83/274

Sc N 83/377 A

Université de Nancy 1 U . E . R Sciences Mathématiques

PROBLEME DE TERMINAISON FINIE DES SYSTEMES DE REECRITURE EQUATIONNELS

BIBLIOTHEQUE-SCIENCES UNIVERSITE NANCY

THESE

soutenue publiquement le 17 Septembre 1983

A L'UNIVERSITE DE NANCY 1

pour l'obtention du grade de

DOCTORAT DE 3ème CYCLE en INFORMATIQUE

par

Miguel MUNOZ

devant la commission d'examen

Président :............................	Pierre	**MARCHAND**
Examinateurs :....................	Guy	**COUSINEAU**
	Pierre	**COUSOT**
	Jean.Claude	**DERNIAME**
	Pierre	**LESCANNE**
	Isidro	**RAMOS**

Université de Nancy 1

U . E . R Sciences Mathématiques

PROBLEME DE TERMINAISON FINIE
DES SYSTEMES DE REECRITURE EQUATIONNELS

THESE

soutenue publiquement le 17 Septembre 1983

A L ' UNIVERSITE DE NANCY 1

pour l ' obtention du grade de

DOCTORAT DE 3ème CYCLE en INFORMATIQUE

par

Miguel MUNOZ

devant la commission d ' examen

Président :............................	Pierre	**MARCHAND**
Examinateurs :....................	Guy	**COUSINEAU**
	Pierre	**COUSOT**
	Jean.Claude	**DERNIAME**
	Pierre	**LESCANNE**
	Isidro	**RAMOS**

PROBLEME DE TERMINAISON FINIE

DES SYSTEMES DE REECRITURE EQUATIONNELS

Miguel MUÑOZ

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION :

Les systèmes de réécriture equationnels constituent une généralisation du modèle de calculabilité que representent les systèmes de réécriture ordinaires , obtenue en supprimant la condition qu'imposent ceux-ci de traiter comme des règles de reduction tous les axiomes d'une théorie equationnelle et en admettant que les calculs associes auront des étapes de calcul par reduction , ainsi comme des étapes de calcul purement equationnel .

Un des problemes theoriques qu'implique de façon immediate le modèle de réécriture equationnelle est l'obtention des critères pour décider la correspondante version equationnelle de la propriété Church-Rosser .

Les differents critères obtenus à ce propos (HUE-80) (P-S-81) ont été contenus dans un critère général dû a Jouannaud (JOU-82) , en etant une des hypothèses employées dans tous les cas , celle de la terminaison finie de ce qu'on appelle l'extension (modulo-E) de la relation de réécriture associée au système de réécriture equationnel.

Ainsi, pour arriver a disposer operativement du modèle des systèmes de réécriture equationnels , de la même façon qu'on dispose du modèle non equationnel , il resulte specialement interessant analyser jusqu'à quel point les preuves de terminaison equationnelles (ou E-terminaison) peuvent arriver a être traitées a travers de méthodes syntactiques comme ceux qui constituent les ordres de simplification dans le cas de la réécriture non equationnelle . L'analyse de ce probleme est ce qui constitue le noyau de ce travail .

CHAPITRE 1 :

PRELIMINAIRES

INTRODUCTION: Avec ce chapitre on pretend donner une vision général des concepts théoriques qui apparaissent au préalable du problème qui nous occupe . Ainsi , on a inclu un bref résumé de concepts de l'algèbre universelle , des théories equationnelles et des systèmes de réécriture . Le chapitre ne contient aucun résultat original , et les résultats sont inclus sans démonstration , pour lesquelles on revoie le lecteur aux références correspondantes .

Par rapport au problème spécifique de la terminaison des systèmes de réécriture , on a dédié une attention spécial à la méthode de preuve basée sur le concept d'ordre de simplification , dès que la généralisation au cas equationnel de cette méthode est ce qui constitue l'objectif de ce travail .

Dans ce chapitre on inclut aussi un bref aperçu sur les ordres de simplification du type R.P.O. (Recursive Path Ordering) , en tant que ce modèle d'ordres a été choisi initialement pour nous à l'intention d'étudier posterieurement ses generalisations en tant que prouver la terminaison finie de systèmes de réécriture equationnels .

1.1-F-ALGEBRES

La théorie algebrique connue comme Algèbre Universelle traite les systèmes doués d'un ensemble arbitraire d'opérations . Donc un objetif prioritaire de cette théorie est celui de formaliser ce concept .

1.1.1-OPERATIONS ET SIGNATURES

DEFINITION 1.1. : Une opération sur un ensemble A est une application $f : A^n \longrightarrow A$. Le nombre n sera dit l'arité de l'opération f .

DEFINITION 1.2. : Une signature est une paire ordonnée (F,ar) , où F est un ensmble et ar est une fonction $ar : F \longrightarrow N$ de F aux entiers non négatifs .

1.1.2- F-ALGEBRES ET HOMOMORPHISMES ENTRE F-ALGEBRES

DEFINITION 1.3. : Une F-algèbre (ou algèbre du type F) est une paire ordonnée (A, ϕ_F) , où A est un ensemble et ϕ_F est un ensemble d'opérations indexé par F tel que pour tout $t_f \in \phi_F$ on a:

$$t_f : A^{ar(f)} \longrightarrow A$$

DEFINITION 1.4. : Soient (A, ϕ_F) et (B, Ψ_F) deux F-algèbres arbitraires . Un homomorphisme de (A, ϕ_F) à (B, Ψ_F) est une application $h : A \longrightarrow B$ telle que pour tout $f \in F$ et pour tout $(a_1,a_2,\ldots,a_{ar(f)}) \in A^{ar(f)}$ on a :

$$h(a_f(a_1,a_2,\ldots,a_{ar(f)}) = b_f(h(a_1),h(a_2),\ldots,h(a_{ar(f)}))$$

où a_f et b_f sont les opérations indexées par f dans ϕ_F et ψ_F respectivement. Dans le cas que l'application h soit inversible, on dira que h est un isomorphisme.

1.1.3-ALGEBRES LIBRES

DEFINITION 1.5. : Soit L une F-algèbre et V un ensemble tel que $V \subset L$. Alors on dira que L est une F-algèbre libre engendrée par V, si pour toute F-algèbre (A, ϕ_F) et toute application $v : V \longrightarrow A$, il existe un homomorphisme unique $h(v) : L \longrightarrow A$ qui étend à v.

Le Lemme suivant est classique dans la Théorie des Algèbres Universelles :

LEMME 1.1. : La F-algèbre libre engendrée par un ensemble V est unique à isomorphisme près.

1.1.4.-TERMES DE PREMIER ORDRE

Etant donnée une signature (F,ar) et un ensemble dénombrable V tel que $F \cap V = \emptyset$, le concept de terme de premier ordre est identique à celui d'expresion formelle qu'on puisse construire d'après l'ensemble V,(lequel sera nommé dans la suite comme ensemble des variables) et la signature (F,ar).

Formellement, ce concept est défini de façon constructive comme :

DEFINITION 1.6. : Etant donnés une signature (F,ar) et un ensemble dénombrable de variables V, l'ensemble des termes de premier ordre associé au paire $((F,ar),V)$ est le plus petit ensemble $T(F,V)$ tel que :

1 Si t est un symbole d'arité zéro ou une variable , alors $t \in T(F,V)$

2 Si f est un symbole dans F et $(t_1,t_2,\ldots,t_{ar(f)}) \in T(F,V)^{ar(f)}$ alors $f(t_1,t_2,\ldots,t_{ar(f)}) \in T(F,V)$

3 $T(F,V)$ seulement contient aux éléments construits dépuis les points 1 et 2 anterieures .

L'ensemble $T(F,V)$ peut être doué d'une structure de F-algèbre en interpretant chaque symbole d'opération $f \in F$ comme une opération $I(f)$ d'arité $ar(f)$ et définie comme :

$$I(f)(t_1,t_2,\ldots,t_{ar(f)}) = f(t_1,t_2,\ldots,t_{ar(f)})$$

Avec cette interpretation $(T(F,V),I(F))$ devient une F-algèbre libre engendrée par V . Dans la suite , la notation $T(F,V)$ sera toujours associée à cette algèbre .

Dépuis le Lemme 1.1. , si $L(F,V)$ est une F-algèbre libre engendrée par V , les algèbres $T(F,V)$ et $L(F,V)$ seront isomorphes .

1.1.5-DOMAINES , ARBRES ETIQUETES ET REPRESENTATIONS ARBORESCENTS D'UN TERME

Soit N^* le monoid libre engendré par les entiers positifs.

DEFINITION 1.7. : On appelle domaine toute partie D de N^* telle que :

<u>1</u> $D = \emptyset$

ou

<u>2.1</u> $\varepsilon \in D$ (où ε est le mot vide dans N^*)

et

<u>2.2</u> Si $uv \in D$ alors $u \in D$ (propriété préfixe)

et

<u>2.3</u> $\forall\ u \in D$ $\forall i,j$ N ($ui \in D$ et $1 \leqslant j \leqslant i \implies uj \in D$)

DEFINITION 1.8. : Soit D un domaine , alors on appelera SUC la fonction $SUC : D \longrightarrow N$ définie comme :

$$\forall\ u \in D \quad SUC(u) = card. \{ ui \mid ui \in D \text{ et } i \in N \}$$

Un domaine sera dit fini si $card.(D) < \infty$

1.1.5.1-ARBRES ETIQUETEES

DEFINITION 1.9. : Soit X un ensemble quelconque. Un arbre étiqueté sur X est une paire ordonnée(D,a) , où D est un domaine et a est une application $a : D \longrightarrow X$.

On appelera arbre vide sur X l'arbre $(\emptyset, \Box)$.

1.1.5.2-REPRESENTATIONS ARBORESCENTS DES TERMES

DEFINITION 1.10. : Soit (F,ar) une signature et V un ensemble de variables . On appelle arbre étiqueté sur $((F,ar), V)$, tout arbre étiqueté (t,D) sur $F \cup V$ qui vérifie la condition additionnelle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "SUC"'] & & F \cup V \arrow[dl, "ar"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

soit commutatif .où la fonction ar est supposée étendue aux variables comme $ar(x) = 0 \quad \forall x \in V$.

LEMME 1.2. : Soit F une signature arbitraire , V un ensemble dénombrable de variables et A(F,V) l'ensemble de touts les arbres étiquetés sur ((F,ar),V) à domaine non vide et fini. Alors l'ensemble A(F,V) est ismorphe à l'ensemble des termes T(F,V).

REMARQUE : L'ensemble A(F,V) peut être doué facilement d'une structure de F-algèbre et dans ce cas , A(F,V) deviendra une F-algèbre libre engendrée par V .

Soit $r : V \longrightarrow A(F,V)$ l'application qui fait correspondre à toute variable $x \in V$ l'arbre $(\{\varepsilon\}, a_x)$ où $a_x(x) = x$, alors r s'étend à un isomorphisme $R : T(F,V) \longrightarrow A(F,V)$. On appelera représentation arborescent d'un terme $t \in T(F,V)$ l'image R(t) de t par R dans A(F,V) , Dans la suite , sauf le contraire , on ne faira pas distinction entre un terme et son représentation arborescente.

1.1.5.3-SUBTERMES

DEFINITION 1.11 : Soit t un terme de $T(F,V)$, D son domaine et u un élément de D . On appele occurrence de t a l'occurrence u de son domaine , la valeur $t(u)$ de la fonction $t:D \longrightarrow F \cup V$ correspondante a la valeur u de son argument .

DEFINITION ..1.12. : Soit t un terme de l'algèbre $T(F,V)$ et u un élément de son domaine . On appele subterme a l'occurrence u du terme t , au terme noté comme t/u , dont son domaine, noté comme D/u , est défini par :

$$D/u = \{ v' \mid v' \in N^* \text{ et } u.v' \in D \}$$

et la fonction associée $t/u : D/u \longrightarrow F \cup V$ est définie par $t/u(v') = t(u.v')$.

DEFINITION 1.13. : Soient t,s deux termes de l'algèbre $T(F,V)$ et u un élément du domaine de t , alors le terme de $T(F,V)$ noté comme $t(u \longleftarrow s)$ est défini comme :

<u>1</u> Si $D(t(u \longleftarrow s))$, $D(t)$ et $D(s)$ sont les domaines de $t(u \longleftarrow s)$, t et s respectivement , alors $D(t(u \longleftarrow s))$ est défini par :

$$D(t(u \longleftarrow s)) = D(t) \cup u.D(s) - \{ v \mid v \in D(t) \text{ et } v \geqslant u \}$$

où

$$u.D(s) = \{ u.w \mid w \in D(s) \}$$

<u>2</u> la fonction $t(u \longleftarrow s)$: est définie comme : $\forall\ v \in D(t(u \longleftarrow s))$

si $v \geqslant u$ alors $t(u \longleftarrow s)(v) = s(v')$ où $u.v' = v$

sino $t(u \longleftarrow s)(v) = t(v)$

REMARQUE : Dans la suite on appellera symbole a la racine d'un terme t au symbole $t(\varepsilon)$ correspondant .

