avons, nous-mêmes installé au C. R. C. un logiciel inspiré de cette méthode (réf. 13).

iii) Optimisations non-linéaires

REDPATH à EDIMBOURG (réf. 15) a utilisé une optimisation quadratique en minimisant la somme des carrés des écarts entre la dose en chaque point de la tumeur et la moyenne des doses à la tumeur.

Plus récemment A. H. AHMED, dans sa thèse (réf. 2) a obtenu une "amélioration" :

la méthode consistait à introduire un optimum défini par programmation linéaire et à considérer cet optimum comme fonction des variables libres (coordonnées du point de concours et axes des faisceaux). H. A. AHMED obtenait une amélioration de la fonction objectif par une technique de quadratisation partielle (réf. 12, page 22) ; malheureusement le processus se bloquait dès qu'une contrainte supplémentaire était saturée.

3 - METHODE UTILISEE DANS CETTE THESE

Nous constaterons dans la suite que la fonction objectif et les contraintes dépendent linéairement des coefficients de pondération, mais dépendent non linéairement des autres variables. Le problème posé est

donc un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes unilatérales ; la méthode classique est la méthode du gradient projeté ; la description de cette technique et des sous-programmes correspondants est faite en (réf. 12), mais la nature particulière de notre problème caractérisé par :

1°) le fait que nous devons approcher le gradient de la fonction objectif et certaines dérivées partielles des contraintes ;

2°) l'importance du temps de calcul des doses

nous a conduit, tout en gardant la philosophie générale de ces programmes, à en modifier de nombreux détails.

La méthode du gradient projeté est très générale et, convenablement simplifiée, est fort efficace en programmation linéaire lorsque toutes les contraintes sont des inégalités. Nous l'utiliserons de préférence à la méthode du SIMPLEX, ceci en particulier, afin de pouvoir enchaîner dans une même optimisation des étapes "linéaires" (portant sur les seuls coefficients de pondération) et des étapes de programmation non linéaire.

Il sera possible, en particulier, d'utiliser nos sous-programmes en vue d'une optimisation linéaire globale simultanément dans plusieurs plans.

-----

## II - SOURCES DES PRINCIPAUX PROGRAMMES

La méthode que nous proposons a été mise en œuvre à partir de programmes déjà écrits provenant de trois sources :

1) la bibliothèque nationale de programmes pour la dosimétrie de la radiothérapie (réf. 5) qui nous a fourni le programme CFIX d'application à la radiothérapie externe. CFIX calcule les distributions de doses délivrées dans différents plans par des faisceaux fixes de Cobalt 60 ou de RX d'énergie maximale 5,5 MV ou 25 MV, à axes coplanaires ou parallèles à un même plan et à section rectangulaire.

2) la thèse de doctorat de spécialité de D. ATLAN (réf. 3) dont s'inspirent les différents modules traitant l'optimisation linéaire, c'est-à-dire les phases de traitement où seuls sont considérés comme variables les coefficients de pondération des faisceaux.

3) l'ouvrage du Professeur J. LEGRAS (réf. 12) pour ce qui concerne la partie non linéaire : choix de la direction de montée et détermination du pas le long de cette direction.

Dans un premier temps nous avons mis au point une version expérimentale des programmes de traitement dans le but de tirer des enseignements au fur et à mesure des essais effectués, destinés à l'élaboration d'une version plus systématique décrite en 2ème partie.

## 1 - CALCUL DES DOSES

Il existe une brochure de programmation précisant les fonctions limites de validité du programme CFIX (réf. 5), décrivant les différentes bibliothèques utilisées, indiquant les règles de remplissage des feuilles de données et comportant une notice d'utilisation de chacun des sous-programmes.

Nous avons dû alléger considérablement le programme pour sa implantation sur MITRA 15. Ainsi sur UNIVAC 1106 l'encombrement est de 216 K-octets environ, alors que le MITRA 15 utilisé n'offre que 36 K-octets disponibles à l'utilisateur, la taille initiale des seuls COMMONS dépassait cette valeur. Dans notre version, toute la partie lecture des données et calculs préliminaires est prise en charge par un programme séparé appelé PREFIX.

De façon générale, les principales limitations apportées à notre version sont les suivantes :

- tous les faisceaux sont de même énergie
- la technique (DSP ou DST) est la même pour tous les faisceaux
- les distributions de doses sont calculées dans au plus 5 plans tous parallèles au plan des faisceaux
- les notions de pondération ou normalisation ont été supprimées
- les doses ne sont calculées qu'en certains points formant le support d'optimisation et non plus sur une grille régulière de points

Par contre, le nombre maximum de faisceaux a été porté de 8 à 56, à 48 faisceaux "réels" et 48 faisceaux "fictifs" nécessaires au calcul approché des gradients.

D'autre part, les COMMONS ont été réécrits complètement, la zone qu'ils occupent devant être partagée par la zone commune des modules d'optimisation non linéaire.

Enfin, quelques modifications ont été apportées pour des raisons de compatibilité entre les FORTRAN UNIVAC et MITRA.

Mises à part, les modifications mentionnées ci-dessus, nous nous sommes efforcés de respecter les modules originaux de façon à limiter le travail d'adaptation d'éventuels utilisateurs de CFIX. D'ailleurs, la présentation succincte que nous faisons en 2ème partie des différents modules est calquée sur la brochure de programmation de CFIX, l'accent étant surtout mis sur les modifications apportées.

## 2 - OPTIMISATION LINEAIRE

PLGRAD est le programme d'optimisation linéaire par la méthode du gradient, issu des travaux de COHEN et ATLAN, que nous utilisons, soit isolément, soit préalablement à l'appel du programme général d'optimisation non linéaire.

Bien qu'il y ait de nombreuses similitudes entre les problèmes linéaire et non linéaire, les modules correspondants sont indépendants, ceci afin de faciliter la tâche de futurs utilisateurs uniquement intéressés par l'optimisation linéaire. C'est pourquoi nous avons rebaptisé les modules de PLGRAD et conservé la possibilité de prendre en compte des contraintes bilatérales, bien qu'aucune d'elles n'intervienne dans notre problème.

Nous présentons les modules de PLGRAD en 2ème partie.

### 3 - OPTIMISATION NON LINEAIRE

Le programme correspondant, appelé TOTAL, a été élaboré à partir de la bibliothèque d'optimisation (réf. 12). Certains modules ont été modifiés dans le but :

- de permettre l'intervention de l'utilisateur en cours d'exécution, par exemple au niveau du choix du pas de montée ;
- de faciliter l'interface avec les modules de calcul des doses.

Comme pour les programmes CALDOS et PLGRAD, en 2ème partie nous insisterons surtout sur les modifications apportées et celles à envisager pour la version définitive.

## III - POSITION DU PROBLEME ET NOTATIONS

### 1 - CHOIX DE LA FONCTION OBJECTIF

Les premiers auteurs minimisaient la dose intégrale totale, mais ce paramètre n'a qu'une importance médicale relative. Un choix plus judicieux a consisté ensuite à utiliser la dose intégrale au niveau des organes sensibles.

Cependant, les radiothérapeutes estiment en général que l'homogénéité des doses dans le volume tumoral est le critère le plus important. Nous avons retenu ce critère d'homogénéité et le but de l'optimisation sera donc de rendre la dose aussi "régulière" que possible dans le volume-cible.

Ceci peut se traduire de différentes façons :

- (1) comme nous l'avons déjà mentionné REDPATH minimise la somme des carrés des écarts entre la dose en un point de la tumeur et la moyenne des doses.
- (2) A. H. AHMED minimise le maximum de la dose. Il est alors possible d'utiliser la programmation linéaire si l'on ne prend pour variables que les coefficients de pondération des faisceaux. La technique consiste à introduire une nouvelle variable  $z$  que l'on minimise en introduisant les nouvelles contraintes :

"la dose en un point devra rester inférieure ou égale à  $z$ ".

- (3) L'adjonction de ces nouvelles contraintes diminuant le nombre de points d'optimisation possibles, nous avons été amenés à minimiser la

somme des doses totales aux points de la tumeur. Des études précédentes effectuées au Centre Régional de Lutte contre le Cancer de NANCY nous ont montré que la technique (3) donnait des résultats très semblables à ceux de la technique (2) tout en permettant d'optimiser sur un nombre plus élevé de points au niveau de la tumeur.

## 2 - VARIABLES

Si  $m$  est le nombre de faisceaux considérés, selon le cas, nous considérerons comme variables :

- uniquement les coefficients de pondération :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

- outre les coefficients de pondération, les angles de chacun des faisceaux, ainsi, que les coordonnées :

$$x, y$$

de l'isocentre - point de concours des axes des faisceaux.

Nous noterons  $D_{jk}$ , la dose unitaire délivrée au point d'indice  $k$  par le faisceau numéro  $j$ , caractérisé par les valeurs  $\theta_j$ ,  $x$  et  $y$ . La dose totale au point  $k$  pourra être calculée par :

$$D_k = \sum_{j=1}^m \alpha_j D_{j,k}$$

Nous noterons  $X$  le tableau des variables.

## 3 - SUPPORT D'OPTIMISATION

Nous appelons support d'optimisation l'ensemble des points où les doses seront calculées. Le choix, assez arbitraire, de ces points doit permettre de définir les différents volumes à considérer - volume-cible ou tumeur et organes sensibles.

Certains auteurs, tel A.H. AHMED, utilisent pour ce faire une technique de quadrillage automatique, intéressante lorsqu'il est nécessaire de calculer des doses intégrales ; cependant, il s'avère parfois intéressant de faire entrer dans le support certains points particuliers. C'est pourquoi nous préconisons la lecture des coordonnées des points sur cartes ou par l'intermédiaire d'un graph-pen selon le matériel dont on dispose ; quitte à utiliser parallèlement une technique de quadrillage si l'entrée des coordonnées devient fastidieuse.

Nous distinguons dans le support 3 types de groupes de points :

Type 1 : points du contour de la tumeur ; l'ensemble des indices de ces points sera noté CT. En ces points, on imposera à la dose d'être supérieure à un seuil donné.

Type 2 : points des organes sensibles ; l'ensemble des indices de ces points sera noté OS. En ces points, on imposera à la dose d'être inférieure à un seuil donné.

Type 3 : points intérieurs à la tumeur ; l'ensemble des indices de ces points sera noté IT. Ces points n'interviendront que pour le calcul de la fonction objectif.

Organisation du support

Les points sont rangés dans l'ordre des plans demandés (5 au maximum) à raison d'au maximum 20 groupes par plan demandé. Le nombre de points par groupe n'a pas été limité, seul le nombre total de points sera limité par la capacité-mémoire.

Nous avons adopté les conventions suivantes :  
pour un plan quelconque,

- le premier groupe de points est nécessairement de type 1 et c'est le seul
- le dernier groupe de points est nécessairement de type 3 et c'est le seul
- par suite, les groupes intermédiaires entre le premier et le dernier sont nécessairement de type 2 (18 au maximum, 1 au minimum)
- A chaque groupe de type 1 ou 2 correspond une valeur de seuil particulière.

Remarque En cas d'absence d'organe sensible, un groupe de type 2 de 1 point muni d'une valeur de seuil "bidon" permettra de respecter les conventions.

4 - CONTRAINTES

Elles sont de 3 types :

contraintes organes-sensibles

La dose totale à chaque point d'un organe sensible doit être inférieure ou égale à une valeur de seuil qui peut différer selon les organes sensibles ce qui justifie notre décomposition du support en plusieurs groupes de points pour les différents organes sensibles.

Pour chaque organe sensible i, pour chaque point d'indice k, on aura

$$\varphi_k(X) \geq 0 ; \text{ avec } \varphi_k(X) = S_i - \sum_{j=1}^m \alpha_j D_{jk}$$

où  $S_i$  est le seuil choisi pour l'organe sensible numéro i.

Contraintes tumeur

La dose totale à chaque point de la tumeur doit être supérieure ou égale à une valeur seuil.

Si le volume-cible est convexe, ce qui est le cas le plus fréquent, il suffira d'écrire les contraintes pour les points du contour de la tumeur. Cependant, dans certains cas particuliers, rien n'empêche de faire figurer dans CT quelques points de l'intérieur de la tumeur.

Aussi écrivons-nous pour tout point d'indice k de CT :

$$\psi_k(X) \geq 0 ; \text{ avec } \psi_k(X) = \sum_{j=1}^m \alpha_j D_{jk} - S$$

où S est le seuil relatif à la tumeur.

Contraintes de signe

La nature des coefficients de pondération nous conduit à écrire :

$$\alpha_j \geq 0 \quad \text{pour tout } j \text{ de } 1 \text{ à } m.$$

5 - FORMULATION DE LA FONCTION OBJECTIF

Les programmes d'optimisation ayant été écrits en vue de la recherche d'un maximum, nous chercherons :

$$\max_X f(X) \text{ avec } f(X) = - \sum_{j=1}^m \alpha_j \left( \sum_{k \in CTuIT} D_{jk} \right)$$

Nous prendrons ainsi en compte à la fois les points du contour et de l'intérieur de la tumeur.

En résumé, notre problème d'optimisation s'écrira :

$$\text{- Max}_X f(X) \text{ avec } f(X) = - \sum_{j=1}^m \alpha_j \left( \sum_{k \in CTuIT} D_{jk} \right)$$

avec les contraintes :

$$\text{- } \varphi_k(X) \geq 0 \text{ avec } \varphi_k(X) = \text{Si} - \sum_{j=1}^m \alpha_j D_{jk}$$

pour tout organe sensible i et tout point k de OS<sub>i</sub>

$$\text{- } \psi_k(X) \geq 0 \text{ avec } \psi_k(X) = \sum_{j=1}^m \alpha_j D_{jk} - S$$

pour tout point k de CT

$$\text{- } \alpha_j \geq 0 \text{ pour tout faisceau } j,$$

avec  $X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  en optimisation linéaire

et  $X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, x, y)$  en optimisation non linéaire ;

avec m : nombre de faisceaux

$\alpha_j, \theta_j$  : le coefficient de pondération et l'angle du faisceau j

x, y : les coordonnées du point de concours des axes des faisceaux

Rappelons que les quantités  $D_{jk}$  sont en fait des fonctions des variables  $x, y, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  ; ces fonctions ne peuvent pas se traduire par une écriture mathématique explicite et seront construites par un sous-programme de calcul des doses. Une conséquence est que les dérivées partielles de  $D_{jk}$  par rapport à ces variables ne peuvent pas être explicitées, ni calculées directement ; elles devront être approchées.

-----

#### IV - METHODE DU GRADIENT EN PROGRAMMATION

##### LINEAIRE

#### 1 - PROBLEME ET NOTATIONS

##### Problème linéaire (P)

On se propose de rechercher le maximum d'une fonction objectif

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

lorsque les  $n$  variables sont liées par  $p$  contraintes toutes unilatérales :

(P)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n - e_1 \geq 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n - e_2 \geq 0 \\ \vdots \\ a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \dots + a_{pn} x_n - e_p \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Soit } \varphi_i(X) \geq 0 ; 1 \leq i \leq p \\ \text{avec} \\ \varphi_i(X) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots \\ \quad + a_{in} x_n - e_i \end{array}$$

##### Notation matricielle

Soit  $X$  dans  $\mathbb{R}^n$ , trouver  $X$  tel que :

$$\text{Max } f(X) \quad \text{avec } f(X) = {}^t C \cdot X$$

$$X \in \mathbb{R}^n$$

(P)

avec les  $p$  contraintes unilatérales :

$$A \cdot X \geq E$$

où  $X$  est un vecteur-colonne à  $n$  composantes : les variables

${}^t C$  est un vecteur-ligne à  $n$  composantes : les coefficients de la  
fonction objectif

E est un vecteur-colonne à p composantes : les seconds membres des contraintes.

A est une matrice à p lignes et n colonnes des coefficients des contraintes.

Le souci de clarté guidera le choix d'une notation ou l'autre dans ce qui suit.

Conventions et rappels

on supposera que :

- aucune contrainte n'est redondante
- toutes les contraintes sont compatibles

on appellera solution ou vecteur réalisable, tout X vérifiant les p contraintes

la contrainte  $\varphi_i$  est dite saturée en  $X_0$  lorsque  $\varphi_i(X_0) = 0$

du fait de la linéarité, l'optimum :

- se trouve sur un des sommets du polyèdre déterminé par les contraintes
- sature n contraintes

soit I l'ensemble des indices des contraintes ;

Pour i dans I, la contrainte  $\varphi_i$  sera dite :

- vérifiée lorsque  $\varphi_i(X) \geq 0$
- saturée lorsque  $\varphi_i(X) = 0$ .

2 - METHODE GENERALE DE RESOLUTION

La méthode peut être décomposée en 3 phases :

a) la phase d'initialisation.

A partir d'un vecteur X quelconque, détermination d'un vecteur  $\bar{X}$  réalisable par résolution d'un problème linéaire auxiliaire.

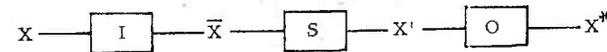
b) la phase de saturation.

A partir d'un vecteur réalisable  $\bar{X}$ , détermination d'un vecteur  $X'$  réalisable qui sature n contraintes ce qui, on l'a vu, constitue une condition nécessaire à l'obtention d'un optimum.

c) la phase d'optimisation.

A partir d'un vecteur réalisable  $X'$ , saturant n contraintes, détermination de la solution optimale  $X^*$ , si elle existe.

La méthode peut être schématisée par :



Nous allons successivement détailler chacune des parties :

- I : Initialisation
- S : Saturation
- O : Optimisation.

3 - PHASE D'INITIALISATION : X -> [I] ->  $\bar{X}$

Soit  $X_0$  un vecteur initial quelconque. En  $X_0$  nous définissons :

- $I_1$  ensemble des indices  $i_1$  tels que  $\varphi_{i_1}(X_0) \geq 0$
- $I_2$  ensemble des indices  $i_2$  tels que  $\varphi_{i_2}(X_0) < 0$

- Si  $I_2$  est vide, toutes les contraintes sont vérifiées,  $X_0$  est vecteur réalisable de (P) et on passe directement à la phase de saturation.

- Sinon, on définit un problème linéaire auxiliaire  $(P_0)$  :

la fonction objectif auxiliaire sera :

$$f_0(X) = \sum_{I_2} \varphi_{i_2}(X)$$

avec les conditions suivantes :

- . toute contrainte  $\varphi_{i_1}$  devra rester vérifiée
- . toute contrainte  $\varphi_{i_2}$  négative devra rester négative ou nulle.

Ainsi  $f_0(X)$  est par construction une quantité négative ou nulle, ne pouvant s'annuler que si  $I_2$  est vide.

Donc si  $\bar{X}_0$  est un vecteur tel que :

$$f_0(\bar{X}_0) = 0$$

il satisfera à  $\varphi_i(\bar{X}_0) \geq 0$  pour tout  $i$  de  $I$  ensemble des indices des contraintes et réciproquement.

Le problème auxiliaire  $(P_0)$  peut être mis sous une forme analogue à celle du problème initial (P) :

fonction objectif :

$$(P_0) \quad \begin{array}{l} \text{Max } f_0(X) \\ X \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad \text{avec} \quad f_0(X) = \sum_{I_2} \varphi_{i_2}(X)$$

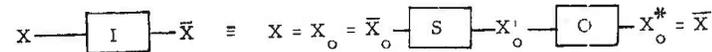
contraintes :

$$\begin{array}{l} \forall i_1 \in I_1 \quad , \quad \varphi_{i_1}(X) \geq 0 \\ \forall i_2 \in I_2 \quad , \quad -\varphi_{i_2}(X) \geq 0 \end{array}$$

avec la convention que dès qu'une contrainte  $\varphi_{i_2}(X)$  prend la valeur zéro, son indice quitte  $I_2$  pour entrer dans  $I_1$ .

Par construction de  $(P_0)$ , le vecteur initial  $X_0$  est vecteur réalisable de  $(P_0)$  et  $X_0^*$  est solution de  $(P_0)$  si et seulement si  $I_2$  est vide, soit  $X_0^*$  vecteur réalisable de (P).

Ainsi la phase d'initialisation, ou recherche d'un vecteur réalisable de (P) se ramène à la résolution du problème  $(P_0)$  ne nécessitant l'utilisation que des deux dernières phases de la méthode générale.



4 - PHASE DE SATURATION :  $\bar{X} \xrightarrow{S} X'$

Soit  $\bar{X}$  un vecteur réalisable de (P) saturant  $m$  contraintes ; si  $m \geq n$  on passe directement à la phase d'optimisation ; sinon on applique  $n-m$  fois la méthode du gradient réduit étendu qui à chaque étape sature une contrainte supplémentaire le long d'une direction de montée.

Technique élémentaire du gradient-méthode de montée

Etant donné  $X^r = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$ , on cherche une direction de montée  $D$  telle que, pour  $h$  positif donné,  $f(X^r + hD) - f(X^r)$  soit le plus grand possible. Du fait de la linéarité de  $f$ , cette différence est égale à  $h D \text{ grad } f$ .

On démontre facilement que la direction  $D$ , de norme fixée, qui maximise  $D \cdot \text{grad } f$  est

$$D = k \text{ grad } f$$

où  $k$  est une constante arbitraire positive.

La technique consiste à construire la suite itérative :

$$X^{r+1} = X^r + h_r (\text{grad } f)_{X^r}$$

où le pas  $h_r$  est arbitraire.

gradient-réduit

Dans le problème (P), on considère les  $m$  contraintes saturées comme  $m$  équations permettant de définir  $m$  variables en fonction des  $n-m$  autres variables.

On est amené à choisir parmi les  $n$  variables :

- |  $m$  variables de base
- |  $n-m$  variables hors base.

Soit  $X_B$  le vecteur des  $m$  variables de base

$X_H$  le vecteur des  $n-m$  variables hors base.

Le système des contraintes saturées permet en général d'exprimer les variables de base en fonction des variables hors base par des relations que nous résumons en :

$$X_B = K(X_H).$$

La fonction objectif  $f(X)$  où nous mettons en évidence variables de base et hors-base devient :

$$f(X_H, X_B) = f(X_H, K(X_H)) = F(X_H)$$

fonction "réduite" qui ne dépend que des variables hors-base.

On peut appliquer la technique du gradient à  $F$ . Pour cela, il faut connaître les dérivées de  $F(X_H)$  par rapport aux variables hors-base, c'est le vecteur ayant ces dérivées pour composantes, qu'on appelle "gradient-réduit" de  $f$ .

Calcul du gradient-réduit

Rappelons que  $\bar{X}$  est un vecteur réalisable c'est-à-dire que toutes les contraintes sont vérifiées en  $\bar{X}$ .

Soit  $J$  l'ensemble des indices des contraintes saturées :

$$A_J \cdot \bar{X} = E_J \quad (1)$$

Soit  $K$  l'ensemble des indices des contraintes non saturées :

$$A_K \cdot \bar{X} > E_K \quad (2)$$

où  $A_J$  (resp.  $A_K$ ) est la sous-matrice de  $A$  formée par les lignes de  $A$  d'indice dans  $J$  (resp. dans  $K$ ) ;

et  $E_J$  (resp.  $E_K$ ) est le sous-vecteur de  $E$  formé par les éléments de  $E$  d'indice dans  $J$  (resp. dans  $K$ ).

Avec  $\bar{X} = (\bar{X}_B, \bar{X}_H)$ , (1) s'écrit :

$$A_{JB} \bar{X}_B + A_{JH} \bar{X}_H = E_J \quad (3)$$

Ainsi (3), système des contraintes saturées, permet si  $A_{JB}$  est inversible d'exprimer les variables de base en fonction des variables hors-base.

$$\bar{X}_B = A_{JB}^{-1} [ E_J - A_{JH} \bar{X}_H ] \quad (4)$$

D'autre part, la fonction objectif peut s'écrire :

$$f(\bar{X}) = {}^t C \cdot \bar{X} = {}^t C_B \bar{X}_B + {}^t C_H \bar{X}_H.$$

Soit en remplaçant  $\bar{X}_B$  par son expression :

$$\begin{aligned} f(\bar{X}) &= F(\bar{X}_H) = {}^t C_B A_{JB}^{-1} [ E_J - A_{JH} \bar{X}_H ] + {}^t C_H \bar{X}_H \\ &= {}^t C_B A_{JB}^{-1} E_J + [ {}^t C_H - {}^t C_B A_{JB}^{-1} A_{JH} ] \bar{X}_H. \end{aligned}$$

Posons :  $Z_H = {}^t C_B A_{JB}^{-1} \cdot A_{JH}$

Par définition, le gradient réduit  $\Delta_H$  est égal à  $\frac{\partial F(\bar{X}_H)}{\partial \bar{X}_H}$

soit :

$$\Delta_H = {}^t C_H - Z_H$$

Gradient-réduit étendu

$\Delta_H$  étant une direction de montée, on pose :

$$X'_H = \bar{X}_H + h \cdot \Delta_H \quad (h > 0)$$

d'après (4) :

$$\begin{aligned} X'_B &= A_{JB}^{-1} [E_J - A_{JH} \cdot X'_H] \\ &= A_{JB}^{-1} [E_J - A_{JH} (\bar{X}_H + h \Delta_H)] \\ &= A_{JB}^{-1} [E_J - A_{JH} \bar{X}_H] - A_{JB}^{-1} A_{JH} \Delta_H \cdot h \\ &\quad \bar{X}_B \text{ d'après (4)} \end{aligned}$$

ainsi  $X'_B = \bar{X}_B - A_{JB}^{-1} A_{JH} \Delta_H \cdot h$

On pose

$$\Delta_B = -A_{JB}^{-1} A_{JH} \cdot \Delta_H$$

d'où

$$X'_B = \bar{X}_B + h \Delta_B$$

on appelle gradient réduit étendu le vecteur :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_B \\ \Delta_H \end{bmatrix}$$

ce vecteur  $\Delta$  constitue la direction de montée.

