UNIVERSITE DE NANCY I

U.E.R. SCIENCES MATHEMATIQUES

Sc N 82/255 A

THESE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR 3e CYCLE EN MATHÉMATIQUES PURES

UNIVERSITE NANCY BIBLIOTHEQUE-SCIENCES

par

Amédéo NAPOLI

Sujet :

Contributions à l'étude des variétés lorentziennes et des espaces-temps

Soutenue publiquement le 10 Décembre 1982

Jury :

Président D. BARLET

Examinateurs L. BERARD BERGERY, G. JENSEN

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1

D 095 180017 9

VERSITE DE NANCY I

U.E.R. SCIENCES MATHEMATIQUES

S N 82/255 A

THESE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR 3e CYCLE EN MATHÉMATIQUES PURES

UNIVERSITE NANCY BIBLIOTHEQUE SCIENCES

par

Amédéo NAPOLI

Sujet :

Contributions à l'étude des variétés lorentziennes et des espaces-temps

Soutenue publiquement le 10 Décembre 1982

Jury :

Président D. BARLET

Examinateurs L. BERARD BERGERY, G. JENSEN

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1
D 095 180017 9

UNIVERSITE * NANCY * BIBLIOTHEQUE-SCIENCES

Je tiens à remercier tout particulièrement M. L. BERARD-BERGERY qui m'a dirigé et constamment aidé (à Nancy et durant mon séjour en Algérie) pour la préparation de cette thèse.

Je remercie également MM. D. BARLET et G. JENSEN pour leur participation au jury.

Je remercie Mme DRIQUERT qui a dactylographié et très joliment présenté le manuscrit, et Mme JUSTIN qui a réalisé la page de garde.

Je remercie aussi tous les amis qui, de bien diverses manières, ont également contribué à mener à bien ce travail.

S O M M A I R E

	Pages
INTRODUCTION	1
I - PRESENTATION DES ESPACES-TEMPS	2
A - Variétés lorentziennes	2
B - Connexion, courbure, géodésiques	4
C - Espaces-temps	9
D - Exemples d'espaces-temps	12
E - Deux théorèmes	17
II - STRUCTURE CAUSALE DES ESPACES-TEMPS	22
A - Chronologie	22
B - Hyperbolicité globale, fonction-temps .	27
III - ETUDE DES COURBES DE L'ESPACE-TEMPS	31
A - Convergence des suites de courbes	31
B - Longueur des courbes causales	36
C - La distance lorentzienne	44
IV - EXPANSION DES GEODESIQUES DE L'ESPACE-TEMPS	50
A - Cas des géodésiques temporelles	50
B - Cas des géodésiques nulles	56
V - LES ESPACES-TEMPS FAIBLEMENT GLOBALEMENT HYPERBOLIQUES	62
A - Introduction des espaces-temps faiblement globalement hyperboliques	62
B - Propriétés des espaces-temps faiblement globalement hyperboliques	73
VI - LE CUT-LOCUS DANS LES ESPACES-TEMPS FAIBLEMENT GLOBALEMENT HYPERBOLIQUES	80
A - Le cut-locus temporel	81
B - Le cut-locus nul	86
C - Le cut-locus causal	90
BIBLIOGRAPHIE	94

INTRODUCTION

Une des différences profondes entre la structure des espaces-temps (M,g) et celle des variétés riemanniennes est l'existence de courbes de longueur zéro sur M (correspondant aux trajectoires de photons). Ceci conduit à s'intéresser aux courbes de longueur maximum moyennant certaines hypothèses globales sur (M,g) (dont une est intuitivement : on ne peut pas revenir en arrière). Il existe un type d'espaces-temps qui possède une propriété bien agréable : étant donné deux points pouvant être reliés par une courbe causale (on ne s'intéresse qu'à ces courbes) il existe une géodésique de longueur maximale entre ces deux points. Une étude du cut-locus de tels espaces-temps a été faite assez récemment ([4]). Une remarque d'A. Lichnerowicz ([15]) permet d'envisager un type d'espaces-temps plus général, les espaces-temps faiblement globalement hyperboliques dans lesquels on s'intéresse aux composantes connexes de l'ensemble des courbes allant d'un point p à un point q.

On développe une étude de ces espaces-temps et on étudie les relations entre distance, compacité de l'ensemble des courbes et nombre de composantes connexes. Par analogie avec [4], on étudie ensuite le cut-locus sur ces espaces-temps.

Le parallèle géométrie riemannienne - géométrie lorentzienne est constant tout au long de ce travail, le cas des courbes nulles s'avérant le cas lorentzien typique, les résultats obtenus sont cependant souvent très proches des résultats riemanniens.

I - PRÉSENTATION DES ESPACES-TEMPS

La théorie moderne de la gravitation considère que l'ensemble des événements dans l'espace et dans le temps est décrit par une variété différentiable de classe C^∞, connexe et séparée.

Pour rendre compte de la nature différente de l'espace et du temps et être en accord avec les postulats de la relativité (en particulier le principe d'équivalence) on est amené à se placer dans le cadre de variétés différentiables munies d'une structure lorentzienne, orientables, qu'on appelle espaces-temps.

Dans ce qui suit, on expose les notions communes à la géométrie riemannienne et à la géométrie lorentzienne utilisées par la suite et on introduit les espaces-temps et leurs premières propriétés.

A - VARIETES LORENTZIENNES

Soit M une variété différentiable de classe C^∞, de dimension $d \geqslant 2$ connexe et séparée.

On note TM le fibré tangent à M, π la projection $TM \to M$ et T_pM l'espace tangent en un point p quelconque de M.

Un champ de vecteurs sur TM est la donnée d'une section de classe C^∞ de TM, et plus généralement un champ de (s,r)-tenseurs est la donnée d'une section de classe C^∞ de $\otimes^s T^*M \otimes^r TM$ où T^*M désigne le dual de TM.

On appelle courbe dans M toute application $c : [a,b] \subset \mathbb{R} \to M$ de classe C^1 par morceaux.

Une <u>structure lorentzienne</u> sur M est la donnée d'un champ de $(2,0)$-tenseurs g dit tenseur de métrique (ou plus simplement métrique) lorentzienne tel que :

(i) g est symétrique.

(ii) Pour tout p de M, g_p est une forme bilinéaire non dégénérée définie sur $T_pM \times T_pM$

(iii) Pour tout p de M, g_p est de signature $(+,-,-,\ldots,-)$ (1 signe positif, $(d-1)$ signes négatifs ; beaucoup d'auteurs adoptent la convention de signe équivalente $(-,+,\ldots,+)$).

Soient X et Y deux champs de vecteurs dans T_pM. Par définition, on appelle <u>produit scalaire</u> de X et Y le nombre $g_p(X,Y)$. X et Y sont dits orthogonaux en p si $g_p(X,Y) = 0$.

On peut étendre la notion de norme définie en géométrie riemannienne en posant : $\|X\|^2 = g_p(X,X)$ et en particulier ; on appelle vecteur unitaire tout vecteur X tel que : $g_p(X,X) = 1$ ou $g_p(X,X) = -1$.

Soient $(E_i)_{i=1}^d$ un repère orthonormé de T_pM, X et Y deux vecteurs de composantes $(X^i)_{i=1}^d$ et $(Y^j)_{j=1}^d$. On a :

$$g_p(X,Y) = X^1Y^1 - \sum_{i=2}^{d} X^iY^i.$$

Les composantes de la métrique g_p dans la base (E_i) sont :

$(g_{ij})_p = 0$ pour $i \neq j$

$(g_{11})_p = 1$

$(g_{ii})_p = -1$ pour $2 \leqslant i \leqslant d$.

Au voisinage de chaque point p de M, on peut toujours trouver une base de T_pM telle que g_p s'écrive $\mathrm{diag}(+1,-1,\ldots,-1)$ (matrice diagonale $d\times d$) ([7], p. 121).

Toute variété différentiable paracompacte admet une métrique riemannienne (produit scalaire symétrique défini positif), par contre il n'est pas toujours possible de définir une métrique lorentzienne, on peut cependant montrer que :

Toute variété différentiable paracompacte non compacte admet une métrique de Lorentz, et toute variété différentiable compacte admet une métrique de Lorentz si et seulement si sa caractéristique d'Euler est nulle ([7], p. 101).

On suppose dans tout ce qui suit que les variétés différentiables utilisées admettent une métrique de Lorentz.

<u>Définition 1.1.</u> : Le couple (M,g) formé de la variété différentiable M de classe C^∞, connexe, séparée, de dimension $d \geqslant 2$, munie d'une métrique de Lorentz g est appelée <u>variété de Lorentz</u>.

B - CONNEXION, COURBURE, GEODESIQUES

Une variété de Lorentz (M,g) possède une connexion affine unique D, sans torsion, compatible avec la métrique g.

Cela signifie que si X et Y sont deux champs de vecteurs :

(i) $D_X Y - D_Y X = [X,Y]$ où $[\cdot,\cdot]$ désigne le crochet de Lie des champs de vecteurs et où $D_X Y$ est la dérivée covariante du vecteur Y dans la direction X relativement à la connexion D.

(ii) $X\, g(Y,Z) = g(D_X Y,Z)+g(Y,D_X Z)$ où X, Y et Z sont des champs de vecteurs.

Cette connexion D est définie pour les variétés lorentziennes de la même manière que l'on définit la connexion de Levi-Civita pour les variétés riemanniennes ([7], p. 228 ou [5], Appendice A).

Si $(E_i)_{i=1}^{d}$ est une base de T_pM, on appelle coefficients de la connexion D les nombres $\Gamma^k{}_{ij}$ vérifiant :

$$D_{E_j} E_i = \sum_k \Gamma^k{}_{ij}\, E_k .$$

Soit $\chi(p)$ l'ensemble des champs de vecteurs en $p \in M$. On définit :

$$R(X,Y) : \chi(p)\times\chi(p) \to \chi(p) \quad \text{par :}$$

$$R(X,Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z \quad \text{où} \quad Z \in \chi(p).$$

C'est la courbure R de D.

(On rencontre aussi la convention de signe inverse :

$$R(X,Y)Z = D_{[X,Y]} Z - D_X D_Y Z + D_Y D_X Z \;)$$

Le tenseur de courbure est un champ de $(1,3)$-tenseur noté aussi R possèdant les propriétés suivantes :

$$g(R(X,Y)Z,T) = -g(R(X,Y)T,Z)$$

$$g(R(X,Y)Z,T) = g(R(Z,T)X,Y).$$

En désignant par $R^a{}_{bcd}$ les composantes du tenseur de courbure dans une carte locale (U,φ) de M, et si on pose :

$$R_{abcd} = \sum_{\ell} g_{a\ell} R^{\ell}{}_{bcd}$$

les propriétés précédentes s'écrivent :

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab}$$

On appelle champ de vecteurs X le long d'une courbe $c : [a,b] \to M$ toute application de classe C^∞ $X : [a,b] \to TM$ telle que :

$$X(t) \in T_{c(t)}M, \text{ pour tout } t \in [a,b].$$

Etant donné (M,g) variété lorentzienne munie de sa connexion affine D, on dit que le champ de vecteur X est transporté parallèlement le long de c si : $D_{\dot{c}}X(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$. ($\dot{c}(t)$ désigne le vecteur tangent à $c(t)$). Il est à noter que le transport par parallélisme (ou parallèle) conserve le produit scalaire.

<u>*Définition 1.2.*</u> : *Une* <u>*géodésique*</u> $c :]a,b[\to M$ *est une courbe de classe* C^1 *telle que le vecteur tangent* $\dot{c}$ *se transporte parallèlement le long de* c, *ce qui signifie que* $D_{\dot{c}}\dot{c} = 0$.

Soient $(U,(x^1,\ldots,x^d))$ un système de coordonnées locales sur M et $\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_d}\right)$ la base naturelle par rapport à ces coordonnées.

L'équation $D_{\dot{c}}\dot{c} = 0$ s'écrit :

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{d} \Gamma^k{}_{ij} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \quad \text{où} \quad x^1(t),\ldots,x^d(t) \quad \text{désignent}$$

les coordonnées de $c(t)$.

Le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle permet de montrer que :

(i) Pour tout point p de M et tout vecteur X dans T_pM, il existe une géodésique c_X et une seule définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$ contenant 0, non prolongeable à un intervalle plus grand :

$$c_X :]a,b[\to M \text{ vérifiant } c_X(0) = p \text{ et } \dot{c}_X(0) = X.$$

(ii) Il existe un voisinage V de X dans TM et un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $c_Y(t)$ existe pour tout $(Y,t) \in V\times]-\varepsilon,\varepsilon[$ et soit de classe C^∞ en (Y,t).

En particulier, les géodésiques sont des courbes C^∞.

Le problème se pose de savoir si l'intervalle de définition d'une géodésique peut être $\mathbb{R}$ tout entier. En géométrie riemannienne, la réponse est fournie par le théorème de Hopf-Rinow :

Soit (V,h) une variété riemannienne. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout X de TV, c_X est définie sur tout $\mathbb{R}$.

(2) Il existe $p \in V$ tel que pour tout X de T_pV, c_X est définie sur tout $\mathbb{R}$.

(3) (V,h) est un espace métrique complet pour la distance associée à h.

(4) Toute partie bornée de (V,h) est relativement compacte. ([6], p. 11).

Si V vérifie l'une quelconque de ces assertions, V est dite variété riemannienne complète.

Le théorème de Hopf-Rinow entraîne alors que :

Si V est une variété riemannienne complète et si p et q sont deux points de V, il existe un segment de géodésique allant de p à q de longueur minimale.

En géométrie lorentzienne, les choses se passent de manière tout à fait différente (voir en particulier chapitre V).

Comme en géométrie riemannienne, on définit l'application exponentielle qui jouit des mêmes propriétés :

Définition 1.3. : *L'application qui à* X *de* T_pM *associe le point* $c_X(1)$ *lorsqu'il existe est notée :* $X \mapsto \exp_p X$ *et s'appelle application exponentielle.*

Si $\exp_p sX = c_X(s)$ désigne la géodésique issue de p dans la direction X de T_pM, on a :

$$\left(\frac{d}{ds} \exp_p sX\right)_{s=o} = X$$

En général, l'application $\exp_p$ n'est pas définie partout sur T_pM, mais seulement sur un ouvert U de T_pM, voisinage de zéro. On a $U = T_pM$ si (M,g) est une variété de Lorentz "complète" au sens suivant :

Définition 1.4. : *Une géodésique* $c : t \in]a,b[\to c(t) \in M$ *est dite complète si elle peut être définie pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

La variété de Lorentz (M,g) sera dite géodésiquement complète (en abrégé g-complète) si toutes les géodésiques sur M sont complètes. Dans le cas où il existe une géodésique incomplète, on dit que la variété de Lorentz (M,g) est singulière.

Que (M,g) soit g-complète ou non, l'application $\exp_p$ est de rang d au point p. Le théorème des fonctions implicites permet de déduire l'existence d'un voisinage V_0 de l'origine de T_pM, d'un voisinage ouvert $U(p)$ de p dans M tels que l'application $\exp_p$ soit un difféomorphisme de V_0 sur $U(p)$.

Le voisinage $U(p)$ s'appelle voisinage normal en p.

On dit que ce voisinage est convexe si tout point q de $U(p)$ peut être relié à tout point r de $U(p)$ par une géodésique unique issue de q et contenue dans $U(p)$.

Le comportement des géodésiques dans un voisinage normal convexe est tout à fait différent de ce qu'il est hors d'un tel voisinage.

Etant donné $p \in M$, il existe un voisinage $U(p)$ de p ouvert et convexe qui est voisinage normal de chacun de ses points ([11], p. 1114).

Par la suite, un voisinage normal convexe ouvert sera toujours considéré comme voisinage normal convexe de chacun de ses points.

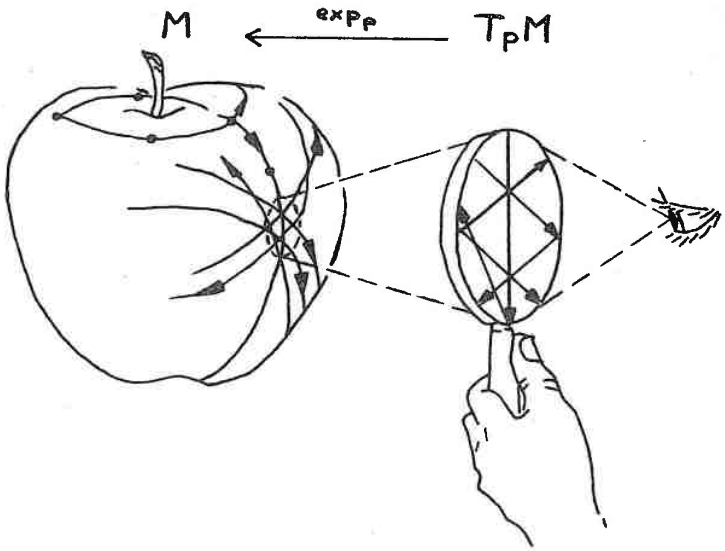


Figure 1 : (Dessin tiré de [12])

Soit $(E_i)_{i=1}^d$ une base de T_pM et $a = (a_1,\ldots,a_d) \in \mathbb{R}^d$. Pour $\|a\|_{\mathbb{R}^d}$ suffisamment petit, l'application :

$$a_1E_1+\ldots+a_dE_d \to \exp_p(a_1E_1+\ldots+a_dE_d)$$

est un difféomorphisme, ceci permet d'associer de manière canonique à tout point d'un voisinage normal $U(p)$ de p un d-uplet $(a_1,\ldots,a_d)$ appelé système de coordonnées normales pour $U(p)$.

C - ESPACES-TEMPS

La métrique de Lorentz g n'est pas définie positive, elle peut en particulier s'annuler pour certains champs de vecteurs non nuls et prendre aussi des valeurs négatives. On partage donc les champs de vecteurs en trois classes :

Définition 1.5. : *Un champ de vecteurs X sur T_pM est dit champ de vecteurs temporel (respectivement nul, spatial, causal ou non-spatial) si : $g_p(X,X) > 0$ (respectivement $g_p(X,X) = 0$, $g_p(X,X) < 0$, $g_p(X,X) \geqslant 0$).*

En particulier, l'équation $g_p(X,X) = 0$ définit sur T_pM un cône à deux nappes de sommet p appelé cône isotrope (ou cône de lumière), noté C_p.

Définition 1.6. : *Une variété de Lorentz (M,g) orientable est dite orientée dans le temps si elle admet un champ de vecteurs temporel régulier (i.e. ne s'annulant jamais). ([11], p. 1109, [7] p. 101).*

Ceci nous permet de distinguer en tout point p de M les deux nappes du cône isotrope C_p en nappe C_p^+ dite nappe future et nappe C_p^- dite nappe passée.

Un vecteur causal est orienté vers le futur s'il est dans C_p^+, orienté vers le passé s'il est dans C_p^-.

Si X et Y sont deux vecteurs temporels orientés vers le futur dans T_pM, si a et b sont deux nombres réels positifs non tous deux nuls, $aX+bY$ est un vecteur temporel dirigé vers le futur (convexité de l'ensemble des vecteurs temporels orientés vers le futur, il en est de même pour deux vecteurs orientés vers le passé).

Soient X et Y dans T_pM, non spatiaux.

La métrique de Lorentz g vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz renversée :

$$|g(X,Y)| \geqslant \|X\| \, \|Y\|$$

L'égalité a lieu si et seulement si X et Y sont proportionnels. On en déduit que :

(i) un vecteur temporel X et un vecteur causal Y ne peuvent jamais être orthogonaux.

(ii) deux vecteurs nuls sont orthogonaux si et seulement si ils sont proportionnels.

(iii) un vecteur $X \in T_pM$ est temporel si et seulement si le sous-espace $X^{\perp} = \{Y \in T_pM | g(X,Y) = 0\}$ de dimension $(d-1)$ dans T_pM est spatial (i.e. $\forall Y \in X^{\perp}, g(Y,Y) < 0$) ([10], p. 20).

Nous sommes maintenant en mesure de donner la :

Définition 1.7. : *On appelle espace-temps toute variété de Lorentz (M,g) orientable et orientée dans le temps.*

D'après 1.4., si c est une géodésique, le vecteur tangent $\dot{c}$ est transporté par parallélisme le long de c. En tenant compte des propriétés du transport parallèle (conservation de la norme), ceci entraîne que $\dot{c}$ reste de même genre le long de c, ce qui permet de distinguer trois sortes de géodésiques :

Les géodésiques temporelles, nulles et spatiales qui sont respectivement les géodésiques c telles que :

$$g(\dot{c},\dot{c}) > 0$$

$$g(\dot{c},\dot{c}) = 0$$

$$g(\dot{c},\dot{c}) < 0$$

On désigne sous le nom de géodésique causale (ou non spatiale) toute géodésique qui est soit temporelle, soit nulle.

La trajectoire d'une particule soumise aux seules forces de gravitation est une géodésique temporelle, celle d'un photon est une géodésique nulle.

Une géodésique causale c est dite dirigée vers le futur (respectivement vers le passé) si $\dot{c}$ est orienté vers le futur (resp. vers le passé).

Si $c : t \in [a,b] \to c(t) \in M$ est une courbe de classe C^1, on fait les mêmes distinctions, plus précisément :

c est une courbe <u>temporelle</u> (respectivement <u>nulle</u>, <u>causale</u>) <u>dirigée vers le futur</u> si $\dot{c}(t)$ est temporel (respectivement nul, causal) orienté vers le futur, pour tout $t \in [a,b]$.

On définit de même des courbes temporelles, nulles, causales dirigées vers le passé.

c est une <u>courbe spatiale</u> si $\dot{c}(t)$ est spatial, pour tout $t \in [a,b]$.

Si c n'est définie que de classe C^1 par morceaux, on convient que les deux demi-vecteurs tangents aux points où il n'y a pas différentiabilité sont dans le même demi-cône isotrope (i.e. ont même orientation).

Les différences de genre entre les géodésiques permettent de distinguer les complétudes suivantes :

<u>Définition 1.8.</u> : Un espace-temps (M,g) est dit <u>temporellement</u> (respectivement <u>nullement</u>, <u>spatialement</u>) <u>géodésiquement complet</u> si toutes les géodésiques temporelles (respectivement nulles, spatiales) sont complètes.
On dira en abrégé t-g-complet, n-g-complet, s-g-complet.

En fait, ces complétudes sont indépendantes, il existe des espaces-temps qui sont :

t-g-complets	mais	n et s-g-incomplets
t et n-g-complets	mais	s-g-incomplets
n-g-complets	mais	t et s-g-incomplets
s-g-complets	mais	t et n-g-incomplets
s et n-g-complets	mais	t-g-incomplets

(KUNDT, W, 1963, Z. f. Phys., <u>172</u>, 488 ; GEROCH, R.P., 1968, Ann. Phys., <u>48</u>, 526).

L'incomplétude des géodésiques temporelles peut avoir la signification physique suivante : il existe des trajectoires de particules qui s'arrêtent avant ou après un intervalle de temps fini.

D - EXEMPLES D'ESPACES-TEMPS

On présente ici trois espaces-temps qui ont la particularité d'être des solutions exactes des équations d'Einstein du vide. On entend par solution exacte tout espace-temps (de dimension 4) vérifiant :

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab}R + \lambda g_{ab} = T_{ab}$$

où R_{ab} est le tenseur de Ricci défini par $R_{ab} = \sum_c R^c{}_{acb}$, R est la courbure scalaire définie par $R = \sum_{a,b} g^{ab}R_{ab}$, λ est la constante cosmologique introduite par Einstein, T_{ab} est le tenseur impulsion-énergie, il correspond à la structure physique dans laquelle on se place. ($T = 0$ pour le vide).

1.- L'espace-temps de Minkowski

C'est à la fois l'espace-temps de la relativité restreinte, c'est-à-dire l'espace-temps plat solution des équations d'Einstein du vide pur ($T_{ab} = 0$) à constante cosmologique nulle, et celui qui décrit la géométrie induite sur l'espace tangent en tout point d'une variété lorentzienne quelconque ([7], p. 121).