1.1.6-SUBSTITUTIONS

DEFINITION 1.14. : Soit T(F,V) la F-algèbre libre engendrée par l'ensemble de variables V . Une substitution est une application $\sigma : V \longrightarrow T(F,V)$ identique presque par tout .

DEFINITION 1.15. : On appelle 'domaine' d'une substitution , l'ensemble de variables $D(\sigma)$ défini comme :

$$D(\sigma) = \{ x \in V \mid \sigma(x) \neq x \}$$

Les substitutions seront etendues comme endomorphismes de T(F,V) comme :

$$\sigma(f(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \sigma(t_2), \ldots, \sigma(t_n))$$

DEFINITION 1.16. : On appellera 'permutation' aux endomorphismes bijectifs dans T(F,V).

1.2-THEORIES EQUATIONNELLES

1.2.1-VARIETES D'ALGEBRES

DEFINITION 1.17. : On appelle equation a toute paire de termes (t,t') d'une F-algèbre libre T(F,V) .

DEFINITION 1.18. : On dit qu'une F-algèbre (A, ϕ_F) valide une equation (t,t') , ou que (A, ϕ_F) est un modèle de (t,t') si $h(t) = h(t')$ pour tout homomorphisme $h: T(F,V) \longrightarrow (A,\phi_F)$

DEFINITION 1.19. : Soit E un ensemble d'equations définies dans une algèbre T(F,V) .Alors la classe des F-algèbres que valident toutes les equations de E sera appellée la varieté des F-algèbres induite par E , et aux equations dans E on les appel les lois de la varieté , ou les axiomes de la varieté .

REMARQUE : Dans la suite , une equation dans T(F,V) sera notée indistinctement comme (t,t') ou comme $t = t'$.

1.2.2- CONGRUENCES

DEFINITION 1.20. : Soit (A, ϕ_F) une F-algèbre quelconque . Une relation r définie dans A est une congruence dans l'algèbre (A, ϕ_F) si r est une relation d'equivalence stable par les operations dans ϕ_F . Ainsi , r est une congruence dans (A,ϕ_F) si r est une relation d'equivalence dans A et pour toute opération $a_f \in {}_F$ et pour touts éléments

$$a_1,a_2,\dots,a_{ar(f)},\ a'_1,a'_2,\dots,a'_{ar(f)} \in A$$

on a :

$$a_i \; r \; a'_i \qquad \Longrightarrow a_f(a_1,a_2,\dots,a_{ar(f)}) \; r \; a_f(a'_1,a'_2,\dots,a'_{ar(f)})$$

$1 \leqslant i \leqslant ar(f)$

1.2.3-THEORIE EQUATIONNELLE

DEFINITION 1.21. : Soit E un ensemble d'equations définies dans T(F,V) . Alors on appelle théorie equationnelle induite par E la plus petite congruence dans T(F,V) qui contient les axiomes E et qui est fermée par substitutions .

REMARQUE : Dans la suite , la congruence induite par les axiomes E sera notée comme =E . Ainsi , d'apres la définition anterieure , =E sera la plus petite relation dans T(F,V) telle que :

0 =E est une relation d'equivalence dans T(F,V) .

1 si (e,e') E alors e =E e'

2 si t =E s alors f(...,t,...) =E f(...,s,...)

3 si t =E s alors σ (t) =E σ (s)

LEMME 1.3. : Soit E un ensemble d'axiomes equationnels dans T(F,V) et soit $\underset{E}{\equiv}$ la rélation définie dans T(F,V) comme :

$s \underset{E}{\equiv} t$ sii

1 s = t (c.a.d. s et t sont syntaxiquement identiques)

ou

2 il exist un u $\in$ D(s) , une substitution σ et un axiome (e_i,e_i') tels que :

2.1 $s/u = \sigma(e_i)$ (ou $s/u = \sigma(e_i')$)

et

2.2 $t = s(u \longleftarrow \sigma(e_i'))$ (ou $t = s(u \longleftarrow \sigma(e_i))$)

alors , les relations $\underset{E}{\equiv}$ et =E sont identiques dans T(F,V) .

THEOREME DE BIRKHOF . (BIR- 35) : Etant donné un ensemble d'equations E dans une algèbre $T(F,V)$, une equation $t = t'$ est valide dans la varieté induite par E sii $t =_E t'$.

Le Théorème de Birkhof permet transporter le probleme de la validité d'une equation $t = t'$ au probleme de décider $t =_E t'$ dans le domaine syntaxique $T(F,V)$.

1.2.4-SATISFIABILITE

DEFINITION 1.22. : Une equation $t = t'$ est dite satisfiable dans une F-algèbre (A, ϕ_F) sii il existe un homomorphisme $h:T(F,V) \longleftarrow (A, \phi_F)$ tel que $h(t) = h(t')$.

Comme problemes relationés avec le probleme general de la satisfiabilité se trouvent :

1 Probleme de l'unification : C'est le probleme de la satisfiabilité dans $T(F,V)$.Ca.d. donnés deux termes t et t' trouver une substitution σ telle que $\sigma(t) = \sigma(t')$.

2 Probleme de l'unification modulo-E : C'est le probleme de la satisfiabilité dans le quotient $T(F,V)/E$. C.a.d. donnés deux termes t et t' trouver une substitution σ telle que $\sigma(t) =_E \sigma(t')$

3 Probleme du filtrage : Donnés deux termes t, t' trouver une substitution σ telle que $t = \sigma(t')$.

Dans ce cas on dira que σ 'filtre ' t' vers t , ou que t 'schematise' t'.

<u>4</u> Probleme du filtrage modulo-E : Donnés deux termes t,t' et un ensemble d'axiomes equationnels E , trouver une substitution σ telle que $t =_E \sigma(t')$.

<u>1.3-SYSTEMES DE REECRITURE DE TERMES</u>

DEFINITION 1.23. : Donnée une algèbre $T(F,V)$, un système de réécriture dans $T(F,V)$ est un ensemble fini R de paires <u>ordonées</u> de termes, tel que pour toute paire $(g_i,d_i) \in R$ on a $V(d_i) \subseteq V(g_i)$.

REMARQUE : En tant que R est un ensemble de paires ordonées de $T(F,V)$, un système de réécriture peut être consideré comme l'specification explicite d'une relation finie dans $T(F,V)$.

DEFINITION 1.24. : Soit R un système de réécriture défini dans $T(F,V)$ .On appelle relation de réécriture induite par R dans $T(F,V)$, la plus petite relation $\xrightarrow[R]{}$ définie dans $T(F,V)$ qui contient a la rélation R et qui est fermée par les operations de l'algèbre et par substitutions.

REMARQUE : Plus formellement , la relation $\xrightarrow[R]{}$ associée a un système de réécriture est la plus petite relation définie dans $T(F,V)$ et telle que :

<u>1</u> $(g_i,d_i) \in R \implies g_i \xrightarrow[R]{} d_i$

$\underline{2}$ $\quad s \xrightarrow[R]{} t \quad \Longrightarrow \quad f(\ldots,s,\ldots) \xrightarrow[R]{} f(\ldots,t,\ldots)$

$\underline{3}$ $\quad s \xrightarrow[R]{} t \quad \Longrightarrow \quad \sigma(s) \xrightarrow[R]{} \sigma(t)$

LEMME 1.4. : Soit R un système de réécriture défini dans T(F,V) et $\longrightarrow R$ la relation définie dans T(F,V) comme :

$s \longrightarrow R\ t$ sii

$\underline{1}$ $(s,t) \in R$

ou

$\underline{2}$ Existe un $u \in D(s)$, une paire $(g_i,d_i) \in R$ et une substitution σ tels que :

2.1 $s/u = \sigma(g_i)$

et

2.2 $t = s(u \longleftarrow \sigma(d_i))$

alors les relations $\xrightarrow[R]{}$ et $\longrightarrow R$ sont identiques dans T(F,V) .

DEFINITION 1.25. : On appelle régle de réécriture chacune des paires (g_i,d_i) dans un système de réécriture R .

REMARQUES SUR LA NOTATION : Si $\xrightarrow[r]{}$ est une relation arbitraire définie dans un ensemble T , les notations $\xrightarrow[r]{+}$, $\xrightarrow[r]{*}$ et $\xleftrightarrow[r]{*}$ representeront respectivement les fermetures transitive, reflexive-transitive et simetrique-reflexive-transitive de la relation $\xrightarrow[r]{}$ .définies dans T . Nécessairement , la relation $\xleftrightarrow[r]{*}$ sera une relation d'equivalence dans T .

1.3.1-PROPRIETEES ABSTRAITES DE CONFLUENCE ET TERMINAISON

Les proprietées abstraites de confluence et terminaison (HUE,80) , constituent les proprietées abstraites qu'on doive exiger a une relation abstraite $\xrightarrow[r]{}$ définie dans un ensemble T , pour décider l'equivalence $\xleftrightarrow[r]{*}$, induite par $\xrightarrow[r]{}$ dans T , en termes de la relation $\xrightarrow[r]{}$ définie dans T .

Dans les suivantes définitions on supposera alors, que $\xrightarrow[r]{}$ répresente une relation abstraite dans un ensemble T quelconque .

DEFINITION 1.26. (Propriété Church-Rosser) : On dira que la relation $\xrightarrow[r]{}$ a la propriété Church-Rosser si

$(\forall x,y \in T)$

$x \xleftrightarrow[r]{*} y$ sii $\exists z \in T$ t.q. $x \xrightarrow[r]{*} z$ et $y \xrightarrow[r]{*} z$

DEFINITION 1.27. (Propriété de Confluence) : On dira que la relation $\xrightarrow[r]{}$ est confluent si

$(\forall x, x_1, x_2 \in T)$

$x \xrightarrow[r]{*} x_1$ et $x \xrightarrow[r]{*} x_2$ $\Longrightarrow \exists \bar{x} \in T$ t.q. $x_1 \xrightarrow[r]{*} \bar{x}$ et $x_2 \xrightarrow[r]{*} \bar{x}$

où graphiquement comme :

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "r"', "*"] \arrow[dr, "r", "*"'] & \\
x_1 \arrow[dr, dashed, "r", "*"'] & & x_2 \arrow[dl, dashed, "r"', "*"] \\
 & \bar{x} &
\end{tikzcd}
$$

où les traits continuus representent des hypothèses universelles, tandis que ceux pointillés representent des conclusions existen-cielles .

REMARQUE : L'anterieure convention pour representer gráphiquement des propriétés d'une relation sera toujours employée dans la suite .

DEFINITION 1.28. :(Propriété de Confluence-Locale) : On dira que $\xrightarrow[r]{}$ est localement confluent si :

$(\forall\ x, x_1, x_2 \in T)$

$x \xrightarrow[r]{} x_1$ et $x \xrightarrow[r]{} x_2 \implies \exists\ \bar{x} \in T$ t.q. $x_1 \xrightarrow[r]{*} \bar{x}$ et $x_2 \xrightarrow[r]{*} \bar{x}$

où graphiquement :

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "r"] & \\
x_1 \arrow[dr, dashed, "r", "*"'] & & x_2 \arrow[dl, dashed, "r"', "*"] \\
 & \bar{x} &
\end{tikzcd}
$$

LEMME 1.5. : $\xrightarrow[r]{}$ est Church-Rosser sii $\xrightarrow[r]{}$ est Confluent .

DEFINITION 1.29. (Terminaison Finie) : On dira que $\xrightarrow[r]{}$ est à terminaison finie (ou est noethérienne) si n'existe pas de chaine infinie :

$$x_1 \xrightarrow[r]{} x_2 \xrightarrow[r]{} x_3 \xrightarrow[r]{} \dots \xrightarrow[r]{} x_n \xrightarrow[r]{} \dots$$

pour la relation $\xrightarrow[r]{}$.

DEFINITION 1.30. (Formes Normales) : On dira qu'un élément $\bar{t} \in T$ est une forme normale par rapport à $\xrightarrow[r]{}$ si :
$(\forall t \in T)$ $(\bar{t} \xrightarrow[r]{*} t$ sii $\bar{t} = t)$

DEFINITION 1.31. : Soient t , $\bar{t}$ des éléments de T . Alors , on dira que $\bar{t}$ est une forme normale de t si $t \xrightarrow[r]{*} \bar{t}$ et $\bar{t}$ est une forme normale .

Les propriétés de confluence et terminaison d'une relation définie dans T sont reliées à celles d'existence des formes normaux pour les éléments de T , d'après les lemmes suivants :

LEMME 1.6. : Soit $\xrightarrow[r]{}$ une relation confluente . Alors , $\forall\, t \in T$, si t a une forme normale , elle est unique .

LEMME 1.7. : Si $\xrightarrow[r]{}$ est confluente et noethérienne , alors $\forall\, t \in T$ il existe une forme normale et elle est unique .

