

V 184

SONEL

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

20

LA METHODE "PERT"
CRITIQUE et AMELIORATION



pour l'obtention du
DOCTORAT de SPECIALITE MATHÉMATIQUES (3ème CYCLE)

Soutenu devant le Jury le 14 janvier 1969

par

Jacques MOREL



Jury : Mr J. LEGRAS Président
 Mr M. DEPAIX Examineurs
 Mr Cl. PAIR

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

✓
LA METHODE "PERT"
CRITIQUE et AMELIORATION



par Jacques MOREL

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens Honoraires : M. CORNUBERT - DELSARTE - ROUBAULT.Professeurs Honoraires : M. RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JULY - LAPORTE - EICHORN - GODEMENT - DUBREUIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - de MALLEMANU - LONGCHAMON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLIER - CORNUBERT - CHAPPELLE - GUERIN - WAHL.Maîtres de conférences honoraires : M. LIENHART - PIERRETProfesseurs

M. DELSARTE	Analyse supérieure	SUHER	Physique expérimentale
ROUBAULT	Géologie	CHAPON	Chimie biologique
CHAPPELLE	Mécanique rationnelle	HEROLD	Chimie minérale industrielle
VEILLET	Biologie animale	SCHWARTZ B.	Exploitation minière
BARRIOL	Chimie théorique	*MALAPRADE	Chimie
BIZETTE	Physique	MANCELOT	Botanique
GUILLEN	Electronique	GAYET	Physiologie
GIBERT	Chimie physique	HADNI	Physique
LEGRAS	Mécanique rationnelle	*BASTICK	Chimie
BOLFA	Minéralogie	DUCHAUFOR	Pédologie
NICLAUSE	Chimie	GARNIER	Agronomie
FAIVRE	Physique appliquée	NEEL	Chimie organique industrielle
AUBRY	Chimie minérale	BERNARD	Géologie appliquée
COFFENS	Radiogéologie	*CHAIPIER	Physique
DUVAL	Chimie	*GAY	Chimie biologique
FRUHLING	Physique	STEPHAN	Zoologie
HILLY	Géologie	*CONDE	Zoologie
LE GOFF	Génie chimique	*WERNER	Botanique

* Professeur titulaire à titre personnel)

M. EYMARD	Calcul différentiel intég.	N....	Chimie biologique
LEVISALLES	Chimie organique	N....	Mécanique appliquée
Mme HERVE	Méthodes mathématiques de la physique		
FELDEN	Physique		
*GOSSE	Mécanique physique		
*DAVOINE	Physique(E N S I I)		
HORN	Physique 1er cycle		
Mme LUMER	Mathématiques		

Maîtres de conférences

Mme BASTICK	Chimie P.C. Epinal	JACQUIN	Pédologie et Chimie
M. GUDEFIN	Physique	MAINARD	Physique H.F.
ROCCI	Géologie	CACHAN	Entomologie appliquée(EN)
VUILLAUME	Psychophysiologie	MARTIN	Chimie P.C.
FRENTZ	Biologie animale	PAULHIER	Mécanique expérimentale
MARI	Chimie (I S I N)	PROTAS	Minéralogie
AUROUZE	Géologie	JOZEFOWICZ	Physico Chimie
DEVIOT	Physique du solide	JURALIN	Géologie C B G
FLECHON	Physique P.C.	RIVAIL	Chimie appliquée (EN)
M. HUET	Mathématiques C B G	VILLERMAUX	Génie chimique
VIGNES	Métallurgie	METCHE	Biochimie appliquée(Bras)
BALESDEUT	Thermodynamique chimique appliquée (ENSIC)	PAIR	Mathématiques appliquées
BLASY	Minéralogie appliquée(ENSG)	BAURMANN	Physique 1er cycle
JANOT	Physique PC Epinal	DURAND	Physique
		HUSSON	Physique (I.S.I.N.)
N...	Mécanique des fluides (ISIN)	N...	Mathématiques P.C.
N...	Mécanique ISIN	N...	Mathématiques C.B.G.
N...	Probabilité et statisti.	N...	Physiologie animale
N...	Mathématiques	N...	Mathématiques M.P.
		N...	Exploitation minière (ENSMIN)

Professeur titulaire à titre personnel)

Je remercie vivement Monsieur le Professeur
J. LEGRAS, Directeur de l'Institut Universitaire de Calcul
Automatique pour l'enseignement qu'il m'a donné et l'intérêt
qu'il a bien voulu porter à mon travail.

Je remercie sincèrement Monsieur le Professeur
M. DEPAIX pour les conseils qu'il a bien voulu me donner
en dirigeant ma recherche.

Monsieur le Professeur PAIR m'a conseillé pour
une partie de ce travail : qu'il soit également remercié.

Je n'oublie pas tous les amis de l'Institut
de Calcul qui m'ont aidé à terminer ce travail, ni ma femme
à qui je le dédie.

S O M M A I R E

- Chapitre 1 : Introduction.
- Chapitre 2 : Rappels sur la notion de graphe.
2 - 1 - Définitions.
2 - 2 - Taille du graphe.
- Chapitre 3 : Initiation à la méthode PERT.
3 - 1 - Représentation du problème par un graphe.
3 - 2 - Exemple.
3 - 3 - Calcul des dates des étapes.
- Chapitre 4 : Comparaison d'algorithmes pour le modèle déterministe.
4 - 1 - Représentation de type "PERT" ou "Potentiels".
4 - 2 - Le problème "PERT temps".
4 - 2 - 1 - Formulation.
4 - 2 - 2 - Calendriers.
4 - 2 - 3 - Marges.
4 - 2 - 4 - Généralisation à des graphes à plusieurs extrémités.
4 - 3 - L'algorithme naturel.
4 - 3 - 1 - Description.
4 - 3 - 2 - Conclusion.
4 - 4 - L'algorithme de FORD.
4 - 4 - 1 - Principe.
4 - 4 - 2 - Programmation.
4 - 4 - 3 - Conclusion.
4 - 5 - Ordonnement des sommets et des arcs.
4 - 5 - 1 - Utilité d'un classement.
4 - 5 - 2 - Définition d'un classement.
4 - 5 - 3 - Classement par numérotation.
4 - 5 - 4 - Classement par la méthode des niveaux.
4 - 5 - 5 - Classement par la méthode de la pile.
4 - 6 - Utilisation du classement des arcs au calcul des calendriers.
4 - 6 - 1 - Longueur du plus long chemin allant d'un point x fixé à tout point y du graphe.

- 4 - 6 - 2 - Longueur du plus long chemin allant de tout point x du graphe à un point y fixé.
- 4 - 6 - 3 - Calcul des calendriers.
- 4 - 6 - 4 - Recherche du chemin critique.
- 4 - 6 - 5 - Conclusion.
- 4 - 7 - Comparaison des algorithmes.
 - 4 - 7 - 1 - Critères de comparaison.
 - 4 - 7 - 2 - Condition de l'expérience.
 - 4 - 7 - 3 - Résultats.
 - 4 - 7 - 4 - Conclusions.

Chapitre 5 : La méthode PERT aléatoire.

- 5 - 1 - Introduction.
- 5 - 2 - Définition du problème.
- 5 - 3 - Présentation du modèle PERT aléatoire.
- 5 - 4 - Etude critique.

Chapitre 6 : La méthode de simulation :

- 6 - 1 - Principe.
- 6 - 2 - Notion de probabilité de criticité.
- 6 - 3 - Précision des estimations.
 - 6 - 3 - 1 - Estimation de la moyenne de $\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$
 - 6 - 3 - 2 - Estimation de la variance de $\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$
 - 6 - 3 - 3 - Précision de l'histogramme.
 - 6 - 3 - 4 - Estimation des probabilités de criticité.
- 6 - 4 - Génération de nombres pseudo-aléatoires.
 - 6 - 4 - 1 - Principe.
 - 6 - 4 - 2 - Mise au point.
 - 6 - 4 - 3 - Tests statistiques.
 - Test d'équirépartition.
 - Test du coefficient de corrélation.
 - Recherche de la période.
- 6 - 5 - Génération d'un échantillon suivant une loi donnée.
 - 6 - 5 - 1 - Principe.
 - 6 - 5 - 2 - Application.
 - Génération suivant la loi triangulaire.

- Génération suivant une loi Bêta.
- Génération suivant la loi normale.

6 - 6 - Misc au point sur ordinateur.

- 6 - 6 - 1 - Organigramme.
- 6 - 6 - 2 - Conclusion.

Chapitre 7 : Etude de la criticité.

- 7 - 1 - Introduction.
- 7 - 2 - Test de comparaison des probabilités de criticité.
- 7 - 3 - Calcul strict de la probabilité de criticité.
 - 7 - 3 - 1 - Cas de 2 chemins.
 - 7 - 3 - 2 - Cas de 3 chemins.
 - 7 - 3 - 3 - Cas de n chemins.
- 7 - 4 - La notion PERT de chemin critique est erronée.
- 7 - 5 - Facteurs influents sur la criticité des chemins.
 - 7 - 5 - 1 - Longueur moyenne.
 - 7 - 5 - 2 - Variance de la longueur.
 - 7 - 5 - 3 - Corrélations.
 - 7 - 5 - 4 - Induction pour le cas général.
 - 7 - 5 - 5 - Comparaison de 2 chemins.

7 - 6 - Criticité des arcs.

Chapitre 8 : Etude de la distribution de $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$

- 8 - 1 - Conditions d'application de la méthode PERT.
- 8 - 2 - Tests de normalité.
 - 8 - 2 - 1 - Test du χ^2
 - 8 - 2 - 2 - Test de symétrie et d'aplatissement.
- 8 - 3 - Hypothèse d'existence d'un chemin presque toujours critique.
 - 8 - 3 - 1 - L'hypothèse est fautive en général.
 - 8 - 3 - 2 - Etude de l'approximation PERT suivant les valeurs de $\text{Max} P_i$
 - 8 - 3 - 3 - Influence de la corrélation des chemins sur l'approximation PERT.
 - 8 - 3 - 4 - Influence de l'écart type des chemins sur l'approximation PERT.
 - 8 - 3 - 5 - Etude de graphes quelconques.
 - 8 - 3 - 6 - Conclusion.

8 - 4 - Hypothèse de normalité des longueurs des chemins.

8 - 4 - 1 - Nombre d'arcs nécessaires pour atteindre la normalité.

8 - 4 - 2 - Cas où un chemin comporte peu d'arcs.

8 - 5 - Hypothèse d'indépendance des longueurs des arcs (ou durées des tâches).

8 - 5 - 1 - Etude des différents types de lien.

8 - 5 - 2 - Etude d'un type de dépendance.

Chapitre 9 : Méthode de CLARK.

9 - 1 - Calcul des moments du maximum de 2 variables normales et de sa covariance avec une 3ème variable normale.

9 - 1 - 1 - Calcul des moments de $\text{Max} \left(\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right)$

9 - 1 - 2 - Calcul de $\text{Cov} \left[\text{Max} \left(\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right), Z \right]$

9 - 2 - Application à l'étude d'un projet à durées aléatoires.

9 - 2 - 1 - Principe.

9 - 2 - 2 - Méthode LOOTSHA.

9 - 2 - 3 - Calcul des probabilités de criticité des chemins.

9 - 3 - Etude de l'approximation de CLARK.

9 - 3 - 1 - Etude théorique.

9 - 3 - 2 - Etude de l'erreur sur des exemples.

9 - 3 - 3 - Conclusion.

Chapitre 10 : Méthodes pratiques d'étude d'un projet à durées aléatoires.

10 - 1 - Introduction.

10 - 2 - La méthode PERT affinée.

10 - 2 - 1 - Notion de fuseau.

10 - 2 - 2 - Recherche des chemins allant de l'entrée à la sortie du grapho.

10 - 2 - 3 - Sélection du fuseau critique.

10 - 2 - 4 - Description du programme.

10 - 2 - 5 - Traitement des grands graphes.

10 - 3 - La méthode de simulation accélérée.

10 - 3 - 1 - Description.

10 - 3 - 2 - Comparaison avec la méthode PERT affinée.

Conclusion.

Exemple de graphes traités.

Listings des programmes.

Bibliographie.

Lexique des définitions.

La méthode PERT permet d'étudier des projets de grands travaux et de contrôler leur déroulement. Ces projets doivent être décomposables en tâches élémentaires dont on peut estimer à l'avance les durées et dont on connaît les conditions techniques de réalisation.

La méthode PERT fournit un calendrier prévisionnel du projet et en particulier sa durée minimum de réalisation.

Elle indique à l'avance les tâches dont un retard occasionnerait un retard de l'ensemble du projet (tâches critiques).

L'emploi d'un ordinateur permet de décomposer le projet de façon très fine et de suivre sa réalisation. Ainsi la méthode PERT dépasse de beaucoup en précision et en souplesse les méthodes de planning utilisées antérieurement. De plus elle permet d'étudier l'optimisation des coûts et des moyens mis en oeuvre.

Nous nous limitons ici à l'étude du facteur temps.

La méthode PERT Temps se présente sous deux formes :

- Le modèle déterministe : il consiste à associer au projet un graphe.

Le calcul du calendrier de réalisation se fait à l'aide d'un algorithme de recherche du chemin le plus long d'un point à un autre du graphe.

Nous comparons ici quatre de ces algorithmes : celui fondé sur la note de pile est le plus intéressant.

- Le modèle aléatoire : considère que les durées des tâches sont des variables aléatoires. C'est sous cette forme que le PERT correspond le mieux à la réalité.

On se ramène au modèle déterministe, les durées sont alors les durées moyennes.

Si on fait l'hypothèse que les durées de tâches sont indépendantes on peut déterminer la distribution de la durée totale du projet, donc déterminer la probabilité de terminer à une date fixée.

La conception du modèle aléatoire a été critiquée à plusieurs points de vue. (cf [8] - [9]).

- a) Le choix de la loi de distribution des durées des tâches paraît arbitraire. L'hypothèse d'indépendance des durées est souvent fautive.
- b) La méthode de calcul de la distribution de la durée du projet et la détermination des tâches critiques est erronée.

Le PERT ne considère que les projets dont le graphe comporte un chemin toujours plus long que les autres. Ce n'est qu'un cas particulier.

La méthode de détermination de ce chemin n'utilise que la notion de durée moyenne, elle ignore les notions de variance et de corrélation.

Nous étudions particulièrement la critique b soit en utilisant la méthode de simulation qui donne toutes les informations que l'on désire à la précision voulue, soit en raisonnant sur des exemples simples où le calcul donne des résultats stricts.

Nous proposons une amélioration du modèle aléatoire :

Après un calcul PERT qui laisse le choix de la distribution des durées on extrait un sous-graphe contenant les tâches qui peuvent être critiques. Sur ce sous-graphe on fait un calcul par la méthode de CLARK (cf [10]) qui, moyennant l'hypothèse d'indépendance des durées, fournit des approximations de la distribution de la durée totale et des probabilités de criticité, bien meilleures que celles du PERT.

La méthode de CLARK impossible à appliquer sur un graphe important est utilisable ici.

A condition de le segmenter, le programme de calcul ne prend guère plus de place en mémoire que le programme PERT et il est beaucoup plus rapide que la méthode de simulation fût-elle accélérée.

RAPPELS SUR LA NOTION DE GRAPHE.

2 - 1 - DEFINITIONS. cf Berge (1)

Un graphe est la donnée d'un ensemble X et d'une relation binaire Γ sur X on le note (X, Γ) .

Dans cette étude les éléments de l'ensemble X sont en nombre fini, on les appelle points ou sommets du graphe et on les note x_i ou simplement i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Les points $y \in X$ tels que $x_i \Gamma y$ ($x_i \in X$), sont dits successeurs de x_i . L'ensemble des successeurs de x_i est noté $\Gamma(x_i)$.

Un point qui n'a pas de successeur est une sortie du graphe.

Les points $y \in X$ tels que $y \Gamma x_i$ ($x_i \in X$) sont dits prédécesseurs de x_i .

L'ensemble des prédécesseurs de x_i est noté $\Gamma^{-1}(x_i)$.

Un point sans prédécesseur est une entrée du graphe.

Si $x_i \Gamma x_j$ le couple ordonné (x_i, x_j) sera appelé un arc.

x_i on est l'origine, x_j l'extrémité. L'arc sera figuré par une flèche orientée de x_i vers x_j .

Soit U l'ensemble des arcs du graphe (X, Γ) .

Un chemin est une séquence d'arcs (a_1, a_2, \dots, a_n) tels que l'extrémité de chaque arc coïncide avec l'origine de l'arc suivant.

Si le chemin passe par les points $x_1, x_2, \dots, x_r, x_s$, on peut le désigner par $(x_1, x_2, \dots, x_r, x_s)$.

x_1 est l'origine du chemin, x_s l'extrémité.

Une chaîne est une séquence d'arcs (a_1, a_2, \dots, a_n) tels que l'extrémité de chaque arc coïncide soit avec l'origine, soit avec l'extrémité de l'arc suivant.

(Un chemin est donc une chaîne particulière).

Un graphe est connexe si tout couple de points est relié par une chaîne.

Un circuit est un chemin qui relie un point à lui même.

On appellera longueur d'un arc (x_i, x_j) un nombre $L(x_i, x_j) \geq 0$ associé à cet arc.

La longueur d'un chemin est la somme des longueurs des arcs qui le compo-

On définit une relation binaire Γ' sur l'ensemble U des arcs :

Pour tout arc a_i et a_j on a : $a_i \Gamma' a_j$ si et seulement si l'extrémité de a_i est l'origine de a_j .

2 - 2 - TAILLE DU GRAPHE.

La taille du graphe est donnée par le nombre N de sommets et le nombre M d'arcs.

Le rapport M/N précise si le graphe est très "maillé" ou peu.

Dans un graphe connexe sans circuit le nombre M d'arcs est strictement inférieur à $N(N-1)/2$.

Cependant dans l'utilisation courante de la méthode PERT,

le nombre d'arcs n'est pas de l'ordre de N^2 .

Les graphes que l'on considère dans la suite seront tels que $M \ll N$.

PRESENTATION SOMMAIRE DE LA METHODE PERT (1)

3 - 1 - REPRESENTATION DU PROBLEME PAR UN GRAPHE.

La méthode PERT consiste à décomposer le projet à réaliser en tâches élémentaires liées entre elles par des relations d'antériorité et à calculer les dates de début de ces tâches. Le travail préliminaire consiste à :

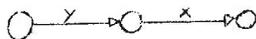
- 1) déterminer ces tâches élémentaires,
- 2) déterminer les relations d'antériorité entre tâches,
- 3) estimer leurs durées.

Chaque tâche sera représentée par un arc du graphe (2).

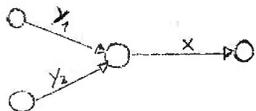
La relation "une tâche peut débuter dès qu'une autre est terminée", correspond à la relation binaire définie sur l'ensemble des arcs.

Exemple :

- si la tâche x a pour condition de départ que la tâche y soit terminée on représentera x et y par 2 arcs adjacents de façon que y soit antérieur à x.



- si la tâche x commence seulement quand les tâches y₁ et y₂ sont terminées on représentera cette condition par le dessin suivant :



On obtient ainsi un graphe connexe car le projet est unique, sans circuit car si une tâche est terminée, on n'a pas, en principe, à la réexécuter. Les sommets seront numérotés de façon quelconque.

Sur chaque arc on portera un nombre égal à la durée de la tâche.

Ce nombre est la longueur de l'arc, définie en 2 - 1.

Pour représenter toutes les relations d'antériorité, on est parfois obligé d'utiliser des tâches fictives de durée nulle.

(1) Nous ne faisons ici qu'une présentation élémentaire pour permettre au lecteur non averti de comprendre la suite. On trouvera plus de détails dans [2] et [3]

(2) Cette représentation n'est pas la seule utilisée cf. 4 - 1 -

3 2 EXEMPLE -

Supposons que le projet consiste à construire une maison.

Le tableau suivant présente l'analyse des tâches. (Le lecteur est prié de ne pas s'attarder sur la vraisemblance technologique de l'exemple, celui-ci n'a qu'un but didactique).

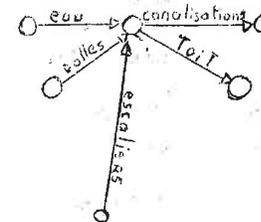
La condition de départ de la tâche « pose des dalles » est que la tâche « murs » soit exécutée à moitié. Or la seule relation prise en compte par la méthode est : telle tâche commence quand telle autre est terminée. Nous tournerons la difficulté en partageant la tâche « murs » en deux tâches de durée 15 jours.

Exemple d'utilisation de tâches fictives :

La tâche « canalisations » commence après « dalles » et « raccordement d'eau ».

La tâche « toit » commence après « dalles » et « escaliers ».

La représentation (ci-contre) de ces conditions est fautive : elle implique que « canalisations » commence après « escaliers » ce qui n'est pas conforme aux conditions de départ.



Deux tâches fictives émergeant du sommet 9 permettent de lever cet obstacle. cf. dessin du graphe.

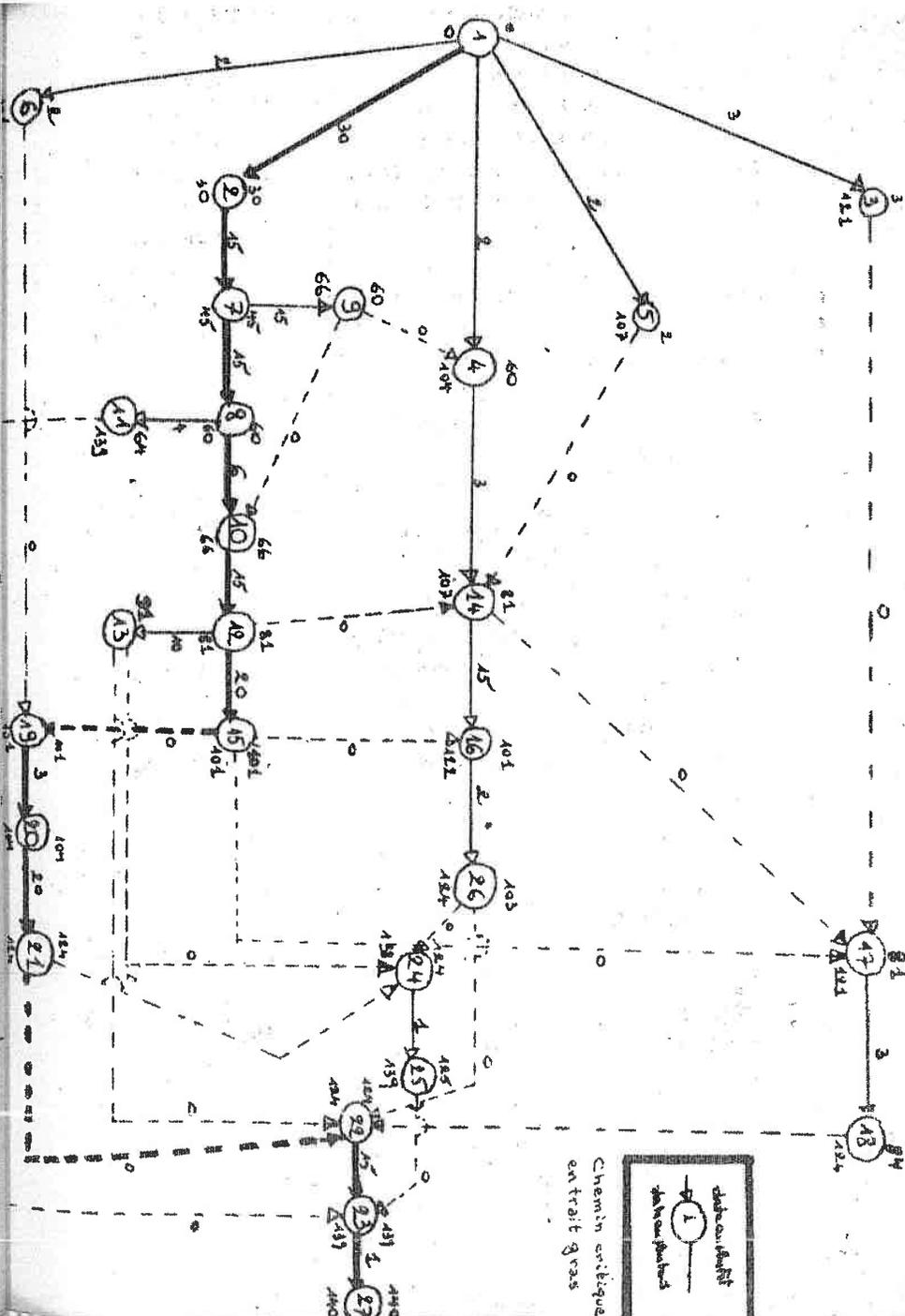
On introduit aussi d'autres tâches fictives pour la clarté du dessin.

Le graphe ainsi obtenu a une seule entrée, une seule sortie et ne présente pas de circuit. (On conviendra de numéroté 1 l'entrée et n la sortie).

DECOMPOSITION DU PROJET EN TACHES.

3-2

Numéros		Nom de la tâche	Durée (jours)	Conditions de départ.
Début	Fin			
1	2	Fondations	30	Début
1	3	Raccordement égout	3	Début
1	4	Raccordement eau	2	Début
1	5	Raccordement gaz	2	Début
1	6	Raccordement EDF	2	Début
2	7	Elévation des murs	15	après fondations
7	8	Elévation des murs	15	après fondations
7	9	Pose des dalles	15	murs exécutés à moitié
8	10	Escaliers	6	après murs
8	11	Fenêtres	4	après murs
10	12	Pose du toit	15	après dalles et escaliers
12	13	Carrelage	10	après toit
4	14	Canalisations	3	après dalles et raccordement d'eau
12	15	Cloisons	20	après toit
14	16	Chauffage	15	après raccordement de gaz canalisations et toit.
17	18	Sanitaires	3	après canalisations, égout et cloisons.
16	26	Pose des plinthes	2	après cloisons et chauffage.
19	20	Conduites d'électricité	3	après cloisons et raccordement électriques
20	21	Plâtre	20	après électricité
22	23	Peintures	15	après plâtres, sanitaires, carrelages et plinthes.
24	25	Pose des portes	1	après plâtre, carrelages et plinthes.
23	27	Nettoyage	1	à la fin.



3 - 3 - CALCUL DES DATES DES ETAPES.

Notons λ_i la date à laquelle on parvient au plus tôt à l'étape i.

Supposons que $\lambda_1 = 0$.

On parvient à l'étape 3 quand la tâche (1, 3) est terminée, c'est à dire au bout de 3 jours, $\lambda_3 = 3$, de même $\lambda_5 = 2$, $\lambda_2 = 30$, $\lambda_6 = 2$.

Pour parvenir à l'étape 4 il ne suffit pas que la tâche (1,4) soit exécutée, il faut aussi que (1,2), (2,7), (7,9) le soient. On ne peut donc calculer la date d'une étape avant de calculer les dates de ses ancêtres.

La tâche (2,7) dure 15 jours, en commençant au temps 30, elle terminera au temps 45 donc $\lambda_7 = 45$. De même $\lambda_8 = 60$, $\lambda_9 = 60$.

Pour parvenir à l'étape 4 il faut que les tâches (1,4) et (7,9) soient exécutées. On y parviendra donc au plus tôt au temps $\lambda_4 = \text{Max}[2, 60] = 60$

De même $\lambda_{10} = \text{Max}[60 + 6, 60] = 66$

$$\lambda_{14} = \text{Max}[60 + 3, 81, 2] = 81$$

On essaie de calculer ainsi de proche en proche les dates au plus tôt des étapes par les formules :

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_i = \text{Max}_{j \in \Gamma^{-1}(i)} [\lambda_j + d_{ji}]$$

d_{ji} étant la durée de l'arc (j, i)

Comme on l'a remarqué, l'ordre des calculs n'est pas quelconque.

On trouve en particulier que $\lambda_{27} = 140$. La durée minimum des travaux est donc de 140 jours.

On voit aisément que le calcul des dates au plus tôt des étapes revient au calcul de la longueur du plus long chemin allant de l'étape 1 à chacune d'elles.

Cherchons les dates « au plus tard » des étapes.

Calcul des dates au plus tard :

L'étape 23 doit être atteinte au plus tard au temps 139, $\lambda'_{23} = 139$ de même

$$\lambda'_{22} = 124$$

L'étape 25 peut être atteinte au temps $\lambda'_{25} = \lambda'_{23} - d_{25,23} = 139$ sans perturber la durée minimum du projet. De même $\lambda'_{24} = 138$

L'étape 13 doit être atteinte à une date telle que les dates au plus tard de 24 et 22 ne soient pas perturbées.

$$\lambda'_{13} = \text{Min}[138 - 0, 124 - 0] = 124$$

On continue ainsi de proche en proche en appliquant la formule.

$$\lambda'_i = \text{Min}_{j \in \Gamma(i)} [\lambda'_j - d_{ij}]$$

d_{ij} étant la durée de l'arc (i, j)

ce qui implique que les dates au plus tard des successeurs de l'étape i soient déjà calculées. L'ordre de calcul n'est donc pas quelconque.

Cette méthode de calcul sera utilisée après quelques améliorations en algorithmique pour machine on 4.3.

Les dates au plus tôt et au plus tard coïncident-elles ?

La comparaison des deux calculs précédents nous montre que les étapes 1, 2, 7, 8, 10, 12, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 27 ont des dates au plus tôt et au plus tard égales. C'est dire qu'aucun retard ne peut être pris sur les tâches délimitées par ces étapes sans quoi la durée minimum du projet serait dépassée.

On obtient ainsi un chemin appelé « chemin critique » joignant l'entrée à la sortie du graphe.

Les tâches qui, au contraire, ne se trouvent pas sur le chemin critique peuvent prendre un certain retard (ce sera précisé en 4. 2).

Le calcul PERT permet donc de connaître :

- la durée minimum d'exécution du projet,
 - Les tâches dont un retard entraînerait un retard de l'ensemble,
 - Les calendriers comportant les dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches, entre lesquelles devra se situer la date de début effective, (ces calendriers peuvent être transformés en dates calendaires, il suffit de connaître les dates de début des travaux et celles des jours chômés).
- On a alors la possibilité de minimiser la durée des travaux, de contrôler globalement leur avancement et de prendre les mesures nécessaires pour respecter les délais impartis. Ceci se fait par des « révisions périodiques » qui consistent à recalculer les calendriers sans modifier la structure du graphe mais en donnant aux tâches déjà exécutées leur durée réelle et en réestimant les durées des autres tâches en fonction de la situation.

COMPARAISON D'ALGORITHMES POUR LE MODELE DETERMINISTE.

4 - 1 - REPRESENTATION DE TYPE "PERT" ou "POTENTIELS".

La représentation de type "PERT" symbolise les tâches ou opérations à accomplir, par les arcs du grapho, les sommets du grapho étant les étapes ou évènements. Elle a été utilisée au chapitre 3.

Dans la représentation de type "Potentiels", les tâches sont au contraire représentées par les sommets du grapho, les arcs représentant les relations d'antériorité entre tâches *(ce relations sont appelées contraintes)* ~~appelées aussi contraintes.~~

A l'inverse de la représentation "PERT", la représentation "Potentiels" permet de rendre compte des contraintes disjonctives et de certaines contraintes temporelles (exemple : telle tâche doit commencer au plus tard au temps t_0). (cf [4]).

Mais la représentation "PERT" est de loin la plus utilisée. En effet du point de vue dessin, représenter les tâches par des arcs évoque, mieux que ne le ferait un point, la durée correspondante. En "Potentiels" il faut tenir compte à la fois de la durée des tâches et de la valeur des contraintes ce qui est plus encombrant à ranger en mémoire.

Vu l'objectif limité que nous poursuivons dans cette étude, la représentation de type PERT paraît la plus simple à utiliser. Nous identifions donc par la suite les tâches aux arcs du grapho et les étapes aux sommets.

4 - 2 - LE PROBLEME PERT TEMPS.

4 - 2 - 1 - FORMULATION.

Le problème du PERT - temps se formule ainsi :

"Etant donné un projet formé d'un ensemble de tâches à accomplir de durées connues, liées par certaines relations d'antériorité, quelles sont les dates de début et de fin de chacune d'elles pour que le projet soit terminé en un temps minimum ? ..."

Remarques préliminaires :

- 1 - La durée de chaque tâche étant connue, il suffira de déterminer les dates de début, on en déduira immédiatement les dates de fin,
- 2 - Pour simplifier nous supposons que le grapho du problème n'a qu'une seule entrée et une seule sortie. (On peut toujours se ramener à ce cas par l'adjonction de tâches fictives de durée nulle).

Expression mathématique du problème :

Considérons le grapho de type PERT associé au projet ; il décrit l'ensemble des relations d'antériorité entre les tâches du projet. Ce grapho est connexe et sans circuit. Nous numérotions les sommets de 1 à n de façon aléatoire mais en imposant à l'entrée le numéro 1 et à la sortie le numéro n, (n étant le nombre de sommets).

Chaque tâche sera notée par le couple (i, j) ou (x_i, x_j) , x_i étant le numéro de l'étape début, x_j celui de l'étape fin. La durée correspondante sera d_{ij} . La date de l'étape x_i sera notée t_i .

Notons que la date de début (resp. la date de fin) d'une tâche peut ne pas être égale à la date de son étape début (resp. fin) (cf 4.2.3)

Le seul type de contraintes décrit par le modèle PERT est de la forme : la tâche (x_j, x_k) commence au plus tôt quand la tâche (x_i, x_j) est terminée.

Elle se traduit par l'inégalité sur les dates de début : $t_j - t_i \geq d_{ij}$
 i : origine, j extrémité de l'arc (i, j) $d_{ij} \geq 0$

On a autant d'inégalités que l'on a d'arcs.

(Notons que la méthode des potentiels tient compte d'autres contraintes, par exemple : la tâche (x_j, x_n) commence au plus tard quand la tâche (x_i, x_j) est terminée).

Prenant comme origine des temps, la date de l'étape entrée, le problème se ramène à la résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} t_1 = 0 & (1) \\ t_j - t_i \geq d_{ij} \quad \forall (x_i, x_j) \in U & (2) \\ \text{Min } t_n & (3) \end{cases}$$

La variable à minimiser, t_n , représente la date de l'étape fin donc la durée totale du projet.

4 - 2 - 2 - CALENDRIERS.

Ce système est un programme linéaire. Il pourrait être traité par les méthodes classiques, mais il existe des méthodes beaucoup plus simples.

Nous appellerons calendrier un ensemble de t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ qui satisfait aux conditions (1) et (2).

ETUDE DES SOLUTIONS DE (1) et (2) qui minimisent t_n .

Définissons une relation d'ordre sur l'ensemble \mathcal{K} des calendriers :

Le calendrier $c = (t_i, i = 1, 2, \dots, n)$ est inférieur au calendrier

$c' = (t'_i, i = 1, 2, \dots, n)$ si et seulement si $t_i \leq t'_i$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$

L'ensemble \mathcal{K} des calendriers possède un plus petit élément.

En effet, l'algorithme utilisé en 3.3 fournit un calendrier

$$\Lambda = (\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n) \text{ tel que}$$

$$(4) \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_i = \max_{j \in \Gamma^{-1}(i)} [\lambda_j + d_{j,i}] \quad i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

C'est un calendrier. En effet les λ_i vérifient les conditions (1) et (2).

La calcul des λ_i est possible puisque le graphe est sans circuit.

Le système formé par les relations (1) et (2) admet donc au moins une solution.

λ_i est la longueur du plus long chemin allant de l'étape 1 à l'étape i .

Démonstration :

Il existe au moins une étape $i_1 \in \Gamma^{-1}(i)$ telle que $\lambda_i = \lambda_{i_1} + d_{i_1, i}$

Il existe au moins une étape $i_2 \in \Gamma^{-1}(i_1)$ telle que $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} + d_{i_2, i_1}$

et ainsi de suite jusqu'à l'étape 1.

Soit P le chemin $\{(1, i_k), (i_k, i_{k-1}), \dots, (i_2, i_1), (i_1, i)\}$

$$\begin{aligned} \text{Sa longueur est } l(P) &= d_{1, i_k} + d_{i_k, i_{k-1}} + \dots + d_{i_2, i_1} + d_{i_1, i} \\ &= \lambda_{i_k} - \lambda_1 + \lambda_{i_{k-1}} - \lambda_{i_k} + \dots + \lambda_{i_1} - \lambda_{i_2} + \lambda_{i_1} - \lambda_1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } l(P) = \lambda_{i_1} - \lambda_1 = \lambda_{i_1}$$

Comparons la longueur de P avec un chemin quelconque P'

allant de 1 à i $P' = \{(1, j_1), \dots, (j_1, i)\}$

Sur ce chemin on a $\lambda_i - \lambda_{j_1} \geq d_{j_1, i}$

$$\lambda_{j_1} - \lambda_1 \geq d_{1, j_1}$$

D'où on ajoutant $\lambda_i \geq d_{j_1, i} + \dots + d_{1, j_1} = l(P')$

Donc $\lambda_i = l(P) \geq l(P') \quad \forall P' \text{ joignant 1 à } i.$

Ajoutons membre à membre les inégalités (2) relatives aux arcs formant le chemin P.

$$t_{i_k} - t_1 \geq d_{1, i_k}$$

$$t_{i_k} - t_{i_k-1} \geq d_{i_k, i_{k-1}}$$

$$t_{i_1} - t_{i_2} \geq d_{i_2, i_1}$$

$$t_i - t_{i_1} \geq d_{i_1, i}$$

$$t_i - t_1 \geq d_{1, i_k} + d_{i_k, i_{k-1}} + \dots + d_{i_2, i_1} + d_{i_1, i}$$

D'où $t_i \geq \lambda_i$ ceci est valable pour tout $i = 1, 2, \dots, n$

Le calendrier Λ est donc inférieur à tout calendrier C. C'est le plus petit élément de \mathcal{E}

Le calendrier Λ est tel qu'aucun autre calendrier ne permette de commencer plus tôt une tâche quelle qu'elle soit.

En conséquence, on appelle les dates du calendrier Λ , dates au plus tôt.

En particulier Λ minimise t_n puisque $t_n \geq \lambda_n$.

Soit \mathcal{C} l'ensemble des calendriers qui minimisent t_n .

\mathcal{C} contient-il d'autres calendriers que Λ ?

Appliquons l'algorithme de construction de Λ au graphe déduit du précédent en inversant le sens des arcs.

On obtient des nombres l_i tels que

$$\begin{cases} l_n = 0 \\ l_i = \max_{j \in \Gamma(i)} [l_j + d_{i,j}] \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Comme cela a été démontré pour les λ_i :

l_i est la longueur du plus long chemin allant de l'étape i à l'étape n .

Posons $\lambda'_i = \lambda_n - l_i$, il vient

$$(5) \begin{cases} \lambda'_n = \lambda_n \\ \lambda'_i = \min_{j \in \Gamma(i)} [\lambda'_j - d_{i,j}] ; i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Soit $\Lambda' = \{\lambda'_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, c'est un calendrier car les conditions (1) et (2) sont satisfaites par les λ'_i .

Comme $\lambda'_n = \lambda_n$, Λ' appartient à \mathcal{E} .

Λ' est le plus grand élément de \mathcal{E} pour la relation d'ordre définie sur \mathcal{E} .

En effet : ajoutons membre à membre les inégalités (2) relatives aux arcs

formant le chemin le plus long allant de i à n , il vient $t_n - t_i \geq l_i$

d'où $t_i \leq \lambda_n - l_i = \lambda'_i$ - ceci pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

Comme Λ' appartient à \mathcal{E} c'est bien le plus petit des majorants de \mathcal{E} .

Le calendrier Λ' est tel qu'aucun autre calendrier ne permette de commencer plus tard une quelconque tâche sans allonger la durée minimale λ_n du projet.