Choix du pas h

$\Delta$  étant la direction de montée, on aura :

$$X' = \bar{X} + h \Delta \quad \text{avec } h \text{ arbitraire, positif.}$$

$X'_B$  se déduisant de  $X'_H$  par résolution du système des contraintes saturées en  $\bar{X}$ , celles-ci le restent en  $X'$ .

Il reste à vérifier que les contraintes non saturées restent vérifiées en  $X'$ , soit :

$$\begin{aligned} A_K X' &\geq E_K \\ A_K (\bar{X} + h \Delta) &\geq E_K \\ h A_K \Delta &\geq E_K - A_K \bar{X} \end{aligned} \quad (5)$$

Posons  $Y = E_K - A_K \bar{X}$ ; d'après (2)  $Y$  est un vecteur strictement négatif.

Deux cas peuvent se présenter :

-  $A_K \cdot \Delta > 0$  pour tout  $k$  de  $K$ .

Le problème n'a alors pas de solution finie,  $h$  pouvant être pris aussi grand qu'on le veut.

- Il existe  $k$  dans  $K$  tel que  $A_k \cdot \Delta < 0$

$$(5) \text{ s'écrit } h \leq \frac{Y_{k_1}}{A_{k_1} \cdot \Delta} \quad \forall k_1 \in K_1 = \{k \in K \mid A_k \cdot \Delta < 0\}$$

on choisira donc :

$$h = \min_{k_1 \in K_1} \left( \frac{Y_{k_1}}{A_{k_1} \cdot \Delta} \right) \text{ soit } k_1^* \text{ l'indice vérifiant le mini-}$$

mum. Le vecteur  $X' = \bar{X} + h \Delta$  est réalisable et sature une nouvelle contrainte :

$$A_{k_1^*} X = E_{k_1^*}$$

et il faut entrer une nouvelle variable dans la base.

D'autre part,  $\Delta$  étant direction de montée :

$$f(X') > f(\bar{X}).$$

5 - PHASE D'OPTIMISATION : X' — O — X\*

Caractérisation de l'optimum

Soit X' un vecteur réalisable saturant n contraintes

Soit J l'ensemble des indices des contraintes saturées :

$$\forall j \in J \quad \varphi_j(X') = 0.$$

D'après le théorème de FARKAS-MINKOWSKI, X\* est optimum local si et seulement si :

il existe n coefficients  $\lambda_j$  tels que :

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial x_s}(X^*) = \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s}(X^*) \text{ pour tout } s \text{ de } 1 \text{ à } n$$

$$\text{avec } \lambda_j \leq 0$$

où les  $\lambda_j$  sont appelés coefficients de KUHN et TUCKER

(6) s'écrit sous la forme matricielle :

$$C = {}^t A_J \mathcal{A} \text{ avec } \mathcal{A} = [\lambda_j]$$

d'où

$$\mathcal{A} = {}^t A_J^{-1} \cdot C \quad (7)$$

La phase d'optimisation se décomposera en deux sous-phases :

Sous-phase 1

- calcul des coefficients de KUHN et TUCKER à l'aide de (7)
- si tous les coefficients  $\lambda_j$  sont négatifs ou nuls, X\* est l'optimum ;
- sinon, on libère une contrainte correspondant à un  $\lambda_j$  positif et on passe à la 2ème sous-phase, après avoir sorti une variable de la base.

Sous-phase 2

Le nombre de contraintes saturées ne vaut plus que n-1 ; il faut saturer une nouvelle contrainte ce que l'on fera en revenant à la phase de saturation avec un nombre de variables hors-base égal à 1.

La méthode exposée demande un calcul fréquent des matrices  $A_J^{-1}$ , calcul qui peut devenir lourd si le nombre de variables augmente.

Dans le problème que nous traitons le nombre de variables est faible (souvent de l'ordre de 3 ou 4) mais pour garder sa généralité, le programme d'ATLAN a utilisé un calcul de  $A_J^{-1}$  par évolution de la matrice à chaque itération (par analogie avec la méthode révisée du SIMPLEX).

La description détaillée de la technique utilisée sera faite en annexe.

6 - GESTION DES VARIABLES DE BASE

Le choix des variables entrantes ou sortantes de la base ne peut être arbitraire. A l'initialisation, le choix est fait automatiquement par programme pour que la matrice  $A_{JB}$  ne comporte ni ligne, ni colonne nulle.

Dans l'évolution de la matrice  $A_{JB}^{-1}$ , le test de non nullité d'un coefficient ou pivot permet de détecter un choix erroné de la variable entrante ou sortante et conduit à établir un autre choix.

Programme utilisé :

Pour mettre en œuvre cette méthode du gradient en programmation linéaire, nous avons utilisé, après quelques adaptations, les programmes présentés par D. ATLAN (réf. 3).

-----

V - OPTIMISATION NON LINEAIRE - METHODE DU

GRADIENT PROJETE

Le problème linéaire n'étant qu'un cas particulier du problème traité ici où l'hypothèse de linéarité de la fonction objectif et des contraintes est supprimée, nous allons retrouver des notions déjà évoquées dans le chapitre précédent. Afin d'être complet, nous n'avons pas hésité à faire quelques répétitions, tout en nous efforçant de conserver les mêmes notations.

1 - DEFINITION DU PROBLEME ET NOTATIONS

Il s'agit de maximiser la fonction objectif  $f(X)$  dont les  $n$  variables sont liées par  $p$  contraintes unilatérales.

On dira qu'un point  $\bar{X}$  est réalisable, si en ce point toutes les contraintes sont vérifiées. Nous serons amenés à distinguer entre contraintes saturées et contraintes vérifiées non saturées en  $\bar{X}$ .

Le problème peut être mis sous la forme :

$$\max f(X) \quad \text{où} \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\text{avec} \quad \varphi_\ell(X) \geq 0 \quad \ell \in L$$

où  $L$  est l'ensemble des contraintes.

En  $\bar{X}$  réalisable, on aura  $L = J \cup K$  où :

$J$  est l'ensemble des contraintes saturées en  $\bar{X}$  :  $\varphi_j(\bar{X}) = 0 \quad \forall j \in J$

$K$  est l'ensemble des contraintes vérifiées non saturées en  $\bar{X}$  :

$$\varphi_k(\bar{X}) > 0 \quad \forall k \in K$$

$J$  et  $K$  peuvent évidemment évoluer au cours du traitement.

2 - METHODE DE MONTEE SIMPLE

Nous utilisons une méthode itérative déterminant une suite de points réalisables  $X^0, X^1, \dots, X^r, X^{r+1} \dots$  tels que :

$$f(X^{r+1}) > f(X^r)$$

chaque itération comporte deux phases :

- choix d'une direction de montée D
- recherche de  $X^{r+1}$  réalisable le long de cette direction, c'est-à-dire calcul de h avec :

$$X^{r+1} = X^r + h \cdot D.$$

3 - DETERMINATION DE LA DIRECTION DE MONTEE

Soit  $X^r$  le dernier itéré obtenu,  $X^r$  étant réalisable on a :

$$\begin{aligned} \varphi_j(X^r) &= 0 & \forall j \in J \\ \varphi_k(X^r) &> 0 & \forall k \in K. \end{aligned}$$

La recherche de la direction de meilleure montée consiste à calculer la direction D de norme fixée  $\delta$  telle que pour h positif donné  $X^r + h D$  soit réalisable et maximise f. On cherche donc

$D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  telle que :

$$(I) \begin{cases} f(X^r + h D) \text{ maximum} \\ \sum_{i=1}^n d_i^2 - \delta^2 = 0 \\ \varphi_j(X^r + h D) \geq 0 & \forall j \in J \\ \varphi_k(X^r + h D) \geq 0 & \forall k \in K \end{cases}$$

En général, ce problème est insoluble formellement, aussi ne contenterons nous de rechercher une meilleure direction de montée locale en linéarisant la fonction objectif et les contraintes.

Le problème (I) devient :

$$(II) \begin{cases} \max (f(X^r) + h \cdot D \cdot f'(X^r)) \\ \sum_{i=1}^n d_i^2 - \delta^2 = 0 \\ \varphi_j(X^r) + h D \cdot \varphi_j'(X^r) \geq 0 & \forall j \in J \\ \varphi_k(X^r) + h D \cdot \varphi_k'(X^r) \geq 0 & \forall k \in K \end{cases}$$

avec

$$D \cdot g'(X^r) = \sum_{i=1}^n d_i \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X^r) \text{ où } g \text{ désigne } f, \varphi_j \text{ ou } \varphi_k.$$

Si h est suffisamment petit, la dernière égalité est toujours satisfaite car  $\varphi_k(X^r) > 0$ ; ainsi les contraintes vérifiées non saturées n'interviennent pas dans l'étude d'un maximum local.

En outre, on a :  $h > 0$  et  $\varphi_j(X^r) = 0$ ; ainsi (II) peut s'écrire :

$$(III) \begin{cases} \max \Omega(D) & \Omega(D) = D \cdot f'(X^r) \\ \Psi_0(D) = 0 & \text{avec } \Psi_0(D) = \sum_{i=1}^n d_i^2 - \delta^2 \\ \Psi_j(D) \geq 0 & \forall j \in J & \Psi_j(D) = D \cdot \varphi_j'(X^r) \end{cases}$$

D'après le théorème de FARKAS-MINKOWSKI, les conditions de KUHN et TUCKER nécessaires et suffisantes pour que, à h fixé,  $X^* = X^r + h \cdot D$  soit un maximum local se traduisent par l'existence de coefficients  $\lambda_0, \lambda_j (j \in J)$  tels que :

$$\Omega' = \lambda_0 \Psi_0' + \sum_j \lambda_j \Psi_j'$$

avec  $\lambda_j \leq 0$  pour toute contrainte saturée en  $X^*$  vérifiant  $D \cdot \varphi_j'(X^*) = 0$ ; les  $\lambda_j$  sont appelés coefficients de KUHN et TUCKER.

La méthode dépend donc des contraintes que nous supposons saturées en  $X^*$ . On peut envisager de faire un choix arbitraire de ces contraintes saturées et d'en tester la validité, c'est-à-dire de vérifier si

les coefficients de KUHN et TUCKER correspondants sont négatifs ou nuls, quitte à essayer un autre choix. En pratique, toute recherche exhaustive de ce type est rendue impossible si le nombre des contraintes est élevé, aussi nous contenterons nous de maintenir saturées toutes les contraintes déjà saturées en  $X^r$ .

Si pour tout  $j$  de  $J$ , on a  $\lambda_j \leq 0$ , la direction  $D$  est la meilleure direction de montée locale. Par contre, si un au moins des coefficients  $\lambda_j$  est positif, la direction  $D$  reste direction de montée, mais n'est pas la meilleure.

On montre que la direction  $\bar{D}$  obtenue en libérant une contrainte correspondant à un coefficient  $\lambda_j$  positif, est une direction de montée compatible avec les contraintes libérées, la meilleure si les  $\bar{\lambda}_j$  correspondants sont négatifs.

Lors de quelques essais avec cette possibilité de libération de contraintes, nous avons pu constater un va-et-vient de libération-saturation, le gain apporté par la meilleure direction de montée locale pouvant être compensé par la perte éventuellement admise au niveau de la saturation, aussi nous conserverons  $D$  comme direction de montée, même si un des coefficients  $\lambda_j$  est positif.

Ce faisant, nous nous ôtons la possibilité de libérer une contrainte. Dans notre problème, cette restriction est peu importante car, pour des raisons d'efficacité nous serons amenés à utiliser, dans notre méthode de montée, tantôt des étapes en programmation non linéaire, faisant alors varier toutes les variables, tantôt des étapes en programmation linéaire, où seuls varieront les coefficients de pondération ; c'est au cours des étapes linéaires que pourront être libérées certaines contraintes saturées.

Calcul de  $D$  et des  $\lambda_j$

D'après (III) on a :

$$\Omega' = f'(X^r) \quad \text{car} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial d_i} = \frac{\partial f(X^r)}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Psi_j' = \varphi_j'(X^r) \quad \text{car} \quad \frac{\partial \Psi_j}{\partial d_i} = \frac{\partial \varphi_j(X^r)}{\partial x_i}$$

$$\Psi_j' = 2D$$

$D$  sera donc définie par :

$$f'(X^r) = 2 \lambda_0 D + \sum_{j \in J} \lambda_j \varphi_j'(X^r)$$

Soit :

$$\text{(IV) } \begin{cases} D = f'(X^r) - \sum_{j \in J} \lambda_j \varphi_j'(X^r) \text{ puisque } \lambda_0 \text{ est quelconque} \\ D \cdot \varphi_j'(X^r) = 0 \quad \forall j \in J \text{ qui traduit la conservation des} \\ \text{contraintes saturées.} \end{cases}$$

L'élimination de  $D$ , conduit au système linéaire en  $\lambda_j$  :

$$\left[ \sum_{j \in J} \lambda_j \varphi_j'(X^r) \right] \cdot \varphi_i'(X^r) = f'(X^r) \cdot \varphi_i'(X^r) \quad \forall i \in J$$

Explicitons ce système en posant :

$$b_{ji} = \varphi_j'(X^r) \cdot \varphi_i'(X^r)$$

$$e_i = f'(X^r) \cdot \varphi_i'(X^r).$$

Soit  $B$  la matrice carrée symétrique d'éléments  $b_{ji}$

$E$  la matrice colonne d'éléments  $e_i$

et  $A$  la matrice colonne d'éléments  $\lambda_j$ .

Le système définissant les  $\lambda_j$  se formalise alors en :

$$B \cdot A = E.$$

Propriété de  $D$

Introduisons à priori une direction  $\bar{D}$  de la forme :

$$\bar{D} = f'(X^r) - \sum_{j \in J} \bar{\lambda}_j \cdot \varphi_j'(X^r)$$

que l'on peut écrire :

$$\bar{D} = f'(X^r) - {}^t \varphi' \cdot \bar{\lambda}$$

avec

$$\varphi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Un procédé classique de détermination des  $\bar{\lambda}_j$  qui minimisent  $\|\bar{D}\|$ , la norme euclidienne de  $\bar{D}$  est fournie par la méthode de GAUSS qui conduit à :

$$\varphi' \cdot {}^t \varphi' \cdot \bar{\lambda} = \varphi' \cdot f'$$

on-peut noter que :

$$\varphi' \cdot {}^t \varphi' = B$$

et

$$\varphi' \cdot f' = E \quad \text{où } B \text{ et } E \text{ sont les matrices introduites page 36.}$$

Ainsi les  $\bar{\lambda}_j$  sont solutions de :

$$B \cdot \bar{\lambda} = E'$$

système identique à celui définissant les  $\lambda_j$ .

Par suite, on peut calculer les  $\lambda_j$  par une méthode directe de minimisation de  $\|D\|$ , la méthode de GOLUB mise en œuvre par le sous-programme de bibliothèque MCADIR.

Les  $\lambda_j$  étant ainsi calculés, D sera alors donnée par :

$$D = f'(X^r) - {}^t \varphi' \cdot \bar{\lambda}$$

Remarque : si  $n = 3$  et si les contraintes sont au nombre de 1 (resp. 2), la direction D est la projection orthogonale du gradient de f sur

le plan tangent à la surface  $\varphi_1 = 0$  (resp. sur la tangente à la courbe d'intersection de  $\varphi_1 = 0$  et  $\varphi_2 = 0$ ) d'où le nom de gradient projeté donné à cette direction.

#### 4 - DETERMINATION DE $X^{r+1}$ SUR D

Soit n le nombre de variables et m le nombre de contraintes saturées (m ne varie pas lors du calcul de D).

Le système des m contraintes saturées permet de définir m variables de base en fonction des n-m autres appelées variables hors-base. Nous noterons :

$X_B$  le tableau des variables choisies de base

$X_H$  le tableau des variables choisies hors-base

et  $D_B$  et  $D_H$  les tableaux des éléments correspondants de D

$$X = (X_B, X_H) \quad \text{et} \quad D = (D_B, D_H).$$

Soit  $Y_H = X_H^r + h D_H$  où h est le pas choisi.

On peut alors calculer  $Y_B$  comme solution du système des contraintes saturées au cours de l'étape  $X^r \rightarrow X^{r+1}$  :  $\varphi(Y_B, Y_H) = 0$ .

Nous résolvons ce système par linéarisation en prenant comme valeur initiale :

$$Y_B^0 = X_B^r + h \cdot D_B$$

ce qui assure, en général, une convergence rapide du procédé de résolution.

$$\text{Posons :} \quad Y = (Y_B, Y_H)$$

il reste à vérifier les 2 conditions :

- Y est "meilleur" que  $X^r$  soit  $f(Y) > f(X^r)$  } (1)
- Y est réalisable soit  $\varphi_k(Y) \geq 0 \forall k \in K$  } (2)

puisque par construction Y sature les contraintes déjà saturées par X  
3 cas peuvent alors se présenter :

a) si les conditions (1) et (2) sont vérifiées, nous posons à l'étape suivante avec :

$$X^{r+1} = Y.$$

b) si les conditions (2) sont vérifiées, c'est-à-dire si Y est réalisable mais que (1) n'est pas vérifiée, nous changeons la valeur de h. En effet, D n'étant qu'une direction de montée locale, le pas h initial peut s'avérer trop grand.

c) si une au moins des contraintes n'est pas vérifiée, cela signifie que la "droite"  $X^r + h \cdot D$  rencontre une ou plusieurs contraintes. Nous saturons alors une nouvelle contrainte à l'aide d'une technique itérative de dichotomie déterminant une valeur de pas  $\bar{h}$  et le point  $X(\bar{h})$  tels que :

$$X_H(\bar{h}) = X_H^r + \bar{h} \cdot D_H$$

$$\text{et } \phi(X_B, X_H) = 0$$

afin que  $X(\bar{h})$  sature toutes les contraintes précédemment saturées.

Détermination de  $\bar{h}$

Soient à l'itération s, deux valeurs de pas  $h_1^s$  et  $h_2^s$  telles que :

$$- \forall k \in K, \quad \phi_k(X(h_1^s)) \geq 0$$

$$- \exists k_1 \in K, \quad \phi_{k_1}(X(h_2^s)) < 0.$$

Nous calculons alors  $h' = \frac{h_1^s + h_2^s}{2}$ , puis  $X(h')$  par la méthode d'élimination utilisée ci-dessus pour le calcul de  $Y = X(h)$ .

$$\text{Si } \phi_k(X(h')) \geq 0 \text{ pour tout } k, \text{ nous posons } \begin{cases} h_1^{s+1} = h' \\ h_2^{s+1} = h_2^s \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} h_1^{s+1} = h_1^s \\ h_2^{s+1} = h' \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

$$\text{avec pour valeurs initiales } \begin{cases} h_1^0 = 0 \\ h_2^0 = h. \end{cases}$$

Nous arrêtons les itérations pour  $h_2^s - h_1^s$  suffisamment petit. Il existe alors au moins une contrainte d'indice  $k_1$  telle que :

$$\phi_{k_1}(X(h_1^s)) \geq 0$$

$$\text{et } \phi_{k_1}(X(h_2^s)) < 0$$

\*) Si l'indice  $k_1$  est unique, posons :

$$\bar{h} = \frac{h_1^s + h_2^s}{2} \text{ et calculons } X^{r+1} = X(\bar{h}) \text{ par la méthode d'élimination.}$$

Par construction,  $X^{r+1}$  sature les contraintes précédemment saturées, sature la contrainte d'indice  $k_1$  et vérifie les autres contraintes. Notons qu'il est possible d'avoir :

$$f(X^{r+1}) \leq f(X^r)$$

on accepte ainsi de "descendre" en cas de saturation.

\*) Si l'indice  $k_1$  n'est pas unique, le programme de bibliothèque a été conçu pour s'arrêter après édition d'un message d'incident. Nous reviendrons ultérieurement sur ce problème de saturation.

5 - METHODE DE MONTEE AVEC DETERMINATION AUTOMATIQUE DU PAS

Il est possible d'améliorer la méthode de montée simple décrite ci-dessus en introduisant une détermination automatique du pas.

Nous cherchons  $h^*$  tel que :

$$f(X^r + h^*) - f(X^r) \text{ soit maximum.}$$

Pour ce faire, nous approchons  $g(h) = f(X^r + h \cdot D)$  par un polynôme du second degré interpolant  $g(h)$  sur 0,  $h$  et  $2h$ .

$$\text{Soit } g_0 = g(0) = f(X^r)$$

$$g_1 = g(h) = f(Y)$$

il reste à déterminer  $Z = X(2h)$  par la méthode d'élimination avec

$$g_2 = g(2h) = f(Z).$$

Si  $\Delta = g_0 - 2g_1 + g_2$  est négatif, le polynôme d'interpolation a un maximum et on peut calculer la valeur optimale de  $h$  :

$$h^* = h \times (3g_0 - 4g_1 + g_2) / 2\Delta$$

puis déterminer  $U$  par :

$$U = X(h^*)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} U_H = X_H^r + h^* D_H \\ \varphi(U_H, U_B) = 0. \end{cases}$$

Nous poserons  $X^{r+1} = U$  si  $f(U) > f(Y)$  avec  $Y, Z$  et  $U$  réalisables ;  
et  $f(U) > f(Z)$ .

Nous appliquerons la technique de saturation par dichotomie à :

Y si Y n'est pas réalisable

Z si Z n'est pas réalisable et  $f(Z) > f(Y)$

U si U n'est pas réalisable et  $f(U) > f(Z)$  et  $f(U) > f(Y)$

Dans les autres cas,  $X^{r+1}$  sera choisi parmi  $Y, Z$  ou  $U$  selon que la plus grande valeur est celle de  $f(Y), f(Z)$  ou  $f(U)$ .

En reprenant la notation adoptée ci-dessus :

$$Y = X(h) \text{ pour } Y \text{ défini par : } Y_H = X_H^r + h \cdot D_H$$

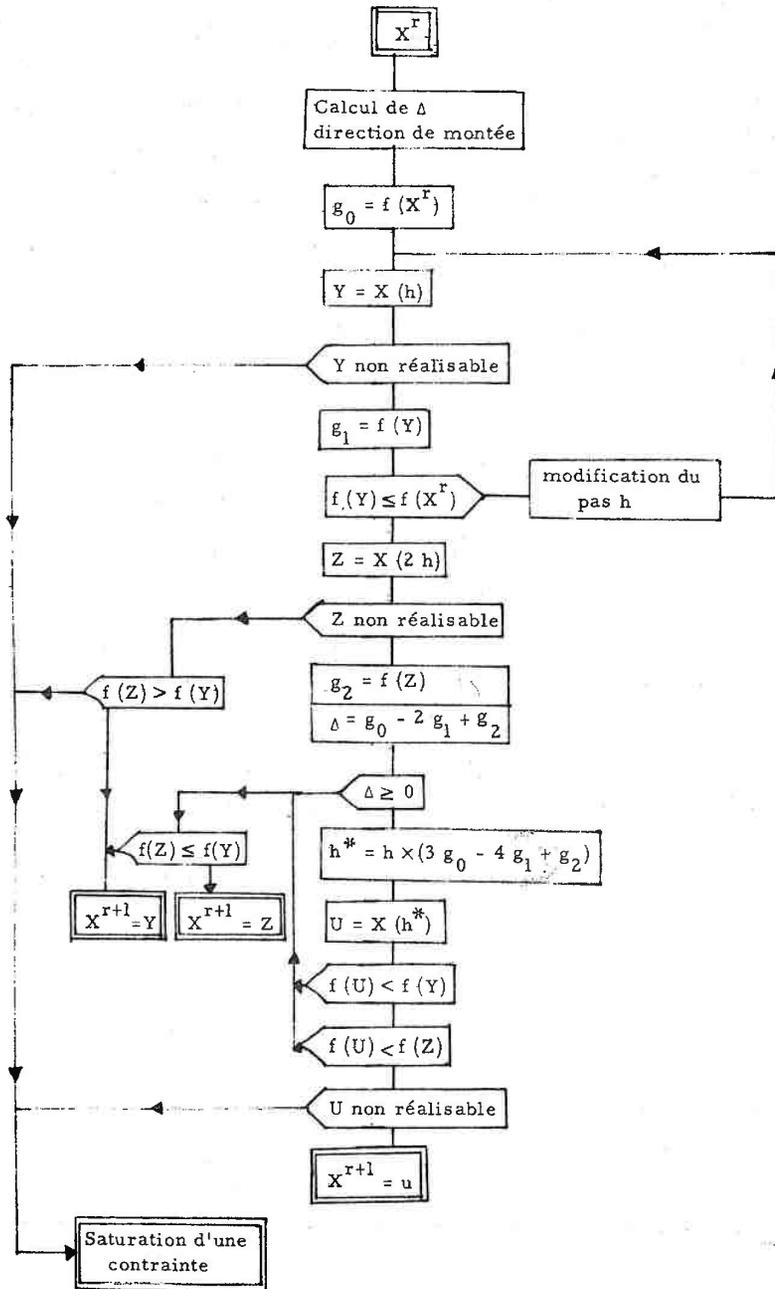
$$\text{et } \varphi(Y_H, Y_B) = 0$$

le schéma de la méthode sera donc le suivant pour l'itération

$$r \rightarrow r + 1$$

### 6 - SCHEMA D'UNE ITERATION

(page suivante).



7 - RECHERCHE D'UNE SOLUTION REALISABLE

La méthode d'optimisation décrite ci-dessus nécessite qu'on dispose d'une solution initiale  $X^0$  réalisable.

Comme dans le cas de la programmation linéaire, il suffit pour cela de résoudre un problème auxiliaire analogue au problème initial, problème auxiliaire pour lequel on dispose d'une solution réalisable.

L'énoncé de ce problème auxiliaire est strictement celui décrit dans la phase d'initialisation de la méthode du gradient en programmation linéaire.