THEOREME DE NEWMAN (NEW,42) : Si $\xrightarrow[r]{}$ est noethérienne , alors $\xrightarrow[r]{}$ est confluente sii $\xrightarrow[r]{}$ est local-confluente .

1.4-LA PROPRIETE DE TERMINAISON FINIE DES SYSTEMES DE REECRITURE

Etant donné un système de réécriture R dans une algèbre T(F,V) , on dira que R a une propriété P si la relation $\xrightarrow[R]{}$ associée à R a cette propriété .

Dans ce sens , les systèmes confluents et noethériens représentent un modèle de calculabilité parfaitement adapté pour douer d'une semantique opérationnelle à une théorie equationnelle , si le système d'axiomes A associé à la théorie peut être transformé dans un système de réécriture équivalent (c.a.d. , si les congruences =A et $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ induites par les axiomes A et par la relation de réécriture respectivement , sont identiques) .

D'après le Théorème de Newman , la propriété de confluence d'un S.R.T. se réduit (si terminaison finie) à la propriété de local-confluence . Ainsi , les propriétés desirables dans la pratique pour un système de réécriture se résument à celles de terminaison finie et de local-confluence .

Ces propriétés se distinguent fondamentalement pour le fait suivant : tandis que la propriété de local-confluence admet un algorithme de décision , la terminaison est une propriété indécidable (HU-LAN-78) et , donc , elle ne peut pas être décrite de manière algorithmique .

L'algorithme associé à la décision de la propriété de local-confluence est le conu algorithme de Knuth-Bendix (K-B-70) . Il peut être compris comme une procedure pour compiler une spécification equationnelle dans un ensemble de règles de réécriture confluentes .

Les importants problèmes associés à l'algorithme de Knuth-Bendix et ses généralisations (unification , E-unification , ...) sont en dehors du cadre de ce travail , en tant que notre objectif est d'analiser les propriétés de terminaison des systèmes de réécriture et leurs correspondantes généralisations equationnelles. Des références adéquates pour le lecteur intéressé dans les aspects associés à l'algorithme de Knuth-Bendix et ses généralisations sont : (HUL-80) , (HU,80) , (K-B-70) , (K-K-82) , (P-S-81) .

Dans la partie suivante de ce chapitre on résume les résultats fondamentaux associés à la propriété de terminaison finie , dès que les chapitres qui suivent sont dédiés au traitement de cette propriété pour les extensions équationnelles des S.R.T. .

1.4.1-ORDRES DE REDUCTION

Le concept d'ordre de réduction qu'on introduit tout de suite permet réduire le problème de la terminaison à celui de l'existence (et donc , de la construction) d'un ordre de réduction .

DEFINITION 1.32. : Une relation d'ordre est dite noethérienne ou bien fondée dans un ensemble T sii:

1 Elle est un ordre strict dans T .

2 Il n'existe pas de chaîne infinie décroissante pour cet ordre dans T .

DEFINITION 1.33. : Soit une relation d'ordre définie dans une algèbre T(F,V) . On dira que $\succ$ a la propriété de momotonie dans T(F,V) si pour tous les t,t' T(F,V) et pour tout symbole d'opération f dans F on a :

$$t \succ t' \implies f(\ldots,t,\ldots) \succ f(\ldots,t',\ldots)$$

DEFINITION 1.34. : On dira qu'une relation d'ordre définie dans T(F,V) est un ordre de réduction sii :

1 Elle est un ordre noethérien .

2 Elle a la propriété de monotonie .

DEFINITION 1.35. : On dit qu'une relation d'ordre $\succ$ oriente une règle $l_i \rightarrow r_i$ d'un système de réécriture , si par rapport à $\succ$ on a $l_i \succ r_i$.

THEOREME DE MANNA ET NESS (MA-NE-70) : Un système de réécriture est à terminaison finie sii il existe un ordre de réduction t.q. il oriente toutes les instances des règles de R .

La méthode des ordres de réduction justifie les critères , dites sémantiques ou interpretatifs , de terminaison, dont nous ne traiterons pas dans ce travail .

Le concept d'ordre de réduction est aussi à la base des méthodes syntactiques actuelles pour tester la terminaison finie des S.R.T. . Ces méthodes sont basées sur le concept d'ordre de simplification , dont nous nous occuperons dans la suite.

1.4.2-ORDRES DE SIMPLIFICATION

Dus à Dershowitz (DER,79) , les ordres de simplification sont des ordres de réduction qui ont en plus la propriété que tout terme est plus grand que l'un quelconque de ses sous-termes . Une propriété essentielle des ordres de simplification est que tous contiennent un ordre de simplification particulier appelé ordre de plongement .

1.4.2.1-LA RELATION DE PLONGEMENT.

DEFINITION 1.36. : Soient $s=f(s_1,s_2,...,s_n)$ et $t=g(t_1,t_2,...,t_m)$ des termes dans une algèbre T(F,V). Alors la relation de plongement $\hookrightarrow$ est définie récursivement comme :

$$s=f(s_1,s_2,...,s_n) \hookrightarrow g(t_1,t_2,...,t_m)=t \quad \text{sii}$$

1 $f = g$ et $s_i \hookrightarrow t_i$ $1 \leqslant i \leqslant n$.

ou

2 $\exists\, t_i$ t.q. $s \hookrightarrow t_i$.

L'importance de lórdre de plongement est liée au théorème de Kruskal (KRU-60) .

THEOREME DE KRUSKAL : Si $t_1,t_2,....,t_n,...$ est une succesion arbitraire d'arbres étiquetés sur un ensemble fini de symboles F , alors il y a un i et un j t.q. $i < j$ et $t_i \hookrightarrow t_j$.

Cette propriété des ordres de plongement est à la base de la propriété de terminaison finie des ordres de simplification . Elle a sa contrepartie : la non complétude pour les preuves de terminaison finie . Néanmoins , les ordres bien fondés utilisés en pratique pour faire des preuves de terminaison finie sont en général des ordres de simplification .

1.4.2.2-ORDRES DE SIMPLIFICATION.

DEFINITION 1.37. : Une relation d'ordre strict $\succ$ dans T(F,V) est dite un ordre de simplification si elle a les propriétés suivantes :

1 $s \succ t \Longrightarrow f(..,s,..) \succ f(..,t,..)$ (monotonie).

2 $f(..,t,..) \succ t$ (propriété sous-terme).

1.4.2.3-LE THEOREME DE DERSHOWITZ .

LEMME (DER-79) : Si $\succ$ est un ordre de simplification dans T(F,V) , alors :

$(\forall\ t,s \in T(F,V))\ \ (t \hookrightarrow s \Longrightarrow t \prec s)$

Maintenant , par composition du lemme anterieur et du théorème de Kruskal on arrive au suivant théorème fondamental sur les ordres de simplification :

THEOREME DE DERSHOWITZ (DER-79) : Soient $\succ$ et R un ordre de simplification et un système de réécriture définis dans une algèbre T(F,V) . Alors , si toutes les instances des règles de R sont orientées par $\succ$, la relation de réécriture est à terminaison finie .

La démonstration de ce théorème , faite par réduction à l'absurde , est essentiellement la suivante :

Supposons l'existence d'une chaîne infinie de réécriture . Alors , par l'hypothèse d'orientation de toutes les instances des règles de R par l'ordre $\succ$ et l'hypothèse d'être un ordre de réduction , de la chaîne infinie initial on obtien une chaîne infinie décroissante pour l'ordre $\succ$, ce qui n'est pas interdit , en principe , pour un ordre de simplification .

Cette chaîne infinie de termes ne contiendra qu'un nombre fini de symboles de fonction de F , et un nombre fini de variables , dépuis que tout terme dans T(F,V) est fini , que le nombre de règles dans R est fini et que pour toute règle $l_i \to r_i$ dans R on a $V(l_i) \subseteq V(r_i)$.

Alors , d'après le théorème de Kruskal , il y aura deux termes t_i , t_j t. q. $t_i \hookrightarrow t_j$ et $i < j$.

Finalement , d'après le lemme anterieur , on aura $t_i < t_j$, ce qui contredit le caractère d'ordre strict qu'on suppose pour $\succ$. $\square$

1.5-LES ORDRES DU TYPE R.P.O. ET R.D.O.

Les ordres du type R.P.O. et R.D.O., dépuis l'anglais "Recursive Path Ordering" et "Recursive Decomposition Ordering" respectivement , sont des ordres de simplification amplement acceptés dans láctualité et les deux classes ont été implementées dans le système REVE (LES-82) .

Avant d'introduire ces deux grands groupes d'ordres de simplification nous donnerons des brèves notes sur le concept de multi-ensemble.

1.5.1-MULTI-ENSEMBLES

Intuitivement , un multi-ensemble défini sur un ensemble T peut être consideré comme une représentation du contenu d'une liste d'éléments de T , dont on a fait obli de l'ordre des éléments dans la liste .

Pour son manipulation calculatoire , on propose la définition comme suit :

DEFINITION 1.38. (JOU-LES-82) : Un multi-ensemble sur un ensemble T est une application $M: T \longrightarrow N$, où N est l'ensemble des entiers positifs .

Dans la suite , on appelera $\mathcal{M}(T)$ l'ensemble de tous les multi-ensembles définis sur T .

On dit qu'un élément $x \in T$ est dans un multi-ensemble M , si $M(x) \neq 0$.

On appelera multi-ensemble vide au multi-ensemble ( ) tel que $(\ )(x)= 0$ pour tout $x \in T$.

L'union de deux multi-ensembles M_1 et M_2 est définie comme : $M_1 + M_2\ (x) = M_1(x) + M_2(x) \quad \forall\ x \in T$.

On dira que $M_1 \subset M_2$ sii $M_1(x) \geqslant M_2(x) \quad x \in T$.

Le multi-ensemble difference de deux multi-ensembles M_1 et M_2 est dédini conditionnellement comme :

Si $M_1 \subset M_2$, alors $M_1 - M_2\ (x) = M_1(x) - M_2(x) \quad x \in T$.

1.5.1.1-EXTENSIONS MULTI-ENSEMBLE D'UNE RELATION D'ORDRE.

Soit T un ensemble ordonné par un ordre strict qu'on notera comme $\succ$. Alors , lórdre défini dans T induit un ordre dans (T) défini comme :

DEFINITION 1.39. (Ordre de DERSHOWITZ-MANNA) (DER-MA-79) :

Soient M et N deux multi-ensembles dans (T) alors :

$M \ll N$ sii il existe deux multi-ensembles X,Y dans $\mathcal{M}(T)$ t.q. :

1 $X \neq (\ )$ et $X \subset N$.

2 $M = (N - X) + Y$.

3 $(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)$ t. q. $x \succ y$.

DEFINITION 1.40. (Ordre de HUET-OPPEN)(HU-OP-80) :

Soient M et N deux multi-ensembles dans $\mathcal{M}(T)$. Alors :

$$M \ll N \quad \text{sii} \quad M \neq N \text{ et}$$

$$(\forall x \in T)(N(x) < M(x)) \Longrightarrow ((\exists\, y \in T)(x < y) \text{ et } (M(y) < N(y))).$$

LEMME (JOU-LES-81) : Les ordres de Dershowitz-Manna et de Huet-Oppen sont équivalents .

LEMME (DER-MA-79) : L'ordre $<$ dans T est un ordre bien fondé sii l'extension $\ll$ sur $\mathcal{M}(T)$ est un ordre bien fondé .

1.5.2-LES ORDRES R.P.O.

1.5.2.1-PRECEDENCES

DEFINITION 1.41. : Etant donnée une signature F , on appelera precedence sur F , la donnée d'un ordre strict , partial ou total , sur les symboles de F . Cette precedence sera étendue à l'ensemble F U V en considerant chaque variable dans V non relationée avec aucune outre variable et aucun symbole dans F .

Les définitions des ordres R.P.O. supposent toujours la donnée d'une precedence sur la signature de l'algèbre correspondante . Cette hypothèse sera faite , donc , implicitement dans les suivantes définitions :

1.5.2.2-L'ORDRE R.P.O.

DEFINITION 1.42. (DER-79) : Soient

$s = f(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ et $t = g(t_1,t_2,\ldots,t_m)$

termes dans T(F,V) .Alors l'ordre R.P.O. , qu'on notera comme $\overset{*}{\succ}$ est defini recursivement comme :

$$s \overset{*}{\succ} t \quad \text{sii}$$

1 $f = g$ et $\{s_1,s_2,\ldots,s_n\} \overset{*}{\succ}\overset{*}{\succ} \{t_1,t_2,\ldots,t_m\}$

ou

2 $f \succ g$ et $s \overset{*}{\succ} t_i$ pour $i = 1,\ldots,m$

ou

3 $\neg(f \succcurlyeq g)$ et il exist un s_i t.q. $s_i \overset{*}{\succ} t$ ou $s_i = t$

REMARQUE : La relation $\succ\succ^{**}$ est l'extension multi-ensemble de l'ordre $\succ^{*}$.