Les dates de ce calendrier sont appelées par suite dates au plus tard.

En conclusion les solutions de (1) (2) (3) forment un ensemble \mathcal{E} dont on

peut calculer le plus petit élément Λ et le plus grand élément Λ' .

Nous étudierons plus loin les différents algorithmes qui permettent de calculer Λ et Λ' .

4 - 2 - 3 - MARGES.

a) - MARGE DES ETAPES.

Soit le calendrier $C = \{t_i, \lambda_i \leq t_i \leq \lambda'_i \quad i = 1, 2, \dots, n\}$

C est un calendrier de \mathcal{C} car Δ est inférieur à C qui est inférieur à Λ (au sens de la relation d'ordre).

Il y a donc une infinité de calendriers qui satisfont aux conditions (1), (2), (3).

Soit i une étape quelconque ($i \neq 1, i \neq n$), à tout \tilde{c} tel que $\lambda_i \leq \tilde{c} \leq \lambda'_i$, on peut associer au moins un calendrier de \mathcal{C} .

En effet le calendrier $C = \{t_j = \lambda_j, \text{ si } j \neq i, t_i = \tilde{c}\}$ est compris (au sens de la relation d'ordre entre Δ et Λ). Il appartient donc à \mathcal{C} . L'intervalle $[\lambda_i, \lambda'_i]$ est l'intervalle de flottement de la date de l'étape n° i , $\lambda'_i - \lambda_i$ est la marge de flottement.

Un chemin critique est un plus long chemin allant de l'étape 1 à l'étape n (il peut y en avoir plusieurs). Sa longueur est égale à λ_n .

Les étapes dont la marge de flottement est nulle sont situées sur le chemin critique.

En effet :

Soit l'étape n° i , P_1 et P_n les chemins les plus longs qui la relient à l'étape n° 1 et n° n . Soit $P = P_1 \cup P_n$

$$l(P) = l(P_1) + l(P_n) = \lambda_i + \lambda_n - \lambda'_i$$

Si $\lambda_i = \lambda'_i$ alors $l(P) = \lambda_n$. P est donc le chemin critique.

b) - MARGE DES TACHES.

Définissons les dates des tâches.

- La date de début au plus tôt de la tâche (i, j) est λ_i
- La date de fin au plus tôt de la tâche (i, j) est $\lambda_i + d_{ij}$
- La date de fin au plus tard de la tâche (i, j) est λ'_j
- La date de début au plus tard de la tâche (i, j) est $\lambda'_j - d_{ij}$

On peut définir plusieurs types de marges pour les tâches :

La marge libre d'une tâche (i, j) est le retard maximum qu'elle peut prendre sans perturber la date de début au plus tôt des tâches d'origine j .

$$\text{Elle s'exprime par } M L(i, j) = \lambda_j - \lambda_i - d_{ij}$$

La marge totale d'une tâche (i, j) est le retard maximum qu'elle peut prendre sans perturber les dates de début au plus tard des tâches d'origine j .

Elle s'exprime par :

$$M T(i, j) = \lambda'_j - \lambda_i - d_{ij}$$

Nous n'utiliserons ici que la marge totale. La notion de marge libre trouve néanmoins son utilité en pratique.

LES TACHES DE MARGE TOTALE NULLE SE TROUVENT SUR LE CHEMIN CRITIQUE.

En effet : soit l'arc (i, j) , P_i et P_j les plus longs chemins de 1 à i et de j à n respectivement.

Soit $P = P_i \cup (i, j) \cup P_j$

$$l(P) = \lambda_i - \lambda_1 + d_{ij} + \lambda_n - \lambda'_j = (\lambda_n - \lambda_1) - (\lambda'_j - \lambda_i - d_{ij})$$

Si $\lambda'_j - \lambda_i - d_{ij} = 0$ $l(P) = \lambda_n - \lambda_1 = \lambda_n$ P est le chemin critique.

4 - 2 - 4 - GENERALISATION A DES GRAPHES A PLUSIEURS EXTREMITES.

Les résultats précédents se généralisent :

1) Grapho à plusieurs entrées.

La date au plus tôt de l'étape n° i est

$$\lambda_i = \max_{j \in E} [\text{longueur du plus long chemin allant de } j \text{ à } i]$$

E = ensemble des entrées

2) Grapho à plusieurs sorties.

La date au plus tard de l'étape n° i est

$$\lambda'_i = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i - \max_{j \in S} [\text{longueur du plus long chemin allant de } i \text{ à } j]$$

S = ensemble des sorties

3) Grapho à plusieurs entrées et sorties.

Les dates au plus tôt et au plus tard s'expriment comme en 1 et 2 respectivement.

La durée minimum de projet est

$$\max_{i \in E} [\text{longueur du plus long chemin allant de } i \text{ à } j]$$

$i \in E$

$j \in S$

4 - 3 - L'ALGORITHME NATUREL.

Reprenons la méthode utilisée en 3 . 3. Nous l'appellerons algorithme naturel, car elle est la plus immédiate.

4 - 3 - 1 - METHODE.

Nous dirons que nous "marquons" une étape quand nous calculons sa date au plus tôt (ou au plus tard) et que nous la portons au dessus du sommet correspondant sur le dessin.

Nous pouvons marquer un sommet si :

- 1) - Nous connaissons ses prédécesseurs,
- 2) - Ses prédécesseurs sont marqués.

Le calcul doit donc commencer par la construction de la liste des prédécesseurs et successeurs de chaque sommet.

FORME DES DONNEES. cf 4 . 7 . 2 .

Le graphe peut avoir, dans la version suivante plusieurs entrées, mais une seule sortie. La numérotation est sans trou de 1 à n, n étant le numéro de l'étape fin.

Pour chaque tâche on donne les numéros I de l'étape début, J de l'étape fin et la durée D. On obtient ainsi 3 tableaux I, J, D.

CONSTRUCTION DE LA LISTE DES PREDECESSEURS ET DES SUCCESSEURS.

Si on classe le tableau I par ordre croissant et que l'on fait subir aux tableaux J et D les permutations correspondantes, on retrouve dans le tableau J la liste des successeurs des sommets rangés par ordre croissant et dans le tableau D la liste des longueurs des arcs correspondants. On constitue par ailleurs un tableau contenant l'adresse du premier successeur de chaque sommet. Par un classement identique du tableau J, on obtient la liste des prédécesseurs et le tableau d'adresse correspondant.

CALCUL DU CALENDRIER AU PLUS TOT.

Chaque sommet sera rangé, une fois marqué, dans un tableau (IZ),

- 1) - On marque d'abord les entrées,
- 2) - On essaie de marquer les successeurs des sommets marqués,
 - On teste d'abord s'ils sont déjà marqués auquel cas on passe au suivant,
 - Si un sommet n'a pas tous ses prédécesseurs marqués, on ne peut le marquer,
 - Si non on le marque : on calcule sa date au plus tôt

$$\lambda_i = \max_{j \in P^+(i)} [\lambda_j + d_{ji}]$$

- 3) - Par ce processus on en vient à marquer le sommet n à moins qu'il y ait un circuit (une procédure complémentaire pourrait trouver les sommets appartenant à ce circuit).

L'organigramme suivant décrit le calcul du calendrier au plus tôt.

CALCUL DU CALENDRIER AU PLUS TARD.

On pourrait procéder de la même façon, mais on a montré en 4 . 2 . 2 . que le calcul des dates au plus tard se ramenait au calcul des dates au plus tôt dans un graphe déduit du 1er par inversion du sens des arcs. Par conséquent l'ordre de marquage des tâches sera l'inverse du précédent.

Il est donc inutile de tester si les successeurs du sommet en question sont marqués.

4 - 3 - 2 - CONCLUSIONS.

L'algorithme naturel a le gros défaut d'être lent. Ce qui est principalement dû à la nécessité de faire deux tris successifs des mêmes données. Certaines versions, telle celle utilisée dans le programme CONCORD de la SETIA, entrent directement en données les listes des successeurs et des prédécesseurs de chaque sommet, ce qui a 2 avantages :

- 1) utiliser la redondance pour collationner les données,
- 2) éviter les tris.

L'algorithme naturel présente aussi l'inconvénient de nécessiter la présence de toutes les données simultanément en mémoire centrale.

La taille des graphes admise est donc assez limitée ce qui le rend inutilisable sur petit ordinateur (cf 4 - 8 - 3).

Sur CAB 90 . 80 de 32 k on peut traiter des graphes de l'ordre de 4.000 tâches et 2.500 étapes.

4 - 4 - L'ALGORITHME DE FORD.4 - 4 - 1 - PRINCIPE (cf [1] page 64)

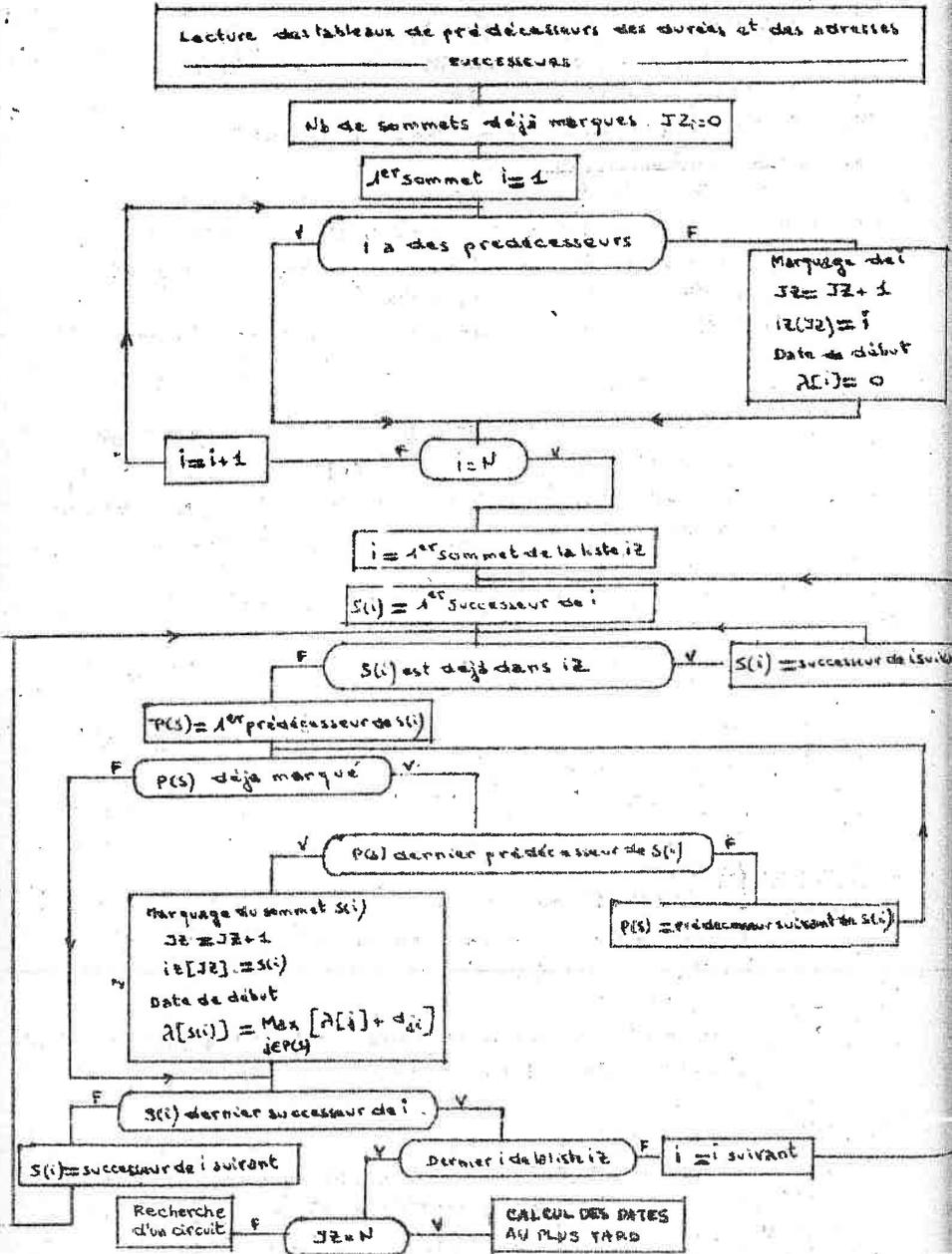
L'algorithme calcule la longueur du plus long chemin d'un sommet origine à tout sommet d'un graphe sans circuit.

- Calcul des dates au plus tôt.

Compte tenu de 4 - 2 - 2 la date au plus tôt de l'étape i est la longueur du plus long chemin allant de l'étape 1 (supposée l'unique entrée du graphe) à l'étape i.

L'algorithme procède ainsi :

- 1) - Ayant numéroté les sommets de 1 à n de façon quelconque mais en commençant par l'entrée et en terminant par la sortie, on marque chaque sommet i avec un nombre λ_i on prend tout d'abord $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_i = -\infty$ si $i \neq 1$



2) - On fait subir à chaque arc (i, j) le test suivant :

- $\lambda_j - \lambda_i \geq d_{ij}$
- s'il est vrai on ne modifie rien,
- s'il est faux $\lambda_j := \lambda_i + d_{ij}$

3) - Ayant ainsi testé tous les arcs, on itère le processus jusqu'à ce qu'aucun arc ne permette d'augmenter la valeur d'un λ_i .

λ_i est la date au plus tôt de l'étape i.

$\max_i \lambda_i$ est la durée minimum du projet.

- Calcul des dates au plus tard.

On calcule par le même procédé la longueur l_i du plus long chemin allant de i à n pour tout i. Les dates au plus tard sont données par :

$$\lambda'_i = \lambda_n - l_i \quad \text{cf 4 - 2 - 2}$$

La calcul peut se faire en même temps que celui des dates au plus tôt.

L'algorithme reste valable si le graphe présente plusieurs entrées ou plusieurs sorties.

LE NOMBRE D'ITERATIONS EST INFÉRIEUR AU NOMBRE DE SOMMETS, SINON IL Y A UN CIRCUIT.

Preuve :

Soit λ_i^k la valeur de λ_i à la k-ème itération, Pour $k = 1$ s'il existe des chemins de 1 à i comportant 1 arc, λ_i^1 est la longueur du plus long. S'il n'en existe pas $\lambda_i^1 = -\infty$

Supposons qu'à la k-ème itération, λ_i^k est la longueur du plus long chemin allant de 1 à i comportant au plus k arcs, s'il en existe. Sinon $\lambda_i^k = -\infty$ A la (k + 1) ème itération

ou i a tous ses prédécesseurs j tels que $\lambda_j^k = -\infty$ alors $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k = -\infty$

ou i a des prédécesseurs j tels que $\lambda_j^k \neq -\infty$ alors

$$\lambda_i^{k+1} = \max_j [\lambda_j^k + d_{ji}] \quad \text{comme } \lambda_j^k \text{ est dans ce cas la longueur du plus long chemin allant de 1 à j comportant au plus k arcs, l'hypothèse est vérifiée.}$$

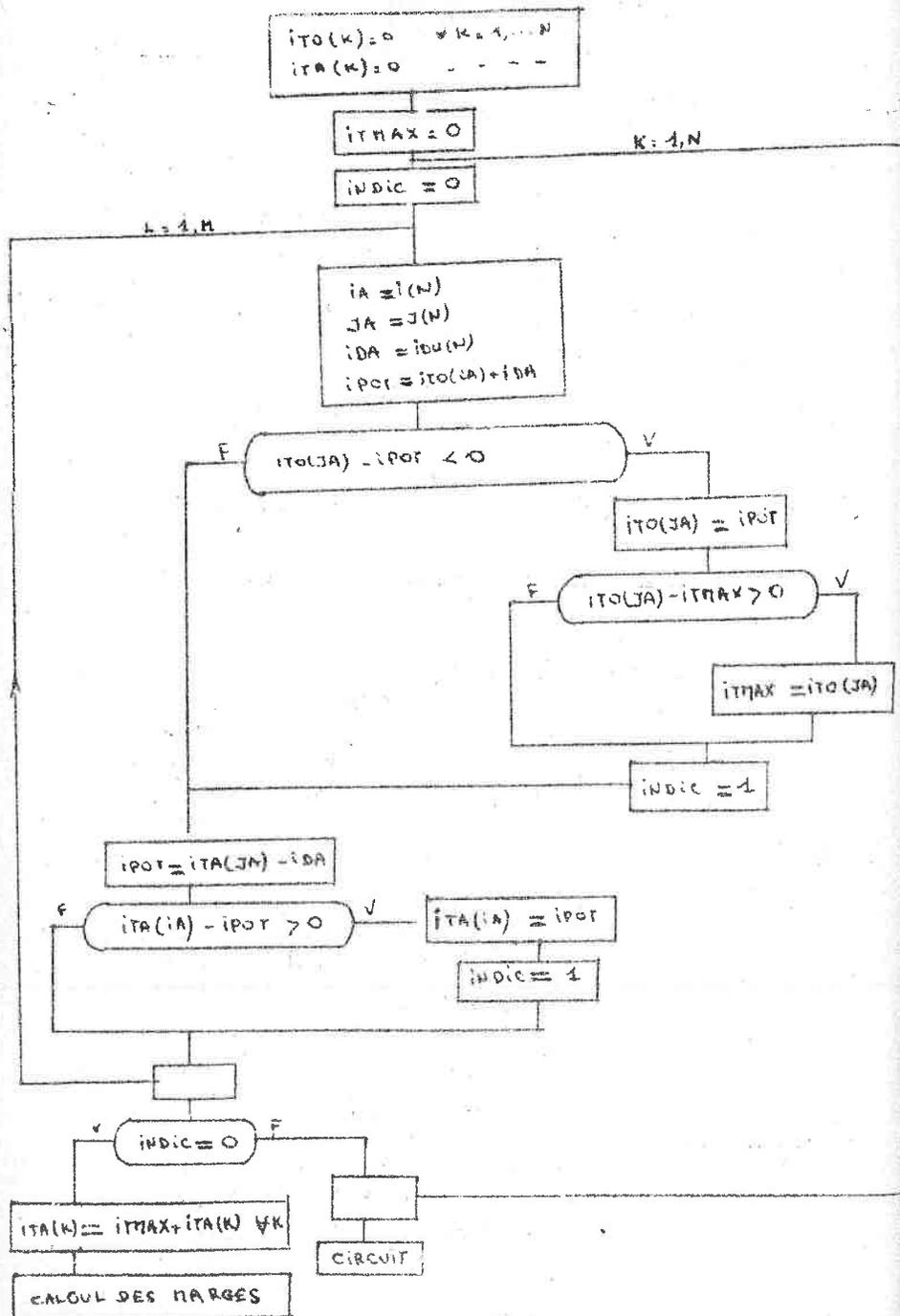
Le nombre d'itérations est donc égal au nombre maximum d'arcs que peut comporter un chemin.

Or un chemin comprend un nombre d'arcs inférieur au nombre de sommets, d'où le résultat.

4 - 4 - 2 - PROGRAMMATION.

1) - Forme des données (cf 4 - 7 - 2)

Pour chaque tâche on donne les numéros I des étapes début, J des étapes fins et la durée IDU - on forme ainsi 3 tableaux I, J, IDU.



2) - Organigramme.

4-4-2 (3)

N = nombre de sommets,

M = nombre d'arcs,

I = tableau des numéros des étapes début,

J = tableau des numéros des étapes fin,

IDU = tableau des durées.

ITO - tableau des dates de début au plus tôt } initialisés à zéro (pas de longueurs négatives).

ITA - tableau des dates de début au plus tard }

ITMAX - durée totale minimum,

4-4-3 - CONCLUSIONS.

I - RAPIDITE.

L'algorithme a l'avantage de ne pas nécessiter de trier des données. Mais il les fait relire un grand nombre de fois, ce qui prend beaucoup de temps (a fortiori si ces données sont enregistrées sur bande magnétique).

En effet, N étant le nombre de sommets, M le nombre d'arcs, le calcul des dates au plus tôt nécessite à chaque itération au plus 4 M lectures, M additions, 2 M tests. Comme on fait plus N itérations il y a au plus 4 M N lectures, M N additions, 2 M N tests.

Dans un graphe sans circuit $M < \frac{N(N-1)}{2}$ (cf 2.2).

Le nombre d'opérations est donc majoré² par un nombre de l'ordre de N^3 .

Mais comme dans un graphe PERT M n'est jamais supérieur à 3 N, ce nombre est en fait en N^2 .

La détection de circuit, ne peut se faire qu'au bout de N lectures des données, ce qui est très long et il n'est pas possible de connaître les sommets appartenant au circuit.

2 - OCCUPATION EN MEMOIRE CENTRALE.

Le programme occupe une place très réduite ce qui le rend intéressant pour de petits ordinateurs de 8 K par exemple munis d'un périphérique (il est ainsi utilisé sur IBM 1130 et sur BULL GE 755).

4 - 5 - CLASSEMENT DES SOMMETS ET DES ARCS.

4-5-I

4 . 5 . 1 . UTILITE D'UN CLASSEMENT.

On a remarqué en 4.3.1. que le classement des sommets, dans leur ordre de passage servait à la fois pour l'établissement des calendriers au plus tôt et au plus tard. Comme ce classement n'est possible que s'il n'y a pas de circuit on a intérêt à le réaliser avant tout calcul.

D'un classement des sommets on peut déduire un classement des arcs. Ce dernier permet de construire "une chaîne d'information" contenant, rangées les unes à la suite des autres, les informations relatives à chaque arc : le numéro de l'étape début, celui de l'étape fin, la durée et d'autres informations s'il y a lieu. Cette chaîne a l'avantage de pouvoir être exploitée séquentiellement sans gagner de la place en mémoire centrale en la rangeant sur un périphérique on l'exploitant bloc par bloc.

Si l'on conserve cette chaîne d'information sur bande magnétique, on peut, lors de révisions périodiques, rectifier les durées et sortir les résultats sans recommencer le classement.

4 . 5 . 2 . DEFINITIONS. La numérotation des sommets étant quelconque, on appelle classement des sommets, un ordre total de l'ensemble X tel que si $x_i \prec x_j$, x_i soit rangé avant x_j .

Remarque : cet ordre n'est pas unique.

De même, un classement des arcs est un ordre total de l'ensemble U tel que si $a_i \prec a_j$, a_i soit rangé avant a_j .

4 . 5 . 3 . CLASSEMENT PAR NUMEROTATION.

Numérotions les sommets du graphe de façon que si $x_i \prec x_j$ on ait $i < j$. Si on classe alors les sommets par indice croissant nous obtenons un classement. Cette méthode a le défaut d'imposer une numérotation. Si on veut modifier la structure du graphe, ce qui arrive au début de son élaboration, toute la numérotation se trouve bouleversée. Nous ne retiendrons donc pas cette méthode.

4 . 5 . 4 . CLASSEMENT PAR LA METHODE DES NIVEAUX. (cf [2] page 6)

Définition.

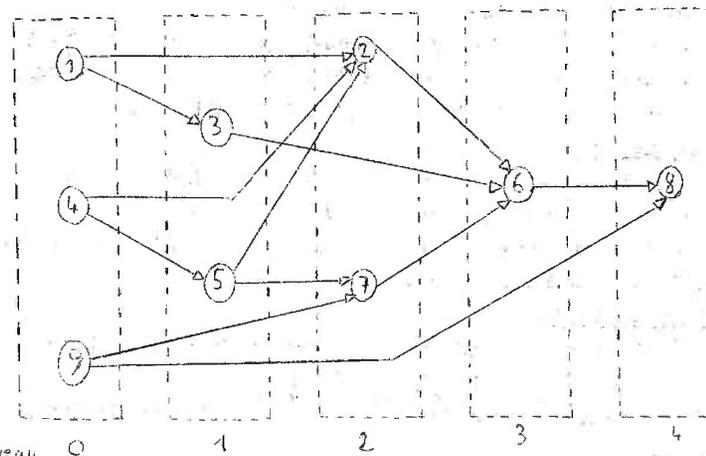
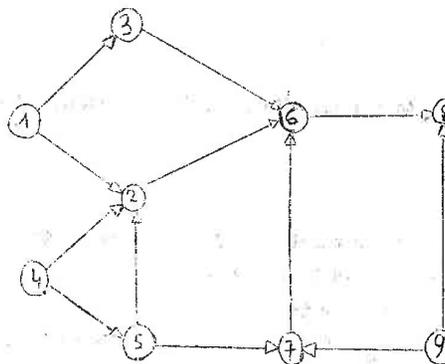
A tout sommet x d'un graphe sans circuit faisons correspondre un nombre positif appelé "niveau de x ", noté $niv(x)$ de façon que :

- si x n'a pas de prédécesseur $niv(x) = 0$
- sinon $niv(x) = \left[\max_{\gamma \in \Gamma^{-1}(x)} niv(\gamma) \right] + 1$

On appelle niveau i le sous ensemble de X formé des sommets x tels que $niv(x) = i$

Exemple : Décomposons le graphe suivant par niveaux.

4-5-4



Niveau

- On peut obtenir graphiquement cette décomposition de la manière suivante :
- les sommets sans prédécesseur sont de niveau 0, effaçons les ainsi que les arcs qui en émergent.
 - les nouveaux sommets sans prédécesseur sont de niveau 1, effaçons les et supprimons les arcs qui en émergent.

Et ainsi de suite.

PROPRIETE 1 -

Si on range les sommets par niveau croissant on obtient un classement.
En effet :

Si $x_i \rightarrow x_j$ c'est que x_i est prédécesseur de x_j donc, d'après la définition,
 $\text{niv}(x_i) < \text{niv}(x_j)$.

x_i sera donc rangé avant x_j .

PROPRIÉTÉ 2 -

Si le sommet x est de niveau i , tout chemin d'une entrée à x a au plus i arcs.

Preuve.

Par récurrence

pour $i = 0$ c'est vrai

pour $i = 1$ x est relié aux entrées par des chemins de 1 arc car il est successeur d'une ou plusieurs entrées.

Si c'est vrai pour i , montrons le pour $i + 1$:

Si x est de niveau $i + 1$ c'est qu'il existe des y_j de niveau i tels que
 $y_j \rightarrow x$.

Parmi les chemins joignant les entrées à x :

- Ceux passant par les y_j comportent par hypothèse au plus $i + 1$ arcs
- Les autres passent par des sommets de niveau strictement inférieur à i , d'après l'hypothèse ils ont au plus $(i - 1) + 1 = i$ arcs.

COROLLAIRE.

Dans un graphe déduit du précédent on égalant à 1 les longueurs de tous les arcs, $\text{niv}(x)$ est la longueur du plus long chemin des entrées à x .

On peut donc déterminer les niveaux des sommets en appliquant l'algorithme de FORD (cf 4.4.1.) à ce graphe.

CLASSEMENT DES ARCS.

De la même façon nous définissons le niveau d'un arc (x_i, x_j) par

$$\text{niv}(x_i, x_j) = \text{niv}(x_j)$$

Si on range les arcs par niveaux croissants on obtient un classement.

Preuve.

Soit 2 arcs a_i et a_j tels que $a_i \rightarrow a_j$

ils sont de la forme $a_i = (x_k, x_l)$, $a_j = (x_l, x_m)$

on a $x_l \rightarrow x_m$ d'où $\text{niv}(x_m) > \text{niv}(x_l)$

donc $\text{niv}(a_i) < \text{niv}(a_j)$ et a_i est rangé avant a_j .

Dans l'exemple précédent, au classement des sommets : 1, 4, 9, 3, 5, 2, 7, 6,

, correspond le classement des arcs.

(1,3), (4,5), (1,2), (4,2), (5,2), (5,7), (9,7), (2,6), (3,6), (7,6), (6,8),
 (9,8),

On obtiendrait autant de classements distincts en permutant entre eux les arcs de même niveau.

PROGRAMMATION DU CALCUL DES NIVEAUX.

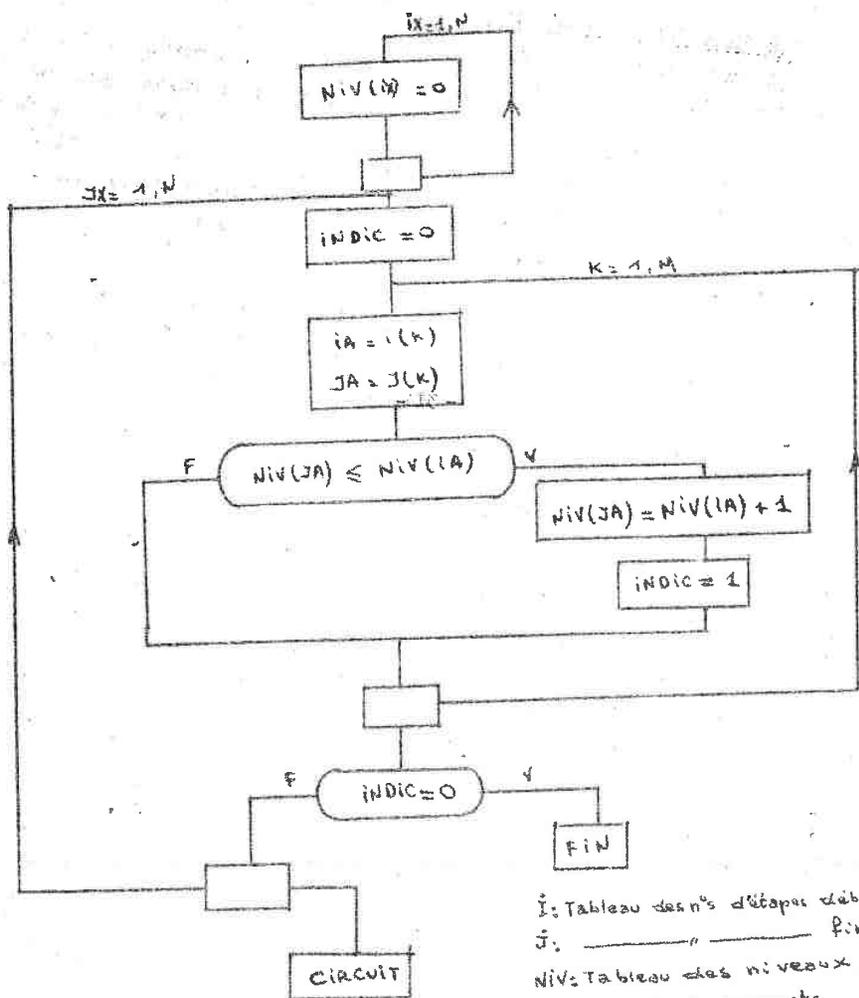
Il existe plusieurs méthodes que l'on trouvera dans [2]

Nous utiliserons la méthode qui consiste à appliquer l'algorithme de FORD au graphe dont tous les arcs auraient pour longueur 1. L'algorithme calcule la longueur du plus long chemin reliant les entrées à tout sommet du graphe. Dans ce cas, cette longueur sera égale au nombre d'arcs que comporte le chemin. Nous référant au corollaire 3 on obtient ainsi le niveau de chaque sommet.

Si l'on se reporte à 4.4.3. l'opération nécessite au plus :

4	M	N	lectures
	M	N	additions (de 1)
	M	N	tests

CALCUL DES NIVEAUX



i : Tableau des n°s d'arcs début
 j : Tableau des n°s d'arcs fin

NIV : Tableau des niveaux

N : nombre de sommets

M : nombre d'arcs

$INDIC = \begin{cases} 1 & \text{si en une itération on} \\ & \text{au moins de NIV a été} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

CONSTRUCTION DE LA CHAÎNE D'INFORMATIONS.

4-5-4

Du classement des sommets on déduit celui des arcs par la formule vue précédemment.

On construit directement la chaîne d'informations de la manière suivante :

- on cherche les sommets de niveau 1,
- on en déduit les arcs de niveau 1 : ils sont incidents aux sommets de niveau 1 -
- on place dans la chaîne les numéros de début, de fin et des durées des arcs de niveau 1, ainsi que d'autres informations s'il y a lieu.
- on passe aux sommets de niveau 2 et ainsi de suite on compose la chaîne d'informations.

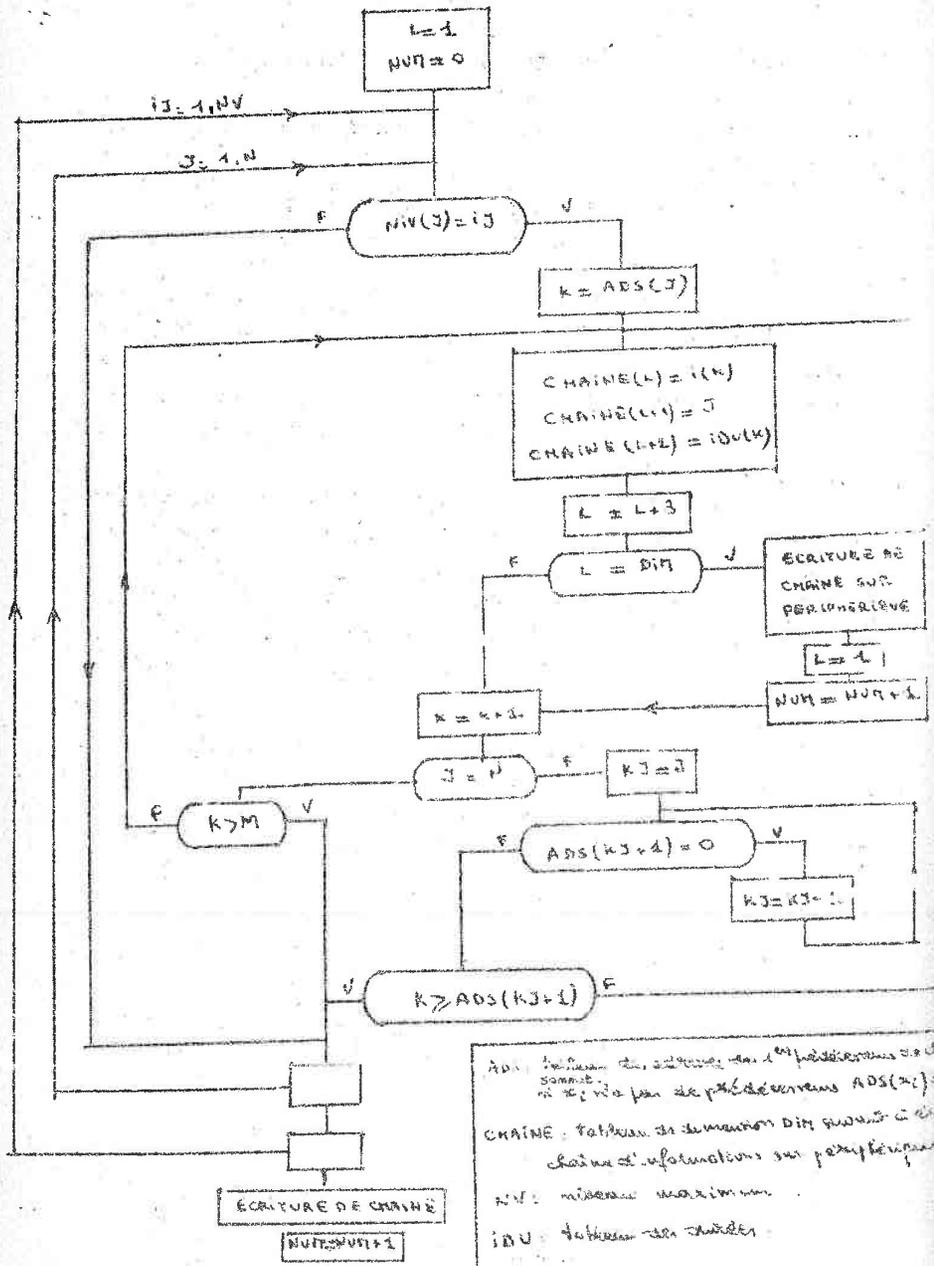
Pour trouver les arcs incidents aux sommets, il est nécessaire d'avoir un tableau des prédécesseurs. On le construit par un tri analogue à celui fait en 4.3.1.

L'opération de construction de la chaîne est assez longue. Par exemple le nombre de tests est majoré par un nombre de l'ordre de N^2 (N = nombre de sommets).

Conclusion.

Le calcul des niveaux et la composition de la chaîne d'informations nécessitent pour des graphes PERT un nombre d'opérations en N^2 , comme dans l'algorithme de FORD.

La méthode permet de détecter les circuits au bout de N itérations mais elle ne peut indiquer les sommets situés sur le circuit.



ADJ: tableau des adresses des n° précédents de la chaîne. Si il n'y a pas de précédents ADJ(x_i) = 0.

CHAÎNE: tableau de dimension DIM qui contient la chaîne d'informations sur périphérique.

NV: niveau maximum.

IDU: tableau des sorties.

4-5-5 - CLASSIFICATION PAR LA METHODE DE LA PILE.

La méthode de la pile est une méthode de description d'un graphe qui prend son origine dans la résolution du problème du labyrinthe.

MONTON DE PILE ATTACHEE A UN GRAPHE. (cf [6])

Soit U l'ensemble des arcs du graphe.
 Soit une suite finie $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ d'éléments de U.
 Soit U* l'ensemble de ces suites finies. Munissons le d'une loi de composition interne, la concaténation, telle que pour tout α et β de U*
 $\alpha \cdot \beta = [a_0, a_1, \dots, a_n] \cdot [b_0, b_1, \dots, b_m]$
 $= [a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m]$

Cette loi est associative et admet un élément neutre, le chemin vide noté ϵ (il relie tout point x à lui même).

Soit C l'ensemble des chemins du graphe.

On a $C \subset U^*$.

Appelons pile sur l'ensemble des arcs du graphe, toute suite finie

(c_0, c_1, \dots, c_n) de chemins de C telle que :

- a) $c_0 = c_n = \epsilon$ (chemin vide)
- b) pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, il existe un arc a_i tel que
 soit $c_i = c_{i-1} \cdot a_i$ (opération concaténation)
 i est alors une entrée de a_i
 soit $c_{i-1} = c_i \cdot a_i$
 i est une sortie de a_i

Les chemins c_i sont appelés états de la pile.

Si $c_i = c_{i-1} \cdot a_i$, a_i est le sommet de l'état i de la pile

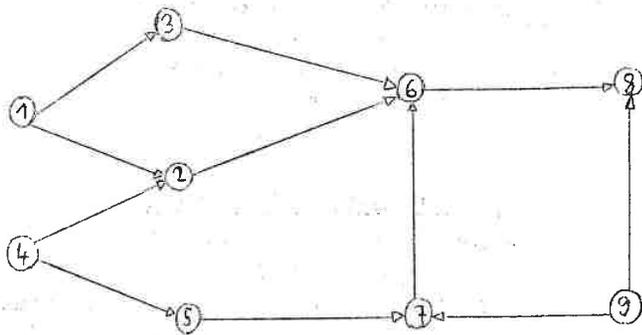
Une pile attachée au graphe est une pile dont les états obéissent aux règles suivantes :

- 1) - Si $i-1$ est entrée de l'arc a :
 S'il existe des arcs b tels que a [a' b et ne possédant pas d'entrée inférieure à i, i est l'entrée d'un tel arc, sinon i est la sortie de a.
- 2) - Si $i-1$ est sortie de l'arc a,
 a) S'il existe un arc de même origine que a qui n'a pas d'entrée inférieure à i, i est l'entrée d'un tel arc,
 b) Sinon et si $c_{i-1} \neq \epsilon$, i est une sortie,
 c) Sinon et si $c_{i-1} = \epsilon$: S'il existe un arc n'ayant pas d'entrée inférieure à i, i est l'entrée d'un tel arc, dans le cas contraire, c_{i-1} est le dernier état de la pile.

Remarques.

- 1° La pile définie par ce procédé de construction n'est pas unique.
- 2° Un arc a une seule entrée donc une seule sortie,
- 3° Comme un état de la pile attachée est un chemin, il ne peut contenir 2 arcs de même origine, sinon on aurait un circuit,
- 4° Soit 2 arcs a et b tels que $a \sqsupset b$, si b entre avant a, il sort aussi avant a, sinon il existerait un état de la pile où b figure deux fois, on aurait un circuit.