On peut noter que les seules solutions exactes aux équations d'Einstein décrivant un champ de gravitation créé par un corps isolé qui sont physiquement satisfaisantes doivent être asymptotiquement plates et ainsi se comporter au loin du corps comme l'espace-temps de Minkowski (espaces-temps asymptotiquement simples).

Cet espace-temps est la variété $\mathbb{R}^n$ munie de la métrique :

$$ds^2 = dx_1^2 - \sum_{i=2}^{n} dx_i^2.$$

C'est un espace-temps plat ou de courbure nulle, les géodésiques sont des droites $x_i = a_i t + b_i$, t étant un paramètre affine, a_i et b_i des constantes, $i = 1,\ldots,n$. L'orientation dans le temps est donnée par le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial x_1}$; c'est un espace-temps qui est à la fois t, n et s-g complet.

Espace-temps de Minkowski en dimension 3

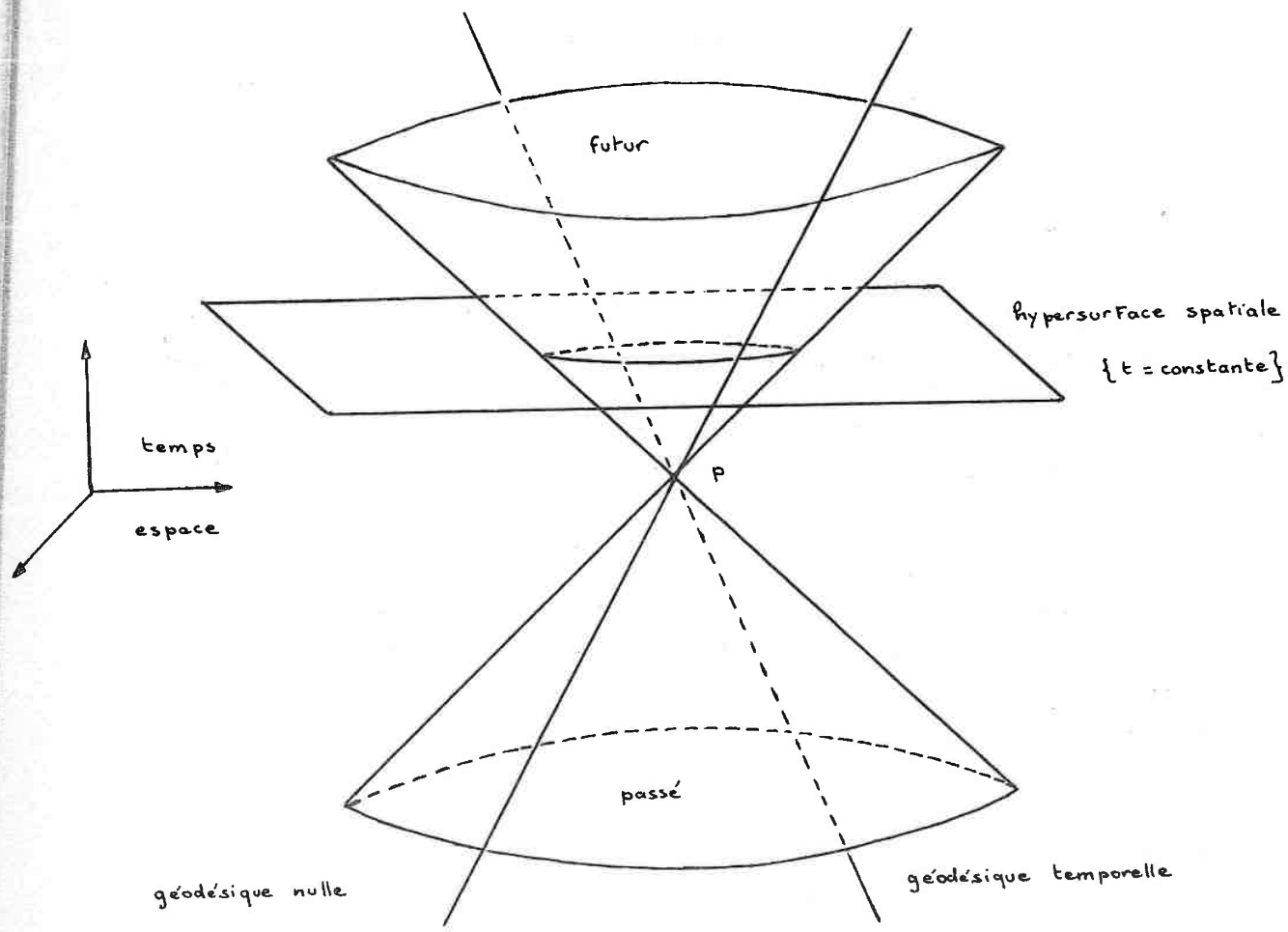


Figure 2

2.- Les espaces-temps De Sitter et Anti-de-Sitter

On note $\mathbb{R}^n_s$ l'espace pseudo-euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{s} dx_i^2 - \sum_{i=s+1}^{n} dx_i^2$$

En particulier ; $\mathbb{R}^n_1$ est l'espace-temps de Minkowski de dimension n.

Soit r un réel > 0 ; on pose :

$$S_1^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} / x_1^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n+1}^2 = -r^2\}$$

$$H_1^n = \{x \in \mathbb{R}_2^{n+1} / x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \ldots - x_{n+1}^2 = r^2\}$$

Topologiquement, S_1^n est $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ et H_1^n est $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ (Wolf, Spaces of constant curvature, Berkeley, 1972, p. 68).

La métrique définie sur $\mathbb{R}_1^{n+1}$ (respectivement sur $\mathbb{R}_2^{n+1}$) induit une métrique de Lorentz de courbure sectionnelle constante $k = \frac{1}{r^2}$ (resp. $k = -\frac{1}{r^2}$) sur S_1^n (resp. sur H_1^n).

L'espace-temps S_1^n muni de la métrique induite est appelé <u>espace-temps De-Sitter</u>, c'est l'analogue lorentzien de la sphère riemannienne de rayon r.

H_1^n contient des courbes temporelles fermées (en particulier, $c(t) = (r \cos t, r \sin t, 0, \ldots, 0)$) ce qui est exclu plus loin (cf. chapitre II) ; c'est pourquoi on introduit $\tilde{H}_1^n$ qui est le revêtement universel de H_1^n, qui est topologiquement $\mathbb{R}^n$ et qui, muni de la métrique induite est encore un espace-temps ([5], chap. 2) qu'on appelle <u>espace-temps Anti-De-Sitter</u>, c'est l'analogue lorentzien de l'espace riemannien hyperbolique de courbure $-\frac{1}{r^2}$.

Les espaces-temps de dimension n à courbure sectionnelle constante sont localement caractérisés par :

$$R_{abcd} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad ([13], \text{ p. 75 et p. 68})$$

ceci entraîne en dimension 4 que :

$$R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} = 0$$

Ainsi, on peut considérer S_1^n et $\tilde{H}_1^n$ comme des solutions exactes des équations d'Einstein du vide pur pour lesquelles la constante cosmologique λ est $\frac{R}{4}$.

Les espaces-temps De-Sitter et Anti-De-Sitter sont t, n et s-g-complets

En dimension 2, l'espace-temps Anti-de-Sitter peut se décrire par la variété $M =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times \mathbb{R}$ muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 x} (dt^2 - dx^2).$$

Les équations de mouvement dans cet espace-temps dérivent d'un Lagrangien de la forme :

$$L(t,x,\dot{t},\dot{x}) = \frac{1}{\cos^2 x} (\dot{t}^2 - \dot{x}^2)$$

où le point désigne la dérivation par rapport au paramètre affine τ (temps propre).

On en déduit les deux intégrales premières suivantes :

$$(L_1) \quad \frac{1}{\cos^2 x} (\dot{t}^2 - \dot{x}^2) = \mu^2 \quad \text{(conservation de la masse).}$$

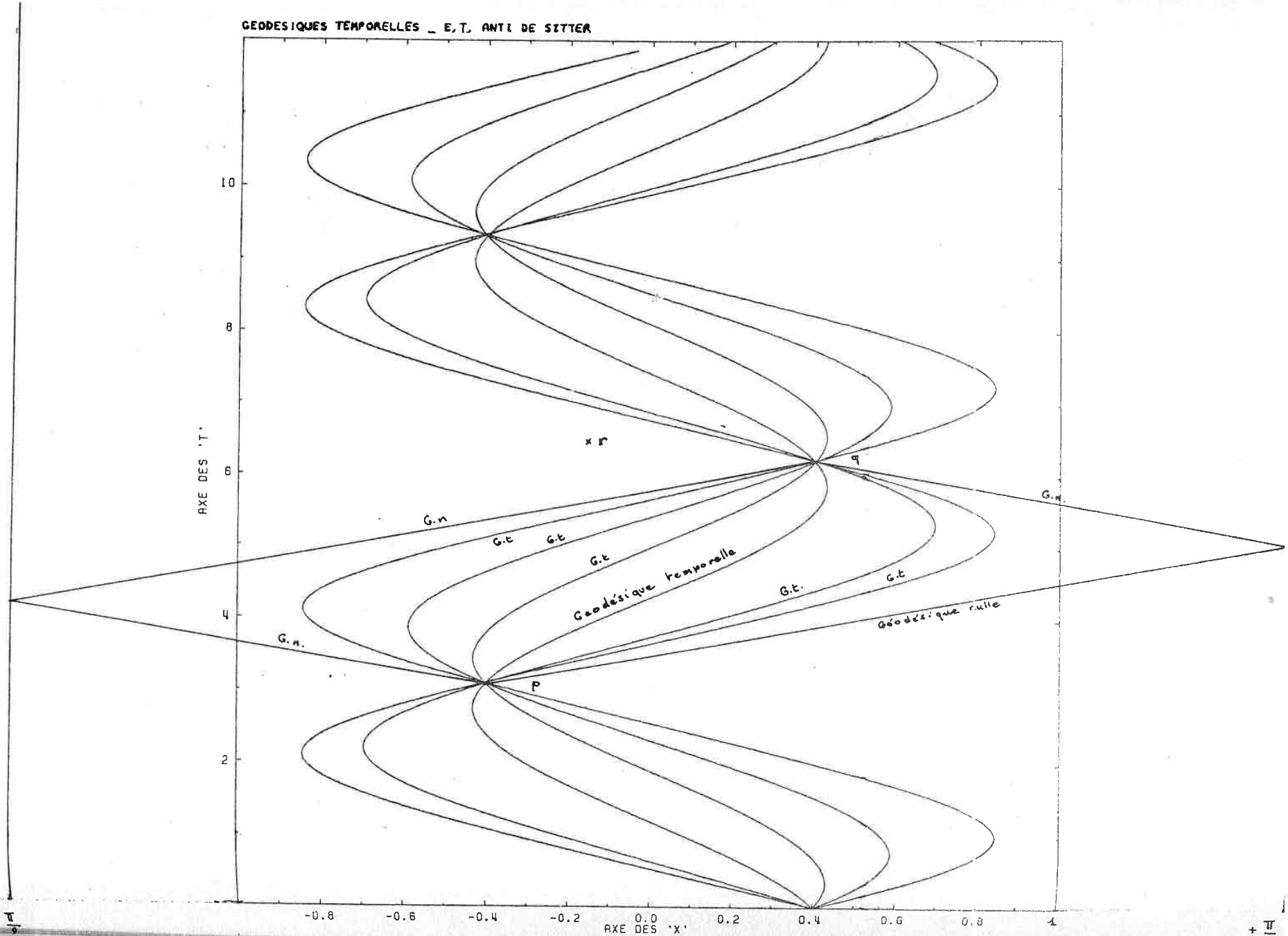
Il est toujours possible de normaliser le paramètre τ de sorte que $\mu^2 = 1$ (respectivement 0, -1) pour les géodésiques temporelles (respectivement nulles, spatiales).

$$(L_2) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = E \quad \text{(conservation de l'énergie à l'infini)}$$

ce qui donne $\dot{t} = E \cos^2 x$. (cf. [12], p. 344).

Les équations (L_1) et (L_2) nous ont permis de tracer les géodésiques temporelles de la figure 3 à l'aide d'un ordinateur.

L'espace-temps Anti-de-Sitter possède une propriété remarquable : Toutes les géodésiques temporelles issues d'un point p se recoupent en un même point q, et ainsi de suite, le point q étant déterminé par l'intersection de deux géodésiques nulles comme indiqué. On peut noter aussi que bien qu'il puisse exister une courbe temporelle allant de p à r, il n'existe aucune géodésique temporelle entre ces deux points.
(Pour une explication de l'expansion des géodésiques dans l'espace-temps anti-de-Sitter, voir chapitre IV, 4.4.3).


GEODESIQUES TEMPORELLES _ E.T. ANTI DE SITTER
AXE DES 'T'
AXE DES 'X'
10
8
6
4
2
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
p
q
r
G.n
G.t
Géodésique temporelle
Géodésique nulle

E - DEUX THEOREMES

On va tout d'abord démontrer l'analogue lorentzien du lemme de Gauss ([8], p. 103).

Théorème 1.9. : *Soit* (M,g) *un espace-temps quelconque. Soit* p *un point quelconque de* M *et* U *un voisinage normal convexe en* p. *On pose pour tout* q *dans* U : $k(q) = g_p(\exp_p^{-1} q, \exp_p^{-1} q)$. *Alors, la déodésique temporelle issue de* p *et passant par* q *est orthogonale aux hypersurfaces* $\{k(q) = \text{constante positive}\}$.

Démonstration :

On définit une surface en posant :

$$\alpha : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \exp_p(sX(t))$$

où α est de classe C^∞, et $X(t)$ un champ de vecteurs temporels unitaire.

$\gamma(s) = \exp_p(sX(t_0))$ est la géodésique temporelle issue de p dans la direction $X(t_0)$ où t_0 est constant.

On a : $\left(\frac{d}{ds}\gamma(s)\right)_{s=o} = \dot{\gamma}(0) = X(t_0)$ et en particulier : $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$.

$\lambda(t) = \exp_p(s_0 X(t))$ est une courbe située sur l'hypersurface

$$\{k(q) = g_p(\exp_p^{-1}(\exp_p s_0 X(t)), \exp_p^{-1}(\exp_p s_0 X(t)) = s_0^2\}.$$

Il faut montrer que : $g_p(\dot{\gamma},\dot{\lambda}) = 0$.

On pose $S = \dot{\gamma}$ et $T = \dot{\lambda}$ (pour l'écriture).

On a : $Sg(S,T) = g(D_S S,T)+g(S,D_S T)$

$$= g(S,D_S T)$$

$$= g(S,D_T S) = \frac{1}{2} Tg(S,S).$$

La première égalité résulte du fait que γ est une géodésique ; la seconde du fait que S et T commutent (i.e. $[S,T] = 0$).

$g(S,S)$ étant constant, il vient que : $Sg(S,T) = 0$ et donc que $g(S,T)$ est constant par rapport à S.

Pour $s = 0$, on a : $\alpha(0,t) = p$ ce qui donne que $T = 0$ pour $s = 0$. Ceci prouve le résultat.

<u>*Remarque 1.10.*</u> : *([9], p. 13) Soit $p \in M$ et U un voisinage normal convexe en p.*
Les hypersurfaces $\{x \in U / k(x) = \text{constante } K\}$ (sont de classe C^∞ dans U sauf pour $x = p$) sont spatiales, nulles ou temporelles si la constante K est respectivement positive, nulle ou négative.

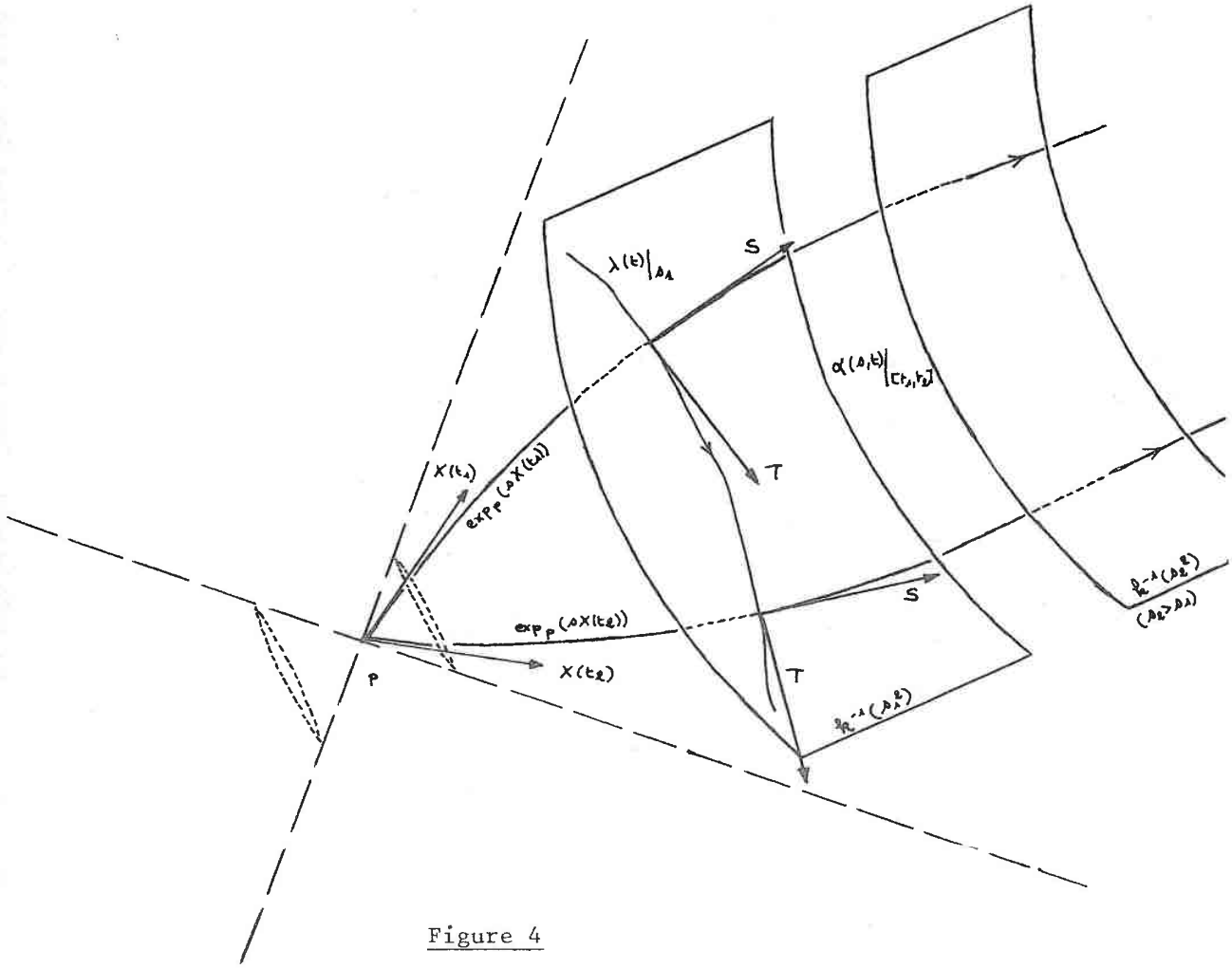


Figure 4

Théorème 1.11. : ([8], p. 103)

Soient (M,g) *un espace-temps quelconque,* p *un point de* M *et* U *un voisinage normal convexe en* p. *Les points pouvant être reliés à* p *par une courbe temporelle (respectivement causale) sont de la forme* $\exp_p X$, *où* $X \in T_pM$ *et vérifie :* $g_p(X,X) > 0$ *(respectivement* $g_p(X,X) \geq 0$*).*

Démonstration :

1) Cas temporel

Soit $\overset{\circ}{C}_p$ l'intérieur du cône isotrope en p et $c : t \in [a,b] \to c(t) \in M$ une courbe temporelle allant de p à q dans U.

On pose : $\bar{c} : t \in [a,b] \to \bar{c}(t) = \exp_p^{-1}(c(t))$, ce qui définit un champ de vecteurs sur T_pM. En identifiant l'espace tangent à T_pM avec T_pM lui-même, on obtient que :

$$\dot{c}(a) = \dot{\bar{c}}(a),$$

ce qui prouve que $\bar{c}(t)$ définit une courbe qui part dans $\overset{\circ}{C}_p$, puisque $\dot{\bar{c}}(a)$ est temporel.

D'après 1.9., $\exp_p(\overset{\circ}{C}_p)$ est la partie de U sur laquelle la fonction k est positive et dans laquelle les hypersurfaces $\{k = \text{constante positive}\}$ sont spatiales.

La fonction k ne peut être que monotone croissante le long de c, s'il n'en était pas ainsi, il existerait au moins un point $m = c(t_0)$ pour lequel :

- si c est différentiable en t_0, le vecteur tangent $\dot{c}(t_0)$ est spatial.
- si c n'est pas différentiable en m, les deux demi-vecteurs tangents sont dans des demi-cônes isotropes différents (ce qui est contraire à la convention qu'on a pris), on a une contradiction dans les deux cas.

On en déduit que $k(q) = g_p(\exp_p^{-1}q, \exp_p^{-1}q) > 0$, ce qui prouve que $q \in \exp_p(\overset{\circ}{C}_p)$.

2) Cas causal

Pour démontrer le théorème dans le cas causal, il est nécessaire de déformer la courbe causale c afin d'en faire une courbe temporelle.

Soit Y un champ de vecteur sur T_pM tel que le champ de vecteurs induit par $\exp_{p*}(Y)$ soit partout temporel dans U et tel que :

$$g(Y,\dot{\bar{c}}) > 0 \quad \text{au point } p.$$

Soient $\varepsilon \geqslant 0$ et $\beta(t,\varepsilon)$ la courbe sur T_pM telle que :

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\bar{c}}(t)+\varepsilon Y\Big|_{\beta(t,\varepsilon)}$$

C'est une courbe temporelle car $g(\dot{\beta},\dot{\beta}) > 0$, pour tout t.

En faisant tendre ε vers 0 et en remarquant que β dépend de façon différentiable de t et de ε, on obtient que :

$$\exp_p(\beta(t,0)) = c(t) \subset \overline{\exp_p(\mathring{C}_p)}$$

et puisque $\exp_p$ est un difféomorphisme, on a :

$$\overline{\exp_p \mathring{C}_p} = \exp_p \bar{\mathring{C}}_p = \exp_p C_p$$

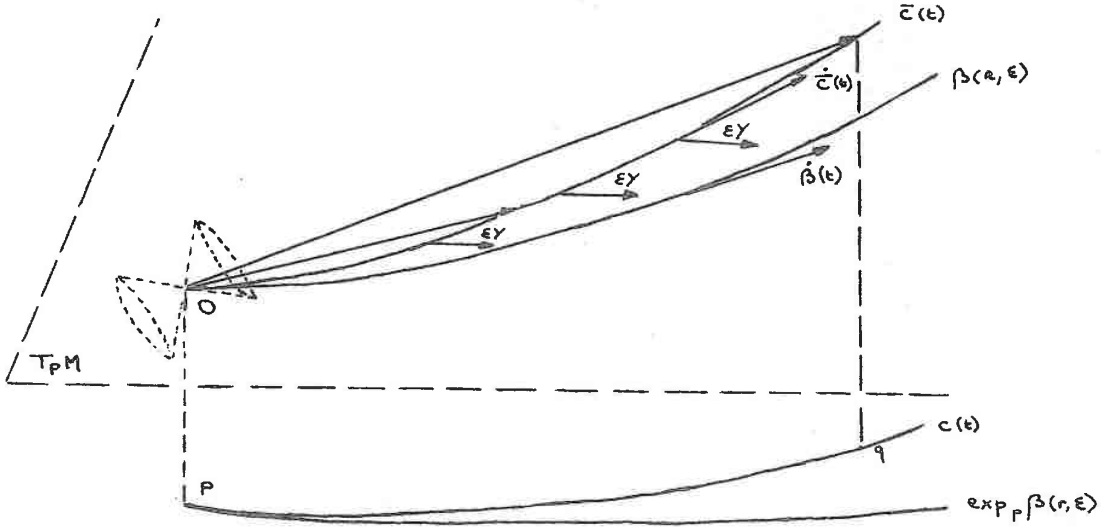


Figure 5

<u>*Corollaire 1.12.*</u> : *Sous les mêmes hypothèses que 1.11, si* $q \in U$ *peut être relié à* p *par une courbe causale mais pas par une courbe temporelle, la seule courbe causale allant de* p *à* q *est une géodésique nulle située dans* U.
Le point q *est de la forme* $\exp_p X$ *où* $g_p(X,X) = 0$.