CONCLUSION

Nous nous sommes contentés ici d'une description générale de la méthode susceptible d'être appliquée à des problèmes très différents du nôtre.

Les particularités inhérentes à son emploi dans le cadre de la radiothérapie externe feront l'objet du chapitre suivant et permettront d'évoquer des points essentiels non encore abordés, tels les choix :

- du pas h initial
- des variables de base.

## VI - SPECIFICITES D'EMPLOI DE LA METHODE

### D'OPTIMISATION

#### 1 - CALCUL APPROCHE DES GRADIENTS

La bibliothèque d'optimisation laisse à l'utilisateur le soin d'écrire les sous-programmes d'introduction de la fonction objectif, des contraintes et de leurs dérivées.

Dans notre problème, ces fonctions ne sont pas définies explicitement par une formulation mathématique ; leurs valeurs ne seront calculées que pour certaines valeurs des variables.

Pour faciliter l'exposé, sans nuire à la généralité, considérons le cas d'un traitement comportant 3 faisceaux.

Les variables du problème sont :

- les coefficients de pondération  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  de chaque faisceau
- les angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  de chaque faisceau
- les coordonnées  $x$  et  $y$  du point de concours des faisceaux.

Nous appelons vecteur état et notons  $X$  :

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, x, y).$$

Pour une valeur choisie de  $X$ , nous calculons trois doses unitaires, relatives à chacun des faisceaux, en chaque point du support d'optimisation.

Les fonctions objectif  $f$  et contraintes  $\varphi$  sont des combinaisons linéaires des coefficients de pondération et des doses unitaires.

Le calcul des dérivées partielles de  $f$  et de  $\varphi$  par rapport aux coefficients de pondération  $\alpha_i$  ne pose pas de problème puisque les  $\alpha_i$  interviennent linéairement.

Par contre, pour les dérivées partielles relatives aux autres variables, nous utilisons les techniques conventionnelles d'approximation de ces dérivées par des différences. Ainsi, nous poserons par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} \approx \frac{f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta_1 + \Delta \theta, \theta_2, \theta_3, x, y) - f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta_1 - \Delta \theta, \theta_2, \theta_3, x, y)}{2 \Delta \theta}$$

formule qui revient à approcher la direction de la tangente en M par la direction d'une corde  $M_1 M_2$  où  $\widehat{M_1 M} = \widehat{M M_2}$ . Cette formule est beaucoup moins sensible aux erreurs de calcul de la fonction f qu'une approximation telle que :

$$\frac{f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta_1 + \Delta \theta, \theta_2, \theta_3, x, y) - f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, x, y)}{\Delta \theta}$$

Elle est évidemment plus coûteuse en temps de calcul.

Ainsi, le calcul de  $\frac{\partial f}{\partial \theta_1}$  nécessite le calcul des doses unitaires correspondant aux faisceaux :

$$\theta_1 + \Delta \theta, x, y \quad \text{et} \quad \theta_1 - \Delta \theta, x, y$$

que nous appellerons "faisceaux fictifs" pour les distinguer des faisceaux initiaux nommés aussi "faisceaux réels".

Nous calculerons les autres dérivées partielles de façon analogue. Pour chaque faisceau réel, nous sommes donc amenés à introduire 6 faisceaux fictifs et, par suite, à calculer 7 doses unitaires caractérisées respectivement par :

- |                                   |   |                   |
|-----------------------------------|---|-------------------|
| 1) $\theta, x, y$                 | ) | faisceau réel     |
| 2) $\theta + \Delta \theta, x, y$ | ) | faisceaux fictifs |
| 3) $\theta - \Delta \theta, x, y$ |   |                   |
| 4) $\theta, x + \Delta x, y$      |   |                   |
| 5) $\theta, x - \Delta x, y$      |   |                   |
| 6) $\theta, x, y + \Delta y$      |   |                   |
| 7) $\theta, x, y - \Delta y$      |   |                   |

Nous précisons l'organisation des calculs page II-47.

## 2 - NON LIBERATION DES CONTRAINTES SATUREES

L'expérience montre que les techniques d'optimisation utilisées permettent de distinguer deux types de problèmes :

- les problèmes à "caractère linéaire", où les gains obtenus le sont essentiellement lors de saturations de contraintes ;
- les problèmes à "caractère non linéaire", où des gains appréciables peuvent être constatés en dehors des saturations.

Les essais effectués nous ont montré que notre problème est du premier type. Par suite, nous chercherons à saturer les contraintes le plus vite possible.

Cette remarque est fondamentale et justifie la stratégie adoptée à différents niveaux.

Ainsi, lors du calcul de la direction de montée, nous refusons toute libération de contrainte bien que cette libération améliore la direction de montée. (Cette libération est souvent suivie d'une saturation ramenant au point de départ).

## 3 - PASSAGE D'UN VECTEUR-ETAT $X^r$ AU SUIVANT $X^{r+1}$

Une direction de montée D ayant été calculée, se pose alors le

choix du pas h pour le passage de  $X^r$  à  $X^{r+1}$  par :

$$X_H^r = X_H^{r-1} + h \cdot D_H$$

et le calcul de  $X_B$  par élimination numérique avec

$$X_B^0 = X_B^r + h D_B \text{ comme valeur initiale}$$

où  $\left\{ \begin{array}{l} H \text{ est l'ensemble des indices des variables hors-base} \\ B \text{ est l'ensemble des indices des variables de base.} \end{array} \right.$

Le choix du pas h est délicat : une valeur trop grande risque de faire sortir du champ d'application des techniques locales utilisées ; par contre, une valeur trop petite allongera le temps de calcul ou même rendra les techniques inefficaces. Les programmes de bibliothèque prévoient le choix d'une valeur initiale de h par l'utilisateur et l'évolution de cette valeur :

- lors de la détermination automatique du pas
- par réduction à la moitié ou au quart si la valeur choisie s'avère trop grande.

L'utilisation de la détermination automatique du pas s'étant révélée coûteuse et peu efficace, nous n'utiliserons pas cette technique dans la version définitive.

Afin de pouvoir agir facilement sur h, nous avons été amenés à modifier les programmes de bibliothèque. Le critère du choix de h a été le suivant : choisir h pour que les variations correspondantes de x, y d'une part, des  $\theta_i$  d'autre part, soient d'un ordre de grandeur satisfaisant. Pratiquement, nous choisissons h pour que le maximum des variations en  $\theta_i$ , prises en valeur absolue et exprimées en degrés, soit de l'ordre de 5.

Nous avons été conduits à cette option du choix de h par les tests de la version expérimentale où h était introduit de façon interactive.

Pour la version définitive, il nous paraît sage de calculer par programme une valeur plausible de h, puis de la confirmer ou de l'affirmer de façon interactive ce qui laissera toute latitude à l'utilisateur.

#### 4 - TOLERANCE DE SATURATION

La contrainte  $\varphi(X)$  est dite saturée en  $X^0$  quand :

$$\varphi(X^0) = 0$$

Le traitement informatique, du fait des imprécisions inévitables conduit à traduire cette condition en :

$$|\varphi(X^0)| < \epsilon$$

où  $\epsilon$  dépend du degré de précision des calculs successifs. Dans la pratique, si on connaît le nombre maximum de chiffres significatifs, c'est-à-dire la précision relative d'un résultat d'après la représentation des nombres en mémoire, le choix de  $\epsilon$  ne peut être fait correctement qu'après plusieurs essais.

De plus, le type des contraintes intervient également dans le choix de cette valeur ; ainsi dans les exemples présentés, nous considérons les contraintes :

la dose reçue en un point est inférieure à 50 GRAY (organe-sensible)  
ou est supérieure à 60 GRAY (tumeurs).

Ces valeurs sont relativement approximatives et nous avons considéré comme saturées en  $X^0$  les contraintes si :

$$|\varphi(X^0)| < 0.5$$

ce qui correspond à une précision de l'ordre de 1 %, acceptable eu égard

par exemple à la précision du positionnement du sujet.

#### 5 - CONDITIONS D'ARRÊT

Si la condition d'arrêt du processus itératif est bien connue :

$$\| \text{grad } f(X^*) \| \leq \epsilon$$

les ordres de grandeur des composantes du gradient sont assez différents et les temps de calcul relativement longs, aussi nous contenterons nous d'une amélioration, l'arrêt ayant lieu à la demande de façon intéressante, au vu des composantes du gradient et de l'amélioration obtenue à chaque itération.

#### 6 - DETERMINATION D'UNE SOLUTION REALISABLE

La bibliothèque d'optimisation permet, à l'aide du programme des 2 phases, de choisir arbitrairement le point initial, par exemple de façon systématique :

$$X = 0.$$

La méthode des 2 phases conduit alors à :

- trouver une solution réalisable (1ère phase)
- optimiser à partir de cette dernière (2ème phase).

Il est sûr qu'on a tout intérêt à partir d'un point initial le meilleur possible. Les critères de choix des valeurs initiales sont très

différents selon le type de variable considérée : ainsi, si l'isocentre, correspondant à ce qu'on peut appeler le centre de la tumeur est déterminable assez aisément et si pour les cas classiques, des raisons cliniques guident le radiothérapeute dans le choix du nombre et des angles des faisceaux, les valeurs des coefficients de pondération sont plus délicats à fixer et dépendent des valeurs des seuils choisies qui conditionnent toute la suite.

Ces particularités de notre problème nous ont conduits à ne pas utiliser la méthode des deux phases, coûteuse en temps d'exécution. Pour déterminer une solution réalisable, nous avons utilisé le modus operandi suivant.

La géométrie des faisceaux étant fixée, traiter le problème linéaire, dont les seules variables sont les coefficients de pondération, avec des seuils "sévères", quitte, en cas d'échec, à revenir à des seuils moins exigeants, jusqu'à obtention d'une solution réalisable optimale pour la configuration de faisceaux fixée.

Cette technique présente le premier avantage de saturer un nombre de contraintes égal au nombre de faisceaux, ce qui satisfait notre exigence de saturation rapide.

De plus, si le choix des seuils peut sembler dépendre d'une façon trop rigide de la géométrie initiale des faisceaux, il ne faut pas perdre de vue le caractère local des techniques d'optimisation utilisées qui nous impose, par nature, de rester dans le voisinage de cette géométrie initiale.

Enfin, on pourra éventuellement se contenter de cette optimisation linéaire peu coûteuse, car ne demandant le calcul des doses que pour les faisceaux réels.

## 7 - CHOIX DES VARIABLES DE BASE

Il s'agit là d'un point délicat de la méthode utilisée, car il est difficile de préjuger de l'influence de ce choix sur la vitesse de convergence de la méthode.

Dans notre cas, du fait de l'utilisation de la méthode linéaire en première phase de recherche d'une solution réalisable, nous disposons d'un point initial saturant un nombre de contraintes égal au nombre  $n$  de faisceaux réels (éventuellement plus en fonction de la tolérance au niveau de la saturation), par suite, il nous faut en général choisir  $n$  variables de base. Ces variables de base étant susceptibles de varier de façon moins contrôlée que les variables hors-base, il nous a semblé naturel de choisir les  $n$  coefficients de pondération comme variables de base. Ensuite, au fur et à mesure des saturations, notre choix se porte d'abord sur les coordonnées de l'isocentre qui ont toujours très peu varié, vraisemblablement parce que les composantes correspondantes du gradient sont plus faibles que celles relatives aux angles de faisceaux

## 8 - CONCLUSION

Comme on l'a vu à plusieurs reprises, le choix a priori de certains paramètres est quasiment impossible dans notre étude, et nous nous réservons la possibilité d'intervenir de façon interactive au vu de l'évolution des résultats.

Si cette possibilité d'intervenir est très intéressante pour une

étude expérimentale ou de recherche, elle s'oppose pratiquement à toute possibilité d'utilisation en routine. Aussi, au cours des essais, nous nous sommes toujours efforcés de dégager des règles devant permettre l'élaboration d'une version plus adaptée à l'utilisation pratique par du personnel non spécialisé.

### Remarque sur le choix initial des faisceaux

Si dans la pratique, les connaissances et l'expérience du thérapeute permettent à ce dernier un choix satisfaisant de la géométrie des faisceaux, nous avons dû, pour nos essais, recourir à une autre technique : nous avons supposé que nous disposions de 8 faisceaux également répartis de 45 en 45° et nous avons cherché, par optimisation linéaire, leurs coefficients de pondération.

Nous avons alors pris comme positions initiales les axes des 3 faisceaux ayant les plus grands coefficients de pondération.

## VII - COMPTE-RENDU DES ESSAIS

### 1 - PRESENTATION GENERALE

Le but des essais que nous présentons est de montrer la validité des méthodes d'optimisation non linéaire dans le cadre de la radiothérapie externe.

Il est sûr qu'une phase d'essais cliniques sera indispensable avant le passage à une exploitation en routine. Nous nous sommes cependant efforcés de traiter des exemples proches de la réalité. Ainsi les essais présentés correspondent à une tumeur ORL irradiée au télécobalt par des champs de  $5 \times 5$  cm à une distance source-tumeur de 80 cm dans un volume supposé homogène.

Il n'y a mathématiquement pas de différence notable entre les exemples à un et à plusieurs plans. Mais vu l'intérêt clinique d'une optimisation volumétrique nous avons tenu à présenter un exemple à 3 plans dont le plan des faisceaux correspond à celui des 2 autres essais, ce qui mettra en évidence les limites des optimisations dans un plan unique.

#### Convention

L'angle des faisceaux est repéré par rapport à la verticale ascendante Oy et croît dans le sens des aiguilles d'une montre (cf. fig. p. 55).

## 2 - OPTIMISATION DANS LE SEUL PLAN DES FAISCEAUX premier exemple

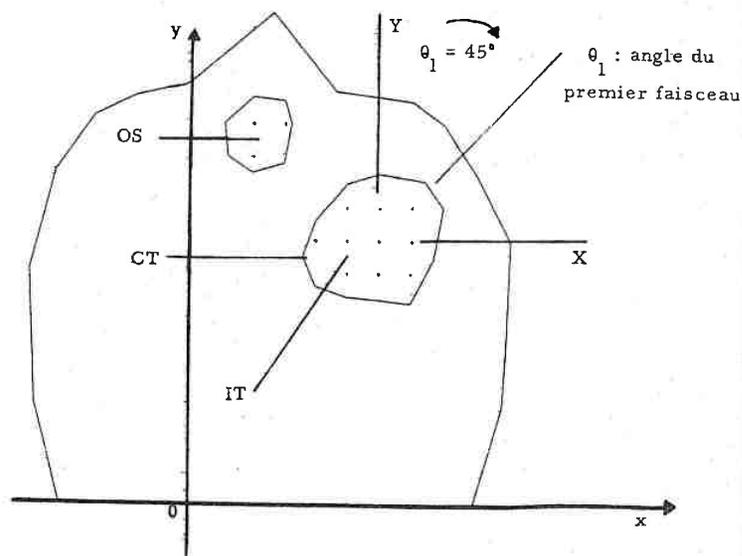
Le support d'optimisation est constitué par 31 points, tous situés dans le plan des faisceaux et répartis de la façon suivante :

- CT : contour de la tumeur 11 points
- IT : intérieur de la tumeur 10 points
- OS : organe sensible 10 points.

Le nombre de faisceaux réels est fixé à 3, valeur usuellement adoptée en pratique.

Les valeurs seuils sont :

- 60 gray (gy) pour la tumeur soit 6 000 rads
- 50 gray (gy) pour l'organe sensible soit 5 000 rads.



Les contours de la tumeur et de l'organe sensible sont tracés en réunissant par des segments de droite les points choisis.

Rappel : la fonction objectif est l'opposé de la somme des doses à la tumeur, proportionnelle à la valeur tumorale moyenne.

### 1ère phase : Détermination d'une solution réalisable - optimisation linéaire

Rappelons que l'optimisation ne peut être mise en œuvre qu'à partir d'une solution réalisable. Après la définition d'un problème auxiliaire, le programme d'optimisation non linéaire TOTAL pourrait se charger lui-même de cette tâche à partir d'un point initial quelconque. Comme nous l'avons déjà mentionné, nous avons préféré utiliser le programme d'optimisation linéaire PLGRAD pour la recherche de cette solution réalisable, seuls les coefficients de pondération étant variables, les angles des faisceaux et l'isocentre restant constants. Ce dernier est fixé au centre approximatif de la tumeur ; soit ici  $x = 6, y = 8$ .

### Choix des faisceaux

Les angles des faisceaux ne sont pas déterminés tout à fait a priori. A l'instar d'ALI AHMED (réf. 2), nous nous efforçons de choisir les "3 meilleures" valeurs parmi 8 réparties régulièrement entre 0 et 360° de 45 en 45°.

Après un calcul des doses unitaires correspondant à ces 8 faisceaux par CALDOS, nous résolvons le problème linéaire ayant pour inconnues les 8 coefficients de pondération à l'aide de PLGRAD. La valeur optimale de la fonction objectif est de -1338,0 (opposé de la somme des valeurs des doses-tumeurs).

Les valeurs des coefficients de pondération sont précisées dans le tableau :

angle du faisceau (en degrés)	0	45	90	135	180	225	270	315
coefficient de pondération*								
- absolu	0	245	0	160	223	54	513	0
- relatif (en %)	0	20,5	0	13,4	18,7	4,5	42,9	0

A partir de ces valeurs, nous choisissons, comme faisceaux, ceux correspondant aux coefficients de pondération les plus élevés. Soit ici : 45, 180 et 270° qui correspondent à une valeur relative cumulée de 82,1 %. Nous remarquons toutefois que les positions 135° et 180° sont affectées de pondération de même ordre de grandeur. Comme nous nous limitons à 3 faisceaux, nous ferons un second essai (cf. p. 65) avec :

45, 135 et 270°.

Le choix des 3 faisceaux étant effectué (45, 180 et 270°), nous résolvons le problème linéaire ayant pour inconnues les 3 coefficients de pondération de ces faisceaux.

La solution obtenue est :

$\alpha_1 = 250$ ,  $\alpha_2 = 423$  et  $\alpha_3 = 555$  avec  $f(X) = -1347,2$  pour la fonction objectif. 5 contraintes-tumeur sont alors saturées compte tenu de la tolérance de 0,5 Gy.

Nous disposons ainsi d'une solution réalisable du problème général non linéaire.

2ème phase : Optimisation non linéaire (cf. schéma p. 43)

Le problème a cette fois 8 variables :

- les 3 coefficients de pondération  $\alpha_i$
- les 3 angles  $\theta_i$
- les coordonnées x et y de l'isocentre,

\* Le coefficient de pondération absolu divisé par 10 indique la dose donnée à l'entrée en gray.

que nous considérons comme les coordonnées d'un vecteur X. Il s'agit de maximiser les valeurs de f(X).

Dans la suite, nous indiquerons les valeurs de X par :

$$X = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, x, y)$$

lère itération	
$X^0 = (250, 423, 555, 45, 180, 270, 6, 8)$	$f(X^0) = -1347,2$

Le gradient est :

$$D^0 = (-8, -6, -4, -0.2, 0.2, 0.1, 0.009, -0.006).$$

5 contraintes sont saturées et nous choisissons 5 variables de base :

- les 3 coefficients de pondération
- les 2 coordonnées de l'isocentre.

Ainsi, les seules variables hors-base sont les 3 angles des faisceaux. Soit avec nos notations :

$$B = (1, 2, 3, 7, 8)$$

$$H = (4, 5, 6).$$

Calcul de  $Y = X(h)$

Se pose ici le choix du pas h,

- si h est trop petit, l'amélioration risque d'être infime et par suite la convergence vers l'optimum très lente ;
- si h est trop grand, la direction de montée qui n'est définie que localement peut n'être plus satisfaisante.

Nous avons appliqué ici la règle, déjà mentionnée, qui consiste à essayer une première valeur de pas telle que la variation angulaire  $|h \cdot D|$  reste inférieure à 5°.

Soit ici  $h = 0.4$  (les angles étant exprimés en radians).

$$Y = X(h) = (257, 434, 517, 41, 184.7, 272.4, 5.95, 7.95) \quad f(Y) = -1340,3$$

Calcul de  $Z = X(2h)$

$$Z = X(2h) = (265, 441, 489, 37, 189.3, 274.9, 5.92, 7.90) \\ f(Z) = -1335,9$$

Z n'est pas réalisable. Il y a donc saturation d'une contrainte.  
Il se trouve, qu'avec la tolérance de 0.5 Gy, la phase de saturation conduit à :

$$X^1 = Y; \quad f(X^1) = -1340,3 \quad \text{la contrainte saturée}$$

étant à 60,1 Gy.

**2ème itération**

$$X^1 = (257, 434, 517, 41, 184.7, 272.4, 5.95, 7.95) \quad f(X^1) = -1340,3$$

$$D^1 = (0.2, 0.4, -0.01, -0.0003, 0.004, 0.0002, 0.0002, 0.0002).$$

$$\text{Nous posons :} \quad B = (1, 2, 3, 4, 7, 8) \\ H = (5, 6)$$

$h = 20$  conduit à :

$$Y = X(h) = (288, 445, 440, 45.2, 184.4, 277.2, 5.85, 7.89) \\ f(Y) = -1339,6$$

$$Z = X(2h) = (310, 453, 387, 49, 184, 281.9, 5.78, 7.85) \quad f(Z) = -1339,5$$

$$U = X(h^*) = (304, 466, 384, 49.4, 184.1, 280.5, 5.78, 7.88) \\ f(U) = -1340,5$$

D'où :

$$X^2 = Z; \quad f(X^2) = -1339,5$$

**3ème itération**

$$X^2 = (310, 453, 387, 49, 184, 281.9, 5.78, 7.85) \quad f(X^2) = -1339,5$$

$$D^2 = (0.2, 0.5, 0.2, 0.004, -0.0003, 0.002, -0.0003, 0.)$$

$h = 40$  conduit à :

$$Y = X(h) = (340, 400, 392, 44.7, 183.3, 286.4, 5.74, 7.70)$$

$$f(Y) = -1335,8 \quad \text{avec Y non réalisable.}$$

Il y a donc saturation d'une contrainte et on obtient :

$$X^3 = (317, 412, 420, 45.2, 184.2, 284.2, 5.79, 7.77) \quad f(X^3) = -1336,6$$

**4ème itération**

$$D^3 = (0.1, -0.3, 0.2, -0.001, -0.0007, 0.0005, 0.002, 0.001)$$

$$\text{avec } B = (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8)$$

$$H = (6)$$

$h = 80$  conduit à :

$$Y = X(h) = (304, 463, 373, 49.7, 187, 286.4, 5.76, 7.81) \quad f(Y) = -1334,5$$

Le calcul de  $Z = X(2h)$  conduit à un incident (non convergence des itérations) ; la valeur de  $h$  est vraisemblablement trop élevée pour ce qui concerne les coefficients et surtout les coordonnées de l'iso-centre.

Nous avons arrêté cet essai à :

$$X^* = Y \\ f(X^*) = -1334,5$$

Mesure de l'amélioration et qualité de la solution retenue.

Dans l'utilisation des ces techniques inspirées de la méthode du gradient, il est évident que la valeur finale de la norme du gradient est le critère à prendre en compte. En pratique, seule l'expérience

permet de décider si ce gradient est "suffisamment petit". Il se trouve que dans les différents essais effectués, l'ordre de grandeur du gradient en fin d'essai est comparable à celui indiqué ci-dessus. Tout essai de calcul de gain relatif par rapport à la valeur de la fonction objectif est illusoire puisque l'on ignore la valeur optimale théorique. Il peut cependant être intéressant de considérer les différentes valeurs suivantes, calculées à partir des seuls points du support d'optimisation.

Etape	fonction objectif	valeur moyenne à la tumeur (gy)	maximum tumeur (gy)	maximum organe sensible (gy)
optimisation linéaire sur 8 faisceaux	-1338,0	63,71	68,1	34,0
optimisation linéaire sur 3 faisceaux	-1347,2	64,15	68,5	30,2
non linéaire après une itération	-1340,3	63,82	68,3	30,1
après 2 itérations	-1339,5	63,79	68,0	30,7
après 3 itérations	-1336,6	63,65	67,9	32,1
valeur finale	-1334,5	63,55	67,8	31,4

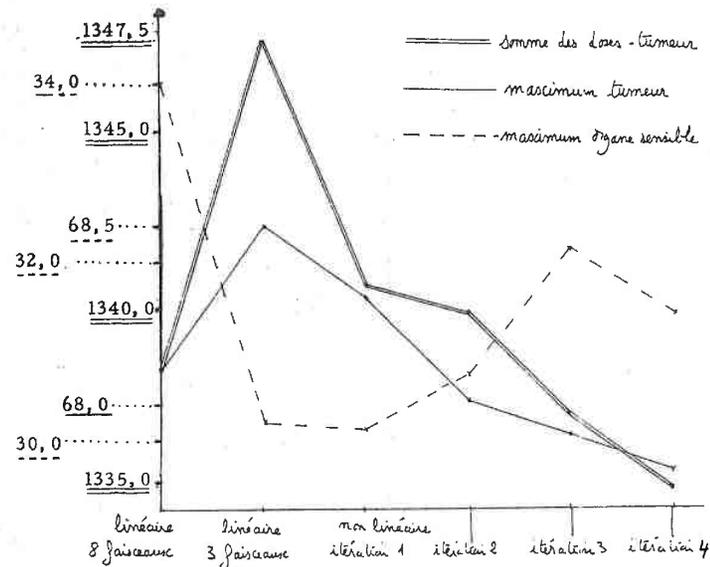
(on trouvera une représentation graphique de ce tableau page suivante)

- la fonction objectif est égale à l'opposé de la somme des valeurs des doses aux points de la tumeur (contour et intérieur)
- la valeur moyenne à la tumeur, déduite directement de la précédente permet une comparaison plus aisée avec la valeur seuil de 60 gy.