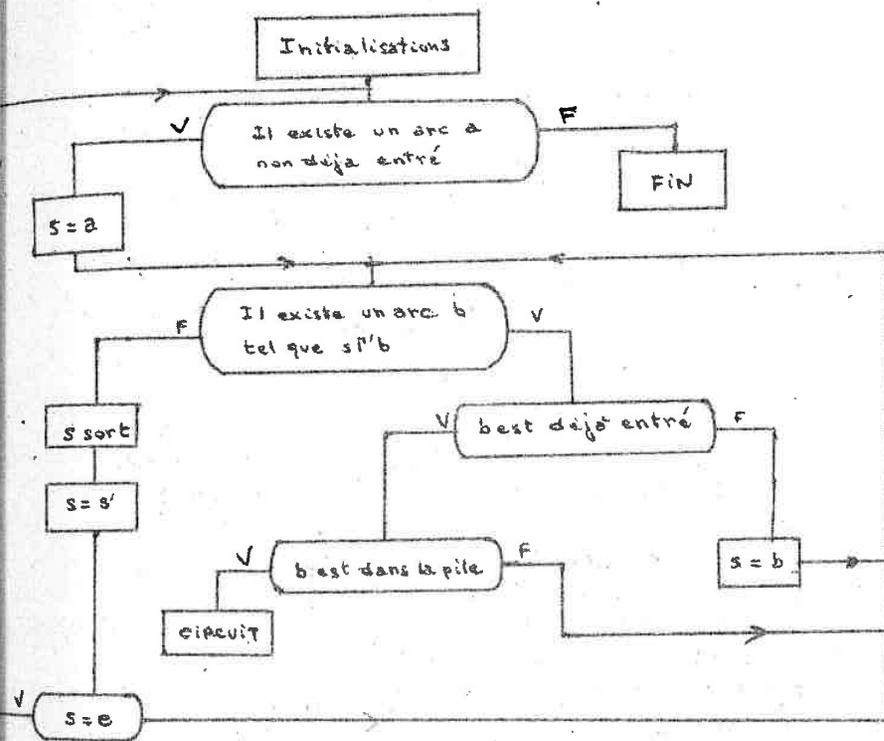
Exemple de pile : Repréons le graphe précédent.



numéro des états

0	o
1	(1,3)
2	(1,3) . (3,6)
3	(1,3) . (3,6) . (6,8)
4	(1,3) . (3,6)
5	(1,3)
6	o
7	(1,2)
8	(1,2) . (2,6)
9	(1,2)
10	o
11	(9,8)
12	o
13	(9,7)
14	(9,7) . (7,6)
15	(9,7)
16	o
17	(4,2)
18	o
19	(4,5)
20	(4,5) . (5,7)
21	(4,5)
22	e

GESTION DE LA PILE SUR LES ARCS (PILE ATTACHÉE)



s = sommet de l'état considéré
 s' = arc suivant le sommet dans l'état considéré
 e = chemin vide

Si on range les arcs par ordre de sortie décroissant, on obtient un classement.

Prouve : soit 2 arcs a et b tels que a Γ b

soit i la sortie de l'arc a, 2 cas :

ou i - 1 est l'entrée de l'arc a,

Si i est la sortie de a c'est que (cas 1) tous les arcs β tels que a Γ β ont une entrée inférieure à i : b est sorti avant a (remarque 4)

ou i - 1 est la sortie d'un arc β

β a même origine que b. Si a sort c'est que l'entrée de b est inférieure à i (cas 2 b),

Elle est donc inférieure à la sortie de l'arc β

Elle est aussi inférieure à l'entrée de β sinon on aurait dans un état 2 arcs de même origine ce qui n'est pas possible quand le graphe est sans circuit.

La sortie de b est inférieure à celle de β donc à celle de a.

PROGRAMMATION.

1) - Remarque.

Un état de la pile sur les arcs est un chemin représenté par les arcs qui le composent. On peut aussi représenter ce chemin par la liste ordonnée des points par où il passe. On obtient alors une pile définie sur l'ensemble X des points du graphe.

Dans cette nouvelle pile un point x pourra avoir plusieurs entrées (correspondant aux entrées des arcs d'extrémité x).

Il est plus aisé du point de vue programmation, de gérer la pile définie sur les points. On en déduit immédiatement la pile sur les arcs.

2) - Gestion de la pile sur les points.

On la gèrera comme la pile sur les arcs mais on utilisera la représentation ci-dessus.

Le test : "existe t'il un arc b tel que b Γ a se ramène à tester si l'extrémité de l'arc a a des successeurs.

On a donc besoin de connaître les suites des successeurs de chaque point. On les obtiendra d'une façon analogue à celle utilisée en 4.3.1. Les successeurs de chaque point seront rangés dans le tableau $\dot{I}S$, l'adresse du premier successeur de chaque point sera rangée dans le tableau $\dot{A}DS$.

Pour noter qu'un arc est entré dans la pile, on peut :

- soit mettre un zéro à la place de son extrémité dans $\dot{I}S$,

- soit modifier l'adresse du premier successeur de l'origine de l'arc ce 2^o procédé étant plus rapide mais nécessitant l'introduction d'un tableau de même dimension que $\dot{A}DS$.

Les états de la pile sont construits dans un tableau P à une dimension. Celle-ci est égale au nombre maximum d'arcs que peut comporter un chemin (c'est le niveau maximum cf 4.5.4.).

Elle est inférieure au nombre de sommets.

Les longueurs des arcs seront rangées dans un tableau $\dot{L}DU$ correspondant à $\dot{I}S$.

Il est commode de ranger les longueurs des arcs entrés dans la pile dans un tableau \dot{G} parallèle à P.

Recherche des circuits :

S'il y a un circuit, un arc, donc son extrémité, figurera plus d'une fois dans un même état.

A chaque entrée d'un point dans un état de la pile, on testera s'il n'est pas déjà dans cet état.

Pour aller plus vite on pourra utiliser un tableau T tel que : $T(i) = 0$

Si le point i n'est pas dans l'état considéré, $T(i) = 1$ sinon -

On ne peut donc détecter qu'un circuit à la fois.

En faisant imprimer l'état de la pile correspondant on connaîtra les points du circuit.

Conclusion :

La méthode nécessite un peu plus de place en mémoire que la méthode des niveaux, mais elle est plus rapide.

En effet, le nombre d'opérations dans la gestion de la pile est proportionnel au nombre \dot{M} d'arcs (cf [5] page 38), donc à N dans un graphe PERT.

4 - 6 - UTILISATION DU CLASSEMENT DES ARCS AU CALCUL DES CALENDRIERS.

4 - 6 - 1 - LONGUEUR DU PLUS LONG CHEMIN ALLANT D'UN POINT x FIXE A TOUT POINT y DU GRAPHE.

L'algorithme est le suivant (cf [6])

Soit a_1, a_2, \dots, a_m les m arcs du graphe dans leur ordre de classement.

Soit w_1 l'origine de l'arc a_1 , z_1 son extrémité, l (w_1, z_1) ou l (a_1) sa longueur.

On calcule successivement

$$K(x, y, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ -\infty & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

pour $i = 1, 2, \dots, m$

$$K(x, z_1, i) = \text{Max} [K(x, z_1, i-1), \{K(x, w_1, i-1) + l(w_1, z_1)\}]$$

$$K(x, y, i) = K(x, y, i-1) \quad \forall y \neq z_1$$

Pour tout y de X, $K(x, y, m)$ est la longueur du plus long chemin allant de x à y, s'il existe, $-\infty$ sinon.

Prouve :

Montrons par récurrence que $K(x, y, i)$ est le maximum des longueurs des chemins de x à y vides de longueur nulle ou dont le dernier arc est a_k , $k \leq i$.

Pour $i = 0$ $K(x, y, 0) = -\infty$ si $x \neq y$ ($-\infty$ est la longueur du chemin vide).
 $K(x, y, 0) = 0$ si $x = y$.

Supposons l'hypothèse vraie pour $i - 1$, vérifions la pour i .

Au rang i , les chemins de x à y se divisent en 2 classes.

D'une part les chemins vides, de longueur nulle ou dont le dernier arc est a_k , $k < i$. D'après l'hypothèse $K(x, y, i - 1)$ est le maximum des longueurs de tels chemins.

D'autre part, les chemins dont le dernier arc est a_k , avec $k = i$. Soit c un tel chemin, $l(c)$ sa longueur.

Soit $a_i = (w_i, z_i)$ avec $z_i = y$.

$l(c) = l(c') + l(a_i)$

où c' est un chemin vide de longueur nulle ou terminé par un arc a_j d'extrémité w_i . On a donc $a_j \in a_i$. Comme les arcs sont classés $j \leq i - 1$, par hypothèse $K(x, w_i, i - 1)$ est le maximum des longueurs de tels chemins c' .

Par construction, $K(x, y, i) = \max [K(x, y, i - 1), \{K(x, w_i, i - 1) + l(a_i)\}]$. $K(x, y, i)$ vérifie donc bien l'hypothèse.

Quand $i = m$, $K(x, y, m)$ est la longueur du plus long chemin allant de x à y .

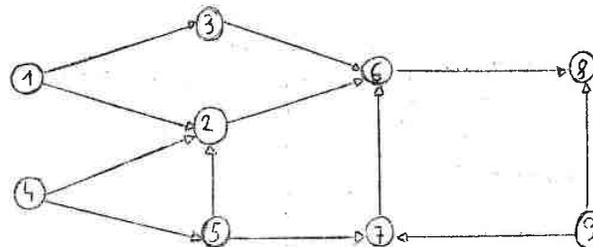
Nombre d'opérations : l'algorithme nécessite m (nombre d'arcs) tests et m additions.

Reprenons l'exemple traité précédemment :

Le classement des arcs est par exemple

$(9,8)$, $(9,7)$, $(4,5)$, $(5,7)$, $(7,6)$, $(5,2)$, $(4,2)$, $(1,3)$, $(3,6)$, $(1,2)$, $(2,6)$, $(6,8)$

Cherchons la longueur du plus long chemin menant du point 1 à tout point x du graphe.



$$K(1, y, 0) = -\infty \quad \forall y \in x, y \neq 1$$

$$K(1, 8, 1) = -\infty$$

$$K(1, 7, 2) = -\infty$$

$$K(1, 5, 3) = -\infty$$

$$K(1, 7, 4) = -\infty$$

$$K(1, 6, 5) = -\infty$$

$$K(1, 2, 6) = -\infty$$

$$K(1, 2, 7) = -\infty$$

$$K(1, 3, 8) = \max [-\infty, l(1, 3)] = l(1, 3)$$

$$K(1, 6, 9) = \max [-\infty, l(1, 3) + l(3, 6)] = l(1, 3) + l(3, 6)$$

$$K(1, 2, 10) = l(1, 2)$$

$$K(1, 6, 11) = \max [l(1, 3) + l(3, 6), l(1, 2) + l(2, 6)]$$

$$K(1, 8, 12) = \max [l(1, 3) + l(3, 6), l(1, 2) + l(2, 6)] + l(6, 8)$$

4-6-2 - LONGUEUR DU PLUS LONG CHEMIN ALLANT DE TOUT POINT x DU GRAPHE A UN POINT y FIXE.

L'algorithme est analogue - La liste des arcs classés est parcourue en sens inverse.

On calcule successivement :

$$K(x, y, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ -\infty & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Pour $i = m, m-1, \dots, 2, 1$

$$K(w_i, y, m-i+1) = \max [K(w_i, y, m-i), [l(w_i, z_i) + K(z_i, y, m-i)]]$$

$$K(x, y, m-i+1) = K(x, y, m-i) \quad \forall x \neq w_i$$

4-6-3 - CALCUL DES CALENDRIERS se reportant aux définitions des dates au plus tôt et

au plus tard données en 4.2.2., les deux algorithmes précédents s'appliquent directement. Ils s'adaptent aisément au cas d'un graphe ayant plusieurs entrées et sorties.

Soit E l'ensemble des entrées du graphe,

S l'ensemble des sorties du graphe.

On calcule successivement :

$$ITO(x, 0) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \notin E \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}$$

Pour $i = 1, 2, \dots, m$ ($m =$ nombre d'arcs du graphe)

$$ITO(z_i, i) = \text{Max} [ITO(z_i, i-1), ITO(w_i, i-1) + l(w_i, z_i)]$$

$$ITO(x, i) = ITO(x, i-1) \quad \forall x \neq z_i$$

$ITO(x, m)$ est la date au plus tôt de x

$$ITA(x, 0) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \notin S \\ 0 & \text{si } x \in S \end{cases}$$

Pour $i = m, m-1, \dots, 2, 1$

$$ITA(w_i, m-i+1) = \text{Max} [ITA(w_i, m-i), l(w_i, z_i) + ITA(z_i, m-i)]$$

$$ITA(x, m-i+1) = ITA(x, m-i) \quad \forall x \neq w_i$$

La date au plus tard de x est alors $\text{Max}_{y \in X} ITO(y, m) - ITA(x, m)$

4-6-4 - RECHERCHE DU CHEMIN CRITIQUE.

On a vu (cf 4.2.2) que dans un graphe à une entrée n^0-1 et une sortie n^0

le chemin le plus long allant des étapes 1 à n était le chemin $i_1 = 1,$

$i_2, i_3, \dots, i_n = n$ tel que

$$\lambda_{i_k} = \lambda_{i_{k-1}} + d_{i_{k-1}i_k} \quad k = 2, 3, \dots, n$$

C'est encore vrai pour un graphe à plusieurs entrées et sorties.

Lors du calcul du plus long chemin allant des entrées à tout point x , on détermine le chemin critique en retenant en mémoire pour chaque point x le point PRED (x, i) tel que :

$$\text{PRED}(x, 0) = 0 \quad (\text{ou rien})$$

Pour $i = 1, 2, \dots, m$

$$\text{PRED}(z_i, i) = \text{PRED}(z_i, i-1) \quad \text{Si } ITO(z_i, i-1) \geq ITO(w_i, i-1) + 1$$

$$+ l(w_i, z_i)$$

$$= w_i \quad \text{sinon}$$

$$\text{PRED}(x, i) = \text{PRED}(x, i-1) \quad \forall x \neq w_i$$

Soit i_n le point tel que $ITO(i_n, m) = \text{Max}_{y \in X} ITO(y, m)$

Si on pose $\text{PRED}(x) = \text{PRED}(x, m)$, le chemin

$$i_n, \text{PRED}(i_n), \text{PRED}[\text{PRED}(i_n)], \dots$$

est le chemin critique.

Remarque : Il peut y avoir plusieurs chemins critiques, ce procédé n'en indique qu'un. Il faut dans ce cas chercher les tâches critiques en calculant les marges totales (cf 4.2.3).

4-6-5 - CONCLUSION.

de calcul du
L'algorithme de calendrier au plus tôt (resp. au plus tard) nécessite exactement $2n$ tests et n additions ($n =$ nombre d'arcs). Si on construit le classement ; par la méthode de la pile qui nécessite un nombre d'opérations proportionnel à n cet algorithme est incontestablement le plus rapide.

4-7 - COMPARAISON EXPERIMENTALE.

4-7-1 - BUT DE L'EXPERIENCE.

Il s'agit de comparer entre eux les algorithmes suivants :

- 1) Algorithme naturel (cf 4.3)
- 2) Algorithme de FORD avec ou sans mémoire périphérique (cf 4.4)
- 3) Ordonnement par niveaux (cf 4.5.4) suivi de l'algorithme de calcul des calendriers (cf 4.6.4.)
- 4) Ordonnement par pile (cf 4.5.5. suivi du même algorithme.)

(Dans la gestion de la pile, deux tableaux supplémentaires ont été introduits. pour obtenir le maximum de rapidité).

Les tris se font par la méthode de transposition (cf [7])

La comparaison se fera sur 3 critères :

- 1) Occupation du programme en mémoire centrale (tableaux de données et mémoires de travail compris),
- 2) Temps de calcul des calendriers au plus tôt et au plus tard,
- 3) Aptitude à détecter les circuits, les entrées, les sorties (ces tests servent à contrôler les données).

4-7-2 - CONDITIONS DE L'EXPERIENCE.

1 L'ordinateur.

L'ensemble est formé d'une unité centrale C A E 90 - 80 dont la mémoire est de 32000 mots de 24 positions (bits).

25.000 mots sont disponibles pour le programme et les réservations de tableaux.

Un nombre entier occupe un mot de mémoire (on a la possibilité d'en mettre deux par mot à l'aide d'un sous programme en code).

Les périphériques sont composés de 6 dérouleurs de bande magnétique, un lecteur de carte et d'une imprimante.

On n'utilisera, dans cette expérience un seul dérouleur comme mémoire annexé.

2 Les données.

La structure du graphe peut être entrée sous 3 formes :

- 1) soit la liste des successeurs de chaque étape,
- 2) soit la liste des successeurs et des prédécesseurs de chaque étape,
- 3) soit pour chaque tâche ses numéros de début et de fin.

Les formes 1 et 2 se rattachent à la représentation utilisée dans la méthode des potentiels, la 3e forme à la représentation PERT.

Les formes 1 et 2 ne nécessitent pas le dessin du réseau ce qui peut être considéré comme une simplification si le réseau est de très grande taille. Mais en pratique ce dessin sert à visualiser les relations entre tâches,

il facilite le dialogue entre le planificateur et les différents responsables. C'est cette forme que nous choisirons.

A chaque tâche correspondra une carte portant les numéros de début et de fin, la durée et d'autres informations au besoin.

La durée sera un nombre entier, ce qui est plausible à condition de choisir l'unité de temps en fonction de la précision des estimations.

3 NUMÉROTATION, ENTREES ET SORTIES DU GRAPHIE.

La numérotation des sommets se fait en nombres entiers. Aucun numéro ne peut dépasser. Un nombre N_0 donné dans la notice de chaque programme. On a donc intérêt à numérotter les N sommets de 1 à N sans laisser de trou dans la suite. La numérotation est totalement aléatoire.

On entre en données complémentaires le nombre N de sommets et le nombre M d'arcs, ce dernier ne servant qu'à contrôler le nombre de cartes.

Les quatre algorithmes s'adaptent à des graphes à plusieurs entrées et sorties.

4 - GRAPHIE UTILISE.

Pour l'expérience on a utilisé une suite de graphes s'emboîtant les uns dans les autres de façon à pouvoir faire varier la taille du réseau.

Le rapport du nombre d'arcs au nombre de sommets a été choisi comme représentant approximativement une "moyenne" de ce que l'on rencontre en général dans les réseaux PERT : 17 arcs pour 10 sommets.

4 - 7 - 3 - RESULTATS.

On trouvera aux pages suivantes :

- 1) L'occupation de chaque programme en mémoire centrale et les dimensions limites des réseaux pouvant être traités.
- 2) Le chronométrage du temps écoulé entre la fin de la lecture des données (sur cartes) et le début d'impression des résultats. Ce temps correspond au calcul des calendriers au plus tôt et au plus tard. La précision, de l'ordre de la seconde, est assez sommaire.
- 3) La courbe des temps de calcul en fonction du nombre de sommets des graphes.
- 4) Un tableau donnant les diverses possibilités de chaque programme.

4 - 7 - 4 - CONCLUSIONS.

- 1) L'algorithme de FORD utilisé avec mémoire auxiliaire (ici bande magnétique) prend très peu de place en mémoire centrale mais nécessite un temps de calcul très long. Il peut être utilisé sur petit ordinateur.
- 2) L'algorithme naturel est dépassé tant au point de vue place en mémoire que temps de calcul (ce temps s'améliorerait évidemment si on évitait les tris en entrant les données sous la forme 2 cf 4.8.2.).

- 3 L'algorithme de FORD sans périphérique et l'algorithme de classement par niveaux sont en fait de même conception. Le second construit en plus une chaîne d'information, à l'aide d'un tri ce qui explique l'écart initial entre les 2 courbes de temps de calcul. Mais l'expérience montre que pour $N \geq 800$ il est plus rapide.

Comme dans les problèmes courants $N \geq 800$ nous retiendrons l'algorithme fondé sur le classement, par niveaux.

- 4 L'algorithme utilisant la pile est de loin le plus rapide pour $N \geq 500$ (pour $N \leq 500$ le tri et la construction de la chaîne le rendent moins rapide que FORD) mais les possibilités au point de vue taille des graphes sont plus faibles que pour l'algorithme utilisant les niveaux.

Finalement nous retiendrons ces deux algorithmes choisissant celui utilisant la pile si le critère vitesse est primordial, choisissant celui utilisant les niveaux si la priorité est donnée à la capacité du programme.

(Notons qu'il existe une version de gestion de la pile occupant moins de place mais un peu moins rapide).

Ces résultats ne tiennent pas compte de toutes les subtilités de programmation en particulier celle qui consiste à fractionner les mots de mémoire ce qui augmente la capacité de la machine au détriment évidemment du temps de calcul.

Il est possible de traiter d'autres données que le temps, par exemple le coût ou la nature de la tâche. Ces informations seront triées au début et envoyées sur périphérique. Après le calcul PERT Temps on les récupère pour leur faire subir le traitement nécessaire.

PLACE DES PROGRAMMES EN MEMOIRE OU CAE 90.80 (32k)

4-7-4

NA = nombre d'arcs.

NS = nombre de sommets.

CODIM = taille des blocs sur bande magnétique.

Algorithme.	Contrainte de capacité.	Solution.
NIVEAUX	$2 NA + 2 NS + CODIM \leq 22617$	NA = 7000 NS = 3500 CODIM = 999
PILE	$2 NA + 3 NS + 2 NV + CODIM \leq 22495$ NV = nombre de niveaux (= dimension du tableau contenant la pile)	NA = 5000 NS = 2500 NV = 1800 CODIM = 999
ALG. NATUREL	$3 NA + 4 NS \leq 22633$	NA = 4000 NS = 2500
FORD	$3 NA + 2 NS \leq 23849$	NA = 5000 NS = 3000
FORD AVEC BANDE MAGNETIQUE	$2 NS + 3 CODIM \leq 23299$	NS = 10000 (NA \approx 17000) CODIM = 1000

TEMPS DE CALCUL D'ALGORITHME PERT SUR CAE 90.80.

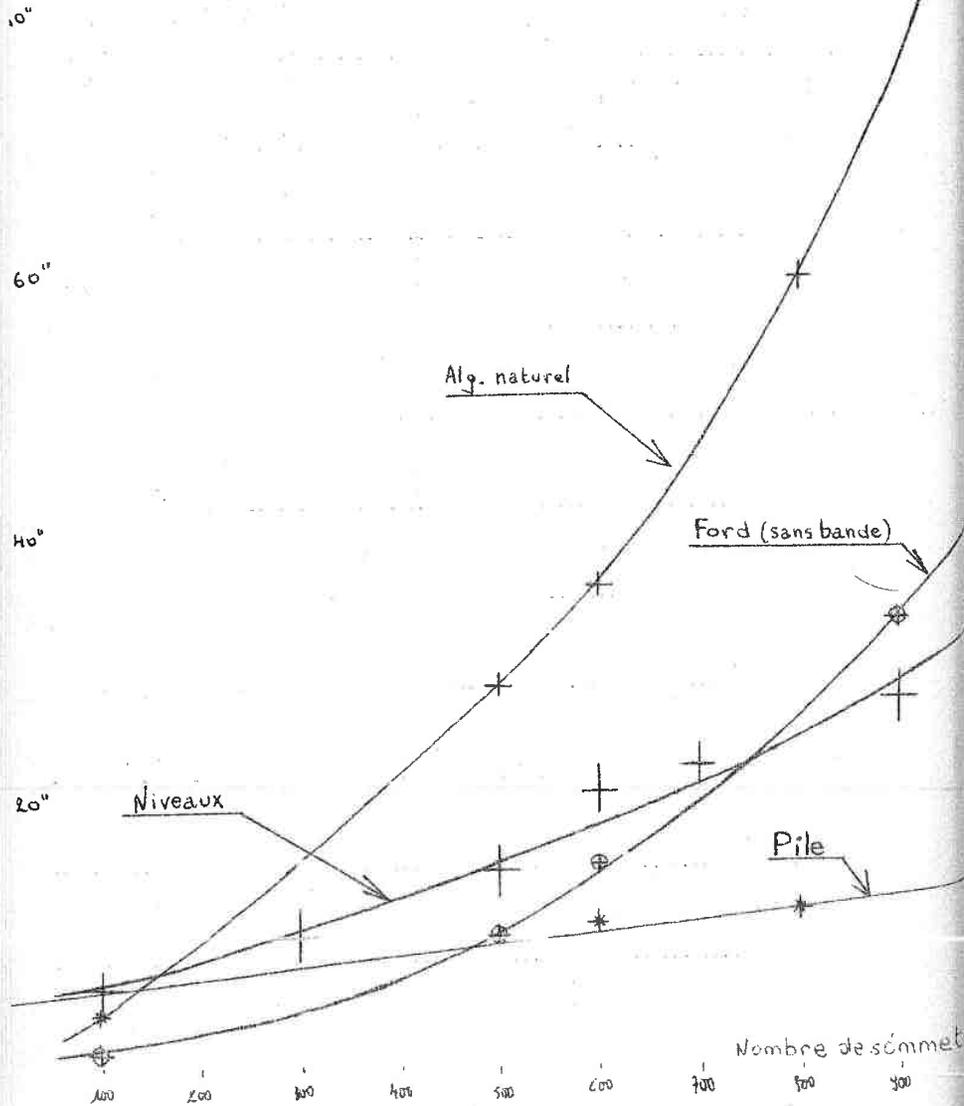
Chronométrage du temps de calcul des dates au plus tôt et au plus tard des étapes. (temps de lecture des données exclu).

N S Nombre de sommets.	N A Nombre d' arcs.	NIVEAUX	PILE	FORD	ALG NATUREL	FORD avec bande
100	170	6"	4"	1"	4"	38"
200	341					1'54"
300	512	10"				3'40"
400	683					5'45"
500	854	15"		10"	29"	8'15"
600	1025	21"	11"	15" ⁵ / ₁₀	36" ⁵ / ₁₀	
700	1196	23"				
800	1367		12"		60"	
900	1538	28"	12"	34"		
1000	1709	35"	14"	43"	99"	27'

Secondes

TEMPS DE CALCUL SUR CAE 90-80

(1 sommet → 1,7 arcs)



POSSIBILITES DE CONTROLE DES DONNEES

ALGORITHMES	Détection d'un circuit	Détection des points du circuit	Détection des entrées	Détection des sorties
ALG. NATUREL	assez rapide	possible	oui	oui
FORD	longue	non	non	non
NIVEAUX	très longue	non	oui	non
PILE	immédiate	immédiate	non	oui

CHAPITRE V

LA METHODE PERT ALEATOIRE5-1 - INTRODUCTION.

La méthode PERT déterministe décrite précédemment nécessite que la durée de chaque tâche soit bien déterminée. Quand bien même on aurait déjà exécuté ces tâches dans un projet précédent, de multiples facteurs impossibles à prendre en compte par le planificateur, viendront modifier les durées dans un sens ou dans un autre. On doit donc considérer la durée d'une tâche comme une variable aléatoire.

Cela se justifie encore plus pour les projets de recherche ou de développement où on n'a aucune statistique des durées des tâches.

Donc en toute rigueur, un projet prévisionnel est à durées aléatoires. C'est pour quoi, dans sa forme originale la méthode PERT est conçue avec des durées aléatoires.

5-2 - DEFINITION DU PROBLEME.

Le problème se décompose en deux :

- 1) déterminer la distribution des variables aléatoires représentées par les durées des tâches,
- 2) a) trouver la distribution de la durée totale du projet,
b) déterminer les tâches qui ont le plus de chances d'être critiqués.

On cherche aussi à connaître la distribution de la date des étapes importantes du projet mais le problème est le même que de déterminer celle de la date de l'étape fin, c'est à dire la distribution de la durée totale.

Dorénavant, les graphes dont il est question auront une seule étape début et une seule étape fin. Les chemins, quand on ne le précisera pas, iront de l'étape début à l'étape fin.

La longueur d'un chemin sera une variable aléatoire somme des variables aléatoires représentant les longueurs (ou durées) des arcs. Soit X_1, X_2, \dots, X_n les longueurs des n chemins du graphe. La durée totale sera la variable aléatoire $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Le problème consiste d'une part à déterminer la distribution des X_i et d'autre part la distribution de $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$. L'expression mathématique de cette dernière variable aléatoire est impossible en général.

5-3 - LA METHODE PERT. (cf [2])

5-3 (4)

a) estimation des durées.

La méthode suppose qu'on peut obtenir des techniciens responsables de chaque tâche, 3 estimations de durée :

- la durée optimiste A : on convient qu'il n'y a qu'une chance sur 100 que la durée soit inférieure à A
- la durée la plus probable M.
- la durée pessimiste B

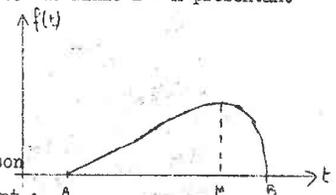
La durée n'étant supérieure à B que dans 1 cas sur 100.

b) distribution des durées.

(I)

La loi des durées est continue, d'étendue finie B - A présentant un mode en M et telle que A et B soient positifs. Comme on n'a pas, en général, de statistique de la durée de chaque tâche, on choisit une loi Béta de dont les paramètres sont choisis de Pearson façon que la moyenne soit approximativement :

$$E(t) = \frac{A + 4M + B}{6}, \text{ la variance } \sigma_t^2 = \left(\frac{B-A}{6}\right)^2$$



- c) Les durées des tâches sont supposées être indépendantes.
- d) Si à chaque tâche on associe sa durée moyenne, on ramène le problème au cas déterministe : on obtient une durée totale du projet, un chemin critique, deux calendriers au plus tôt et au plus tard.
- e) L'indépendance des durées des tâches a 2 conséquences :
 - d'une part : s'il comporte assez d'arcs, le chemin critique a une longueur qui est normalement distribuée
 - d'autre part la variance de sa longueur est la somme des variances des arcs qui le composent.
- f) Comme la durée totale trouvée par la méthode déterministe est la longueur moyenne du chemin critique, on attribue à la durée totale la distribution de la longueur du chemin critique. On peut en déduire alors un intervalle de confiance de la durée et calculer la probabilité pour que le projet soit terminé à une date fixée au préalable.

5-4 - CRITIQUE DE LA METHODE PERT.

En appliquant la méthode PERT, on commet 2 types d'erreurs, les uns portent sur la durée des tâches, les autres sur la méthode de résolution du problème.

ERREUR CONCERNANT LA DUREE DES TACHES.

D'une part, en estimant pour chaque tâche les durées A, M, B on commet une

(I) A priori elle peut être discontinue

erreur qui peut toutefois se réduire par effet de compensation entre tâches. D'autre part, le choix de la loi Béta est arbitraire, on pourrait choisir tout autant une loi triangulaire, loi Γ ou uniforme...

Par ailleurs, la moyenne et la variance de la loi Béta indiquées plus haut sont des approximations (le choix de la loi triangulaire évite cette erreur). On commet donc 3 erreurs dans le calcul de la moyenne et de la variance de la durée d'une tâche.

Mrillac CRIMON (cf [8]) a étudié ces erreurs :

a) Erreur dans le choix de la loi des durées.

Si on compare les valeurs de la moyenne et de la variance d'une durée quand la distribution est soit triangulaire, soit uniforme, soit Béta PERT, l'erreur absolue sur la moyenne (resp. la variance) est au maximum 33% de l'écart (resp. 16 %).

b) Erreur dans l'estimation de A, M, B.

a, m, b étant les valeurs estimées. Si on suppose que :

$0,8A \leq a \leq 1,1A$; $0,9M \leq m \leq 1,1M$; $0,9B \leq b \leq 1,2B$
dans le cas de la loi Béta PERT, l'erreur absolue sur la moyenne (resp. la variance) est au maximum 22 % de l'écart (resp 10 %).

c) Erreur sur la moyenne de loi Béta PERT, on peut l'éviter en exprimant cette moyenne en fonction de A et B uniquement (cf 6 - 5 - 2.)

Ces erreurs sont très importantes, mais comme elles peuvent être positives ou négatives il y a un effet de compensation qui dépend en partie de la structure du graphe.

Erreurs dans la méthode de résolution du problème.

A - Indépendance des durées des tâches.

Elle est souvent mise en défaut :

- d'une part quand une tâche prend du retard, le responsable du projet agira de façon à accélérer les tâches qui lui succèdent.

- d'autre part, la durée d'une tâche dépend de la quantité ou de la qualité du moyen qu'on lui affecte.

Du fait que les moyens sont en général limités, les durées des tâches dont la réalisation fait appel au même moyen sont dépendantes.

La dépendance des durées des tâches remet en question le calcul de la variance de la durée totale et sa normalité.

L'essentiel de la méthode PERT s'appuie sur les hypothèses suivantes :

B - Il existe un chemin pratiquement toujours plus long que les autres.

C - Ce chemin a assez d'arcs de façon que sa longueur soit normalement distribuée.

L'hypothèse B signifie que tout autre chemin a une probabilité négligeable d'être le plus long,

Le chemin toujours le plus long se détermine alors facilement :

C'est le chemin en moyenne le plus long. On l'appellera chemin critique au sens PERT ou chemin P-critique.

Il est clair que cette hypothèse n'est pas satisfaite en général. Il suffit de considérer un graphe qui a 2 chemins de longueur voisine, toujours plus longs que les autres.

L'hypothèse C, moyennant l'hypothèse A, est plausible.

Les lois de distribution étant finies et unimodales, il suffit qu'un chemin comporte une dizaine d'arcs pour que sa distribution soit sensiblement normale.

Le but de l'étude qui suit est de chercher à l'aide de la méthode de simulation à caractériser les erreurs découlant des hypothèses A, B, C et à suppléer la méthode PERT par une méthode plus précise dans les cas où ses résultats sont fortement erronés.

C H A P I T R E VI

LA METHODE DE SIMULATION.6 - 1 - PRINCIPE :

La simulation consiste à répéter un certain nombre de fois le calcul PERT déterministe sur des échantillons obtenus en tirant au hasard une valeur dans la distribution des durées de chaque tâche.

La structure du graphe reste inchangée, seules les durées affectées aux arcs sont modifiées.

La simulation permet d'obtenir des informations là où la théorie est impuissante : elle permet d'estimer la moyenne et la variance de la durée totale du projet et d'en construire l'histogramme.

En outre, à chaque échantillon de durée, le calcul PERT déterministe fait correspondre un chemin critique ; on pourra donc étudier si un chemin est peu ou souvent critique.

La simulation sera utilisée dans 2 perspectives :

- 1) Tester la méthode PERT aléatoire,
- 2) Donner des informations précises (en accélérant au besoin le processus de simulation) sur la distribution de la durée du projet et sur la "criticité" des tâches.

La méthode de simulation a déjà été appliquée à l'étude d'un projet à durées aléatoires par Monsieur VAN SLYKE (cf [12]). Nous lui faisons quelques emprunts.

6 - 2 - NOTION DE PROBABILITE DE CRITICITE.

Soit n le nombre de chemins (les chemins dont il est question dans la suite sont les chemins qui vont du début à la fin du graphe) X_1, X_2, \dots

X_n leurs longueurs. Soit x_1, x_2, \dots, x_n la valeur prise par la variable aléatoire à n dimensions X_1, X_2, \dots, X_n lors d'une réalisation.

DEFINITION 1 - Un chemin est critique lors d'une réalisation si sa longueur est supérieure ou égale à celle des autres. Ainsi le chemin n° 1 est critique lors d'une réalisation si $x_1 \geq \max(x_2, \dots, x_n)$.

DEFINITION 2 - La probabilité de criticité (ou criticité tout court) d'un chemin est la probabilité que ce chemin soit le plus long lors d'une réalisation.

DEFINITION 3 - La fréquence de criticité d'un chemin est égale au quotient du nombre de réalisations où ce chemin est critique par le nombre total de réalisations.

DEFINITION 4 - Un chemin sera dit plus critique qu'un autre si sa probabilité de criticité est supérieure à celle de l'autre.

Si les longueurs des chemins sont distribuées suivant des lois continues, il est en pratique extrêmement rare d'avoir 2 chemins critiques simultanément lors d'une même réalisation. L'événement "le chemin i est critique" exclut donc tous les autres. Si P_i est la probabilité de criticité du chemin i on aura

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

Comme il est incommode dans une simulation de calculer la fréquence de criticité des chemins, on calcule plutôt celle des arcs d'où la définition :

DEFINITION 5 - Un arc est critique lors d'une réalisation si le chemin le plus long passe par cet arc.

La fréquence et la probabilité de criticité d'un arc sont définies comme pour un chemin.

On en déduit que :

La fréquence (resp. la probabilité) de criticité d'un arc est la somme des fréquences (resp. des probabilités) des chemins qui empruntent cet arc.

Si on connaît les fréquences de criticité des chemins du graphe, on en déduira les fréquences de criticité des arcs. Mais la réciproque n'est en général, pas vraie.

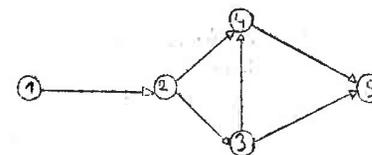
Si par un arc passe un seul chemin, la fréquence de criticité du chemin est égale à celle de l'arc.

Dans les autres cas on obtient des relations formant un système d'équations linéaires, en général, indéterminé.

EXEMPLE 1 -

Ce graphe est formé de 3 chemins :

- | | |
|-------------|---------------|
| chemin n° 1 | 1, 2, 3, 5 |
| chemin n° 2 | 1, 2, 3, 4, 5 |
| chemin n° 3 | 1, 2, 4, 5 |



On remarque que l'arc (3, 5) n'est emprunté que par le chemin n° 1

On remarque que l'arc (3, 4) n'est emprunté que par le chemin n° 2

On remarque que l'arc (2, 4) n'est emprunté que par le chemin n° 3

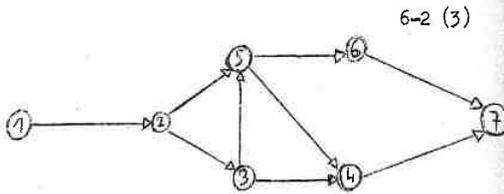
Donc $P_1 = P_{35}$, $P_2 = P_{34}$, $P_3 = P_{24}$ (P_1, P_2, P_3 étant les probabilités de criticité des chemins 1, 2, 3 ; P_{35}, P_{34}, P_{24} étant celles des arcs correspondants).

Mais cet exemple est un cas particulier.

EXEMPLE 2 -

Ce graphe est formé de 5 chemins.

- n° 1 1 2 3 4 7
- n° 2 1 2 3 5 4 7
- n° 3 1 2 3 5 6 7
- n° 4 1 2 5 4 7
- n° 5 1 2 5 6 7



6-2 (3)

La définition de la probabilité de criticité des arcs implique les relations suivantes :

$$\begin{cases}
 P_{12} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1 \\
 P_{25} = P_4 + P_5 \\
 P_{23} = P_1 + P_2 + P_3 \\
 P_{35} = P_2 + P_3 \\
 P_{34} = P_1 \\
 P_{54} = P_2 + P_4 \\
 P_{56} = P_3 + P_5 \\
 P_{67} = P_3 + P_5 \\
 P_{47} = P_1 + P_2 + P_4
 \end{cases}
 \quad \text{d'où les équations indépendantes.}$$

$$\begin{cases}
 P_{34} = P_1 \\
 P_{54} = P_2 + P_4 \\
 P_{56} = P_3 + P_5 \\
 P_{35} = P_2 + P_3
 \end{cases}$$

La solution est obtenue en fonction d'un paramètre indéterminé.

$$\begin{cases}
 P_1 = P_{34} \\
 P_2 = P_2 \\
 P_3 = P_{56} - P_5 \\
 P_4 = P_{54} - P_2 \\
 P_5 = P_{56} - P_{35} + P_2
 \end{cases}$$

Dans la suite, on calculera dans les simulations la fréquence de criticité des arcs pour 2 raisons : c'est d'une part plus facile, et d'autre part cette notion est très utile dans la pratique du contrôle de l'exécution d'un projet. Mais comme la probabilité de criticité des arcs se déduit de celle des chemins nous ne parlerons que de la probabilité de criticité des chemins dans les études théoriques.