Ceci entraîne que les seuls points q pouvant être reliés à p par une géodésique nulle dans U sont de cette forme.

Ces points sont situés dans l'image du bord du cône C_p par l'application exponentielle.

II - STRUCTURE CAUSALE DES ESPACES-TEMPS

Un des postulats de la théorie relativiste de la gravitation stipule que toute particule se déplace avec une vitesse spatiale inférieure à celle de la lumière, le cas limite étant obtenu pour les photons. Ceci se traduit mathématiquement par le fait que la trajectoire d'une particule appelée aussi ligne d'univers se situe à l'intérieur du cône isotrope et est donc temporelle, que la trajectoire des photons se représente par des courbes nulles.

On introduit dans ce chapitre les notions relatives à la structure de l'espace-temps qui permettent de traduire les conceptions habituelles de l'univers dans le formalisme mathématique utilisé en théorie relativiste de la gravitation.

Un champ de vecteur causal le long d'une courbe causale ne peut pas passer du demi-cône du futur au demi-cône du passé de manière continue, il s'ensuit qu'une courbe temporelle, nulle ou causale est soit dirigée vers le futur, soit dirigée vers le passé.

On définit les relations $\ll$ et $<$ qui correspondent mathématiquement à "qui peut communiquer avec qui ?" ; la chronologie et la causalité qui interdisent les courbes causales fermées, ce qui semble être une hypothèse physique "raisonnable".

Convention : Sauf mention expresse du contraire dans toute la suite de ce travail, (M,g) désigne un espace-temps quelconque, p un point quelconque de M, et toutes les courbes causales sont dirigées vers le futur.

A - CHRONOLOGIE, CAUSALITE

Soient p et q deux points quelconques de M, on note :

- $p \ll q$ s'il existe une courbe temporelle allant de p à q.
- $p < q$ s'il existe une courbe causale allant de p à q.

Ces deux relations permettent de définir le futur chronologique $I^+(p)$ et le futur causal $J^+(p)$ du point p par :

$$I^+(p) = \{q \in M / p \ll q\}$$

$$J^+(p) = \{q \in M / p < q\},$$

et de manière analogue le <u>passé chronologique</u> $I^-(p)$ et le <u>passé causal</u> $J^-(p)$ par :

$$I^-(p) = \{q \in M / q \ll p\} \ ; \ J^-(p) = \{q \in M / q < p\}.$$

Les relations $\ll$ et $<$ possèdent les propriétés suivantes :

<u>Lemme 2.1.</u> : 1) $p \ll q \Rightarrow p < q$

2) $\ll$ et $<$ sont des relations transitives.

<u>Démonstration</u> :

1) Se déduit immédiatement de la définition.

2) Soient p, q et r trois points de M vérifiant : $p \ll q$ et $q \ll r$.
Soient $c_1 : [a,b] \to M$ une courbe temporelle où $c_1(a) = p$ et $c_1(b) = q$;
$c_2 : [b,d] \to M$ une courbe temporelle où $c_2(b) = q$ et $c_2(d) = r$.

(On peut toujours définir c_2 sur $[b,d]$ quitte à faire une translation convenable sur le paramètre).

Considérons la courbe $c : [a,d] \to M$ définie par :

$$\begin{cases} c(t) = c_1(t) & \text{si } t \in [a,b] \\ c(t) = c_2(t) & \text{si } t \in [b,d]. \end{cases}$$

Pour $t = b$ on peut avoir perte de différentiabilité pour c mais : $\dot{c}(b^-) = \dot{c}_1(b^-)$ et $\dot{c}(b^+) = \dot{c}_2(b^+)$ sont les deux demi-vecteurs tangents en b et sont tous deux à l'intérieur du même demi-cône futur car les deux courbes c_1 et c_2 sont dirigées vers le futur.

Il s'ensuit que c est une courbe temporelle de p à r, ce qui prouve la transitivité de la relation $\ll$. On en déduit celle de la relation $<$ en remplaçant ci-dessus temporel par causal et en notant qu'en b, les deux demi-vecteurs tangents peuvent être situés sur le bord du cône futur.

Dans certains cas, on peut aussi avoir : $p < q$, $q < r$ et $p \ll r$, plus précisément :

<u>*Lemme 2.2.*</u> : *(cf. [9], p. 13) Soit U un voisinage normal convexe en un point p de M, et soient q,r deux points de U tels que : l'unique segment de géodésique allant de p à q (respectivement de q à r) dans U est un segment de géodésique nulle ν_1 (respectivement ν_2).*
Si les directions des vecteurs tangents $\dot{\nu}_1$ et $\dot{\nu}_2$ sont différentes du point q, l'unique segment de géodésique reliant p à r dans U est un segment de géodésique temporelle.

<u>Démonstration</u> :

Soit $x \in \beta = \nu_1 \cup \nu_2$, $(x \neq p)$, et considérons la fonction k introduite en 1.9. et définie par :

$$k(x) = g(\exp_p^{-1}x, \exp_p^{-1}x)$$

le cône isotrope C_p définit une hypersurface nulle $\{x \in U, x \neq p / k(x) = 0\}$ dans U que le segment de géodésique nulle ν_2 ne peut pas traverser en q pour sortir de $\exp_p C_p$ car $<$ est une relation transitive (2.1.).

Puisque les directions de $\dot{\nu}_1$ et $\dot{\nu}_2$ sont différentes en q, ceci prouve que ν_2 "rentre strictement" à l'intérieur de $\exp_p(C_p) \cap U$.

Dans ce cas, si x est dans le futur de q sur β, on a : $k(x) > 0$, ce qui est vrai en particulier si $x = r$ et 1.11. entraîne qu'il existe une unique géodésique temporelle dans U reliant p à r.

Dans l'espace-temps de Minkowski, la fermeture de $I^+(p)$ est $J^+(p)$, mais $J^+(p)$ n'est pas forcément fermé dans un espace-temps quelconque (Il suffit d'enlever un point à l'espace-temps de Minkowski pour le voir).

Cependant :

<u>*Lemme 2.3.*</u> : *$I^+(p)$ et $I^-(p)$ sont des ouverts de M.*

<u>Démonstration</u> : On fait la démonstration pour $I^+(p)$.

Soient $r \in I^+(p)$ et $c : [a,b] \to M$ une courbe temporelle allant de p à r.

Soit $q \in c([a,b]) \cap I^-(r)$ tel que : $r \in U$ où U est un voisinage normal convexe ouvert en q.

Dans ce cas, $J = \exp_q^{-1} U \cap \overset{\circ}{C}{}_q^+$ (où $\overset{\circ}{C}{}_q^+$ désigne l'intérieur du cône futur dans T_qM) est ouvert dans T_qM et contient $\exp_q^{-1} r$.

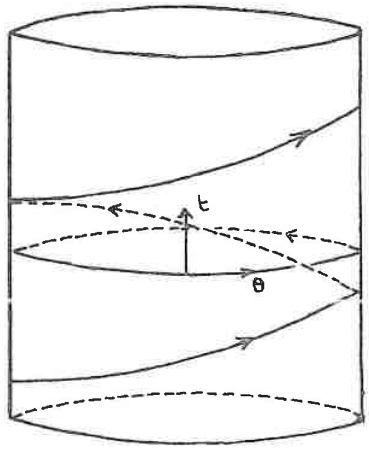
Alors, pour tout x dans $\exp_q J$ on a : $x \in I^+(q)$, ce qui prouve par transitivité de la relation $\ll$ que $\exp_q J \subset I^+(p)$ qui est donc ouvert.

<u>Définition 2.4.</u> : Un espace-temps (M,g) est dit <u>chronologique</u> (respectivement <u>causal</u>) si pour tout point p de M : $p \notin I^+(p)$ (respectivement $p \notin J^+(p)$).

Il revient à dire que (M,g) est chronologique (respectivement causal) s'il ne contient pas de courbes temporelles fermées (respectivement courbes causales fermées).

Il résulte immédiatement de la définition qu'un espace-temps causal est chronologique.

Les espaces-temps de Minkowski, de De-Sitter et Anti-De-Sitter sont causals (on dira causals et non causaux !) ; mais il existe des exemples d'espaces-temps qui ne sont pas chronologiques (en particulier l'espace H_1^n, introduit au chapitre 1, raison pour laquelle on s'intéresse plutôt à son revêtement universel $\tilde{H}_1^n$), des exemples chronologiques mais non causals comme $M = S^1 \times \mathbb{R}$ muni de la métrique $ds^2 = d\theta\, dt$:



Les géodésiques temporelles sont des hélices, les seules courbes causales fermées sont les cercles $\{t = \text{constante}\}$ qui sont des géodésiques nulles.

<u>Figure 6</u>

Un autre exemple important d'espaces-temps non chronologiques est le suivant :

Théorème 2.5. : *Tout espace-temps compact n'est jamais chronologique.*

Démonstration :

Soit (M,g) un espace-temps compact ; $(I^+(p))_{p\in M}$ forme un recouvrement ouvert de M, on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$(I^+(p_k))_{\substack{p_k\in M\\ k\in I}} \quad \text{où} \quad I = \{1,\dots,m\}.$$

On a : $p_1 \in I^+(p_{i_1})$ où $1 \leqslant i_1 \leqslant m$, de même : $p_{i_1} \in I^+(p_{i_2})$ où $1 \leqslant i_2 \leqslant m$. On obtient en répétant l'opération :

$$p_1 \ll p_{i_1} \ll p_{i_2} \ll \dots \ll p_{i_{m-1}}.$$

Mais il existe $p_{i_m} \in M$ où $1 \leqslant i_m \leqslant m$ tel que $p_{i_{m-1}} \in I^+(p_{i_m})$. La transitivité de $\ll$ entraîne donc que :

$$\exists i_0 \quad \text{où} \quad 1 \leqslant i_0 \leqslant m \quad \text{tel que : } p_{i_0} \in I^+(p_{i_0}), \text{ d'où le résultat.}$$

Pour la suite de ce travail, on a besoin d'une condition plus restrictive que la condition de causalité : la forte causalité.

Définition 2.5. : *1) Un ouvert U de M est dit causalement convexe si l'intersection de toute courbe causale avec U est un ensemble connexe, autrement dit : pour tout x et y dans U, $x \ll z \ll y$ entraîne $z \in U$.*

2) L'espace-temps (M,g) est dit fortement causal au point p s'il existe un voisinage de p causalement convexe.

3) (M,g) sera dit fortement causal s'il l'est en chacun de ses points.

Intuitivement, la condition de forte causalité peut se traduire par : il existe un voisinage de p tel que si une courbe causale le quitte, elle ne doit plus y revenir.

Tout espace-temps fortement causal est donc causal (la réciproque est fausse, cf. [8], p. 192).

Les espaces-temps de Minkowski, De Sitter et Anti-De-Sitter sont fortement causals.

Il est à noter que tout voisinage normal convexe U en p, point d'un espace-temps quelconque (M,g), considéré lui-même comme un espace-temps muni de la métrique induite est fortement causal ([9], p. 30).

B - GLOBALE HYPERBOLICITE, FONCTION-TEMPS

Définition 2.7. : *On dit qu'un espace-temps (M,g) est globalement hyperbolique (en abrégé G.H) s'il est fortement causal et si pour tous points p et q dans M, on a : $J^+(p) \cap J^-(q)$ est compact.*

Pour de tels espaces-temps, des théorèmes d'existence et d'unicité globaux de solutions des équations d'onde $\Delta u+B(u)+cu = f$ sont valables ([7], p. 124) ; leur importance apparaît aussi dans le théorème suivant qui sera démontré au chapitre V :

Théorème 2.8. : *Soit (M,g) un espace-temps globalement hyperbolique, $p \in M$ et $q \in J^+(p)$.*
Il existe une géodésique causale allant de p à q dont la longueur est supérieure ou égale à celle de toute autre courbe causale allant de p à q.

(Pour la notion de longueur, voir chapitre III).

Les espaces-temps de Minkowski et De-Sitter sont globalement hyperboliques, l'espace-temps Anti-De-Sitter ne l'est pas (bien que $r \in I^+(p)$, il n'existe aucune géodésique causale allant de p à r, voir figure 3).

La globale hyperbolicité est liée à la notion de surface de Cauchy, auparavant il nous faut définir la notion de courbe interminable.

Soit $c : [a,b[\to M$ une courbe dans M, causale.

Le point p est dit <u>extrémité</u> de c pour $t = b$ si :

$$\lim_{t \to b^-} c(t) = p.$$

Le point p sera dit <u>extrémité future</u> (respectivement <u>passée</u>) de c si c est dirigée vers le futur (respectivement vers le passé).

La courbe c est dite <u>interminable vers le futur</u> (respectivement <u>vers le passé</u>) si elle ne possède pas d'extrémité future (resp. passée).

Si une courbe causale ne possède ni extrémité future, ni extrémité passée, on dit simplement qu'elle est <u>interminable</u>.

Ceci nous permet d'introduire la :

<u>*Définition 2.9.*</u> : *Une <u>surface de Cauchy</u> S est un sous-ensemble de M possédant la propriété suivante : toute courbe causale interminable dans M ne coupe S qu'une fois et une seule.*

On montre que la condition (M,g) globalement hyperbolique est équivalente à (M,g) admet une surface de Cauchy ([8], p. 209 et p. 212).

Dans le théorème 1.9., on a introduit sur un voisinage normal convexe U la fonction k, dont les surfaces de niveau étaient des hypersurfaces spatiales (sur $U \cap I^+(p)$).

Sous certaines conditions, on peut étendre cette notion à tout l'espace-temps, et une surface de Cauchy peut apparaître comme une surface de niveau d'une certaine fonction. Plus précisément :

<u>*Définition 2.10.*</u> : *1) Une fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$ est dite <u>fonction-temps globale</u> sur M si f est strictement croissante le long de toute courbe causale.*

2) Une telle fonction est dite <u>fonction-temps de Cauchy</u> si chaque surface de niveau $f^{-1}(e)$ où $e \in \mathbb{R}$ est une surface de Cauchy de M.

Il est à noter que tous les espaces-temps même fortement causals n'admettent pas forcément une fonction-temps ([8], p. 188), qu'un espace-temps globalement hyperbolique admet une fonction-temps de Cauchy ([8], p. 212), que le choix d'une fonction-temps globale lorsqu'il est possible n'est pas unique.

Remarque 2.11 :

Dans le théorème 1.9., la fonction k définie par

$$k(q) = g(\exp_p^{-1} q,\ \exp_p^{-1} q)$$

est une fonction-temps sur $U \cap I^+(p)$, où U est un voisinage normal convexe en p ($-k$ en est une sur $U \cap I^-(p)$).

Une fonction-temps existe toujours sur U, bien qu'il n'y ait aucune hypothèse sur M.

D'autre part, on peut toujours trouver dans U un voisinage suffisamment petit V tel que : $(V, g_{|V})$ soit globalement hyperbolique, par exemple :

si $q \in U \cap I^+(p)$, alors $V = I^+(p) \cap I^-(q)$ répond à la question.

Une autre manière de construire une fonction-temps sur un voisinage normal convexe U en p est la suivante : supposons qu'il existe $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que le gradient de f soit toujours temporel.

Si $c : t \in [a,b] \to c(t) \in M$ est une courbe causale de classe C^1 telle que $\dot{c}(t)$ est régulier, alors :

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = g(\dot{c}(t), \operatorname{grad} f(c(t)))$$

est soit strictement positif si $\dot{c}(t)$ et $\operatorname{grad} f(c(t))$ ont même orientation, strictement négatif dans le cas contraire.

Dans le premier cas, f est strictement croissante le long de c, dans le second cas strictement décroissante. Il s'ensuit que f vérifie cela le long de toute courbe causale et par suite que f ou $-f$ est une fonction-temps sur U.

Il est à noter que grad f est orthogonal à chaque surface de niveau $f^{-1}(e) = \{q \in U/f(q) = e\}$ qui sont des hypersurfaces spatiales.

On termine ce chapitre en donnant le schéma qui indique les relations entre les différentes conditions de causalité introduite :

GLOBALE HYPERBOLICITE (⇔ existence d'une fonction-temps de Cauchy)

$\Downarrow$

FORTE CAUSALITE

$\Downarrow$

CAUSALITE

$\Downarrow$

CHRONOLOGIE

III - ÉTUDE DES COURBES DE L'ESPACE-TEMPS

Dans ce chapitre, on s'intéresse d'abord à la convergence des suites de courbes dans un espace-temps. Il y est introduit d'une part le concept de courbe limite, d'autre part la C^0-topologie sur les courbes.

On définit ensuite la longueur des courbes causales (de manière analogue à la géométrie riemannienne pour les courbes temporelles, par approximation pour les courbes causales) et la distance lorentzienne qui diffère en bien des points de son homologue riemannien.

A - CONVERGENCE DES SUITES DE COURBES

Il nous faut tout d'abord définir la notion de courbe causale continue (et non plus de classe C^1 par morceaux) :

Définition 3.1. : *Une courbe continue* $c :]a,b[\to M$ *est dite courbe causale dirigée vers le futur si :*
Pour tout $t \in]a,b[$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *et un voisinage normal convexe* U *en* $c(t)$ *tels que :*

$c|[t-\varepsilon,t+\varepsilon] \subset U$ *et :*

étant donnés t_1 *et* t_2 *vérifiant :* $t-\varepsilon < t_1 < t_2 < t+\varepsilon$, *il existe une courbe causale de classe* C^∞ *dirigée vers le futur dans* $(U,g|_U)$ *de* $c(t_1)$ *à* $c(t_2)$.

Dans tout ce qui suit ; courbe causale sans autre précision signifie courbe causale dirigée vers le futur au sens de la définition 3.1.

Une courbe causale définie au sens de 3.1. n'est pas forcément de classe C^1 par morceaux, toutefois elle vérifie une condition lipchitzienne et par suite possède un vecteur tangent presque partout. (cf. [9], p. 17).

Lorsqu'une courbe causale c est définie sur un intervalle fermé $[a,b]$; cela signifie que c possède une extrémité future et passée.

<u>Définition 3.2.</u> : 1) *Soit* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de courbes causales dans* M. *On appelle* <u>*point limite*</u> *de la suite* (c_n) *tout point* p *de* M *tel que : si* V *est un voisinage quelconque de* p, *toutes les courbes de la suite* (c_n) *sauf un nombre fini rencontrent* V.

2) *Une courbe* c *est dite* <u>*courbe limite*</u> *de la suite* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'il existe une sous-suite* (c_m) *de* (c_n) *telle que : Tout point de* c *est point limite de la sous-suite* (c_m). *On dit alors que* (c_m) <u>*distingue*</u> c *comme courbe limite.*

Dans un espace-temps quelconque, une suite de courbes causales peut avoir plusieurs courbes limites comme elle peut avoir une courbe limite spatiale ([5], chap. 2).

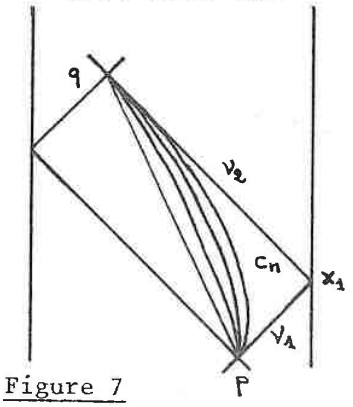


Figure 7

Dans l'espace-temps Anti-De-Sitter, la suite de géodésiques temporelles (c_n) possède deux courbes limites : les segments de géodésique nulle ν_1 et ν_2.

Toutefois, on a :

<u>Proposition 3.3.</u> : *Soit* (M,g) *un espace-temps fortement causal. Une courbe limite* $c : [a,b] \to M$ *d'une suite de courbes causales* (c_n) *est causale.*

<u>Démonstration</u> :

L'image $c([a,b])$ est compacte dans M, on peut la recouvrir par un nombre fini de voisinages normaux convexes $(U_i)_{i\in I}$ qui possèdent la propriété suivante : toute courbe causale quittant un des U_i n'y revient pas (cf. [9], 4.10 et 4.14, p. 30).

Puisque la relation $<$ est transitive (2.1.), 3.3. est démontrée si $c([a,b]) \cap U_i$ est causale, pour tout $i \in I$.

Soit (c_m) la sous-suite de (c_n) qui distingue c comme courbe limite. Si p et $q \in c([a,b]) \cap U_i$, on peut trouver deux suites (p_m) et (q_m) telles que p et q soient des points limites de ces suites (p pour (p_m), q pour (q_m)). Pour m assez grand, p_m et q_m sont reliés par la courbe causale c_m ; par construction des U_i et par le fait que p et q sont situés sur une courbe c dans U_i, si on passe à la limite sur m, on ne peut avoir que p et q reliés causalement.

Le choix de p et q étant arbitraire, il s'ensuit que $c([a,b]) \cap U_i$ est causale, ce qui démontre la proposition.

On cite maintenant un résultat relatif à l'existence des courbes limites, utile par la suite ([8], p. 185).

<u>*Proposition 3.4.*</u> : *Soient (M,g) un espace-temps quelconque et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de courbes causales interminables vers le futur dans M.*
Si $p \in M$ est un point limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il existe une courbe causale c interminable vers le futur, passant par p et qui est une courbe limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On va maintenant considérer la convergence des suites de courbes dans la C^0-topologie. Alors que pour le concept de courbe limite, l'intervalle de définition des courbes n'intervient pas, il est nécessaire ici qu'il soit le même pour toute les courbes de la suite ainsi que pour la limite lorsqu'elle existe.

<u>*Définition 3.5.*</u> : *Soit c et toutes les courbes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur le même intervalle $[a,b]$.*
On dit que la suite (c_n) <u>converge vers c dans la C^0-topologie</u> si :

(i) $c_n(a) \to c(a)$ *et* $c_n(b) \to c(b)$ *lorsque* $n \to \infty$.

(ii) Pour tout voisinage ouvert V contenant c, il existe un entier N tel que : $c_n \subset V$ pour tout $n \geq N$.

Dans l'espace-temps Anti-De-Sitter, la suite (c_n) a deux courbes limites ν_1 et ν_2 mais elle ne converge ni vers ν_1, ni vers ν_2 dans la C°-topologie, et pourtant cet espace-temps est fortement causal. (Figure 7).

Considérons maintenant l'espace-temps $M = S^1 \times \mathbb{R}$ muni de la métrique $ds^2 = d\theta\, dt$ (il n'est pas causal, figure 6).

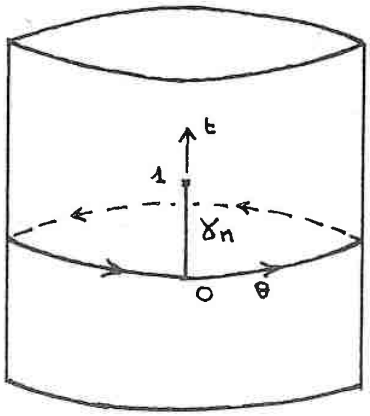


Figure 8

Soit γ_n le segment sur $\theta = 0$ donné par : $\gamma_n(t) = (0,t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\forall n$.
Soit γ la courbe causale obtenue en parcourant la géodésique nulle $\{t = 0\}$ depuis 0, puis en allant sur $\theta = 0$ de $t = 0$ à $t = 1$.
La suite (γ_n) converge vers γ dans la C°-topologie, mais γ n'est pas une courbe limite de γ_n.

Toutefois, dans un espace-temps fortement causal, les deux types de convergence sont "presque" équivalents, plus précisément :

<u>*Proposition 3.6.*</u> : *Soit (M,g) un espace-temps fortement causal.*
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de courbes causales définies sur $[a,b]$.
Une courbe causale $c : [a,b] \to M$ telle que $c(a) = p$ et $c(b) = q$ est une courbe limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une sous-suite (c_m) de (c_n) qui converge vers c dans la C°-topologie. ([2], p. 164).