- la valeur maximum de dose à la tumeur a été choisie comme fonction objectif par H. ALI AHMED (réf. 2).

On peut noter que les variations des valeurs moyenne et maximale à la tumeur sont très analogues ; ce qui justifie le choix de la fonction objectif que nous avons fait (cf. p. 13) pour interpréter le critère d'homogénéité.

- la valeur maximum à l'organe sensible reste ici inférieure à la valeur seuil 50 gy



Lignes isodoses

Ainsi que nous l'avons déjà indiqué, la qualité d'un plan de traitement est estimée le plus souvent au vu de la répartition des isodoses, c'est-à-dire des lignes joignant les points de même valeur

de doses. C'est pourquoi nous avons mis au point une version DOSGRI du programme CALDOS permettant le calcul des doses en tous les points d'une grille de 60 colonnes et 40 lignes et un programme ISODOS de visualisation ou de tracé de ces lignes isodoses.

Il faut noter que les programmes DOSGRI et ISODOS sont tout à fait indépendants de nos programmes de traitement ; ces derniers ne nécessitant le calcul des doses qu'aux seuls points du support d'optimisation.

Pour ce premier essai, nous présentons page 64 les lignes isodoses relatives à la fin de l'optimisation linéaire sur 3 faisceaux d'une part (distribution initiale) et à la fin de la 4ème itération (distribution finale). Les lignes de référence 1, 2, ..., 6 relient les points où les valeurs des doses sont respectivement 10, 20, ... 60 Gray. Sur ces tracés, les contraintes s'interprètent ainsi :

- l'organe sensible ne peut être traversé que par des lignes de référence inférieure à 5 ;
- la ligne 6 doit englober totalement la tumeur.

De plus, on peut penser que l'optimisation sera d'autant meilleure que la ligne 6 épousera mieux le contour de la tumeur.

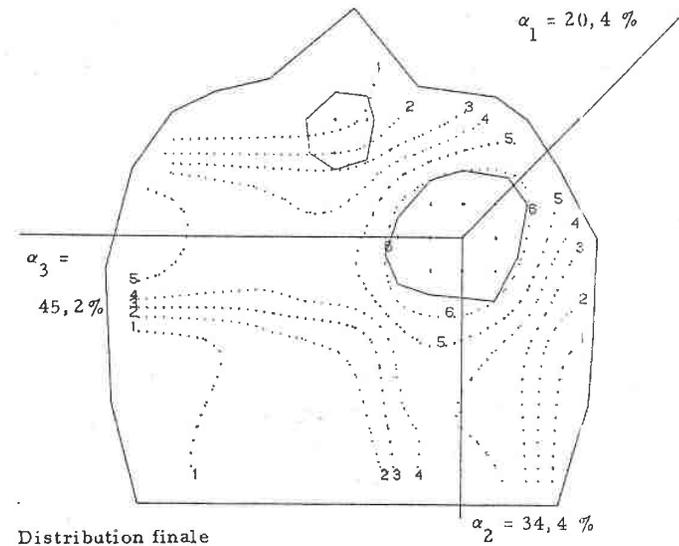
Nous noterons que ce premier essai est peu significatif : la solution initiale (après l'optimisation linéaire sur 3 faisceaux) est déjà très satisfaisante comme le montreront les essais suivants et comme pouvaient le laisser supposer les faibles valeurs de gradient observées et le fait que 5 contraintes-tumeur soient déjà saturées.

Légende des figures de la page suivante

- $\alpha_i$  : coefficient de pondération du ième faisceau
- Seuil tumeur : 60 gy
- Seuil organe sensible : 50 gy
- Isodoses tracées de 10 en 10 gy (6 : isodose 60 gy, 5 : 50 gy ...)

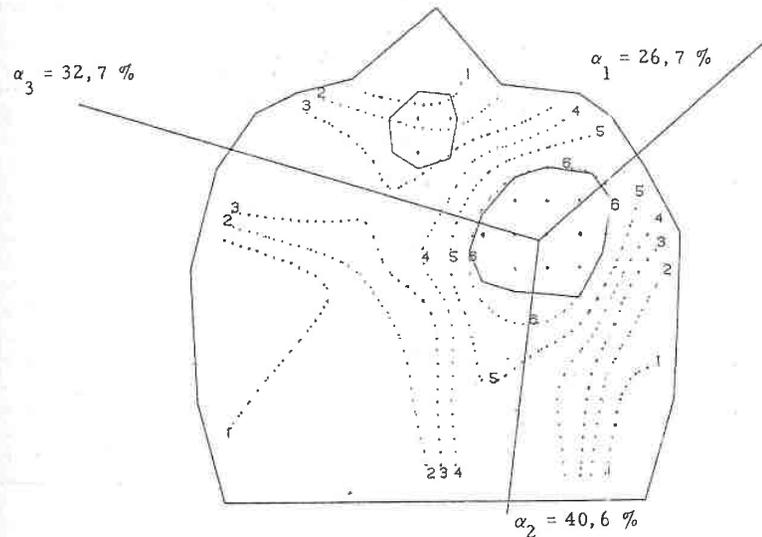
Distribution initiale après optimisation linéaire

valeur moyenne à la tumeur : 63,7  
valeur maximum à la tumeur : 68,1



Distribution finale

valeur moyenne à la tumeur : 63,5  
valeur maximum à la tumeur : 67,8



3 - SECOND EXEMPLE D'OPTIMISATION DANS UN PLAN

Nous considérons le même exemple que pour l'essai 1, mais avec un choix différent des faisceaux initiaux :

45, 135 et 270\*

La 1ère phase de programmation linéaire conduit à la solution réalisable :

$X = (219, 300, 726, 45, 135, 270, 6, 8)$  avec  $f(X) = -1381,8$  soit une valeur initiale nettement moins bonne que précédemment (-1347,2).

2ème phase - optimisation non linéaire

Pour ce 2ème essai, nous nous contentons de présenter un tableau récapitulatif des 11 itérations effectuées, puis de préciser quelques particularités observées durant le traitement.

numéro d'itération	valeur de la fonction objectif	valeur moyenne tumeur	valeur max. tumeur	type de $X^r$	gain de l'itération en % cumulé	
0	-1381,8	65,80	70,3	$X^0$ point initial		
1	-1362,9	64,90	69,1	Y-S-PL	30,8	30,8
2	-1344,2	64,01	68,1	U-S	30,5	61,3
3	-1338,6	63,74	67,8	Y-PL	9,1	70,4
4	-1333,0	63,48	67,6	Y-S	9,1	79,5
5	-1328,1	63,24	67,3	Y-S	8,0	87,5
6	-1324,4	63,07	67,0	Y-PL	6,0	93,5
7	-1323,5	63,02	67,1	Y-PL	1,5	95,0
8	-1322,4	62,97	67,1	Z-PL	1,8	96,8

9	-1321,8	62,94	67,1	U	1,0	97,8
10	-1321,7	62,94	67,1	Y	0,2	98,0
11	-1320,5	62,88	66,8	Y	2,0	100,0

Notations utilisées :

- S : saturation d'une contrainte
- PL : essai de phase linéaire
- Y = X (h) (cf. p. 42)
- Z = X (2h) (cf. p. 42)
- U = X ( $h^*$ ) : valeur calculée par la technique de calcul automatique de h.
- Y-S : saturation d'une contrainte à partir de Y.
- Y-PL : essai de phase linéaire à partir de Y.

Particularités

a) Il faut noter que le plus souvent les calculs de U et même de Z s'avèrent inutiles ou vains alors qu'ils sont coûteux en temps d'exécution. Par exemple, pour l'itération 9, la valeur retenue est U avec  $f(U) = -1321,8$ , alors que  $f(Y) = -1321,9$ , soit un gain de l'ordre des erreurs de chute. De même pour l'itération 8, où la différence est du même ordre. Ainsi, la technique de détermination automatique du pas n'est vraiment efficace qu'au cours de l'itération numéro 2 avec :

$$f(Y) = -1356,4$$

$$f(Z) = -1351,0$$

$$f(U) = -1337,2 \text{ avec } U \text{ non réalisable, mais } f(X^2) = -1344,2.$$

b) Si l'optimisation non linéaire s'avère longue du fait de la nécessité de calculer de nouvelles valeurs de doses souvent inutilement comme nous l'avons signalé en a), l'optimisation linéaire qui ne considère comme variables que les coefficients de pondération est elle-même beaucoup plus rapide. Comme on le voit sur le tableau ci-dessus, nous avons à plusieurs reprises, en fin d'itération, lancé le programme d'optimisation linéaire avec comme valeur initiale, la dernière valeur obtenue avec cependant des coefficients de pondération nuls. Pour les itérations 1 et 3, on obtient strictement la valeur fournie par l'optimisation non linéaire.

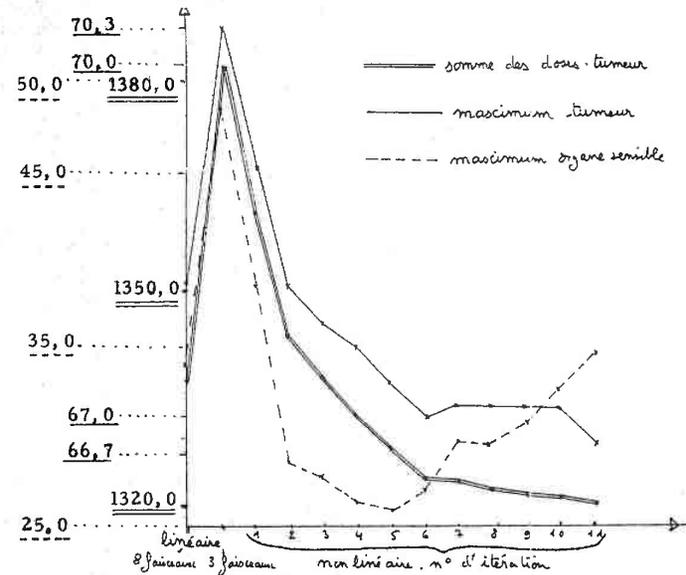
Pour l'itération 6, le passage par cette phase linéaire permet d'améliorer légèrement le résultat déjà obtenu :

$$f(Y) = -1325,9 \text{ et } f(Y - PL) = -1324,4.$$

Pour les itérations 7 et 8, les différences étant de l'ordre des erreurs de chute, ne sont pas significatives :

$$\begin{aligned} \text{en 7, } f(Y) &= -1323,8 & f(Y - PL) &= -1323,5 \\ \text{en 8, } f(Z) &= -1322,2 & f(Z - PL) &= -1322,4. \end{aligned}$$

c) La représentation graphique du tableau de la page 65 montre une légère remontée du maximum tumeur à l'itération 7, valeur qui se stabilise à 67,1 pendant 3 itérations, puis décroît à nouveau lors de la dernière itération effectuée.



d) Nous avons reporté dans le tableau ci-dessous les valeurs initiales et finales du vecteur-état et du gradient.

Comme pour l'essai 1, le pas  $h$  a été choisi de sorte que la variation angulaire  $|h \cdot D|$  reste de l'ordre de  $5^\circ$ .

	coefficients de pondération			angle des faisceaux			isocentre	
vecteur-état initial	219 17,6%	300 24,1%	726 58,3%	45	135	270	6	8
gradient initial	1,1	0,23	-0,79	-350	623	-739	849	-370
vecteur-état final	382 33,3%	238 20,7%	529 46,0%	30,7	157,3	276,6	5,86	7,68
gradient final	-0,011	-0,013	0,043	0,0019	-0,0041	0,0032	0,00042	0,00073

e) Il faut noter que, comme pour l'essai précédent, les contraintes saturées ont toutes été des contraintes-tumeurs, la valeur

maximale au niveau de l'organe sensible étant de 48,6 Gray au départ et de 34,9 Gray à la fin des itérations.

f) Pour cet exemple nous présentons les isodoses obtenues après les itérations 0, 2, 5 et 11 (cf. pages 70 et 71). On notera en particulier le rapprochement progressif de la ligne d'isodose 60 gy du contour-tumeur.

Remarque : Comparaison des essais 1 et 2.

Le support d'optimisation et les seuils de contraintes sont identiques dans les 2 essais 1 et 2 ; seuls diffèrent les vecteurs-état initiaux. Alors qu'à l'issue de l'optimisation linéaire sur 3 faisceaux, la solution correspondant à l'essai 1 était meilleure que celle de l'essai 2 :

- fonction objectif de -1347,2 (essai 1) contre -1381,8 (essai 2)
- maximum tumeur de 68,1 (essai 1) contre 70,3 (essai 2)

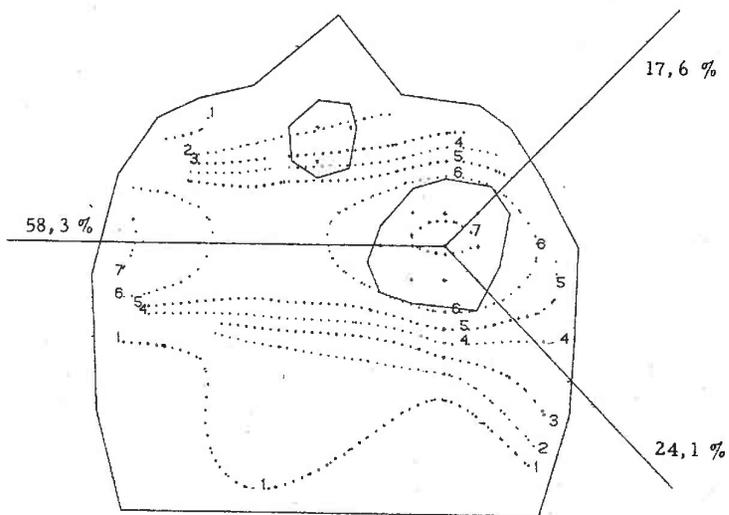
ce qui apparaît également clairement sur les tracés d'isodoses (p. 64 et 70), l'optimisation non linéaire a conduit à un meilleur résultat dans le cas de l'essai 2 :

- fonction objectif de -1334,5 (essai 1) contre -1320,5 (essai 2)
- maximum tumeur de 67,8 (essai 1) contre 66,8 (essai 2).

Enfin, l'isodose de référence 6 épouse mieux le contour tumoral dans le cas de l'essai 2 en fin de traitement (cf. p. 64 et 71). Cette confrontation des résultats des essais 1 et 2 met en évidence la non-unicité de l'optimum : on a obtenu 2 optimums différents à partir de 2 groupes différents de données initiales. Ceci est lié au caractère local des techniques de montée utilisées qui peuvent conduire à un optimum local.

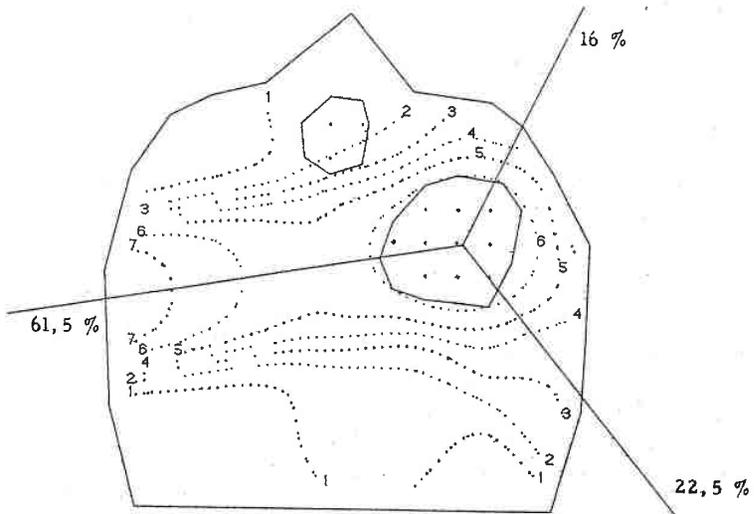
Distribution initiale après optimisation linéaire

valeur moyenne tumeur : 65,8  
valeur maximum tumeur : 70,3



Après 2 itérations

valeur moyenne tumeur : 64,0  
valeur maximum tumeur : 68,1

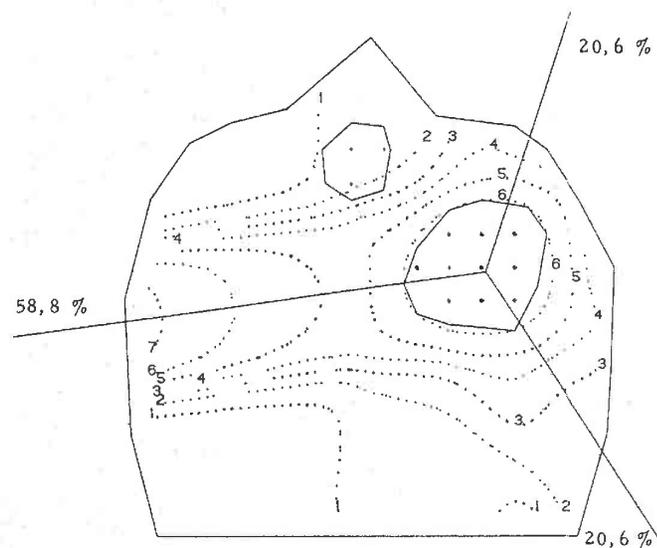


Seuil tumeur : 60 gy

Seuil organe sensible : 50 gy

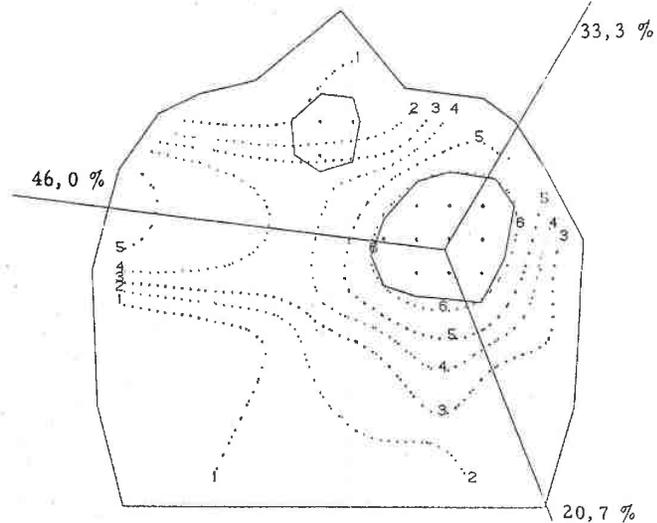
Après 5 itérations

valeur moyenne tumeur : 63,2  
valeur maximum tumeur : 67,3



Distribution finale

valeur moyenne tumeur : 62,9  
valeur maximum tumeur : 66,8



Seuil tumeur : 60 gy

Seuil organe sensible : 50 gy

4 - EXEMPLE D'OPTIMISATION DANS 3 PLANS

Nous envisagerons ici le cas où les contours de la tumeur et de l'organe-sensible diffèrent nettement dans les 3 plans considérés : le plan médian qui contient les axes des faisceaux et 2 plans parallèles situés de part et d'autre à 1 cm.

Les caractéristiques du plan médian sont celles qui ont été présentées dans les 2 exemples précédents.

Le support d'optimisation est constitué de 88 points répartis de la façon suivante :

support	contour tumeur	organe sensible	intérieur tumeur	total par plan
Plan médian	11	10	10	31
Plan inférieur	10	12	8	30
Plan supérieur	10	12	5	27
Total par groupe	31	34	23	88

De même que pour les 2 exemples précédents,

- le nombre de faisceaux réels est fixé à 3
- les valeurs seuils sont respectivement de 60 gy et 50 gy

à la tumeur et à l'organe sensible.

1ère Phase - Détermination d'une solution réalisable par optimisation linéaire

A partir des 2 essais précédents relatifs au seul plan médian, nous avons choisi comme disposition initiale des 3 faisceaux celle de l'essai 2 qui avait conduit à la meilleure solution.

Soit :  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $\theta_2 = 135^\circ$  et  $\theta_3 = 270^\circ$

L'optimisation linéaire portant sur ces 3 faisceaux a conduit à :

$f(X) = -3677,8$  comme valeur optimale de la fonction objectif

avec les coefficients de pondération  $\alpha_1 = 548$  (49,7 %)  
 $\alpha_2 = 226$  (20,5 %)  
 $\alpha_3 = 329$  (29,8 %).

Aussi prendrons nous comme point initial :

$X^0 = (548, 226, 329, 45, 135, 270, 6, 8)$   $f(X^0) = -3677,8$ .

2ème phase - optimisation non linéaire

Tableau récapitulatif des 11 itérations effectuées.

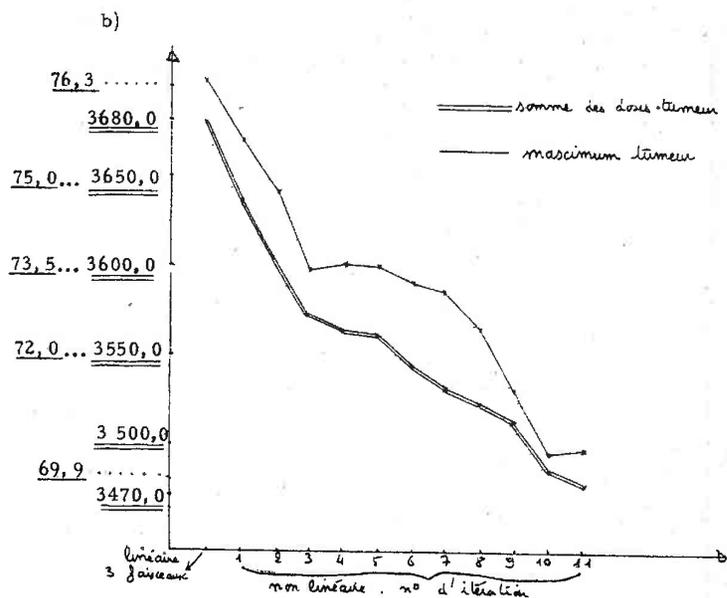
n° d'itération	fonction objectif	valeur moyenne tumeur	valeur max. tumeur	type de $X^r$	gain de l'itération	
					en %	en % cumulé
0	-3677,8	68,11	76,4	$X^0$ point initial		
1	-3635,6	67,33	75,6	Y-S-PL	21.1	21.1
2	-3603,5	66,73	74,7	Z	16.1	37.2
3	-3571,9	66,15	73,4	Y-S-PL	15.8	53.0
4	-3563,2	65,99	73,5	Z - PL	4.3	57.3
5	-3561,9	65,96	73,5	Z - PL	0.6	57.9
6	-3543,4	65,62	73,2	Z	9.3	67.2
7	-3530,7	65,38	73,1	Z	6.4	73.6
8	-3522,8	65,24	72,4	Y - PL	3.9	77.5
9	-3513,6	65,07	71,4	U - S	4.6	82.1
10	-3481,7	64,48	70,3	Y - S	16.0	98.1
11	-3477,9	64,41	70,4	Y	1.9	100.00

Particularités

a) Il se confirme que la technique de détermination automatique du pas allonge inutilement les temps de calcul ; en effet,  $U = X(h^*)$  n'apparaît qu'une fois dans le tableau ci-dessus (itération n° 9), le gain apporté étant d'ailleurs réduit du fait de la saturation d'une contrainte.

Ainsi au cours de cette itération on a pu relever successivement :

$$\begin{aligned} f(X^8) &= -3522,8 \\ f(Y) &= -3514,3 \\ f(Z) &= -3508,3 \\ f(U) &= -3493,6 \text{ et } f(X^9) = -3513,6 \text{ après saturation.} \end{aligned}$$



L'évolution de la fonction objectif présente une certaine régularité globale qu'on peut constater en considérant la colonne des gains (cf. tableau p. 73) ou le schéma (page 74).

On remarque cependant deux "accidents" dans cette régularité au niveau :

- des itérations 4) et 5) où le pas h a été choisi trop petit la variation angulaire correspondante étant de l'ordre de  $0,2^\circ$  ;
- de l'itération 10) où le gain important est vraisemblablement lié à la saturation de deux contraintes en 9) et en 10).

On note également en 4) et 11) une faible remontée de la valeur maximum à la tumeur.

c) Au cours de cet essai, nous avons effectué différents choix du pas h et c'est en fonction des résultats observés, que nous avons été amenés à penser que h devait être choisi de façon à ce que la variation angulaire soit de l'ordre de  $5^\circ$ .

n° d'itération	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
variation angulaire maximale	5,2	1,7	6,7	0,2	0,2	4,2	2,2	5,2	3,5	6,2	2,0

Les valeurs ci-dessus correspondent à la valeur de h initiale pour l'itération considérée, c'est-à-dire ayant conduit à  $Y = X(h)$ .

d) Z apparaît souvent dans le tableau (p. 73). Il faut remarquer qu'un choix initial d'une valeur double de h aurait permis d'arriver au même résultat plus rapidement avec Y car  $Y = X(h)$  et  $Z = X(2h)$ .

e) De même que pour l'essai 2), l'application d'une phase linéaire en fin d'itération n'apporte que très peu de modifications.

f) Nous avons arrêté cet essai après la 11ème itération car différentes tentatives ultérieures n'ont pas abouti ou conduit à des valeurs de f (X) inférieures à -3477,9.

g) Le choix des variables de base a été le même que pour les exemples précédents, à savoir dans l'ordre :

- les coefficients de pondération
- puis au fur et à mesure des saturations, d'abord les coordonnées de l'isocentre et enfin les angles des faisceaux.

h) Le tableau ci-dessous montre qu'on obtient des valeurs de gradient, en fin de traitement, comparables à celles obtenues lors des essais 1) et 2).

	coefficients de pondération			angle des faisceaux			isocentre	
vecteur-état initial	548 49,7%	226 20,5%	329 29,8%	45	135	270	6	8
gradient initial	-32	-24	-16	1137	2274	-681	-492	-471
vecteur-état final	371 34,1%	247 22,7%	471 43,2%	39	140,7	276,1	6,13	7,85
gradient final	0,26	0,018	-0,81	-0,017	-0,005	-0,009	0,007	-0,015

i) Nous présentons pages 78, 79 et 80, les isodoses relatives aux distributions initiale et finale dans les plans médian, inférieur et supérieur.