6 - 3 - PRÉCISION DES ESTIMATIONS :

2 problèmes se posent :

- avant la simulation on veut connaître le minimum de réalisations nécessaires pour atteindre une certaine précision sur les paramètres étudiés.
- après la simulation on veut connaître un intervalle de confiance des paramètres estimés.

NOTE : Dans la suite on considère des intervalles de confiance avec un taux de confiance de 0,95 mais il est clair que ce taux est à fixer en fonction du coût de l'erreur (par ex. : coût des pénalités de retard).

6-3-I (2)

6 - 3 - 1 - ESTIMATION DE LA MOYENNE DE Max (X₁ - X_n)

Soit m, σ , la moyenne et l'écart type de Max (X₁ - X_n). La moyenne du N-échantillon, obtenue par la simulation suit une loi normale de moyenne m de variance $\frac{\sigma^2}{N}$, soit $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ x_i étant la valeur prise par Max (X₁ - X_n) lors de l'expérience n° i. \bar{x} est un estimateur non biaisé de m

a) - Calculons N pour que l'erreur commise dans l'estimation de m par \bar{x} soit inférieure à $\frac{\sigma}{P}$ avec une probabilité de 0.95, P étant un nombre à préciser.

$$Pr \left[|\bar{x} - m| < \frac{\sigma}{P} \right] = 0.95$$

$$d'où Pr \left[\frac{|\bar{x} - m|}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} < \frac{\sqrt{N}}{P} \right] = 0.95$$

Comme $\frac{|\bar{x} - m|}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$ suit une loi normale centrée réduite

$$\frac{\sqrt{N}}{P} = 1,96 \text{ donc } N = 3,85 P^2$$

Il faut un minimum de 3,85 P² expériences pour que l'erreur $|\bar{x} - m|$ soit inférieure à $\frac{\sigma}{P}$ avec une probabilité de 0.95.

Exemple : P = 10 N = 385
P = 50 N ≈ 9640

L'intervalle de confiance de m à 0,95 est en gros :

$$\bar{x} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < m < \bar{x} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

On peut retenir que l'erreur dans l'estimation de m est divisée par 10 quand N est multiplié par 100.

b) - On ne peut utiliser cet intervalle de confiance car σ n'est pas connu.

$$\text{Soit : } s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

La variable $\frac{\bar{x} - m}{\sqrt{s^2/N}}$ suit une loi de STUDENT à N - 1 degrés de liberté. Quand N → ∞ la loi de STUDENT tend vers la loi normale centrée réduite.

Donc pour un taux de confiance de 95 %

$$\bar{x} - 1,96 \frac{s}{\sqrt{N-1}} < m < \bar{x} + 1,96 \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

soit \hat{Q}^2 l'estimateur non biaisé de σ^2 , $\hat{Q}^2 = \frac{N s^2}{N-1}$

$$\bar{x} - 1,96 \frac{\hat{Q}}{\sqrt{N}} < m < \bar{x} + 1,96 \frac{\hat{Q}}{\sqrt{N}}$$

6 - 3 - 2 - ESTIMATION DE LA VARIANCE DE Max (X₁ - X_n)

$\frac{N s^2}{\hat{Q}^2}$ suit un χ^2 à N - 1 degrés de liberté.

$$\text{Donc } E \left[\frac{N s^2}{\sigma^2} \right] = N - 1$$

$$\text{VAR} \left[\frac{N s^2}{\sigma^2} \right] = 2(N - 1)$$

Quand $N \rightarrow \infty$, $N s^2 / \sigma^2$ suit approximativement une loi normale de Moyenne $N - 1$ de variance $2(N - 1)$ cf (6.4.3.)

L'intervalle de confiance à 95 % est :

$$- 1,96 < \frac{\frac{N s^2}{\sigma^2} - (N - 1)}{\sqrt{2(N - 1)}} < 1,96$$

$$\frac{1 - 1,96 \sqrt{\frac{2}{N-1}}}{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} < \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < \frac{1 + 1,96 \sqrt{\frac{2}{N-1}}}{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}$$

Soit approximativement :

$$\hat{\sigma}^2 \left(1 - 1,96 \sqrt{\frac{2}{N-1}} \right) < \sigma^2 < \hat{\sigma}^2 \left(1 + 1,96 \sqrt{\frac{2}{N-1}} \right)$$

L'erreur absolue commise en estimant σ^2 par $\hat{\sigma}^2$ sera

$$\hat{\sigma}^2 \times 1,96 \sqrt{\frac{2}{N-1}}$$

L'erreur relative correspondante $1,96 \sqrt{\frac{2}{N-1}}$

Calculons N pour que l'erreur relative dans l'estimation de la variance soit inférieure à ξ

$$1,96 \sqrt{\frac{2}{N-1}} = \xi \Rightarrow N \approx \frac{8}{\xi^2}$$

ex : Si $\xi = 5\%$ $N = 2950$

6-3-3 - PRECISION DE L'HISTOGRAMME DE LA LONGUEUR DU PROJET.

Soit F_m et F_n les fonctions de répartition d'échantillons de la longueur du projet de taille m et n .

$$D_{m,n} = \sup_x \left| \left[\frac{F_n(x) - F_m(x)}{F_n(x) - F(x)} \right] \right|$$

F étant la fonction de répartition de la population dont on extrait les échantillons.

La distribution de KOLMOGOROV permet d'obtenir la limite $L(z)$ de la probabilité $P_r \left[\sqrt{\frac{2mn}{m+n}} D_{m,n} < z \right]$ lorsque m et n tendent vers l'infini, leur rapport étant fini.

Exemple :

On lit dans la table que $L(1.36) = 0.9505$

Si nous prenons $m = 10^6$ on peut confondre F_m et F

Prenant n assez grand $P_r \left[D_n < \frac{1.36 \sqrt{n+10^6}}{10^3 \sqrt{2n}} \right]$ est voisin de 0,95

Si on veut que $D_n < 0.01$, il faut que

$$\frac{1.36 \sqrt{n+10^6}}{10^3 \sqrt{2n}} < 10^{-2} \Rightarrow n > 9350$$

Donc la fonction de répartition d'un échantillon de taille 10000 différera en tout point de moins de 0,01 de la fonction de répartition de la longueur du projet avec une probabilité de 0,95.

6-3-4 - ESTIMATION D'UNE PROBABILITE DE CRITICITE PAR LA SIMULATION.

D'après la loi des grands nombres la fréquence d'un événement converge on probabilité vers la probabilité de cet événement.

Nous estimerons donc une probabilité de criticité par la fréquence correspondante, celle-ci étant fournie par un simple comptage au cours de la simulation.

INTERVALLE DE CONFIANCE D'UNE PROBABILITE DE CRITICITE p.

La fréquence correspondante f est une variable aléatoire suivant une loi binômiale de moyenne p , de variance $\frac{p(1-p)}{n}$, n étant la taille de l'échantillon. Mais quand n est grand ($n \geq 100$) et que p n'est pas très petit (sinon c'est une loi de Poisson), cette loi tend vers une loi normale de mêmes paramètres.

Etant donné un seuil d'incertitude α correspondant aux erreurs systématiques introduites dans la construction de l'échantillon :

$$P_r \left[|f - p| < t_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = 1 - \alpha$$

$$\text{où } t_\alpha \text{ est tel que } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_\alpha}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \alpha/2$$

l'erreur d'estimation absolue sur p sera $t_{\alpha} \sqrt{p \frac{(1-p)}{n}}$

La fonction $P \rightarrow P(1-P)$ atteint son maximum $1/4$ sur $[0, 1]$ pour $P = 1/2$. Donc l'erreur d'estimation absolue est inférieure ou égale à $\frac{t_{\alpha}}{2\sqrt{n}}$ pour tout P .

Ce résultat permet de calculer la taille de l'échantillon nécessaire pour atteindre une précision donnée dans l'estimation des probabilités de succès. Si nous voulons commettre sur p une erreur au plus égale à $0,01$ au seuil d'incertitude de 5% , il faudra un nombre minimum n de réalisations tel que

$$\frac{1,96}{2\sqrt{n}} = 0,01 \quad \text{d'où} \quad n = \frac{(1,96)^2}{2 \times 0,01} = 9\,600$$

En estimant à partir d'un échantillon de taille $10\,000$, on commettra une erreur inférieure à $0,01$ au seuil d'incertitude de 5% .

On remarque au passage que la taille de l'échantillon est élevée. Mais pour un 3000 -échantillon, l'erreur à 5% est déjà inférieure à $0,02$. On se contentera le plus souvent de cette précision.

L'erreur d'estimation à 5% commise sur une probabilité donnée p est $1,96 \sqrt{p \frac{(1-p)}{n}}$. Mais quand n est grand, on l'approchera par $1,96 \sqrt{f \frac{(1-f)}{n}}$.

6-4-1 - PRINCIPES.

Nous utilisons un procédé mis au point dans [12].

Soit un nombre x_0 irrationnel $0 < x_0 < 1$.

On construit la suite x_n par la formule de récurrence.

$$x_{n+1} = N x_n + \Theta - E [N x_n + \Theta]$$

$$E [] = \text{partie entière de } []$$

On prend pour N une puissance impaire de 7 afin que la suite de nombres présente une période assez longue.

On choisit $7^9 = 40\,353\,607$.

On remarque que ce procédé rejoint le procédé de génération de Lehmer par congruences (cf procédures de Grenoble) =

$$x_{n+1} = K \cdot x_n \pmod{D} \quad \text{ici } K = 7^9$$

$$D = 10^8 \quad (\text{puisque sur CAE 510 la partie décimale comporte au plus 8 chiffres significatifs}).$$

Afin d'éviter un phénomène de période sur certains chiffres (cf [12]) on fait varier Θ de façon aléatoire.

Dans [12] on recommande de prendre $\Theta = 0$ au départ et à chaque génération de 4 nombres de lui donner la valeur de la somme du 1er et du 4e nombre.

On verra dans la suite qu'il vaut mieux prendre au départ $\Theta \neq 0$ compris

On lui donnera une valeur quelconque entre 0 et 1 .

6-4-2 - MISE AU POINT SUR CAE 510 -

Comme on ne dispose que de 8 chiffres significatifs, le nombre x_0 de départ ne peut être irrationnel.

Si on prend $N = 40\,353\,607$, le produit $N \times x_0$ nécessite en général plus de 8 chiffres significatifs. La partie décimale est donc tronquée et le nombre x_1 n'aura pas 8 chiffres exacts. On choisit donc : $N = 4,0353607$

Programme FORTRAN :

On initialise I à 0 et Θ à un nombre quelconque compris entre 0 et 1 dans le programme principal.

```
FUNCTION HAS (X0)
```

```
COMMON I, TETA
```

```
AH = 4.0353607 * X0 + TETA
```

```
H = AH
```

```
BH = H
```

```
X1 = AH - BH
```

```
IF (I - 1) 1, 2, 3
```

```
- 6I -
```

```

2 RET = X1
1 HIAS = X1
  XO = X1
  IF (I-4) 5, 6, 6
6 TETA = RET + X1
  I = 1
  GO TO 4
5 I = I + 1
4 CONTINUE
  RETURN
  END

```

6-4-2 (3)

6-4-3 - TESTS STATISTIQUES.

Des tests d'équirépartition et d'indépendance sont faits dans [12] et sont jugés concluants. Mais ils sont faits sur des séries de 1.000 nombres, ce qui est insuffisant pour les simulations que l'on va faire.

TEST D'EQUIREPARTITION SUR [0,1].

On construit un algorithme de 100.000 nombres avec $N = 4.0353607$. Au départ $x_0 = 0.81581963$; $\odot = 0.83541712$

On teste si les 50 échantillons de 2.000 nombres sont équirépartis sur [0,1]

Le segment [0,1] est partagé en 100 classes.

Théoriquement il doit y avoir 20 nombres dans chaque classe.

Soit k_i le nombre de valeurs tombées dans la classe n° i.

Si l'hypothèse d'équirépartition est vraie, le nombre $Q = \sum_{i=1}^{100} \frac{(k_i - 20)^2}{20}$ suit une loi du χ^2 à 99 degrés de liberté.

Rappelons que lorsque $\nu \rightarrow \infty$ un χ^2 à ν degrés de liberté tend vers une loi normale de moyenne ν de variance 2ν .

En effet :

La fonction caractéristique du χ^2 est $\varphi_{\chi^2}(t) = (1 - 2it)^{-\nu/2}$

celle de $Z = \frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}$ est $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{itZ}] = e^{-\frac{i + \nu t^2}{\sqrt{2\nu}}} \times \varphi_{\chi^2}\left(\frac{t}{\sqrt{2\nu}}\right)$

$\varphi_Z(t) = e^{-\frac{it}{\sqrt{2\nu}} - \frac{t^2}{2}} = \left[\left(1 + \frac{2it}{\sqrt{2\nu}} - \frac{t^2}{\nu} + o(t^2)\right) \right]^{-\nu/2}$

$\times \left(1 - \frac{2it}{\sqrt{2\nu}}\right)^{-\nu/2}$

6-4-3

d'où $\varphi_Z(t) \sim \left[1 - \frac{t^2}{2} \right]^{-\nu/2}$

et $\varphi_Z(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$ quand $\nu \rightarrow \infty$

En conséquence, au seuil de confiance de 95%, si l'hypothèse d'équirépartition est vraie, on doit avoir

$$99 - 1.96\sqrt{198} \leq Q \leq 99 + 1.96\sqrt{1.98}$$

c'est à dire $71.4 \leq Q \leq 126.6$

1	102,0	11	87,8	21	96,6	31	97,5	41	112,0
2	101,6	12	124,9	22	101,7	32	84,1	42	106,0
3	107,3	13	92,2	23	107,0	33	102,1	43	125,4
4	108,0	14	80,5	24	100,5	34	83,3	44	109,1
5	80,1	15	110,8	25	115,3	35	101,3	45	91,7
6	119,6	16	109,3	26	119,3	36	106,6	46	103,5
7	104,2	17	120,6	27	91,9	37	82,4	47	73,3
8	98,7	18	83,8	28	110,5	38	74,6	48	113,1
9	92,3	19	85,5	29	134,7	39	110,4	49	90,8
10	98,8	20	101,4	30	96,8	40	88,9	50	94,6

Une seule valeur de Q sur 50 est en dehors de l'intervalle de confiance à 95%. L'hypothèse est donc valable jusqu'à plus ample information.

En effet, si les Q sont normalement distribués, il est légitime d'observer 2% des valeurs en dehors de l'intervalle à 95%.

Un autre test confirme ce résultat.

Testons l'hypothèse : les Q formant un 50 - échantillon extrait d'une loi normale de moyenne 99 de variance 198 -

Utilisons encore la méthode du χ^2 - $Z = 1,906$

A 3 degrés de liberté $\Pr[\chi^2 > \chi_0^2] = 0,95$ pour $\chi_0^2 = 7,815$

TESTS D'INDEPENDANCE.

L'hypothèse est donc acceptée.

Une condition nécessaire (non suffisante) pour que deux variables aléatoires soient indépendantes est que leur coefficient de corrélation soit nul.

a) Etudions l'indépendance des 10 premiers échantillons de 1.000 nombres de l'algorithme construit précédemment.

Les échantillons à 2 dimensions que l'on considère sont formés des couples $(x_i + k \times 1000, x_i' + k' \times 1000)$, $i = 1, 2, \dots, 1000$
 k et k' étant 2 entiers $0 \leq k < k' < 10$

Soit ρ' l'estimation du coefficient de corrélation ρ .

Soit la transformation $\Psi: \rho' \rightarrow Z' = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho'}{1-\rho'}$. Posons $Z = \Psi(\rho)$

Si la population à 2 dimensions est normale, on sait que $Z' - Z$ suit une loi normale centrée de variance voisine de $1/(n-3)$

Ici la population à 2 dimensions n'est pas normale mais tenant compte du fait que toute fonction des moments est asymptotiquement normale et que la transformation Ψ est normalisante, on considère que les résultats obtenus dans le cas de la normalité sont valables ici.

Au seuil de confiance de 95% $|Z' - Z| \leq 1.96 \sqrt{\frac{1}{997}}$

Donc si $\rho = 0$, ρ' doit être tel que $|\rho'| \leq 0.0599$

Aucun des 45 coefficients de corrélation (C_{10}^2) se trouvent en dehors de l'intervalle de confiance à 95%.

Le test est donc satisfaisant.

T E S T S

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.000	-0.021	0.015	0.014	0.029	0.010	-0.008	0.025	-0.002
	1	-0.014	0.017	0.037	0.030	0.018	0.019	0.022	0.024
		1	-0.017	0.004	0.002	0.035	0.050	0.023	0.037
			1	-0.020	0.003	-0.005	-0.030	-0.012	-0.011
				1	0.055	0.032	0.020	0.051	-0.007
					1	0.032	-0.022	0.003	-0.003
						1	0.011	0.013	0.023
							1	-0.043	0.023
								1	0.005
									1

b) On construit 4000 algorithmes de 10 nombres chacun.

Le n ème algorithme engendre les nombres $x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots, x_{10}^n$

Soit les variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10}$

dont les n èmes réalisations sont respectivement $x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots, x_{10}^n$
 On étudie l'indépendance des variables X_1, X_2, \dots, X_{10} dans 2 types d'algorithmes :

1er type : θ est initialisé à 0

2è type : θ est initialisé à 0,66203656

Si l'hypothèse $\rho = 0$ est vraie ρ' est tel que $|\rho'| < 0,03$ au seuil de 95%.

Dans le 1er cas, 19 ρ' sont en dehors de cet intervalle de confiance de plus $\rho'_{12}, \rho'_{23}, \rho'_{34}, \rho'_{45}$ sont supérieurs à 0,17 -

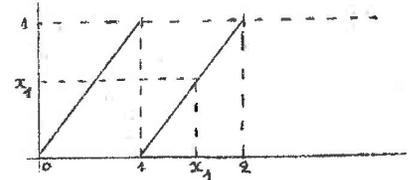
Il existe donc un lien.

Dans le 2e cas, 9 ρ' sont en dehors de l'intervalle de confiance aucun n' est en valeur absolue supérieur à 0,09.

Explication :

Si $\theta = 0$, il existe un lien fonctionnel simple entre les 5 premiers chiffres. en effet, la suite étant initialisée à x_1

$$\begin{aligned} x_2 &= k x_1 - [k x_1] \\ x_3 &= k x_2 - [k x_2] \\ x_4 &= k x_3 - [k x_3] \\ x_5 &= k x_4 - [k x_4] \\ \theta &= x_2 + x_5 \\ x_6 &= k x_5 + \theta - [k x_5 + \theta] \end{aligned}$$



Il apparaît que lorsque $\theta = 0$ le lien entre x_n et x_{n-1} est simple.

Dès que $\theta \neq 0$ le coefficient de corrélation est plus faible ($\rho'_{56} = -0.041$), le lien est moins visible.

$$N = 4000 \quad X_0 = 0.36404178$$

Triangle supérieur : $\theta = 0$ au départ.

Triangle inférieur : $\theta \neq 0$ au départ

ALGORITHME DE 10 NOMBRES.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0.201	0.054	0.025	0.022	0.018	0.023	-0.032	0.059	0.022
2	-0.078		0.253	0.009	-0.076	0.015	0.041	0.011	0.006	0.047
3	-0.040	-0.072		0.228	-0.003	-0.019	0.032	0.020	-0.009	-0.001
4	0.011	-0.033	-0.007		0.176	-0.010	0.010	-0.018	-0.013	-0.005
5	0.029	-0.009	-0.023	-0.036		-0.041	0.021	0.045	-0.012	0.001
6	0.003	-0.023	0.011	0.013	0.013		0.017	0.033	0.007	0.032
7	0.001	-0.001	0.012	-0.002	-0.006	0.019		-0.007	0.021	0.061
8	-0.015	0.005	-0.038	0.007	-0.013	0.004	-0.003		0.036	-0.009
9	0.001	0.011	-0.008	-0.000	0.000	-0.003	-0.012	0.005		-0.034
10	-0.020	0.001	0.037	0.021	-0.042	0.000	0.028	-0.003	0.004	

6-4-3

Dans le 2e cas où $\theta \neq 0$ au départ ρ'_{12} , ρ'_{23} , ρ'_{34} , ρ'_{45} sont négatifs et d'un ordre de grandeur supérieur aux autres.

Le lien existe donc encore, mais est beaucoup plus faible.

c) On construit un algorithme de 40.000 nombres.

Au départ $X_0 = 0,36404178 = 0,63085808$

L'hypothèse $\rho = 0$ est vraie si $|\rho'| < 0,03$

Un seul ρ' est en dehors de l'intervalle de confiance.

Il n'y a plus trace du lien constaté précédemment.

d) On construit un algorithme de 4 000 nombres,

Soit la variable X dont les valeurs sont $x_1, x_3, \dots, x_{2k+1}, \dots, x_{3999}$

Soit la variable Y dont les valeurs sont $x_2, x_4, \dots, x_{2k}, \dots, x_{4000}$

$X_0 = 0,36404178$ $\theta = 0,41207328$ On doit avoir $|\rho'| < 0,03$

$\rho' = 0,0146$, l'hypothèse $\rho = 0$ est donc acceptée.

e) Conclusion :

L'effet observé au b est atténué si on prend $\theta \neq 0$ au départ.

Il disparaît si l'on génère les nombres par grandes séries (au lieu de les générer 10 par 10), c'est donc un "effet de bord".

Si on part de $b \neq 0$ et si on génère une grande série de nombres, l'hypothèse d'indépendance peut être acceptée.

RECHERCHE DE LA PERIODE.

Avec $N = 4,0353607$, $x_0 = 0,81581963$, $\theta = 0,8354172$,

On a cherché si parmi les 100 000 premiers nombres on trouve un nombre qui diffère de x_0 de moins de 10^{-6} . On n'en a pas trouvé.

N = 4000

X₀ = 0.36404178

θ = 0.63085808

6-4 (5)

ALGORITHME DE 40 000 NOMBRES

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.014	0.005	-0.010	-0.0254	0.003	-0.002	0.013	0.011	-0.016
2		1	-0.006	-0.018	-0.019	0.009	-0.004	0.019	0.008	-0.015
3			1	-0.010	-0.004	0.009	-0.006	0.017	-0.006	-0.017
4				1	0.019	0.013	0.002	-0.004	0.001	-0.012
5					1	-0.003	-0.009	-0.005	-0.015	-0.000
6						1	-0.038	-0.008	-0.026	-0.023
7							1	-0.007	0.019	0.011
8								1	-0.016	0.016
9									1	0.004
10										1

6 - 5 - GENERATION D'UN ECHANTILLON SUIVANT UNE LOI DONNEE.

+ Principe.

Soit y : une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue quelconque, alors la variable aléatoire $X = F^{-1}(y)$ a F pour fonction de répartition.

Soit $0 < y_0 < 1$

$P[Y < y_0] = y_0$

F étant strictement croissante

Son inverse F^{-1} existe.

$P[X < F^{-1}(y_0)] = P[F^{-1}(Y) < F^{-1}(y_0)] = P[X < F^{-1}(y_0)]$

Donc

$P[X < F^{-1}(y_0)] = y_0$

Soit $x_0 = F^{-1}(y_0)$ on a donc $P[X < x_0] = F(x_0)$

6-5

Conséquence : On obtient un échantillon d'une variable aléatoire de fonction de répartition F , en prenant l'image réciproque par F d'un échantillon de valeurs équiréparties sur $[0, 1]$.

+ Applications :

Types de lois générées : Pour générer les durées de tâche on prend des lois d'étendue finie, unimodale, dissymétrique, comme les lois triangulaire et Bêta.

1/ Loi triangulaire :

Elle est déterminée par les paramètres a, m, b .

Sa densité est
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(m-a)} & \text{si } a \leq x \leq m \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(m-b)} & \text{si } m < x \leq b \end{cases}$$

Sa moyenne est $E X = \frac{a+m+b}{3}$

Sa variance $Var X = \frac{(b-a)^2 + (m-a)(m-b)}{18}$

Sa fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^2}{(b-a)(m-a)} & \text{si } a \leq x \leq m \\ 1 - \frac{(x-b)^2}{(b-a)(b-m)} & \text{si } m < x \leq b \end{cases}$$

F étant dans les 2 cas un polynôme du 2° degré.

La fonction inverse s'obtient aisément.

Soit $y \in [0, 1]$

Si $0 \leq y \leq \frac{m-a}{b-a}$ alors $x = a + \sqrt{y(b-a)(m-a)}$

Si $\frac{m-a}{b-a} < y \leq 1$ $x = b - \sqrt{(1-y)(b-a)(b-m)}$

2/ Loi Bêta.

La loi Bêta réduite a pour densité :

$$f(t) = \frac{t^\alpha (1-t)^\beta}{\beta(\alpha+1, \beta+1)} \quad 0 \leq t \leq 1$$

où $\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ avec $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

Une loi Bêta quelconque de valeur minimum et maximum A et B a pour densité

$$\varphi(u) = \frac{(u-A)^\alpha (B-u)^\beta}{(B-A)^{\alpha+\beta} \beta(\alpha+1, \beta+1)}$$

Elle se déduit de la loi réduite par la transformation $Y = \frac{A + (B-A)X}{B-A}$

Dans le PERT on choisit $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ et $\beta = 2 - \sqrt{2}$

La moyenne de la loi réduite est $\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$ soit $\frac{3+\sqrt{2}}{6}$

La variance est $\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)^2} = \frac{1}{36}$

La moyenne de la loi quelconque est $A + (B-A) \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{2}$

Sa variance est : $\left[\frac{(B-A)}{6} \right]^2$

Dans le PERT, on prend l'habitude comme moyenne $\frac{A+4M+B}{6}$

Mais c'est une approximation car le mode M est déterminé quand A et B le sont, (le mode de la loi réduite est égal à $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$). $f(t)$ n'étant pas un polynôme, la fonction de répartition ne s'exprime pas simplement.

Pour inverser facilement la fonction de répartition on a cherché une approximation polynomiale.

L'expression de l'inverse de la fonction de répartition de la loi réduite donnée dans [13] est la suivante :

Soit $0 \leq y \leq 1$

Si $y \leq 0.2825$ $x = \frac{(y)^{1/4}}{1.61}$

Si $0.2825 < y < 0.47$ $x = \frac{y}{1.875} + 0.4993$

Si $0.47 < y \leq 0.95$ $x = y \times 0.425 + 0.55025$

Si $y > 0.95$ $x = 1 - \frac{\sqrt{1-y}}{3.3}$

L'erreur commise sur x est en valeur absolue au plus égale à 0.005

La moyenne et la variance de cette loi Bêta réduite approchée ne sont pas rigoureusement égales à $\frac{3+\sqrt{2}}{6} = 0.7357$ d'une part

et à $\frac{1}{36} = 0.0277$ d'autre part.

Les intervalles de confiance à 95% de la moyenne et de la variance calculés sur un échantillon de taille 40 000 sont:

$$0.7299 \leq m \leq 0.7331 \quad ; \quad 0.02670 \leq \sigma^2 \leq 0.02745$$

Donc quand on comparera les résultats de la simulation et de la méthode

PERT, on prendra pour moyenne et variance de la loi Bêta réduite les estimations ponctuelles $\hat{m} = 0.7315$; $\hat{\sigma}^2 = 0.027075$

3/ Loi normale.

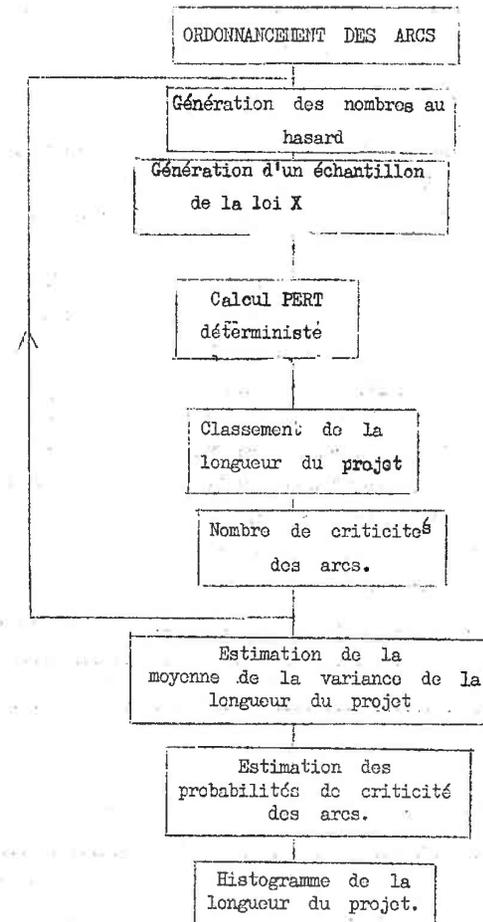
La longueur d'un chemin, sous réserve que les arcs soient en nombre suffisant et que leurs longueurs soient mutuellement indépendantes suit une loi normale.

On aura donc besoin de générer des échantillons extraits de la loi normale.

On utilisera une procédure d'inversion de la fonction de répartition de la loi normale faite à Grenoble. (cf Procédures ALGOL CNRS p.316)

6 - 6 - MISE AU POINT SUR ORDINATEUR.

ORGANIGRAMME



Comme la structure du graphe ne change pas, on fait une fois pour toutes l'ordonnement des arcs par la méthode des niveaux ou de la pile (cf 4-5) On génère des suites de 10.000 nombres au hasard par tranches dont on fixe la taille en fonction de la capacité de la mémoire centrale. Quand les nombres d'une tranche sont épuisés, on génère une nouvelle tranche. La génération des échantillons de la donnée se fait par procédures interchangeables

Un lien de dépendance entre les durées de certaines tâches peut être établi.

Le calcul PERT est réduit au minimum :

Le calcul du calendrier au plus tôt suffit pour connaître, à chaque réalisation, la longueur du projet et le chemin critique que l'on détermine par la méthode décrite en 4-6-4.

Le calcul du calendrier au plus tard et des marges est supprimé. On retiendra en mémoire la longueur du projet de façon à estimer sa moyenne, sa variance et à construire son histogramme.

On pourrait de la même façon mémoriser les dates d'étapes importantes du projet et en faire au besoin les histogrammes.

Si on voulait retenir le nombre de réalisations où un chemin est critique, il faudrait mémoriser les numéros des sommets de chaque chemin. Ce qui tiendrait trop de place. On retiendra le nombre de réalisations où un arc est critique.

Les résultats du calcul sont les suivants :

- dates moyennes au plus tôt des dates début et fin de chaque arc,
- probabilité de criticité de chaque arc et intervalle de confiance,
- moyenne, variance et intervalle de confiance de la longueur du projet,
- histogramme de la longueur du projet.

Conclusion : L'énorme défaut de la méthode de simulation est la longueur des calculs.

DURÉE DE 1.000 SIMULATIONS D'UN ARC. (en minutes).

Loi	C A E 510	I B H 1620
Bêta	0,57	
Triangulaire	0,61	1,46
Uniforme	0,46	0,66
Normale	1,50	

10.000 simulations d'un graphe de 100 arcs en loi triangulaire sur CAE 510 dureront 6 heures 10 minutes.

Bien que les ordinateurs récents soient de 30 à 50 fois plus rapides, la simulation reste un moyen coûteux.

Par ailleurs la place occupée en mémoire centrale est très importante. Comme il ne pourrait être question de faire une lecture sur périphérique à chaque réalisation d'échantillon, on est contraint de conserver toutes les données en mémoires centrales. Comme on a à ranger 3 tableaux de durée au lieu d'un et un tableau de nombres au hasard, on occupe beaucoup plus de place que dans le calcul PERT déterministe.

En conclusion, la simulation a l'avantage de nous donner toutes les informations que l'on attend sur le projet et c'est une méthode précise. Nous l'utiliserons dans 2 buts :

- D'une part étudier la criticité des chemins et la distribution de la longueur du projet.
- D'autre part tester des méthodes moins onéreuses comme la méthode PERT aléatoire ou une méthode plus élaborée que nous mettrons au point.

ETUDE DE LA CRITICITE

7 - 1 - BUT DE L'ETUDE.

On veut étudier de quoi dépend la probabilité de criticité d'un chemin ou d'un arc.

Peut-on exprimer strictement cette probabilité ?

Sinon, peut-on comparer la criticité de deux chemins et préciser si un chemin est peu ou très critique.

La méthode de recherche que l'on utilisera sera inductive. A partir d'exemples simples où le calcul strict peut aboutir et à partir d'exemples obtenus par simulation, on essaiera d'expliquer le cas général.

7 - 2 - TEST DE COMPARAISON DES PROBABILITES DE CRITICITE.

Soient f_i et f_j les fréquences de criticité des chemins i et j , P_i et P_j les probabilités correspondantes.

Si au bout de N expériences on constate que $f_i > f_j$, peut on conclure que $P_i > P_j$?

Quand N est grand f_i et f_j suivent des lois normales.

Ces lois ne sont pas indépendantes car $\sum_{i=1}^n f_i = 1$ n étant le nombre de chemins du graphe.

Etudions ce lieu de dépendance :

Calcul de COV (f_i , f_j)

Soit K_i le nombre de réalisations où le chemin i est critique en N expériences. K_i suit une loi binômiale de moyenne $N P_i$, de variance $N P_i (1 - P_i)$.

Dans leur ensemble les variables K_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (n : nombre de chemins du graphe), suivent une loi multinômiale :

$$P_i [K_1 = k_1, K_2 = k_2, \dots, K_n = k_n] = \frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_n!} P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_n^{k_n}$$

$$\text{avec } N = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

Déterminons la loi marginale en K_1 et K_2 . On l'obtient en remarquant que c'est une loi multinômiale de variables $K_1, K_2, K-N-K_1-K_2$

$$P_r [K_1 = k_1, K_2 = k_2, K = N - k_1 - k_2] = \frac{N!}{k_1! k_2! (N - k_1 - k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} (1 - p_1 - p_2)^{N - k_1 - k_2}$$

Cette formule s'étend à la loi marginale de K_i et K_j $1 \leq i < j \leq n$

Déterminons le moment du 2e ordre $m_{ij} = \frac{1}{i} \dots \frac{1}{j} \dots$ que nous écrirons m_{ij}

$$m_{ij} = \sum_{k_i, k_j} k_i k_j \frac{N!}{k_i! k_j! (N - k_i - k_j)!} p_i^{k_i} p_j^{k_j} (1 - p_i - p_j)^{N - k_i - k_j}$$

$$= \sum_{k_i=1}^N \frac{k_i}{k_i!} p_i^{k_i} \sum_{k_j=1}^{N-k_i} k_j \frac{N!}{k_j! (N - k_i - k_j)!} p_j^{k_j}$$

$$\times (1 - p_i - p_j)^{N - k_i - k_j}$$

$$A = \frac{N! p_j}{(N - k_i - 1)!} \sum_{k_j=1}^{N - k_i} \frac{(N - k_i - 1)!}{(k_j - 1)! (N - k_i - k_j)!}$$

$$\times p_j^{k_j - 1} (1 - p_i - p_j)^{N - k_i - k_j}$$

$$A = \frac{N! p_i}{(N - k_i - 1)!} (1 - p_i)^{N - k_i - 1}$$

$$m_{ij} = \sum_{k_i=1}^N \frac{k_i}{k_i!} \frac{N! p_i}{(N - k_i - 1)!} p_i^{k_i} (1 - p_i)^{N - k_i - 1}$$

$$= N(N-1) p_i p_j \sum_{k_i=1}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(k_i - 1)! (N - k_i - 1)!}$$

$$\times p_i^{k_i - 1} (1 - p_i)^{N - k_i - 1}$$

$$m_{ij} = N(N-1) p_i p_j$$

Le moment centré correspondant est $\text{COV}(K_i, K_j)$

$$\text{COV}(K_i, K_j) = E(K_i K_j) - E(K_i) E(K_j)$$

$$= N(N-1) p_i p_j - N p_i - N p_j$$

$$\text{COV}(K_i, K_j) = -N p_i p_j$$

On en déduit $\text{COV}(f_i, f_j)$

$$f_i = \frac{K_i}{N} \quad f_j = \frac{K_j}{N}$$

$$\text{COV}(f_i, f_j) = \frac{N(N-1)}{N^2} p_i p_j - p_i p_j$$

$$\text{COV}(f_i, f_j) = -\frac{p_i p_j}{N}$$

Quand N est grand la loi marginale de f_i et f_j tend asymptotiquement vers une loi normale. Comme toute combinaison linéaire de variables normales est normale, la variable $f_i - f_j$ est normalement distribuée

$$E(f_i - f_j) = p_i - p_j$$

$$\text{Var}(f_i - f_j) = \text{Var} f_i - 2 \text{COV}(f_i, f_j) + \text{Var} f_j$$

$$= p_i \frac{(1 - p_i)}{N} + 2 \frac{p_i p_j}{N} + p_j \frac{(1 - p_j)}{N}$$

$$\text{Var}(f_i - f_j) = \frac{p_i + p_j - (p_i - p_j)^2}{N}$$

$f_i - f_j$ suit donc pour N assez grand une loi normale de moyenne $p_i - p_j$ d'écart type $\sqrt{\frac{p_i + p_j - (p_i - p_j)^2}{N}}$

Si l'on veut tester l'hypothèse $p_i = p_j$ contre l'alternative $p_i > p_j$ $f_i - f_j$ doit suivre une loi normale de moyenne nulle d'écart type

$$\sqrt{\frac{2 p_i}{N}} \quad \text{Donc } u = \frac{f_i - f_j}{\sqrt{\frac{2 p_i}{N}}} \text{ suit une loi normale centrée réduite.}$$

Pour N assez grand $2 p_i \approx p_i + p_j$

Soit un risque α correspondant à la probabilité de rejeter l'hypothèse

$p_i = p_j$ alors qu'elle est juste

Soit $u_{1-\alpha}$ tel que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_{1-\alpha}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \alpha$

Si $u = \frac{f_i - f_j}{\sqrt{\frac{p_i + p_j}{N}}} > u_{1-\alpha}$ l'hypothèse $p_i = p_j$ est rejetée

Si $u < u_{1-\alpha}$ l'hypothèse $p_i = p_j$ sera acceptée comme hypothèse de travail.

Puissance du test.

Soit ξ la moyenne de la variable aléatoire $f_i - f_j$ - on ne la connaît pas.

Si l'on teste l'hypothèse $\xi = \xi_0 = 0$ contre l'alternative

$\xi = \xi_1 > \xi_0$ cela revient à tester l'hypothèse $f_i = f_j$ contre l'alternative $f_i > f_j$.

La puissance du test est égale à la probabilité que u soit dans la région de rejet quand $\xi \neq \xi_0$, donc quand : $\xi = \xi_1$ - Appelons la $\Pi(\xi_1)$

$$t = \frac{f_i - f_j}{\sqrt{\frac{f_i + f_j - (f_i - f_j)^2}{N}}}$$

$$\Pi(\xi_1) = P_r [t > u_{1-\alpha} / \xi = \xi_1]$$

Posons $\lambda_1 = \frac{\xi_1}{\sqrt{\frac{f_i + f_j - (f_i - f_j)^2}{N}}}$

$$\Pi(\xi_1) = P_r [v + \lambda_1 > u_{1-\alpha}]$$

où $v = \frac{(f_i - f_j) - \xi_1}{\sqrt{\frac{f_i + f_j - (f_i - f_j)^2}{N}}}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ car $\xi = \xi_1$

$$\Pi(\xi_1) = P_r [v > u_{1-\alpha} - \lambda_1]$$

$$= \Phi(u_{1-\alpha} + \lambda_1) = \int_{-\infty}^{u_{1-\alpha} + \lambda_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Comme N est grand $\lambda_1 \approx \frac{\xi_1}{\sqrt{\frac{f_i + f_j - (f_i - f_j)^2}{N}}}$

La puissance du test est une fonction croissante de N et de ξ_1 .