L'anterieure définition a été perfectionnée par Lescanne dans le sense suivant :

DEFINITION 1.43. (Congruence de permutation) :

On appelle congruence de permutation , la congruence =p définie récursivement dans T(F,V) comme :

$$s=f(s_1,\dots,s_n) \;=p\; g(t_1,\dots,t_m)=t \qquad \text{sii}$$

$f = g$ et $s_i = t_{p(i)}$, où $p(1),p(2),\dots,p(n)$ répresente une permutation quelconque de $1,2,\dots,n$.

DEFINITION 1.44. (LES-) :

L'observation de Lescanne à l'ordre de Dershowitz consiste à modifier la définition 1.42 , en substituant le point <u>3</u> par le suivant point <u>3'</u> :

<u>3'</u> $\neg(f \succcurlyeq g)$ <u>et</u> $((\exists s_i)$ t.q. $(s_i \succ^{*} t$ <u>ou</u> $s_i =p\; t))$

REMARQUE : Avec cette définition on accepte implicitement que l'egalité entre les termes de l'algèbre est définie modulo la congruence =p .

1.5.2.3-L'ORDRE R.P.O. LEXICOGRAPHIQUE

DEFINITION 1.45. (K-L-80) :

Kamin et Lévy ont remplacé dans la définition de l'ordre R.P.O. de Dershowitz la comparaison de deux multi-ensembles par la comparaison lexicographique de deux listes . Leur définition est la suivante :

$$s=f(s_1,\dots,s_n) \overset{*}{\succ}_{\ell} g(t_1,\dots,t_m)=t \qquad \underline{\text{sii}}$$

$\underline{1}$ $f = g$ et $s \overset{*}{\succ}_{\ell} t_i$ et $\langle s_1,\dots,s_n\rangle \succ_{\ell\ell x} \langle t_1,\dots,t_n\rangle$

ou

$\underline{2}$ $f \succ g$ et $s \overset{*}{\succ}_{\ell} t_i$ pour $i = 1,\dots,m$

ou

$\underline{3}$ $\neg (f \succcurlyeq g)$ et il exist un s_i t.q. $s_i \overset{*}{\succ}_{\ell} t$ ou $s_i = t$

où $\succ_{\ell\ell x}$ represente l'extension lexicographique de l'ordre $\overset{*}{\succ}_{\ell}$.

Les ordres R.P.O. et R.P.O.-lexico. constituent des ordres de simplification et dans le chapitre 4 de ce travail on poursuivra l'analyse de cette classe d'ordres .

1.5.3.-LES ORDRES R.D.O.

Un probleme associé à la classe des ordres R.P.O. réside dans le fait que la précédence sur la signature doit s'etablir completement avant de commencer un test les règles d'un système de réécriture . Si le résultat du test est négatif , on doit modifier cette précédence et recommencer à nouveau le test .

La classe des ordres de simplification R.D.O. (LES-81) (JLR-81) (REI-81) procesent les termes suivant une méthode recursive basée sur le concept de décomposition des termes . D'apres cet méthode la définition de la précédence dans F se realise simultanement (par necessité) que le test d'orientation des règles d'un S.R.T.

Dans ce sense , les ordres R.D.O. sont plus efficaces que les R.P.O. par rapport a l'efficacité des implantations .

Actuellement on dispose des versions permutative et lexicographique de cette famille d'ordres .

Dans la suite cette classe d'ordres ne seront pas traites puisque le modele R.P.O. resulte , en principe, plus simple entant que analyser ses possibles extensions au cas des systèmes de réécriture equationnels .

CHAPITRE 2 :

PROBLEMES DE TERMINAISON FINIE POUR LES SYSTEMES DE REECRITURE EQUATIONNELS

Les systèmes de réécriture equationels constituent une généralisation naturelle des systèmes de réécriture ordinaires , obtenue après enlever l'hypothèse , imposée sur le modèle de réécriture , d'interpreter tout axiome d'une théorie equationelle comme une règle de réduction.

Si A est un ensemble d'axiomes equationels dans une algèbre T(F,V) , un système de réécriture equationel sera la donnée d'une paire (R,E) , où R est un système de réécritu-re obtenu d'après l'orientation partielle des axiomes dans A, et E est le sous-ensemble d'axiomes dans A qui n'ont été traités comme règles de réduction .

Alors dans les calculs associés au modèle equationnel on admetra la posibilité d'étapes de calcul equationnel ainsi comme de calcul par réduction ou réécriture .

L'introduction du concept de système de réécriture equationnel est intimement relationé avec les problèmes de terminaison . En efect, l'existence d'axiomes equationnels du type permutatif (comme les correspondants aux lois de commutativité) , empêchent de garantir la propriété de terminaison pour n'importe quel système de réécriture dans le quel soient introduits , et c'est dans ce sense que le concept de système de réécriture equationnel représente une alternative pour cet état de choses .

Dans ce chapitre on analyse le concept de système de réécriture equationnel (en bref, S.R.E.) nothérien , en arrivant à une définition que généralise l'adoptée jusqu'au present. En effet , le caractère noethérien d'un système de réécriture equationnel (R,E) a été identifié avec la propriété de terminaison relative à la dite extension modulo-E de la relation de réécriture $\xrightarrow[R]{}$, asociée au système de réécriture R .

Le résultat qui fonde ce chapitre consiste en démontrer l'equivalence de cette définition de système de réécriture equationnel noethérien avec la suivante : un système de réécriture equationnel (R,E) est noethérien sii il existe une relation $\xrightarrow[R']{}$ telle que :

1 $\xrightarrow[R]{} \subseteq \xrightarrow[R']{} \subseteq \xrightarrow[R/E]{}$

(C.a.d. $\xrightarrow[R']{}$ est une relation intermediare entre la rélation $\xrightarrow[R]{}$ et l'extension modulo-E de cette relation)

2 $\xrightarrow[R']{}$ est une relation noethérienne .

3 $\xrightarrow[R']{}$ est une relation E-compatible .

La propriété de E-compatibilité de la relation $\xrightarrow[R']{}$ peut se résumer avec le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "R"'] \arrow[d, dash, "+"', "E"] & t \arrow[d, dashed, dash, "*"', "E"] \\
s' \arrow[r, dashed, "+", "R"'] & t'
\end{tikzcd}$$

Ce resultat est dual du cel obtenu par Jouannaud (JOU-82) par rapport a la correspondent extension equationnelle de la propriété Church-Rosser (ou propriété E-Church-Rosser).

La definition generalisée de système de réécriture equationnel noethérien , que nous proposons , permet de façon immediate une generalisation equationnelle du concept d'ordre de reduction (Def. 1.34.) laquelle a été appelée comme "ordres de E-reduction" et aussi on a obtenu la correspondante version equationnelle du Theoreme de Manna-Ness (maintenant E-Manna-Ness) .

Aussi, la definition proposée de système de réécriture equationnel noethérien suggere , a niveaux practiques, une première méthode de preuve de terminaison , comme application directe de cette definition. Cést dans ce sense qu'un S.R.E. sera a terminaison finie si :

1 On peut démontrer la terminaison finie d'une relation intermediare $\xrightarrow[R]{}$.

2 On peut garantiser pour la relation $\xrightarrow[R]{}$ la propriété de E-compatibilité .

Cette méthode a été suggeré implicitement par Dershowitz (DER-82) en tant que prouver la terminaison finie des systèmes de réécriture associatifs-commutatifs , mais nous ne suivrons ce chemin , en tant que notre prochain objetif c'est celui de géneraliser au cas equationnel le concept d'ordre de simplification. Ce qu'on faira dans le suivant chapitre .

2.1-SYSTEMES DE REECRITURE EQUATIONNELS

DEFINITION 2.1. : Un système de réécriture equationnel est la donnée d'une paire ordonnée (R,E) où R est un système de règles de réécriture et E un ensemble d'axiomes equationnels .

Le paragraphe suivant constitue la première étape d'analyse des S.R.E. en tant qu' arriver à une définition précise de la semantique opérationnelle associée ainsi comme pour arriver à des critètres de terminaison . Nous nous occupons seulement des problèmes relatifs à la terminaison tandis que pour les aspects semantiques et les correspondants à la propriété E-Church-Rosser (la version eq tionnelle de la propriété Church-Rosser) voir (JOU-82) .

2.1.1-LE TREILLIS DES EXTENSIONS E-INTERMEDIAIRES D'UN SYSTEME DE REECRITURE EQUATIONNEL

Si $=E$ représente la congruence equationnelle induite par un ensemble d'axiomes equationnels E dans une algèbre de termes T(F,V) , alors on appelle application canonique associée à cette congruence l'application :

$$f_E : T(F,V) \longrightarrow T(F,V)/E$$

telle que à tout terme dans T(F,V) lui associe la classe de congruence $\bar{t}$ correspondante dans le quotient T(F,V)/E .

Si R est un système de réécriture défini dans T(F,V) , la relation de réécriture associée $\xrightarrow[R]{}$ aura toujours une image par f_E dans T(F,V)/E . Alors , si on la note comme $f_E(\xrightarrow[R]{})$, cette relation est définie dans T(F,V)/E comme:

DEFINITION 2.2. : $(\forall\ \bar{s},\bar{t} \in T(F,V)/E)$

$$\bar{s}\ f_E(\xrightarrow[R]{})\ \bar{t} \quad \text{sii} \quad \exists\ s' \in f_E^{-1}(\bar{s}) \quad \exists\ t' \in f_E^{-1}(\bar{t}) \quad \text{t.q.} \quad s' \xrightarrow[R]{} t'$$

D'après la définition de la relation image $f_E(\xrightarrow[R]{})$ et de l'application f_E , à tout système de réécriture equationnel (R,E) on pourra toujours lui associer univoquement une paire $(f_E(\xrightarrow[R]{}), f_E)$. L'application f_E et la relation $f_E(\xrightarrow[R]{})$ existiront toujours , mais ce qu'on ne pourra pas garantir en général sera le caractère opérationel de cette représentation . Et, en particulier , cette représentation n'aura aucun sense opérationnel si les clases de congruence dans T(F,V)/E sont infinies .

2.1.2-RELATIONS E-EQUIVALENTS DANS UNE THEORIE EQUATIONNELLE

DEFINITION 2.3. : Soit E un ensemble d'axiomes equationnels défini dans une algèbre T(F,V) et soient R_1 et R_2 deux relations arbitraires définies dans T(F,V) .Alors , on dira que R_1 et R_2 sont relations E-équivalents dans T(F,V) si R_1 et R_2 ont la même image par f_E dans le quotient T(F,V)/E .

Alors,si on note comme ==E la relation de E-équivalence entre les relations définies dans T(F,V),on aura :

$$R_1 ==E\ R_2 \quad \text{si} \quad f_E(R_1) = f_E(R_2)$$

Comme on verra dans la suite , la classe des relations E-equivalents à une relation donnée contiendra toujours une relation maxime , par rapport à l'ordre d'inclusion , laquelle sera appelée son extension (modulo-E).

2.1.3-L'EXTENSION (MODULO-E) D'UNE RELATION DE REECRITURE

DEFINITION 2.4. : Soit un système de réécriture equationnel (R,E) défini dans T(F,V) . Alors on appelle extension modulo-E de la relation de réécriture $\xrightarrow[R]{}$ associée à R , la relation $\xrightarrow[R/E]{}$ définie dans T(F,V) comme :

$$s \xrightarrow[R/E]{} t \quad \text{sii} \quad \exists\, s' =_E s \quad \exists\, t' =_E t \quad \text{t.q.} \quad s' \xrightarrow[R]{} t'$$

Intuitivement , si deux termes t,s sont relationés par $\xrightarrow[R]{}$ (p.ex. $t \xrightarrow[R]{} s$) alors, n'importe quel terme $t' =_E t$ sera $\xrightarrow[R/E]{}$ - relationé avec n'importe quel terme $s' =_E s$. Ceci constitue le contenu de la proposition suivante , dont la démonstration est immediate .

PROPOSITION 2.1. : Soit (R,E) un S.R.E. défini dans T(F,V). alors ($\forall t,s \in$ T(F,V))

$$t \xrightarrow[R/E]{} s \implies \forall t' =_E t \quad \forall s' =_E s \qquad t' \xrightarrow[R/E]{} s'$$

REMARQUE : Donné un S.R.E. dans T(F,V) , les relations $\xrightarrow[R]{}$ et $\xrightarrow[R/E]{}$ auront toujours la même image par f_E dans T(F,V)/E. Ou , avec notre notation , $\xrightarrow[R]{} \equiv_E \xrightarrow[R/E]{}$.