<u>Démonstration</u> :

($\Rightarrow$) Soit V un ouvert quelconque de M tel que : $c([a,b]) \subset V$. Puisque

$c([a,b])$ est compacte, on la recouvre par un nombre fini de voisinages normaux convexes $W_1,\dots,W_k$ tels que : $W_i \subset V$, $1 \leqslant i \leqslant k$. L'hypothèse fortement causal entraîne que toute courbe causale quittant un des W_i n'y retourne pas.

Il existe une subdivision de l'intervalle $[a,b]$: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_j = b$ telle que le couple $(c(t_i), c(t_{i+1}))$ est dans $W_{k(i)}$ où $1 \leqslant k(i) \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant j-1$.

Soit (c_m) une sous-suite de (c_n) qui distingue c comme courbe limite.

On pose : $p(0,m) = c_m(a)$ et $p(j,m) = c_m(b)$, pour tout m.

Pour tout i fixé dans $1,\dots,(j-1)$; considérons $p(i,m) \in c_m$ tel que : la suite $(p(i,m))$ converge vers $c(t_i)$.

Puisque c est une courbe causale et que (M,g) est fortement caucal, il existe un entier N_1 tel que : $p(i+1,m) \in J^+(p(i,m))$ pour $m \geqslant N_1$.

Il existe un entier N_2 tel que le couple $(p(i,m), p(i+1,m)$ est dans $W_{k(i)}$ où $0 \leqslant i \leqslant j-1$ et pour tout $m \geqslant N_2$.

Il s'ensuit que le segment de courbe c_m joignant $p(i,m)$ à $p(i+1,m)$ est tout entier dans $W_{k(i)}$, pour tout $m \geqslant N = \mathrm{MAX}(N_1, N_2)$.

En répétant le procédé, on obtient que :

$$c_m \subset W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k \subset V, \text{ pour tout } m \geqslant N.$$

($\Leftarrow$) Soit (c_m) une sous-suite de (c_n) convergeant vers c dans la C°-topologie. On pose :

$$A = \{t_0 \in [a,b] / \text{tout point de } c|[a,t_0] \text{ est un point limite de la sous-suite } (c_m)\}.$$

La réciproque est démontrée si $A = [a,b]$.

$c_m(a) \to c(a)$ entraîne que $a \in A$.

Posons $\tau = \mathrm{Sup}\{t_0 / t_0 \in A\}$ et supposons que $\tau > a$.

Soit (t_k) une suite telle que : $t_k \to \tau$ par valeurs inférieures.

Puisque c est continue, pour tout voisinage ouvert U de $c(\tau)$ il existe un entier K tel que : $c(t_k) \in U$ pour tout $k \geqslant K$.

Mais U est aussi un voisinage de $c(t_k)$ pour $k \geqslant K$, puisque $c(t_k)$

est un point limite de la sous-suite (c_m), ceci entraîne que U rencontre toutes les courbes de la sous-suite (c_m) sauf un nombre fini, U étant un voisinage quelconque de $c(\tau)$, on obtient que $\tau \in A$.

Supposons maintenant que $\tau < b$, et soit V un voisinage normal convexe de $c(\tau)$ ne contenant pas $c(b)$ et tel que $(V, g|_V)$ soit globalement hyperbolique (cf. remarque 2.11).

On définit alors $f : V \to \mathbb{R}$ fonction-temps de Cauchy telle que : $f(V) = \mathbb{R}$ et $f(c(\tau)) = 0$.

Soient s fixé dans $]0,+\infty[$ et $x(s) = c([a,b]) \cap f^{-1}(s)$.

Il est à noter que cette intersection est non vide car $c(\tau) \in V$ et $c(b) \notin V$, et réduite à un seul point car $f^{-1}(s)$ est une surface de Cauchy.

Pour m assez grand, $x_m(s) = c_m([a,b]) \cap f^{-1}(s)$ existe et en particulier pour tout voisinage W de $c([a,b])$ on a :

$$x_m(s) \in W \cap f^{-1}(s).$$

Ceci prouve que $x(s)$ est point limite de la sous-suite (c_m), et comme $f(c(\tau)) = 0$, que A contient des nombres plus grands que τ, ce qui est une contradiction, d'où $A = [a,b]$.

B - LONGUEUR DES COURBES CAUSALES

Soit $p \in M$ et $q \in J^+(p)$.

$C(p,q)$ désigne l'ensemble de toutes les courbes causales allant de p à q. La longueur des courbes causales allant de p à q est une fonction L définie sur $C(p,q)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On définit tout d'abord L pour les courbes temporelles de classe C^1 par morceaux :

Soient $c : t \in [a,b] \to c(t) \in M$ une courbe temporelle de classe C^1 par morceaux et une partition $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ de $[a,b]$ telle que : $c|]t_i, t_{i+1}[$ soit de classe C^1 pour $i = 0,\ldots,(k-1)$.

La <u>longueur</u> de la courbe temporelle c est :

$$L(c) = \sum_{i=o}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{g(\dot{c}(t),\dot{c}(t))}\, dt$$

On note cette longueur $L(c|[a,b])$ ou bien $L(c|[p,q])$ si $c(a) = p$ et $c(b) = q$. Cette définition est indépendante de la paramétrisation choisie pour définir la courbe c (cf. par exemple, Thorpe, J.A., Elementary Topics in Differential Geometry, UTM, Springer Verlag, 1979, p. 68).

Nous allons maintenant étendre la notion de longueur aux courbes causales allant de p à q, pour ce faire il nous faut la :

Proposition 3.7. : *Supposons* $q \in I^+(p)$.
Soit $C'(p,q)$ *l'ensemble de toutes les courbes temporelles de classe* C^1 *allant de* p *à* q.
$C'(p,q)$ *est dense dans* $C(p,q)$.

(Comparer avec [9], p. 50).

Démonstration : Soit $c : [a,b] \to M$ une courbe causale allant de p à q (qui n'est pas une géodésique nulle non brisée).

On peut recouvrir l'image compacte $c([a,b])$ par un nombre fini de voisinages normaux convexes $U_1,\dots,U_N$ d'intersection non vide deux à deux. Soit alors une suite de points $(n_i)_{i=1}$ tels que :

(i) $n_i < n_{i+1}$, $i = 1,\dots,N-1$

(ii) $n_i \in U_i \cap U_{i+1}$, $i = 1,\dots,N-1$.

Si $n_i \ll n_{i+1}$, on considère les segments de géodésiques temporelles unique allant de n_i à n_{i+1} notés γ_i dans U_{i+1} $(i = 1,\dots,N-1)$. (cf. 3.1.).

Posons : $\gamma = \bigcup_{i=1}^{N-1} \gamma_i$; γ est une courbe temporelle de classe C^1 par morceaux, allant de p à q, et voisine de c. Pour obtenir une courbe temporelle de classe C^1, il suffit "d'arrondir les angles" aux points n_i.

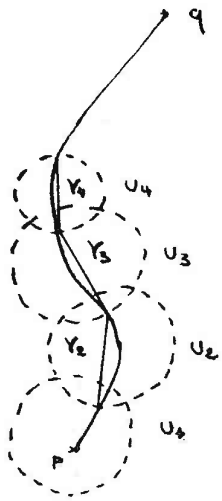


Figure 9

Supposons maintenant qu'on ait : $n_i \ll n_{i+1}$ mais n_{i+1} et n_{i+2} situés sur un segment de géodésique nulle. Dans ce cas, le résultat provient du lemme plus général suivant :

Lemme 3.8. : *Si* $p \ll q$ *et* $q < r$ *alors* $p \ll r$.

Démonstration : Supposons que $p \ll q$ et que q et r sont situés sur une géodésique nulle ν.

Soit $\nu([b,d])$ l'image compacte de la géodésique nulle ν allant de q à r. On peut recouvrir cette image par un nombre fini de voisinages normaux convexes $U_1,\ldots,U_N$ qu'on suppose suffisamment petits pour possèder la propriété suivante :

L'intersection du bord des U_i $(= \partial U_i)$ avec $\nu([b,d])$ est formé d'un point passé et d'un point futur. Soit U_1 le voisinage normal convexe contenant q, et soit x_1 l'intersection future de ∂U_1 avec $\nu([b,d])$.

Puisque $q \in J^-(x_1)$, il existe $s_1 \in U_1 \cap c([a,b])$ tel que $s_1 \in I^-(x_1)$, où $c : [a,b] \to M$ est une courbe temporelle allant de p à q. Soit γ_1 une courbe temporelle reliant s_1 à x_1. Soit x_2 l'intersection future de ∂U_2 avec $\nu([b,d])$ et soit $s_2 = [s_1x_1] \cap \partial U_2$. Dans ce cas, $s_2 \in I^-(x_2)$ et γ_2 est une courbe temporelle reliant s_2 à x_2.

En répétant le procédé, on fabrique une courbe temporelle de s_1 à r, par transitivité de la relation $<<$ on obtient que $p << r$.

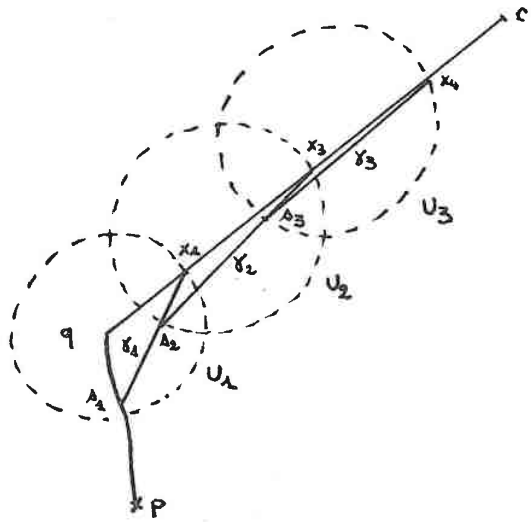


Figure 10

Soit maintenant λ une courbe causale continue allant de p à q, et U un voisinage de λ dans M. On pose :

$\ell(U)$ = borne supérieure des longueurs des courbes temporelles allant de p à q de classe C^1 situées dans U.

La longueur de la courbe causale λ, $L(\lambda|[p,q])$ est définie comme étant la borne inférieure des $\ell(U)$, U parcourant l'ensemble des voisinages de λ dans M.

Cette définition est valable pour toute courbe causale, sauf, d'après ce qui précède pour une géodésique nulle non brisée.

Pour celle-ci, on définit leur longueur comme étant 0. (cf. [8] p. 215).

Pour la suite, on démontrera des résultats sur $C'(p,q)$ qu'on transportera par densité sur $C(p,q)$.

Soit c une courbe temporelle de classe C^1 allant de p à q, dans ce cas : $L(c|[p,q]) > 0$. On peut approcher c par une suite (c_n) de courbes nulles C^1 par morceaux, qui converge vers c dans la C°-topologie. On a d'une part :

$$L(c_n|[p,q]) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{et d'autre part : } L(c|[p,q]) > 0.$$

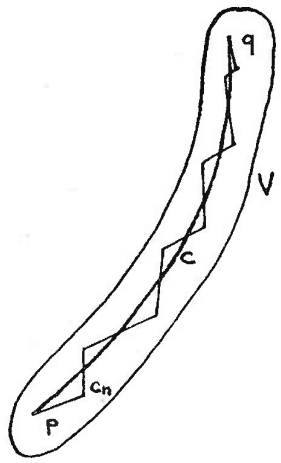


Figure 11

Ceci prouve que L n'est pas une fonction continue sur $C(p,q)$ pour la C°-topologie.

Toutefois :

Proposition 3.9. : *Soit (M,g) un espace-temps fortement causal. La fonction-longueur L est semi-continue supérieurement dans la C°-topologie sur $C'(p,q)$.*

On peut remarquer que la fonction-longueur en géométrie riemannienne est semi-continue inférieurement.

Remarque 3.10. : Avant de démontrer 3.9., nous allons donner une manière pratique de paramétrer les courbes de $C(p,q)$.

1) Supposons que p et q sont situés dans un voisinage normal convexe U, et que $q \in J^+(p)$.

Soit $f : U \subset M \to \mathbb{R}$ telle que : $f(x_1,\dots,x_d) = x_1$, et telle que grad f soit partout temporel dans U. Dans ce cas, f est une fonction-temps locale sur U (il en existe toujours une, 2.11) et toute courbe causale c dans U reliant p à q peut s'écrire : $c(t) = (t,x_2(t),\dots,x_d(t))$ pour tout t tel que : $f(p) \leqslant t \leqslant f(q)$. Les surfaces de niveau $\{f = \text{constante}\}$ sont des hypersurfaces spatiales. En particulier, si γ est l'unique géodésique causale allant de p à q dans U, et si on pose $f(p) = 0$, γ peut être reparamétrée par : $\gamma(t) = (t,0,\dots,0)$ (cf. [16], p. 7 et p. 35).

2) Supposons maintenant que p et q ne sont plus situés dans un même voisinage normal convexe, et $q \in J^+(p)$.

Soit $c : [a,b] \to M$ une courbe temporelle de classe C^1 allant de p à q, paramétrée par la longueur.

L'image $c([a,b])$ est compacte, on la recouvre par un nombre fini de voisinages normaux convexes $W_1,\dots,W_k$. Soit V un ouvert de M contenant $c([a,b])$ et contenu dans la réunion des W_i $(i = 1,\dots,k)$.

Etant donné $c(t)$, considérons l'orthogonal de $\dot{c}(t)$: $(\dot{c}(t))^{\perp}$ dans $T_{c(t)}M$, il engendre une hypersurface spatiale dans V. Tout point c de V peut être relié à $c(t)$ par une géodésique spatiale unique située sur cette hypersurface, pour t convenable. Quitte à restreindre l'ouvert V en un ouvert V' contenu dans V, on peut supposer qu'aucune de ces géodésiques spatiales ne se coupe dans V'. On peut alors définir :

$$\Phi : V' \mapsto c([a,b]) \cap V'$$

$$x \mapsto \Phi(x) = c(t)$$ où x et $c(t)$ sont reliés par une géodésique spatiale unique définie comme ci-dessus.

Soit
$$F : V' \to V' \to \mathbb{R}$$
$$x \overset{\Phi}{\mapsto} c(t) \mapsto t$$

A l'aide de F, on peut paramétrer une courbe temporelle γ allant de p à q, située dans V' par :

$$\gamma(t) = (t,x_2(t),\dots,x_d(t)).$$

Le paramétrage de c est : $c(t) = (t,0,\ldots,0)$.

Il est à noter que les surfaces de niveau $\{F = \text{constante}\}$ sont des hypersurfaces spatiales.

Démonstration de la proposition 3.9.

On conserve les mêmes notations que 3.10.2.

Si λ est une courbe temporelle allant de p à q et située dans V', on a :

$$\lambda(t) = (t,x_2(t),\ldots,x_d(t)) \quad \text{et :}$$

$$\dot{\lambda}(t) = \text{grad } F(t)+k(t) \quad \text{où } k(t) \text{ est un vecteur spatial.}$$

Ceci entraîne que :

$$g(\dot{\lambda}(t),\dot{\lambda}(t)) = 1+g(k(t),k(t))$$

(Par construction, grad $F(t)$ et $k(t)$ sont orthogonaux, et on a supposé que grad $F(t)$ est de norme 1).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $V'' \subset V'$ tel que :

$$g(\text{grad } F(t),\text{grad } F(t)) < 1+\varepsilon \quad \text{sur } V''.$$

Dans ce cas, si λ est une courbe temporelle de classe C^1 située dans V'', on a :

$$L(\lambda|[p,q]) = \int_a^b (g(\dot{\lambda}(t),\dot{\lambda}(t)))^{1/2} dt < (1+\varepsilon)^{1/2} L(c|[p,q])$$

ce qui prouve la proposition.

Par densité de $C'(p,q)$ dans $C(p,q)$, la proposition s'étend aux courbes causales. Ceci a pour conséquence :

Lemme 3.11. : *Soient (M,g) un espace-temps fortement causal et c une courbe causale dans M.*

Si la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de courbes causales converge vers* c *dans la* C^0*-topologie, on a :*

$$L(c) \geqslant \lim\sup L(c_n).$$

On termine cette section en démontrant un théorème fondamental relatif à l'existence d'une géodésique de longueur maximale entre 2 points reliés causalement dans un voisinage normal convexe.

<u>*Théorème 3.12.*</u> : *Soient* (M,g) *un espace-temps quelconque,* p *et* q *deux points de* M *situés dans un voisinage normal convexe* U *en* p.
Si p *et* q *peuvent être reliés par une courbe causale, alors la plus longue de ces courbes dans* U *est l'unique géodésique reliant* p *à* q.

<u>Démonstration</u> :

Puisque U est un voisinage normal convexe, muni de la métrique induite il est fortement causal ([9], p. 30).

Si $q \in (J^+(p)\setminus I^+(p)) \cap U$, 1.12. entraîne que la seule courbe causale allant de p à q est une géodésique nulle ν, de longueur nulle.

Supposons donc que $q \in I^+(p)$.

D'après 1.2., il existe dans U une géodésique unique c reliant p à q. Par 3.10.1., on peut paramétrer $c : [a,b] \to M$ par : $c(t) = (t,0,\ldots,0)$.

Si γ est une courbe causale de classe C^1 allant de p à q et située dans U, on peut la paramétrer par :

$$\gamma(t) = (t,x_2(t),\ldots,x_d(t)).$$

Dans ce cas, $g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) = g(\text{grad } f(\gamma(t)), \text{grad } f(\gamma(t))$
$$+g(k(t),k(t))$$

où $k(t)$ est un vecteur spatial orthogonal à grad $f(\gamma(t))$ (Les notations sont celles de 3.10.1.).

On obtient que :

$$L(\gamma|[p,q]) \leqslant \int_a^b (g(\text{grad } f(c(t)),\text{grad } f(c(t)))^{1/2} dt = L(c|[p,q])$$

On a l'égalité si et seulement si $k(t) = 0$, autrement dit si $\gamma(t) = (t,0,\ldots,0)$ ce qui correspond au paramétrage de l'unique géodésique causale c allant de p à q dans U.

C - LA DISTANCE LORENTZIENNE

En géométrie riemannienne, la distance entre deux points est définie comme étant l'Inf des longueurs des courbes reliant ces deux points. En géométrie lorentzienne, cette définition ne peut pas avoir de sens puisque toute courbe temporelle peut être approchée par une suite de courbes nulles, la longueur de la courbe limite d'une telle suite est toujours 0.

On est donc amené à poser :

Définition 3.13. : *Soit* $p \in M$.
La fonction-distance de Lorentz est l'application :

$d : M \times M \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ *telle que :*

(*i*) $d(p,q) = 0$ *si* $q \notin J^+(p)$

(*ii*) $d(p,q) = \text{Sup}\{L(c)/c \in C(p,q)\}$.

On peut faire les remarques immédiates suivantes :

1) $d(p,q) > 0 \Leftrightarrow q \in I^+(p)$; ce qui signifie que la fonction-distance détermine le futur et le passé chronologique de tout point.

2) $d(p,q) = 0 \not\Rightarrow q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$; la fonction distance ne détermine pas en général le futur et le passé causal d'un point .

Néanmoins, si $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ alors $d(p,q) = 0$. (cf. 3.20.)

La fonction-distance est non symétrique et dégénérée ; elle vérifie l'inégalité triangulaire renversée :

$$d(p,q) \geqslant d(p,r)+d(r,q) \quad \text{si} \quad p < r < q.$$

Elle peut prendre des valeurs infinies, en particulier :

Lemme 3.14. : *1) Si* $p \in I^+(p)$ *alors* $d(p,p) = \infty$.
Dans ce cas, pour tout point q *de* M *on a soit* $d(q,q) = \infty$, *soit* $d(q,q) = 0$.

2) Si (M,g) *est un espace-temps chronologique, alors* $d(p,p) = 0$ *pour tout* p *de* M.

Démonstration :

1) Si $p \in I^+(p)$, on peut trouver une courbe temporelle c fermée en p telle que $L(c) > 0$.

Si c^n désigne la courbe c parcourue n fois dans le même sens, on a : $L(c^n) = nL(c)$ et par suite :

$$L(c^n) \to \infty \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Ce raisonnement est vrai en tout point q de M, sauf si la seule courbe fermée en q est une courbe nulle, auquel cas : $d(q,q) = 0$.

2) Se déduit immédiatement de la définition.

Dans un espace-temps quelconque, la fonction distance n'est pas forcément continue, toutefois elle est toujours semi-continue inférieurement là où elle est finie. Plus précisément :

Lemme 3.15. : *Soit* $p \in M$ *et* $q \in J^+(p)$.

1) Si $d(p,q) < \infty$, *si* $p_n \to p$ *et* $q_n \to q$ *alors* :

$$d(p,q) \leqslant \liminf d(p_n,q_n).$$

2) Si $d(p,q) = \infty$ *et si* $p_n \to p$, $q_n \to q$ *alors* $d(p_n,q_n) \to \infty$.

Démonstration :

1) Si $d(p,q) = 0$, il n'y a rien à prouver.

Supposons que $q \in I^+(p)$. Il existe une courbe temporelle c allant de p à q de longueur $d(p,q)-\varepsilon/2$ (propriété du sup). On peut trouver deux voisinages suffisamment petits de p et q, notés U_1 et U_2 tels que c peut être déformée en une courbe temporelle de longueur $\geqslant d(p,q)-\varepsilon$ de n'importe quel point r de U_1 à n'importe quel point s de U_2. Pour n suffisamment grand, $p_n \in U_1$, $q_n \in U_2$ et en passant à la limite on obtient le résultat.

2) Supposons que $d(p,q) = \infty$ et que $\liminf d(p_n,q_n) = A < \infty$. Dans ce cas, il existe une courbe temporelle c allant de p à q de longueur $> A+2$.

On peut trouver deux voisinages U_1 et U_2 de p et q respectivement tels que c puisse être déformée en une courbe temporelle de longueur $\geqslant A+1$ de n'importe quel point r de U_1 à n'importe quel point s de U_2.

Pour n suffisamment grand, $p_n \in U_1$ et $q_n \in U_2$, en passant à la limite on aboutit à une contradiction.

Il est à noter que la fonction-distance est continue si (M,g) est un espace-temps globalement hyperbolique (voir chap. V), et qu'elle est toujours finie.

Lemme 3.16. : *Si (M,g) est un espace-temps globalement hyperbolique pour tous p et q dans M on a : $d(p,q) < \infty$.*

Démonstration :

Puisque pour tous p et q de M, $J^+(p) \cap J^-(q)$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de voisinages normaux convexes $U_1,\ldots,U_m$ vérifiant la propriété suivante : toute courbe causale quittant un des U_i n'y revient pas (forte causalité de M) et est de longueur $\leqslant 1$ dans U_i.

Toute courbe causale c allant de p à q vérifie la propriété précédente, il s'ensuit que

$$L(c|[p,q]) \leqslant m \quad \text{et par suite que} \quad d(p,q) \leqslant m.$$

Définition 3.17. : *Soit* $p \in M$ *et* $q \in J^+(p)$.
Une courbe causale c *allant de* p *à* q *est dite* *maximale* *si elle vérifie :*

$$L(c|[p,q]) = d(p,q).$$

Les courbes maximales possèdent la propriété suivante :

Lemme 3.18. : *Soit* $c : [a,b] \to M$ *une courbe maximale entre* $p = c(a)$ *et* $q = c(b)$.
Alors, pour tous s *et* t *tels que :* $a \leqslant s < t \leqslant b$, *on a :*

$$d(c(s),c(t)) = L(c|[c(s),c(t)]).$$

Une courbe maximale est maximale entre chacun de ses points.

Démonstration :

$$d(p,q) = L(c|[p,c(s)])+L(c|[c(s),c(t)])+L(c|[c(t),q]).$$

Si le lemme est faux, il vient que :

$$d(p,q) < d(p,c(s))+d(c(s),c(t))+d(c(t),q) \leqslant d(p,q).$$

La seconde inégalité résultant de l'inégalité triangulaire renversée. Ceci aboutit à une contradiction.

Les courbes maximales jouent le rôle des courbes minimales de la géométrie riemannienne, ces courbes sont en fait des géodésiques. Soit p quelconque dans M et $q \in J^+(p) \cap U$ où U est un voisinage normal convexe en p. 3.12. montre que si λ est une courbe causale allant de p à q vérifiant $L(\lambda|[p,q]) = d(p,q)$, alors λ coïncide (à une paramétrisation près) avec l'unique géodésique causale reliant p à q.