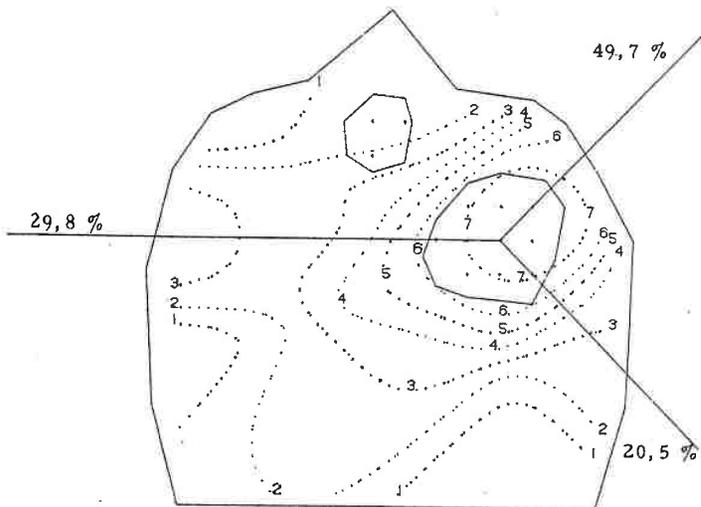
Le comportement des isodoses est plus difficile à interpréter dans ce cas de 3 plans, car par exemple, au voisinage du contour tumoral, c'est une surface de référence 6 qu'il faut considérer et non plus une seule ligne.

On peut remarquer que la présence de contraintes dans les plans latéraux empêche l'isoligne de référence 6 d'épouser le contour-tumoral d'aussi près que lors des essais précédents.

Pour faciliter la comparaison, nous avons reproduit page 81 les distributions finales de l'essai 2 (à un seul plan) et de l'essai 3 pour le plan médian correspondant.

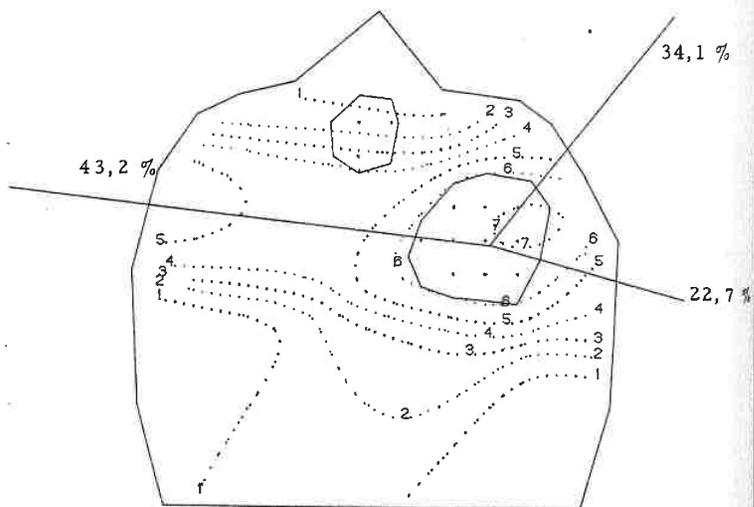
PLAN MEDIAN - Distribution initiale après optimisation linéaire

Valeur moyenne tumeur : 68,1  
Valeur maximum tumeur : 76,4



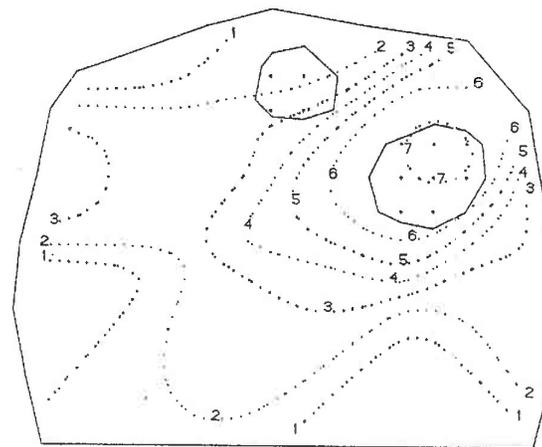
Distribution finale

Valeur moyenne tumeur : 64,4  
Valeur maximum tumeur : 70,4

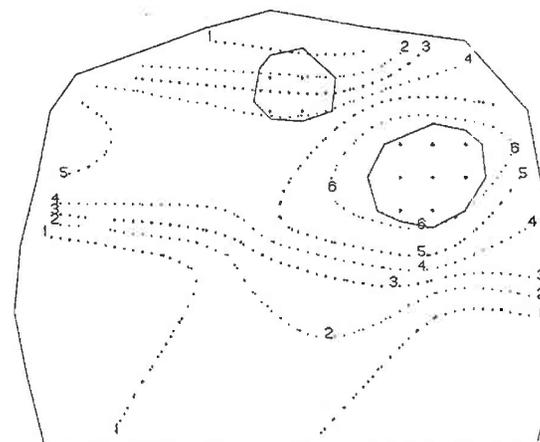


Seuil tumeur : 60 gy      Seuil organe sensible : 50 gy

PLAN INFÉRIEUR - Distribution initiale après optimisation linéaire

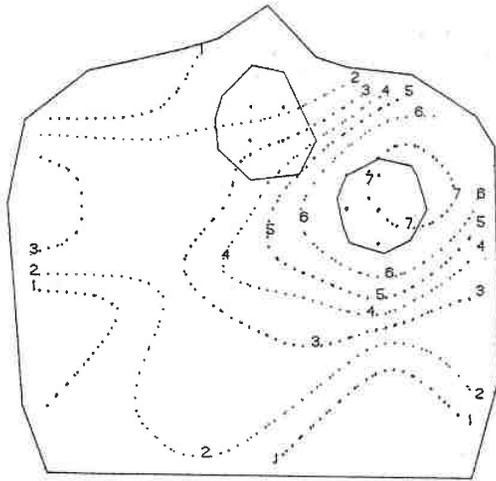


Distribution finale

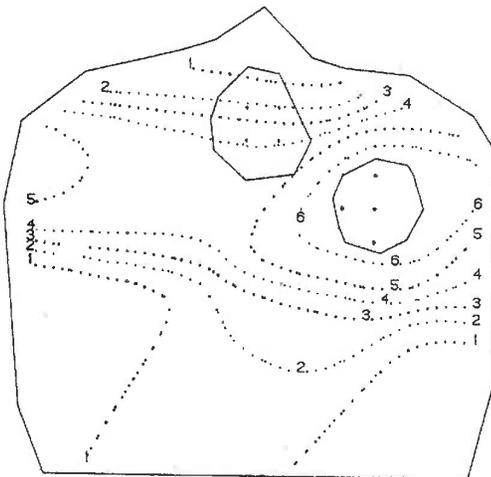


Seuil tumeur : 60 gy      Seuil organe sensible : 50 gy.

PLAN SUPERIEUR - Distribution initiale après optimisation linéaire



Distribution finale

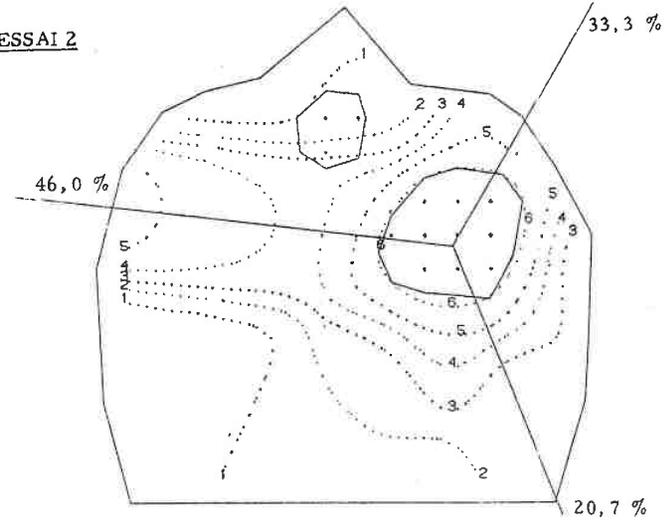


Seuil tumeur : 60 gy      Seuil organe sensible : 50 gy.

Comparaison Essai 2 (1 plan) et Essai 3 (3 plans)

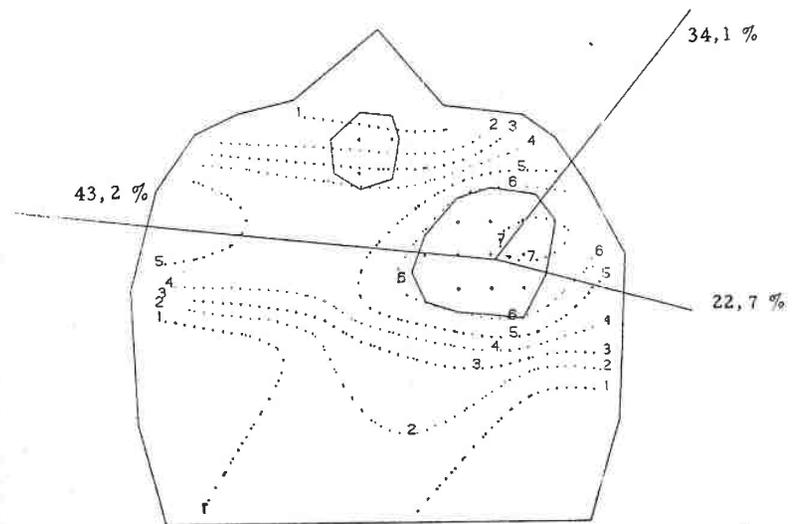
Distributions finales. Valeur moyenne tumeur : 62,9  
Valeur maximum tumeur : 66,8

ESSAI 2



ESSAI 3 PLAN MEDIAN

Valeur moyenne tumeur : 64,4  
Valeur maximum tumeur : 70,4



5 - EXEMPLE D'OPTIMISATION DANS UN PLAN

Après les 3 essais précédents, nous avons traité un nouvel exemple dans le but :

a) de tester les modifications de programme et d'exploitation liées à l'usage d'une stratégie plus systématique dans la suite des itérations :

- pour chaque itération le pas h initial est choisi de façon à ce que la variation angulaire maximale soit égale à 5°.
- Seule la valeur  $Y = X(h)$  est calculée.
- Chaque itération est suivie d'une phase linéaire.

b) de traiter un exemple à un seul plan où une contrainte organe sensible soit saturée au départ (ce qui explique le passage de la valeur seuil correspondante de 50 gy à 40 gy).

c) d'étudier un déplacement éventuel de l'isocentre vers le "centre" de la tumeur à partir d'une position initiale décalée.

Pour ce faire, nous avons été amenés à modifier les contours tumeur et organe sensible.

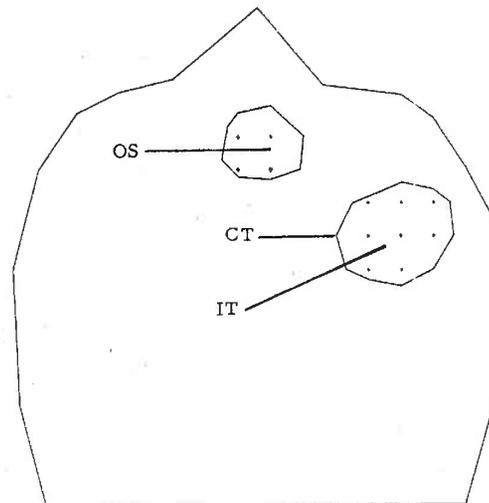
Le support d'optimisation est constitué par 30 points :

- CT : contour de la tumeur 10 points
- IT : intérieur de la tumeur 8 points
- OS : organe sensible 12 points.

Les valeurs seuils sont :

- 60 Gray à la tumeur
- 40 Gray à l'organe sensible.

Nous nous limitons comme pour les exemples précédents au cas de 3 faisceaux.



1ère Phase - Détermination d'une solution réalisable par optimisation linéaire.

L'optimisation linéaire concernant 8 faisceaux réels répartis régulièrement entre 0° et 360° conduit à la solution  $f(X) = -1104,7$  avec les coefficients de pondération suivants :

angle du faisceau	0	45	90	135	180	225	270	315
coefficient absolu de pondération	0	164	299	101	128	98	188	0
relatif en %	0	16.8	30.6	10.3	13.1	10.	19.2	0

L'optimisation linéaire concernant les 3 faisceaux correspondant aux 3 coefficients de pondération les plus élevés (45, 90 et 270°) conduit à :

$f(X) = -1187,3$  avec les coefficients de pondération

$$\alpha_1 = 235 \text{ (26.8 \%)}$$

$$\alpha_2 = 542 \text{ (61.9 \%)}$$

$$\alpha_3 = 99 \text{ (11.3 \%)}.$$

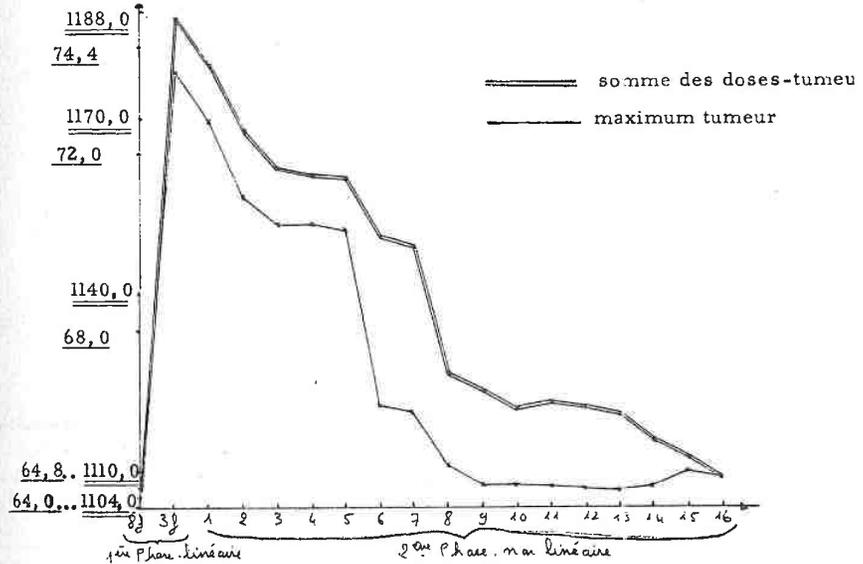
Nous prendrons comme solution réalisable :

$$X^0 = (235, 542, 99, 45, 90, 270, 6, 8) \quad f(X^0) = -1187,3$$

2ème phase - Optimisation non linéaire

Nous avons effectué 16 itérations résumées dans le tableau suivant.

n° d'ité- ration	valeur fonction objectif	valeur moyenne tumeur	valeur maxi. tumeur	particu- larités	gain de l'itération	
					en %	en % cumulé
0	-1187,3	65,96	73,8			
1	-1178,7	65,48	72,7		11,0	11,0
2	-1167,5	64,86	71,0		14,4	25,4
3	-1161,2	64,51	70,4	1 saturation	8,1	33,5
4	-1160,6	64,48	70,4	modification du pas	0,8	34,3
5	-1159,9	64,44	70,3		0,9	35,2
6	-1149,7	63,87	66,3	1 libération	13,1	48,3
7	-1148,5	63,81	66,2		1,5	49,8
8	-1126,5	62,58	64,9		28,2	78,0
9	-1123,8	62,43	64,5		3,5	81,5
10	-1121,1	62,28	64,5	1 saturation	3,5	85,0
11	-1122,1	62,34	64,5	modification du pas	-1,3	83,7
12	-1121,3	62,29	64,4		1,0	84,7
13	-1119,8	62,21	64,3	1 saturation	1,9	86,6
14	-1115,1	61,95	64,5	1 saturation	6,0	92,6
15	-1112,7	61,82	64,8	1 saturation	3,1	95,7
16	-1109,3	61,63	64,7	2 saturations	4,4	100,0



Particularités

a) La phase linéaire consécutive à chaque itération ne modifie que très peu le résultat de l'itération, sinon en affinant les saturations.

Cependant, cette phase linéaire a permis une libération de contrainte après l'itération n° 6, accompagnée d'un gain appréciable.

b) A deux reprises, itération 4) et 11) nous avons été amenés à modifier la valeur du pas initial  $h$  qui conduisait à  $f(Y) < f(X)$  avec  $Y = X(h)$ , les valeurs de  $f(X)$  et  $f(Y)$  restant très voisines. Dans les 2 cas, on se trouve à un optimum local pour un état des contraintes donné ; seule la modification de l'état des contraintes permet de progresser :

- ainsi après l'itération 4), c'est la libération d'une contrainte qui a permis la "montée"

- par contre, après l'itération 10), suite à une "descente" délibérée à ce niveau, les améliorations ont été obtenues lors des saturations.

c) Une nouvelle fois, on peut constater que les variations de la valeur tumeur moyenne (proportionnelle à la fonction objective) et de la valeur tumeur maximum sont très analogues. Cependant, l'usage de la 2ème comme fonction objectif aurait conduit à arrêter le traitement après la 14ème itération.

d) Vecteurs-état et gradients initiaux et finals.

	coefficients de pondération			angle des faisceaux			isocentre	
vecteur-état initial	235 26.8 %	542 61.9 %	99 11.3 %	45	90	270	6	8
gradient initial	2.9	2.2	3.9	-182.0	24.1	-49.0	-379.2	-97.8
vecteur-état final	135 13.8 %	476 48.9 %	363 37.3 %	349.1	88.0	221.1	5.83	7.93
gradient final	0.051	0.055	-0.46	-0.0005	-0.00009	-0.005	0.003	0.0004

e) On trouvera page 88 et suivantes, les représentations des isodoses correspondant à la fin des itérations 0, 3, 6, 9, 12 et 16.

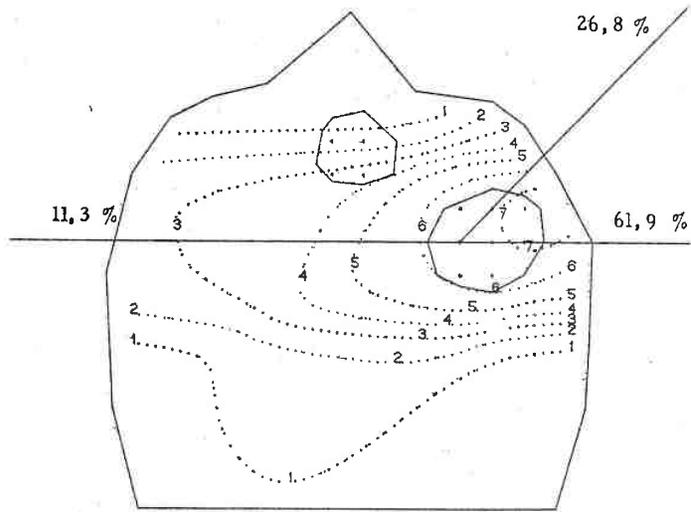
On peut noter les modifications importantes consécutives à la libération de contrainte après la 6ème itération. Les angles des faisceaux ont beaucoup évolué entre les dispositions initiale et finale ce qui montre bien les possibilités de ces méthodes qui, tout en utilisant des techniques de montée locale, ne se limitent pas à de "faibles" modifications.

L'isocentre initialement excentré a subi le même genre de variations que lors des essais précédents.

Toutes les contraintes saturées ont été des contraintes - tumeur, mise à part la contrainte organe sensible saturée lors de la phase linéaire.

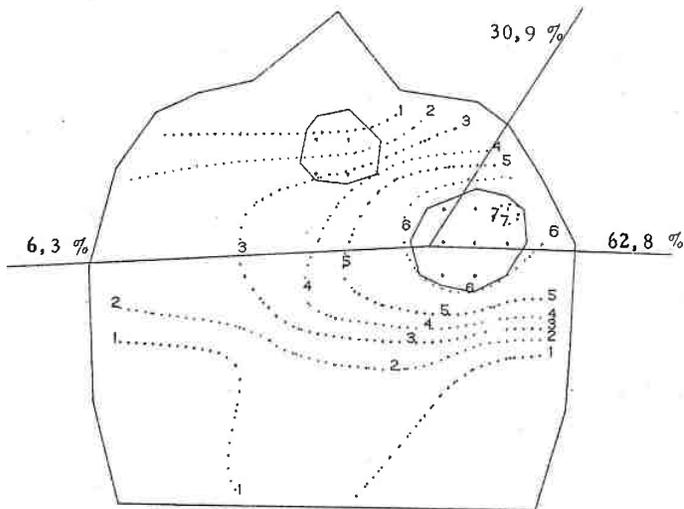
Distribution initiale après optimisation linéaire

Valeur moyenne tumeur : 66,0  
Valeur maximum tumeur : 73,8



Après 3 itérations

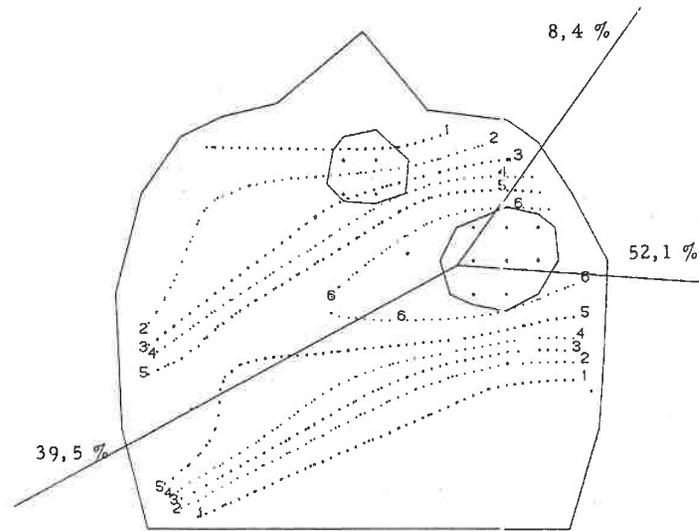
Valeur moyenne tumeur : 64,5  
Valeur maximum tumeur : 70,4



Seuil tumeur : 60 gy      Seuil organe sensible : 40 gy

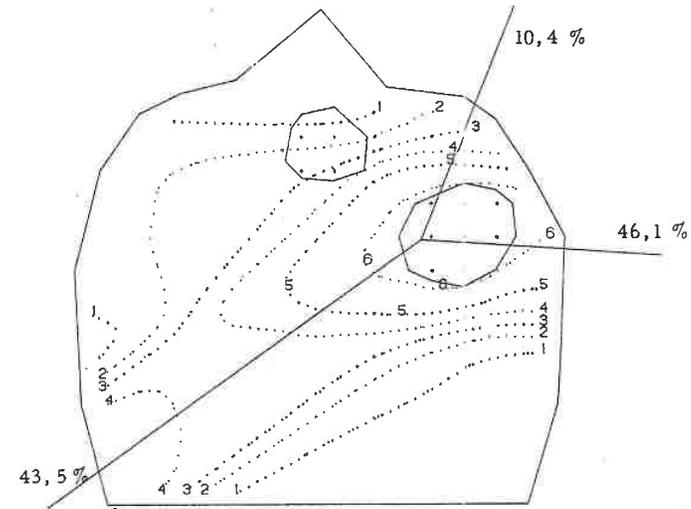
Après 6 itérations

Valeur moyenne tumeur : 63,9  
Valeur maximum tumeur : 66,3



Après 9 itérations

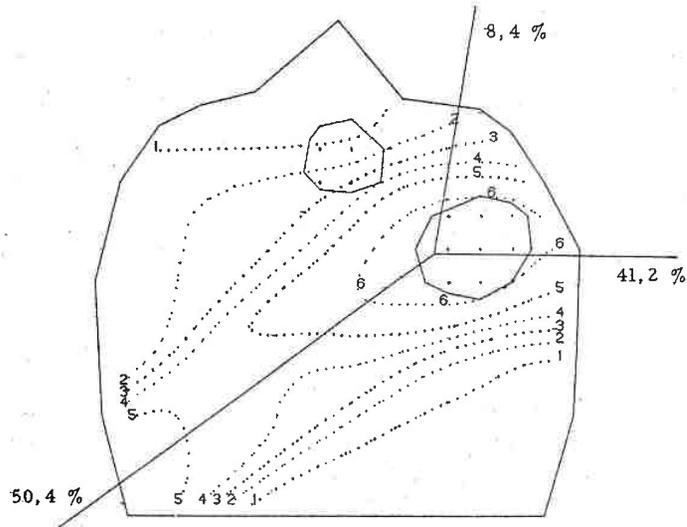
Valeur moyenne tumeur : 62,4  
Valeur maximum tumeur : 64,5



Seuil tumeur : 60 gy      Seuil organe sensible : 40 gy

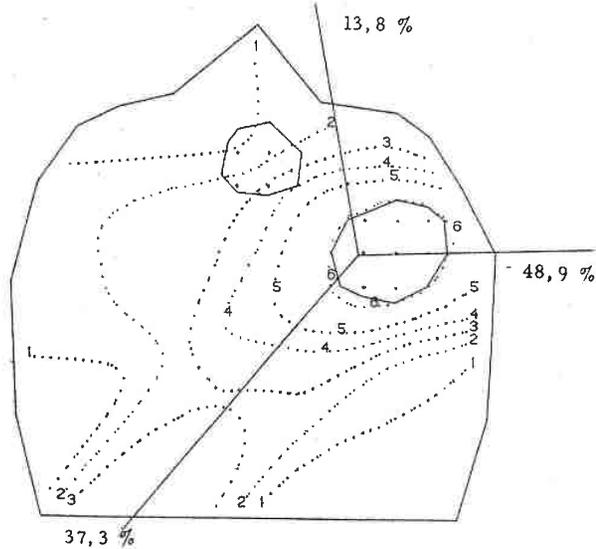
Après 12 itérations

Valeur moyenne tumeur : 62,3  
Valeur maximum tumeur : 64,4



Distribution finale

Valeur moyenne tumeur : 61,6  
Valeur maximum tumeur : 64,7



Seuil tumeur : 60 gy

Seuil organe sensible : 40 gy

6 - CONCLUSION

Les résultats présentés ici n'ont été obtenus qu'après un nombre important d'essais préalables. Il s'agissait de dégager des règles de stratégie permettant la progression la plus rapide et la plus efficace vers l'optimum. Les points essentiels sont à notre avis, les choix du pas  $h$  et des variables de base liés à la nature de chacun des 3 types de variables.