La relation $\xrightarrow[R/E]{}$ est la plus faible relation E-équivalent à $\xrightarrow[R]{}$, dit d'outre façon, $\xrightarrow[R/E]{}$ contient à toutes les relations E-équivalents à $\xrightarrow[R]{}$. Ceci constitue l'ennocé de la proposition suivante, dont la preuve n'offre aucune difficulté, et sera laissée au lecteur :

PROPOSITION 2.2. : Soit (R,E) un système de réécriture equationnel défini dans T(F,V) . Alors , pour toute relation R' définie dans T(F,V) on a

$$\overrightarrow{R'} =_E \overrightarrow{R} \quad \text{sii} \quad \overrightarrow{R'} \subseteq \overrightarrow{R/E}$$

REMARQUE : D'après la caractérisation de la relation $\xrightarrow[R/E]{}$, l'expresion $t \xrightarrow[R/E]{} s$ pourra être représentée comme :

$$t =_E t' \xrightarrow[R]{} s' =_E s$$

où les termes t' et s' existirent toujours associés pour n'importe quelle paire t,s relationée par $\xrightarrow[R/E]{}$.

Ainsi, la relation $\xrightarrow[R/E]{}$ peut être considerée comme le produit $=_E \circ \xrightarrow[R]{} \circ =_E$.

Finalement, toute chaîne de reductions modulo-E comme :

$$t_1 \xrightarrow[R/E]{} t_2 \xrightarrow[R/E]{} t_3 \xrightarrow[R/E]{} t_4 \xrightarrow[R/E]{} \quad \cdots \quad t_n \xrightarrow[R/E]{} t_{n+1} \quad \cdots$$

sera représentée par une chaîne equivalent comme :

$$t_1 =_E t_1' \xrightarrow[R]{} t_2' =_E t_2 =_E t_2'' \xrightarrow[R]{} t_3' =_E t_3 =_E t''_3 \xrightarrow[R]{} \cdots\cdot$$

Et une chaîne générique de R/E-réductions sera représentée comme:

$$t_1 =E\ t_2 \xrightarrow[R]{} t_3 =E\ t_4 \xrightarrow[R]{} \quad \ldots\ldots \quad t_n =E\ t_{n+1} \xrightarrow[R]{} \quad \ldots$$

2.1.4-LES EXTENSIONS E-INTERMEDIAIRES D'UNE RELATION DE REECRITURE .

DEFINITION 2.5. : Soit (R,E) un système de réécriture equationnel défini dans T(F,V) , alors on appelera extension E-intermediaire associée à (R,E) , toute relation $\xrightarrow[R']{}$ définie dans T(F,V) ,et telle que

$$\xrightarrow[R]{} \subseteq \xrightarrow[R']{} \subseteq \xrightarrow[R/E]{}$$

Intuitivement , une extension E-intermediare d'une relation de réécriture $\xrightarrow[R]{}$ est une relation quelconque $\xrightarrow[R']{}$ plus faible que $\xrightarrow[R]{}$ (c.a.d. $\xrightarrow[R]{} \subseteq \xrightarrow[R']{}$) et E-equivalent à $\xrightarrow[R]{}$ (c.a.d. $\xrightarrow[R']{} \subseteq \xrightarrow[R/E]{}$, d'après la proposition 2.2.)

C'est dans ce sense que la relation $\xrightarrow[R/E]{}$ devient maintenant l'extension E-intermediare maxime , tandis que pour toute outre extension E-intermediaire $\xrightarrow[R']{}$, les relations $\xrightarrow[R]{}$ et $\xrightarrow[R']{}$ auront encore la même image par f_E dans T(F,V)/E .

La proposition suivante est donc immediate d'après la définition anterieure et la proposition 2.2.

PROPOSITION 2.3. : Si $\xrightarrow[R']{}$ est une extension E-intermediare d'une relation de réécriture $\xrightarrow[R]{}$, les relations $\xrightarrow[R]{}$ et $\xrightarrow[R']{}$ sont E-equivalentes dans T(F,V) .

2.1.4.1-LE TREILLIS DES EXTENSIONS INTERMEDIARES ASSOCIE A UN SYSTEME DE REECRITURE EQUATIONNEL

DEFINITION 2.5. : Soit (R,E) un système de réécriture equationnel quelconque défini dans T(F,V) ,Alors on appelera Treillis des extensions Intermediares associé à (R,E) (en bref T.E.I.) , l'ensemble I(R,E) de toutes les extensions E-intermediaires associées à la relation de réécriture $\xrightarrow[R]{}$.

REMARQUE : L'ensemble I(R,E) aura toujours une structure de treillis par rapport à l'ordre d'inclusion entre relations, dont l'élément maxime sera la relation $\xrightarrow[R/E]{}$ et l'élément minime sera la relation $\xrightarrow[R]{}$ .En particulier,si E = Ø , le treillis I(R,Ø) se reduira à la seule relation $\xrightarrow[R]{}$.

2.1.5-LES PROPRIETEES DE E-COHERENCE ET E-COMPATIBILITE

Le concept abstrait d'extension E-intermediare a été introduit explicitement par Jouannaud (JOU-82) par rapport à l'étude des extensions equationnelles de la propriété Church-Rosser (propriété E-Church-Rosser), ainsi comme pour fixer la sematique opérationnelle des systèmes de réécriture equationnels .C'est dans ce sense qu'on démontre qu'un (R,E) peut être interpreté par une extension intermediaire $\xrightarrow[R']{}$ de la relation $\xrightarrow[R]{}$, si la relation $\xrightarrow[R]{}$ a une propriété additionnelle appelée E-coherence .

Intuitivement une relation est E-coherent ,si le résultat des calculs efectués sur des éléments E-équivalents , sont identiques à une équivalence près . La définition abstraite de cette propriété relationnelle est comme :

DEFINITION 2.6 (JOU-82) : Soit $\xrightarrow[R]{}$ une relation définie dans un ensemble T et $\underset{E}{\longmapsto}$ une relation symétrique dans T . Alors , la relation $\xrightarrow[R]{}$ sera dite E-coherente si

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, dash, "*", "E"'] \arrow[d, "R"'] & s \arrow[dd, dashed, "+"', "R"] \\
t_1 \arrow[d, dashed, "*"', "R"] & \\
t'_1 \arrow[r, dash, dashed, "*", "E"'] & s'
\end{tikzcd}$$

Nous nous occupons maintenant du problème correspondant aux propriétés de terminaison des systèmes de réécriture equationnels . C.à.d., quelles sont les propriétés qu'on doive exiger à une extension E-intermediaire d'un système de réécriture equationnel (R,E) pour garantir la terminaison finie de ce système ?.

On trouve que la correspondante propriété est la propriété de E-compatibilité , dont la définition abstraite est comme :

DEFINITION 2.7 : Soit $\xrightarrow[R]{}$ une relation définie dans T et $\underset{E}{\longmapsto}$ une relation symétrique dans T . Alors , on dira que $\xrightarrow[R]{}$ est E-compatible dans T si :

$(\forall\ s', s, t \in T)$

$$s' \overset{+}{\underset{E}{\longmapsto}} s \xrightarrow[R]{} t \implies \exists\ t' \in T \ \text{ t.q. } \ s' \overset{+}{\underset{R}{\longrightarrow}} t' \overset{*}{\underset{E}{\longmapsto}} t$$

ou graphiquement comme:

Un état maximal par rapport à la propriété de E-compatibilité est représenté par la propriété de E-complétude .

DEFINITION 2.8 : Soit R une relation définie dans un ensemble T et $\underset{E}{\longmapsto}$ une relation symétrique dans T . Alors , R sera dite E-complète si :

$$(\forall\, t,s,t',s' \in T\ )$$
$$(t' \overset{*}{\underset{E}{\longmapsto}} t \xrightarrow[R]{} s \overset{*}{\underset{E}{\longmapsto}} s' \Longrightarrow t' \xrightarrow[R]{+} s'$$

ou graphiquement comme :

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "R"'] \arrow[d, dash, "*"', "E"] & s \arrow[d, dash, "*"', "E"] \\
t' \arrow[r, dashed, "+", "R"'] & s'
\end{tikzcd}$$

Evidement , si une relation est E-complète , elle est E-compatible , mais le contraire n'est pas vrai .

Finalement , il faut remarquer qu'en étant la propriété de E-compatibilité plus forte que celle de E-coherence , ce fait ne pose aucun problème en tant qu'elles peuvent être appliquées à des extensions <u>distinctes</u> dans un même système (R,E) pour garantir respectivement la propriété de terminaison et la propriété de E-Church-Rosser du système .

2.2-SYSTEMES DE REECRITURE EQUATIONNELS NOETHERIENS

Comme définition initial de système de réécriture equationnel noethérien on adopte la suivante :

DEFINTION 2.9.: Un système de réécriture equationnel (R,E) sera dit noethérien si la relation $f_E(\xrightarrow[R]{})$ associée dans T(F,V)/E est noethérienne .

Le Lemme suivante permet une première caractérisation syntatique de la propriété de terminaison des S.R.E.

LEMME 2.1. : Un système de réécriture equationnel (R,E) est noethérien sii l'extension modulo-E de la relation $\xrightarrow[R]{}$ (la relation $\xrightarrow[R/E]{}$) est noethérienne dans T(F,V) .

DEMONSTRATION : Supposons $f_E(\xrightarrow[R]{})$ noethérienne dans T(F,V)/E, tandis que $\xrightarrow[R/E]{}$ ne soit pas noethérienne dans T(F,V). Alors, si

$$t_1 \xrightarrow[R/E]{} t_2 \xrightarrow[R/E]{} t_3 \xrightarrow[R/E]{} \cdots \xrightarrow[R/E]{} t_n \xrightarrow[R/E]{} t_{n+1} \xrightarrow[R/E]{} \cdots\cdot$$

représente une chaîne infinie pour $\xrightarrow[R/E]{}$, d'après le pasage au quotient , on obtiendra une chaîne infinie pour la relation $f_E(\xrightarrow[R]{})$, ce qui est absurde .

Reciproquement , si $\xrightarrow[R/E]{}$ est noethérienne dans T(F,V) , alors son image $f_E(\xrightarrow[R/E]{})$ sera noethérienne dans T(F,V)/E , et dáprès l'identité $f_E(\xrightarrow[R/E]{}) = f_E(\xrightarrow[R]{})$, $f_E(\xrightarrow[R]{})$ sera noethérienne dans T(F,V)/E . □

Le Théorème suivante généralise le Lemme 2.1. et permet garantir le caractère noethérien d'un S.R.E. dépuis des conditions imposées à une extension E-intermediare arbitraire dans le treillis I(R,E) .

THEOREME 2.1. : Soit (R,E) un système de réécriture equationnel arbitraire dans T(F,V) . Alors (R,E) est noethérien sii il existe une extension $\xrightarrow[R']{}$ dans I(R,E) qui soit noethérienne et E-compatible .

DEMONSTRATION : Si (R,E) est noethérien , alors d'après le Lemme 2.1. l'extension $\xrightarrow[R/E]{}$ est noethérienne , et comme que $\xrightarrow[R/E]{}$ est trivialement E-compatible , il est démontre le directe .

Reciproquement , supposons l'existence d'une extension E-intermediaire $\xrightarrow[R']{}$ noethérienne et E-compatible , tandis que (R,E) est supposé non noethérien .Alors soit :

$$\bar{t}_1 \; f_E(\xrightarrow[R]{}) \; \bar{t}_2 \; f_E(\xrightarrow[R]{}) \; \bar{t}_3 \; f_E(\xrightarrow[R]{}) \; \ldots \; \bar{t}_n \; f_E(\xrightarrow[R]{}) \; \bar{t}_{n+1} \; \ldots$$

une chaîne infinie , par rapport à $f_E(\xrightarrow[R]{})$ dans T(F,V)/E . D'après la définition de la relation $f_E(\xrightarrow[R]{})$ il y aura une suite dé termes dans T(F,V) comme :

$$t_1, t_2, t_2', t_3, t_3', \ldots, t_n, t_n', t_{n+1}, \ldots$$

tels que :

$t_1 \xrightarrow[R]{} t_2$ et $t_2 =E \; t_2'$

$t_2' \xrightarrow[R]{} t_3$ et $t_3 =E \; t_3'$

...

$t'_n \xrightarrow[R]{} t_{n+1}$ et $t_{n+1} =_E t'_{n+1}$

....