On conviendra que deux courbes différant d'une paramétrisation sont identiques.

Ceci a la conséquence globale suivante :

Théorème 3.19. : *Si une courbe causale* $c : [a,b] \to M$ *est maximale entre* $c(a)$ *et* $c(b)$, *elle peut être reparamétrée en une géodésique.*

Démonstration :

Soit $c(t)$ un point quelconque de la courbe c, et $\varepsilon > 0$ assez petit. Soit U un voisinage normal convexe en $c(t+\varepsilon)$ tel que U contienne $c|[t-\varepsilon,t+\varepsilon]$.

D'après 3.18., c est maximale entre $c(t-\varepsilon)$ et $c(t+\varepsilon)$ et elle coïncide d'après ce qui précède avec la géodésique causale maximale entre ces deux points dans U.

Puisque t est quelconque, le théorème en découle.

On peut maintenant démontrer l'analogue global du corollaire 1.12.

Lemme 3.20. : *Si* $p < q$ *mais* $p \ll q$ *est faux, il existe une géodésique nulle allant de* p *à* q.

Démonstration :

Par hypothèse, il n'existe aucune courbe temporelle de p à q, il s'ensuit que $d(p,q) = 0$.

Soit c une courbe causale allant de p à q, on a :

$$d(p,q) \geqslant L(c|[p,q]).$$

Or $d(p,q) = 0$, ce qui entraîne que $L(c|[p,q]) = 0$ et que c est une courbe maximale entre p et q. 3.19. montre que c peut être reparamétrée en une géodésique nulle.

Il est à noter que la réciproque de 3.20. est fausse :

Soit l'espace-temps $M = S^1 \times \mathbb{R}$ muni de la métrique $ds^2 = dt^2 - dx^2$.

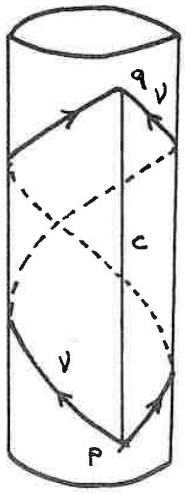


Figure 12

p et q sont situés sur une géodésique nulle non brisée ν, mais $d(p,q) > 0$ car il existe une courbe temporelle c allant de p à q.
On peut remarquer que q est en dehors d'un voisinage où $\exp_p$ est un difféomorphisme car il arrive deux géodésiques nulles en q.

IV - EXPANSION DES GÉODÉSIQUES DE L'ESPACE-TEMPS

On ontroduit dans ce chapitre les formules des variations première et seconde qui correspondent à la recherche d'extrémales de la longueur des courbes et on parle brièvement de la théorie de l'index en géométrie lorentzienne. Cela permet de définir les champs de Jacobi et les points conjugués le long des géodésiques qui sont en relation étroite avec la maximalité de celles-ci.

Alors que le cas des géodésiques temporelles est identique "mutatis mutandis" au cas riemannien ; le cas des géodésiques nulles est un cas typiquement lorentzien, la perte de "maximalité" entre deux points d'une géodésique nulle se traduisant par le fait qu'il existe une courbe temporelle entre ces deux points.

A - CAS DES GEODESIQUES TEMPORELLES

Soit $c : [a,b] \to M$ une courbe temporelle de classe C^1 allant de $p = c(a)$ à $q = c(b)$.

Définition 4.1. : 1) *Une variation (ou homotopie) de* c *est une application de classe* C^∞ : $\alpha(t,s) \in [a,b]\times]-\varepsilon,\varepsilon[\to \alpha(t,s) \in M$ $(\varepsilon > 0)$ *telle que :*

(i) $\alpha(t,0) = c(t)$ *pour tout* $t \in [a,b]$

(ii) *les courbes voisines* $\alpha_s(t) = \alpha(t,s)$ *définies sur* $[a,b]$ *sont temporelles pour tout* $s \in]-\varepsilon,\varepsilon[$.

2) *La variation* α *est dite à extrémités fixes si* $\alpha(a,s) = c(a)$ *et* $\alpha(b,s) = c(b)$, *pour tout* $s \in]-\varepsilon,\varepsilon[$.

3) *La variation* α *est dite* C^∞ *par morceaux s'il existe une partition finie* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ *de* $[a,b]$ *telle que :*

$\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]\times]-\varepsilon,\varepsilon[}$ *soit une variation* C^∞ *de*

$c|_{[t_i,t_{i+1}]}$, $i = 0,\ldots,N-1$.

4) *Le* <u>*champ de la variation*</u> α *est le champ de vecteur le long de* c *défini par :*

$$V(t) = \frac{d}{ds}(\alpha(t,s))\Big|_{s=0} = \alpha_*(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,0)}.$$

On peut se passer de l'hypothèse (ii) grâce au :

<u>*Lemme 4.2.*</u> : *([5], 9.7.) Soit* α *une variation* C^∞ *par morceaux d'un segment de géodésique temporelle* $c : [a,b] \to M$.
Il existe une constante $S > 0$ *(dépendant de* α*) telle que les courbes voisines* $\alpha_s(t)$ *sont temporelles, pour tout* s *vérifiant* $|s| < S$.

<u>Démonstration</u> :

(i) Supposons d'abord α de classe C^∞ et soit ε_1 : $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, alors α est différentiable sur le compact $[a,b]\times[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]$. En remarquant qu'on peut prolonger α sur un ouvert contenant $[a,b]\times[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]$ et que $\dot{c}(a^+)$ et $\dot{c}(b^-)$ sont des vecteurs temporels, on obtient l'existence d'une constante $S_1 > 0$ telle que :

$\dot{\alpha}_s(a^+)$ et $\dot{\alpha}_s(b^-)$ sont temporels pour $|s| \leqslant S_1$.

Supposons qu'il n'existe aucun $S > 0$ vérifiant : les courbes α_s sont temporelles pour $|s| < S$.

On peut trouver une suite $(s_n) \to 0$ telle que les courbes $\alpha_{s_n}(t)$ ne soient pas temporelles. Ceci entraîne l'existence de $t_n \in [a,b]$:

$g(\dot{\alpha}_{s_n}(t_n), \dot{\alpha}_{s_n}(t_n)) \leqslant 0$, pour tout n.

Par compacité de $[a,b]\times[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]$; la suite $(t_n,s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un point d'accumulation (t,s) où $s = 0$ et où $t \neq a$ et $t \neq b$ (existence de S_1).

En passant à la limite sur n ; on obtient que :

$g(\dot{\alpha}_0(t),\dot{\alpha}_0(t)) = g(\dot{c}(t),\dot{c}(t)) \leqslant 0$ ce qui est une contradiction.

(ii) Supposons maintenant α de classe C^∞ par morceaux. En conbinant la définition 4.1. avec la première partie, on obtient l'existence d'une constante $S_i > 0$ telle que :

Pour tout s tel que : $|s| \leqslant S_i$; $\dot{\alpha}_s(t_i^+)$ et $\dot{\alpha}_s(t_i^-)$ sont temporels et $\alpha_s\big|_{[t_i,t_{i+1}]}$ est une courbe temporelle, $i = 0,\dots,N-1$.

En prenant $S = \mathrm{Min}(S_0,S_1,\dots,S_{N-1})$ on obtient le résultat.

Il est à noter qu'il n'existe pas de résultat semblable pour les géodésiques nulles (comparer avec 4.10.).

Savoir si une courbe est de longueur maximale est un problème de calcul des variations, et on peut chercher l'équation d'Euler d'un tel problème.

Soit α une variation C^∞ de la courbe temporelle $c : [a,b] \to M$ <u>paramétrée par la longueur</u>. Si V est le champ de la variation , on a :

$$\begin{aligned} Vg(\dot{c},\dot{c}) &= 2g(D_V\dot{c},\dot{c}) = 2g(D_{\dot{c}}V,\dot{c}) \\ &= 2\{\dot{c}\ g(V,\dot{c})-g(V,D_{\dot{c}}\dot{c})\} \qquad \text{(i)} \end{aligned}$$

puisque $[V,\dot{c}] = 0$.

D'où :

$$\frac{d}{ds} L(\alpha_s(t))\Big|_{s=o} = \int_a^b V\, g^{1/2}(\dot{c},\dot{c})dt = \frac{1}{2}\int_a^b g(D_V\dot{c},\dot{c})g^{-1/2}(\dot{c},\dot{c})dt \qquad \text{(ii)}$$

$$= \frac{1}{\ell}\left\{\Big[g(V,\dot{c})\Big]_a^b - \int_a^b g(V,D_{\dot{c}}\dot{c})dt\right\} \qquad \text{(F1)}$$

où l'on a utilisé (i) et posé $\ell = L(\alpha_0(t))$.

(F1) est la <u>formule de la variation première</u>.

Si α est à extrémités fixes alors $V(a) = V(b) = 0$ et le premier terme de membre de droite de (F1) s'annule, si c est une géodésique, on obtient que : $\frac{d}{ds} L(\alpha_s(t))\Big|_{s=o} = 0$.

En particulier, l'équation d'Euler du problème de calcul des variations est $D_{\dot{c}}\dot{c} = 0$.

Ce résultat entraîne qu'une condition nécessaire pour que la courbe temporelle c soit une courbe de longueur extrémale entre p et q est que c soit une géodésique (comparer avec 3.12.).

Pour savoir de quel extremum il s'agit, il nous faut calculer la dérivée seconde ; pour cela :

Soit $c : [a,b] \to M$ une géodésique temporelle paramétrée par la longueur.

β est dite <u>variation double</u> de c si :

$\beta : (v,w,t) \in]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[\times]-\varepsilon_2,\varepsilon_2[\times[a,b] \to \beta(v,w,t) \in M$ est une application de classe C^∞ (ε_1 et $\varepsilon_2 > 0$) vérifiant :

i) $\beta(0,0,t) = c(t)$

ii) les courbes voisines $\beta(v,w,t) = c_{vw}(t)$ sont temporelles pour tout $v \in]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[$ et tout $w \in]-\varepsilon_2,\varepsilon_2[$.

β est dite à <u>extrémités fixes</u> si $\beta(v,w,a) = c(a)$ et $\beta(v,w,b) = c(b)$, pour tout $v \in]-\varepsilon_1,\varepsilon_1[$ et tout $w \in]-\varepsilon_2,\varepsilon_2[$.

Les <u>champs de la variation β</u> sont :

$$v(t) = \frac{\partial}{\partial v}\beta(v,w,t)\Big|_{v=w=o} = \beta_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\Big|_{(o,o,t)}$$

$$w(t) = \frac{\partial}{\partial w}\beta(v,w,t)\Big|_{v=w=o} = \beta_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)\Big|_{(o,o,t)}$$

On note : $L(c_{vw}(t)) = L(v,w)$

<u>*Proposition 4.3.*</u> : (<u>*Formule de la variation seconde*</u>)
Sous les notations précédentes, si c est une <u>géodésique</u>, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial w \partial v} L(v,w)\Big|_{(o,o)} = [g(D_w V,\dot c)]_a^b + \int_a^b \Big\{ g(D_{\dot c} V, D_{\dot c} W) - g(R(W,\dot c)\dot c, V) - \dot c\, g(V,\dot c)\dot c\, g(W,\dot c)\Big\} dt \quad (F2)$$

<u>Démonstration</u> : D'après la ligne (ii) dans (F1), il vient :

$$\frac{\partial 2}{\partial w \partial v} L(v,w)\Big|_{(o,o)} = \int_a^b [g(D_w D_{\dot c} V,\dot c)+g(D_{\dot c} V, D_w \dot c)](g(\dot c,\dot c))^{-1/2} dt$$

$$- \int_a^b g(D_{\dot c} V,\dot c) g(D_w \dot c,\dot c) g^{-3/2}(\dot c,\dot c) dt$$

$$= \int_a^b (g(\dot c,\dot c))^{-1/2}[g(R(W,\dot c)V,\dot c)+g(D_{\dot c} D_w V,\dot c)+g(D_{\dot c} V, D_{\dot c} W)]dt$$

$$- \int_a^b (g(\dot c,\dot c))^{-3/2} g(D_{\dot c} V,\dot c) g(D_{\dot c} W,\dot c) dt$$

La $2^{\text{ème}}$ égalité provient du fait que $[\dot c, V] = [\dot c, W] = 0$, (F2) est obtenue en remarquant que c est paramétrée par la longueur et que $D_{\dot c}\dot c = 0$.

Considérons $V^{\perp}(c)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs orthogonaux le long de c (i.e. si $Y \in V^{\perp}(c)$ alors $g(Y(t),\dot c(t)) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$ ce qui montre en particulier que Y est un champ de vecteurs spatial) et $V_0^{\perp}(c)$ le s.e.v. de $V^{\perp}(c)$ défini par : $V_0^{\perp}(c) = \{Y \in V^{\perp}(c)/Y(a) = Y(b) = 0\}$.

Si V et W sont dans $V_0^{\perp}(c)$ et si β est à extrémités fixes, (F2) devient :

$$\frac{\partial 2}{\partial w \partial v} L(v,w)\Big|_{(o,o)} = \int_a^b \{g(D_{\dot c} V, D_{\dot c} W) - g(R(V,\dot c)\dot c, W)\}dt = I(V,W)$$

ce qui définit une forme bilinéaire symétrique sur $V_0^{\perp}(c) \times V_0^{\perp}(c)$ appelée <u>forme d'index</u>.

Si la forme d'index est définie négative, cela exprime que la géodésique temporelle c est de longueur maximale parmi les courbes voisines ([8], p. 110, [5], section 9.1.).

Ecrire que : $g(D_{\dot c} V, D_{\dot c} W) = \dot c\, g(D_{\dot c} V, W) - g(D_{\dot c} D_{\dot c} V, W)$ nous permet de poser la :

<u>Définition 4.4.</u> : Soit $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$.
$c(t_2)$ est dit <u>point conjugué futur</u> de $c(t_1)$ le long de la

géodésique causale $c : [a,b] \to M$ *s'il existe un champ de vecteurs non identiquement nul* J *le long de* c *vérifiant :*

(*i*) $J(t_1) = J(t_2) = 0$

(*ii*) $D_{\dot{c}} D_{\dot{c}} J - R(\dot{c},J)\dot{c} = 0$ *dite* <u>*équation de Jacobi.*</u>

J *est dit champ de* <u>*Jacobi le long de* c</u>.

On définit de même un <u>point conjugué passé</u> le long d'une géodésique causale dirigée vers le passé.

La définition est valable que c soit une géodésique temporelle ou une géodésique nulle (comparer avec [5], section 9.3., et [9], p. 59).

Pour les espaces-temps à courbure constante, on a :

Soit $(E_i)_{i=1}^{d}$ une base orthonormée de champs parallèles le long de c ; où c est une géodésique temporelle.

1) Pour l'espace-temps de Minkowski de dimension d :

$$J(t) = \sum_{i=1}^{d} (a_i + bt) E_i$$

2) Pour l'espace-temps De Sitter (courbure $R > 0$)

$$J(t) = \sum_{i=1}^{d} (a_i \operatorname{ch}\sqrt{K}\, t + b_i \operatorname{sh}\sqrt{K}\, t) E_i \quad \text{où} \quad K = \frac{R}{d(d-1)}$$

3) Pour l'espace-temps Anti-De-Sitter (courbure $R < 0$)

$$J(t) = \sum_{i=1}^{d} (a_i \cos\sqrt{|K|}\, t + b_i \sin\sqrt{|K|}\, t) E_i$$

L'hypothèse $J(0) = 0$ entraîne $a_i = 0$ dans les trois cas. Ceci explique en particulier l'expansion des géodésiques dans l'espace-temps Anti-De-Sitter, le module des champs de Jacobi y est périodique de période $\frac{2\pi}{\sqrt{|K|}}$ (cf. figure 3).

Le <u>théorème d'index</u> pour les géodésiques temporelles s'écrit :

Théorème 4.5. : *Soit* $c : [a,b] \to M$ *une géodésique temporelle. Si pour tout* $t \in [a,b], c(t)$ *n'est pas un point conjugué futur de* $c(a)$ *le long de* c, *si* V *est un champ de vecteurs spatial le long de* c *vérifiant :* $V(a) = 0$, *il existe un champ de Jacobi unique* W *vérifiant :*

$W(a) = 0$, $W(b) = V(b)$ *et :*

$I(W,W) \leqslant I(V,V)$ *avec égalité si et seulement si* $V = W$.

Alors qu'en géométrie riemannienne on cherche à rendre la forme d'index maximale ([6], p. 24), en géométrie lorentzienne on cherche à la rendre minimale ce qui correspond à la recherche de géodésiques maximales.

Pour une démonstration de 4.5., cf. [3], p. 377 ou [5], section 9.1.

On en déduit le résultat fondamental suivant :

Théorème 4.6. : *Si* $c(t_0)$ *où* $t_0 \in]a,b]$ *est le premier point conjugué futur de* $c(a)$ *le long de la géodésique temporelle* $c : [a,b] \to M$, *alors* c *cesse d'être une courbe maximale pour* $t > t_0$.

Le théorème 4.6. affirme que s'il existe un point conjugué futur à $c(a)$ le long de c, on peut trouver une variation de c contenant des courbes de longueur plus grande que c entre $c(a)$ et $c(t)$, pour $t > t_0$ (comparer avec [6], p. 27).

Pour une démonstration de 4.6., cf. [8], p. 111 ou [5], section 9.1.

B - CAS DES GEODESIQUES NULLES

On ne peut plus utiliser la même méthode que dans le cas temporel pour la bonne et simple raison que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à l'origine et que pour une géodésique nulle $\nu : [a,b] \to M$, on a : $g(\dot{\nu}(t),\dot{\nu}(t)) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$.

Pour éviter ce problème, on introduit une fonction analogue à la fonction-longueur :

Définition 4.7. : *Soit* $c : [a,b] \to M$ *une courbe causale de classe* C^∞. *L'application de classe* C^∞ : $E_c : [a,b] \to \mathbb{R}$ *donnée par :*

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\int_a^t g(\dot{c}(s),\dot{c}(s))ds$$

est appelée *fonction-énergie* *de* c, *et* $E_c(b)$ *s'appelle l'énergie de la courbe* c.

Si on pose $L_c(t) = L(c|[a,t])$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne que : $L_c^2(b) \leqslant 2(b-a)E_c(b)$ avec égalité si et seulement si $g(\dot{c}(s),\dot{c}(s))$ est constant, en particulier si c est une géodésique temporelle ou nulle.

Pour obtenir un théorème équivalent à 4.6. pour les géodésiques nulles, il nous faut étudier (F1) et (F2) pour de telles géodésiques.

En particulier, l'exemple de la figure 12 nous montre ce que signifie la perte de maximalité pour une géodésique nulle.

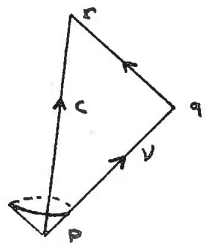


Figure 13 : r est situé sur une géodésique nulle brisée issue de p, mais il peut être atteint depuis p par une géodésique temporelle.

Cet exemple très simple dans l'espace-temps de Minkowski, nous conduit à :

Théorème 4.8. : *Si* p *et* q *sont reliés par une courbe causale qui n'est pas une géodésique nulle non brisée, ils peuvent être reliés par une courbe temporelle.*

La démonstration du théorème 4.8. s'appuie d'une part sur le lemme 2.2. et d'autre part sur le lemme suivant : (comparer avec [8], p. 112).

<u>*Lemme 4.9.*</u> : *([9], p. 15) Si* ν_1 *est un segment de géodésique nulle allant de* p *à* q, ν_2 *un segment de géodésique nulle de* q *à* r, *alors on a l'une ou l'autre des possibilités suivantes :*

(1) $r \in I^+(p)$

(2) $\nu_1 \cup \nu_2$ *constitue un seul et même segment de géodésique nulle allant de* p *à* r.

La figure 12 montre qu'on peut avoir à la fois (1) et (2).

<u>Démonstration</u> :

Si la seconde possibilité ne se produit pas, c'est que $\dot{\nu}_1$ et $\dot{\nu}_2$ n'ont pas la même direction au point q. Soit U un voisinage normal convexe en $\nu_1(q)$. On peut alors trouver $x \in \nu_1 \cap J^-(q)$, $y \in \nu_2 \cap J^+(q)$ tels que : $x \ll y$ (lemme 2.2.).

Dans ce cas, on a : $p < x \ll y < r$ et 3.8. entraîne que $p \ll r$.

On se propose de voir maintenant sous quelles conditions une variation d'une courbe causale c est formée de courbes temporelles.

<u>*Définition 4.10.*</u> : *Une variation de classe* C^∞ *(par morceaux)* $\alpha : [a,b]\times]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ *d'une courbe causale* $c : [a,b] \to M$ *est dite* <u>*admissible*</u> *si les courbes voisines* $\alpha_s : t \in [a,b] \to \alpha_s(t) = \alpha(t,s) \in M$ *sont temporelles, pour tout* s *non nul dans* $]-\varepsilon,\varepsilon[$.

Soit $\nu : [a,b] \to M$ une géodésique nulle et α une variation de classe C^∞ admissible à extrémité fixes de ν.

Soient $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial s}$ les champs de vecteurs coordonnées sur $[a,b]\times]-\varepsilon,\varepsilon[$, on pose $T = \alpha_*(\frac{\partial}{\partial t})$ et $V = \alpha_*(\frac{\partial}{\partial s})$. Dans ce cas, $T\big|_{(t,0)} = \dot{\nu}(t)$ et le champ de la variation α est $V\big|_{(t,0)}$, il vérifie :

$$V\big|_{(a,0)} = V\big|_{(b,0)} = 0 \quad \text{car } \alpha \quad \text{est à extrémités fixes.}$$

Puisque $g(T,T)\big|_{(t,s)} > 0$ pour $s \neq 0$ et que $g(T,T)\big|_{(t,0)} = 0$, il s'ensuit que : $\frac{d}{ds}\, g(T,T)\big|_{(t,0)} = 0.$ (1)

En remarquant que T et V commutent et que $D_T T = 0$ pour $s = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\, g(T,T)\big|_{(t,0)} &= 2g(D_V T,T)\big|_{(t,0)} = 2g(D_T V,T)\big|_{(t,0)} \\ &= 2\,\frac{d}{dt}\, g(V,T)\big|_{(t,0)} - 2g(V,D_T T)\big|_{(t,0)} \qquad (2) \\ &= 2\,\frac{d}{dt}\, g(V,T)\big|_{(t,0)}\end{aligned}$$

Posons : $F(t) = g(V,T)\big|_{(t,0)}$.

F est une fonction de classe C^∞ par morceaux vérifiant : $F(a) = F(b) = 0$

Si F n'était pas nulle pour tout $t \in [a,b]$, il existerait $t_0 \in]a,b[$ tel que $F'(t_0) > 0$ (par exemple) ce qui entraînerait :

$$\frac{d}{ds}\, g(T,T)\big|_{(t_0,0)} = 2F'(t_0) > 0 \quad \text{qui contredit (1).}$$

Il s'ensuit qu'une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'une variation soit admissible est que le champ de la variation V soit orthogonal à $\dot{\nu}(t)$, pour tout $t \in [a,b]$ (On peut noter que si V est un vecteur nul proportionnel à T, alors $g(V,T)\big|_{(t,0)} = 0$, mais dans ce cas la variation α équivaut à reparamétrer la géodésique nulle ν et n'est pas admissible).
Si α est une variation de ν dont le champ V vérifie la condition précédente, on a

$$\frac{d}{ds}\, (g(T,T))\big|_{(t,0)} = 2\,\frac{d}{dt}\, g(V,T)\big|_{(t,0)} = 0 \quad \text{et par suite :}$$

$$\frac{d}{ds}\, E_{\alpha_s}(b)\big|_{s=0} = 0.$$

Le problème est de voir que $E_{\alpha_s}(b)$ est minimale pour $s = 0$, il nous faut donc montrer que : $\frac{d^2}{ds^2}\, E_{\alpha_s}(b)\big|_{s=0} > 0.$

(2) entraîne que :

$$\frac{d^2}{ds^2}\, g(T,T)\Big|_{(t,0)} = 2\,\frac{d}{dt}\,\frac{d}{ds}\, g(V,T)\Big|_{(t,0)} - 2g(D_V V, D_T T)\Big|_{(t,0)}$$

$$-2g(V, D_V D_T T)\Big|_{(t,0)}$$

$$= 2\,\frac{d}{dt}\left[g(D_V V,T)+g(V,D_T V)\right]\Big|_{(t,0)}$$

$$-2g(V, D_T D_T V - R(T,V)T)\Big|_{(t,0)}$$

En combinant ce calcul avec le lemme 4.5.6. ([8], p. 108) on obtient :

<u>*Proposition 4.11.*</u> : *Une condition suffisante pour qu'une variation* α *de classe* C^∞ *(par morceaux)* : $[a,b]\times]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ *à extrémités fixes d'une géodésique nulle* $\nu : [a,b] \to M$ *soit une variation admissible pour* $s \neq 0$ *est que :*

1) $g(V(t),\dot{\nu}(t))\Big|_{(t,0)} = 0$ *pour tout* $t \in [a,b]$, V *étant le champ de la variation* α.