Exemple : Soit à comparer 2 fréquences f_1 et f_2 telle que $f_1 + f_2 = 1$

La différence $f_1 - f_2$ étant petite son carré est négligeable.

$$\lambda_1 \approx \frac{\xi_1}{\sqrt{\frac{f_1}{N}}}$$

Les 100 résultats suivants montrent que si $\xi_1 = 3/100$

- avec 100 expériences $\Pi(\xi_1) = 0,1$, c'est à dire que l'on a 90 chances sur 100 de se tromper,

- avec 10.000 expériences $\Pi(\xi_1) = 0,996$, on a pratiquement aucune chance de se tromper.

Si nous voulons donc tirer des conclusions certaines, il faudra faire un nombre d'expériences de l'ordre de 10.000.

ξ_1	0.5/100	1/100	2/100	3/100	4/100	5/100	9/100
100	0.056	0.06	0.08	0.09	0.11	0.13	0.23
5.000	0.10	0.174	0.41	0.68	0.88	0.975	0.99
10.000	0.444	0.74	0.95	0.996	0.999	0.999	0.999

Puissance du test : cas de 2 fréquences telles que $f_i + f_j = 1$

7-3 - CALCUL STRICT DE LA PROBABILITE DE CRITICITE.

Le procédé de simulation étant coûteux, on se demande s'il est possible de donner une expression mathématique à la probabilité de criticité d'un chemin d'un graphe.

On ne peut l'obtenir que dans des cas très simples.

7-3-1 - CAS DE 2 CHEMINS.

Soit un graphe formé de 2 chemins dont les longueurs X_1 et X_2 sont distribués respectivement suivant les lois $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ non indépendantes.

La probabilité de criticité du chemin 1 sera $P_1 = P_r[X_2 < X_1]$

Si $Z = X_2 - X_1$ $E Z = \mu_2 - \mu_1 = m$

$$\text{Var } Z = \text{Var } X_1 + \text{Var } X_2 - 2 \text{Cov}(X_1, X_2) = a^2$$

où $a^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$

Supposons que la variable (X_1, X_2) suive une loi normale à 2 dimensions. Comme toute combinaison linéaire de lois normales est aussi normale, Z est normale.

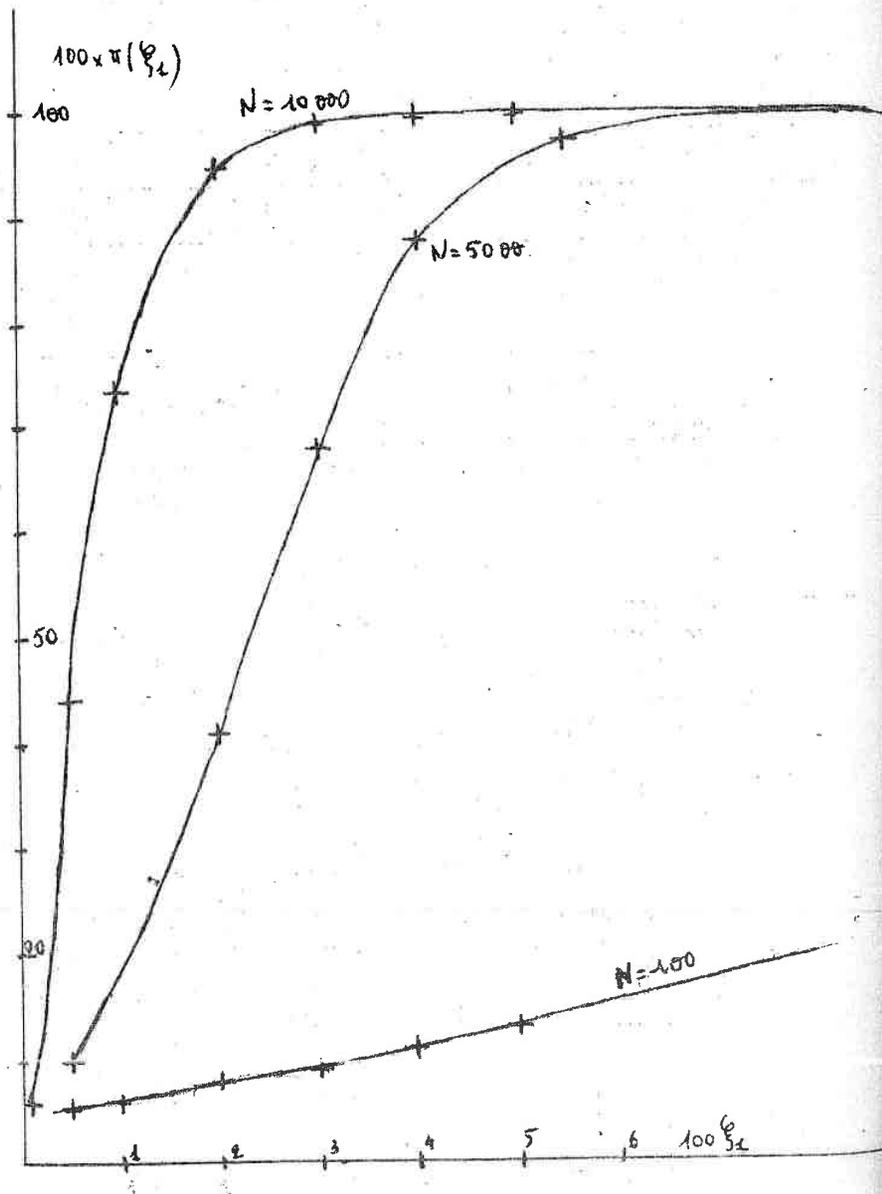
Soit $z = \frac{Z - m}{a}$ Z suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$Z = z a + m$$

$$P_1 = P_r [Z < 0] = P_r [z < -\frac{m}{a}]$$

Posant $\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2}{a}$

Puissance du test



7-3-I (2)

$$P_1 = P_r [X_2 < X_1] = \Phi(\alpha)$$

$$\text{où } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt$$

7-3-2 - CAS DE 3 CHEMINS.

Soit un graphe formé de 3 chemins de longueurs $X_1 \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ $X_3 \mathcal{N}(\mu_3, \sigma_3^2)$ corrélés. Supposons que (X_1, X_2, X_3) suive une loi normale. Soit $X'_1 = X_1 - \mu_1$, $X'_2 = X_2 - \mu_2$, $X'_3 = X_3 - \mu_3$

$$\begin{aligned} \text{Calculons } p &= P_r [X_1 > \text{Max}(X_2, X_3)] = P_r [X_1 > X_2, X_1 > X_3] \\ &= P_r [X'_1 - X'_2 > \mu_2 - \mu_1, X'_1 - X'_3 > \mu_3 - \mu_1] \\ &= P_r [\bar{Z}_2 > m_2, \bar{Z}_3 > m_3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où } m_2 &= \mu_2 - \mu_1 \\ m_3 &= \mu_3 - \mu_1 \end{aligned}$$

$$\bar{Z}_2 = X'_1 - X'_2 \mathcal{N}(0, s_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \text{COV}(X_1, X_2)})$$

$$\bar{Z}_3 = X'_1 - X'_3 \mathcal{N}(0, s_3 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2 \text{COV}(X_1, X_3)})$$

Cherchons la corrélation entre \bar{Z}_2 et \bar{Z}_3

$$\text{COV}(\bar{Z}_2, \bar{Z}_3) = E(X'_1 - X'_2)(X'_1 - X'_3) - E(X'_1 - X'_2) \times E(X'_1 - X'_3)$$

$$\text{COV}(\bar{Z}_2, \bar{Z}_3) = \text{Var } X_1 - \text{COV}(X_1, X_3) - \text{COV}(X_1, X_2) + \text{COV}(X_3, X_2)$$

$\text{COV}(\bar{Z}_2, \bar{Z}_3)$ peut être positive ou négative.

$$P = \int_{m_3}^{+\infty} \left[\int_{m_2}^{+\infty} f(z_2, z_3) dz_2 \right] dz_3$$

$$f(z_2, z_3) = \frac{1}{2\pi s_2 s_3 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{z_2}{s_2}\right)^2 - 2\rho \frac{z_2}{s_2} \frac{z_3}{s_3} + \left(\frac{z_3}{s_3}\right)^2\right]$$

$$\text{où } \rho = \frac{\text{COV}(\bar{Z}_2, \bar{Z}_3)}{s_2 s_3}$$

7-3-2

$$f(z_2, z_3) = \frac{1}{2\pi s_2 s_3 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{z_2}{s_2} - \rho \frac{z_3}{s_3}\right)^2\right] \times \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_3}{s_3}\right)^2\right]$$

$$p = \frac{1}{k} \int_{m_3}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_3}{s_3}\right)^2\right] \times I dz_3 \quad \text{ou } I = \int_{m_2}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{z_2}{s_2} - \rho \frac{z_3}{s_3}\right)^2\right] dz_2$$

$$\text{soit } u = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{z_2}{s_2} - \rho \frac{z_3}{s_3}\right), \quad du = \frac{dz_2}{s_2 \sqrt{1-\rho^2}}$$

$$I = s_2 \sqrt{1-\rho^2} \times \sqrt{2\pi} \left[1 - \Phi\left[\left(\frac{m_2}{s_2} - \rho \frac{z_3}{s_3}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] \right]$$

$$\text{avec } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt; \quad \text{d'où:}$$

$$p = \frac{s_2 \sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}}{2\pi s_2 s_3 \sqrt{1-\rho^2}} \int_{m_3}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z_3}{s_3}\right)^2\right] \left\{ 1 - \Phi\left[\left(\frac{m_2}{s_2} - \rho \frac{z_3}{s_3}\right) \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] \right\} dz_3$$

$$\text{soit } v = \frac{z_3}{s_3} \quad dv = \frac{dz_3}{s_3}$$

$$p = \int_{m_3/s_3}^{+\infty} \varphi(v) \left\{ 1 - \Phi\left[\left(\frac{m_2}{s_2} - \rho v\right) \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] \right\} dv \quad \text{avec } \varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

$$\text{d'où } p = 1 - \Phi(R_3) - q$$

$$\text{ou } q = \int_{R_3}^{+\infty} \varphi(v) \Phi\left[\frac{R_2 - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] dv$$

$$\text{avec } R_2 = \frac{m_2}{s_2}, \quad R_3 = \frac{m_3}{s_3}$$

Pour calculer q on essaie de dériver sous le signe \int par rapport à k_2 ou ρ de façon à changer Φ en φ .

C'est la dérivation par rapport à ρ qui s'avère la plus intéressante.

$$q = \int_{R_3}^{+\infty} g(\rho, v) dv$$

$$g'_\rho(\rho, v) = \frac{1}{(1-\rho^2)^{3/2}} \varphi(v) \varphi\left(\frac{R_2 - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) (\rho R_2 - v)$$

$g'_\rho(\rho, v)$ est de la forme $f(\rho) e^{-\frac{v^2}{2}} \frac{1}{1-\rho^2} - g(\rho) v e^{-\frac{v^2}{2}} \frac{1}{1-\rho^2}$
fonction qui est dominée par une fonction du type $\frac{R(\rho)}{v^3}$

intégrale sur $[1, +\infty[$.

on peut en déduire que l'intégrale $\int_{R_3}^{+\infty} g'_\rho(\rho, v) dv$ converge uniformément par rapport à ρ .

ρ étant une probabilité q est une intégrale convergente, la dérivation sous le signe \int est donc justifiée.

$$q'_\rho = \frac{1}{(1-\rho^2)^{3/2}} \int_{R_3}^{+\infty} \varphi(v) \varphi\left(\frac{R_2 - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) (\rho R_2 - v) dv$$

Cherchons un changement de variable dans lequel le produit des 2 exponentielles φ s'exprime à l'aide d'une seule exponentielle φ fonction de v .

$$\varphi(v) \varphi\left(\frac{R_2 - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} Q^2\right)$$

$$Q^2 = v^2 + \left(\frac{R_2 - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2 = \left(\frac{v - \rho R_2}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2 + R_2^2$$

faisons le changement $u = \frac{v - \rho R_2}{\sqrt{1-\rho^2}}$ d'où $dv = du \sqrt{1-\rho^2}$

$$q'_\rho = -\frac{\varphi(R_2)}{(1-\rho^2)^{3/2}} \int_{\frac{R_3 - \rho R_2}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{+\infty} \varphi(u) u (1-\rho^2) du$$

$$q'_\rho = -\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \varphi(R_2) \varphi\left(\frac{R_3 - \rho R_2}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

D'après la définition de $q(P)$

$$q(0) = \left[\int_{R_3}^{+\infty} \varphi(v) dv \right] \times \Phi(R_2) = [1 - \Phi(R_3)] \Phi(R_2)$$

$$\int_0^P q'(x) dx = q(P) - q(0) \quad ; \quad \text{d'où :}$$

$$q(P) = [1 - \Phi(R_3)] \Phi(R_2) + \int_0^P q'(x) dx$$

$$p = [1 - \Phi(R_2)] [1 - \Phi(R_3)] + \varphi(R_2) \int_0^P \frac{\varphi\left(\frac{R_3 - xR_2}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

L'intégrale en x ne peut se calculer strictement.

Pour k_2 et k_3 petits on peut développer la fonction sous le signe \int en série entière et intégrer terme à terme.

CAS DE 3 CHEMINS DE LONGUEURS MOYENNES EGALES.

Dans le cas $k_2 = k_3 = 0$

$$p = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^P \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arc sin } p$$

p est la probabilité de criticité du chemin 1. On obtient les autres de façon analogue.

En 7-4-2 - on remarque que les résultats de la simulation concordent avec cette formule. L'hypothèse : (X_1, X_2, X_3) suit une loi normale est donc justifiée.

3-3 - CAS DE n CHEMINS.

Le calcul devient inextricable.

Comme les événements $X_1 > X_2, X_1 > X_3, \dots, X_1 > X_n$ ne sont pas indépendants on ne peut calculer $\Pr[X_1 > \text{Max}(X_2, \dots, X_n)]$ à l'aide de $\Pr(X_1 > X_2), \dots, \Pr[X_1 > X_n]$.

On en est réduit à utiliser des approximations qui seront suggérées par les chapitres suivants. (cf 9)

7-4 - LA NOTION PERT DE CHEMIN CRITIQUE EST ERRONEE.

Vérifions d'abord si l'hypothèse d'unicité du chemin critique de la méthode PERT est fondée. Ce chemin critique est un chemin suffisamment plus long que les autres, ce que nous traduirons par chemin presque toujours critique. Donc dans tout graphe PERT il devrait exister un chemin par rapport auquel les autres chemins sont de probabilité de criticité négligeable.

Soit le graphe suivant dont on a fait 10.000 simulations en loi triangulaire.

Chemins	Moy	Var	100 x freq	Erreur à 95%
1 . 2 . 4 . 6	13	1.332	43.03	0.97
1 . 2 . 6	12.67	2.221	25.38	0.85
1 . 3 . 5 . 6	12.33	1.055	15.44	0.70
1 . 3 . 6	12	1.984	16.15	0.72

D'après la méthode PERT le chemin critique est (1 . 2 . 4 . 6), c'est bien le chemin de criticité maximum. Mais il est plus long que les autres dans 43 % seulement des cas. (1 . 2 . 6) l'est dans 25 % des cas ce qui ne peut être négligé. (1 . 3 . 5 . 6) et (1 . 3 . 6) sont faiblement critiques l'un et l'autre.

Mais si on les considère dans leur ensemble, leur criticité dépasse 31 % ce qui n'est plus négligeable.

L'hypothèse d'unicité du chemin critique est donc fautive en général.

Il suffit d'étudier un graphe formé de chemins de longueur moyenne voisine pour le constater.

7-5 - FACTEURS INFLUENTS SUR LA CRITICITE DES CHEMINS.

L'hypothèse d'un chemin suffisamment plus long que les autres n'étant vérifiée que dans des cas particuliers, on pourrait élargir le domaine de validité du PERT en tenant compte qu'il existe plusieurs chemins critiques ; on supposerait que leur probabilité de criticité est fonction croissante de leur longueur moyenne.

L'analyse qui suit montre que cette dernière hypothèse est fautive en général.

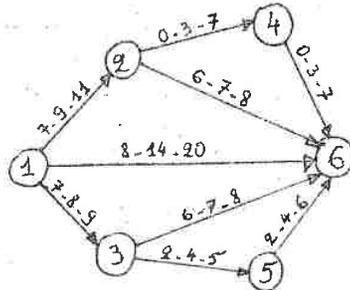
7-5-1 - LIEN ENTRE LA LONGUEUR MOYENNE ET LA PROBABILITE DE CRITICITE D'UN CHEMIN.

Nous l'étudierons expérimentalement par simulation.

Soit le graphe suivant :

Les longueurs des arcs suivent des lois triangulaires dont les paramètres sont indiqués sur l'arc.

La simulation comporte 10 000 réalisations.



Numéros	Chemins	Moyenne	Variance	Freq 100	Erreur à 95%
1	1, 2, 6	16	0,82	26,35	0,86
2	1, 2, 4, 6	15,66	4,76	32,92	0,92
3	1, 3, 5, 6	15,66	0,90	23,49	0,83
4	1, 3, 6	15	0,32	2,80	0,32
5	1, 6	14	6	14,44	0,69

On constate que la probabilité de criticité n'est pas une fonction croissante de la longueur moyenne : ici le chemin en moyenne le plus long (le chemin E-critique), (1, 2, 6) n'est pas le plus critique. L'hypothèse avancée plus haut est mise en défaut. La forte variance des chemins (1, 6) et (1, 2, 4, 6) paraît être la cause de leur forte criticité.

7-5-2 - INFLUENCE DE LA VARIANCE SUR LA PROBABILITE DE CRITICITE.

Soit un graphe formé de n chemins de longueurs suivant des lois normales et indépendantes.

Supposons que ces chemins aient des longueurs égales en moyenne et de variances différentes.

Vérifions si leur probabilité de criticité dépend de leur variance.

Si n = 2.

Nous pouvons utiliser la formule précédemment on 3-1.

$$p_1 = \Pr(X_2 < X_1) = \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \text{ puisque } \alpha = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma} = 0$$

La probabilité de criticité de chacun des 2 chemins est 1/2.

Les variances n'ont donc aucune influence.

Si n = 3

Soit un graphe formé de 3 chemins de longueurs:

$$X_1 \mathcal{N}(10, 1), X_2 \mathcal{N}(10, 10), X_3 \mathcal{N}(10, 5)$$

10.000 simulations donnent les résultats suivants.

Chemin	Moyenne	Ecart type	100 x freq	Erreur d'estime à 95%	100 x p (calcul strict)
1	10	1	25,68	0,85	25,31
2	10	10	42,15	0,97	42,50
3	10	5	32,17	0,91	32,25

Utilisons le test vu on 2-2-

Fixons le seuil d'incertitude à 5%, $u_{1-\alpha} = 1.64$

Hypothèse	Alternative	u ($u_{1-\alpha} = 1.64$)	Conclusion
$p_2 = p_1$	$p_2 > p_1$	20	$p_2 > p_1$
$p_1 = p_3$	$p_3 > p_1$	9	$p_3 > p_1$
$p_3 = p_2$	$p_2 > p_3$	12	$p_2 < p_3$

Donc $p_1 < p_3 < p_2$

Si on se reporte à l'étude de la puissance du test on peut considérer qu'avec 10.000 simulations ce résultat est sûr.

On a donc $\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$ et $p_1 < p_3 < p_2$

Si un graphe est formé de 3 chemins indépendants de longueurs moyennes égales, la probabilité de criticité est une fonction croissante de l'écart type.

Ce résultat se retrouve d'ailleurs théoriquement.

Nous avons montré précédemment que si un graphe est formé de 3 chemins dépendants de longueurs moyennes égales, leurs probabilités de criticité sont :

$$p_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arc sin } p_1$$

$$\text{avec } p_1 = \frac{1}{s_2 s_3} [\sigma_1^2 - \text{cov}(X_1, X_2) - \text{Cov}(X_1, X_3) + \text{Cov}(X_2, X_3)]$$

$$s_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\text{cov}(X_1, X_2)$$

$$s_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\text{cov}(X_1, X_3)$$

et de même pour p_2 et p_3

Comme ici les chemins sont de longueurs indépendantes :

$$p_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_1^2 + \sigma_3^2)}}; p_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_2^2 + \sigma_1^2)(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}}; p_3 = \frac{\sigma_3^2}{\sqrt{(\sigma_3^2 + \sigma_1^2)(\sigma_3^2 + \sigma_2^2)}}$$

Supposons que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\sigma_1^4}}}; p_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \frac{\sigma_3^2}{\sigma_2^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{\sigma_2^4}}}; p_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_3^2} + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_3^4}}}$$

Comparons p_1 et p_2

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \quad (\text{puisque } \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1)$$

$$\frac{\sigma_3^2}{\sigma_1^2} > \frac{\sigma_3^2}{\sigma_2^2} \quad \text{car } \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

$$\frac{\sigma_2^2 \sigma_3^2}{\sigma_1^4} > \frac{\sigma_1^2 \sigma_3^2}{\sigma_2^4} > \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_2^4}$$

Donc $p_1 < p_2$

De même $p_2 < p_3$

Comme $x \rightarrow \text{Arc sin } x$ est une fonction croissante.

sur $[-1, +1]$ on obtient $p_1 < p_2 < p_3$.

Si $n > 3$ -

Comme nous ne possédons pas de formule stricte nous procédons par simulation.

Soit un graphe formé de 5 chemins de longueur voisine suivant des lois normales indépendantes. On en fait 10.000 simulations.

Chemins	Moyenne	Ecart type	Freq x 100
1	10	10	34.36
2	10	7	28.35
3	10	5	21.60
4	10.05	1	8.24
5	10	1	7.45

Appliquons le test à droite utilisé précédemment ($\alpha = 5\%$)

Test	$u_{1-\alpha} = 1.64$	Hypothèse retenue.
p_1, p_2	7.5	$p_1 > p_2$
p_2, p_3	9.7	$p_2 > p_3$
p_3, p_4	26	$p_3 > p_4$
p_4, p_5	1.99	$p_4 > p_5$

On constate que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_4 = \sigma_5$ implique

$$p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > p_5$$

Le chemin 4 est légèrement plus long en moyenne que les autres mais en raison de son faible écart type ce n'est pas le chemin le plus critique.

Etudions graphiquement l'allure du lien entre la variance et la probabilité de criticité.

Soit un graphe de 10 chemins de longueurs moyennes égales à 20 suivant des lois triangulaires.

Résultats de 2.000 simulations :

Chemin	Variance	Freq x 100	Erreur à 95%
1	0.166	0.45	0.3
2	0.666	1.55	0.5
3	1.500	2.30	0.6
4	2.666	3.75	0.8
5	4.166	8.20	1.2
6	6.	11.75	1.4
7	8.166	13.45	1.5
8	10.666	16.40	1.6
9	13.5	19.90	1.7
10	16.666	22.25	1.8

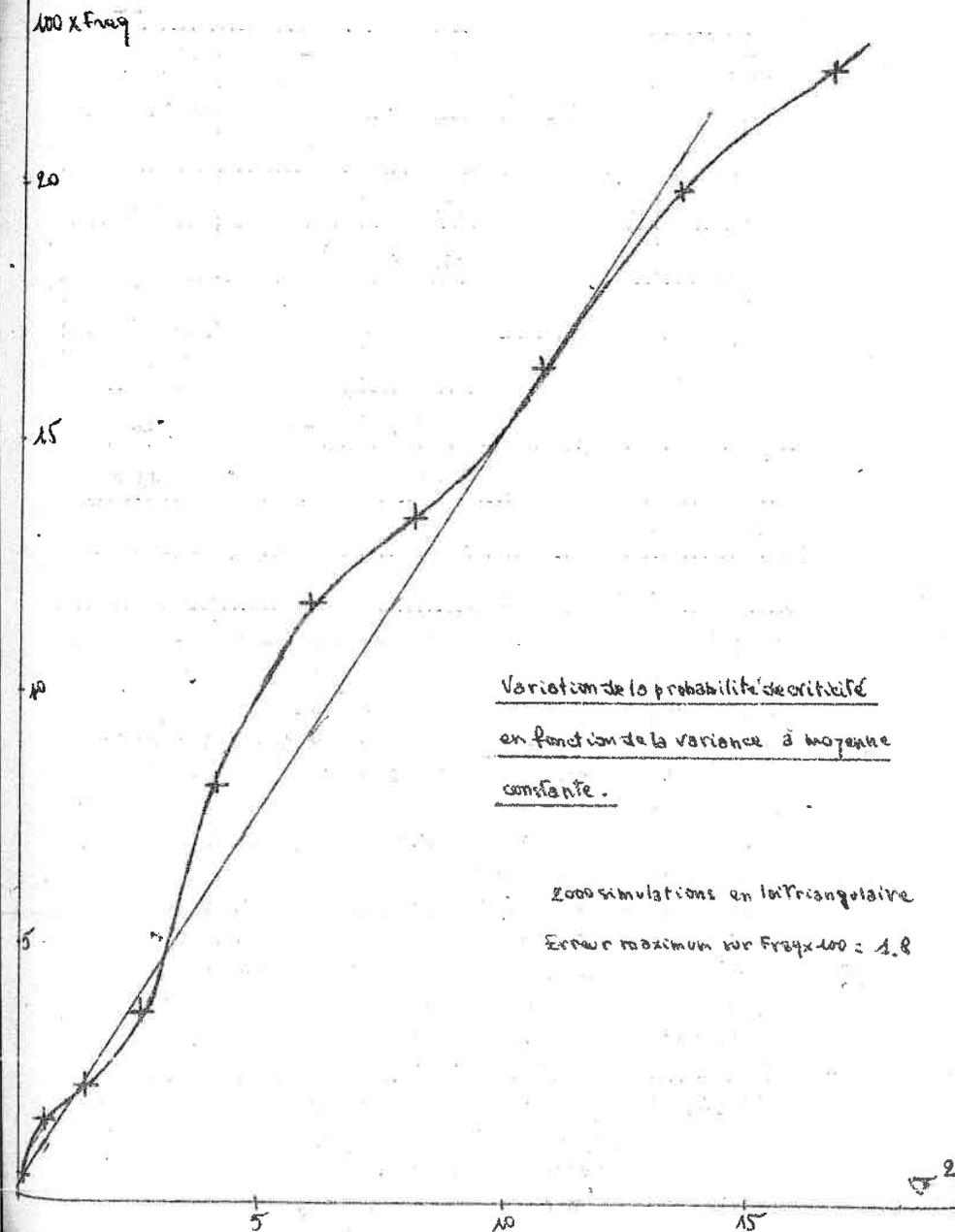
Le lien est très grossièrement linéaire (mais il faut tenir compte des erreurs d'estimation qui vont jusqu'à ± 1.8). Plus précisément la courbe oscille autour d'une droite avec une amplitude qui croît avec la variance.

Influence du nombre de chemins indépendants sur l'effet des variances.

Soit plusieurs graphes formés de chemins indépendants suivant des lois normales. Chaque graphe comporte les chemins de longueurs $X_1 \mathcal{N}(20, \sigma = 2)$, $X_2 \mathcal{N}(19, \sigma = 3)$ et un nombre variable d'autres chemins de longueur voisins de 20.

X_1 et X_2 étant de moyenne voisine et d'écart type différent, l'effet de variance décrit précédemment va apparaître.

Etudions si le nombre de chemins du graphe exerce une influence sur cet effet.



Nombre de chemins.	$P_1 \times 100$	$P_2 \times 100$	$P_1 - P_2 \times 100$	$200 \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}$
3	46.2	34	12.2	35
4	24.8	20.1	4.7	20.8
5	18.0	17.7	0.3	1.68
6	11.9	12.1	-0.2	-1.66
7	7.9	10.6	-2.7	-29.2
8	6.0	7.6	-1.6	-23.6
9	7.3	8.3	-1.0	-13.0

L'effet des variances est caractérisé par la valeur de l'écart pondéré de P_1 et P_2 .

On sait qu'il est nul pour un graphe de 2 chemins.

On constate que l'écart pondéré décroît pour devenir négatif à partir de 6 chemins. Dans ce graphe à 6 chemins, le chemin 1 est devenu moins critique que le chemin 2.

On constate donc que l'effet des variances qui est nul pour 2 chemins augmente avec le nombre de chemins.

(Quelques irrégularités sont dues au fait que les chemins ne sont pas tous de même paramètre, les longueurs moyennes sont de l'ordre de 20).

En conséquence, on ne peut comparer la criticité de 2 chemins si on ne tient pas compte de la présence des autres chemins du graphe, même si tous les chemins sont indépendants.

4 - 3 - INFLUENCE DES CORRELATIONS SUR LES PROBABILITES DE CRITICITE.

Définition : Comme les longueurs des arcs sont supposées être des variables aléatoires indépendantes, on dit que deux chemins sont corrélés s'ils ont des arcs de longueur non nulle en commun.

Soit 2 chemins corrélés de longueur X_1 et X_2 .

Soit $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$ la somme des longueurs des arcs communs.

Les deux chemins auront pour longueur $X_1 = Z_1 + Y$ et $X_2 = Z_2 + Y$
 $Cov(X_1, X_2) = Cov(Z_1, Z_2) + Cov(Z_1, Y) + Cov(Z_2, Y) + Cov(Y, Y)$
 $= Var Y = Var Y_1 + Var Y_2 + \dots + Var Y_r$

La covariance des longueurs de deux chemins est égale à la somme des variances des longueurs des arcs communs.

En conséquence, le coefficient de corrélation de 2 chemins est toujours positif.

L'effet de corrélation entre chemins étant très complexe, nous l'étudions sur des cas très simples.

Etude d'un graphe de deux chemins.

Soit un graphe de 2 chemins de longueurs $X_1 \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), X_2$

$\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ de coefficient de corrélation ρ .

Si $\mu_1 = \mu_2$ on a vu que $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$ quels que soient σ_1, σ_2, ρ .

Si $\mu_1 \neq \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ peuvent influencer.

Supposons dans ce cas $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

D'après 3-1

$$P_1 = Pr[X_2 < X_1] = \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma\sqrt{2}\sqrt{1-\rho}}\right)$$

P_1 dépend donc de ρ .

En conséquence, pour comparer

la criticité de 2 chemins il faut tenir compte de leur coefficient de corrélation.

P_1	$\Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma\sqrt{2}}\right)$	\nearrow	1
P_2	$\Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma\sqrt{2}}\right)$	\searrow	0

Par ailleurs on constate un fait qui peut paraître paradoxal :

Si $\sigma_1 = \sigma_2, \mu_1 > \mu_2$ plus X_2 est corrélé avec X_1 plus P_2 diminue.

Etude d'un graphe de trois chemins de longueurs moyennes égales.

Les distributions des chemins étant normales, les probabilités de criticité s'exprime par :

$$P_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{Arc sin } \rho_1$$

avec $\rho_1 = \frac{1}{s_2 s_3} [\sigma_1^2 - cov(X_1, X_3) - cov(X_1, X_2) + cov(X_3, X_2)]$

$$s_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 cov(X_1, X_2)$$

$$s_3 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2 cov(X_1, X_3)$$

Supposons que : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$

$$\text{Cov}(X_1, X_3) = \rho_{13} \sigma^2$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \rho_{12} \sigma^2$$

$$\text{Cov}(X_2, X_3) = \rho_{32} \sigma^2$$

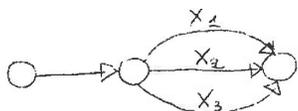
$$\text{D'où } p_1 = \frac{1}{2} \frac{1 - \rho_{13} - \rho_{12} + \rho_{32}}{\sqrt{(1 - \rho_{12})(1 - \rho_{13})}}$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \frac{1 - \rho_{21} - \rho_{23} + \rho_{31}}{\sqrt{(1 - \rho_{21})(1 - \rho_{23})}}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \frac{1 - \rho_{31} - \rho_{32} + \rho_{12}}{\sqrt{(1 - \rho_{31})(1 - \rho_{32})}}$$

Etudions des cas particuliers.

$$\text{1er cas. } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma \\ \rho_{12} = \rho_{23} = \rho_{13} = \rho \end{array} \right.$$



On a le cas de figure suivant

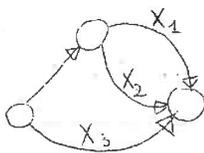
$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$$

Dans un graphe à 3 chemins de même longueur:

Si les coefficients de corrélation des 3 chemins sont égaux, les probabilités de criticité sont égales à 1/3.

$$\text{2o cas. } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma \\ \rho_{12} = \rho, \rho_{13} = \rho_{23} = 0 \end{array} \right.$$



On a le cas de figure suivant

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \rho}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} (1 + \rho)$$

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{Arc sin } \frac{\sqrt{1 - \rho}}{2}$$

$$p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{Arc sin } \frac{1 + \rho}{2}$$

Plus X_1 et X_2 sont corréllés moins ils sont critiques.

Si $\rho = 0$ $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ (cf cas précédent)

si $\rho = 1$ $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$ $p_3 = \frac{1}{2}$

(les chemins X_1 et X_2 sont alors confondus. Le graphe se réduit à 2 chemins de même longueur).

si $\rho = \frac{1}{2}$ par exemple :

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{Arc sin } \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.307$$

$$p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{Arc sin } \frac{3}{4} = 0.385$$

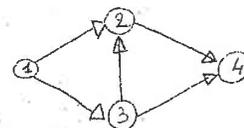
Les chemins X_1 et X_3 ont même longueur (moyennes et variances égales)

pourtant $p_3 > p_1$. L'effet de la corrélation est donc mis en évidence.

En général, si on compare la criticité de 2 chemins il faut tenir compte

des corréllations que chacun des 2 chemins peut avoir avec d'autres chemins.

3o cas. $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma \\ \rho_{13} \neq 0, \rho_{12} \neq 0, \rho_{23} = 0 \end{array} \right.$
On a le cas de figure suivant



$$X_1 = (1, 3, 2, 4)$$

$$X_2 = (1, 3, 4)$$

$$X_3 = (1, 2, 4)$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \frac{1 - \rho_{13} - \rho_{12}}{\sqrt{(1 - \rho_{12})(1 - \rho_{13})}}$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \frac{1 - \rho_{21} + \rho_{31}}{\sqrt{1 - \rho_{21}}}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \frac{1 - \rho_{13} + \rho_{12}}{\sqrt{1 - \rho_{31}}}$$

Si $\rho_{13} = \rho_{12} = \rho$ alors

$$p_1 = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\rho}{1 - \rho}$$

$$p_2 = p_3 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho}}$$

Comme $p_2 = p_3 \leq 1$ on doit avoir $\rho \leq \frac{3}{4}$

$$p_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{Arc sin } \frac{1 - 2\rho}{2(1 - \rho)}$$

$$p_2 = p_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \text{Arc sin } \frac{1}{2\sqrt{1 - \rho}}$$

Si $\rho = 0$ $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

si $\rho = \frac{3}{4}$ $p_1 = 0$ $p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$

Pour tout $\rho \in [0, 1]$ on a toujours $p_1 \leq p_2 = p_3$, bien que X_1 soit de même longueur (même moyenne, même variance) que X_2 et X_3 .
On remarque que X_2 et X_3 ont même probabilité de criticité, car ici ils sont liés au même chemin et les coefficients de corrélation sont égaux.

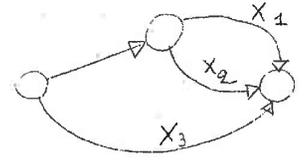
4e cas. $\rho_{12} = \rho, \rho_{13} = \rho_{23} = 0, \sigma_2 = \sigma_3, \sigma_1 \gg \sigma_2$

C. cas dérive du 2e.

$$p_1 = \frac{\sigma_1^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$$

$$p_2 = \frac{\sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}$$

$$p_3 = \frac{\sigma_2^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) 2\sigma_2^2}}$$



Si σ_1 devient très grand devant σ_2 .

$$p_1 \rightarrow 1 \quad p_2 \rightarrow -\frac{\rho}{\sqrt{2}} \quad p_3 \rightarrow \frac{\rho}{\sqrt{2}}$$

Donc $p_1 \rightarrow \frac{1}{2}$; $p_2 \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ Arcsin } \frac{\rho}{\sqrt{2}}$; $p_3 \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ Arcsin } \frac{\rho}{\sqrt{2}}$

Si X_1, X_2, X_3 sont de même longueur moyenne $\sigma_2 = \sigma_3, \sigma_1$ très grand devant σ_2 , alors plus X_1 et X_2 sont corréllés plus la criticité de X_2 est petite devant celle de X_3 .

En effet

si $\rho = 0 \quad p_2 = p_3 = \frac{1}{4}$

si $\rho = 1 \quad p_2 = \frac{1}{8} \quad p_3 = \frac{3}{8}$

A écarts types constants on pourrait aussi rendre la longueur moyenne de X_1 beaucoup plus grande que celle de X_2 et on constaterait que X_2 est beaucoup moins critique que X_3 bien qu'ils soient de mêmes longueurs.

Nous appellerons ce phénomène : effet de Shunt.

Si 2 chemins X_1 et X_3 sont de mêmes longueurs, si X_2 est corréllé avec un chemin plus critique que lui, alors $p_2 < p_3$.

Si reprenant les hypothèses du 4e cas nous supposons au contraire σ_1 très petit devant σ_2 , alors

$$p_1 \rightarrow 0 \quad p_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \quad p_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$p_1 \rightarrow \frac{1}{4} \quad p_2 \rightarrow \frac{3}{8} \quad p_3 \rightarrow \frac{3}{8}$$

L'effet de shunt ne joue plus dans ce cas, car X_1 est beaucoup moins critique que X_2 .

Reprenant les résultats du 2e cas nous pouvons conclure :

Si X_2 et X_3 sont 2 chemins de même longueur, indépendants, si X_2 est corréllé à un chemin X_1 alors $p_2 \leq p_3$.

7-5-4 - CONCLUSION.

Que peut-on induire des études particulières faites précédemment pour le cas général ?

Si on veut comparer la criticité de 2 chemins il faut tenir compte des facteurs suivants :

- longueurs moyennes,
- variances,
- corrélation entre les 2 chemins,
- corrélation avec d'autres chemins,
- présence des autres chemins.

C'est la combinaison de tous ces facteurs qui fait qu'un chemin est plus critique (ou plus long) qu'un autre.

Deux chemins de longueurs moyennes égales ne sont pas de criticité égale a priori (il faut tenir compte de l'effet des variances et des corréllations).

Deux chemins de même longueur (moyennes et variances égales) ne sont pas de criticité égale a priori.

Si nous remplaçons les autres chemins par leur maximum nous déduisons de l'étude d'un graphe à trois chemins des résultats valables pour un graphe quelconque :

- + Si deux chemins de même longueur (moyennes et variances égales) corréllés ou non sont indépendants des autres chemins, ils sont de criticité égaux.
- + Si deux chemins X_1 et X_2 sont de même longueur, non corréllés, si X_2 est corréllé avec un chemin X_3 plus critique que lui alors $p_2 \leq p_1$
- + Si deux chemins corréllés ou non, indépendants des autres chemins sont d'écarts types différents, le plus critique est celui qui a le plus grand écart type.