Et cette situation est contenue dans le suivant diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
t_1 \arrow[r, "R"'] \arrow[d, dashed, "f_E"] & t_2 \arrow[r, phantom, "=_E"] \arrow[d, dashed, "f_E"'] & t'_2 \arrow[r, "R"'] \arrow[dl, dashed, "f_E"] & t_3 \arrow[r, phantom, "=_E"] \arrow[d, dashed, "f_E"'] & t'_3 \arrow[r, "R"'] \arrow[dl, dashed, "f_E"] & \cdots \arrow[r, "R"'] & t_n \arrow[r, phantom, "=_E"] \arrow[d, dashed, "f_E"'] & t'_n \arrow[dl, dashed, "f_E"] & \cdots \\
\bar{t}_1 \arrow[r, phantom, "f_E(\xrightarrow[R]{})"] & \bar{t}_2 \arrow[rr, phantom, "f_E(\xrightarrow[R]{})"] & & \bar{t}_3 \arrow[rr, phantom, "f_E(\xrightarrow[R]{})\ \cdots"] & & & \bar{t}_n & &
\end{tikzcd}
$$

Alors , comme que $\xrightarrow[R']{}$ est une extension E-intermediare de $\xrightarrow[R]{}$, on aura l'inclusion $\xrightarrow[R]{} \subseteq \xrightarrow[R']{}$ et donc, on aura une chaîne infinie comme :

$$t_1 \xrightarrow[R']{} t_2 =_E t'_2 \xrightarrow[R']{} t_3 =_E t'_3 \xrightarrow[R']{} \cdots \quad \xrightarrow[R']{} t_n =_E \cdots$$

Finalement , comme que $\xrightarrow[R']{}$ est E-compatible par hypothèse , on aura :

$$t_2 =_E t'_2 \xrightarrow[R']{} t_3 \implies \exists\, t''_3 \quad \text{t.q.}\ t_2 \xrightarrow[R']{} t''_3 \ \text{et}\ t''_3 =_E t_3 =_E t'_3$$

$$t''_3 =_E t'_3 \xrightarrow[R']{} t_4 \implies \exists\, t''_4 \quad \text{t.q.}\ t''_3 \xrightarrow[R']{} t''_4 \ \text{et}\ t''_4 =_E t_4 =_E t'_4$$

en iterant le mecanisme on obtiendra finellement une chaîne infinie pour la relation $\xrightarrow[R']{}$ comme :

$$t_1 \xrightarrow[R']{} t_2 \xrightarrow[R']{} t''_3 \xrightarrow[R']{} t''_4 \xrightarrow[R']{} \cdots\cdots \xrightarrow[R']{} t''_n \xrightarrow[R']{} \cdots\cdots$$

et donc une contradiction . $\square$

2.3-ORDRES DE E-REDUCTION

Le Théorème 2.1. permet une généralisation au cas equationnel du concept d'ordre de réduction (définition 1.34.) comme :

DEFINITION 2.10. : Soit T(F,V) une algèbre de termes quelconque et E un ensemble d'axiomes equationnels définis dans T(F,V). On appelera ordre de E-reduction sur T(F,V) , toute relation $\succ$ définie dans T(F,V) et telle que :

1 $\succ$ est un ordre bien fondé dans T(F,V) .

2 $\succ$ est monotone par rapport aux operations de l'algèbre.

C.a.d. : $(\forall\, t,s \in T(F,V))$

$$s \succ t \implies f(\ldots,s,\ldots) \succ f(\ldots,t,\ldots)$$

3 $\succ$ est E-compatible. C.a.d. $(\forall\, s,t,s' \in T(F,V))$

$$s' =_E s \succ t \implies \exists\, t' \in T(F,V) \text{ t.q. } s' \succ t' =_E t$$

La définition d'ordre de E-réduction maintenant permet une généralisation du Théorème de Manna-Ness comme :

THEOREME 2.2. (E-Manna-Ness) : Soit (R,E) un système de réécriture equationnel défini dans T(F,V) . Alors (R,E) est noethérien sii il existe un ordre de E-réduction dans T(F,V) qui oriente toutes les instances des règles de R .

DEMOSNTRATION : Supposons (R,E) noethérien , alors d'après le Théorème 2.1. il existe une extension E-intermediaire

$\xrightarrow[R']{}$, laquelle est noethérienne et E-compatible . Et d'après l'inclusion $\xrightarrow[R]{} \subseteq \xrightarrow[R']{}$, toutes les instances des règles de R seront orientées par $\xrightarrow[R']{}$.

Reciproquement , si $\succ$ est un ordre de E-réduction qu'oriente toutes les instances des règles de R et (R,E) n'etait pas noethérien , alors soit

$$t_1 \xrightarrow[R]{} t_2 =_E t_3 \xrightarrow[R]{} t_4 =_E \quad \dots \quad =_E t_n \xrightarrow[R]{} t_{n+1} =_E \dots$$

une chaîne infinie pour la relation $\xrightarrow[R/E]{}$. D'après que , par hypothèse , $\succ$ oriente toutes les instances des règles et il est un ordre qui a la propriété de monotonie , on arrive à la suivante chaîne infinie :

$$t_1 \succ t_2 =_E t_3 \succ t_4 =_E \dots =_E t_n \succ t_{n+1} =_E \dots$$

Finalement , à partir d'une construction identique à celle employée dans la démonstration du Théorème 2.1. , d'après l'hypothèse de E-compatibilité pour l'ordre $\succ$, on arriverait à une chaîne infinie pour l'ordre $\succ$ comme :

$$t_1 \succ t_2 \succ t''_3 \succ t''_4 \succ \dots\dots \succ t''_n \succ \dots\dots$$

ce qui est absurde .

$\square$

CHAPITRE 3 :

EXTENSIONS EQUATIONNELLES DU CONCEPT D'ORDRE DE SIMPLIFICATION. ORDRES DE E-SIMPLIFICATION

Dans ce chapître on introduit une généralisation equationnelle du concept d'ordre de simplification .Cette classe de relations seront dites ordres de E-simplification ou ordres de simplification modulo-E .

D'après la donnée d'un ensemble d'axiomes equationnels E dans une algèbre de termes T(F,V) , un ordre de E-simplification est un ordre de simplification qui admet une extension E-compatible .Essentiellement , une extension E-compatible d'un ordre de simplificationest une extension de cet ordre , qui conserve la propriété d'être un ordre strict et qui est en plus E-compatible .

Quoiqué une extension E-compatible d'un ordre de simplification ne soit pas necessairement un ordre de simplification , on démontre qu'elle permet faire des preuves de E-terminaison . En effet , le résultat qui fonde la théorie est le suivant : étant donné un système de réécriture equationnel (R,E) dans une algèbre T(F,V) , si un ordre de simplification oriente toutes les instances des règles de R et cet ordre admet une extension E-compatible , alors le système (R,E) est noethérien .

C'est dans ce sense que les preuves de E-terminaison deviennent identiques à les preuves de terminaison des systèmes de réécriture basées sur le concept d'ordre de simplification .

En particulier , si un ordre de simplification a la propriété de E-compatibilité , les preuves de terminaison avec cet ordre seront simultanement, preuves de E-terminaison.

Dans les derniers paragraphes de ce chapitre on donne une condition nécessaire d'existence des ordres de E-simplification comme : si parmi les axiomes de la théorie E certaines sont orientés par l'ordre de plongement , alors n'aura pas d'ordre de E-simplification . Plus précisement , les ordres de E-simplification qu'on pourrait définir ne sont pas stricts et ils ne peuvent pas donc être utilisés pour faire des preuves de E-terminaison .

Il faut souligner que la méthode de preuve de E-terminaison basée sur les ordres de E-simplification n'exige que la construction de l'ordre , et donc, il n'y a pas besoin de construire des extensions de la relation de réécriture , comme il a été décrit pour la méthode directe dans le chapitre anterieur.

L'existence des ordres de E-simplification dépendra esentiellement de la congruence induite par E . Ce point sera traité dans le chapitre suivant par rapport aux ordres du type R.P.O.

Finalement, on a introduit le concept d'ordre de simplification E-complet . La classe des ordres E-complets a un caractère maximal par rapport à la classe des ordres de E- simplification . Les applications de ce concept seront données dans le chapitre suivant .

3.1-EXTENSIONS E-COMPATIBLES D'UN ORDRE DE SIMPLIFICATION

DEFINITION 3.1. : Soit $\succ$ un ordre de simplification (Def.1.) et E un ensemble d'axiomes equationnels définis dans une algèbre T(F,V) .Alors on dira qu'une relation $\succ'$ est une extension E-compatible de l'ordre si :

(i) $\succ \subsetneq \succ'$

(ii) $\succ'$ est un ordre strict dans T(F,V) .

(iii) $\succ'$ est E-compatible dans T(F,V). C.a.d.

$t' =_E t \succ' s \implies \exists\, s' \in T(F,V)$ t.q. $t' \succ' s' =_E s$

Alors , si $\succ'$ est une extension E-compatible d'un ordre de simplification $\succ$, la relation $\succ'$ ne sera pas nécessairement un ordre de simplification puisque on n'a pas exigé les propriétés de monotonie et sous-terme pour cette relation, mais elle sera par contre , E-compatible.

3.1.1-PREUVES DE E-TERMINAISON BASEES SUR LE CONCEPT D'EXTENSION E-COMPATIBLE D'UN ORDRE DE SIMPLIFICATION .

Le suivant Théorème justifie l'introduction du concept d'ordre de E-simplification dont la définition sera donnée après .

THEOREME 3.1. : Soit (R,E) un système de réécriture equationnel fini et défini dans une algèbre T(F,V) . Soit $\succ$ un ordre de simplification défini dans T(F,V) .Alors si :

1 L'ordre $\succ$ admet une extension E-compatible $\succ'$ dans T(F,V).

2 Toutes les instances des règles de R sont orientées par l'ordre $\succ$ (non nécessairement par l'extension $'$)

Alors , le système (R,E) est noethérien .

DEMONSTRATION : Supposons que l'ordre $\succ$ oriente toutes les instances des règles de R , qu'il existe une extension E-compatible $\succ'$ de cet ordre et que (R,E) ne soit pas noethérien . Alors soit :

$$t_1 =_E t_2 \xrightarrow[R]{} t_3 =_E t_4 \xrightarrow[R]{} \cdots \xrightarrow[R]{} t_n =_E t_{n+1} \xrightarrow[R]{} t_{n+2} \cdots$$

une chaîne infinie pour l'extension $\xrightarrow[R/E]{}$. Comme toutes les instances des règles de R sont orientées par l'ordre $\succ$, et cet ordre est un ordre de simplification , on aura une chaîne infinie comme :

$$t_1 =_E t_2 \succ t_3 =_E t_4 \succ \cdots t_n =_E t_{n+1} \succ t_{n+2'} =_E \cdots$$

et d'après l'inclusion $\succ \subseteq \succ'$ on aura:

$$t_1 =_E t_2 \succ' t_3 =_E t_4 \succ' \cdots \succ' t_n =_E t_{n+1} \succ' t_{n+2} =_E \cdots$$

D'après la propriété de E-compatibilité de la relation $\succ'$ de la même façon que dans la démonstration du Théorème 2.1. , on poura construire toujours une chaîne infinie comme :

$$t_1 \succ' t'_3 \succ' t'_4 \succ' t'_5 \cdots \succ' t'_m \succ' \cdots$$

Comme que le nombre de règles et des equations dans (R,E) est fini , le nombre de symbols dans la dernière chaîne sera fini, et donc , d'après le Théorème de Kruskal il y aura deux termes t'_i et t'_j dans la dernière chaîne tels que :

$$i < j \quad \text{et} \quad t'_i \hookrightarrow t'_j$$

où $\hookrightarrow$ est l'ordre de plongement dans T(F,V) ,et comme que l'ordre est un ordre de simplification on en deduit:

$$t'_i \prec t'_j$$

d'où , d'après l'inclusion $\succ \subseteq \succ'$:

$$t'_i \prec' t'_j$$

d'où la contradiction . $\square$

3.2-ORDRES DE E-SIMPLIFICATION

Le Théorème precedent suggère une extension equationnelle du concept d'ordre de simplification comme :

DEFINITION 3.3. : Soit E un ensemble d'axiomes equationnels définis dans une algèbre de termes T(F,V). Alors , une relation $\succ$ définie dans T(F,V) est un ordre de E-simplification si $\succ$ est un ordre de simplification qui admet une extension E-compatible dans T(F,V) .

Le Théorème suivant reformule le Théorème 3.1. et constitue une généralisation equationnelle du Théorème de Dershowitz (Th. 1.).

THEOREME 3.2. (E-Dershowitz) : Soit (R,E) un système de réécriture equationnel fini et défini dans une algèbre de termes T(F,V) . Alors , si toutes les instances des règles de R sont orientées par un ordre de E-simplification , le système (R,E) est noethérien .

DEMONSTRATION : Immediate d'après la définition 3.3. et le Théorème 3.1.

REMARQUE : D'après la définition d'ordre de E-simplification , tout ordre de simplification tel que lui même ait la propriété de E-compatibilité,sera un ordre de E-simplification en tant que dans ce cas , l'ordre aura l'extension trivial $\succ' = \succ$, et elle sera evidemment E-compatible .

Dans la section suivante on donne une condition nécessaire d'existence pour les ordres de E-simplificatio a une théorie equationnelle E

3.3-UNE CONDITION NECESSAIRE POUR L'EXISTENCE D'ORDRES DE E-SIMPLIFICATION

Le Lemme suivant contient une condition nécessaire d'existence d'ordres de simplification associés à une Théorie equationnelle E .Comme corolaire du Lemme , on obtient la non existence d'ordres de simplification pour celles Théories E ,où, parmi les axiomes de E,il y a des equations dont un membre est plongé dans l'outre .