Le choix de la fonction objectif est un des points fondamentaux de la mise en œuvre d'un traitement d'optimisation. La notion d'homogénéité de l'irradiation à la tumeur, couramment retenue par les radiothérapeutes comme critère de qualité est subjective, et par suite difficile à traduire mathématiquement. Nous avons interprété ici ce critère d'homogénéité par minimisation de la valeur tumorale moyenne, ce qui permet de doubler le nombre de points d'optimisation à la tumeur par rapport à la minimisation de la valeur tumorale maximale. Les résultats montrent que les variations de ces deux grandeurs sont très analogues.

**2ième Partie**

**Programmes**

## I - INTRODUCTION A LA DESCRIPTION DES PROGRAMMES

### UTILISES

Les modules de programmation que nous allons présenter sont écrits en FORTRAN IV - MITRA 15 ; les seules extensions, par rapport au FORTRAN de base défini par la norme ISO (FULL FORTRAN décrit dans le "Draft ISO Recommendation" ISO/TC97/SC 5 octobre 1965 et dans la norme AFNOR Z 65 - 110 novembre 1967), sont :

- la possibilité, dans une instruction équivalence, de faire figurer le nom d'un tableau sans indice, si l'équivalence porte sur le premier élément.
- l'initialisation de l'ensemble des valeurs d'un tableau à l'aide d'une instruction DATA sans possibilité d'initialisation partielle.

Les programmes ont été mis au point sur le MITRA 15 de l'U. E. R. de Sciences Mathématiques de l'Université de NANCY I.

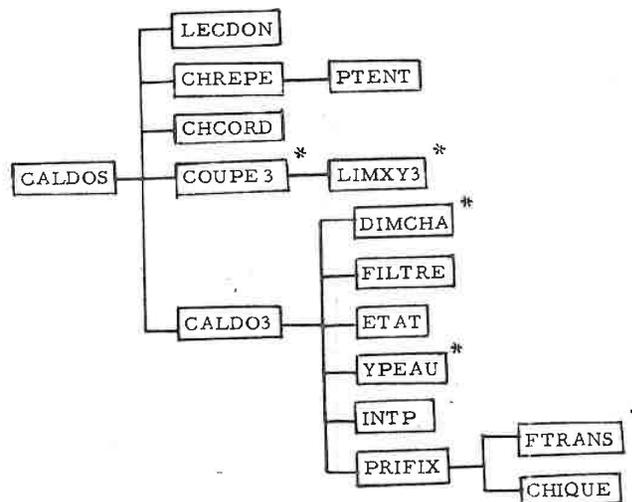
La configuration utilisée est la suivante :

- mémoire centrale de 64 K-octets
  - dont environ 28 K-octets réservés au système
  - et 36 K-octets utilisables
- lecteur de cartes (600 c/mn)
- imprimante (133 caractères à 600 l/mn)
- un disque mobile utilisateur de 5 M-octets
- une console de visualisation alpha-numérique
- une console de visualisation graphique.

Rappel : Les programmes de départ sont décrits et commentés soit en réf. [ 5 ] pour les calculs de dose, soit en réf. [ 12 ] pour ce qui concerne la méthode du gradient projeté, soit enfin en réf. [ 3 ] pour ce qui touche à la programmation linéaire.

Nous ne donnerons pas, en général, une description détaillée de ces programmes, mais insisterons sur les différences de nos programmes avec ceux cités en référence.

Graphe des appels entre modules



Les modules marqués d'une \*astérisque sont inchangés par rapport à CFIX (sinon au niveau des COMMON'S)

1 - DESCRIPTION DES MODULES

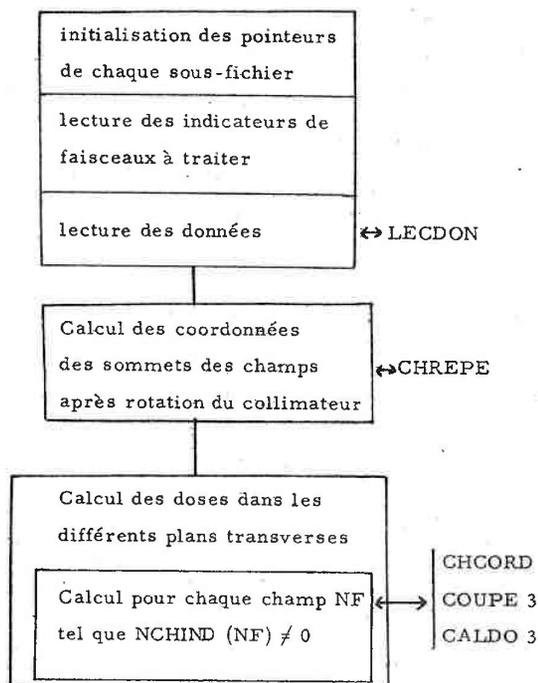
CALDOS

fonction : calcul de la distribution des doses délivrées par l'association de plusieurs faisceaux fixes à axes coplanaires ;

appel : CALL CALDOS

commons : ICOM2, ICOM7 et ICOM9 (cf. description p. II-13)

Organigramme général :



particularité : - remplace le programme principal CFIX en ce qui concerne l'appel des modules (les autres fonctions de CFIX sont préalablement effectuées par le programme séparé PREFIX).

**CALDO3**

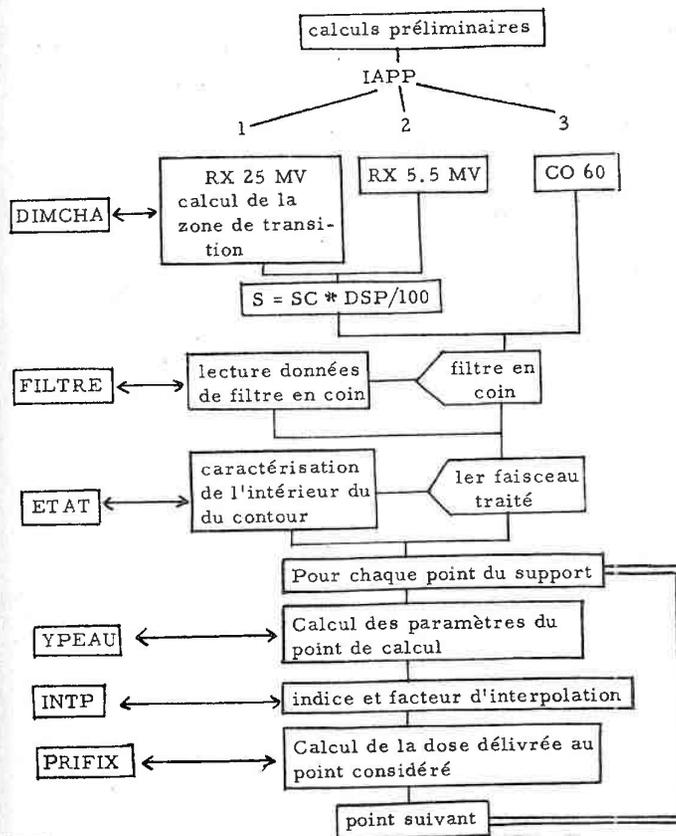
fonction : calcul de la distribution des doses dans un plan transverse demandé

commons : ICOM1 à ICOM8 et ICOMA

appel : CALL CALDO3 (ZCAL, KCAL, IAPP, NF, N, INDIC)

- ZCAL : position longitudinale du plan demandé
- KCAL : n° d'ordre du plan demandé dans les coupes intermédiaires
- IAPP : code énergie de l'appareil
- NF : n° du faisceau considéré
- N : n° du plan demandé
- INDIC : indicateur d'appel à ETAT

Organigramme général



## particularités :

- suppression de ce qui concerne la normalisation
- ETAT n'est appelé que pour le 1er faisceau traité
- on accède aux points du support à l'aide du découpage en plans et groupes de points
- le type d'appareil étant constant, la lecture de la table CC des RDA ou RDM a été faite dans le programme préparatoire PREFIX

**CHCORD**

fonction : changement de coordonnées : passage du système général au système lié au faisceau

commons : ICOM4, ICOM5, ICOM8 et ICOMA

appel : CALL CHCORD (K, NF)

K : n° d'ordre de la coupe intermédiaire considérée

NF : n° du faisceau étudié

particularités : la dernière partie du sous-programme CHCORD originel, relative à la normalisation a été supprimée.

**CHIQUE**

fonction : prise en compte du cône compensateur et calcul de son influence sur le rayonnement primaire

commons : néant

appel : CALL CHIQUE (XCAL, ZCAL, PRIM, DSP, PROC, DOBL)

XCAL } : coordonnées du point de calcul  
ZCAL }

PRIM : dose primaire

DSP : distance source-peau

PROC : profondeur du point de calcul

DOBL : différence d'obliquité

particularité : introduction de ECONE (22) équivalent à CONE(33) pour l'initialisation, par DATA, des 22 premiers éléments de CONE.

**CHREPE**

fonction : calcul des coordonnées des sommets du champ après rotation du collimateur

commons : ICOM2 et ICOMA

appel : CALL CHREPE (IDSA, NREL)

IDSA : code technique (O/1, DSP/DST)

NREL : nombre de coupes relevées

particularité : nouveau sous-programme dont la fonction était remplie par les instructions (lignes 96 à 116) de la dernière partie du sous-programme ENTRFX de CFIX.

**COUPE3**

inchangé

fonction : préparer pour chaque faisceau les conditions géométriques du calcul dans les coupes intermédiaires ;

commons : ICOM3, ICOM5, ICOM8 et ICOMA

appel : CALL COUPE3 (K, NF)

K } cf. CHCORD  
NF }

**DIMCHA**

inchangé

fonction : étude de la variation de la zone de transition en fonction des conditions géométriques pour les RX de 25 MV

commons : ICOMB

appel : CALL DIMCHA (CHAMP, DSP)  
 CHAMP : côté du champ carré équivalent  
 DSP : distance source-peau.

**ETAT**

fonction : recherche des points du support qui sont à l'intérieur du contour dans le plan transverse demandé

commons : ICOM2, ICOM5 et ICOM7

appel : CALL ETAT (XGMIN, YHMIN, YHMAX, NPT, XSAG, YHTB, N)

XGMIN : abscisse minimale

YHMIN : ordonnée minimale

YHMAX : ordonnée maximale

NPT : nombre de points du contour

XSAG } coordonnées des points du contour  
 YHTB }

N : n° du plan demandé

particularités : une correction a été apportée au niveau de l'ancienne instruction d'étiquette 500 ; en effet, il peut arriver que les ordonnées d'un point du support et d'un point du contour coïncident exactement alors que ce cas particulier n'avait que très peu de chances de se réaliser avec une grille dont les ordonnées étaient obtenues après une division par 39. (Les points d'ordonnée particulière auraient été pris en compte deux fois).

**FILTRE**

fonction : lecture sur disque des caractéristiques du filtre en coin utilisé

commons : ICOM6 et ICOM7

appel : CALL FILTRE (NF)

NF : n° du faisceau considéré

particularités : FILTRE a été allégé, la recherche en bibliothèque se faisant dans le programme préliminaire PREFIX.

**FTRANS** inchangé

fonction : calcul de la transmission par un filtre en coin

commons : néant

appel : FTRANS (XPEAU, L, F, DMES, DSP)

XPEAU : distance à l'axe du faisceau du point où un rayon coupe la surface d'entrée

L : côté de l'axe du faisceau (1/2 : gauche/droite)

F : table des taux de transmission

DMES : distance source-film de mesure

DSP : distance source-peau.

**INTP**

fonction : calcul de l'indice et du facteur d'interpolation associés à une profondeur

commons : néant

appel : CALL INTP (PROC, JD, YNTPRO)

PROC : profondeur

JD } indice

YNTPRO } et facteur d'interpolation

particularité : introduction de JD1 pour sauvegarder un indice de boucle à l'extérieur de celle-ci.

**LECDON**

fonction : lecture des données sur disque  
 commons : ICOM1, ICOM2, ICOM4, ICOM5, ICOM6, ICOM7, ICOM9 et ICOMA  
 appel : CALL LECDON (IDSA, NDEM, IEN, NREL)  
 IDSA : code technique (0/1, DSP/DST)  
 NDEM : nombre de plans demandés  
 IEN : code énergie de l'appareil  
 NREL : nombre de coupes relevées.  
 particularité : nouveau sous-programme dont la fonction était remplie par ENTRFX.

**LIMXY3** inchangé

fonction : calcul des limites de la portion de contour vue de la source  
 commons : ICOM8  
 appel : CALL LIMXY3 (L, XMIN, KMIN, XMAX, KMAX)  
 L : nombre de points du contour  
 XMIN et XMAX : plus petite et plus grande abscisses (dans le système lié au faisceau) de la portion de plan vue de la source  
 KMIN et KMAX : numéros d'ordre des points correspondants.

**PRIFIX**

fonction : calcul de la dose délivrée en un point  
 commons : ICOM1, ICOM2, ICOM5, ICOM6 et ICOMB  
 appel : CALL PREFIX (XCAL, ZCAL, DOBL, PROC, JD, YNTPRO, FACDIV, DOSE, L, IAPP)  
 XCAL } coordonnées du point de calcul  
 ZCAL }  
 DOBC : différence d'obliquité  
 PROC } : cf. INTP  
 JD }  
 YNTPRO }  
 FACDIV : facteur d'agrandissement / réduction  
 DOSE : dose calculée  
 L : n° du faisceau considéré  
 IAPP : code énergie  
 particularités : introduction de EMAX1, EMAX2, EMAX3 et EMAX4 équivalents à EMAX pour son initialisation par DATA.

**PTENT**

fonction : calcul des coordonnées du point d'entrée et de la DSP (en technique DST)  
 commons : ICOM2, ICOM4, ICOM5, ICOM9 et ICOMA  
 appel : CALL PTENT (NF, NREL)  
 NF : n° du faisceau  
 NREL : nombre de coupes relevées  
 particularités : a été réduit pour permettre une exécution plus rapide en évitant la résolution inutile de nombreux systèmes d'équations.

Soit D l'axe du faisceau, on cherche deux points consécutifs du contour  $M_i$  et  $M_{i+1}$  situés de part et d'autre de D.

On calcule M point d'entrée en exprimant :

$$\overrightarrow{M_i M_{i+1}} \text{ parallèle à } \overrightarrow{M_i M}$$

avec M entre  $M_i$  et  $M_{i+1}$

et sur D entre la source et l'isocentre.

**YPEAU** inchangé

Fonction : calcul de correction d'obliquité

communs : ICOM3

appels : CALL YPEAU (X, YCONT)

X : abscisse du point dans le système lié au faisceau

YCONT : ordonnée du point où la parallèle à l'axe menée par le point de calcul coupe le faisceau.

## 2 - ORGANISATION DES COMMUNS

La zone commune a été dotée d'une structure arborescente à 3 niveaux :

- 1) Nous utilisons uniquement le common blanc pour lequel sont réservés 9 265 mots sous la forme du tableau ICOM (9 265).
- 2) Ce common est partagé en 11 "sous-communs" représentés par 11 tableaux notés ICOM1, ..., ICOM9, ICOMA et ICOMB qui constituent une partition de ICOM par l'intermédiaire d'instructions EQUIVALENCE.
- 3) A son tour, chaque ICOM<sub>i</sub> est partitionné, à l'aide d'EQUIVALENCE, chaque partie étant une variable du programme.

Cette organisation lourde à première vue, limite le nombre d'interventions en cas de modification et facilite le partage de la zone commune par les modules de CALDOS et ceux d'optimisation, comme nous le verrons dans le chapitre IV consacré à TOTAL.

### Structure de ICOM<sub>i</sub>

Sous-common	Taille en mots	Rang d'équivalence avec ICOM	Description
ICOM1	5212	1	caractéristiques de l'appareil
ICOM2	1625	5213	caractéristiques des faisceaux
ICOM3	201	6838	coordonnées des points du contour vus de la source (système lié au faisceau)

ICOM4	1008	7039	contours relevés				
ICOM5	110	8047	organisation en groupes de points				
ICOM6	306	8157	caractéristiques des filtres en coin				
ICOM7	111	8463	table des adresses des sous-fichiers				
ICOM8	200	8474	coordonnées des points du contour (système lié au faisceau)				
ICOM9	27	8674	caractéristiques des plans demandés				
ICOMA	560	8701	angle et <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>isocentre</td></tr><tr><td>ou</td></tr><tr><td>par faisceau</td></tr><tr><td>entrée</td></tr></table>	isocentre	ou	par faisceau	entrée
isocentre							
ou							
par faisceau							
entrée							
ICOMB	5	9261	facteurs liés au champ carré équivalent				

TOTAL : 9265

Structure des ICOM<sub>1</sub>

ICOM1	Taille en mots	Rang d'équivalence	Description
CSTCOL	2	1	constante de collimation
TRANCO	2	3	transmission par le collimateur
DS	2	5	diamètre de la source (cm)
SC	2	7	distance source-collimateur (cm)
S	2	9	pour les RX . valeur intermédiaire de SC (DSP ≠ 100 cm)
CC (51, 51)	5202	11	table RDA (CO 60) ou RDM (RX)

TOTAL : 5212

ICOM2	Taille en mots	Rang d'équivalence	Description
NCH	1	1	nombre de faisceaux
DSP(56)	112	2	distance source-peau
DST (56)	112	114	distance source-tumeur
XCH(56, 5)	560	226	[ coordonnées des sommets de chaque champ
ZCH(56, 5)	560	786	
ALONG(56)	112	1346	[ dimensions des champs
ALARG(56)	112	1458	
NCHIND(56)	56	1570	indicateur de champ à considérer

TOTAL : 1625

ICOM3	Taille en mots	Rang d'équivalence	Description
M	1	1	nombre de points de la partie du contour vue de la source
XANT(50)	100	2	[ coordonnées de ces points
YANT(50)	100	102	

TOTAL : 201

ICOM4	Taille en mots	Rang d'équivalence	Description
XREL(5, 50)	500	1	[ coordonnées des points du contour
YREL(5, 50)	500	501	
PETITX	2	1001	valeur minimale des XREL
GRANDX	2	1003	valeur maximale des XREL

PETITY	2	1005	valeur minimale des YREL
GRANDY	2	1007	valeur maximale des YREL

TOTAL : 1008

ICOM5	taille en mots	rang d'équivalence	Description
NP (5)	5	1	nombre de points par contour
NBG (5)	5	6	nombre de groupes de points par plan
NBP(20, 5)	100	11	nombre de points par groupe et par plan

TOTAL : 110

ICOM6	taille en mots	rang d'équivalence	Description
IFIL(56)	56	1	code filtre en coin 0 : pas de coin 1 : coin
LO (56)	56	57	côté du bord épais
FILT (2, 20)	80	113	table des taux de transmission
DMES	2	193	distance source-mesure
NANGLE(56)	56	195	angle d'inclinaison de l'isodose 50 %
NCOIN (56)	56	251	nom du filtre en coin

TOTAL : 306

ICOM7	taille en mots	rang d'équivalence	description
NTABCC	1	1	
NFILT	1	2	
NCARTR	1	3	
NCHAMP	1	4	adresse des débuts des sous-
NCOUP	1	5	fichiers
NPOINT	1	6	cf. organisation du fichier
NDOSE	1	7	PREFIX (page II-41)
NOPT1	1	8	
NOPT2	1	9	
NUC	1	10	
NU	1	11	

TOTAL 11

ICOM8	taille en mots	rang d'équivalence	description
XC (50)	100	1	} coordonnées des points du contour dans le système lié au faisceau
YC (50)	100	101	

TOTAL 200

ICOM9	taille en mots	rang d'équivalence	description
IDEM(5)	5	1	n° de la coupe associée à chaque chaque plan demandé
ZDEM(5)	10	6	position longitudinale des plans demandés

ZLIM (6)	12	16	limite de validité des coupes relevées
----------	----	----	--

TOTAL 27

ICOMA	taille en mots	rang d'équivalence	description
THETA(56)	112	1	angle de rotation du bras par faisceau
XENT (56)	112	113	point d'entrée
YENT (56)	112	225	coordonnées ou
ZENT (56)	112	337	isocentre
ROTCOL(56)	112	469	rotation du collimateur par faisceau

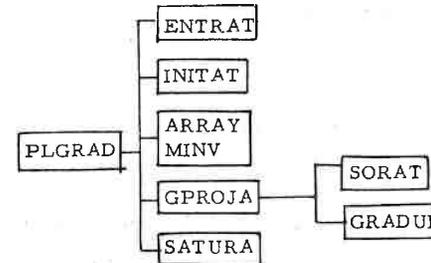
TOTAL 560

ICOMB	taille en mots	rang d'équivalence	description
CFA	2	1	facteur de correction en $f^D$ de la profondeur du maximum
POLCH	2	3	facteur d'interpolation linéaire (lié au côté du champ carré équivalent)
KCH	1	5	indice lié au champ carré équivalent

TOTAL 5

Utilisation des ICOM<sub>i</sub>

ICOM1	CALDOS, LECDON, PRIFIX
ICOM2	CALDOS, CALDO3, CHREPE, ETAT, LECDON, PRIFIX, PTENT
ICOM3	CALDO3, COUPE3, YPEAU
ICOM4	CALDO3, CHCORD, LECDON, PTENT
ICOM5	CALDO3, CHCORD, COUPE3, ETAT, LECDON, PRIFIX, PTENT
ICOM6	CALDO3, FILTRE, LECDON, PRIFIX
ICOM7	CALDOS, CALDO3, ETAT, FILTRE, LECDON
ICOM8	CALDO3, CHCORD, COUPE3, LIMXY3
ICOM9	CALDOS, LECDON, PTENT
ICOMA	CALDO3, CHCORD, CHREPE, COUPE3, LECDON, PTENT
ICOMB	DIMCHA, PRIFIX

III - PROGRAMMATION LINEAIRE PAR LA METHODE DU GRADIENTGraphe des appels entre modules1 - DESCRIPTION DES MODULES

**PLGRAD** programme principal

fonction : gère l'appel des différents modules et le passage d'une phase à l'autre (initialisation, saturation, optimisation) et édite, éventuellement, un code d'incident.

communs : A et A1 (cf. description p. II-25)

**ENTRAT**

fonction : lecture des données sur disque, construction des matrices des coefficients de la fonction objectif et des contraintes des données du problème d'optimisation.

communs : A et A1

appel : CALL ENTRAT

particularités : les lectures se font dans le fichier PREFIX, et ce sous-programme est propre à notre application

**INITAT**

fonction : calcul de l'état des contraintes, gestion des variables et éventuelle mise en place du problème auxiliaire

communs : A et A1

appel : CALL INITAT

**ARRAY** et **MINV**

fonction : ces deux sous-programmes de bibliothèque permettent l'inversion initiale de la matrice W (notée B dans l'exposé).

ARRAY : pré- ou post-arrangement de W

MINV : inversion

communs : néant

appels : CALL ARRAY (MODE, I, J, N, M, S, D)

MODE : type d'utilisation (1 : post-arrangement ;  
2 : pré-arrangement)

I : nombre de lignes } de S avec  $I \leq N$   
J : nombre de colonnes }  $J \leq M$

N : nombre de lignes } de D  
M : nombre de colonnes }

S (I, J)

D (N, M)

si MODE = 1 ARRAY range la matrice S (I, J) dans la sous-matrice D (I, J) de D (N, M)

si MODE = 2 ARRAY range la sous-matrice D (I, J) de D (N, M) en S (I, J)

CALL MINV (A, N, D, L, M)

A (N, N) : matrice à inverser

N : dimension de A

D : valeur du déterminant de A

L (N) et M (N) : tableaux auxiliaires

**GPROJA**

fonction : mise en œuvre de l'algorithme du gradient

- appel de GRADUI dans la phase de saturation

- calcul des coefficients de KUHN et TUCKER, avec libération éventuelle d'une contrainte dans la phase d'optimisation

communs : A et A1

appel : CALL GPROJA

**SORAT**

fonction : édition des résultats et stockage sur disque du point optimal

communs : A et A1

appel : CALL SORAT

particularité : le transfert sur disque rend ce sous-programme propre à notre application.

**GRADUI**

fonction : calcul de la direction de montée (gradient réduit étendu)

communs : A

appel : CALL GRADUI

**SATURA**

fonction : calcul du pas h et saturation d'une contrainte avec évaluation de la matrice W (notée B dans l'exposé)

commons : A et A1

appel : CALL SATURA.

Excepté pour ENTRAT et SORAT qui sont spécifiques de notre problème, les autres modules sont tirés des travaux de D. ATLAN.

Les quelques améliorations mineures apportées concernent essentiellement le remplacement de tests de nullité par des tests d'infériorité à  $\epsilon$  fixé, en valeur absolue.

**-2 - CODES D'INCIDENTS**

code de l'incident	sous-programme où a lieu l'incident	cause de l'incident
10	PLGRAD	Le déterminant de la matrice W est nul (contraintes redondantes ou $\epsilon_1$ trop grand)
20	INITAT	choix d'une base impossible (contraintes redondantes ou $\epsilon_1$ trop grand)
30	GPROJA	choix d'une variable sortante impossible (contraintes redondantes ou $\epsilon_1$ trop grand)
40	SATURA	pas h infini - solutions infinies contraintes mal choisis
41	SATURA	choix d'une variable entrante impossible (contraintes redondantes ou $\epsilon_1$ trop grand)

En outre, le message "pas de solution réalisable" est édité éventuellement ; cela dénote le choix de contraintes trop exigeantes.