2) $\frac{d}{ds}\, g(T,T)\Big|_{(t,0)} = 0$ *pour tout* $t \in [a,b]$

3) $\frac{d}{dt}\; g(D_V V,T)+g(V,D_T V)\;\Big|_{(t,0)} - g(V,D_T D_T V - R(T,V)T)\Big|_{(t,0)} > 0$ *pour tout* $t \in [a,b]$.

La proposition 4.11. permet de démontrer :

<u>*Théorème 4.12.*</u> : *([5], section 9.3 ou [8], p. 115)*
S'il n'existe pas de point conjugué futur à $\nu(a)$ *le long de la géodésique nulle* $\nu : [a,b] \to M$, *il n'existe aucune variation de* ν *admissible.*

L'analogue du théorème 4.6. est alors :

<u>*Théorème 4.13.*</u> : *([5], section 9.3 ou [8], p. 115)*
Soit $\nu : [a,b] \to M$ *une géodésique nulle.*

Si $\nu(t_0)$ *est un point conjugué futur de* $\nu(a)$ *le long de* ν *pour* $t_0 \in]a,b[$, *il existe une courbe temporelle allant de* $\nu(a)$ *à* $\nu(b)$.

Remarque 4.14. : Il est à noter que les points conjugués à un point p le long d'une géodésique sont de manière équivalente les points où $(\exp_p)_*$ est singulière ([13], p. 90 ou [16], p. 38).

V - LES ESPACES-TEMPS FAIBLEMENT GLOBALEMENT HYPERBOLIQUES

Les espaces-temps globalement hyperboliques ont été introduits au chapitre II (2.7.). Une de leurs propriétés principales réside dans le théorème 2.8. Cependant la condition de globale hyperbolicité n'est pas une condition nécessaire à l'existence d'une géodésique maximale entre deux points pouvant être reliés causalement.

L'espace-temps $M = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 / 0 < t < 5,\ 0 < x < 5\}$ muni de la métrique $ds^2 = dt^2 - dx^2$ est un ouvert de l'espace-temps de Minkowski.

Si deux points de M peuvent être reliés par une courbe causale, alors il existe une géodésique causale maximale les reliant (en l'occurrence, ce sont des segments de droite). Mais M n'est pas globalement hyperbolique car si $p = (1,2)$ et $q = (1,4)$ par exemple ; $J^+(p) \cap J^-(q)$ n'est pas fermé.

En géométrie riemannienne, l'hypothèse variété complète entraîne l'existence d'une géodésique minimale entre deux points ([6], p. 11).

En géométrie lorentzienne, l'hypothèse espace-temps t-g-complet n'est pas suffisante, un contre-exemple étant l'espace-temps Anti-De-Sitter (voir figure 3).

L'idée est donc d'introduire un type d'espaces-temps qui n'est pas globalement hyperbolique, mais "presque".

Pour ce faire, on s'intéresse à la compacité de certains ensembles de courbes (les composantes connexes de $C(p,q)$) plutôt qu'à la compacité des ensembles de points $J^+(p) \cap J^-(q)$.

A - INTRODUCTION DES ESPACES-TEMPS FAIBLEMENT GLOBALEMENT HYPERBOLIQUES

Définition 5.1. : *On dira que deux courbes causales* c_1 *et* c_2 *définies sur l'intervalle* $[a,b]$ *sont t-homotopes (ou homotopes dans le temps) s'il existe une application continue (qu'on appelle t-homotopie)*

$$h : (u,t) \in [0,1]\times[a,b] \to h(u,t) \in M \quad \textit{telle que :}$$

$$(i)\ h(0,t) = c_1(t)$$
$$h(1,t) = c_2(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in [a,b].$$

(ii) $h(u,t) = h_u(t)$ *désigne une courbe causale définie sur* $[a,b]$, *pour tout* $u \in [0,1]$.
La t-homotopie h *est dite* <u>*à extrémités fixes*</u> p *et* q *si :*

(iii) $h(u,a) = p$
$h(u,b) = q$ *pour tout* u *dans* $[0,1]$.

La relation "est t-homotope à" est une relation d'équivalence ([14], p. 55). Dans le cas où h est une t-homotopie à extrémités fixes p et q, on note $\Omega_c(p,q)$ la classe d'équivalence d'une courbe causale c allant de p à q. $\Omega_c(p,q)$ est dite <u>classe de t-homotopie de la courbe causale c à extrémités fixes p et q</u>. On dira simplement classe de t-homotopie.

Pour déterminer les propriétés des classes de t-homotopie, le résultat suivant est essentiel :

<u>*Proposition et définition 5.2.*</u> :

Soient (M,g) *un espace-temps quelconque, et* $c : [a,b] \to M$ *une courbe causale allant de* p *à* q.
Il existe un voisinage ouvert V *de* c *dans* M *tel que : si* λ *est une courbe causale allant de* p *à* q *et entièrement située dans* V, λ *est t-homotope à* c. V *est dit* <u>*voisinage de t-homotopie*</u> *de la courbe* c.

<u>Démonstration</u> : Pour construire le voisinage ouvert V, on fait une approximation de la courbe c par des segments de géodésiques causales maximales (cf. 3.7.).

L'image $c([a,b])$ est compacte dans M, soit $U_1,\dots,U_N$ un recouvrement fini de $c([a,b])$ par des voisinages normaux convexes ouverts. On peut trouver une subdivision finie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ de $[a,b]$ telle que :

(i) $c(t_j) = x_j \quad j = 0,\dots,N$

(ii) $x_j \in U_j \cap U_{j+1} \quad j = 1,\dots,N-1$

(iii) $x_j < x_{j+1} \quad j = 0,\dots,N-1$.

On suppose de plus qu'aucune courbe causale quittant un des U_i n'y revient.

On note γ_j les segments de géodésiques causales maximales allant de x_{j-1} à x_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ dans chaque U_j. Dans ce cas, $\gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \gamma_j$ est une approximation de classe C^∞ par morceaux de la courbe c.

Soit X un vecteur temporel de T_pM et $(X)^\perp$ le sous-espace vectoriel de T_pM orthogonal à X, $(X)^\perp$ est spatial.

Soit S_1 l'hypersurface spatiale $\exp_p(X)^\perp$ restreinte à U_1.

On transporte parallèlement X et les vecteurs spatiaux qui engendrent S_1 le long de γ, et on appelle S_j l'hypersurface spatiale transportée contenant x_j et restreinte à U_j.

On va construire un voisinage ouvert V de c possèdant les propriétés suivantes :

(i) $V \supset \gamma$

(ii) $V \cap S_j$ sont disjoints deux à deux

(iii) $V \cap S_j$ partage V en deux composantes connexes.

Il existe un voisinage ouvert W_j de x_j tel que :

- $W_j \subset U_j \cap U_{j+1}$
- $S_j \cap W_i = \emptyset$ si $i \neq j$
- $S_j \cap W_j$ partage W_j en deux composantes connexes.

On pose :

$$V = \bigcup_{j=o}^{N-1} \left\{U_j \cap W_j \cap I^+(x_j) \cap I^-(x_{j+1})\right\} \cup \left\{I^-(q) \cap U_N\right\}$$

cf. errata

V est ouvert et vérifie les propriétés demandées.

Soit λ une courbe causale de classe C^1 définie sur $[a,b]$ et possèdant un vecteur tangent régulier. (Le résultat qu'on va démontrer sera vrai pour les courbes causales continues par densité).

On note $x_j' = \lambda([a,b]) \cap S_j$ $(1 \leqslant j \leqslant N-1)$ et $\lambda_j = \lambda|_{U_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$.

On paramètre λ de telle façon que $\lambda(t_j) = x_j'$.

Soit η_j l'unique géodésique spatiale située sur S_j qu'on suppose paramétrée sur $[0,1]$ reliant x_j à x_j'.

La proposition 5.2. va dépendre du lemme local suivant :

<u>Lemme 5.3.</u> : *Sous les notations ci-dessus, γ_j et λ_j sont t-homotopes dans chaque U_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$.*

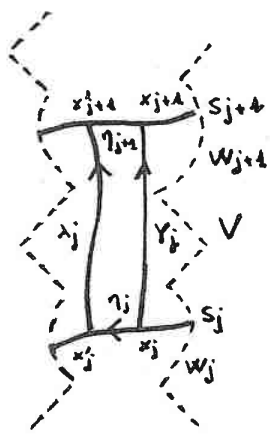


Figure 14

<u>Démonstration de 5.3.</u> :

Soit j fixé : $1 < j \leqslant N$.

On note $p_{\eta_j}(\eta_j(0),\eta_j(1))X$ = vecteur transporté parallèlement le long de η_j de $\eta_j(0)$ à $\eta_j(1)$ qui est X en $\eta_j(0)$.

On note $p_{\overline{\eta}_j}$ le transport parallèle dans le sens inverse.

Pour $u \in [0,1]$, on pose :

$$Z_j(u) = (1-u)p_{\eta_j}(\eta_j(0),\eta_j(u))\dot{\gamma}_j(t_j^+)+up_{\overline{\eta}_j}(\eta_j(1),\eta_j(1-u))\dot{\lambda}_j(t_j)$$

(Dans le cas où γ est différentiable en t_j, on prend $\dot{\gamma}_j(t_j)$, sinon $\dot{\gamma}_j(t_j^+)$).

On a : $Z_j(0) = \dot{\gamma}_j(t_j^+)$ et $Z_j(1) = \dot{\lambda}_j(t_j)$.

Pour $u \in]0,1[$ on a : $g(Z_j(u),Z_j(u)) \geqslant 0$ car le transport parallèle conserve le produit scalaire et $g(\dot{\gamma}_j(t_j^+),\dot{\lambda}_j(t_j)) \geqslant 0$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz renversée.

Z_j est un champ de vecteurs causal défini sur $[0,1]$ le long de la géodésique spatiale η_j.

Considérons : $h_j : (u,t) \in [0,1]\times[t_j,t_{j+1}] \to h_j(u,t) \in M$ définie comme suit :

$h_j(u,t)$ est la courbe intégrale paramétrée sur $[t_j,t_{j+1}]$ du champ $Z_j(u)$.

On a : $h_j(0,t) = \gamma_j(t)$, $h_j(1,t) = \lambda_j(t)$ et $h_j(u,t)$ est une courbe causale allant de S_j à S_{j+1} définie sur $[t_j,t_{j+1}]$, pour tout $u \in]0,1[$.

Le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle nous donne la continuité de h_j, il s'ensuit que h_j est la t-homotopie recherchée.

Dans le cas particulier où $j = 1$, on considère simplement le champ de vecteurs causal $Z_1(u) = (1-u)\dot{\gamma}_1(a)+u\dot{\lambda}(a)$.

<u>Suite de la démonstration de 5.2.</u> :

Soit $H : [0,1]\times[a,b] \to M$ telle que :

$$H|[0,1]\times[t_j,t_{j+1}] = h_j \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant N.$$

On a : $H(0,t) = \gamma(t)$, $H(1,t) = \lambda(t)$

$$H(u,a) = h_1(u,a) = p$$

$$H(u,b) = h_N(u,b) = q \quad \text{pour tout} \quad u \in [0,1].$$

$H(u,t)$ définit une courbe causale sur $[0,1]\times[a,b]$ par construction des $h_j(u,t)$. Quitte à faire un changement de paramétrage, on peut paramétrer les courbes causales $H(u,t)$ de telle façon que :

$$H(u,t_j) \in S_j \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant N+1, \text{ pour tout} \quad u \in [0,1].$$

On a alors :

$$H(u,t_j) = h_j(u,t_j) = h_{j+1}(u,t_j) \quad \text{pour tout} \quad u \in [0,1]$$

et ceci entraîne la continuité de H. On en déduit que γ et λ sont t-homotopes à extrémités fixes, et par suite, puisque $c \in V$, γ et c sont également t-homotopes à extrémités fixes p et q.

<u>*Corollaire 5.4.*</u> : *Soit (M,g) un espace-temps quelconque. Les classes de t-homotopie à extrémités fixes p et q sont les composantes connexes de $C(p,q)$.*

<u>Démonstration</u> : Elle se fait en deux étapes :

(1) $\Omega.(p,q)$ est connexe par arc.

Soient $c \in C(p,q)$, c_1 et c_2 quelconques dans $\Omega_c(p,q)$, h définissant la t-homotopie entre c_1 et c_2.

Posons :

$$H : u \in [0,1] \to H(u) = h_u \in \Omega_c(p,q)$$

où $h_u : t \in [a,b] \to h_u(t) \in M$ est une courbe de $\Omega_c(p,q)$.

H est un chemin continu dans $\Omega_c(p,q)$ d'origine c_1 et d'extrémité c_2.

Réciproquement, si $H : u \in [0,1] \to h_u \in C(p,q)$ (où $h_u : [a,b] \to M$ est une courbe causale allant de p à q) définit un chemin continu d'origine c_1 et d'extrémité c_2, alors $c_1(t) = h_0(t)$ et $c_2(t) = h_1(t)$ et h définit une t-homotopie à extrémités fixes entre c_1 et c_2 ([14], p. 68 ,

$\mathcal{C}([0,1],\mathcal{C}([a,b],M))$ est homéomorphe à $\mathcal{C}([0,1]\times[a,b],M))$.

Ceci prouve que toute partie connexe par arc contenant c est nécessairement toute entière dans $\Omega_c(p,q)$ et par suite, $\Omega_c(p,q)$ est la composante connexe par arc de c dans $C(p,q)$.

(2) Si c_1 est une courbe causale quelconque de $C(p,q)$ et V un voisinage quelconque de c_1, 5.2. entraîne l'existence d'un voisinage de t-homotopie W de c_1 tel que : $W \subset V$ et W connexe par arc d'après (1), ce qui prouve que $C(p,q)$ est localement connexe par arc et par suite que les $\Omega.(p,q)$ sont les composantes connexes de $C(p,q)$ ([14], p. 22).

<u>Corollaire 5.5.</u> : *Soit* (M,g) *un espace-temps fortement causal et t-g-complet. Soit* c *une courbe causale quelconque définie sur* $[a,b]$ *allant de* p *à* q.
Alors, $\Omega_c(p,q)$ *est fermée dans* $C(p,q)$ *pour la* C^0*-topologie.*

<u>Démonstration</u> : Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega_c(p,q)$ pour tout n, une suite de courbes causales définies sur $[a,b]$, et soit c_1 une courbe limite de la suite (c_n) définie aussi sur $[a,b]$.

3.6. entraîne qu'il existe une sous-suite (c_m) de (c_n) qui converge vers c_1 dans la C^0-topologie.

Si V est un voisinage de t-homotopie, il existe N tel que :

$$c_m \subset V, \text{ pour tout } m \geq N.$$

Dans ces conditions, 5.2. entraîne que c_m est t-homotope à c_1 pour tout $m \geq N$ et par suite que $c_1 \in \Omega_c(p,q)$.

L'hypothèse t-g-complet est nécessaire dans le corollaire 5.5., il suffit d'enlever un point à l'espace-temps de Minkowski pour s'en rendre compte.

<u>Remarque 5.6.</u> : Il est à noter que si $\nu : [a,b] \to M$ est une géodésique nulle ne contenant pas de points conjugués, alors ν ne possède pas de voisinage de t-homotopie, et $\Omega_\nu(\nu(a),\nu(b))$ se réduit à la seule géodésique ν. En particulier, les corollaires 5.4. et 5.5. sont bien vérifiés.

Si ν contient un point conjugué futur à $\nu(a)$, dans ce cas il existe une courbe temporelle c allant de $\nu(a)$ à $\nu(b)$, suffisamment proche de ν pour que $\nu \in \Omega_c(\nu(a),\nu(b))$ et on est ramené au cas des courbes temporelles. (cf. 4.13.).

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser au nombre de classes de t-homotopie qu'il peut y avoir dans $C(p,q)$ et voir comment ce nombre peut être lié à certaines hypothèses globales sur l'espace-temps.

<u>Lemme 5.7.</u> : *Soit* (M,g) *un espace-temps quelconque.*
Soit $p \in M$ *et* $q \in U \cap J^+(p)$ *où* U *est un voisinage normal convexe en* p.

Si c *est une courbe causale allant de* p *à* q *dans* U*, alors* c *est t-homotope à l'unique géodésique causale allant de* p *à* q *dans* U.

Démonstration : La construction du voisinage de t-homotopie d'une courbe causale en 5.2. montre que $U \cap I^+(p)$ peut être considéré comme un voisinage de t-homotopie de toute courbe causale allant de p à q dans U, pour $q \in I^+(p)$.

Si $q \in (J^+(p) \setminus I^+(p)) \cap U$, 1.12. entraîne que la seule courbe causale allant de p à q dans U est un segment de géodésique nulle, ce qui achève la démonstration.

Définition 5.8. : *Soit* (M,g) *un espace-temps quelconque et* $p \in M$.
On note F_p^+ *l'ensemble des points* $q \in M$ *tels que :*

i) $q \in J^+(p)$

ii) le nombre de classes de t-homotopie à extrémités fixes p *et* q *est fini.*

L'intérieur de F_p^+ *sera noté* $\overset{\circ}{F}{}_p^+$ *, son bord* ∂F_p^+.

On définit de même F_p^- en considérant les courbes causales dirigées vers le passé.

Il est à noter que étant donné $p \in M$, on a :

$$F_p^+ \subset J^+(p).$$

Le lemme suivant nous donne une condition suffisante mais non nécessaire pour qu'un point q soit dans F_p^+.

Lemme 5.9. : *Soit* (M,g) *un espace-temps fortement causal.*
Soient $p \in M$ *et* $q \in J^+(p)$ *tels que :* $C(p,q)$ *est compact.*
Dans ce cas, $q \in F_p^+$.

Démonstration : Supposons le lemme faux, et prenons une courbe dans chaque classe de t-homotopie (elles sont disjointes). On fabrique ainsi une suite

infinie (c_n) de courbes de $C(p,q)$ qui est compact . Cette suite possède donc une courbe limite c_1. Puisque (M,g) est fortement causal, il existe une sous-suite (c_m) de (c_n) qui converge vers c_1 dans la C°-topologie.

Soit V un voisinage de t-homotopie de c_1, dans ce cas, il existe N tel que : $c_m \subset V$ pour tout $m \geqslant N$.

La proposition 5.2. entraîne alors que c_m et c_1 sont t-homotopes pour tout $m \geqslant N$, ce qui est une contradiction.

Remarque 5.10. : Pour voir que la condition $C(p,q)$ compact n'est pas une condition nécessaire, il suffit d'examiner la figure 3 : le nombre de classes de t-homotopie de courbes causales allant de p à q est 1, par contre $C(p,q)$ n'est pas compact car les points de rencontres des géodésiques nulles issues de p et q avec les bords $x = \pm \frac{\pi}{2}$ sont manquants.

Les espaces-temps globalement hyperboliques ont été définis en 2.7., et on montre que : $J^+(p) \cap J^-(q)$ compact pour tous p et q dans (M,g) fortement causal est équivalent à $C(p,q)$ compact pour tous p et q dans M ([8], p. 208).

Une conséquence immédiate de 5.9. est donc :

Corollaire 5.11. : *Soit (M,g) un espace-temps globalement hyperbolique, et q quelconque dans M, alors tout point q dans $J^+(p)$ est dans F_p^+.*

Ceci donne une caractéristique de F_p^+ pour $p \in (M,g)$ espace-temps globalement hyperbolique particulièrement simple :

$$F_p^+ = J^+(p).$$

Il n'existe a priori aucune relation entre la distance lorentzienne et le nombre de classe de t-homotopie à extrémités fixes dans un espace-temps quelconque.

Mais, si (M,g) est globalement hyperbolique, le lemme 3.16 et le corollaire 5.11. donnent que :

si $q \in F_p^+ = J^+(p)$ alors $d(p,q) < \infty$.

Il faut prendre garde à la réciproque de cette relation.

En effet, supposons qu'on ait $d(p,q) = 0$, dans ce cas, soit $q \notin J^+(p)$ et alors $q \notin F_p^+$, soit il existe une géodésique nulle maximale ν allant de p à q qui détermine la seule classe de t-homotopie à extrémités fixes p et q, et alors $q \in F_p^+$.

Si maintenant $d(p,q) > 0$ (il est à noter qu'on a toujours $d(p,q) < \infty$ dans un espace-temps globalement hyperbolique, 3.16.) alors $q \in I^+(p)$ et en particulier $q \in F_p$ par 5.11.

On peut rassembler les résultats dans la proposition suivante :

<u>*Proposition 5.12.*</u> : *Soit (M,g) un espace temps globalement hyperbolique. Pour tout point p de M, on a :*

i) $F_p^+ = J^+(p)$

ii) si $q \in F_p^+$ *alors* $d(p,q) < \infty$

iii) si $d(p,q) > 0$ *alors* $q \in F_p^+$.

Une autre propriété particulière des espaces-temps globalement hyperboliques est la suivante :

<u>*Lemme 5.13.*</u> : *Si (M,g) est un espace-temps globalement hyperbolique, alors les classes de t-homotopie à extrémités fixes sont compactes.*

C'est une conséquence du fait que $C(p,q)$ est compact pour tous p et q dans M ([8], p. 208) et que les classes de t-homotopie à extrémités fixes sont fermées dans $C(p,q)$ (5.5., l'hypothèse t-g-complet n'étant plus nécessaire ici).

Réciproquement, si $C(p,q)$ est réunion finie de classes de t-homotopie compactes pour tous p et q dans M, il est compact et donc (M,g) est globalement hyperbolique. Ce qui donne la :

<u>*Proposition 5.14.*</u> : *Soient p et q quelconques dans (M,g) espace-temps t-g-complet et fortement causal.*

1) *$C(p,q)$ est compact si et seulement si les classes de t-homotopie à extrémités fixes p et q sont compactes et en nombre fini.*

2) *(M,g) est un espace-temps globalement hyperbolique si et seulement si les classes de t-homotopie à extrémités fixes sont compactes et en nombre fini. (t-g-complet non nécessaire).*

En général, l'ensemble des classes de t-homotopie à extrémités fixes p et q est dénombrable, ([15], p. 114), ce qui amène à poser :

Définition 5.15. : *([15], p. 114) Un espace-temps (M,g) est dit* *faiblement globalement hyperbolique* *(en abrégé F.G.H.) si :*

(i) (M,g) est fortement causal.

(ii) si c est une courbe causale quelconque allant de p à q, $\Omega_c(p,q)$ est compacte dans $C(p,q)$.

La proposition 5.14. nous donne immédiatement un premier exemple d'espaces-temps F.G.H. : les espaces-temps globalement hyperboliques.

Une autre sorte d'exemples nous est donnée par le lemme 1, II d'A. AVEZ ([1], p. 141) :

La classe de t-homotopie à extrémités fixes d'une courbe temporelle dans un espace-temps compact ou t-complet au sens de Ehresmann (i.e. toute courbe causale de T_pM est le développement d'une courbe causale dans M) est compacte.

Le théorème 2.5. nous oblige à écarter les espaces-temps compacts, mais la remarque 5.6. nous donne le :

Lemme 5.16. : *Un espace-temps t-complet au sens de Ehresmann et fortement causal est un espace-temps F.G.H.*

Les espaces-temps de Minkowski et De-Sitter sont F.G.H. car globalement hyperboliques, par contre l'espace-temps Anti-De-Sitter ne l'est pas (remarque 5.10.).