Autre remarque :

+ Dans un graphe donné, la criticité des chemins n'est pas une fonction croissante de leur coefficient de corrélation avec le chemin le plus critique.

Exemple : Soit un graphe 99-10 dont on a fait une simulation de 4.000 réalisations en lois triangulaires.

chemin n° i	Long. moy de i - Long. moy de 1	σ^2	P_{i1}	$100 p_i$
1	0	17.64	1	87.6
2	2.66	20.48	0.898	8.8
3	4.33	18.7	0.835	3.5
4	4.66	18.3	0.914	0.1
5	4.66	17.48	0.971	0

On remarque que le chemin 5 est le chemin le plus corréllé avec le chemin 1, pourtant sa probabilité de criticité est nulle. Il est Shunté par le chemin 1 car sa longueur moyenne est inférieure de 4.66.

Existe t'il des tests pratiques pour comparer la criticité de 2 chemins ?

On pourrait comparer les 2 chemins sans tenir compte des autres chemins et dire :

Si 2 chemins X_1 et X_2 sont de longueurs différentes, corréllées ou non, s'ils sont indépendants des autres chemins, alors :

$$\Pr[X_1 > X_2] > \Pr[X_2 > X_1] \Rightarrow p_1 > p_2$$

Ceci est faux.

Soit un graphe de 10 chemins distribués suivant des lois normales indépendantes. Comparons deux d'entre eux :

	moyenne	Ecart type	$100 p_i$
X_1	20.8	1	4.1
X_2	19	3	8.3

Comme $\mu_1 > \mu_2$, $\Pr[X_1 > X_2] > \Pr[X_2 > X_1]$ (d'après 3-1).

Pourtant $p_2 > p_1$. On constate que bien que les 2 chemins soient indépendants des autres, on ne peut les considérer isolément.

Considérés isolément, l'effet des variances ne joue pas, alors que la présence des autres chemins le fait entrer en jeu.

Pour comparer la criticité de deux chemins, on calculera d'abord la distribution du maximum des longueurs des autres chemins. Ayant ainsi ramené le graphe à 3 chemins on appliquera la formule vue en 3-2. Le procédé est en général inapplicable.

Si un chemin est beaucoup plus critique que les autres, alors sa longueur est voisine du maximum des longueurs des autres chemins et le graphe se ramène à ce chemin et aux deux chemins à comparer.

En conclusion, nous ne savons pas calculer les probabilités de criticité de façon stricte. Nous verrons plus loin comment on peut les calculer de façon approchée.

Il est un cas où nous pouvons dès maintenant les calculer de façon approchée, c'est le cas où un chemin est beaucoup plus critique que les autres, éventualité qui se reconnaît par l'examen des longueurs moyennes et des variances. Dans ce cas on peut remplacer le maximum des longueurs des chemins par la longueur de ce chemin et ramener le graphe à 2 ou 3 chemins dont nous savons calculer la criticité.

Ce cas est le cas du chemin suffisamment plus long envisagé par la méthode PERT.

Exemple d'étude de la criticité.

Les remarques précédents permettent d'avoir une idée grossière de la criticité.

Soit un graphe 48 - 40 dont les longueurs des arcs suivent des lois triangulaires. On considère le fuscau de marge 8 (cf 10 - 2 - 1)

Les caractéristiques du graphe sont indiquées en annexe.

Les 5 chemins en moyenne les plus longs sont :

chemin	6	5	8	4	7
moyenne	72	70.666	70.666	70.333	70.333
variance	7.555	2.677	8.111	7.499	8.611

Les longueurs de ces chemins sont assez voisines

$$\text{Soit } \Delta_{ij} = \frac{|\mu_i - \mu_j|}{\sup(\sigma_i, \sigma_j)} \quad \Delta_{68} = 0,47 \quad \Delta_{67} = 0,57$$

(on convient de dire, cf 8-3-2, que 2 chemins sont de longueurs voisines si $\Delta_{ij} < 0.5$)

L'effet de variance va donc jouer.

Si on ne tient pas compte des corrélations, on a en gros

$$P_6 > P_8 > P_5 > P_7 > P_4$$

Il est en effet prévisible que le chemin P_c critique sera le plus critique

car: $\Delta_{68} = 0,47$ est proche de $0,5 -$

Examinons les corrélations :

$P_{68} = 0,14$ est petit 6 n'est pas shunté par 8 -

$P_{65} = 0,78$ est assez grand 5 est shunté par 6, ce qui confirme $P_8 > P_5$

$P_{78} = 0,82$ est assez grand 7 est shunté par 8 ce qui atténue l'effet de la grande variance de 7. Cela confirme $P_7 < P_8$ et

$P_7 < P_8$

$P_{46} = 0,69$ 4 est shunté légèrement par 6 -

Ce classement par probabilité de criticité décroissante correspond à la réalité (cf annexe). Mais l'examen que l'ont vient de faire est très approximatif.

7 - 6- CRITICITE DES ARCS.

La notion de criticité des arcs est plus importante en pratique que celle des chemins. Primo parce que le calcul des longueurs moyennes et des variances des chemins est fastidieux, secundo parce que la notion de chemin critique ne correspond à rien de concret alors qu'une tâche de forte criticité représente pour le responsable des travaux une tâche à surveiller avec attention.

On a vu précédemment que la criticité des arcs se déduit de celles des chemins, la probabilité de criticité d'un arc étant la somme des probabilités de criticité des chemins qui empruntent cet arc.

A la notion de longueur d'un chemin correspond la notion de marge d'un arc.

Définition : La marge d'un arc (dans le modèle aléatoire) est la différence entre la longueur moyenne du chemin P_c critique et la longueur moyenne du chemin en moyenne le plus long qui emprunte cet arc.

Cette marge se détermine facilement : c'est la marge totale de l'arc dans le graphe déterministe où les durées sont les durées moyennes.

On utilise fréquemment cette marge comme indicateur de criticité.

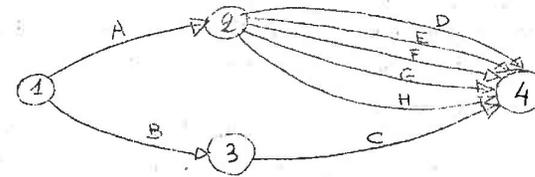
En effet, si le chemin P_c critique passe par un arc, la marge de cet arc est nulle, on dit en langage PERT que l'arc est critique.

De là certains déduisent que plus la marge d'un arc est petite, plus celui-ci est critique.

Examinons si c'est vrai :

La simulation nous permet d'étudier la variation des probabilités de criticité des arcs en fonction de leur marge totale.

Soit le graphe suivant dont on fait 4.000 simulations en lois normales.



Arc	Moyenne	Variance	Marge totale moyenne	Fréquence de criticité $\times 100$
A	10	1	0.1	71.8
B	10	1	0	28,2
C	10,1	1	0	28,2
D	10	1	0.1	14,3
E	10	1	0.1	13,8
F	10	1	0.1	14,7
G	10	1	0.1	14,2
H	10	1	0.1	14.75

Dans cet exemple, le chemin critique au sens PERT est formé des arcs B et C.

Mais l'arc A qui est de marge non nulle est de criticité supérieure à B et C.

C'est dû au fait que plusieurs chemins faiblement critiques empruntent l'Arc A.

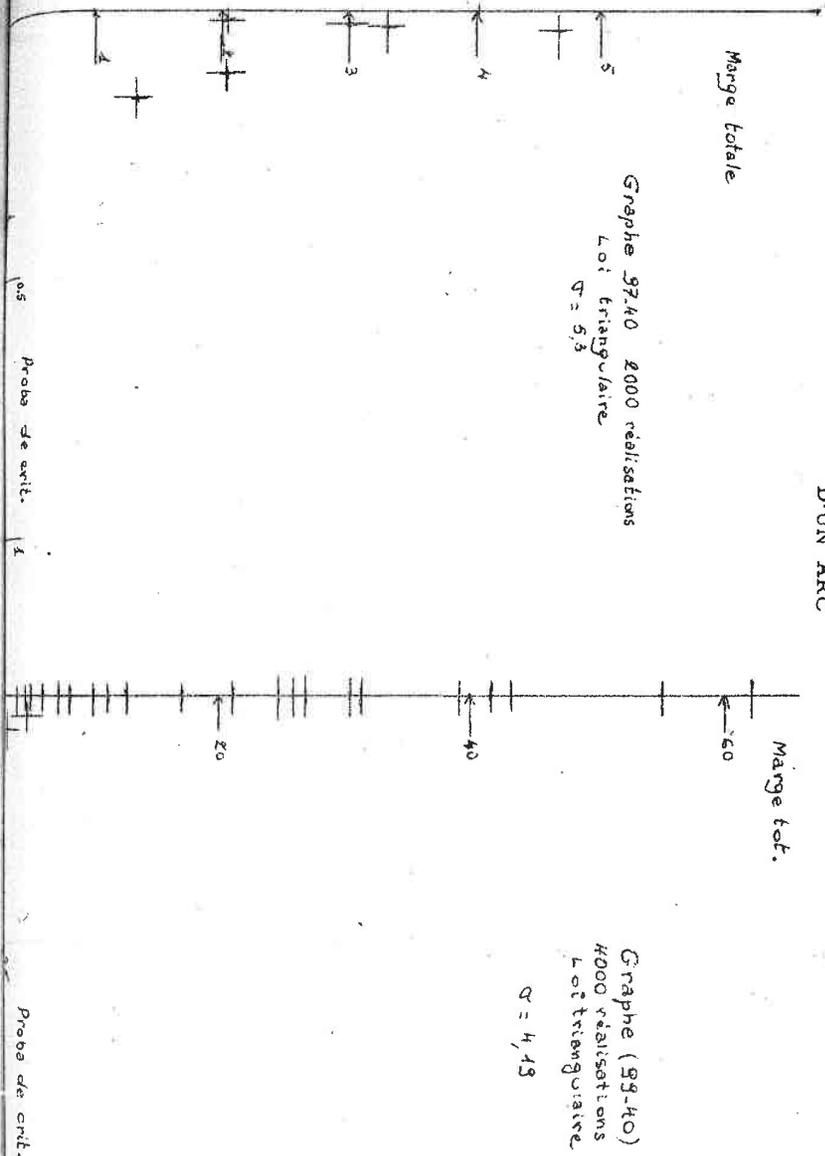
La probabilité de criticité n'est donc pas une fonction décroissante de la marge.

Elle ne pouvait l'être pour une autre raison : comme la probabilité de criticité d'un chemin n'est pas une fonction croissante de la longueur moyenne de ce chemin,

La probabilité de criticité d'un arc n'est pas une fonction décroissante de sa marge.

(Cela découle de la définition de la marge)

ETUDE DU LIEN PROBABILITE DE CRITICITE - MARGE TOTALE
D'UN ARC



7-6

Dans ces conditions, quelle information peuvent apporter les marges?

----- L'étude de la distribution de la probabilité de criticité des arcs en fonction de leur marge, faite sur plusieurs graphes, donne les résultats suivants (cf graphiques ci-joints).

- si la marge est nulle les probabilités de criticité est grande en général, mais elle peut varier entre 0.07 et 0.98, ce qui est considérable.
- pour les graphes que nous avons étudiés, si la marge est supérieure à l'écart type du chemin P-critique, la probabilité de criticité est nulle ou voisine de zéro.

A partir de ces expériences nous pouvons dire que :

- si un arc a une marge nulle sa criticité est non négligeable,
- si un arc a une marge supérieure à l'écart type du chemin P-critique, sa criticité est négligeable.

La marge est donc un indicateur très grossier de la criticité des arcs.

ETUDE DE LA DISTRIBUTION DE $\text{MAX}(X_1, X_2, \dots, X_n)$

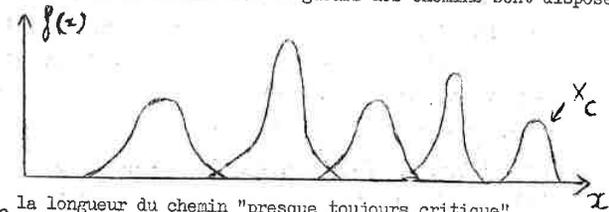
$\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est la distribution de la longueur (ou durée) totale du projet. L'étude suivante est aussi valable pour la distribution d'une étape x_i quelconque, les chemins X_1, X_2, \dots, X_n envisagés étant les chemins joignant l'entrée à X_i .

8 - 1 - CONDITIONS D'APPLICATION DE LA METHODE PERT.

L'approximation PERT consiste à faire les trois hypothèses suivantes :

- 1) Les longueurs des arcs sont indépendantes,
- 2) Il existe un chemin suffisamment long de façon que la probabilité de criticité des autres chemins soit négligeable,
- 3) Ce chemin comporte assez d'arcs pour que sa longueur soit normalement distribuée.

Alors les courbes de densité des longueurs des chemins sont disposés ainsi :



Soit X_c la longueur du chemin "presque toujours critique",

D'après les hypothèses 1 et 3 X_c suit une loi normale.

$\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est peu différent de X_c .

Donc $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est voisin d'une loi normale et

$$E \left[\text{Max}_{i=1 \dots n} X_i \right] \simeq E X_c$$

$$\text{Var} \left[\text{Max}_{i=1 \dots n} X_i \right] \simeq \text{Var} X_c$$

Ce sont bien les affirmations de la méthode PERT relatives à la distribution de la longueur totale du projet.

Ces hypothèses ne sont souvent pas vérifiées, étudions,

a) Dans quel cas peut-on accepter les résultats du PERT ?

b) Sinon quelles sont les erreurs que l'on commet en appliquant le PERT.

8 - 2 - TESTS DE NORMALITE.

8 - 2 - 1 - TEST DU χ^2 .

On teste si l'échantillon de $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est extrait d'une loi

normale X , dont la moyenne et la variance sont estimées à partir de l'échantillon.

Soit n la taille de l'échantillon.

On le partage en r classes. Soit k_i le nombre de valeurs de l'échantillon contenues dans la classe i et p_i la probabilité pour que X soit dans cette classe.

Alors si l'échantillon est bien extrait de la loi X la variable

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{(k_i - n p_i)^2}{n p_i} \text{ suit une loi du } \chi^2 \text{ à } (r-3) \text{ degrés de}$$

liberté (cf [14] p 426).

Soit un seuil de probabilité α , soit χ_0^2 tel que $P[\chi^2 > \chi_0^2] = \alpha$

Si $Q < \chi_0^2$ l'hypothèse est acceptée jusqu'à plus ample information,

Si $Q > \chi_0^2$ l'hypothèse est rejetée.

La fonction de répartition F de liax (X_1, X_2, \dots, X_n) n'étant pas connue, on ne peut déterminer la puissance du test,

Quand la taille n de l'échantillon tend vers l'infini, F_n tend vers F .

Comme on fait un test sur l'écart entre F_n et la fonction de répartition de la loi X , plus n est grand, plus on peut considérer le test entre F_n et F comme un test entre- F et F

8-2-2 - TESTS DE SYMÉTRIE ET D'APPLATISSEMENT.

Toute distribution symétrique à ses moments centrés d'ordre impair nuls.

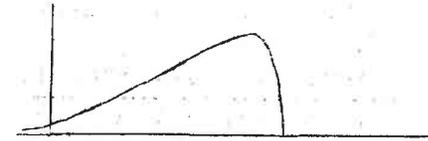
Tout moment d'ordre impair peut donc être utilisé comme mesure de la dissymétrie. Le plus simple est μ_3 . On considère plutôt le rapport $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ qui est homogène de degré 0 par rapport à l'unité de la variable. On l'appelle coefficient de dissymétrie.

La condition $\gamma_1 = 0$ est une condition nécessaire pour que la distribution soit symétrique. Elle n'est pas suffisante car elle ne fait pas intervenir les moments d'ordre impair et supérieurs à 3.

Si $\gamma_1 > 0$ la densité de la variable à l'allure suivante :



Si $\gamma_1 < 0$



On définit également un coefficient d'aplatissement $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ qui fait intervenir le 4e moment centré.

Pour une loi normale $\gamma_2 = 0$ (de même que pour γ_1 la condition $\gamma_2 = 0$ n'est pas suffisante pour conclure à la normalité.)

Si $\gamma_2 > 0$ au voisinage de son mode la courbe de densité est plus haute et plus effilée que celle de la loi normale.

TEST DE NORMALITE :

Hypothèse : Le n . échantillon est extrait d'une loi normale.

les quantités $g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$ et $g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$

(où $m_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^i$) sont asymptotiquement normales (cf [14] p 366)

et on a (cf [14] p 386)

$$E(g_1) = 0 \quad E(g_2) = -\frac{6}{n+1}$$

$$\text{Var}(g_1) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)} \quad \text{Var}(g_2) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

Choisissons le seuil de probabilité $\alpha = 5\%$. Supposons n assez grand ($n > 100$ par exemple)

si $|g_1| < 1,96 \sqrt{\text{Var } g_1}$ et $|g_2 - \frac{6}{n+1}| < 1,96 \sqrt{\text{Var } g_2}$

alors l'hypothèse est acceptée jusqu'à plus ample information.

Si non elle est rejetée.

(Rappelons que ce test n'est pas suffisant pour conclure à la normalité de la population).

8-3 - HYPOTHESE D'EXISTENCE D'UN CHEMIN PRESQUE TOUJOURS CRITIQUE. 8-3-1.

On a vu (cf 7-4) qu'en général il n'existait pas de chemin toujours critique.

Les résultats du PERT sont donc faux. Mais il faudrait préciser ce que l'on entend par presque toujours critique : autrement dit si p_1, p_2, \dots, p_n sont les probabilités de criticité des n chemins, à partir de quelle valeur de $\max_{i=1,2,\dots,n} p_i$ l'approximation PERT est-elle valable ?

On dira qu'elle est valable si l'erreur qu'elle implique est inférieure aux erreurs commises par ailleurs (en particulier dans l'estimation de la durée des tâches).

8-3-2 - ETUDE DE L'APPROXIMATION PERT SUIVANT LES VALEURS DE $\text{Max}_i p_i$

Vérifions sur des exemples simples l'hypothèse suivante :

Plus $\text{Max}_i p_i$ est grand, meilleure est l'approximation PERT.

1^o Exemple : Etude de graphes de $n = 1, 2, \dots, 10$, chemins indépendants de même longueur \mathcal{L}_c ($\alpha = 10$, $\sigma = 1.41$). La probabilité de criticité d'un chemin est donc $1/n$.

On a fait une simulation de 1000 réalisations pour chaque graphe. L'étude des résultats confirme l'hypothèse : les erreurs relatives sur la moyenne et la variance décroissent quand $\text{Max}_i p_i$ croit. De plus on constate que la moyenne PERT est en général sous estimée, la variance surestimée (elle est parfois multipliée par 2). Le test du χ^2 accepte l'hypothèse de normalité jusque $n = 8$, la rejette au delà.

En fait ce test a peu de valeur car l'échantillon est de taille trop réduite.

2^o Exemple : Etude d'un graphe de 2 chemins indépendants de même longueur \mathcal{L}_c ($\alpha = 10$, $\sigma = 1.41$). On a construit un échantillon de taille 10000.

Etudions la normalité de $\text{Max}(X_1, X_2)$.

On se donne un seuil de probabilité $\alpha = 0.05$.

Le test de KOLMOGOROV-SMIRNOV cf 6-3-3 donne :

$$P_r \left[\sqrt{\frac{2mn}{m+n}} D(m, n) < 1.36 \right] = 0.95$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$m = 10000$$

$$\text{D'où } P_r \left[\sqrt{20000} D(10000) < 1.36 \right] = 0.95$$

$$P_r \left[D(10000) < 0.0096 \right] = 0.95$$

Soit d la distance (au sens de la convergence uniforme) de la fonction de répartition de l'échantillon extrait de $\text{Max}(X_1, X_2)$ et de la loi normale de même variance et de même écart type.

La simulation estime la moyenne $\alpha = 10.778 \pm 0.022$ et la variance

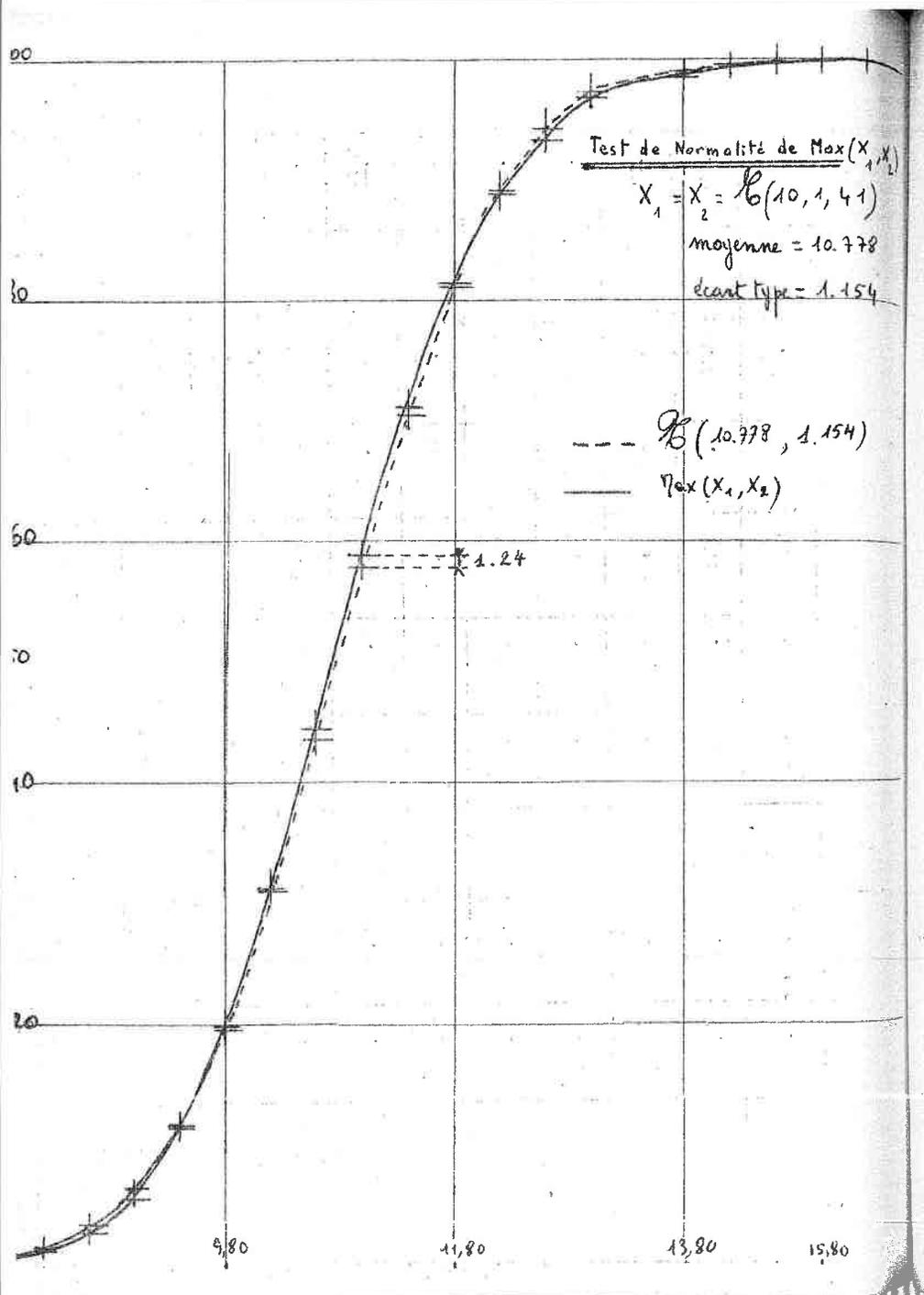
$$\sigma^2 = 1.333 \pm 0.036 \text{ au taux de confiance de } 95\%.$$

Si $d < 0.0096$ on peut considérer exacte l'hypothèse de normalité de $\text{Max}(X_1, X_2)$ sinon on la rejette.

La comparaison des 2 courbes montre que $d = 0.0124$ -

$\text{Max}(X_1, X_2)$ n'est donc pas une variable normale. Ceci est confirmé par le test du χ^2 . Au seuil $\alpha = 0.05$ pour 16 degrés de liberté $\chi_{0.05}^2 = 26,296$ on trouve $\mathcal{Q} = 45,983 > 26,296$.

$\text{Max}_i p_i$	N B de chemins.	μ	$\Delta \mu$ à 95%	$\frac{\mu - 10}{\mu} \%$	σ^2	$\Delta \sigma^2$ à 95%	$\frac{\sigma^2 - 2}{\sigma^2} \%$	χ^2 $\chi_{0.05}$	χ^2	Normalité de $\text{Max}_i X_i$
1	1	10.000	0.88	0	2	0.175	0	23.685	11.648	oui
0.5	2	10.826	0.73	7.63	1.37	0.12	46	28.869	14.829	oui
0.333	3	11.214	0.68	10.82	1.18	0.104	69,5	27.587	12.980	oui
0.25	4	11.415	0.6	12.41	0.96	0.085		27.587	20.716	oui
0.2	5	11.652	0.58	14.18	0.88	0.077		27.596	21.971	oui
0.166	6	11.818	0.57	15.35	0.87	0.076		27.996	12.450	oui
0.143	7	11.890	0.53	15.89	0.75	0.066		22.36	15.037	oui
0.125	8	12.037	0.53	16.92	0.74	0.065		22.36	27.729	non
0.111	9	12.107	0.52	17.4	0.72	0.063		22.36	28.877	non
0.1	10	12.136	0.48	17,6	0.63	0.055		22.36	50.767	non



8-3-2

Tout laisse penser que dans le 1er exemple ci-dessus dès que $\text{Max}_i p_i \ll 0.5$ la normalité de $\text{Max}(X_1, X_2)$ est rejetée.

Etudions ce qui se passe dans un graphe simple où $0.5 \ll \text{Max}_i p_i \ll 1$.
 3° Exemple : Etude d'un graphe de 2 chemins de longueurs normales de moyennes distinctes.

Dans ce cas nous pouvons par le calcul de CLARK cf (9.1) déterminer strictement les moments de $\text{Max}(X_1, X_2)$.

On calculera en particulier les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement. Soit $x_1 = \mathcal{N}_0(0, 1)$, $x_2 = \mathcal{N}_0(\mu, \sigma^2)$, ρ leur coefficient de corrélation.

A σ et ρ constant $\text{Max}(p_1, p_2)$ est une fonction croissante de μ , son expression est donnée dans 4-3-1.

On fait 3 calculs pour des valeurs de ρ et de σ différentes. cf le tableau ci-joint :

SIGMA = 1.000 COEF DE CORREL = 0.000

H U	PROB	ESP	SIGN	δ_1	δ_2
0	.5000	.5641	.8256	.1369	.0617
0.5	.6391	.8490	.8388	.1517	.0682
1	.7602	1.1996	.8720	.1740	.0539
1.5	.8555	1.6048	.9120	.1672	.0017
2	.9213	2.0502	.9470	.1326	-.0495
2.5	.9614	2.5218	.9720	.0884	-.0699
3	.9830	3.0036	.9869	.0504	-.0612
3.5	.9933	3.5030	.9946	.0248	-.0404
4	.9976	4.0009	.9980	.0105	-.0215
4.5	.9992	4.5002	.9993	.0038	-.0094
5	.9997	5.0000	.9998	.0012	-.0035
5.5	.9999	5.5000	.9999	.0003	-.0011
6	.9999	6.0000	.9999	0.0000	-.0003
6.5	.9999	6.5000	.9999	0.0000	0.0000
7	.9999	7.0000	.9999	0.0000	0.0000
7.5	.9999	7.5000	.9999	0.0000	0.0000
8	.9999	8.0000	.9999	0.0000	0.0000
8.5	.0000	8.5000	.9999	0.0000	0.0000
9	.0000	9.0000	.9999	0.0000	0.0000
9.5	.0000	9.5000	.9999	0.0000	0.0000
10	.9999	9.9999	1.0000	0.0000	.0005

SIGMA = 1.000 COEF DE CORREL = .500

H U	PROB	ESP	SIGM	δ_1	δ_2
0	.5000	.3989	.9169	.0353	.0101
0.5	.6914	.6977	.9264	.0344	.0119
1	.8413	1.0833	.9538	.0516	.0024
1.5	.9331	1.5293	.9773	.0401	-.0131
2	.9772	2.0084	.9914	.0214	-.0160
2.5	.9937	2.5020	.9974	.0082	-.0096
3	.9986	3.0003	.9994	.0023	-.0036
3.5	.9997	3.5000	.9998	.0004	-.0009
4	.9999	4.0000	.9999	0.0000	-.0001
4.5	.9999	4.5000	.9999	0.0000	0.0000
5	.9999	5.0000	.9999	0.0000	0.0000
5.5	.9999	5.5000	.9999	0.0000	0.0000
6	1.0000	6.0000	.9999	0.0000	0.0000
6.5	1.0000	6.5000	.9999	0.0000	0.0000
7	.9999	6.9999	1.0000	0.0000	0.0000
7.5	.9999	7.4999	1.0000	0.0000	.0005
8	.9999	7.9999	1.0000	-.0002	.0019
8.5	.9999	8.4999	1.0000	-.0004	.0036
9	.9999	8.9999	1.0000	-.0002	.0018
9.5	1.0000	9.5000	.9999	.0013	-.0131
10	1.0000	10.0000	.9997	.0054	-.0549

SIGMA = .600 COEF DE CORREL = 0.000

H U	PROB	ESP	SIGM	δ_1	δ_2
0	.5000	.4632	.6808	.4699	.5812
0.5	.6659	.7573	.6155	.3044	.4548
1	.8044	1.1265	.5853	.1398	.1688
1.5	.9008	1.5546	.5817	.0650	.0253
2	.9568	2.0205	.5882	.0379	-.0108
2.5	.9839	2.5066	.5945	.0213	-.0151
3	.9949	3.0018	.5980	.0097	-.0104
3.5	.9986	3.5004	.5994	.0035	-.0050
4	.9996	4.0000	.5998	.0010	-.0017
4.5	.9999	4.5000	.5999	.0002	.0004
5	.9999	5.0000	.5999	0.0000	.0001
5.5	.9999	5.5000	.5999	0.0000	0.0000
6	.9999	6.0000	.5999	0.0000	0.0000
6.5	.9999	6.5000	.5999	0.0000	0.0000
7	1.0000	7.0000	.5999	0.0000	-.0001
7.5	1.0000	7.5000	.5999	0.0000	-.0003
8	.9999	7.9999	.6000	0.0000	.0001
8.5	.9999	8.4999	.6000	-.0002	.0037
9	.9999	8.9999	.6000	-.0009	.0151
9.5	.9999	9.4999	.6000	-.0022	.0367
10	.9999	9.9999	.6000	-.0033	.0561

Remarque : Dans ces trois exemples la perturbation qui apparaît sur les résultats quand H U s'approche de 10 est due aux erreurs de chute.

a) ÉTUDE DE LA MOYENNE $\text{Max}(X_1, X_2)$ (E S P).

Son estimation par la méthode PERT est μ (H U) dans les 3 cas.

C'est toujours une sous-estimation. L'erreur de l'approximation PERT est une fonction décroissante de $\text{Max}(p_1, p_2)$

b) ÉTUDE DE L'ÉCART TYPE DE $\text{Max}(X_1, X_2)$ (SIGM)

Son estimation PERT vaut 1 dans les 3 cas. Il est toujours surestimé par PERT

L'erreur de l'approximation PERT est une fonction décroissante de $\text{Max}(p_1, p_2)$.

Il y a une exception dans le 3ème cas pour $\mu = 0$ et $\mu = 0.5$. Les 2 chemins sont de criticité égale ou voisine, la méthode PERT ne les distinguera pas et prendra soit la valeur 1, soit 0.6 pour l'écart type. A la lumière de l'étude de "l'effet de variance" cf 4.5.2. on fait la convention suivante :

Quand dans un graphe, il y a plusieurs chemins de longueur moyenne voisine, le chemin critique au sens PERT (chemin P critique) est celui qui a le plus grand écart type.

On voit qu'ici il faut entendre par longueurs voisines, deux longueurs telles que :

$$|\mu_1 - \mu_2| / \text{Max}(\sigma_1, \sigma_2) \leq 0.5$$

Moyennant cette convention le PERT surestime toujours l'écart type de $\text{Max}(X_1, X_2)$

(X_1, X_2)

c) ÉTUDE DU COEFFICIENT D'ASYMÉTRIE (δ_1).

Il est positif dans les 3 cas, la courbe de densité de $\text{Max}(X_1, X_2)$ présente "une longue queue" du côté droit.

On remarque dans les 2 premiers cas que δ_1 ne décroît pas toujours quand $\text{Max}(p_1, p_2)$ croît. Ceci infirme l'hypothèse vérifiée jusqu'ici. Elle n'est vraie que si $\text{Max}(p_1, p_2)$ est supérieur à 0.76 dans le premier cas, 0.84 dans le second, 0.50 dans le 3ème. Ainsi on pourrait croire que le cas où on est le plus éloigné de la loi normale est celui où les 2 chemins sont de longueur moyenne égale. Or on constate, dans le 1er cas par exemple pour $\mu = 1$ c'est à dire $\text{Max}(p_1, p_2) = 0.76$ la dissymétrie est plus grande que lorsque $\text{Max}(p_1, p_2) = 0.5$

Par ailleurs dans le cas où $\mu = 0.5$, la distribution de $\text{Max}(X_1, X_2)$ est beaucoup plus symétrique que dans les cas où $\mu = 0$

d) ÉTUDE DU COEFFICIENT D'APPLATISSEMENT.

De même que pour le coefficient d'asymétrie, le coefficient d'aplatissement n'est pas une fonction décroissante de $\text{Max}(p_1, p_2)$

Il est tantôt négatif, tantôt positif.

8-3-2 (3)

Dans le 1er cas, on est aussi éloigné de la normalité pour $\text{Max}(p_1, p_2) = 0,50$ que pour $\text{Max}(p_1, p_2) = 0,96$

c) Recherche d'un seuil au delà duquel l'approximation PERT est valable.

Déterminons sur les 3 exemples précédents le seuil s tel que si $\text{Max}(p_1, p_2) > s$, alors l'erreur absolue commise par l'approximation PERT sur un moment est inférieure à 0,1.

EXEMPLES		SEUILS			
σ	ρ	ESP	SIGM	δ_1 et δ_2	Ensemble des moments.
1	0	0,92	0,85	0,96	0,96
1	0,5	0,84	0,50	0,50	0,84
0,6	0	0,90	0,50	0,90	0,90

On remarque que pour chaque moment ce seuil dépend de ρ et de σ . On ne peut donc déterminer pour tous les graphes un seuil au delà duquel l'approximation PERT est valable.

8-3-3 - INFLUENCE DE LA CORRELATION DES CHEMINS SUR L'APPROXIMATION PERT.

Reprenons l'exemple précédent d'un graphe de 2 chemins de même loi $\mathcal{H}(0,1)$ de coefficient de corrélation ρ

Quand ρ croit de 0 à 1, $\text{Max}(p_1, p_2)$ reste constant,

L'erreur de l'approximation PERT sur la moyenne et l'écart type décroît et tend vers 0. δ_1 et δ_2 décroissent et tendent vers zéro en restant positifs. Donc :

Dans un graphe à 2 chemins de même longueur, plus ρ est grand, meilleure est l'approximation PERT.

8-3-3 (4)

RO	.PROB	ESP	SIGM	δ_1	δ_2
0.00	.5000	.5641	.8256	.1369	.0617
.05	.5000	.5499	.8352	.1224	.0532
.10	.5000	.5352	.8447	.1091	.0456
.15	.5000	.5201	.8540	.0969	.0389
.20	.5000	.5046	.8633	.0857	.0330
.25	.5000	.4886	.8725	.0753	.0278
.30	.5000	.4720	.8815	.0658	.0232
.35	.5000	.4548	.8905	.0571	.0192
.40	.5000	.4370	.8994	.0492	.0157
.45	.5000	.4184	.9082	.0419	.0127
.50	.5000	.3989	.9169	.0353	.0101
.55	.5000	.3784	.9256	.0293	.0079
.60	.5000	.3568	.9341	.0239	.0060
.65	.5000	.3337	.9426	.0190	.0044
.70	.5000	.3090	.9510	.0147	.0031
.75	.5000	.2820	.9593	.0109	.0021
.80	.5000	.2523	.9676	.0076	.0013
.85	.5000	.2185	.9758	.0048	.0007
.90	.5000	.1784	.9839	.0025	.0003
.95	.5000	.1261	.9920	.0008	0,0000
1.00	.5000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000

8-3-4 - INFLUENCE DE L'ECART TYPE DES CHEMINS SUR L'APPROXIMATION PERT.

Reprenons le même exemple d'un graphe de 2 chemins de lois $\mathcal{H}(0,1)$ et $\mathcal{H}(0, \sigma')$ indépendantes

σ	μ_{Max}	σ_{Max}	δ_1	δ_2
0.2	0.4068	0.5954	1.418	2.06
0.4	0.4297	0.6288	0.925	1.29
0.6	0.4652	0.6808	0.470	0.58
0.8	0.5109	0.7477	0.209	0.17
1.0	0.5642	0.8256	0.137	0.06

Quand $\sigma \rightarrow 1$ l'erreur de l'approximation PERT sur μ_{Max} augmente.

En effet dans un graphe de 2 chemins indépendants de longueur moyenne égale, d'après les formules de CLARK (cf 9-1-1)

$$\sigma_{\text{Max}}^2 = \mu^2 + \frac{1}{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \text{ici } \mu = 0 \quad \sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = \sigma$$

Donc plus les écarts types des 2 chemins sont grands plus l'erreur sur la moyenne de Max est grande.

D'après la convention précédente (cf 8-3-2) l'estimation PERT de l'écart type est 1.

Quand $\sigma \rightarrow 1$ l'erreur PERT sur σ_{Max} diminue.

En effet, dans un graphe de 2 chemins indépendants de longueur moyenne égale.

$$\sigma_{\text{Max}}^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \right) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Si $\sigma_1 > \sigma_2$, l'erreur PERT est

$$\sigma_{\text{Max}}^2 - \sigma_1^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \right) (\sigma_1^2) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \right) (\sigma_2^2)$$

Cette quantité est négative. Le PERT fait une surestimation.

Quand $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ elle diminue en valeur absolue.

Quand σ_1 augmente, σ_2 restant fixe $\sigma_{\text{Max}}^2 - \sigma_1^2$ augmente en valeur absolue.

σ_1 et σ_2 décroissent sans toutefois s'annuler quand $\sigma \rightarrow 1$

Donc un graphe dans un graphe de deux chemins indépendants de même longueur moyenne, l'erreur PERT sur la moyenne de Max est une fonction croissante de la somme des variances. Plus les variances sont voisines, plus l'erreur sur l'écart type de Max diminue, plus la normalisation s'améliore.

8-3-5 - GENERALISATION DES RESULTATS.

La moyenne de Max (X_1, X_2, \dots, X_n) est toujours sous estimée par PERT.

Soit X_1, X_2, \dots, X_n les longueurs des chemins du graphe.

La méthode PERT prend pour moyenne de Max (X_1, X_2, \dots, X_n)

Max $E(X_i)$.

Montrons que $E \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n) > \text{Max} E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)$

En effet par définition $\text{Max} X_i \geq X_j$

Donc $X_j = \text{Max}_i X_i - \zeta_j \quad \forall j$ où ζ_j est une variable aléatoire positive.

$E(X_j) = E(\text{Max}_i X_i) - E(\zeta_j) \quad E(\zeta_j) \geq 0$

Donc $E(X_j) \leq E(\text{Max}_i X_i) \quad \forall j$

$$\Rightarrow \text{Max}_{1 \leq i \leq n} [E(X_i)] \leq E \left[\text{Max}_{1 \leq i \leq n} X_i \right]$$

On a l'égalité dans les conditions d'application du PERT, c'est à dire quand on a un chemin suffisamment plus long que les autres.