On en déduit la non existence d'ordres de E-simplification dans le cas d'existence des lois d'idempotence , élément neutre , absortion,...

LEMME 3.1. : Soit E un ensemble d'axiomes equationnels définis dans une algèbre de termes T(F,V) quelconque .Alors si le nombre d'axiomes dans E est fini et $\succ$ est un ordre de E_simplification on a la suivante propriété:

$$t =_E s \Longrightarrow \neg(t \succ s)$$

DEMONSTRATION : Soit $\succ$ un ordre de -simplification admet une extension $\succ'$ E-compatible .Supposons l'existen ce de deux termes t et s dans T(F,V) tels que :

$$t =_E s \quad \text{et} \quad t \succ s$$

alors d'après l'inclusion $\succ \subseteq \succ'$ on aura les relations :

$$t =_E s \quad \text{et} \quad t \succ' s$$

et d'après le même raisonement que dans le cas anterieur, il y aura une chaîne infinie d'éléments E-équivalents pour l'ordre comme :

$$t \succ' s \succ' s_1' \succ' s_2' \succ' \quad \cdots\cdot \succ' s_n' \succ'$$

et deux termes s_i' et s_j' , tels que $i < j$ et $s_i' \hookrightarrow s_j'$.
D'après que $\succ$ est un ordre de simplification , on aura :

$$s_i' \hookrightarrow s_j' \Longrightarrow s_i' \prec s_j'$$

et d'après l'inclusion $\succ \subseteq \succ'$, on aura $s_i' \prec' s_j'$, ce qui contredit le caractère d'ordre strict qu'on suppose pour la relation $\succ'$.
$\square$

COROLAIRE : Soit E un ensemble d'axiomes equationnels fini et défini dans une algèbre T(F,V) de termes T(F,V) quelconque. S'il exist dans E une equation qui peut être ordonnée, par l'ordre de plogement, alors il n'existe aucun ordre de E-simplification pour la Théorie associée à E.

DEMONSTRATION : Soit $e_i = e_i'$ un axiome dans E et tel que on ait $e_i \hookrightarrow e_i'$, où $\hookrightarrow$ est l'ordre de plogement dans T(F,V). Alors s'il exist un ordre de E-simplification, on aura :

$$e_i =_E e_i' \quad \text{et} \quad e_i < e_i'$$

ce qui contredit la condition nécessaire d'existence des ordres de E-simplification, contenue dans le Lemme anterieur. $\square$

Remarquons que les ordres de E-simplification n'existiront donc pas pour de nombreuses lois classiques (traités comme égalités) tels :

1. $f(x,x) = x$ (idempotence)
2. $g(x,e) = x$ (élément neutre)
3. $f(x,a) = a$ (absortion)
4. $h(h(x)) = h(x)$ (equipotence)
5. $h(h(x)) = x$ (involution)

en effet, pour chacune d'entre elles, le membre droit est plongé dans le membre gauche.

3.4-LES ORDRES DE SIMPLIFICATION E-COMPLETS

Le concept d'ordre de E-simplification admet la suivante restriction , laquelle sera nomée la classe d'ordres de simplification E-complets pour une théorie equationnelle E :

DEFINITION 3.4. :Soit E un ensemble d'axiomes equationnels définis dans une algèbre T(F,V) .Alors on dira qu'une relation $\succ$ définie dans T(F,V) est un ordre de simplification E-complet si :

1 $\succ$ est un ordre de simplification dans T(F,V) .

et

2 $\succ$ admet une extension $\succ'$ E-complète dans T(F,V) .

Dans ce cas , on entend par extension E-complète à toute extension $\succ'$ de l'ordre $\succ$ qui soit un ordre strict et qui en plus soit E-complète . C.a.d. $\succ'$ est E-complète si :

$$(\forall t,s,t',s' \in T(F,V))$$

$$t' =_E t \succ s =_E s' \implies t' \succ s'$$

PROPOSITION 3.1. : Si $\succ$ est un ordre de simplification E-complet , alors $\succ$ est un ordre de E-simplification .

DEMONSTRATION : Trivial .

Malgré que le suivant lemme est presque trivial , il est d'importance pratique pour la construction des extensions modulo E des ordres du type R.P.O. .

LEMME 3.2. : Si $\succ$ est un ordre de simplification E-complet , alors por toute congruence $=_{E'}$ telle que $=_{E'} \subseteq =_E$, l'ordre $\succ$ est un ordre de simplification E'- complet .

DEMONSTRATION : Si $\succ'$ est une extension E-complète de l'ordre $\succ$, alors nécessairement , si $=_{E'} \subseteq =_E$, l'extension $\succ'$ sera complète par rapport à la congruence $=_{E'}$. $\square$

CHAPITRE 4 :

LES ORDRES E-R.P.O.

Depuis l'introduction formelle du concept d'ordre de E-simplification , la continuation logique de la théorie correspond a la construction des ordres de E-simplification pour celles thêories equationnelles E , dont l'existence des ordres associês ne soit pas interdite par la condition necessaire d'existence , imposêé dans le chapitre anterieur .

C'est dans ce sense que l'existence d'ordres de E-simplification pour les thêories Commutative ,Associative , et Commutative-Associative respectivement , serait souhaitable en tant que :

1 Le nombre considerable de théories equationnelles qui font usage de ces axiomes , et donc, le domaine d'applications practiques qui donnerait cette classe d'ordres .

2 L'existence d'ordres de C,A et C-A-simplifcation (où C,A et C-A signifient respectivement,Commutativité , Associativitê et Commutativitê-Associativitê) n'est pas interdite pour la condition necessaire d'existence des ordres de E-simplification .

Le prêsent chapitre , et final de ce travail, est basé sur les suivantes observations par rapport aux ordres de simplification du type R.P.O. existents (c.a.d. l'ordre R.P.O. (DER-79) et R.P.O.-lexico (K-L-80)) :

1 Les ordres de simplification du type R.P.O. sont dêfinis sur la dêclaration implicite d'une congruence (laquelle

sera dite 'congruence propre' de l'ordre respectif) dans l'algèbre T(F,V) . Cette congruence est la congruence de permutation (c.a.d. la congruence equationnelle correspondante a la déclaration comme commutatifs, pour touts les symboles d'arité superieure ou egale a deux dans la signature) pour le R.P.O. de Dershowitz , tandis que pour le R.P.O. de Kamin-Levy , la correspondante congruence est la congruence syntaxique (c.a.d. la congruence equationnelle definie d'apres l'ensemble vide d'axiomes equationnels)

2 La congruence propre d'un ordre R.P.O. determine une certaine structure de données , depuis laquelle on arrive a une répresentation recursive des clases de termes equivalents modulo la dite congruence .Ainsí , pour l'ordre R.P.O.-Lexico , l'structure de données propre est la LISTE , tandis que pour le R.P.O. de Dershowitz elle est clairement le MULTI-ENSEMBLE .

3 D'apres la representation recursive des classes de congruence associées a la congruence propre , l'ordre R.P.O. correspondant est défini d'une façon practiquement standarisée sur la correspondante representat .

Le resultat qui fonde ce chapitre est double :

I Les ordres R.P.O. existents sont ordres de E-simplification par rapport a ses congruences propres. Plus precisement , les ordres R.P.O. existents sont ordres de simplification E-complets par rapport a ses congruences propres .

II L'analyse anterieur peut s'etendre la la construction des correspondents ordres R.P.O. pour, respectivement , les congruences Associative et Associative-Commutative , moyenant ' la bonne ' representation recursive des classes de congruence des termes .

Les conclusions derivées du point I anterieur sont essentiellement les suivantes :

I-1 En tant que l'ordre R.P.O. de Dershowitz (dans la suite C-R.P.O.) est un ordre de simplification C-complet (où 'C' represente la congruence de permutation (ou congruence'totellement commutative') il est (Lemme 3.) aussi un ordre de simplification C'-complet pour toute congruence =C' induite dans l'algèbre , depuis la déclaration comme commutatifs d'un nombre determiné de symboles de la signature (mais pas nécessairement touts ces symboles) , de peuis l'inclusion $=C' \subseteq =C$.

Alors , si toutes les régles d'un système de réécriture R sont orientées par l'ordre C-R.P.O. , le système de réécriture equationnel (R,C') sera toujours noethérien , si =C' represente la congruence induite d'apres la déclaration de,n'importe quels symboles de siganture,comme commutatifs

Dans les applications practiques , le resultat anterieur a un interet rélatif d'apres que pour nombreuses theories equationnelles , les axiomes commutatifs sont toujours accompagnés par des axiomes associatifs , Malheureusement , l'ordre C-R.P.O. n'est pas un ordre A- compatible , et donc , l'existence des axiomes associatifs invalide son applicabilité en tant que , cet ordre n'oriente , non plus , les axiomes associatifs.

La situation correspondante pour l'ordre R.P.O.-Lex. est la suivante : Etant donné que la congruence propre de l'ordre de Kamin-Levy est la congruence syntaxique , cet ordre est un ordre trialement de E-simplification . En fin, l'ordre R.P.O.-Lexico. est un ordre de Ø-simplification. Ce fait a comme resultat practique le suivant : Si toutes les régles d'un système de réécriture sont orietées par l'ordre R.P.O. -lexico (où Ø-R.P.O.) la terminaison finie du correspondent système de réécriture eqationnel (R,E) <u>ne sera pas garantisée</u> pour n'importe quel ensemble d'axiomes equationnels E. La raison de ce resultat reside à nouveau dans le Lemme 3. anterieur , en tant que l'ensemble de congruences contenues dans la congruence syntaxique est, evidement, vide .

Par rapport a le point <u>II</u> mentioné (c.a.d. construction des versions Associative et Associative-Commutative de l'ordre R.P.O.) a la date de presentation de ce travail l'etat du probleme est le suivant :

<u>1</u> Par rapport a l'ordre A-R.P.O. on a donné une definition de la congruence de base . C'est la dire la congruence Associative. On a appelé congruence Associative a la congruence equationnelle induite dans T(F,V) , depuis la déclaration comme associatifs relative a touts le symboles d'arité superieure ou egale a deux dans F . L'extension au cas AC est immediate .

<u>2</u> On a donné une definition recursive de la congruence Associative- moyenant une structure de données sur les termes laquelle a ete appelé 'liste associative ' .

4.1-LA CONGRUENCE SYNTACTIQUE ET L'ORDRE R.P.O.-LEXICO

4.1.1-LA CONGRUENCE SYNTACTIQUE

DEFINITION 4.1 : On appelle congruence syntactique la congruence equationnelle induite dans une algèbre $T(F,V)$ par l'ensemble vide d'axiomes equationnels .

REMARQUE : Deux termes seront égaux modulo la congruence syntactique sii ils ont une même représentation arborescente . Donc , cette définition de la congruence syntactique peut être employée comme critère de décision associé à la congruence .

4.1.2-REPRESENTATION RECURSIVE SYNTACTIQUE D'UN TERME

La suivante définition est équivalent à donner une présentation récursive de la représentation arborescente d'un terme .

DEFINITION 4.2 : Soit t un terme de l'algèbre . Alors , la représentation récursive syntactique de t , que nous noterons comme $R_\emptyset(t)$, est une paire ordonnée qui est définie récursivement comme :

1 Si t est une constante ou une variable , $R(t) = (t,nil)$, où nil est la liste vide de réprésentations .

2 Si $t=f(t_1,\dots,t_n)$, alors $R_\emptyset(t) = (f, \langle R_\emptyset(t_1),\dots,R_\emptyset(t_n)\rangle)$, où $\langle R_\emptyset(t_1),\dots,R_\emptyset(t_n)\rangle$ est la liste des représentations des sous-termes de t .

La proposition suivante est immédiate .

PROPOSITION 4.1 :

$\forall\ t,s \in T(F,V)$ $R(t) = R(s)$ sii $R_\phi(t) = R_\phi(s)$, où $R(t)$ et $R(s)$ sont les représentations arborescentes de t et s respectivement .

4.1.3-ORDRE SUR LES REPRESENTATIONS SYNTACTIQUES

DEFINITION 4.3 : Soit $>$ une precedence sur la signature F de l'algèbre T(F,V) . Alors , l'ordre $>$ s'étend à l'ordre $\succeq$ défini sur les représentations recursives syntactiques des termes de T(F,V) comme :

Soient $R_\phi(s) = (f, L(s))$ et $R_\phi(t) = (g, L(t))$, où $L(s)$ et $L(t)$ sont les listes des représentations des sous-termes de s et t respectivement . Alors ,

$$R_\phi(s) = (f, L(s)) \succeq (g, L(t)) = R_\phi(t) \quad \text{sii}$$

<u>1</u> $f = g$ <u>et</u> $L(s) \succeq_{lex} L(t)$ <u>et</u> $R_\phi(s) \succeq R_\phi(t_i)$,pour tout $R_\phi(t_i)$ dans $L(t)$.