B - PROPRIETES DES ESPACES-TEMPS F.G.H.

Proposition 5.17. : *Soit* (M,g) *un espace-temps F.G.H.*
Si p *et* q *sont deux points de* M *reliés par une courbe temporelle, ils peuvent être reliés par une géodésique temporelle.*

Démonstration :

Soit $c : [a,b] \to M$ une courbe temporelle allant de p à q.

Puisque $\Omega_c(p,q)$ est compact et que la fonction-longueur est semi-continue supérieurement sur $C(p,q)$ (3.9.), elle atteint un maximum pour une courbe γ de $\Omega_c(p,q)$. Puisque γ est la courbe la plus longue de sa classe, la formule de la variation première (F_1) entraîne que γ est une géodésique (temporelle).

Nota bene : La proposition est vraie, que $d(p,q)$ soit finie ou non.

Supposons maintenant que $q \in J^+(p)$ dans (M,g) F.G.H.

Si p et q ne sont pas situés sur une géodésique nulle non brisée (cf. 4.8.),

Si q arrive après le premier point conjugué futur de p le long d'une géodésique nulle (cf. 4.13.), on peut se ramener à 5.17.

Si $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ et c'est le dernier cas, le lemme 3.20. assure l'existence d'une géodésique nulle maximale allant de p à q (l'hypothèse F.G.H. n'étant d'ailleurs pas nécessaire ici).

Ceci nous permet d'avoir :

Proposition 5.18. : *Soit* (M,g) *un espace-temps F.G.H.*
Soit $c : [a,b] \to M$ *une courbe causale allant de* p *à* q.
Alors il existe une géodésique causale de longueur maximale dans la classe de t-homotopie $\Omega_c(p,q)$.

La relation entre le nombre de classes de t-homotopie et la distance lorentizienne est la même que pour les espaces-temps globalement hyperpoliques :

Proposition 5.19. : *Soit* (M,g) *un espace-temps F.G.H. et* $p \in M$.
Si $q \in F_p^+$ *alors* $d(p,q) < \infty$.

Démonstration : Puisque $q \in F_p^+$, il n'existe qu'un nombre fini de classes de t-homotopie et elles sont compactes. Il suffit alors de prendre la géodésique γ la plus longue parmi les géodésiques de longueur maximale de chaque classe donnée par 5.18. et par définition de la fonction distance :

$$L(\gamma|[p,q]) = d(p,q).$$

Une des conséquences de la proposition 5.19. est le théorème 2.8.

La proposition suivante nous donne une caractérisation de F_p^+ dans les espaces-temps F.G.H. :

Proposition 5.20. : *Soit* (M,g) *un espace-temps F.G.H. et* $p \in M$, $q \in J^+(p)$.
Alors $C(p,q)$ *compact* $\Leftrightarrow q \in F_p^+$.

Démonstration :

($\Rightarrow$) est donné par 5.9.

($\Leftarrow$) puisque $q \in F_p^+$, $C(p,q)$ est réunion finie de classes de t-homotopie à extrémités fixes p et q compactes, il est donc lui-même compact.

Proposition 5.21. : *Soit* (M,g) *un espace-temps F.G.H.*, $p \in M$ *et* $q \in J^+(p)$.

i) Si $q \notin F_p^+$ *alors pour tout* $q' \in J^+(p)$ *on a :* $q' \notin F_p^+$.

ii) Si $q \in F_p^+$ *alors pour tout* $q' \in J^+(p) \cap J^-(q)$ *on a :* $q' \in F_p^+$.

Démonstration :

1) Soient $q \notin F_p^+$ et U un voisinage normal convexe en q, et $q' \in J^+(p) \cap U$.

Prolongeons toutes les courbes causales allant de p à q par l'unique segment de géodésique causale allant de q à q' dans U.

Puisque $C(p,q)$ n'est pas compact, il existe une suite de courbes causales (c_n) dans $C(p,q)$ qui n'a pas de courbe limite dans $C(p,q)$. Considérons maintenant la suite (c_n) en tant que suite de courbes allant de p à q'. La courbe limite de c_n ne passant pas par q ne peut être prolongée de q à q' et donc $c_n|[p,q']$ ne possède pas de courbe limite dans $C(p,q')$, ce qui entraîne que $C(p,q')$ n'est pas compact et en particulier que $q' \notin F_p^+$ (5.20.).

2) S'il existait $q' \in J^+(p) \cap J^-(q)$ tel que $q' \notin F_p^+$, la première partie entraînerait que $q \notin F_p^+$, ce qui est une contradiction.

D'après 3.15, la fonction-distance est semi-continue inférieurement là où elle est finie ; elle n'est pas forcément continue pour un espace-temps quelconque (M,g), mais elle est continue pour (M,g) globalement hyperbolique ([8], p. 216, [5], section 3).

Pour un espace-temps F.G.H. on a :

<u>*Proposition 5.22.*</u> : *Si (M,g) est un espace-temps F.G.H. ; si $p \in M$ et si $q_n \to q$ où $q \in \mathring{F}_p^+$ alors :*

$$d(p,q_n) \to d(p,q) \quad \textit{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que :

$$\limsup d(p,q_n) \leqslant d(p,q)$$

(Il est à noter que si $d(p,q) = \infty$, cette inégalité est toujours vérifiée).

Supposons que ce n'est pas vrai, alors il existe $\delta > 0$ et une suite (q_n) de points de $J^+(p)$ de limite q telle que :

$$d(p,q_n) \geqslant d(p,q)+2\delta \quad \text{pour tout} \quad n.$$

Par définition de la fonction distance, ceci entraîne l'existence d'une courbe causale c_n allant de p à q_n telle que :

$$L(c_n|[p,q_n]) \geqslant d(p,q)+\delta.$$

Supposons que la suite (c_n) ait une courbe limite c allant de p à q, alors il existe une sous-suite (c_m) de (c_n) qui converge vers c dans la C°-topologie (3.6.) et :

$$L(c|[p,q]) \geqslant \overline{\lim}\, L(c_n|[p,q_n]) \geqslant d(p,q)+\delta \qquad (3.11)$$

ce qui est une contradiction.

Tout revient à prouver que :

<u>*Proposition 5.23.*</u> : *Soient (M,g) un espace-temps F.G.H., $p \in M$, (c_n) une suite de courbes causales allant de p à q_n pour tout n. Si $q \neq p$ limite de la suite de points (q_n) est tel que :*

$q \in \overset{\circ}{F}{}^+_p$ alors :

La suite (c_n) possède une courbe limite c allant de p à q.

<u>Démonstration</u> : Les classes de t-homotopie $\Omega_{c_n}(p,q_n)$ sont disjointes et compactes pour tout n, et soit λ_n la géodésique causale de longueur maximale dans $\Omega_{c_n}(p,q_n)$ (donnée par 5.18.).

Soit U un voisinage normal convexe en q, et puisque q est limite de (q_n), il existe un entier N_1 tel que :

$$q_n \in U \quad \text{pour} \quad n \geqslant N_1.$$

Soit $q' \in J^+(q) \cap U \cap \overset{\circ}{F}{}^+_p$ (ce choix est possible car $q \in \overset{\circ}{F}{}^+_p$) et U' un voisinage de q tel que : $U' \subset I^-(q') \cap U$.

Il existe un entier $N_1' \geqslant N_1$ tel que : $q_n \in U'$ pour $n \geqslant N_1'$.

Prolongeons alors chaque λ_n vers le futur par le segment de géodésique causale maximale unique allant de q_n à q' dans U, pour $n \geqslant N_1'$. On continue

à appeler les courbes causales ainsi construites λ_n.

Puisque $q' \in \overset{\circ}{F}{}^+_p$, $C(p,q')$ est compact (5.20.) et la suite (λ_n) possède une courbe limite λ dans $C(p,q')$.

Puisque la suite des segments de géodésiques de q_n à q' $(n \geqslant N_1')$ converge vers le segment de géodésique allant de q à q', la courbe limite λ est une courbe causale (3.3.) allant de p à q' passant par q.

=-=-=-=-=

Supposons maintenant que (M,g) est un espace-temps globalement hyperbolique, dans ce cas $F^+_p = J^+(p)$.

Soient (p_n) et (q_n) deux suites de points de limites p et q telles que : $q_n \in J^+(p_n)$ pour tout n, $p \neq q$ et $q \in J^+(p)$, et (c_n) une suite de courbes causales allant de p_n à q_n.

Construisons comme dans la proposition 5.23. un point q' : soient U un voisinage normal convexe en q et $q' \in J^+(q) \cap U$, U' un voisinage de q tel que : $U' \subset I^-(q') \cap U$.

Il existe un entier N_1 tel que : $q_n \in U'$ pour $n \geqslant N_1$.

Soient maintenant V un voisinage normal convexe en p, $p' \in J^-(p) \cap V$ et V' un voisinage de p' tel que :

$$V' \subset I^+(p') \cap V.$$

Il existe un entier N_2 tel que : $p_n \in V'$ pour $n \geqslant N_2$.

Soit $N = \mathrm{MAX}(N_1,N_2)$.

Prolongeons les c_n vers le futur de q_n à q' par l'unique segment de géodésique causale dans U pour $n \geqslant N$, et prolongeons-les également vers le passé par l'unique segment de géodésique causale dirigée vers le passé allant de p_n à p' dans V, pour $n \geqslant N$.

On obtient une suite de courbes qu'on appelle (λ_n) dans $C(p',q')$ qui est compact car (M,g) est globalement hyperbolique.

Dans ce cas ; la suite (λ_n) possède une courbe limite λ dans $C(p',q')$ qui passe par p car p est un point limite de la suite (λ_n) (3.4.).

D'autre part, en utilisant le même argument qu'à la fin de la démonstration 5.23., λ passe obligatoirement par q.

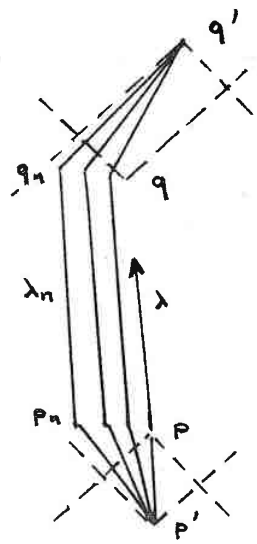


Figure 15

Il s'ensuit que :

Proposition 5.24. : *Soient* (M,g) *un espace-temps globalement hyperbolique,* (p_n) *et* (q_n) *deux suites de points ayant pour limites* p *et* q *respectivement telles que :*

$$p \neq q,\ q \in J^+(p) \quad \text{et} \quad q_n \in J^+(p_n) \quad \text{pour tout} \quad n.$$

Si (c_n) *est une suite de courbes causales allant de* p_n *à* q_n *alors* (c_n) *; possède une courbe limite* c *allant de* p *à* q.

Corollaire 5.25. : *Si* (M,g) *est un espace-temps globalement hyperbolique, la fonction distance est continue.*

Démonstration :

La fonction distance est semi-continue inférieurement là où elle est finie (3.15.), et 3.16. montre que si (M,g) est globalement hyperbolique, d est toujours finie.

Comme dans 5.22., il suffit de montrer que d est semi-continue supérieurement.

Supposons que ce n'est pas vrai ; alors il existe $\delta > 0$ et deux suites de points (p_n) et (q_n) de limites respectives p et q telles que $q \in J^+(p)$, $q_n \in J^+(p_n)$ et

$$d(p_n,q_n) \geqslant d(p,q)+2\delta \quad \text{pour tout } n.$$

Puisque la distance est définie par un sup, il existe une courbe causale c_n allant de p_n à q_n telle que :

$$L(c_n|[p_n,q_n]) \geqslant d(p,q)+\delta \quad \text{pour tout } n.$$

Or ; 5.24. entraîne que la suite (c_n) a une courbe limite c allant de p à q, et puisqu'il existe une sous-suite (c_m) de (c_n) qui converge vers c dans le C°-topologie (3.6.), 3.11. donne que :

$$L(c|[p,q]) \geqslant d(p,q)+\delta \quad \text{ce qui est absurde.}$$

VI - LE CUT-LOCUS DANS LES ESPACES-TEMPS FAIBLEMENT GLOBALEMENT HYPERBOLIQUES

L'étude des cut-points en géométrie lorentzienne a été faite récemment sur les espaces-temps globalement hyperboliques ([2], [3], [4]). Elle s'est avérée utile notamment pour démontrer certains théorèmes d'incomplètude ([2], p. 170) et pour l'étude globale des espaces-temps globalement hyperboliques.

Comme pour l'étude des points conjugués, il y a beaucoup de ressemblances entre le cas riemannien ([6], P. 93) et le cas temporel lorentzien, cependant le cas nul lorentzien est encore une fois bien particulier. On traite donc ces deux cas séparément, pour les espaces-temps faiblement globalement hyperboliques, la troisième section parlant du cut-locus causal et de certaines propriétés de fermeture de celui-ci.

A - LE CUT-LOCUS TEMPOREL

Définition 6.1. : *Soient* (M,g) *un espace-temps quelconque, et* $c : [0,a[\to M$ *une géodésique temporelle interminable vers le futur.*
Soit $t_0 = \sup\{t \in [0,a[/ d(c(0),c(t)) = L(c[[0,t]])\}$.
Si $t \in]0,a[$, $c(t_0)$ *est dit le* *cut-point temporel futur* *de* $c(0)$ *le long de* c.

On définit de manière analogue le cut-point temporel passé sur une géodésique temporelle dirigée vers le passé et interminable vers le passé.

Les premières propriétés des cut-points temporels futurs sont :

(1) $c|[0,t]$ est une courbe maximale pour tout $t \leqslant t_0$ puisqu'une courbe maximale est maximale entre chacun de ses points (3.18.).

(2) $c|[0,t]$ est l'unique courbe temporelle maximale de $c(0)$ à $c(t)$ (à une paramétrisation près) pour $t < t_0$.

En effet, si on suppose (2) faux, il existe une autre courbe temporelle maximale γ définie sur $[0,b[$ reliant $c(0)$ à $c(t)$.

Soient t_1 et t_2 dans $[0,t_0[$ tels que : $t_1 < t < t_2 < t_0$ où t_1 et t_2 sont suffisamment proches pour que $c(t_2) \in I^+(\gamma(t_1)) \cap U$ où U est un voisinage normal convexe en $c(t)$.

Le théorème 3.12. entraîne qu'il existe un segment de géodésique temporel maximal unique γ_1 situé dans U et allant de $\gamma(t_1)$ à $c(t_2)$.

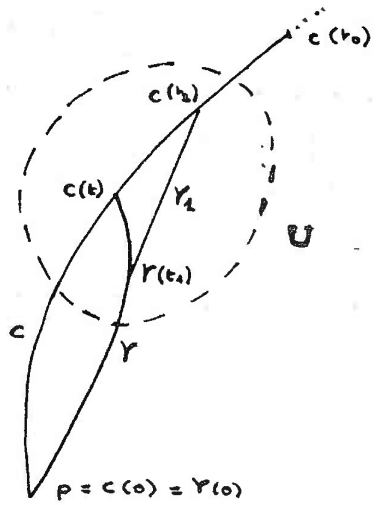


Figure 16

On pose : $c_1 = \gamma|[0,t_1] \cup \gamma_1$, on a :

$$L(c_1|[p,c(t_2)]) = d(p,\gamma(t_1)+d(\gamma(t_1),c(t_2))$$

$$\geqslant d(p,\gamma(t_1))+d(\gamma(t_1),c(t))+d(c(t),c(t_2))$$

$$= L(c|[p,c(t_2)])$$

où l'inégalité provient de l'inégalité triangulaire renversée, la deuxième égalité provenant du fait que c et γ sont maximales de p à $c(t)$. On aboutit à une contradiction car $c|[0,t_2]$ est maximale.

(3) Si $t > t_0$, on déduit de l'inégalité triangulaire renversée qu'il existe une courbe causale σ allant de $c(0)$ à $c(t)$ vérifiant :

$$L(\sigma) > L(c|[0,t]).$$

(4) Une géodésique temporelle $c : [0,a[\to M$ cesse d'être une courbe maximale après un point conjugué (4.6.), il s'ensuit que le cut-point futur de $c(0)$ le long de c arrive avant ou sur le premier point conjugué à $c(0)$ le long de c.

Il est à noter que dans l'espace-temps de Minkowski, il n'existe pas de cut-point futur à un point le long d'une géodésique temporelle (s'il existait, il serait à l'infini).

La proposition suivante donne une caractérisation des cut-points temporels futurs par analogie avec la géométrie riemannienne ([6], p. 93). Plus précisément :

<u>*Proposition 6.2.*</u> : *Soit* (M,g) *un espace-temps F.G.H.*
Si $q = c(t_0)$ *est le cut-point temporel futur de* $p = c(0)$ *le long de la géodésique temporelle* c *et si* $q \in \overset{\circ}{F}{}^{+}_{p}$, *on a soit l'une soit les deux assertions suivantes :*

i) q *est le premier point conjugué futur à* p *le long de* c.

ii) Il existe au moins deux segments de géodésiques temporelles maximales allant de p *à* q.

<u>Démonstration</u> : Soit (ε_n) une suite de nombres positifs décroissante vers 0, on pose : $q_n = c\,(t_0+\varepsilon_n)$ pour tout n.

Pour N suffisamment grand, on a $q_n \in \overset{\circ}{F}{}^{+}_{p}$ pour tout $n \geqslant N$.

La propriété (3) assure l'existence de courbes causales λ_n allant de p à q_n vérifiant :

$$L(\lambda_n|[p,q_n]) > L(c|[p,q_n]),\ n \geqslant N.$$

Les classes de t-homotopie $\Omega_{\lambda_n}(p,q_n)$ sont compactes et 5.17. entraîne l'existence d'une géodésique temporelle encore appelée λ_n de longueur maximale dans $\Omega_{\lambda_n}(p,q_n)$, $n \geqslant N$. On suppose que les λ_n sont définies sur $[0,b[$ et paramétrées par la longueur. Par construction, $q_n \in J^+(p)$ et q est limite de la suite (q_n). La proposition 5.23 entraîne l'existence d'une courbe causale limite λ allant de p à q et 5.17. entraîne l'existence d'une géodésique temporelle qu'on appelle encore λ allant de p à q, de longueur maximale dans sa classe de t-homotopie qu'on suppose définie sur $[0,b[$.

Deux cas peuvent alors se produire :

(1) $\dot\lambda(0) = \dot c(0)$, alors si $(\exp_p)_*$ n'était pas singulière en q, il existerait un voisinage V de T_pM difféomorphe à un voisinage U de q dans M par $\exp_p$ (théorème des fonctions implicites).

Pour n suffisamment grand, $\dot\lambda_n(0) \in V$, or les géodésiques λ_n et la géodésique c se coupent en q_n, ce qui donne une contradiction.

En particulier, ceci signifie que q est un point conjugué futur à p le long de c (4.14.), la propriété (4) assurant que q doit être le premier point conjugué futur à p le long de c.

(2) $\dot{\lambda}(0) \neq \dot{c}(0)$ et dans ce cas :

$$L(\lambda|[p,q]) = \lim\sup(\lambda_n|[p,q_n]) \geqslant \lim\sup L(c|[p,q_n])$$

La maximalité de c entre p et q entraîne que :

$$d(p,q) = L(c|[p,q]) = L(\lambda|[p,q])$$

et λ est un autre segment de géodésique temporelle maximale allant de p à q.

Dans le cas où (M,g) est un espace globalement hyperbolique, la condition $q \in \overset{\circ}{F}{}^{+}_{p}$ est inutile et on utilise la proposition 5.24. à la place de 5.23. dans la démonstration.

Comme dans le cas riemannien ([6], p. 94), on construit une fonction qui "mesure" la distance d'un point à son cut-point futur le long d'une géodésique temporelle. Pour cela :

<u>*Définition 6.3.*</u> : *Soit (M,g) un espace-temps quelconque.*
$T^1M = \{X \in TM / g(X,X) = 1,\ X$ orienté vers le futur$\}$.
Si $p \in M$, T^1_pM est la fibre de T^1M en p, la projection $T^1M \to M$ est notée π.
Etant donné $X \in T^1_pM$, on note c_X l'unique géodésique temporelle vérifiant $c'_X(0) = X$ et $c_X(0) = p$, supposée toujours paramétrée par la longueur.
On pose : $s : T^1M \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

$$X \mapsto s(X) = \mathrm{Sup}\{t \geqslant 0, d(\pi(X), c_X(t)) = t\}.$$

Le nombre $s(X)$ est la plus grande valeur que puisse prendre le paramètre t pour que soit vérifié :

$$d(c_X(0), c_X(t)) = L(c_X|[0,t]).$$

L'étude de la continuité de la fonction s est l'objet de ce qui suit.

Elle n'est pas forcément semi-continue supérieurement pour un espace-temps quelconque (pour le voir, il suffit d'enlever un point à l'espace-temps de Minkowski), cependant :

Proposition 6.4. : ([4], p. 97) *Si* (M,g) *est un espace-temps t-g-complet, la fonction* s *est semi-continue supérieurement.*

Démonstration : Il suffit de montrer que si $X_n \to X$ dans T^1M et $(s(X_n))$ converge dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, alors $s(X) \geqslant \lim s(X_n)$.

Si $s(X) = \infty$, il n'y a rien à prouver, on suppose donc que $s(X) < \infty$.

On raisonne par l'absurde, soit $\delta > 0$ tel que :

$$s(X)+\delta < A = \lim s(X_n) \leqslant \infty$$

et supposons que $s(X_n) \geqslant s(X)+\delta$ pour tout n.

Ceci entraîne que :

$$d(\pi(X_n), c_{X_n}(s(X)+\delta)) = s(X)+\delta \quad \text{pour tout } n.$$

Puisque $X_n \to X$ dans T^1M, la semi-continuité inférieure de la distance donne que :

$$\begin{array}{c} d(\pi(X), c_X(s(X)+\delta)) \leqslant \liminf d(\pi(X_n), c_{X_n}(s(X)+\delta)) \\ \| \\ s(X)+\delta \\ \| \\ L(c_X|[0,s(X)+\delta]) \leqslant d(\pi(X), c_X(s(X)+\delta)) \end{array}$$

D'où :

$$d(\pi(X), c_X(s(X)+\delta)) = L(c_X|[0,s(X)+\delta]) = s(X)+\delta$$

et en particulier par définition de $s(X)$, ceci entraîne que $s(X) \geqslant s(X)+\delta$, ce qui est une contradiction.

La fonction s n'est pas forcément semi-continue inférieurement dans un espace-temps quelconque ([5], section 8). Toutefois :

Proposition 6.5. : (*comparer avec* [4], *p.* 98)
Soient (M,g) *un espace-temps F.G.H.,* $p \in M$.

Si $X_n \to X$ *dans* T^1_pM *et si* $c_{X_n}(s(X_n)) \to q$ *où* $q \in \overset{\circ}{F}{}^+_p$, *alors* s *est une fonction semi-continue inférieurement en* q.

<u>Démonstration</u> : Soit $X_n \to X$ dans T^1_pM et $s(X_n) \to A$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. s est semi-continue inférieurement si $s(X) \leqslant A$.

Si $A = \infty$, il n'y a rien à montrer, supposons donc que $A < \infty$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que : $s(X) > A+\delta$.

Soit N_0 entier tel que : $s(X_n)+\delta < s(X)$, pour $n \geqslant N_0$.

On pose : $p = c_{X_n}(0)$

$q_n = c_{X_n}(s(X_n)+\delta)$

$q = c_X(A+\delta)$.

Puisque $s(X) > A+\delta$, c_X est définie pour des valeurs de son paramètre plus grandes que $A+\delta$ alors que les c_{X_n} sont définies pour des valeurs du paramètre plus petites que $s(X_n)+\delta$, pour $n \geqslant N \geqslant N_0$.

Puisque $s(X_n)+\delta > s(X_n)$, $c_{X_n}|[0,s(X_n)+\delta]$ n'est pas une géodésique maximale, la propriété (3) nous assure l'existence de courbes causales λ_n de longueur plus grande que c_{X_n} entre p et q_n pour $n \geqslant N$.