Donc la méthode PERT nous donne en général la moyenne de la durée totale.

A défaut d'autres vérifications strictes, on va tester les hypothèses formulées précédemment sur des graphes quelconques en comparant les résultats du PERT avec ceux de la simulation.

a) Estimation de la moyenne.

L'erreur de l'approximation PERT est particulièrement grande (de l'ordre de 40%) dans 2 cas :

- les variances des chemins les plus critiques n'ont pas le même ordre de grandeur (cf graphe 3 - 2 et 5 - 2)
- Les chemins les plus critiques sont peu corrélés (cf graphe 8 - 4 et 10 - 2).

En dehors de ces cas l'erreur ne dépasse pas 2% et elle est d'autant plus petite que $\max_i P_i$ est voisin de 1. (cf graphe 99 - 40)

b) Estimation de la variance :

L'approximation PERT surestime la variance dans tous les cas rencontrés.

- L'erreur est très grande (jusqu'à 200 %) dans 2 cas :
- Quand les variances des chemins très critiques n'ont pas le même ordre de grandeur. cf graphe (3 - 2) et (5 - 2)
- Quand les chemins les plus critiques sont peu corrélés (cf graphe (10 - 2) où ils sont indépendants).

En dehors de ces cas l'erreur est d'autant plus petite que $\max_i P_i$ est grand. (cf 99-40)

c) Normalisation :

Le coefficient d'asymétrie n'est pas toujours positif cf graphes (5 - 4) (3 - 2), (8 - 4). Dans ces exemples, la fonction de répartition de l'échantillon est au-dessus de la fonction de répartition de la loi normale de même moyenne et même écart type.

Dans les graphes où les chemins très critiques sont très corrélés on peut considérer la distribution de $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ comme normale. (cf graphe (97 - 40)

Dans le cas où ils sont peu corrélés la distribution n'est pas normale. cf (48 - 40), (8 - 4).

8 - 3 - 7 - CONCLUSION.

Il n'est pas possible de déterminer un seuil P_0 tel que si $\max_i P_i > P_0$ l'approximation PERT soit valable.

En effet l'erreur commise dans l'approximation PERT dépend également des corrélations et des variances des chemins les plus critiques.

Les hypothèses sur les erreurs de l'approximation PERT de $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vérifiées dans toutes nos expériences sont les suivantes :

TEST DE L'APPROXIMATION PERT

GRAPHE NANS N SIMUL NO	P ₀ (%)	Max P _i x 100	Hyp ₀ de Norm ₀	δ ₁ > 0	Moyenne					Variance				
					PERT (11)	SIMUL (12)	ΔSIMUL (13)	PERT (11)-(11) (14)	(12)-(11) (12)	PERT (14)	SIMUL (15)	ΔSIMUL (16)	PERT (14)-(15) (15)	
48 40 4000 9	0.14	34.4	non	oui	72	73.345	0.035	1.345	1.84%	7.555	4.779	0.21	2.776	58%
97 40 2000 31	0.3	14.5	oui	oui	283.000	287.637	0.182	4.637	1.61%	28.333	17.300	1.072	11.033	64%
99 40 4000 6	0.9	88.7	oui	oui	334.333	234.518	0.13	0.185	0.08%	17.666	17.877	0.77	0.089	0.4%
47 45 1636					337.333	343.116	0.676	5.783	1.68%	259.666	195.159	13.374	64.307	33%
5 4 10000 3	0.67	68.75	oui	non	20	20.174	0.019	0.174	0.86%	15.7	0.95	0.026	0.12	65%
3 2 10000 3	0	42.50		non	40	15.197	0.113	5.197	32%	100	31.92	0.9	68	212%
5 2 10000 5	0	34.36			10	46.763	0.108	6.763	40%	100	29.31	0.81	70	230%
8 4 4000 6	0	28.2	non	non	20.1	21.485	0.035	1.385	6.45%	2	1.21	0.054	0.19	65%
10 2 1000 10	0	31.1			22	23.542	0.085	1.542	6.55%	4	1.80	0.161	3.2	178%

(*) Test du χ^2 au seuil de probabilité de 5%

(**) Coefficient de corrélation des 2 chemins, les plus critiques ou des 2 groupes de chemins les plus critiques. (On convient de prendre dans ce cas le plus grand coefficient de corrélation entre les chemins des 2 groupes.)

- 1) Dans l'approximation PERT, la moyenne de $\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$ est toujours sous estimée, la variance surestimée (moyennant la convention de 8-3-2).
- 2) Moins les chemins très critiques sont corrélés, plus l'erreur sur la moyenne et la variance est grande, plus on s'éloigne d'une distribution normale.
- 3) Plus les variances des chemins les plus critiques sont grandes, plus l'erreur sur la moyenne est grande.
Plus les variances des chemins les plus critiques ont des ordres de grandeur différents, plus l'erreur sur la variance est grande, moins la distribution est normale.
- 4) Plus $\text{Max}_i p_i$ est voisin de 1, plus les erreurs sur la moyenne et la variance sont petites.

8 - 4 - HYPOTHESE DE NORMALITE DES LONGUEURS DES CHEMINS.

8 - 4 - 1 - Nombre d'arcs nécessaires pour atteindre la normalité.

On utilise le résultat suivant :

Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables indépendantes, centrées, finies.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = B_n^2 \rightarrow \infty \\ \text{Si } \frac{\sigma_i}{B_n} \rightarrow 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Alors la variable $Z = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^n X_i$ tend vers une variable normale centrée réduite.

Déterminons combien un chemin doit comporter d'arcs pour que le théorème s'applique.

Cas de lois uniformes.

On a fait un test du χ^2 sur un échantillon de taille 1983 extrait de la distribution de la longueur d'un chemin de 9 arcs.

$Q = 27.431$ au seuil de 0.95 le χ^2 à 26 degrés de liberté donne $\chi_{0.95}^2 = 38.88$. Le test est donc très bon.

Cas de lois triangulaires.

Un test du χ^2 sur un échantillon de taille 2314 extrait de la distribution de la longueur d'un chemin de 9 arcs donne $Q = 20.472$ au seuil de 0.95.

Le χ^2 à 19 degrés de liberté donne $\chi_{0.95}^2 = 26.441$, l'hypothèse de normalité est donc acceptée.

8 - 4 - 2 - CAS OU UN CHEMIN COMPORTE PEU D'ARCS.

Si tous les chemins du graphe comportent assez d'arcs, leur longueur suit une loi normale.

Si un chemin n'en comporte pas assez, sa longueur ne suit pas une loi normale :

- Si le chemin est peu critique la distribution de $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ en dépendra peu.
- Si ce chemin est très critique, il influence la distribution de $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ mais on ne peut pas affirmer si celle-ci est normale ou non.
- Si ce chemin est presque toujours critique, sa distribution est très voisine de celle de $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ celle-ci n'est donc pas normale.

8 - 5 - HYPOTHESE D'INDEPENDANCE DES LONGUEURS DES ARCS (ou durées de tâches).

8 - 5 - 1 - Etude des différents types de lien.

En pratique cette hypothèse n'est pas vérifiée. Il peut exister 2 sortes de liens entre tâches d'un projet.

- a) deux tâches nécessitant pour leur réalisation le même moyen technique ont des durées corrélées si ce moyen est limité.
- b) Si une tâche jugée critique prend du retard, le responsable du projet accélère les tâches suivantes.

Le premier type de lien se décompose en 2 cas :

- Soit les tâches i et j ne peuvent avoir lieu en même temps.
On exprimera cette contrainte disjonctive en imposant par exemple à j de commencer quand i est terminé. Les durées des tâches ne sont donc pas corrélées.
- Soit les tâches i et j peuvent avoir lieu en même temps, mais il est nécessaire que $d_i + d_j \geq k$ (c'est à dire qu'on ne peut accélérer les deux tâches ensemble).

La dépendance de longueurs des arcs a plusieurs conséquences :

- Si un chemin a des arcs de longueurs corrélées, sa longueur n'est pas normale et sa variance n'est pas la somme des variances des arcs.
- Si ce chemin est presque toujours critique, la distribution de $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ n'est pas normale.
- Si un chemin i a des arcs de longueurs corrélées avec ceux d'un chemin j , la covariance de i et j n'est pas égale à la somme des variances des arcs communs.

8 - 5 - 2 - ETUDE D'UN TYPE DE DEPENDANCE.

Simulons le lien créé par le contrôle des tâches critiques.
 Les durées des tâches suivent des lois triangulaires.
 On surveille un ensemble de tâches critiques :
 Si lors d'une réalisation une tâche surveillée α a une durée supérieure à son mode, alors on accélère les tâches β_i qui suivent immédiatement α (telles que $\alpha \Gamma' \beta_i$)
 On les accélère de la façon suivante, au lieu de les générer suivant la loi triangulaire de paramètres A, H, B, on prend les paramètres A, inf (A + B - H, H), B.
 Comme en général le mode est plus proche de B que de A, c'est une accélération.

RESULTATS :

Grapho 99 - 40. 8 arcs du chemin le plus critique sont surveillés.

	nombre de réalisations	Moy	Erreur	Varian-co.	Erreur	degré de liberté	Q	$\chi^2_{0,95}$
Sans accél.	4.000	234.518	0.129	17.577	0.77	22	32.502	33.924
Avec accél.	2.000	232.364	0.285	42.314	2.622	22	5.598	33.924

La criticité des chemins n'a pas changé comme $\text{Max}_i \rho_i = 0.89$.

La distribution de $\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est voisine de celle de la longueur du chemin le plus critique. Or celle-ci n'est pas normale. Ce qui explique le résultat.

L'accélération provoque une diminution de la moyenne et augmente nettement la variance.

Grapho 48 - 40. 7 arcs du chemin le plus critique sont surveillés.

N SIMUL	Moy.	Erreur	Varian-co	Erreur	degré de liberté	Q	$\chi^2_{0,95}$	$\chi^2_{0,90}$
Sans accél. 4.000	73.345	0.067	4.779	0.209	19	3.767	30.144	
Avec accél. 4.000	70.715	0.073	5.621	0.246	19	26.441	30.144	27.204

Dans l'accélération le chemin le plus critique a changé,

De $\text{Max}_i \rho_i = 0.35$ on est passé à $\text{Max}_i \rho_i = 64.7$

Donc paradoxalement l'approximation PERT est meilleure quand les durées sont liées.

Cela explique que l'hypothèse de normalité ne soit pas rejetée par le test du χ^2 .

9-I CALCUL DES MOMENTS DU MAXIMUM DE 2 VARIABLES NORMALES ET DE SA COVARIANCE AVEC UNE 3 E VARIABLE NORMALE. cf [10] .

9-I-I Calcul des moments de $\text{Max}(\xi, \eta)$

Soit ξ et η 2 variables normales de moyenne μ_1 et μ_2 d'écart types σ_1 et σ_2 de coefficient de corrélation ρ .

Supposons que (ξ, η) suit une loi normale à 2 dimensions. Sa densité s'écrit:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]\right]$$

Soit v_i le ième moment de la variable $\text{Max}(\xi, \eta)$

$$v_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\text{Max}(x, y)]^i f(x, y) dx dy$$

Décomposons le domaine d'intégration \mathbb{R}^2 en $D_1 \cup D_2$ tels que:

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$

v_i se décompose en $v_i = v_i^1 + v_i^2$ avec:

$$v_i^1 = \iint_{D_1} [\text{Max}(x, y)]^i f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^i \left[\int_{-\infty}^y f(x, y) dx \right] dy$$

$$v_i^2 = \iint_{D_2} [\text{Max}(x, y)]^i f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i \left[\int_{-\infty}^x f(x, y) dy \right] dx$$

On remarque que v_i^1 se déduit de v_i^2 en changeant x en y et l'indice i en 2.

$$v_i^1 = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^i \left[\int_{-\infty}^y \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{2(y-\mu_2)(x-\mu_1)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] \right] dx \right] dy$$

$$v_i^1 = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^i \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] \left[\int_{-\infty}^y \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] dx \right] dy$$

Posons:

9-I-I

$$Z = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \quad \text{d'où} \quad y = \mu_2 + \sigma_2 Z$$

$$I(y) = I'(Z) = \int_{-\infty}^{\mu_2 + \sigma_2 Z} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_1 - \rho \sigma_1 z}{\sigma_1(1-\rho^2)^{1/2}}\right)^2\right] dx.$$

Posons:

$$u = \frac{x - \mu_1 - \rho \sigma_1 z}{\sigma_1(1-\rho^2)^{1/2}} \quad \text{d'où} \quad du = \frac{dx}{\sigma_1(1-\rho^2)^{1/2}}$$

$$\text{Soit } v(Z) = \frac{\mu_2 - \mu_1 + Z(\sigma_2 - \rho \sigma_1)}{\sigma_1(1-\rho^2)^{1/2}}$$

$$I'(z) = \sigma_1(1-\rho^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{v(z)} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \sqrt{2\pi} \sigma_1(1-\rho^2)^{1/2} \Phi[v(z)]$$

$$\text{où } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

$$V_i^1 = \frac{\sqrt{2\pi} \sigma_1(1-\rho^2)^{1/2}}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_2 + \sigma_2 z)^i \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \Phi(v(z)) \sigma_2 dz$$

$$V_i^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_2 + \sigma_2 z)^i \varphi(z) \Phi(v(z)) dz$$

Dérivons sous le signe \int par rapport à μ_1 de façon à changer Φ en φ . Est ce possible?

V_i^1 est de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z, \mu_1) dz$ $f_{\mu_1}^1(z, \mu_1)$ est de la forme

$$\frac{(k_1 + k_2 z)^i}{k_3} \varphi(z) \varphi\left[\frac{k_4 - \mu_1 + k_5 z}{k_3}\right]$$

où $\varphi(u) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-u^2/2)$? k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 sont des constantes.

$f_{\mu_1}^1(z, \mu_1)$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On montre que $e^{-u^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{m}\right)^m}$

9-I-I

En faisant $m=2$ et en changeant u en $u/\sqrt{2}$

$$e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{4}\right)^2}$$

Utilisant cette majoration : $f_{\mu_1}^1(z, \mu_1) \leq g(z, \mu_1)$ où $g(z, \mu_1)$ est tel que :

$$g(0, \mu_1) \neq 0$$

$$g(z, \mu_1) \sim \frac{k}{z^2 + i}$$

$g(z, \mu_1)$ est donc intégrable pour $i=1,2,3,4$. D'après le théorème de la convergence dominée, on peut dériver sous le signe \int .

$$V_i^1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_2 + \sigma_2 z)^i \varphi(z) \varphi(v(z)) \frac{dz}{\sigma_1(1-\rho^2)^{1/2}}$$

Transformons ce produit de fonctions φ

$$\varphi(z) \varphi(v) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(z^2 + v^2)\right]$$

$$z^2 + v^2 = \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[z^2 \sigma_1^2(1-\rho^2) + (\mu_2 - \mu_1)^2 + z^2(\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \rho^2\sigma_1^2) + 2z(\mu_2 - \mu_1)(\sigma_2 - \rho\sigma_1) \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[z^2 a^2 + (\mu_2 - \mu_1)^2 + 2z(\mu_2 - \mu_1)(\sigma_2 - \rho\sigma_1) \right]$$

$$\text{avec } a^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$z^2 + v^2 = \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[(za + \frac{1}{a}(\mu_2 - \mu_1)(\sigma_2 - \rho\sigma_1))^2 + (\mu_2 - \mu_1)^2 - \frac{1}{a^2}(\mu_2 - \mu_1)^2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)^2 \right]$$

$$\text{Posons } u = \frac{za}{\sigma_1(1-\rho^2)^{1/2}} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{a\sigma_1(1-\rho^2)^{1/2}}$$

$$z^2 + v^2 = u^2 + \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{a}\right)^2 \frac{a^2 - (\sigma_2 - \rho\sigma_1)^2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} = u^2 + m^2.$$

En posant $m = \frac{\mu_2 - \mu_1}{a}$ 9-I-1

$$z = \sigma_1 \frac{(1-\rho^2)^{1/2}}{a} u + m \frac{\sigma_2 - \rho\sigma_1}{a} ; dz = \sigma_1 \frac{(1-\rho^2)^{1/2}}{a} du$$

$$v_i^1 = -\varphi(m) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_2 + \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{a} m + \frac{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}}{a} u \right]^i \varphi(u) \frac{du}{a}$$

v_i^1 est la dérivée de v_i^1 par rapport à μ_1

Cherchons $(v_i^1)'_m$

$$(v_i^1)'_m = (v_i^1)'_{\mu_2} \times (\mu_2)'_m = (v_i^1)'_{\mu_2} \times a \quad \text{puisque } \mu_2 = \mu_1 + am$$

$$(v_i^1)'_m = -\varphi(m) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_2 + \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{a} m + \frac{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}}{a} u \right]^i \varphi(u) du$$

Cherchons le moment du 1er ordre:

$$v_1^1(m) = -\varphi(m) \left[\mu_2 + \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{a} m \right]$$

$$v_1^1(m) = -\int_m^{+\infty} v_1^1(n) dn \quad \text{car } v_1^1(+\infty) = 0$$

$$v_1^1 = \mu_2 \Phi(-\alpha) + \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{a} \varphi(\alpha)$$

$$\alpha = m = \frac{\mu_2 - \mu_1}{a} \quad a^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$v_1^2 = \mu_1 \Phi(\alpha) + \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)}{a} \varphi(-\alpha) \quad \text{d'où le résultat ;}$$

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2}{a} \quad a^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

$v_1 = \mu_1 \Phi(\alpha) + \mu_2 \Phi(-\alpha) + a \varphi(\alpha)$ On obtient de même:

$$v_2 = (\mu_1^2 + \sigma_1^2) \Phi(\alpha) + (\mu_2^2 + \sigma_2^2) \Phi(-\alpha) + (\mu_1 + \mu_2) a \varphi(\alpha)$$

$$v_3 = (\mu_1^3 + 3\mu_1\sigma_1^2) \Phi(\alpha) + (\mu_2^3 + 3\mu_2\sigma_2^2) \Phi(-\alpha)$$

$$+ \left[(\mu_1^2 + \mu_1)\mu_2 + \mu_2^2 \right] a + \left[2\sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\sigma_2^4 - 2\sigma_1^3\sigma_2\rho - 2\sigma_1\sigma_2^3\rho - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho^2 \right] \frac{a^2}{3} \varphi(\alpha)$$

$$v_4 = (\mu_1^4 + 6\mu_1^2\sigma_1^2 + 3\sigma_1^4) \Phi(\alpha) + (\mu_2^4 + 6\mu_2^2\sigma_2^2 + 3\sigma_2^4) \Phi(-\alpha)$$

$$+ \left\{ (\mu_1^3 + \mu_1^2)\mu_2 + \mu_1\mu_2^2 + \mu_2^3 \right\} a - 3\alpha(\sigma_1^4 - \sigma_2^4) + 4\mu_1\sigma_1^3 \left[3(\sigma_1 - \sigma_2\rho)/a - (\sigma_1 - \sigma_2\rho)^3/a^3 \right] \varphi(\alpha)$$

$$- (\sigma_1 - \sigma_2\rho)^3/a^3 + 4\mu_2\sigma_2^3 \left[3(\sigma_2 - \sigma_1\rho)/a - (\sigma_2 - \sigma_1\rho)^3/a^3 \right] \varphi(\alpha)$$

9-I-2 Calcul de COV (Max (ξ, η, ζ))

Soit ζ une 3e variable normale que l'on peut supposer centrée réduite. Soit ρ_{I3}

le coefficient de corrélation entre ξ et ζ , ρ_2 entre η et ζ .

$$\text{Soit } X = (\xi - \mu_I) / \sigma_I ; Y = (\eta - \mu_2) / \sigma_2$$

Admettons que le vecteur aléatoire (X, Y, ζ) soit normalement distribué, sa densité est:

$$f_1(x) = \frac{R^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} X^t A X\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho_2 \\ \rho & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 - \rho_2^2 & \rho_1 \rho_2 - \rho & \rho \rho_2 - \rho_1 \\ \rho_1 \rho_2 - \rho & 1 - \rho_1^2 & \rho \rho_1 - \rho_2 \\ \rho \rho_2 - \rho_1 & \rho \rho_1 - \rho_2 & 1 - \rho^2 \end{bmatrix}$$

$$R = 1 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho^2 + 2\rho\rho_1\rho_2$$

D'où $f(x, y, t) = (2\pi)^{-3/2} R^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} Q)$ où

$$Q = R^{-1} \left[(1 - \rho_2^2) X^2 + (1 - \rho_1^2) Y^2 + (1 - \rho^2) t^2 + 2(\rho_1 \rho_2 - \rho) XY + 2(\rho \rho_2 - \rho_1) tX + 2(\rho \rho_1 - \rho_2) tY \right]$$

Soit $f(x, y, t)$ la densité du vecteur aléatoire (ξ, η, ζ) . Cherchons son lien avec $f_1(x, y, t)$. Soit F et F_1 les fonctions de répartition correspondantes.

$$F_1(x, y, t) = P\{X < x, Y < y, \zeta < t\} \\ = P\{\xi < \sigma_1 x + \mu_1, \eta < \sigma_2 y + \mu_2, \zeta < t\}$$

$$F_1(x, y, t) = F(\sigma_1 x + \mu_1, \sigma_2 y + \mu_2, t)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \text{d'où } f(x, y, t) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} f_1\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}, \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}, t\right)$$

$$f(x, y, t) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} f_1(x, y, t) = (2\pi)^{-3/2} R^{-1/2} (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} \exp(-\frac{1}{2} Q)$$

Calculons: $E = E[\zeta \cdot \max(\xi, \eta)]$

$$E = \iiint t \max(x, y) f(x, y, t) dx dy dt$$

Q peut se mettre sous la forme:

$$Q = R^{-1} \left[-\frac{R}{2(1 - \rho^2)} (x^2 + y^2 - 2\rho xy) - (1 - \rho^2) \left(t + \frac{\rho \rho_2 - \rho_1}{1 - \rho^2} x + \frac{\rho \rho_1 - \rho_2}{1 - \rho^2} y \right)^2 \right]$$

$$E = (2\pi)^{-3/2} (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} R^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, y) \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right] I(x, y) dx dy$$

où $I(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left\{-\frac{1 - \rho^2}{2R} \left(t + \frac{\rho \rho_2 - \rho_1}{1 - \rho^2} x + \frac{\rho \rho_1 - \rho_2}{1 - \rho^2} y\right)^2\right\} dt$

Posons $u = \left[t + \frac{\rho \rho_2 - \rho_1}{1 - \rho^2} x + \frac{\rho \rho_1 - \rho_2}{1 - \rho^2} y \right] \sqrt{\frac{1 - \rho^2}{R}}$

comme $\int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2/2} du = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$

$$I(x, y) = \frac{-\sqrt{2\pi} \sqrt{R}}{(1 - \rho^2)^{3/2}} \left[(\rho \rho_2 - \rho_1) x + (\rho \rho_1 - \rho_2) y \right]$$

En partageant R^2 de la façon précédente (cf 9-I-1) $E = E_1 + E_2$ (E_2 s'obtient à partir de E_1 en changeant x en y et les indices 1 en 2) avec:

$$E_1 = (2\pi)^{-1} (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} (1 - \rho^2)^{-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\rho_1 - \rho \rho_2) x + (\rho_2 - \rho \rho_1) y \right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right] dy dx$$

Tenant compte que :

$$x = \mu_1 + \sigma_1 X \quad y = \mu_2 + \sigma_2 Y \\ E_1 = (2\pi)^{-1} (1 - \rho^2)^{-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 + \sigma_1 X) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mu_2 + \sigma_2 Y - \mu_2)/\sigma_2}{[(\rho_1 - \rho \rho_2) x + (\rho_2 - \rho \rho_1) y]} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right] dy \right\} dx$$

$$E_1 = (2\pi)^{-1} (1 - \rho^2)^{-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 + \sigma_1 X) \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right) \cdot [I_1(x) + I_2(x)] dx$$

$$I_1(x) = (p_1 - p_2) X \int_{-\infty}^{(\mu_1 + \sigma_1 x) / \sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-p^2)} (y - px)^2\right] dy$$

Posons $u = \frac{y - px}{\sqrt{1-p^2}}$; $v(x) = \frac{\mu_1 - \mu_2 + (\sigma_1 - p\sigma_2) X}{\sigma_2 \sqrt{1-p^2}}$

$$I_1(x) = (p_1 - p_2) X \sqrt{1-p^2} \int_{-\infty}^{v(x)} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du$$

$$I_1(x) = \sqrt{2\pi} (p_1 - p_2) X \sqrt{1-p^2} \Phi[v(x)]$$

$$I_2(x) = (p_2 - p_1) \int_{-\infty}^{(\mu_1 + \sigma_1 x - \mu_2) / \sigma_2} y \exp\left[-\frac{1}{2(1-p^2)} (y - px)^2\right] dy$$

Posons $u = \frac{y - px}{\sqrt{1-p^2}}$

$$I_2(x) = (p_2 - p_1) \int_{-\infty}^{v(x)} (u \sqrt{1-p^2} + px) \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] \sqrt{1-p^2} du$$

$$I_2(x) = (p_2 - p_1) \left\{ [px \sqrt{1-p^2} \sqrt{2\pi} \Phi[v(x)] - (1-p^2) \sqrt{2\pi} \varphi[v(x)]] \right\}$$

$$E_2 = \frac{1}{1-p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 + \sigma_1 x) \varphi(x) \left\{ (p_1 - p_2) X \Phi[v(x)] + (p_2 - p_1) [px \Phi[v(x)] - \sqrt{1-p^2} \varphi[v(x)]] \right\} dx$$

$$E_2 = p_1 J_2 - \frac{p_2 - p_1}{1-p^2} J_2$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 + \sigma_1 x) \varphi(x) \Phi\left[\frac{\mu_1 - \mu_2 + (\sigma_1 - p\sigma_2) X}{\sigma_2 \sqrt{1-p^2}}\right] dx$$

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 + \sigma_1 x) \varphi(x) \varphi\left[\frac{\mu_1 - \mu_2 + (\sigma_1 - p\sigma_2) X}{\sigma_2 \sqrt{1-p^2}}\right] dx$$

$$(J_2)'_{\mu_2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 + \sigma_1 x) \varphi(x) \varphi\left[\frac{\mu_1 - \mu_2 + (\sigma_1 - p\sigma_2) X}{\sigma_2 \sqrt{1-p^2}}\right] \frac{dx}{\sigma_2 \sqrt{1-p^2}}$$

En s'inspirant du calcul de J_1' en 9-I-1, on pose:

$$u = \frac{x_0}{\sigma_2 \sqrt{1-p^2}} + \frac{m \cdot (\sigma_1 - p\sigma_2)}{\sigma_2 \sqrt{1-p^2}} \quad \text{avec} \quad a^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2p\sigma_1\sigma_2$$

$$m = \frac{\mu_1 - \mu_2}{a}$$

$$(J_2)'_{\mu_2} = -\varphi(m) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_1 + \frac{\sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-p^2}}{a} u - m \frac{\sigma_1 (\sigma_1 - p\sigma_2)}{a} \right] \cdot \left(\frac{\sigma_2 \sqrt{1-p^2}}{a} u - m \frac{(\sigma_1 - p\sigma_2)}{a} \right) \varphi(u) \frac{du}{a}$$

$$(J_2)'_{\mu_2} = -\frac{\varphi(m)}{a} \left[-m \mu_1 \frac{(\sigma_1 - p\sigma_2)}{a} + m^2 \sigma_2 \frac{(\sigma_1 - p\sigma_2)^2}{a} + \frac{\sigma_1 \sigma_2^2 (1-p^2)}{a^2} \right]$$

$$(J_2)'_m = (J_2)'_{\mu_2} - (\mu_2)'_m = -a (J_2)'_{\mu_2}$$

$$(J_2)'_m = \frac{\sigma_1 \sigma_2^2 (1-p^2)}{a^2} \varphi(m) - \mu_1 \frac{(\sigma_1 - p\sigma_2)}{a} m \varphi(m) + \sigma_1 \frac{(\sigma_1 - p\sigma_2)^2}{a} m^2 \varphi(m)$$

quand $m \rightarrow \infty$ $J_1 \rightarrow 0$ car $\Phi[v(x)] < 1$ (convergence dominée)

$$J_2 \approx \int_{-\infty}^m (J_2)'_n dn$$

$$\int_{-\infty}^m \varphi(n) dn = \Phi(m) ; \int_{-\infty}^m n \varphi(n) dn = -\varphi(m) ; \int_{-\infty}^m n^2 \varphi(n) dn = -m \varphi(m) + \Phi(m)$$

$$J_2 = \sigma_2 \Phi(m) + \mu_1 \frac{(\sigma_1 - p\sigma_2)}{a} \varphi(m) - \sigma_2 \frac{(\sigma_1 - p\sigma_2)^2}{a} m \varphi(m)$$

$$J_2 = -\sqrt{1-p^2} \cdot \sigma_2 \sqrt{1-p^2} \quad \text{d'où d'après 9-I-1}$$

$$J_2 = \varphi(m) \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu_1 - \sigma_1 \frac{(\sigma_1 - \rho \sigma_2)}{a} m + \sigma_1 \sigma_2 \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{a} u \right] \varphi(u) du$$

$$J_2 = \varphi(m) \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} \left[\mu_1 - \sigma_1 \frac{(\sigma_1 - \rho \sigma_2)}{a} m \right]$$

$$E_1 = \sigma_1 \rho_1 \Phi(m) + \varphi(m) \left[\frac{\mu_1}{a} (\rho_1 \sigma_1 - \rho_2 \sigma_2) \right] + m \varphi(m) \left[\frac{\sigma_1}{a} (-\sigma_1 \rho_1 + \rho \sigma_1 \sigma_2 + \rho_2 \sigma_2) - \rho \rho_2 \sigma_2 \right]$$

$$E_1 + E_2 = \sigma_1 \rho_1 \Phi(m) + \sigma_2 \rho_2 \Phi(-m) + \varphi(m) \left[\frac{\mu_1 - \mu_2}{a} (\rho_1 \sigma_1 - \rho_2 \sigma_2) \right] + m \varphi(m) (\sigma_2 \rho_2 - \sigma_1 \rho_1)$$

$$\Rightarrow E[\zeta \max(\xi, \eta)] = \sigma_1 \rho_1 \Phi(m) + \sigma_2 \rho_2 \Phi(-m)$$

Comme ζ est centrée

$$\text{cov}[\zeta, \max(\xi, \eta)] = \sigma_1 \rho_1 \Phi(\alpha) + \sigma_2 \rho_2 \Phi(-\alpha)$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{\mu_1 - \mu_2}{a}$$

9 - 2 - APPLICATION A L'ETUDE D'UN PROJET A DUREES ALÉATOIRES.

9 - 2 - 1 principe.

x_1 et x_2 étant 2 variables aléatoires prenant les valeurs x_1 et x_2 respectivement lors d'une réalisation, la variable aléatoire $\text{Max}(x_1, x_2)$ est définie comme celle qui prend la valeur $x = \text{Max}(x_1, x_2)$ lors de cette réalisation.

La loi de composition $(x_1, x_2) \mapsto \text{Max}(x_1, x_2)$ est une loi associative sur $\mathbb{R} =$

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, \forall x_3 \in \mathbb{R} \quad \begin{aligned} \text{Max}(x_1, \text{Max}(x_2, x_3)) &= \\ \text{Max}(\text{Max}(x_1, x_2), x_3) &= \\ \text{Max}(x_1, x_2, x_3) & \end{aligned}$$

Si x_1, x_2, x_3 sont les valeurs prises lors d'une réalisation quelconque par les variables aléatoires x_1, x_2, x_3 , on déduit que $\text{Max}(x_1, x_2, x_3) = \text{Max}(x_1, \text{Max}(x_2, x_3)) = \text{Max}(\text{Max}(x_1, x_2), x_3)$

L'opération "prise du maximum de 2 variables aléatoires" est donc associative.

La méthode de CLARK permet d'obtenir une approximation des moments de $\text{Max}(x_1, x_2, x_3)$. En effet :

Supposons que x_1, x_2, x_3 , soient 3 variables normales indépendantes.

On sait calculer exactement les moments de $\text{Max}(x_2, x_3)$. Si on fait l'approximation que $\text{Max}(x_2, x_3)$ est normalement distribuée, on peut calculer les moments de $\text{Max}(x_1, \text{Max}(x_2, x_3))$ c'est à dire de $\text{Max}(x_1, x_2, x_3)$. Par récurrence, on voit que l'on peut calculer ainsi les moments du maximum de n variables normales.

L'étude de l'approximation sera faite plus loin.

Étudions 2 applications de ce procédé.

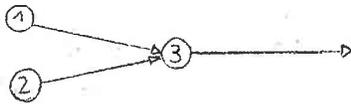
9 - 2 - 2 - METHODE DE L'OOTSMAN cf [11]

Elle a pour but de calculer la moyenne et la variance de chaque étape d'un projet dont on suppose que les durées sont des variables aléatoires normales et indépendantes.

Cette méthode consiste à :

- dessiner le graphe associé au projet de façon à avoir au plus 2 arcs incidents à chaque sommet.
- ordonnancer les arcs cf 4 - 5.
- calculer les moments de la date de chaque étape, (on considère cette date comme le maximum de 2 variables normales).

Exemple :



Soit t_1, t_2, t_3 les dates des étapes 1, 2, 3 ; d_{13}, d_{23} les durées des tâches (1, 3) et (2, 3).

$t_1, t_2, t_3, d_{13}, d_{23}$ sont des variables normales, d_{13} et d_{23} sont indépendantes. t_1, t_2 peuvent être liés $t_3 = \text{Max} [t_1 + d_{13}, t_2 + d_{23}]$. La difficulté du calcul consiste à ranger les covariances des dates des étapes. Les calculs sont beaucoup plus lourds que dans la méthode PERT. L'estimation de la longueur moyenne du projet est bonne mais celle de la variance ne l'est pas du tout. Ce qui fait conclure à Monsieur Lootsma que le gain de précision n'est pas assez important vu la complication des calculs.

9-2-2 (3)

9 - 2 - 3 - CALCUL DES PROBABILITES DE CRITICITE DES CHEMINS.

On suppose que les durées des tâches sont indépendantes et que les n chemins comportent suffisamment d'arcs pour être normalement distribués. La probabilité de criticité du chemin n° 1 est

$$P_1 = P_r [x_1 > \text{Max} (x_2, x_3, \dots, x_n)]$$

$$= P_2 [x_1 > \text{Max} \{x_2, \text{Max} [x_3, \text{Max} (\dots)]\}]$$

moyennant l'approximation déjà signalée, on peut calculer la moyenne μ et la variance σ^2 de $\text{Max} (x_2, x_3, \dots, x_n)$ par les formules de CLARK et le coefficient de corrélation ρ de x , avec $\text{liax} (x_2, x_3, \dots, x_n)$

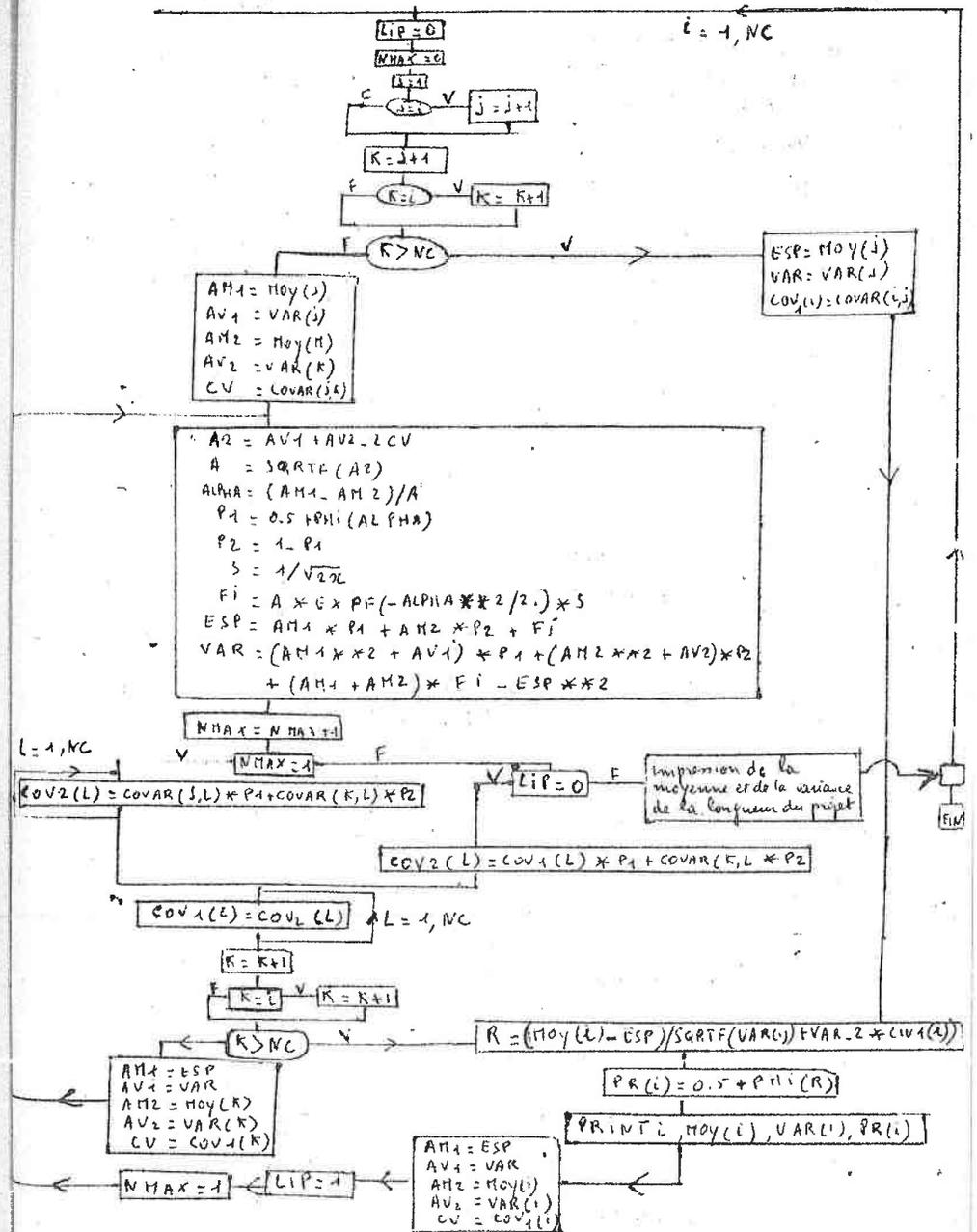
On a alors d'après 7-3-1.
$$P_1 = \frac{\mu_1 - \mu}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma_1\sigma}}$$

Par ailleurs, ayant calculé la moyenne et la variance de $\text{Max} (x_2, x_3, \dots, x_n)$ cela ne coûte pas cher de les calculer pour $\text{liax} (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ qui est la longueur totale du projet.

Il est évidemment impossible pratiquement de déterminer tous les chemins d'un graphe. On fera donc un calcul PERT préalable qui permettra d'extraire un sous-graphe appelé fuséau critique formé des chemins de criticité non négligeable.

Sur ce graphe de taille réduite on pourra calculer les probabilités de criticité des chemins et les moments de la longueur du projet. C'est cette méthode que nous appellerons "PERT affiné" que nous étudierons au chapitre X.