**3 - CHOIX DE  $\epsilon_1$  ET  $\epsilon_2$** 

$\epsilon_1$  : intervient dans GPROJA pour tester le signe des coefficients de KUHN et TUCKER, et dans les modules PLGRAD, INITAT, GPROJA, SATURA, pour tester la non-nullité d'un pivot de la matrice à inverser.

$\epsilon_2$  : intervient dans INITAT pour tester la saturation des contraintes.

Le choix des valeurs de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  dépend de l'ordinateur utilisé. Sur Mitra 15 avec 1 réel sur 32 bits en simple précision, nous avons choisi :

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-4}$$

$\epsilon_2$  pourrait être plus élevé selon l'approximation tolérée au niveau de la saturation des contraintes. On peut noter que la qualité de la méthode nous a permis un choix d'une valeur de  $\epsilon_2$  très basse eu égard à l'ordre de grandeur des contraintes.

**Remarque :**

Bien qu'aucune contrainte bilatérale n'intervienne dans notre problème, nous avons conservé dans PLGRAD la possibilité de les prendre en compte. Les premiers indices leurs sont alors réservés dans V et ILU.

## 4 - DESCRIPTION DES COMMONS

COMMON /A/

P	nombre de contraintes bilatérales (entier)
N	nombre de variables
NT	nombre de contraintes
NA	paramètre de surdimensionnement ( $NA \approx \frac{N}{NT}$ )
M	nombre de contraintes saturées
INCI	indicateur d'incidents (si $\neq 0$ )
IFI	indicateur de fin d'itérations (si = 0)
PI	P + 1 (entier)
NI	N + 1
D (8)	direction de montée
ILU(335)	indicateur de contraintes saturées (si = 1)
IVL (8)	indicateur de variables de base (si = 1)
IVX(335)	IVX(I) = J si la ième contrainte ne dépend que de $x_j$
EPS (2)	$\epsilon_1$ et $\epsilon_2$ décrits ci-dessus
C (335)	tableau auxiliaire
IP (335)	tableau auxiliaire
G (8,8)	dérivées des contraintes saturées
W (8,8)	matrice inverse de celle des dérivées des contraintes saturées par rapport aux variables de base
T1 (335), T2 (335)	tableaux auxiliaires
CI (335)	gradient de la fonction objectif.

Soit un encombrement de :

$$9 + N + 3 \text{ NT entiers}$$

$$2 + N + 4 \text{ NT} + N^2 \text{ réels}$$

d'où ici avec N = 8 et NT = 335 :

1022 entiers et 1414 réels, soit 3850 mots sur MITRA 15

COMMON /A1/

X (8)	valeurs des variables
FX	valeur de la fonction objectif
H	valeur du pas de montée
V (335, 9)	coefficients des contraintes
ITER	compteur d'itération
INI	indicateur de lère phase (si = 1)

Soit un encombrement de :

$$2 \text{ entiers}$$

$$2 + \text{NT} * (\text{N}+1) \text{ réels}$$

d'où ici avec N = 8 et NT = 335

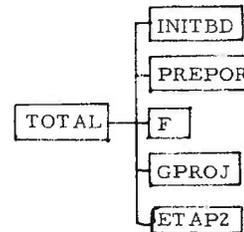
$$2 \text{ entiers et } 3017 \text{ réels, soit } 6036 \text{ mots sur MITRA } 15.$$

Remarque : PLGRAD peut être utilisé comme programme indépendant de programmation linéaire. Pour cela, il suffit de réécrire les modules ENTRAT d'initialisation et SORAT d'édition.

- ENTRAT : lecture de NA, N, NT et P  
lecture des tableaux C1, V et IVX  
initialisation du vecteur - état X  
mise à 0 initiale du tableau ILU  
et initialisation de PI = P + 1.
- SORAT : édition des résultats.

#### IV - OPTIMISATION NON LINEAIRE

##### Grphe des appels du programme principal



##### 1 - DESCRIPTION DES MODULES APPELES PAR LE PROGRAMME

###### PRINCIPAL

###### TOTAL

Dans ce programme principal, nous avons introduit une phase interactive permettant l'arrêt éventuel lors de la fin d'une itération.

Il s'agit en fait d'un point d'arrêt ou de reprise dont la présence est indispensable pour arrêter l'exécution autrement que par un test de nombre maximum d'itérations.

Commons : JCOM1, JCOM2, JCOM3, JCOM4 (cf. page II-34).

###### INITBD

fonction : lecture de données sur cartes

appel : CALL INITBD (P)

P : nombre de contraintes bilatérales (nul dans notre application)

commons : JCOM1, JCOM3 et JCOM4

particularités : ce module remplace l'initialisation par BLOCK DATA ; la lecture sur cartes facilite l'exécution séparée des itérations

**PREPOR**

fonction : lecture sur disque et rangement en mémoire des valeurs de doses utiles à l'optimisation ; calcul des valeurs approchées des dérivées ;

appel : CALL PREPOR (X, KK)  
 X : vecteur état  
 KK : si KK est non nul (lors du premier appel) on initialise les valeurs de X à partir du disque, par exemple avec les valeurs issues de PLGRAD

commons : JCOM5

particularités : ce module est propre à notre étude. Les valeurs de doses sont stockées en mémoire dans le souci de ne pas multiplier les accès-disque.

**F**

fonction : calcul de la valeur de la fonction objectif

appel : F (X)  
 X : vecteur état

commons : JCOM5

**GPROJ**

fonction : calcul de la direction de montée

appel : CALL GPROJ (P)  
 P : cf. INITBD

commons : JCOM1, JCOM2

S.P. appelés : GRADS, DEPCO et MCADIR

particularités : on supprime la possibilité de libération de contraintes.

**ETAP2**

fonction : choix de l'itéré suivant, le long de la direction de montée avec détermination automatique du pas

appel : CALL ETAP2

commons : JCOM1, JCOM2, JCOM3, JCOM4

S.P. appelés : ELINUM, F, CONT, SATUR et TEST

particularités : si la valeur courante du pas n'est pas satisfaisante, il est possible de l'entrer de façon interactive ; de même si le premier pas traité n'est pas correct, on peut effectuer la lecture de la nouvelle valeur au lieu de diviser systématiquement par 4.

TEST permet de vérifier si le vecteur état a évolué et éventuellement de repasser en phase de calcul de doses.

**2 - MODULES DE NIVEAU D'APPEL INFÉRIEUR****SATUR**

fonction : saturation d'une contrainte par méthode itérative de dichotomie

appel : CALL SATUR

commons : JCOM1, JCOM2 et JCOM3

S.P. appelés : ELINUM, CONT et F

particularités : possibilité interactive d'arrêt à la fin de  
chaque itération de la dichotomie.

**CONT**

fonction : calcul de la valeur des contraintes  
appel : CALL CONT (X, C, K, ILU)  
X : vecteur état  
C : valeur des contraintes  
K : indique le type des contraintes à calculer  
(saturées ou non)  
ILU : état des contraintes  
commons : JCOM5.

**DEPCO**

fonction : calcul de la valeur des dérivées des contraintes  
appel : CALL DEPCO (X, G, ILU, NA)  
X : vecteur état  
G : tableau des dérivées des contraintes  
saturées  
ILU : état des contraintes  
NA : paramètre de dimensionnement  
commons : JCOM5.

**GRADS**

fonction : calcul du gradient de la fonction objectif  
appel : CALL GRADS (X, FP)  
X : vecteur - état  
FP : composantes du gradient  
commons : JCOM5.

**ELINUM**

fonction : élimination numérique  
appel : CALL ELINUM (X)  
X : vecteur-état  
commons : JCOMI  
S.P. appelés : CONT, DEPCO, MCADIR et TEST  
particularités : comme en ETAP2, le vecteur état est suscep-  
tible de modification ce qui explique l'appel  
de TEST.

**MCADIR**

fonction : Sous-programme de bibliothèque pour la résolution  
de systèmes du type  $[ A ] [ X ] = [ F ]$  par la mé-  
thode de GOLUB  
appel : CALL MCADIR (QR, B, NA, M, N, AL, Y, SUM, IP)  
QR : contient A  
B : contient F en entrée et la solution en sortie  
NA : paramètre de sur-dimensionnement  
M : nombre d'équations  
N : nombre d'inconnues  
AL, Y, SUM, IP : tableaux auxiliaires  
commons : néant  
particularités : le tableau QR doit être dimensionné en fonction  
du nombre exact de variables (par exemple  
QR (8,1) dans le cas de 3 faisceaux).

3 - MODULES SPECIFIQUES

Outre INITBD et PREPOR décrits plus haut, les sous-programmes suivants sont tous propres à l'utilisation de la bibliothèque dans le cadre de la radiothérapie.

**TEST**

fonction : test de modification du vecteur-état

appel : CALL TEST (X)

X : vecteur état

commons : JCOM5

S.P. appelés : SAUVGA, MAJPRE, CALDOS, RESTAU, PREPOR

Si seuls les poids ont changé, il y a retour au module appelant ; sinon il y a appel de la séquence des sous-programmes indiqués ci-dessus avec indication des seuls faisceaux (réels ou fictifs) intervenant dans le nouveau calcul de doses.

**SAUVGA**

fonction : sauvegarde sur disque des commons JCOM1 à JCOM4

appel : CALL SAUVGA

commons : JCOM1, JCOM2, JCOM3 et JCOM4.

**MAJPRE**

fonction : préparation de la mise à jour des faisceaux modifiés

appel : CALL MAJPRE

commons : KCOM

S.P. appelé : MAJFAI

**MAJFAI**

fonction : Mise à jour sur disque de la table des faisceaux avec contrôle de l'appartenance à l'intervalle (0, 2 $\pi$ )

appel : CALL MAJFAI (NU, NCH)

NU : pointeur d'article du sous-fichier CHAMP  
(cf. V p. II-41)

NCH : numéro de faisceau

commons : KCOM.

**CALDOS**

Sous-programme principal de la partie calcul des doses  
(cf. p. II-3).

**RESTAU**

fonction : restauration à partir du disque des commons  
JCOM1 à JCOM4

appel : CALL RESTAU

commons : JCOM1, JCOM2, JCOM3 et JCOM4.

Mises à part les modifications ou particularités mentionnées ci-dessus, nous nous sommes efforcés de respecter scrupuleusement les spécifications de la bibliothèque d'optimisation ; ceci explique, par exemple, la présence parfois inutile de certains paramètres.

## 4 - ORGANISATION DES COMMONS

Nous avons adopté la même structure arborescente que pour la partie calcul des doses et selon la phase de traitement (calcul des doses ou optimisation), la zone commune représentée par le tableau ICOM (9 265) évoqué page II - 13) contiendra les "sous-communs"  $ICOM_i$  du calcul des doses ou  $JCOM_i$  de l'optimisation.

Par l'intermédiaire d'instructions équivalence, ICOM est partitionné en 5 "sous-communs" correspondant aux tableaux notés  $JCOM_1$ , ...,  $JCOM_5$ . A son tour chaque  $JCOM_i$  est partitionné en variables du programme.

Structure des  $JCOM_i$  pour 3 faisceaux réels et un maximum de 93 contraintes\*

sous common	taille en mots	rang d'équivalence avec ICOM	Description
JCOM1	731	1	optimisation
JCOM2	16	732	optimisation <sub>2</sub> valeur des variables
JCOM3	56	748	optimisation <sub>3</sub> ETAP2
JCOM4	2	804	code imprimante et lecteur
JCOM5	8216	806	caractéristiques de la dosimétrie

TOTAL 9021

\*En  $JCOM_1$ ,  $JCOM_2$ ,  $JCOM_3$ , pour  $f$  faisceaux et  $c$  contraintes, il faut remplacer 8 par  $2f + 2$  et 93 par  $c$  dans les dimensions de tableaux.

JCOMI	taille en mots	rang d'équivalence	Description
N	1	1	nombre de variables
NT	1	2	nombre de contraintes
M	1	3	nombre de contraintes saturées nombre de variables de base
NA	1	4	paramètre de surdimensionnement $\geq N$ et NT
INCI	1	5	indicateur d'incidents
IFI	1	6	indicateur de fin d'itérations
ICL	1	7	indicateur de libération de contraintes (si 1)
ITER	1	8	nombre maximum d'itérations dans ELINUM
ITER1	1	9	nombre maximum d'itérations dans le programme principal
EPS(7)	14	10	tableaux des $\epsilon_i$ utilisés
D (8)	16	24	direction de montée
IVL (8)	8	40	indicateur de variable de base (si 1)
U1 (8)	16	48	} tableaux de travail de MCADIR
U2 (8)	16	64	
U3 (8)	16	80	
IP (8)	8	96	
G (8, 8)	128	104	dérivées des contraintes saturées
W (8, 8)	128	232	} tableaux auxiliaires
C (93)	186	360	

ILU (93)	93	546	Indicateur de contraintes saturée (si 1)
IVX (93)	93	639	IVX (I) = J si la ième contrainte ne dépend que de $x_j$

TOTAL 731

JCOM2	taille en mots	rang d'équivalence	description
X (8)	16	1	Valeur des variables

TOTAL 16

JCOM3	taille en mots	rang d'équivalence	description
FX	2	1	valeur de la fonction objectif
H	2	3	pas de montée initial
H1	2	5	pas de montée variable
ISC	1	7	indicateur de saturation de contrainte (si 1)
INFO	1	8	indicateur d'interpolation quadratique dans ETAP2 (si 1)
Y (8)	16	9	} valeur des variables $Y=X(h)$ } dans les différentes $Z=X(2h)$
Z (8)	16	25	
U (8)	16	41	phases de ETAP2 $U=X(h^*)$

TOTAL 56

JCOM4	taille en mots	rang d'équivalence	description
IMP	1	1	code d'imprimante
LEC	1	2	code lecteur de cartes

TOTAL 2

JCOM5	taille en mots	rang d'équivalence	description
IDECAL	1	1	repère dans le sous-fichier des doses
NARG(20, 5)	100	2	n° d'article de début par groupe et par plan
NBG (5)	5	102	nombre de groupes de points par plan
NBP(20, 5)	100	107	nombre de points par groupe et par plan
LS (20, 5)	100	207	seuils par groupe et par plan
NDEM	1	307	nombre de plans demandés
NCH	1	308	nombre de faisceaux
XISO	2	309	} coordonnées du point de con- } cours des faisceaux
YISO	2	311	
POIDS(8)	16	313	poids de chaque faisceau
ANGLE(8)	16	329	angle de chaque faisceau
TAB(123, 32)	7872	345	table des doses

TOTAL 8216

Remarque : JCOM5 permet un maximum de 8 faisceaux réels et de 123 points d'optimisation.

Partage de ICOM par les ICOM<sub>i</sub> et les JCOM<sub>i</sub>

Comme nous l'indiquons page II-13, la zone commune sera occupée par les ICOM<sub>i</sub> ou les JCOM<sub>i</sub> selon que l'on sera en phase de calcul de doses ou d'optimisation.

L'entrée dans la phase de calcul des doses se faisant toujours par appel de CALDOS, les ICOM<sub>i</sub> seront créés à chaque appel comme pour un calcul de doses séparé.

Par contre il est nécessaire de sauvegarder les JCOM<sub>i</sub> (de 1 à 4) sur disque avant chaque appel de CALDOS pour permettre leur restauration lors du retour en phase d'optimisation. Cela n'est pas nécessaire pour JCOM5 qui est recréé par PREPOR appelé lors de chaque retour.

Commons propres à MAJPRE et à MAJFAI : KCOM (6)

élément	taille en mot	rang d'équivalence avec KCOM	Description
THETAS	2	1	angle du faisceau
XENTS	2	3	} coordonnées de l'isocentre
YENTS	2	5	

TOTAL 6

Utilisation des COMMONS

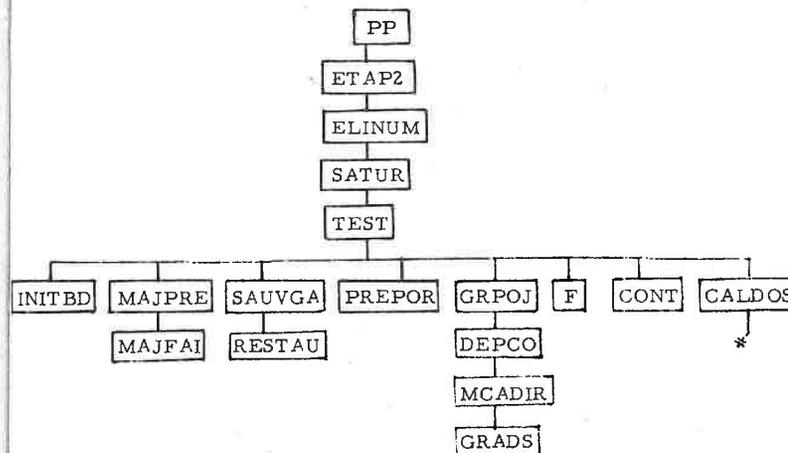
JCOM1	PP, CONT, DEPCO, ELINUM, ETAP2, F, GPROJ, GRADS, INITBD, RESTAU, SATUR, SAUVGA
JCOM2	PP, ETAP2, GPROJ, RESTAU, SATUR, SAUVGA
JCOM3	PP, ETAP2, INITBD, RESTAU, SATUR, SAUVGA

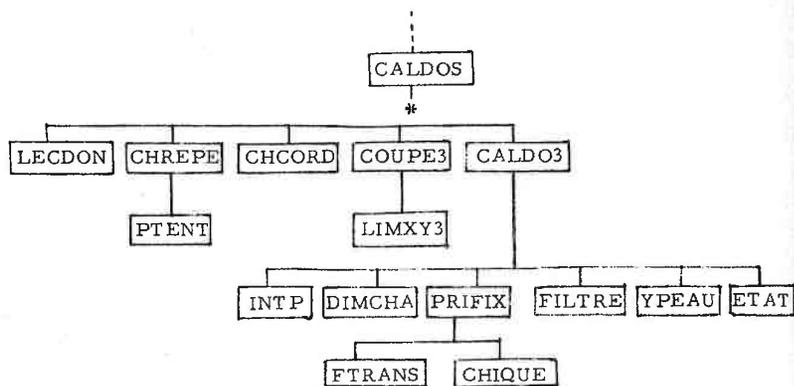
JCOM4	PP, ETAP2, INITBD, RESTAU, SAUVGA
JCOM5	CONT, DEPCO, F, GRADS, PREPOR, TEST
KCOM	MAJFAI, MAJPRE

5 - ARBRE DE RECOUVREMENT

Pour CALDOS et PLGRAD, nous n'avons pas mentionné les arbres de recouvrement utilisés, car le graphe des appels était arborescent et on peut donc le prendre comme arbre de recouvrement.

Pour TOTAL nous avons adopté l'arbre suivant :





6 - RECHERCHE D'UNE SOLUTION REALISABLE

Une des caractéristiques de la méthode utilisée est d'exiger une solution réalisable pour entamer l'optimisation.

De légères modifications apportées à TOTAL (cf. réf. 12 ch. VIII) lui permettraient de chercher cette solution réalisable.

Au cours des essais, pour des raisons de gain de temps d'exécution, nous avons obtenu cette solution réalisable à l'aide d'une phase préliminaire d'optimisation linéaire beaucoup plus rapide.

V - FICHER - DISQUE PREFIX

Le faible espace-mémoire disponible et le partage des données par des programmes séparés nous ont conduit à utiliser le stockage d'informations sur disque.

Le système de gestion de fichier utilisé nécessitant un buffer par fichier, nous avons été amenés, toujours pour des raisons d'économie de place mémoire, à n'utiliser qu'un seul fichier "fourre-tout" découpé en sous fichiers dont on trouvera ci-dessous la description.

Le fichier "fourre-tout" de nom PREFIX est un fichier séquentiel constitué d'enregistrements binaires de 240 octets auxquels on peut accéder séquentiellement ou directement. Il faut noter que du fait du découpage en sous-fichiers, l'accès direct est pratiquement imposé.

Structure du fichier PREFIX

nom du sous-fichier	identification du pointeur correspondant	numéro du 1er enregistrement	contenu du sous-fichier
TABCC	NTABCC	1	valeurs RDA (CO 60) ou RDM (RX)
FILT	NFILT	52	filtres en coin
CARTR	NCARTR	62	caractéristiques du traitement
CHAMP	NCHAMP	63	champs
COUP	NCOUP	119	contours ou coupes relevées
POINT	NPOINT	129	organisation des points du support
ADR	NADR	130	pointeurs de doses
DOSE	NDOSE	131	doses

OPT1	NOPT1	500	seuils d'optimisation
OPT2	NOPT2	501	vecteur-état
COMM	NCOMM	600	sauvegarde des communs.

Description des sous-fichiers

TABCC : table CC (51, 51) des valeurs du rapport :

E1 à E51 soit diffusé-air (R.D. A.) pour CO 60  
soit diffusé-maximum (R.D. M) pour les RX  
à raison d'une colonne par enregistrement (du 1er au 51ème)

FILT : table des filtres en coin, on y trouve au maximum 10  
ES2 à E61 filtres en coin (1 enregistrement par filtre) du 52ème  
au 61ème enregistrement.

ACoin (2) : nom du filtre en coin (8 car.)  
NANG : angle d'inclinaison de l'isodose 50 %  
ADMES : distance source-mesure  
AFILT (2, 20) : table des taux de transmission de part et  
d'autres de l'axe, rangée ligne par ligne.

CARTR : caractéristiques du traitement sur un seul enregistre-  
ment.  
E 62

PNOM (5) : nom du patient (20 car.)  
DOSSNU (3) : n° du dossier (12 car.)  
APP (3) : nom appareil (12 car.)  
NCHTOT : nombre de faisceaux à calculer (réels + fictifs)

IDSA : type DSP / DST (0/1)  
CSTCOL : constante de collimation  
TRANCO : transmission par le collimateur  
DS : diamètre de la source  
SC : distance source-collimateur  
IEN : type d'énergie (Sagittaire 1, Neptune 2, Cobalt 3)  
NDEM : nombre de plans demandés  
ZDEM (5) : cote des plans demandés  
IDEM (5) : IDEM (i) : n° de coupe relevée correspondant au  
ième plan demandé  
NREL : nombre de coupes relevées  
ZLIM (6) : limite de validité des coupes relevées (valeurs  
décroissantes)  
NP (5) : nombre de points des coupes relevées  
IOPT : type d'optimisation 0 : coefficients de pondération  
1 : + angle des faisceaux  
2 : + isocentre  
PETITX }  
GRANDX } : valeurs limites des points du contour.  
PETITY }  
GRANDY }  
NCH : nombre de faisceaux réels (8 au maximum)  
DELTET }  $\Delta \theta$   
DELTX } : valeurs de  $\Delta X$  choisies pour le calcul approché  
DELTY }  $\Delta Y$  des dérivées.

CHAMP : table des champs (ou faisceaux) à raison d'un enregistre-  
ment par faisceau, soit au maximum 56 : 8 réels + 48  
fictifs. (NCHTOT = NCH \* 7).

THETA : angle du faisceau  
 DSP : distance source-peau  
 DST : distance source-isocentre  
 XENT }  
 YENT } : coordonnées du point d'entrée en DSP  
 ZENT } de l'isocentre en DST  
 ALARG }  
 ALONG } : dimensions du champ  
 IFIL : indicateur de filtre en coin (1/0, oui/non)  
 COIN (2) : nom du filtre (8 carac.)  
 LO : côté du filtre  
 ROTCOL : angle du collimateur  
 NCOIN : pointeur dans FILT du filtre utilisé  
 XCH (5) }  
 ZCH (5) } : limites du champ.

Organisation : d'abord les champs réels, puis dans l'ordre :

$\theta - \Delta \theta$   
 $\theta + \Delta \theta$   
 $X - \Delta X$   
 $X + \Delta X$   
 $Y - \Delta Y$   
 $Y + \Delta Y$

COUP : table des coupes relevées (contours) dans l'ordre des  
 E119 à 128 ZLIM à raison de 2 enregistrements par coupe relevée  
 (soit 10 enregistrements au maximum)

1) XREL (50) }  
 2) YREL (50) } coordonnées des points-contour.

POINT : organisation des points du support en un enregistrement  
 E 129 NBG (5) : nombre de groupes par plan demandé (au  
 (maximum 20 groupes par plan)  
 NBP (20, 5) : nombre de points par groupe stocké colonne  
 par colonne

ADR : table des pointeurs de groupe dans DOSE, 1 seul enre-  
 E 130 gistrement.

NBPT : nombre total de points du support  
 NARG (20, 5) : NARG (j, i) n° d'article dans DOSE du  
 ler point du groupe j du plan i, est  
 stocké colonne par colonne.

DOSE : table des doses à raison d'un enregistrement par point  
 E131 à E 499 du support.

X }  
 Y } coordonnées du point  
 Z }

DOSE (56) : dose unitaire de chaque faisceau. (L'ordre des  
 faisceaux étant le même que dans CHAMP)  
 (cf. aussi page II-47).

OPT1 : table des seuils d'optimisation par groupes de points en  
 E 500 rads

LS (20, 5) : rangé colonne par colonne.

**OPT2** : vecteur-état (valeurs des différentes variables).  
**E 501** **POIDS (8)** : coefficient de pondération  
**ANGLE (8)** : angle des faisceaux réels  
**XISO** } : coordonnées de l'isocentre  
**YISO** }  
**NCHTAB (8)** : indicateur de faisceaux réels à considérer  
 (oui/non, 1/0)  
**MODIF** : type de faisceaux à prendre en compte  
 0 : faisceaux réels  
 1 : + les  $\Delta \theta$  et  $-\Delta \theta$   
 2 : les  $\Delta X$  et  $\Delta Y$   
**NCHIND (56)** : indicateur de faisceaux à considérer  
 (oui/non, 1/0).