Les classes de t-homotopie $\Omega_{\lambda_n}(p,q_n)$ sont compactes, 5.17. entraîne l'existence d'une géodésique temporelle encore appelée λ_n de longueur maximale dans sa classe pour $n \geqslant N$.

Par construction, q est limite de (q_n) et pour δ assez petit, $q \in \overset{\circ}{F}{}^+_p$.

La proposition 5.23. donne l'existence d'une courbe limite λ de la suite (λ_n), passant par p et q.

Puisque (M,g) est fortement causal, il existe une sous-suite (λ_m) de (λ_n) qui converge vers λ dans la C°-topologie (3.6.) et :

$$L(\lambda|[p,q]) \geqslant \limsup L(\lambda_n|[p,q_n]) \geqslant \limsup L(c_{X_n}|[p,q_n]) = L(c_X|[p,q]) \qquad (3.11.)$$

On en déduit que c_X n'est pas maximale de p à q et en particulier que $s(X) > A+\delta$ est une contradiction.

En combinant 6.4. et 6.5. on obtient :

Proposition 6.6. : *Soient* (M,g) *un espace-temps F.G.H. et t-g-complet,* $p \in M$.
Si $X_n \to X$ *dans* T^1_pM,
Si $c_{X_n}(s(X_n)) = q_n \to q$ *où* $q \in \mathring{F}^+_p$ *lorsque* $n \to \infty$, *alors*
$q = c_X(s(X))$ *où* $s(X) = \lim s(X_n)$.

Il est à noter que si (M,g) est globalement hyperbolique et t-g-complet, alors la fonction $s : T^1M \to \mathbb{R} \cup \infty$ est continue (car dans ce cas, on utilise la proposition 5.24. dans la démonstration de 6.5. et la condition $q \in \mathring{F}^+_p$ est inutile).

On peut alors poser :

Définition 6.7. : ([4], p. 98)
$\Gamma^+(p) = \{s(X)X/0 < s(X) < \infty$ *et* $X \in T^1_pM\}$ *est* *le cut-locus temporel futur de* p *dans* T_pM.
$C^+_t(p) = \exp_p[\Gamma^+(p)]$ *est* *le cut-locus temporel futur de* p *dans* M.

Les cut-locus passés $\Gamma^-(p)$ et $C^-_t(p)$ sont définis de manière analogue.
Avec les notations ci-dessus, la proposition 6.2. a pour corollaire :

$$\left.\begin{array}{l} q \in C^+_t(p) \\ q \in \mathring{F}^+_p \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p \in C^-_t(q) \\ p \in \mathring{F}^-_q \end{array}\right.$$

B - LE CUT-LOCUS NUL

Définition 6.8. : *Soient* (M,g) *un espace-temps quelconque et* $\nu : [0,a[\to M$ *une géodésique nulle.*
Soit $t_0 = \mathrm{Sup}\{t \in [0,a[/d(\nu(0),\nu(t)) = 0\}$.
Si $0 < t_0 < a$, $\nu(t_0)$ *est dit le* *cut-point nul futur* *de* $\nu(0)$ *le long de* ν.

On définit de la même manière le cut-point nul passé pour une géodésique nulle ν dirigée vers le passé.

Le <u>cut-locus futur</u> (respectivement <u>passé</u>) $C_N^+(p)$ (respectivement $C_N^-(p)$) est l'ensemble de tous les cut-points nuls futurs (respectivement passés) de p.

La semi-continuité inférieure de la fonction-distance entraîne que $d(p,q) = 0$ pour tout $q \in C_N^+(p)$.

L'interprétation géométrique de $C_N^+(p)$ est semblable à celle de $C_t^+(p)$: la géodésique nulle ν est maximale de $\nu(0)$ au cut-point nul futur $\nu(t_0)$ en ce sens qu'il n'existe aucune courbe temporelle reliant $\nu(0)$ à $\nu(t)$, pour tout $t \leqslant t_0$ (comparer avec 4.12.).

De plus ν est l'unique géodésique nulle maximale reliant $\nu(0)$ à $\nu(t)$, plus précisément :

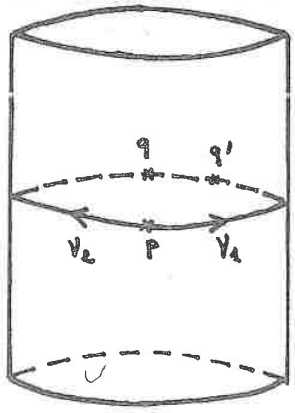
<u>*Lemme 6.9.*</u> : *Soit (M,g) un espace-temps quelconque, s'il existe deux segments de géodésiques nulles allant de p à q, alors q arrive sur ou après le cut-point nul futur de p le long de chacun des segments.*

<u>Démonstration</u> : Soient ν_1 et ν_2 deux segments de géodésiques nulles (dirigés vers le futur) allant de p à q. Soit r un point de ν_1 situé dans le futur causal de q. Dans ce cas, le lemme 4.9. entraîne que $r \in I^+(p)$ car $\dot{\nu}_1(q) \neq k\dot{\nu}_2(q)$, $k \in \mathbb{R}$.

Il s'ensuit qu'après q, ν_1 et ν_2 cessent d'être des segments de géodésiques nulles maximaux.

Il est essentiel que les deux segments de géodésiques nulles soient dirigés vers le futur, sinon il nous faut imposer la condition espace-temps causal, comme le prouve l'exemple ci-dessous :

Soit l'espace-temps $M = S^1 \times \mathbb{R}$ muni de la métrique $ds^2 = d\theta\, dt$ (cf. figure 6). Les géodésiques nulles sont des cercles.



q' arrive avant q le long de ν_1, pourtant il existe deux segments de géodésique nulle allant de p à q'.

<u>Figure 17</u>

Pour démontrer l'analogue de la proposition 6.2. dans le cas nul, il nous faut :

Proposition 6.10. : *Soient* (M,g) *un espace-temps F.G.H.,* $p \in M$ *et* $q \in J^+(p)$. *Supposons que* $d(p,q) = 0$ *et que* $(J^+(q) \cap F_p^+) \cup \{q\}$ *contient un voisinage ouvert non vide de* q.
Si (q_n) *est une suite de points de* $J^+(p)$ *de limite* q, *si* (c_n) *est une suite de courbes causales allant de* p *à* q_n, *alors la suite* (c_n) *possède une courbe limite* c *allant de* p *à* q *qui est une géodésique nulle maximale.*

Démonstration : Soit U un voisinage normal convexe ouvert en q, et $q' \in J^+(q) \cap F_p^+ \cap U$, et U' un voisinage de q contenu dans $J^-(q') \cap U$.

Pour n suffisamment grand, on a : $q_n \in U'$.

Prolongeons alors, comme dans la proposition 5.23. les courbes c_n de q_n à q' par l'unique segment de géodésique causale dans U. Appelons les courbes obtenues λ_n.

Puisque $q' \in F_p^+$, $C(p,q')$ est compact et la suite (λ_n) possède une courbe limite λ dans $C(p,q')$. Par le même argument qu'en 5.23., λ passe par q.

Or : $d(p,q) = 0 \geqslant L(\lambda|[p,q])$ d'où :

$L(\lambda|[p,q]) = 0$ et 3.19. entraîne que λ est une géodésique nulle maximale allant de p à q.

Proposition 6.11. : *Soient* (M,g) *un espace-temps F.G.H. et* $q = \nu(t)$ *le cut-point nul futur de* $p = \nu(0)$ *le long de la géodésique nulle* ν.
Supposons que $(J^+(q) \cap F_p^+) \cup \{q\}$ *contient un voisinage ouvert non vide de* q.
On a une ou éventuellement les deux possibilités suivantes :

i) q *est le premier point conjugué futur à* p *le long de* ν.

ii) Il existe deux segments de géodésique nulle maximaux allant de p *à* q.

<u>Démonstration</u> : Soit (t_n) une suite décroissante de réels de limite t. Pour n suffisamment grand, $q_n = \nu(t_n)$ est dans U où U est un voisinage ouvert non vide de q dans $(J^+(p) \cap F_p^+) \cup \{q\}$.

Soit (c_n) une suite de courbes causales (ou temporelles, puisqu'on est après le cut-point nul) allant de p à q_n.

Par construction, q est limite de la suite (q_n), $d(p,q) = 0$ et 6.10. entraîne que la suite (c_n) possède une courbe limite c qui est une géodésique nulle maximale allant de p à q, qu'on suppose définie sur $[0,b[$.

Deux cas peuvent se produire :

i) $\dot{c}(0) = \dot{\nu}(0)$, q est alors conjugué à p le long de ν (même raisonnement qu'en 6.2.). Puisque $d(p,q) = 0$, q doit être le premier point conjugué nul futur à p le long de ν.

ii) $\dot{c}(0) \neq \dot{\nu}(0)$ et $\dot{c}(0)$ engendre une seconde géodésique nulle maximale de p à q.

<u>Proposition 6.12.</u> : (comparer avec [4], p. 101)
Soit (M,g) un espace-temps F.G.H.
Supposons que p M possède un cut-point futur (ou passé) dans F_p^+ le plus proche au sens de la distance lorentzienne. Alors q est soit un point conjugué futur à p (temporel ou nul), soit un cut-point nul futur de p.

<u>Démonstration</u> : Supposons que q ne soit ni un point conjugué futur à p (temporel ou nul), ni un cut-point nul futur de p, et que $q \in \mathring{F}_p^+$.

Dans ce cas, 6.2. entraîne qu'il existe au moins deux géodésiques temporelles maximales c_1 et c_2 allant de p à q.

Soit $\gamma : [0,a[\to M$ une courbe temporelle issue de q et dirigée vers le passé. En choisissant a assez petit, on peut supposer que l'image de γ est contenue dans $I^+(p)$.

Pour tout $t \in]0,a[$, on a : $p \ll \gamma(t) \ll q$, d'où :

$$d(p,q) \geqslant d(p,\gamma(t))+d(\gamma(t),q) > d(p,\gamma(t)).$$

Puisque $\gamma(t) \in I^+(p)$, il existe une courbe temporelle de p à $\gamma(t)$ et par suite une géodésique temporelle (5.17.).

Puisque q est le cut-point futur le plus proche, $\gamma(t)$ est situé avant le cut-point sur toute géodésique temporelle allant de p à $\gamma(t)$, ce qui entraîne que toute géodésique temporelle allant de p à $\gamma(t)$ est maximale.

Puisque q n'est pas conjugué à p le long de c_1 ($\exp_p$ n'est pas singulière en q), il existe une géodésique temporelle c_1' allant de p à $\gamma(t)$, proche de c_1, pour t suffisamment petit.

De même il existe une géodésique temporelle c_2' allant de p à $\gamma(t)$, proche de c_2 pour t suffisamment petit.

Puisque c_1' et c_2' sont maximales, et puisque $\gamma(t) \in \overset{\circ}{F}{}_p^+$ (5.21.), ceci entraîne que $\gamma(t)$ est un cut-point futur de p, ce qui est en contradiction avec $d(p,\gamma(t)) < d(p,q)$.

Si $q \in F_p^+ \setminus \overset{\circ}{F}{}_p^+$, dans ce cas q ne peut être qu'un cut-point nul futur ou un point conjugué nul futur, ou les deux.

On peut comparer ce résultat avec le résultat analogue en géométrie riemannienne ([6], p. 95) : soit on a p conjugué à q, soit il existe une géodésique fermée en p, constituée de deux géodésiques minimales allant de p à q de vecteurs tangents opposés, ce qui est exclu dans un espace-temps causal.

C - LE CUT-LOCUS CAUSAL

Définition 6.13. : $C^+(p) = C_t^+(p) \cup C_N^+(p)$ *est dit le cut-locus causal futur de* p *dans* M.
$C^-(p) = C_t^-(p) \cup C_N^-(p)$ *est dit le cut-locus causal passé de* p *dans* M.

Afin de démontrer certaines propriétés de cut-locus causal, il nous faut :

Proposition 6.14. : *(comparer avec [3], p. 373)*
Soient (M,g) *un espace-temps F.G.H. et* $p \in M$.
Le lieu des points conjugués q *futurs (ou passés) nuls et temporels, à* p *tels que :* $(J^+(p) \cap F_p^+) \cup \{q\}$ *(ou* $(J^-(p) \cap F_p^-) \cup \{q\}$*) contient un voisinage ouvert non vide de* q *est un sous-ensemble fermé de* M.

Il est à noter que si (M,g) est un espace-temps causal, p ne peut pas être un point conjugué futur (ou passé) nul ou temporel à lui-même car une géodésique causale ne passe par p qu'une seule fois.

Si $X_n \in T_pM$ est un vecteur causal tel que $(\exp_p)_*$ est singulière en X_n et si $\exp_p X_n = q_n$, on dit que X_n <u>est conjugué à p dans</u> T_pM. Dans ce cas, $c_n(t) = \exp_p(tX_n)$ est une géodésique (interminable vers le futur) issue de p et contenant q_n.

<u>Démonstration</u> : Soit (q_n) une suite de points conjugués futurs temporels ou nuls de limite q.

Puisque $(\exp_p)_*$ est non singulière à l'origine dans T_pM, il s'ensuit que $p \neq q$, $p < q$ et $p < q_n$ pour tout n, et soit $c_n = \exp_p tX_n$.

Si $q \in \mathring{F}_p^+$, 5.23. entraîne que la suite de géodésiques (c_n) possède une courbe limite c issue de p et contenant q qui est elle-même une géodésique.

Soit X l'unique vecteur causal de T_pM, tangent à c en $c(0)$ tel que : $q = \exp_p X$.

Puisque c est courbe limite de la suite (c_n), il existe une sous-suite (X_m) de (X_n) telle que les directions des vecteurs X_m convergent vers la direction de X.

Dans ce cas, $X_m \to X$ (lemme 6.1., p. 372, [3]) et X est conjugué à p dans T_pM car le lieu conjugué de p dans T_pM est un sous-ensemble fermé du domaine d'$\exp_p$ ($(\exp_p)_*$ n'est pas singulière sur un ouvert de T_pM).

Puisque X est causal et dirigé vers le futur, le point $q = \exp_p X$ est un point conjugué futur de p dans M.

Si $q \in F_p^+ \setminus \mathring{F}_p^+$, dans ce cas l'hypothèse et la proposition 6.10. entraîne l'existence d'une courbe limite c contenant q. (que $d(p,q) = 0$ ou non). La suite de la démonstration est la même que dans le cas $q \in \mathring{F}_p^+$.

De la même manière, on montre la proposition pour les points conjugués passés.

Il est à noter que les propositions 6.11., 6.12. et 6.14. sont vérifiées par les espaces-temps globalement hyperboliques.

Puisque pour de tels espaces on a : $J^+(p) = F_p^+$ (5.12.), la condition sur $(J^+(p) \cap F_p^+) \cup \{q\}$ se réduit à $J^+(p) \cup \{q\}$ contient un voisinage ouvert non

vide de q, ce qui est toujours vrai, et on utilise la proposition 5.24. à la place de 5.23.

Nous terminerons par :

Proposition 6.15. : ([3], *p. 374*)
Soit (M,g) *un espace-temps globalement hyperbolique.*
Pour tout p *dans* M, *les ensembles* $C_N^+(p)$, $C_N^-(p)$, $C^+(p)$ *et* $C^-(p)$ *sont des sous-ensembles fermés de* M.
En particulier : $C(p) = C^+(p) \cup C^-(p)$ *et* $C_N(p) = C_N^+(p) \cup C_N^-(p)$ *sont des sous-ensembles fermés de* M.

Démonstration : C'est la même démonstration pour $C_N^+(p)$, $C_N^-(p)$, $C^+(p)$ et $C^-(p)$ On la fait pour $C_N^+(p)$.

Soit $(q_n) \in C_N^+(p)$ avec $q_n \to q$. Dans ce cas, $q \neq p$ et $q \in J^+(p)$ car (M,g) est un espace-temps globalement hyperbolique.

Puisque la fonction distance est continue, on a :

$$0 = \lim d(p,q_n) = d(p,q) \quad (5.25.)$$

Puisque $d(p,q) = 0$, il existe une géodésique nulle maximale c allant de p à q, et le cut-point nul futur de p le long de c ne peut pas arriver avant q.

Il y a alors deux cas à considérer :

(1) Une infinité de (q_n) sont des points conjugués futurs nuls ou temporels : Dans ce cas, 6.14. entraîne que q est un point conjugué futur nul ou temporel à p. Si q est conjugué à p le long de c, q est aussi le cut-point nul futur de p le long de c (le cut-point arrive avant le premier point conjugué).
Si q est conjugué à p le long d'une autre géodésique causale c', alors c' doit être une géodésique nulle et q est le cut-point nul futur de p le long de c' et de c (6.9.).

(2) Il existe N tel que q_n n'est pas conjugué à p, pour tout $n \geqslant N$.
Dans ce cas, 6.11. entraîne qu'il existe au moins deux géodésiques nulles

maximales de p à q_n et il existe deux vecteurs nuls X_n et Y_n tels que : $\exp_p X_n = \exp_p Y_n = q_n$, $n \geqslant N$.
Les directions déterminées par X_n et Y_n ont pour directions limites X et Y respectivement.
Si X et Y déterminent des directions différentes, on obtient deux géodésiques nulles maximales de p à q, et q est un cut-point de p (6.10 et 6.9.).
Si X et Y déterminent les mêmes directions, ils sont proportionnels et il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$X = \lambda Y \quad \text{et} \quad \exp_p X = \exp_p \lambda Y = q.$$

En appliquant alors le lemme 6.1. de [3] (p. 372), on obtient que pour deux sous-suites (X_m) (de (X_n)) et (Y_m) (de (Y_n)) on a : $X_m \to X$ et $Y_m \to \lambda Y$. Or $X_m \neq Y_m$ et $\exp_p X_m = \exp_p Y_m$ ce qui signifie que $(\exp_p)_*$ est singulière en λY, autrement dit que q est conjugué à p le long de $c(t) = \exp_p(t\lambda Y)$. Puisque $d(p,q) = 0$, q est le cut-point de p le long de c.

Exemple

Soit M l'espace-temps $S^1 \times \mathbb{R} = \{(\theta,t)/0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ t \in \mathbb{R}\}$ muni de la métrique $ds^2 = -d\theta^2 + dt^2$.

C'est un espace-temps globalement hyperbolique. (cf. [8], p. 212). Il n'y a pas de points conjugués dans cet espace-temps.

Si $p = (0,0)$, alors $C_N^+(p) = (\pi,\pi)$.

Le cut-locus futur temporel est $\{(\pi,t)/t > \pi\}$ et n'est pas fermé.

D'autre part, $C^+(p) = C_t^+(p) \cup C_N^+(p)$ est fermé : On a :

$$C^+(p) = \{(t,\pi)/t > \pi\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AVEZ A. - Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 13, 2 (1963), p. 105-190.

[2] BEEM JK. et EHRLICH PE. - Math. Proc. Camb. Phil. Soc, 85, 161, (1979). Singularities, incompleteness and the lorentzian distance functior

[3] BEEM JK. et EHRLICH PE. - Cut-points, conjugate points and Lorentzian comparison theorems. Math. Proc. Camb. Phil. Soc, 86, 365, (1979).

[4] BEEM JK. et EHRLICH PE. - The Space time Cut-locus, Gen. Rel. and Grav., 11, 2, 89 (1979).

[5] BEEM JK. et EHRLICH PE. - The Lorentzian distance function and global lorentzian geometry (Preprint).

[6] CHEEGER J. et EBIN D. - Comparison Theorems in Riemannian Geometry (1975) (North-Holland, Amsterdam).

[7] CHOQUET-BRUHAT Y. - Géométrie différentielle et systèmes extérieurs (1968) (Dunod, Paris).

[8] HAWKING S.W. et ELLIS G.F.R. - The Large Scale Structure of Space-time (1973) (Cambridge University Press, London).

[9] PENROSE R. - Techniques of Differential Topology in relativity (1972). (Regional Conference Series in applied Math., 7, SIAM, Philadelphia).

[10] SACKS R.K. et WU H. - General Relativity For mathematicians (1977) (Springer-Verlag).

[11] SACKS R.K. et WU H. - General Relativity and Cosmology (1977) (Bull. of the Am. Math. Soc, 86, 6, 1101).

[12] MISNER CW. et THORNE K.S. et WHEELER JA. - Gravitation (Freeman, San Francisco, 1973).

[13] BERGER M. et GAUDUCHON P. et MAZET E. (1971) - Le spectre d'une variété riemannienne (Lecture Notes, 194, Springer-Verlag).

[14] GODBILLON C. - Eléments de Topologie Algébrique (Hermann, Paris) (1971).

[15] LICHNEROWICZ A. (1968) - Topics on Space-time, p. 107-116. Battelle Rencontres (Ed. CM de Witt et J.A. Wheeler, Benjamin, New-York).

[16] LERNER D. - Techniques of Topology and Differential Geometry in General Relativity dans Methods of Local and Global Differential Geometry in General Relativity - Lecture Notes in Physics, 14, (Springer-Verlag, 1972).

E R R A T A

Page 26, ligne 14 :	lire Définition 2.6. et non 2.5.
Page 64, ligne 8 :	lire S_0 et non S_1
ligne 10 :	lire S_0 et non S_1
ligne 18 :	Rajouter $1 \leqslant j < N$
ligne 22 :	Remplacer la formule existante par :

$$V = \bigcup_{j=o}^{N-1} \{(W_j) \cup (I^+(x_j) \cap U_{j+1} \cap I^-(x_{j+1}))\}$$

Page 65, sur le dessin :	lire λ_{j+1} et γ_{j+1} et non λ_j et γ_j
ligne 6 :	lire $1 \leqslant j \leqslant N-1$ et non $1 < j \leqslant N$
Page 66, ligne 12 :	$j = 0$ et non $j = 1$
ligne 13 :	$Z_0(u)$ et non $Z_1(u)$
ligne 16 :	$0 \leqslant j \leqslant N-1$ et non $1 \leqslant j \leqslant N$
ligne 23 :	$0 \leqslant j \leqslant N$ et non $1 \leqslant j \leqslant N+1$
ligne 25 :	$h_{j-1}(u,t_j)$ et non $h_{j+1}(u,t_j)$
Page 70, ligne 19 :	p quelconque et non q quelconque
ligne 21 :	caractérisation et non caractéristique
Page 71, ligne 9 :	lire F_p^+ et non F_p
Page 74, ligne 18 :	$q' \in J^+(q)$ et non $q' \in J^+(p)$
dernière ligne :	$q' \in J^+(q) \cap U$ et non $q' \in J^+(p) \cap U$
Page 87, ligne 3 :	le cut-locus nul futur
Page 93, dernière ligne :	$C^+(p) = \{(t,\pi)/t \geqslant \pi\}$ et non $t > \pi$.

NOM DE L'ETUDIANT : NAPOLI Amédéo

NATURE DE LA THESE : Doctorat 3ème cycle en Mathématiques pures

VU, APPROUVE

ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 19 NOV. 1982 2760

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I,

UNIVERSITE NANCY I

LE PRESIDENT

R. MAINARD

Résumé :

Après introduction des espaces-temps et des différentes conditions de causalité, on étudie l'ensemble des courbes causales allant d'un point p à un point q $(q \in J^+(p))$ $C(p,q)$. On définit une relation de t-homotopie sur $C(p,q)$, la classe de t-homotopie à extrémités fixes et les voisinages de t-homotopie d'une courbe de $C(p,q)$. Les classes sont les composantes connexes de $C(p,q)$ et dans le cas où elles sont supposées compactes, leur nombre est lié à la compacité de $C(p,q)$ et dans une certaine mesure à la distance lorentzienne $d(p,q)$. Dans la dernière partie, l'étude du cut-locus temporel et nul est abordé du point de vue des courbes.

Mots clés :

Espaces-temps, géodésiques temporelles et nulles, forte causalité, hyperbolicité globale, courbe causale dirigée vers le futur, courbe limite, C^0-topologie des courbes, longueur et distance lorentzienne, points conjugués, classes de t-homotopie à extrémités fixes, hyperbolicité globale faible, voisinage de t-homotopie, cut-points et cut-locus.