CALCUL DES PROBABILITES DE CRITICITE DES CHEMINS



Moy (i) = moyenne du chemin i

VAR (i) = variance du chemin i

COVAR (i, j) = covariance des chemins i, j

PR (i) = probabilité de criticité du chemin i

COV₁, COV₂ = tableaux intermédiaires

$$PHI(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On remarque que l'organigramme ne fait pas d'économie de calcul. Par exemple, Si le graphe est formé de 4 chemins de longueurs x_1, x_2, x_3, x_4 , on calcule successivement les moments de

$$\text{Max}(x_2, x_3, x_4)$$

$$\text{Max}(x_1, x_3, x_4)$$

$$\text{Max}(x_1, x_2, x_4)$$

$$\text{Max}(x_1, x_2, x_3)$$

Donc on calcule 2 fois de suite les moments de $\text{Max}(x_2, x_3, x_4)$ et de $\text{Max}(x_1, x_2)$. On pourrait donc gagner en rapidité mais il se poserait alors un problème de stockage difficile.

L'avantage de procéder suivant l'organigramme est le suivant :

En calculant par exemple $\text{Max}(x_1, x_2, x_3) = \text{Max}[x_1, \text{Max}(x_2, x_3)]$ on remplace $\text{Max}(x_2, x_3)$ par une variable x normale de même moyenne et variance. Comme $\text{Max}(x_2, x_3)$ n'est pas une variable normale, x n'est pas tout à fait égal à $\text{Max}(x_2, x_3)$. Il s'ensuit que l'opération Max n'est pas vraiment associative en faisant l'approximation de CLARK

$$\text{Max}[x_1, \text{Max}(x_2, x_3)] \neq \text{Max}[\text{Max}(x_1, x_2), x_3]$$

Donc le calcul des probabilités de criticité et des moments de la longueur du projet dépend de l'ordre choisi dans les différentes opérations "Max". Dans l'organigramme ci-joint, on calcule n fois de suite les moments, de la longueur du projet. On obtient n résultats distincts, dont la dispersion donne une idée de l'erreur systématique liée à l'ordre des chemins dans les différentes opérations "Max". On prendra comme valeur de la moyenne (resp. de la variance) la moyenne arithmétique des n résultats obtenus.

9 - 3 - ETUDE DE L'APPROXIMATION DE CLARK.

9 - 3 - 1 - ETUDE THEORIQUE.

Dans le calcul des probabilités de criticité de la moyenne et de la variance de la longueur du projet, l'approximation de CLARK se fait en 2 temps :
Tout d'abord on considère que le maximum de 2 variables normales est normal. Ensuite on calcule les moments du maximum d'une variable normale et d'une

variable non normale en remplaçant cette dernière par une variable normale de même moyenne et variance. On a vu en 8 que le maximum de 2 variables normales n'est en général pas une variable normale.

Considérant un graphe réduit à 2 chemins de longueur normale x_1 et x_2 , $\text{Max}(x_1, x_2)$ est normalement distribuée si un chemin est toujours critique. Dans le cas contraire l'erreur commise en faisant l'hypothèse de normalité dépend des moyennes des variances et du coefficient de corrélation. Mais ce n'est pas comme le laisse entendre CLARK dans [10] quand les longueurs moyennes des chemins sont égales que l'approximation normale est la plus mauvaise, cf 8. Il est impossible de déterminer au vu du graphe l'erreur commise en faisant l'approximation de CLARK.

Nous nous contenterons de nous faire une idée de cette erreur sur des exemples en nous posant les 3 questions :

- 1°/ Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur?
- 2°/ L'erreur croît-elle avec le nombre de chemins ?
- 3°/ Comment l'erreur dépend-elle de la structure du graphe?

9 - 3 - 2 - ETUDE DE L'ERREUR SUR DES EXEMPLES :

Etudions d'abord la dispersion de la moyenne et de la variance de la longueur du projet calculées par CLARK quand on modifie l'ordre des chemins dans les opérations "Max". Pour la moyenne et la variance on prend pour estimation par la méthode de CLARK, la moyenne arithmétique des n résultats obtenus (colonnes (1) et (5) du tableau "Comparaison de la méthode de CLARK avec la simulation". On calcule l'écart maximum par rapport à cette moyenne (colonnes (2) et (6)).

Si on compare cet écart avec l'écart entre l'estimation par CLARK et l'estimation par la simulation, on constate qu'il lui est très inférieur. Cet écart ne peut donc donner une idée de l'erreur commise. Il ne nous reste qu'à comparer les estimations de CLARK avec les résultats soit du calcul strict dans des cas simples, soit de la simulation en général.

COMPARAISON AVEC LE CALCUL STRICT.

1er exemple :

On peut calculer de façon stricte la moyenne de la valeur maximum d'un n échantillon extrait d'une population normale. Cet échantillon peut être considéré comme la réalisation d'un vecteur aléatoire $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ où les ξ_i sont des variables normales indépendantes.

Prenons les contrées réduites.

Comparons cette moyenne avec celle obtenue par la méthode de CLARK.

Tableau extrait de [10]

9-3-2

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
calcul strict	0.5642	0.8463	1.0294	1.1630	1.2672	1.3512	1.4236	1.4850	1.5388
CLARK (2)	0.5642	0.8476	1.0310	1.1643	1.2679	1.3522	1.4230	1.4837	1.5367
(2)-(1)	0	+ 0.0013	+ 0.0016	+ 0.0013	+ 0.0007	0	- 0.0006	- 0.0013	- 0.0021
$\frac{(2)-(1)}{(1) \frac{1}{n}}$	0	1.54	1.57	1.12	0.55	0	-0.42	-0.88	-1.37

On constate sur cet exemple que l'erreur relative commise par la méthode de CLARK sur la moyenne du maximum de $n = 1, \dots, 10$ variables normales indépendantes et de même loi est inférieure en valeur absolue à 1.6% , elle est tantôt positive, tantôt négative, elle n'augmente pas en valeur absolue avec n donc avec $\text{Max}_{i=1, \dots, n} P_i$.

2ème exemple :

On a montré en 7-3-2 comment calculer les probabilités de criticité de 3 chemins de même longueur moyenne. Comparons les avec celles calculées par la méthode de CLARK.

chemin (1)	moyenne (2)	variance (3)	calcul (4)	$100 P_i$ CLARK (5)	(5) - (4)
1	10	1	25 . 31	24 . 97	- 0 . 34
2	10	100	42 . 50	42 . 27	- 0 . 23
3	10	25	32 . 25	30 . 15	- 0 . 10

L'erreur commise par CLARK sur P_i est inférieure à 0.004. La méthode de CLARK sous-estime ici les P_i .

COMPARAISON AVEC LA SIMULATION.

On prend comme exemple soit des graphes simples dont la structure est telle que la simulation donne la probabilité de criticité des chemins soit des graphes quelconque. On traite ces derniers en isolant un fuscau critique comme on le décrit au chapitre 10. La simulation estime les probabilités de criticité des arcs. On les comparera avec celles obtenues par la méthode de CLARK.

ERREUR SUR LA MOYENNE :

Elle n'excède pas 2% en grandeur relative.

Dans 7 cas sur 9, la méthode de CLARK sur-estime la moyenne. L'erreur n'augmente pas avec le nombre de chemins.

ERREUR SUR LA VARIANCE :

Elle n'excède pas 32%, c'est important, mais malgré tout inférieur à l'erreur commise par la méthode PERT.

Dans 7 cas sur 9 la variance est sous-estimée par la méthode de CLARK. L'erreur n'augmente pas avec le nombre de chemins.

ERREUR SUR LES PROBABILITES DE CRITICITE :

Dans les graphes 1 à 5 il s'agit de celles des chemins, de 5 à 9 de celles des arcs. Pour le graphe 6 le fuscau utilisé est plus petit que le fuscau critique d'où l'écart maximum de 0.14.

Pour les autres graphes l'erreur absolue ne dépasse pas 0.06.

L'écart joue dans les 2 sens. Il n'augmente pas avec le nombre de chemins.

9-3-3 - CONCLUSION :

La méthode de CLARK est adaptable sur de grands graphes à condition de les réduire à leur fuscau critique. Elle a l'avantage par rapport à la méthode PERT de donner une bonne estimation de la moyenne (à 2% près environ) et de fournir les probabilités de criticité des arcs avec une erreur absolue de 0.06 environ. Elle commet sur la variance une erreur importante (environ 32%) malgré tout inférieure à celle commise par le PERT.

10 - 1 - INTRODUCTION.

En pratique on recherche une méthode plus précise que la méthode PERT et plus rapide que la méthode de simulation. On propose ici 2 méthodes qui consistent à faire dans une première étape un calcul rapide et approximatif au bout duquel on simplifie le graphe du projet en éliminant les arcs peu critiques.

Dans une deuxième étape on peut alors faire un calcul plus poussé. La 1ère méthode que nous appellerons PERT affiné est une application de la méthode de CLARK. La 2ème méthode est une simulation accélérée.

10 - 2 - LA METHODE PERT AFFINEE :

On suppose que :

- les durées des tâches sont indépendantes,
- les chemins ont assez d'arcs pour que leur longueur soit normalement distribuée;
- le graphe a une seule entrée et une seule sortie.

Le principe de la méthode a été esquissé en 9 - 2 - 3 -

10 - 2 - 1 - NOTION DE FUSEAU :

Définition : La marge d'un arc est égale à la longueur moyenne du chemin P critique diminuée de la longueur moyenne du chemin en moyenne le plus long passant par l'arc.

Définition : On appelle fuscau de marge s le sous - graphe composé des arcs de marge inférieure ou égale à s

Définition : Un arc (x_i, x_j) est dit pendant si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1° x_i n'est pas l'entrée, x_j n'est pas la sortie du graphe,
- 2° soit il n'existe par d'arc d'extrémité x_i , soit il n'existe pas d'arc d'origine x_j .

PROPRIETE : Un fuscau F_s de marge s ne comporte pas d'arcs pendants.

Preuve :

Notons F_s l'ensemble des arcs du fuscau de marge s.

Soit L la longueur moyennant du chemin P critique.

Soit un arc (x_i, x_j) de F_s , x_i n'étant pas l'entrée, x_j n'étant pas la sortie, marge $(x_i, x_j) \geq s$.

COMPARAISON DE LA METHODE DE CLARK AVEC LA SIMULATION

GRAPHE				MOYENNE				VARIANCE				PROBA					
N°	NA	NS	MSIMUL	MC	Max Pz	CLARK (1)	Erreur (2)	SIMUL (3)	Erreur (4)	Erreur (3)-(4)	CLARK (5)	Erreur (6)	SIMUL (7)	Erreur (8)	Erreur (7)-(8)	(9)-(5)	Ecart max (9)
1	5	4	40 000	3	68.75	20.22	0.004	20.174	0.019	-0.098	1.199	0.029	0.95	0.026	-0.25	-26.3%	5.9
2	3	2	10 000	3	42.5	15.87	0.018	15.197	0.118	-0.47	23.48	5.3	21.92	0.9	+8.44	+46.9%	0.34
3	5	2	10 000	5	34.36	16.971	0.018	16.703	0.102	-0.208	20.134	5.3	29.31	0.81	+9.18	+44.7%	4.45
4	8	4	4 000	6	28.2	21.498	0.009	21.481	0.035	-0.017	1.431	0.002	1.21	0.054	+0.08	+6.6%	0.17
5	10	2	1 000	40	31.1	23.535	0.013	23.542	0.085	+0.721	4.358	0.08	4.80	0.461	+0.44	+24.4%	3.4
6	97	40	2 000	31	74.5	288.058	0.1	287.697	0.182	-0.721	16.484	0.36	17.300	1.072	+0.810	+4.7%	14
7	48	40	4 000	9	34.4	73.479	0.04	73.345	0.035	-0.134	4.893	0.4	4.779	0.21	-0.114	-2.4%	3.32
8	99	40	4 000	6	38.7	234.439	0.02	234.518	0.13	+0.079	17.555	0.03	17.577	0.77	+0.022	+0.12%	4.7
9	47	45	5 000	24	69.4	326.760	0.070	326.139	0.517	-0.320	17.555	0.03	17.577	0.77	+0.022	+0.12%	3

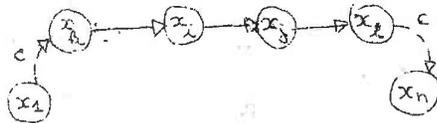
- (1) moyenne arithmétique des estimations obtenues par CLARK
 (2) écart maximum par rapport à (1)
 (4) erreur d'estimation à 95%
 (9) P Simul - P Clark . 100
 NA=nombre d'arcs
 NS=nombre de sommets
 MSimul=nombre de réalisations

Graphes N° 1 loi normale chemins dépendants

- 1 loi normale chemins dépendants
- 2 indép. de long moyennes égal
- 3 Un écart type vaut 10
- 4 chem. indep. longueurs moy. voisin Un écart type vaut 10
- 5 chem. dépend. longueurs moy. voisin
- 6 loi triang. fus. de marge 4 (non fus. critique)
- 7 -8
- 8 -5
- 9 loi-Beta-----25

Soit c le chemin en moyenne le plus long passant par (x_i, x_j) il a une longueur moyenne $L(c)$ telle que $L(c) \geq L - s$

Soit (x_k, x_l) l'arc qui précède



(x_i, x_j) sur le chemin c

Si c' est le chemin en moyenne

le plus long passant par (x_k, x_l)

$L(c') \geq L(c) \geq L - s$ donc marge $(x_k, x_l) \leq s$ d'où $(x_k, x_l) \in F_s$

Considérons le graphe (x, Γ_1) tel que Γ_1 soit la relation symétrique de Γ . C'est à dire que : $x \Gamma_1 y \iff y \Gamma x$

Les chemins de (x, Γ_1) se déduisent de ceux de (x, Γ) par inversion de l'ordre de la liste des sommets qu'ils empruntent. Ils ont donc même longueur moyenne. Les marges des arcs restent constantes.

Donc le fuseau de marge s du graphe (x, Γ_1) se déduit du précédent par la même transformation.

Considérons l'arc (x_j, x_l) par le même raisonnement que ci-dessus on montre que l'arc (x_l, x_j) qui précède (x_j, x_l) sur le chemin c est de marge inférieure. Conséquence : Tout arc du fuseau de marges s se trouve sur un chemin joignant l'entrée à la sortie.

Remarque : Dans un fuseau de marge s , il peut exister des chemins P tels que $L - L(P) > s$

En effet, si un chemin P est tel que tous ses arcs soient empruntés par d'autres chemins, leur marge est inférieure ou égale à $L - L(P)$.

Si ces chemins sont de longueur moyenne supérieure à $L - s$, les arcs de P seront de marge inférieure à s . Le chemin P sera contenu dans le fuseau de marge s , mais $L - L(P)$ peut être supérieur à s .

)- 2 - 2 - RECHERCHE DES CHEMINS ALLANT DE L'ENTREE A LA SORTIE D'UN FUSEAU.

Présentation de l'algorithme.

Soit U^* l'ensemble des suites finies d'arcs du graphe (x, Γ) (cf 4-5-5).

Cet ensemble est muni d'une opération associative : la concaténation notée \odot .

Envisageons l'ensemble U^{**} des suites finies de chemins généralisés.

Donnons U^{**} de 2 lois de composition interne :

- réunion : $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cup (\beta_1, \dots, \beta_m) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m)$

- produit : $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \odot (\beta_1, \dots, \beta_m) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_1 + \beta_2, \dots, \alpha_1 + \beta_m, \alpha_2 + \beta_1, \dots, \alpha_2 + \beta_m, \dots, \alpha_n + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_m)$

On montre (cf [6]) que l'algorithme de recherche des chemins allant de tout point x_i du graphe à la sortie x_n est, le même à un homomorphisme près, que l'algorithme de calcul de la longueur du plus long chemin allant de tout point x_i du graphe à la sortie x_n .

L'homomorphisme fait correspondre U^{**} muni des lois de composition \cup, \odot et \mathbb{R} muni des lois $\text{Max}, +$.

Il suffit de reprendre l'algorithme décrit en 4-6-2- où on remplace Max par \cup et $+$ par \odot . Le symbole K ne désignera plus un nombre mais un élément de U^{**}

(on posera également $x = x_n$)

ALGORITHME.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ un classement des arcs.

Posons $K(x_i, x_n, 1) = K(x_i, 1)$

On construit successivement :

$$K(x_j, 1) = \alpha_m \text{ si } x_j \Gamma_1 x_n$$

$$K(x_j, 1) = \text{rien sinon}$$

pour $i = m-1, m-2, \dots, 2, 1$

$$\text{soit } \alpha_i = (w_i, z_i)$$

$$K(w_i, m-i+1) = K(w_i, m-i) \cup [(w_i, z_i) \odot K(z_i, m-i)]$$

$$K(x_k, m-i+1) = K(x_k, m-i) \quad \forall x_k \neq w_i$$

PROGRAMMATION :

Les arcs sont représentés par leur numéro dans le classement. Un chemin est représenté par la séquence des numéros des arcs qui le composent. Chaque séquence est terminée par un 0.

1) Rangement des $K(x_i)$

On les range séquentiellement dans le tableau K (de compteur L)

Un $K(x_i)$ est repéré par $I A D S(x_i)$, adresse dans K de son premier élément et par son nombre d'éléments $\text{Long}(x_i)$ (y compris le zéro final).

Les chemins de $K(x_i)$ sont donc séparés par des zéros.

2) Opération $(w_i, z_i) \odot K(z_i, m-i)$

Elle consiste à placer l'arc (w_i, z_i) en tête de chaque chemin de $K(z_i, m-i)$. Le composé est placé dans le tableau $J T A B$ (compteur $J T$)

a) Si $z_i = x_n$ l'opération est simple car $K(x_n, m-i)$ est vide,

On range le n^{e} id de l'arc (w_i, z_i) dans $J T A B$ et on le fait suivre d'un zéro.

b) Sinon $K(z_i, m-i)$ est non vide, on compose $(w_i, z_i) \odot K(z_i, m-i)$ dans $J T A B$ et on lui ajoute un zéro.

3) Opération $K(w_i, m-i) \cup [(w_i, z_i) \cup K(z_i, m-i)]$

Elle consiste à placer au bout des chemins de $K(w_i, m-i)$ les chemins de $[(w_i, z_i) \cup K(z_i, m-i)]$ et à calculer l'adresse et le nombre d'éléments de $K(w_i, m-i+1)$

- a) Si $K(w_i, m-i)$ est vide. Il n'y a pas de réunion à faire, on range le contenu de $I T A B$ au bout de K .
- b) Si $K(w_i, m-i)$ est non vide.

Si $K(w_i, m-i)$ est placé au bout de K , on met $J T A B$ au bout de K . Sinon il se pose un problème de rangement car $K(w_i, m-i+1)$ occupe plus de place que $K(w_i, m-i)$.

On transfère $K(w_i, m-i)$ dans un tableau $I T A B$ (compteur $I T$. On décale les $K(x_i, m-i)$ suivants de façon à "boucher le trou" laissé par $K(w_i, m-i)$.

On range au bout de K le contenu de $I T A B$ puis le contenu de $J T A B$.

4) Dépassement de capacité.

La dimension des tableaux K , $I T A B$, $J T A B$ ne peut être déterminée a priori. Aussi des tests sont prévus pour signaler les débordements éventuels de ces tableaux.

10-2-3 - SELECTION DU FUSEAU CRITIQUE.

Définition. On appelle fusseau critique le sous-graphe composé des arcs de probabilité de criticité non négligeable (supérieure à 0,01). Par une démonstration analogue à celle faite au 10-2-1 - on montre que le fusseau critique n'a pas d'arc pondant.

On cherche à déterminer la plus petite marge s_0 telle que le fusseau de marge s_0 contienne le fusseau critique.

On n'a pas trouvé de méthode efficace permettant de déterminer ce fusseau avant le calcul des probabilités de criticité par la méthode de CLARK. On ne peut utiliser que la remarque suivante :

Dans les expériences faites on a observé que $s_0 \leq \sigma$ σ étant l'écart type de la longueur du chemin P critique.

On détermine le fusseau critique par approximation en utilisant le calcul des probabilités de criticité.

1° - On sélectionne un fusseau de marge $s_1 \leq \sigma$

- On cherche ses chemins
- On calcule leurs probabilités de criticité par la méthode de CLARK
- On en déduit les probabilités de criticité des arcs du fusseau.

- 2° - Si aucun ou peu d'arcs ont une probabilité de criticité voisine de zéro, - Ou si la moyenne de $\max_i X_i$ calculée par CLARK est très voisine de l'estimation PERT,
- Alors on sélectionne un fusseau de marge $s_2 > s_1$ et on recommence (1)
 - Sinon on s'arrête.
- 3° - Par mesure de sécurité, on a toujours intérêt à refaire le calcul d'un ou de deux fuseaux de marge supérieure de façon à détecter des chemins de criticité faible mais non négligeable qui auraient été oubliés.
- Tant que $s < \sigma$ il faut prendre garde d'en oublier.
 - Le type de chemin que l'on oublie souvent est :
 - a) un chemin dont la moyenne de la longueur est légèrement inférieure à la moyenne de la longueur du chemin P critique, mais dont la variance est beaucoup plus grande.
 - b) un chemin dont la moyenne de la longueur est légèrement inférieure à celle du chemin P critique et qui est peu corrélé avec les chemins les plus critiques.

10-2-4 - DESCRIPTION DU PROGRAMME.

cf organigramme

a) Calcul des moyennes et des variances des longueurs des arcs.

On entre en données les cartes des tâches rangées dans leur ordre de classement.

Les moyennes et les variances peuvent être calculées suivant 3 lois au choix (uniforme, Bêta, triangulaire)

Les données sont listées.

b) Procédure PERT :

Elle se fait comme le calcul déterministe, les durées étant les durées moyennes (cf 4-6-3 et 4-6-4)

On calcule la variance du chemin en moyenne le plus long et les marges des tâches (= marges totales dans le modèle déterministe).

Les résultants sont imprimés.

Le numéro des arcs, la moyenne et la variance de leur longueur, leur marge sont envoyés sur périphérique, toujours dans leur ordre de classement

c) Procédure E L I N

1) elle indique combien d'arcs comportent le fusseau de marge s pour tout s

2) l'opérateur choisit une marge s_1

La procédure élimine tous les arcs de marge supérieure à s_1 . Les autres restent rangés suivant le classement. Ils sont imprimés.

d) Procédure CHE

Elle recherche dans le fuseau de marge s_i tous les chemins allant de l'entrée à la sortie.

Les chemins sont imprimés suivant les numéros des sommets par où ils passent, chaque chemin est numéroté.

Si au cours du calcul, un tableau déborde, un libellé d'erreur est imprimé et on est renvoyé au programme principal.

e) Test :

S'il y a eu un débordement de tableau en recherchant les chemins ou si on veut sélectionner un autre fuseau, on relit les données relatives aux arcs (moyenne, variance, marge) sur périphérique et on se renvoie au début de E L I M.

Sinon on continue.

f) Procédure CALNOY

Elle calcule la moyenne et la variance des longueurs des chemins du fuseau en additionnant les moyennes et les variances des arcs qui composent chaque chemin. (on suppose les longueurs des arcs indépendantes).

Elle imprime la moyenne, la variance de la longueur de chaque chemin ainsi que la différence de la longueur moyenne du chemin avec celle du chemin P. critique.

g) Procédure CALCOV

Elle calcule les covariances des chemins.

La covariance de 2 chemins est la somme des variances des arcs qu'ils ont en commun (cf 7-5-2)

La matrice des covariances est imprimée.

h) Procédure CALPRO

Elle calcule les probabilités de criticité des chemins ainsi que la moyenne et la variance de $\max_i X_i$ par la méthode de CLARK cf 9-2-3.

Impression des probabilités.

i) Procédure CRITAR

Elle calcule les probabilités de criticité de chaque arc du fuseau (c'est la somme des probabilités de criticité des chemins du fuseau qui empruntent cet arc).

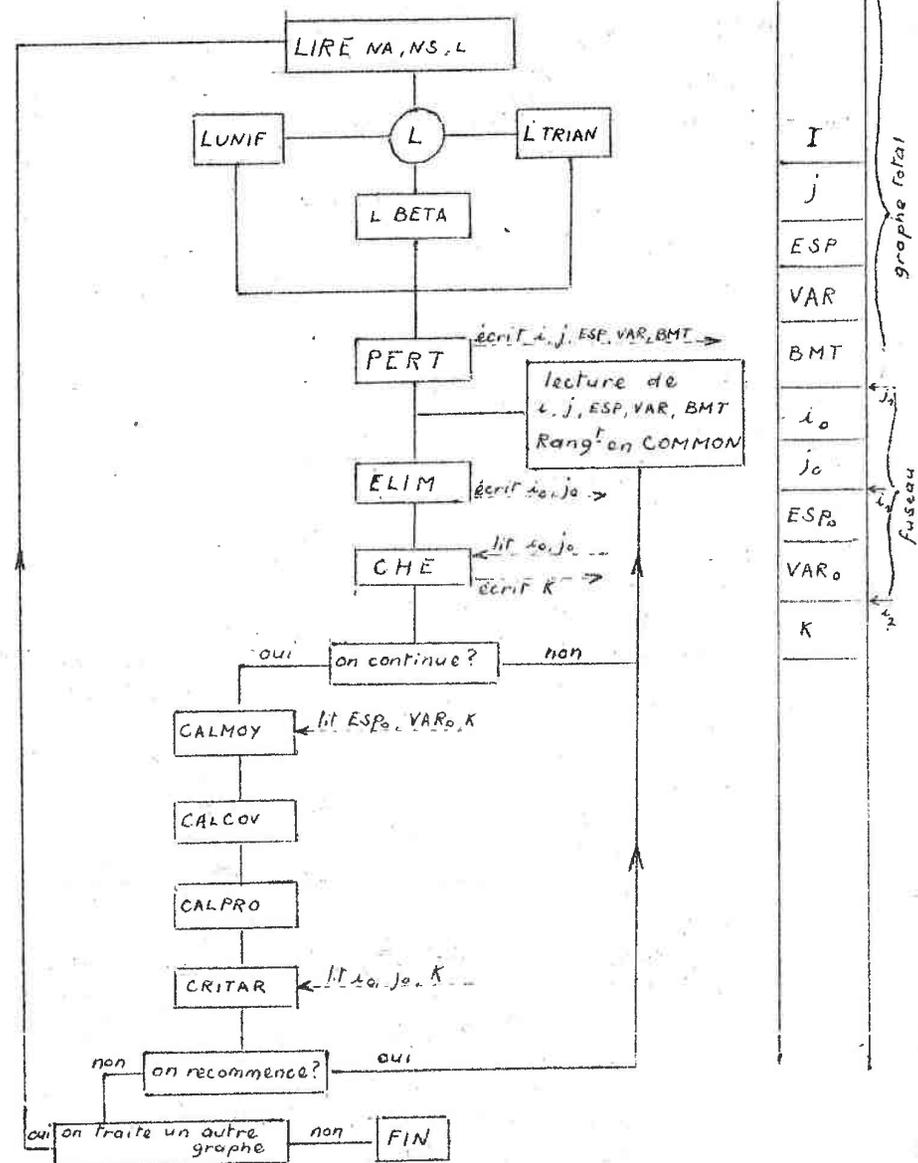
Impression.

j) Test :

Après examen des résultats de CRITAR on peut

METHODE PERT AFFINEE - ORGANIGRAMME

Disque



soit sélectionner un nouveau fuseau en se renvoyant à E L I M
soit traiter le même graphe avec une autre loi
soit arrêter.

Remarque :

Les différentes procédures sont enregistrées sur disques et ne sont transférées en mémoire centrale que lorsqu'on en a besoin.

3 - 2 - 5 - TRAITEMENT DES GRANDS GRAPHES.

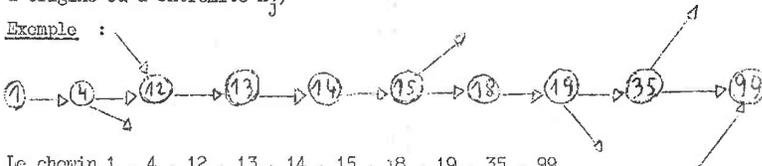
Sur ordinateur I B M 1620, 4000 mémoires de 6 positions on peut traiter des fuseaux de 50 arcs comportant 40 chemins.

Deux améliorations permettent de gagner de la place.

a) Réduction des arcs en série.

Un chemin étant représenté par les numéros des arcs qui le composent, on peut gagner de la place en remplaçant les arcs en série par un seul arc.

(2 arcs (x_i, x_j) et (x_j, x_p) sont en série s'il n'existe pas d'autre arc d'origine ou d'extrémité x_j)

Exemple :

Le chemin 1, 4, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 35, 99
sera représenté après réduction des arcs en série par

1, 4, 12, 15, 19, 35, 99.

Après avoir sélectionné un fuseau par la procédure E L I M, on recherche les arcs en série, on les réduit à un seul arc dont la moyenne (resp. la variance) de la longueur est la somme des moyennes (resp. des variances) des longueurs des arcs de la série.

Rien n'est changé du point de vue des marges et des probabilités de criticité puisque si plusieurs arcs sont en série, leur marge et leurs probabilités de criticité sont égales.

Cette réduction permet de gagner de la place en mémoire quand on recherche les chemins d'un fuseau.

b) Élimination des chemins de criticité négligeable.

Si dans le fuseau de marge s_1 un chemin a une probabilité de criticité P_1 , dans un fuseau de marge s_2 , $s_2 > s_1$ le même chemin aura une criticité P_2 telle que $P_2 \leq P_1$

Si P_1 est négligeable, P_2 le sera a fortiori.

On peut éviter un encombrement dans le calcul relatif au fuseau de marge s_2 en éliminant les chemins qui dans le fuseau de marge s_1 avaient une probabi-

lité de criticité négligeable (inférieure à 0,01)

Après l'impression de la liste des chemins l'opérateur transmet à la machine les numéros des chemins à éliminer.

L'opération faite, la liste des chemins est imprimée avec la nouvelle numérotation.

Les calculs suivants prennent moins de place et sont plus rapides.

A l'aide de ces 2 améliorations le programme PERT affiné ne prend guère plus de place en mémoire que le programme PERT (à condition bien sûr de disposer d'une unité de disques). Temps de calcul : il est évidemment plus long que le calcul PERT puisque ce dernier est inclus, mais il est sans commune mesure avec le temps pris par une simulation fût-elle accélérée (cf 10-2-2). Le temps de calcul dépend de la taille du graphe, du nombre et de la taille des fuseaux calculés et de la rapidité de l'opérateur.

10 - 3 - LA METHODE DE SIMULATION ACCELEREE. cf [9]10 - 3 - 1 - DESCRIPTION :

Comment peut-on accélérer la simulation.

- d'abord on peut minimiser le nombre de réalisations compte tenu de la précision recherchée (qui n'est souvent pas très grande),
- Ensuite on remarque que l'algorithme décrit en 4-6-1 (utilisé pour faire le calcul PERT déterministe à chaque réalisation) a un temps de calcul proportionnel au nombre d'arcs.

L'idée est d'éliminer des arcs pour gagner du temps.

Si un arc a une probabilité de criticité faible, c'est que les chemins qui l'empruntent sont peu critiques, donc n'influencent pas $\text{Max}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

On peut donc éliminer les arcs de probabilité de criticité négligeable.

On peut reconnaître à partir des estimations de durée si un arc est jamais critique.

Mais la méthode la plus rapide est de détecter par une simulation de quelques réalisations les arcs de criticité négligeable. On a alors 2 possibilités cf [9]

- ou on "gèle" la durée des arcs de criticité négligeable et on ne la régénère que toutes les 100 réalisations par exemple,
- ou on les élimine carrément.

Nous avons remarqué que les tests nécessaires pour appliquer la 1ère méthode faisaient perdre tout le gain de l'accélération.

Nous proposons donc la 2ème méthode.

On a prévu la possibilité de faire 2 éliminations successives. Plus le graphe comporte d'arcs de criticité négligeable, plus le gain de temps est appréciable.

Exemple : Soit un graphe de 48 arcs et 40 sommets dont les longueurs des arcs sont distribuées suivant des lois uniformes indépendantes. On fait 2 simulations

- l'une de 4000 réalisations,
- l'une de 2314 réalisations avec 2 éliminations.
 - l'une à 500 réalisations élimine 8 arcs de criticité inférieure à 0.01
 - l'autre à 1000 réalisations élimine 14 arcs de criticité inférieure à 0.05

Comparons les résultats :

Distribution de $\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$

	Moy	erreur à 95%	Var	erreur à 95%
échantillon 1 sans accel	72.600	0.094	9.280	0.406
échantillon 2 avec accel	72.355	0.125	9.900	0.558

Testons si l'échantillon 2 est issu de la même population que l'échantillon 1. Nous donnons un seuil de probabilité $\alpha = 5\%$.

Soit $\bar{x} = 72.355$. $\mu_0 = 72.600$ et $\frac{\mu}{\sigma}$ la moyenne de la population dont on extrait le 2ème échantillon.

Testons l'hypothèse $\mu = \mu_0$ contre l'alternative $\mu < \mu_0$.

Supposons la variance de la population connue et égale à 9280

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{72.355 - 72.600}{3.046} \cdot \sqrt{2314} = -3.86 < \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \quad dx = -1.96$$

Donc $\mu < \mu_0$

L'accélération a provoqué une sous estimation de la moyenne. Cela est dû au fait que au bout de 1000 réalisations on a éliminé des arcs de probabilité de criticité comprise entre 0.04 et 0.05. Les chemins passant par ces arcs avaient donc une petite influence sur $\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$. On a donc éliminé trop d'arcs.

Comparons les probabilités de criticité.

L'écart maximum est 0.036 mais pour les arcs éliminés il n'est que 0.0008.

On remarque d'ailleurs que la probabilité de criticité des arcs non éliminés est surestimée, ce qui s'explique de la même façon que ci-dessus.

Il faut donc faire l'élimination avec circonspection, les arcs de criticité voisins de 5 ne sont pas à négliger si l'on veut avoir la même précision. Le graphe étudié ici a peu d'arcs de criticité négligeable. En général il y en a plus et le gain de temps est plus important.

10 - 3 - 2 - COMPARAISON AVEC LA METHODE PERT AFFINEE.

Place en mémoire : La simulation prend beaucoup plus de place car on doit ranger 3 estimations de durées par arcs en mémoire, alors que dans la méthode PERT affinée on ne les mémorise pas.

Rapidité :

Faisons la comparaison sur le graphe précédent de 48 arcs et 40 sommets dont les longueurs des arcs sont distribuées suivant des lois triangulaires. La précision de la méthode PERT affinée est déterminée à l'aide des résultats d'une simulation de 4000 réalisations.

On recherche quel est le nombre de réalisation minimum que doit comporter une simulation accélérée pour obtenir la même précision.

Le majorant de l'erreur de PERT affinée est égal à l'écart par rapport à la simulation plus l'erreur d'estimation de la simulation.

	écart maximum / SIMUL	erreur de SIMUL à 95%	erreur de PERT AF.	nombre de réalisations.
Probabilité de succès	0.0332	0.0158	0.05	400
Max $(\frac{1}{n})$	moyenne 0.134	0.035	0.169	636
	variance 0.114	0.21	0.32	853

Le nombre de réalisations minimum pour obtenir une erreur inférieure ou égale à celle de PERT affinée est donné par les formules de 6-3- Il faut faire une simulation de 853 réalisations.

Faisons une simulation de 900 réalisations.

Au bout de 100 réalisations, éliminons les arcs de probabilité inférieure à 0.01. Il y en a 13.

On génère au total $100 \times 48 + 800 \times 35 = 32800$ durées d'arcs.

Sur I B H 1620 le calcul prend 48 minutes.

La méthode PERT affinée comprenant 3 calculs de fuscau (ce qui est correct) dure environ (cela dépend de la rapidité de l'opérateur) 10 minutes.

C O N C L U S I O N

Les résultats de notre étude sur la criticité et la distribution de la durée totale du projet s'appuient sur trop peu d'exemples.

L'étude mériterait peut-être d'être poursuivie bien qu'on ne puisse pas arriver à des résultats stricts.

La méthode PERT affinée devrait être testée sur un plus grand nombre d'exemples que nous n'en avons présentés.

L'idée de déterminer strictement la fonction de répartition de la durée totale du projet en décomposant le graphe en "sous réseaux", "séries" et "parallèles",

(cf article de Monsieur VENTURA Revue de R O n° 38 A F I R O) est inapplicable en général.

Nous pensons que les progrès qui restent à faire sur le PERT seraient de préciser quelles sont les distributions de durées les plus souvent rencontrées dans la réalité et d'étudier avec plus d'attention que nous ne l'avons fait la dépendance des durées des tâches.

ANNEXE : GRAPHE 48-40 Loi TRIANGULAIRE.

LISTE DES DONNEES

i	1	1	2	1	2	19	19	3	11	20	20	27	4	12	21	28	5	19	29
J	2	19	3	11	11	20	27	4	12	12	21	28	5	13	22	29	6	14	30
A	6	4	1	4	0	2	1	9	2	1	7	3	1	3	4	2	2	6	1
π	8	8	2	6	1	3	2	15	4	2	9	4	3	6	8	6	6	8	2
B	10	9	4	7	2	5	3	17	5	3	10	6	5	8	9	7	7	9	4
i	29	6	22	14	22	35	30	35	7	15	23	31	36	8	24	32	37	9	16
J	35	7	7	15	23	23	31	36	8	16	24	32	37	9	25	33	38	10	17
A	5	3	7	1	1	1	3	2	2	12	12	1	1	6	2	7	4	4	3
π	6	8	12	2	2	2	6	4	6	19	15	2	3	10	5	10	6	7	6
B	7	10	15	5	4	4	7	6	8	20	18	3	4	13	6	12	8	9	7
i	25	25	33	38	17	10	18	26	34	39									
J	17	26	34	39	18	40	40	40	40	40									
A	2	14	10	7	15	2	1	5	11	14									
π	5	17	12	11	18	5	3	6	13	17									
B	6	19	14	13	19	7	4	8	14	20									

METHODE PERT.

La durée totale a une distribution de loi $\mathcal{P}(\text{moy. } 71,999, \sigma = 2,748)$
 Le chemin critique est (1, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 17, 18, 40)
 (Chemins 6 du niveau de marge 8)

B I B L I O G R A P H I E

- 1 BERGE. "Théorie des graphes et ses applications". Dunod.
- 2 KAUFMANN - DESBAZEILLES. "La méthode du chemin critique". Dunod.
- 3 Centre de recherches de POINT à HOUSSON. "La méthode PERT".
- 4 AFIRO. "Les problèmes d'ordonnancement". (Monographies de recherche opérationnelle). Dunod.
- 5 DERNIAIS. "Etude d'algorithme pour les méthodes de cheminement dans les graphes finis". Thèse 5ème cycle Nancy.
- 6 PAIR. "Sur des algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes finis". Dans théorie des graphes, Dunod - Gordon and Breach (1967).
- 7 ROMAC. "Etude de méthode de tris". Thèse 3ème cycle Nancy.
- 8 HAC CRIMION and RYAVEC. "A n Analytical Study of the PERT assumptions". Memorandum. RI - 3408.PR. Décembre 1962.
The RAND corporation.
- 9 VAN SLYKE. "Monte Carlo méthode and the PERT problème". 1963.
- 10 CLARK. "The greatest of a finite set of random variables". 1960.
- 11 F. A. LOOTSHA. "Network planning with stochastic activity durations, an evaluation of PERT". Statistica Neerlandica 20 (1966) n° 1.
- 12 GIANVESINI. "Génération de nombres pseudo - aléatoires". 1962. Thèse 3ème cycle - Nancy.
- 13 Gillos THOMAS. "Misc au point d'un programme d'ordonnancement. Etude déterministe et étude probabiliste". D E S de CLERIONT FERRAND.
- 14 Harald CRAIHER. "Mathematical Methode of Statistics".
Princeton University Press.



NOM DE L'ETUDIANT : MOREL Jacques

Nature de la thèse : Spécialité en Math Appliquées

Vu, Approuvé
et permis d'imprimer

NANCY, le 7 1969

LE DOYEN,

J. AUBRY