**COMM** : sauvegarde de la zone commune des modules d'optimisation  
**E 600** → non linéaire, on stocke successivement JCOM1 à JCOM4 à partir de l'enregistrement 600.

Il existe des redondances dans PREFIX. Elles sont, sauf erreur, volontaires et destinées à faciliter, coup par coup, différents traitements ou à permettre éventuellement le traitement de cas plus généraux que ceux étudiés.

VI - ORGANISATION DES CALCULS DE LA FONCTION

OBJECTIF, DES CONTRAINTES ET DES VALEURS

APPROCHEES DES DERIVEES

Toutes les valeurs de doses utiles à ces calculs se trouvent dans le sous-fichier DOSE du fichier PREFIX. On peut schématiser ce sous-fichier sous la forme d'un tableau, chaque ligne correspondant à un enregistrement :

DOSE	x	y	z	d <sup>0</sup>	d <sup>1</sup>	d <sup>2</sup>	d <sup>3</sup>	d <sup>4</sup>	d <sup>5</sup>	d <sup>6</sup>
plan 1 {	gr <sub>1</sub>									
	gr <sub>2</sub>									
1 {										
	dernier groupe									
plan 2 {										
plan 3 {										

←-----→  
 nb de valeurs égal au nb de faisceaux

.....  
 initiaux (8 au max)

Il y a au maximum 5 plans demandés et au maximum 20 groupes par plan demandé ; le nombre de points par groupe n'a pas été limité, c'est NBPT le nombre total de points qui le sera en fonction de la mémoire disponible.

Pour chacun des NBPT points de coordonnées x, y et z :

$$\begin{aligned}
 d^0 &= \text{dose } (\theta, X, Y) & \text{où } \theta &: \text{ angle du faisceau initial} \\
 d^1 &= \text{dose } (\theta - \Delta \theta, X, Y) & \left. \begin{array}{l} X \\ Y \end{array} \right\} &: \text{ coordonnées de l'isocentre} \\
 d^2 &= \text{dose } (\theta + \Delta \theta, X, Y) \\
 d^3 &= \text{dose } (\theta, X - \Delta X, Y) \\
 d^4 &= \text{dose } (\theta, X + \Delta X, Y) & \text{Il s'agit là de doses unitaires,} \\
 d^5 &= \text{dose } (\theta, X, Y - \Delta Y) & \text{i. e. relatives à un seul fais-} \\
 d^6 &= \text{dose } (\theta, X, Y + \Delta Y) & \text{ceau caractérisé par } (\theta, X, Y).
 \end{aligned}$$

Dans la suite nous utiliserons cette notation  $d^i$ , en sachant qu'il s'agit en fait de :

$d_{jk}^i$  : dose de type i, due au faisceau j  
et calculée au point k.

Pour éviter de nombreux accès-disque très coûteux en temps, après chaque calcul de doses, les différentes valeurs de doses et leurs dérivées en  $\theta$ , X et Y seront calculées une fois pour toutes et implantées en mémoire dans le tableau TAB (NBPT  $\times$  32)

- T A B -

$D^0$	$D^1$	$D^2$	$D^3$

} 1 ligne par point du support

nombre de valeurs égal au nombre de faisceaux initiaux (8 au max.)

Chaque ligne de TAB correspond à un enregistrement du sous-fichier DOSE, c'est-à-dire à un point du support.

Ainsi, NDOSE, NBPT, NBG, NBP et NARG (cf. page II-41 organisation du fichier) permettent de se repérer dans TAB, comme dans le sous-fichier DOSE.

Les  $D^{\ell}$  (ou  $D_{jk}^{\ell}$ ) sont obtenues à partir des  $d^i$  (ou  $d_{jk}^i$ ) par :

$$\begin{aligned}
 D^0 &= d^0 \\
 D^1 &= \frac{d^2 - d^1}{2 \Delta \theta} \\
 D^2 &= \frac{d^4 - d^3}{2 \Delta X} \\
 D^3 &= \frac{d^6 - d^5}{2 \Delta Y}
 \end{aligned}$$

Calculs proprement-dits

En adoptant les mêmes notations que dans le paragraphe "position du problème et notations" (p. 13), le problème d'optimisation s'écrit :

Fonction objectif

$$\max (f) \text{ avec } f = - \sum_{k \in \text{CT u IT}} \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j D_{jk}^0 \right)$$

Soit

$$\max \left[ - \sum_{j=1}^n \alpha_j \left( \sum_{k \in \text{CT u IT}} D_{jk}^0 \right) \right]$$

Contraintes

Contour-tumeur

Pour tout point k de CT,  $\Psi_k \geq 0$

$$\text{avec } \Psi_r = \sum_{j=1}^n \alpha_j D_{jk}^0 - S$$

où S prend la valeur du seuil correspondant au point k ;

Organes-sensible Pour tout point k de OS,  $\varphi_k \geq 0$

$$\text{avec } \varphi_k = - \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j D_{jk}^0 - S' \right)$$

où S' prend la valeur du seuil correspondant au point k.

Coefficients de pondération

Pour tout j de 1 à n,  $\alpha_j \geq 0$ .

Gradient de la fonction-objectif

les n + 2 composantes du gradient sont définies par :

$$*) \text{ Pour j de 1 à n } \frac{\partial f}{\partial \alpha_j} = - \sum_{k \in \text{CT u IT}} D_{jk}^0$$

$$*) \text{ Pour j de 1 à n } \frac{\partial f}{\partial \theta_j} = - \alpha_j \sum_{k \in \text{CT u IT}} D_{jk}^1$$

$$*) \frac{\partial f}{\partial X} = - \sum_{j=1}^n \alpha_j \left( \sum_{k \in \text{CT u IT}} D_{jk}^2 \right)$$

$$*) \frac{\partial f}{\partial Y} = - \sum_{j=1}^n \alpha_j \left( \sum_{k \in \text{CT u IT}} D_{jk}^3 \right).$$

Dérivées des contraintes

Contour-tumeur -) Pour tout point k de CT, pour j de 1 à n :

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_j} = D_{jk}^0$$

$$\text{et } \frac{\partial \psi_k}{\partial \theta_j} = \alpha_j D_{jk}^1$$

$$-) \frac{\partial \psi_k}{\partial X} = \sum_{j=1}^n \alpha_j D_{jk}^2$$

$$-) \frac{\partial \psi_k}{\partial Y} = \sum_{j=1}^n \alpha_j D_{jk}^3$$

Organes-sensible

- Pour tout point k de OS, pour j de 1 à n :

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha_j} = - D_{jk}^0$$

$$\text{et } \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta_j} = - \alpha_j D_{jk}^1$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial X} = - \sum_{j=1}^n \alpha_j D_{jk}^2$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial Y} = - \sum_{j=1}^n \alpha_j D_{jk}^3.$$

Coefficients de pondération

- Pour tout j de 1 à n, pour tout i de 1 à n

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_i} = 1 \quad \text{si } i = j$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

$$\text{et } \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_i} = 0$$

$$- \frac{\partial \alpha_i}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial Y} = 0.$$

Les différents calculs sont exécutés dans les sous-programmes :

F : calcul de la fonction-objectif

GRADS : gradient de la fonction objectif

CONT : calcul des contraintes

DEPCO : dérivées partielles des contraintes

à partir des valeurs du tableau TAB.

Le tableau TAB sera garni par le sous-programme PREPOR après lecture du sous-fichier DOSE.

Dans la version de TOTAL relative aux essais présentés, le tableau TAB a été dimensionné en 123 × 32, ce qui permet de traiter jusqu'à 123 points d'optimisation.

-----

## VII - COMPLEMENTS

En II, III et IV nous avons décrit les 3 modules principaux :

CALDOS

PLGRAD

TOTAL qui lui même fait appel à CALDOS.

En outre, nous avons été amenés à écrire différents programmes de service dont nous nous contenterons de donner une brève description :

- BIBLIO : garnissage des fichiers
  - BIBAP (bibliothèque des appareils)
  - DIFSA (valeurs de R.D. A. Sagittaire)
  - DIFNE (valeurs de R.D. M. Neptune)
  - DIFCO (valeurs Cobalt)
  - BIBFC (bibliothèque des filtres en coin).
- PREFIX : programme préparatoire au calcul des doses.  
Lecture des données sur cartes et stockage sur disque (fichier PREFIX) et tout le travail préparatoire effectué dans CFIX par le P. P.
- EDIPRE : édition des caractéristiques du traitement.
- SEUILS : lecture des seuils d'optimisation.
- DOSPON : calcul et édition des doses pondérées.
- VEKETA : modification à la demande du vecteur état.

En regroupant les différents modules, on peut définir diverses applications.

I - SIMPLE CALCUL DE DOSES :

{ PREFIX  
CALDOS  
EDIPRE  
DOSPON

II - OPTIMISATION LINEAIRE

{ PREFIX  
CALDOS  
SEUILS  
PLGRAD  
DOSPON

(Etant entendu que BIBLIO a été exécuté préalablement une fois pour toutes).

III - OPTIMISATION NON LINEAIRE

{ PREFIX  
CALDOS  
SEUILS  
PLGRAD  
TOTAL  
DOSPON

Enfin, nous avons mis au point DOSGRI, une version de CALDOS calculant les valeurs des doses en des points régulièrement répartis sur une grille de 40 colonnes et 60 lignes et ISODOS qui à partir des valeurs de dose des points de cette grille permet la visualisation des isodoses, c'est-à-dire les lignes joignant les points correspondant à une même valeur de dose (cf. V<sup>ème</sup> partie).

-----

CONCLUSION GENERALE

Le but de cette étude est de montrer les possibilités de mise en œuvre sur petit système des techniques d'optimisation dans le cadre de la radiothérapie externe.

Il est sûr que, dans de nombreux cas, le choix de la géométrie des faisceaux s'impose d'emblée au radiothérapeute ; nous préconisons alors le seul usage de l'optimisation linéaire qui permet de choisir au mieux les coefficients de pondération de chacun des faisceaux. Nos programmes permettent alors de considérer jusqu'à 5 plans différents, 8 faisceaux et 335 points d'optimisation et ne nécessitent que la donnée du support d'optimisation et des valeurs seuils des contraintes après un calcul préalable des doses uniquement pour les points du support. Dans des cas plus particuliers, ou pour des études spécifiques, l'optimisation non linéaire permet, comme le montrent les essais présentés, d'améliorer notablement les résultats de l'optimisation linéaire. Les résultats obtenus permettent de constater que, bien qu'on utilise des techniques de montée locales, les modifications apportées à la géométrie initiale des faisceaux peuvent être importantes.

Cette optimisation est relativement lourde car chaque itération nécessite de nouveaux calculs de dose pour un nombre de faisceaux supérieur au nombre de faisceaux réels dans le but du calcul de dérivées. De plus, elle exige l'intervention de l'utilisateur par exemple en ce qui concerne la fin des itérations. Elle a l'avantage de fournir une amélioration à chaque étape.

Nous souhaitons que cette étude puisse déboucher sur une exploitation en routine. Après une phase indispensable d'essais cliniques, une adaptation sera nécessaire en fonction des moyens informatiques et des logiciels de dosimétrie dont disposent les éventuels utilisateurs.

-----

**Annexe**

**Bibliographie**

EVOLUTION DE L'INVERSE DE LA MATRICE  
DES CONTRAINTES EN PROGRAMMATION  
LINEAIRE

Nous avons vu, lors de la présentation de la méthode du gradient en programmation linéaire, que le calcul de la direction de montée  $\Delta$  utilise à chaque itération les valeurs de la matrice  $A_{JB}^{-1}$ .

Rappelons que  $A_{JB}$  est formée des éléments de la matrice  $A$  des coefficients des contraintes situés sur :

- une ligne  $j$  de l'ensemble  $J$  des indices des contraintes saturées
- une colonne  $b$  de l'ensemble  $B$  des indices des variables de base.

Pour des raisons de commodité d'écriture, nous noterons  $B = A_{JB}$  dans la suite de cette annexe.

Il se trouve que le calcul de  $B^{-1}$  n'est pas nécessaire à chaque itération ; en effet à l'étape  $r + 1$ , il est relativement simple de déduire  $B_{r+1}^{-1}$  de  $B_r^{-1}$  (on retrouve ainsi la même facilité que dans l'emploi de la méthode "forme révisée" du SIMPLEX).

A l'étape initiale,  $B_0^{-1}$  sera calculée à l'aide d'un sous-programme d'inversion.

Pour les étapes suivantes, 2 cas sont à envisager selon que le nombre de contraintes saturées diminue ou augmente d'une unité.

1 - LIBERATION D'UNE CONTRAINTE

Ce cas se produit, au cours de la phase d'optimisation lorsqu'un au moins des coefficients de KUHN et TUCKER est strictement positif. Il faut alors libérer une contrainte associée à un coefficient positif et sortir une variable de la base. Du point de vue de la matrice B, on supprime une ligne et une colonne correspondant respectivement à la contrainte libérée et à la variable sortante.

Procédé de calcul

Considérons d'abord le cas particulier où la contrainte à libérer et la variable sortante ont toutes deux n pour indice.

Partitionnons  $B_r$  ( $n \times n$ ) en :

$B_{r+1}$  : matrice carrée ( $(n-1) \times (n-1)$ )  
 $t_M$  : vecteur ligne à  $n-1$  composantes  
 $D$  : vecteur colonne à  $n-1$  composantes  
 $y$  : scalaire égal à  $B_r$  ( $n, n$ )

$$B_r = \begin{bmatrix} B_{r+1} & D \\ t_M & y \end{bmatrix}$$

de même pour  $B_r^{-1}$  que l'on connaît :

$$B_r^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ t_L & x \end{bmatrix}$$

$A$  : matrice carrée ( $(n-1) \times (n-1)$ )  
 $t_L$  : vecteur ligne à  $n-1$  composantes  
 $C$  : vecteur colonne à  $n-1$  composantes  
 $x$  : scalaire égal à  $B_r^{-1}$  ( $n, n$ ).

On désire calculer  $B_{r+1}^{-1}$

Ecrivons  $B_r \cdot B_r^{-1} = \begin{bmatrix} B_{r+1} & D \\ t_M & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & C \\ t_L & x \end{bmatrix} = I_n$

Soit en développant

$$\begin{bmatrix} B_{M+1} \cdot A + D \cdot t_L & B_{r+1} \cdot C + D \cdot x \\ t_M \cdot A + y \cdot t_L & t_M \cdot C + y \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} B_{r+1} \cdot A + D \cdot t_L = I_{n-1} & (1) \\ B_{r+1} \cdot C + D \cdot x = 0 & (2) \\ t_M \cdot A + y \cdot t_L = 0 \\ t_M \cdot C + y \cdot x = 1 \end{cases}$$

D'après (2) :

$$D = - \frac{B_{r+1} \cdot C}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

Soit en remplaçant dans (1) :

$$B_{r+1} \cdot A - \frac{B_{r+1} \cdot C \cdot t_L}{x} = I_{n-1}$$

d'où

$$B_{r+1} \left( A - \frac{C \cdot t_L}{x} \right) = I_{n-1}$$

ainsi :

$$B_{r+1}^{-1} = A - \frac{C \cdot t_L}{x} \quad (3) \text{ avec } B_r^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ t_L & x \end{bmatrix}$$

Cas général

Considérons le cas où les indices  $i$  de la contrainte à libérer et  $j$  de la variable sortante sont quelconques entre 1 et  $n$ .

Partitionnons  $B_r$  de la façon suivante :

$$B_r = \begin{bmatrix} B_1 & C_j & B_2 \\ t_{L_i} & y & \\ B_3 & & B_4 \end{bmatrix}$$

$y$  est  $B_r$  ( $i, j$ )

$t_{L_i}$  est la  $i$ ème ligne de  $B_r$  privée de  $y$

$C_j$  est la  $j$ ème colonne de  $B_r$  privée de  $y$

avec  $B_{r+1} = \left[ \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right]$  dont on cherche l'inverse  
de même pour  $B_r^{-1}$  que l'on connaît :

$$B_r^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & C_i & A_2 & \\ \hline t_{L_j} & x & & \\ \hline & & & \\ \hline A_3 & & & A_4 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} x \text{ est } B_r^{-1} (j, i) \\ t_{L_j} \text{ est la } j\text{ème ligne de } B_r^{-1} \\ \text{privée de } x \\ C_i \text{ est la } i\text{ème colonne de } \\ B_r^{-1} \text{ privée de } x \end{array}$$

Nous nous ramenons au cas particulier précédent en multipliant  $B_r$  respectivement à droite et à gauche pour  $J_2$  et  $J_1$  avec :

$$J_1 = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} I_{i-1} & 0 & & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-i} & \\ \hline 0 \dots 0 & 1 & 0 \dots 0 & \end{array} \right] \quad \text{et} \quad J_2 = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} I_{j-1} & 0 & & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \\ \hline 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 1 & \\ \hline & 0 & I_{n-j} & 0 \end{array} \right]$$

en effet :

$$J_1 \cdot B_r \cdot J_2 = \left[ \begin{array}{c|c|c} B_1 & B_2 & C_j \\ \hline B_3 & B_4 & \\ \hline t_{L_i} & & y \end{array} \right]$$

Il est aisé de vérifier que  $J_1$  et  $J_2$  sont toutes deux des matrices orthogonales :

$$J_1 \cdot t_{J_1} = I_n \quad \text{soit} \quad J_1^{-1} = t_{J_1}$$

et  $J_2 \cdot t_{J_2} = I_n$  soit  $J_2^{-1} = t_{J_2}$

par suite :

$$(J_1 \cdot B_r \cdot J_2)^{-1} = J_2^{-1} \cdot B_r^{-1} \cdot J_1^{-1} = t_{J_2} \cdot B_r^{-1} \cdot t_{J_1}$$

or

$$t_{J_2} \cdot B_r^{-1} \cdot t_{J_1} = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & C_i \\ \hline A_3 & A_4 & \\ \hline t_{L_j} & & x \end{array} \right]$$

ainsi d'après (3) on aura :

$$(4) \quad B_{r+1}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right] - \frac{C_i \cdot t_{L_j}}{x} \quad \text{avec} \quad B_r^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_1 & C_i & A_2 \\ \hline t_{L_j} & x & \\ \hline A_3 & & A_4 \end{array} \right] \quad \text{si } x \neq 0$$

## 2 - SATURATION D'UNE CONTRAINTE

Ce cas se produit au cours de la phase de saturation ; le calcul du pas  $h$  le long d'une direction de montée conduit à saturer une contrainte et à faire entrer une variable dans la base. Du point de vue de la matrice  $B$ , on ajoute une ligne et une colonne correspondant respectivement à la contrainte saturée et à la variable entrante.

### Procédé de calcul

La matrice  $B_r$  est d'ordre  $k$  ( $k < n$ ), on cherche l'inverse de  $B_{r+1}$  d'ordre  $k+1$ . Si la contrainte à saturer et la variable entrante ont toutes deux  $k+1$  pour indice, nous décomposons  $B_{r+1}$  et  $B_{r+1}^{-1}$  en sous-matrices selon le même procédé que ci-dessus :

$$B_{r+1} = \left[ \begin{array}{c|c} B_r & D \\ \hline t_M & y \end{array} \right]$$

et  $B_{r+1}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline t_L & x \end{array} \right]$

Développons  $B_{r+1} \cdot B_{r+1}^{-1} = I_{k+1}$

$$\left[ \begin{array}{c|c} B_r \cdot A + D \cdot t_L & B_r \cdot C + D \cdot x \\ \hline t_M \cdot A + y \cdot t_L & t_M \cdot C + y \cdot x \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

on obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} B_r \cdot A + D \cdot {}^t L = I_k & (5) \\ B_r \cdot C + D \cdot x = 0 & (6) \\ {}^t M \cdot A + y \cdot {}^t L = 0 & (7) \\ {}^t M \cdot C + y \cdot x = 1 & (8) \end{cases}$$

D'après (3), on sait :

$$A = B_r^{-1} + \frac{C \cdot {}^t L}{x}$$

restent à calculer C,  ${}^t L$  et x.

De (6) on tire :

$$C = -B_r^{-1} \cdot D \cdot x$$

Soit en remplaçant dans (8)

$$- {}^t M \cdot B_r^{-1} \cdot D \cdot x + y \cdot x = 1$$

d'où :

$$x = \frac{1}{y - {}^t M \cdot B_r^{-1} \cdot D} \quad \text{si } y - {}^t M \cdot B_r^{-1} \cdot D \neq 0$$

de (7) on tire :

$${}^t L = -\frac{{}^t M \cdot A}{y} \quad (9)$$

en multipliant (5) à gauche par  $B_r^{-1}$ , on obtient

$$A = B_r^{-1} - B_r^{-1} \cdot D \cdot {}^t L$$

et en remplaçant A par son expression dans (9) :

$${}^t L = -\frac{{}^t M (B_r^{-1} - B_r^{-1} \cdot D \cdot {}^t L)}{y}$$

Soit  $y \cdot {}^t L = - {}^t M B_r^{-1} + {}^t M \cdot B_r^{-1} \cdot D \cdot {}^t L$ .

D'où :

$${}^t L = \frac{- {}^t M \cdot B_r^{-1}}{y - {}^t M \cdot B_r^{-1} \cdot D}$$

ou encore en fonction de x :

$${}^t L = - {}^t M \cdot B_r^{-1} \cdot x$$

on calculera successivement :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{y - {}^t M \cdot B_r^{-1} \cdot D} & \text{si } y - {}^t M \cdot B_r^{-1} \cdot D \neq 0 \\ C = -B_r^{-1} \cdot D \cdot x \\ {}^t L = - {}^t M \cdot B_r^{-1} \cdot x \\ A = B_r^{-1} + \frac{C \cdot {}^t L}{x} \end{cases}$$

Dans le cas général, on procède comme dans le cas de la libération d'une contrainte pour se ramener au cas précédent ; ainsi on aura :

$$B_{r+1}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & C_i & A_2 \\ {}^t L_j & x & \\ A_3 & & A_4 \end{bmatrix}$$

avec  $x = \frac{1}{y - {}^t L_i \cdot B_r^{-1} \cdot C_j}$

$$C_i = -B_r^{-1} \cdot C_j \cdot x$$

$${}^t L_j = - {}^t L_i \cdot B_r^{-1} \cdot x$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = B_r^{-1} + \frac{C_i \cdot {}^t L_j}{x}$$

et  $B_{r+1} = \begin{bmatrix} B_1 & C_j & B_2 \\ {}^t L_i & y & \\ B_3 & & B_4 \end{bmatrix}$

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 ALI-AHMED H., LEGRAS B., POTDEVIN M, LEGRAS J.,  
CHAU N., SCHOUMACHER P.  
"Différentes méthodes d'optimisation par ordinateur  
des traitements en télécobalthérapie".  
J. Fr. Bioph. Méd. Nucléaire, 1977, 5, 219-223.
- 2 ALI-AHMED H.  
"Techniques d'optimisation en radiothérapie externe".  
Thèse de docteur ès-Sciences - NANCY, 1977.
- 3 ATLAN D.  
"Méthode du gradient en programmation linéaire et  
quadratique".  
Thèse de doctorat de spécialité, NANCY, 1977.
- 4 BAHR G.K., KERIADES J.G.  
"The method of linear programming applied to radiation  
treatment planning".  
Radiology, 1968, 91, 686-693.
- 5 BIBLIOTHEQUE NATIONALE DE RADIOTHERAPIE  
"Brochure de programmation de CFIX".  
1977.
- 6 BOURGAT J.F., RIVER M., DUTREIX A, BERNARD D.  
"Optimisation par ordinateur du traitement en télécobal-  
thérapie".  
J. Radiol. Electrol. 1974, 55, 775-779.
- 7 HODES L.  
"Semi-automatic optimization of external beam radiation  
treatment planning".  
Radiology 1974, 110, 191-196.

- 8 HOPE C.S., CAIN O.  
"A computer program for optimised stationary beam treatment planning using score functions".  
Computers programs in biomedicine 1972, 2, 221-231.
- 9 GALLAGHER T.L.  
"Optimization of external radiation beams for therapy planning".  
Ph. D. Thesis, 1967, Washington.
- 10 KLEPPER L.Y.  
"Electronic computers and methods of linear programming in the choice of optimal conditions for radiation therapy".  
Medskaya Radiol. 1966, 11, 5-8.
- 11 LEGRAS B.  
"L'optimisation automatique des doses en radiothérapie externe".  
Thèse de Biologie humaine, 1978, NANCY.
- 12 LEGRAS J.  
"Algorithmes et programmes d'optimisation non linéaire avec contraintes. Application au contrôle optimal".  
MASSON, 1980.
- 13 POTDEVIN M., LEGRAS B., LEGRAS J., SCHOUMACHER P., ALETTI P.  
"Une méthode originale d'optimisation des traitements radiothérapeutiques externes adaptée à un petit système informatique".  
Ann. Radiologie 1980, 23, 36-40.

- 14 POTDEVIN M., LEGRAS B., SCHOUMACHER P., BEY P.  
"Programs of optimization, iso-effect curves and treatment time supplementing the dosimetry programs of a small data processing system".  
Proposé à Intern. J. Radiat. Oncology
- 15 REDPATH A.T., VICKERY B.L., WRIGHT D.H.  
"A new technique for radiotherapy planning using quadratic programming".  
Phys. Med. Biol. 1976, 21, 781-791.
-

NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur POTDEVIN Michel

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT ès SCIENCES

VU, APPROUVE

et PERMIS D'IMPRIMER

NANCY LE 03.JUIN 1980 00081

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