<u>ou</u>

<u>2</u> $f > g$ <u>et</u> $R_\phi(s) \succeq R_\phi(t_i)$,pour tout $R\ (t_i)$ dans $L(t)$.

<u>ou</u>

<u>3</u> $\neg(f \geqslant g)$ <u>et</u> $\exists\ R_\phi(s_i) \in L(s)$ t.q. $(R_\phi(s_i) \succeq R_\phi(t)$ <u>ou</u> $R_\phi(s_i) = R_\phi(t))$

4.1.4-ORDRE R.P.O. INDUIT PAR LA REPRESENTATION R_ϕ

DEFINITION 4.4 : Soient s et t des termes dans T(F,V) . Alors , sous l'hypothèse de la donnée d'une precedence sur F , l'ordre $\succeq$ sur les représentations induit un ordre $\succ_\phi$ sur les termes comme :

$$s \succ_\phi t \quad \text{sii} \quad R\ (s) \succeq R\ (t)$$

LEMME 4.1 : La relation $\gtrsim_{\phi}$ dans T(F,V) est identique à l'ordre R.P.O. lexico .

La démonstration est immédiate et elle est laissée au lecteur .

4.2-L'ORDRE R.P.O. ET LA CONGRUENCE DE PERMUTATION

4.2.1-LA CONGRUENCE DE PERMUTATION

DEFINITION 4.5 : Nous appelerons congruence de permutation , la congruence equationnelle induite dans une algèbre T(F,V) , après de déclarer comme commutatif tout symbole de fonction de la signature F d'arité $\geqslant 2$.

Dans la suite , on notera comme =P la congruence de permutation .

4.2.2-REPRESENTATION PERMUTATIVE D'UN TERME

DEFINITION 4.6 : La représentation permutative $R_C(t)$ d'un terme t est une paire ordonnée définie récursivement comme :

1 Si t est une constante ou une variable , alors $R_C(t) = (t,(\ ))$, où ( ) est le multi-ensemble vide .

2 Si $t=f(t_1,\dots,t_n)$, alors $R_C(t) = (f,M(t))$, où $M(t) = \{R_C(t_1),\dots,R_C(t_n)\}$ est le multi-ensemble des représentations permutatives des sous-termes de t .

PROPOSITION 4.2 :

$\forall\, t,s \in T(F,V) \quad t =P\ s \quad \text{sii} \quad R_C(t) = R_C(s)$

La démonstration est immédiate .

4.2.3-ORDRE SUR LES REPRESENTATIONS COMMUTATIVES

DEFINITION 4.7 : Soit une precedence sur la signature F d'une algèbre T(F,V) . Soient $R_C(s)=(f,M(s))$ et $R_C(t)=(g,M(t))$

$$R_C(s) \succ_c R_C(t) \quad \text{sii}$$

<u>1</u> $f = g$ <u>et</u> $M(s) \succ_c \succ_c M(t)$

<u>ou</u>

<u>2</u> $f > g$ <u>et</u> $R_C(s) \succ_c R_C(t_i)$ pour tout $R_C(t_i) \in M(t)$

<u>ou</u>

<u>3</u> $\neg(f \geq g)$ <u>et</u> $\exists\ R_C(s_i)$ t.q. $(R_C(s_i) \succ_c R_C(t)$ <u>ou</u> $R_C(s_i)=R_C(t))$

4.2.4-ORDRE INDUIT PAR LA REPRESENTATION R_C

DEFINITION 4.8 : Soient s,t des termes dans T(F,V) . Alors , sous l'hypothèse de la donnée d'une precedence sur F , l'ordre sur les représentations induit un ordre $\succ_c$ sur les termes comme :

$$s \succ_C t \quad \text{sii} \quad R_C(s) \succ_c R_C(t)$$

la démonstration des deux lemmes qui suivent n'offre aucune difficulté et elle se laisse pour le lecteur .

LEMME 4.2 : La relation $\succ_C$ dans T(F,V) est identique à l'ordre R.P.O. de Dershowitz avec la modification de Lescanne .

LEMME 4.3 : L'ordre R.P.O. (avec la modification de Lescanne) est un ordre de simplification C-complet , où =C est la congruence commutative induite après la déclaration comme commutatifs d'un nombre arbitraire de symboles de la signature.

4.2.5-LA NON A-COMPATIBILITE DE L'ORDRE R.P.O.

L'ordre R.P.O. defini par Dershowitz est un ordre de simplification C-compatible , lequel devient C-complet d'apres la modification introduite par Lescanne . Le but de cette section est démontrer la non compatibilite de cet ordre par rapport a la congruence associative induite dans l'algèbre d'apres la déclaration comme associatifs d'un ensemble F_a de symboles dans F .

PROPOSITION 4.1. : L'ordre R.P.O. (ou C-R.P.O.) n'est pas un ordre de simplification A-compatible .

DEMOSNTRATION : Soit f un symbol declare comme associatif dans F , et soit g un symbole quelconque de F tel que on ait f $>$ g dans la precedence . Alors , on aura :

```
                    *
      f             >    g
     / \                / \
    x   y              x   y
```

et par monotonie :

```
      f         *          f
     / \        >         / \
    z   f               z     g
       / \                   / \
      x   y                 x   y
```

D'outre part , on aura

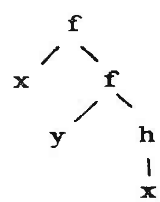
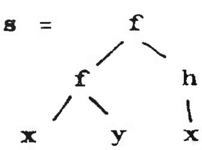
```
          f                   f
         / \                 / \
        f   y     =A        z   f
       / \                     / \
      z   x                   x   y
```

mais n'existe pas de terme A-equivalent au f(z,g(x,y)) t.q. f(f(z,x),y) soit plus grand que lui. $\square$

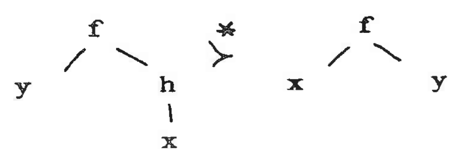
La proposition anterieure démontre que l'ordre R.P.O. n'est pas un ordre A-compatible . Dans ce sense , on pourrait penser à l'existence de quelque extension A-compatible de cet ordre . Cependant , le lemme suivant démontre la impossibilité de telle extension .

LEMME 4.4 : Il n'existe pas d'extension A-compatible pour l'ordre R.P.O. .

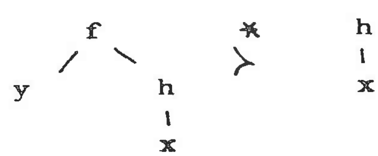
DEMONSTRATION : Dépuis le suivant contre-exemple qui contredit la condition nécessaire d'existence d'ordres de E-simplification imposée dans le Lemme 3.1 du chapitre anterieur .

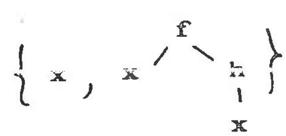
Soient $t =$  et $s =$ 

alors , on aura $t =_A s$ et $t \succ^* s$, d'après que :

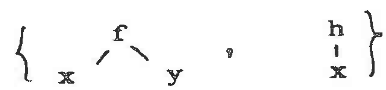
<u>1</u> 

et

<u>2</u> 

et alors , le multi- ensemble  est plus grand

que le multi-ensemble



par l'extension multi-ensemble de l'ordre $\succ^*$. □

4.3-REPRESENTATIONS RECURSIVES ASSOCIATIVES

4.3.1-LA CONGRUENCE ASSOCIATIVE

DEFINITION 4.9 : Nous appelerons congruence associative définie dans une algèbre $T(F,V)$, la congruence equationnelle $=_A$ induite dans $T(F,V)$ après de déclarer tout symbole d'arité $\geqslant 2$ comme associatif .

4.3.2-REPRESENTATION RECURSIVE ASSOCIATIVE D'UN TERME

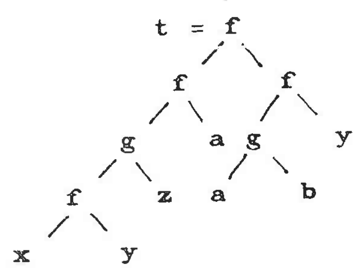
4.3.2.1-SOUS-TERMES PROPRES D'UN TERME DANS LA REPRESENTATION RECURSIVE ASSOCIATIVE.

DEFINITION 4.10 : Soit t un terme quelconque de l'algèbre . On dira qu'un sous-terme t/u est un sous-terme propre de t si $t(u) \neq t(\varepsilon)$ et $\forall\, v < u \quad t(v) = t(\varepsilon)$, où , comme d'habitude , représente le mot vide dans le domaine de T et $t(\varepsilon)$ est la racine dans la représentation arborescente de t .

4.3.2.2-LISTE DES SOUS-TERMES PROPRES D'UN TERME .

DEFINITION 4.11 : On appelera liste des sous-termes propres d'un terme t , et on la notera par $SP(t)$, l'ensemble des sous-termes propres de t , ordonné suivant l'ordre lexicographique de ses occurrences.

Exemple : Soit



Alors , les sous-termes propres du terme t sont :

```
t/11   =          g
                 / \
                f   z
               / \
              x   y

t/12   =          a

t/21   =          g
                 / \
                a   b

t/22   =          y
```

La liste des sous-termes propres de t sera :

$$SP(t) = \langle t/11 \, , \, t/12 \, , \, t/21 \, , \, t/22 \rangle$$

4.3.2.3-POIDS ASSOCIATIF D'UN TERME.

DEFINITION 4.12 : Soit t un terme de T(F,V) , dont le symbole à la racine de t a une arité $\geqslant 2$. Alors , le poids associatif de t est défini comme :

$$a(t) = \frac{\|SP(t)\| - 1}{ar(f)-1}$$

où $\|SP(t)\|$ est la longueur de SP(t) .

<u>Exemple</u> : Dans l'anterieur exemple le terme t a un poids associatif $a(t) = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$.

<u>4.3.3-REPRESENTATIONS RECURSIVES ASSOCIATIVES</u>

DEFINITION 4.13 : La représentation recursive associative d'un terme t , notée par $R_A(t)$, est un triplet défini recursivement comme :

1 Si t est une constante ou une variable, $R_A(t)=(t,ar(t),nil)$.

2 Si $t=h(t')$, $R_A(t)=(h,ar(h), \langle R_A(t')\rangle)$.

3 Si $t=f(t_1,\dots,t_n)$, $R_A(t)=(f,a(t),SP_A(t))$, où $a(t)$ est le poids associatif de t et $SP_A(t)$ est la liste des représentations recursives associatives des sous-termes de t .

CONCLUSIONS

Dans ce travail on a developpé le cadre théorique pour aborder le problème de la terminaison des systèmes de réécriture equationnels.

Les résultats obtenus dans ce domaine ont été à niveau abstrait entierement compatibles avec ceux obtenus indépendamment et rélatifs à la généralisation equationnelle de la propriété Church-Rosser et à la définition adequate de la sémantique opérationnelle des systèmes de réécriture équationnels (JOU-82).

Le concept d'ordre de simplification et les preuves de terminaison correspondantes ont été généralisées au cas equationnel à travers du concept d'ordre de E-simplification.

Finalement, on a realisé un analyse sur la structure des ordres du type R.P.O. et on a démontré que ces ordres sont essentiellement des ordres de E-simplification par rapport à leurs congruences propres.

De la même manière, on a établi les bases théoriques pour étendre la famille des ordres R.P.O. en tant que construire les correspondents ordres R.P.O. de A et AC simplification. Les preuves qui manquent dans ce sense sont purement techniques.

Des objectifs immédiats à realiser dans ce sense sont nécessairement la conclusion des preuves mentionées pour les ordres R.P.O.,et dans un outre sense, le correspondant étude pour les ordres de simplification du type R.D.O..

BIBLIOGRAPHIE :

(BIR-35) BIRKHOFF G. : "On the structure of abstrct algebras" Proc.Cambridge Phil.Soc.31,pp 433-454 (1935)

(DER-79) DERSHOWITZ N. "Orderings for term -rewriting systems" Proc 20th Symposium on Foundations of Computer Science pp 123-131 (1979).

(DER-82) DERSHOWITZ N. "Computing with term rewriting systems" à publier .

(DER-MA -79) DERSHOWITZ N.,MANNA Z. :"Provingtermination with multiset orderings", COMM.ACM, Vol. 22,nº 8 p.465-476.

(HUE-LAN-78)HUET G.,LANKFORD D.S. :"On the uniform halting problem for term rewriting systems" , Rapport Laboria 283 IRIA . (1978).

(HUE-80)HUET G. , "Confluent reductions:Abstract properties and applications to term rewriting systems " J.ACM 27-4,pp 797-821 (1980).

(HU-OP-80) HUET G. ,OPPEN D.C. "Equtions rewrite rules :A survey", in "formal languajes perspectives and open problems ", Ed. Book R.,Academic Press (1980).

NANCY