Sc. N. 73/139 A
Rex. Dactyl.

UNIVERSITE DE NANCY I

U. E. R. DE MATHEMATIQUES

modèle algébrique pour l'analyse syntaxique de figures

UNIVERSITE NANCY BIBLIOTHEQUE

thèse

présentée pour l'obtention du doctorat de spécialité de mathématiques appliquées

par

roger mohr

soutenue le 28 février 1973

jury : Président M. C. PAIR

Examinateurs Mme M. PAVEL-GIVENS

M. J. L. OVAERT

UNIVERSITE DE NANCY I
U. E. R. DE MATHEMATIQUES

modèle algébrique pour l'analyse syntaxique de figures

thèse

présentée pour l'obtention du doctorat de spécialité de mathématiques appliquées

par

roger mohr

soutenue le 28 février 1973

jury : Président M. C. PAIR

Examinateurs Mme M. PAVEL-GIVENS
M. J. L. OVAERT

Je me permets de remercier ici

Madame PAVEL-GIVENS qui a bien voulu s'intéresser à cette étude,

Monsieur OVAERT à qui je dois d'avoir rencontré Monsieur PAIR et qui a mis à ma disposition les moyens de l'I. R. E. M. pour assurer le tirage de cette thèse,

Monsieur PAIR qui a su me donner le goût du travail de recherche. C'est à lui que je dois ce sujet qu'il m'a laissé développer librement tout en me conseillant patiemment,

Je tiens aussi à remercier Mademoiselle Le Maréchal qui a, avec goût et patience, réalisé matériellement cette thèse, ainsi que Messieurs FINANCE, LESCANNE, MARCHAND et QUERE pour les échanges de vues que j'ai pu avoir avec eux.

sommaire

INTRODUCTION

0	RAPPELS	0.1
0.1	Ramifications	0.1
0.2	Schémas fonctionnels	0.4
0.2.1	Théorie et schémas fonctionnels	0.4
0.2.2	Algèbres sur une théorie	0.5
0.2.3	Morphismes	0.5
1	UN OUTIL ALGEBRIQUE POUR LA DESCRIPTION D'IMAGES	1.1
1.1	Figures - Représentations	1.1
1.1.1	Définitions - Notations	1.1
1.1.2	Opérations sur les figures	1.2
1.1.3	Longueurs d'une figure	1.4
1.2	Figures obtenues à partir d'un alphabet de base	1.5
1.3	Comparaisons avec quelques autres travaux	1.10
1.3.1	Construction par raccordement des tangentes	1.11
1.3.2	Exemple de Narasimhan	1.14
1.3.3	Le modèle de Shaw	1.15
1.3.4	Les chaînes codées	1.16

2	ENSEMBLES ALGEBRIQUES	2.1
2.1	Grammaires algébriques	2.2
2.1.1	Langage engendré par une grammaire algébrique	2.2
2.1.2	Ensembles algébriques et ensembles engendrés par des π-grammaires	2.2
2.1.3	Grammaires équivalentes	2.5
2.1.4	Image par un homomorphisme	2.7
2.2	Structures associées aux grammaires	2.7
2.2.1	Bilangage des structures	2.7
2.2.2	Morphismes associés aux structures	2.9
2.3	Ensembles algébriques sur le groupe libre	2.11
2.3.1	Définition du groupe libre	2.12
2.3.2	Une propriété des ensembles algébriques sur G	2.20
2.3.3	Le problème des mots	2.26
2.3.4	Emploi d'un marqueur	2.27
3	ENSEMBLES ALGEBRIQUES DE FIGURES	3.1
3.1	$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$	3.3
3.2	$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_6$	3.3
3.3	$\mathcal{F}_4 \subset \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_4 \neq \mathcal{F}_1$	3.6
3.4	$\mathcal{F}_6 \not\subset \mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_4 \not\subset \mathcal{F}_6$	3.27
3.5	Quelques ensembles non algébriques	3.31

4	LE PROBLEME DE LA RECONNAISSANCE	4. 1
4. 1	Indécidabilité dans le cas général	4. 1
4. 2	T-représentation associée à une structure	4. 2
4. 3	Analyse syntaxique et reconnaissance pour les T-représentations	4. 5
5	CONCLUSION	5. 1
	REFERENCES	

introduction

L'idée qui a guidé ce travail est l'application à la reconnaissance des structures (de figures en particulier) des méthodes de l'analyse syntaxique. Une conclusion (QUERE) suggérait, pour la description de figures, l'utilisation d'une structure de dioïde, déjà utilisée pour décrire des ramifications. C'est cette conclusion qui fut le point de départ de notre étude.

Après la présentation d'une structure algébrique qui permet de décrire des figures[1] (chap. 1), nous nous intéressons aux ensembles algébriques de figures qui sont l'équivalent des langages à contexte libre dans la structure du monoïde. Le chapitre 2 définit les ensembles algébriques, les définitions étant abordées sous l'aspect linguistique. Suivant la structure dont nous munissons un ensemble de figures, nous étudions la classe des ensembles algébriques obtenus (chap. 3). Puis, nous abordons le problème de l'analyse syntaxique dans le cadre défini précédemment (chap. 4).

Ce travail n'aborde pas le problème de l'identification d'une image ou sous-image ; à l'heure actuelle, ce sont essentiellement des techniques particulières à chaque cas qui sont mises en oeuvre dans ce domaine. (PAVEL), cependant, apporte une approche mathématique unificatrice du problème de la reconnaissance automatique.

Le modèle mis en oeuvre ici paraît semblable à celui de (SHAW 1968), mais la différence essentielle est qu'ici, nous utilisons des lois de compositions sur les figures alors que (SHAW 1968) emploie des opérateurs décrivant des relations dans des graphes. Une brève comparaison avec ce modèle est faite au paragraphe 1.3.3.

---

(1) 1.1 et 1.2 reprennent et complètent (MOHR)

0

rappels

0 RAPPELS

Soit V un ensemble appelé vocabulaire, notons V^* le monoïde libre engendré par V ; la loi de composition interne de V^* est appelée concaténation ; nous noterons Λ (mot vide) l'élément neutre de la concaténation.

Soit $a \in V^*$ nous noterons $|a|$ la longueur du mot α.

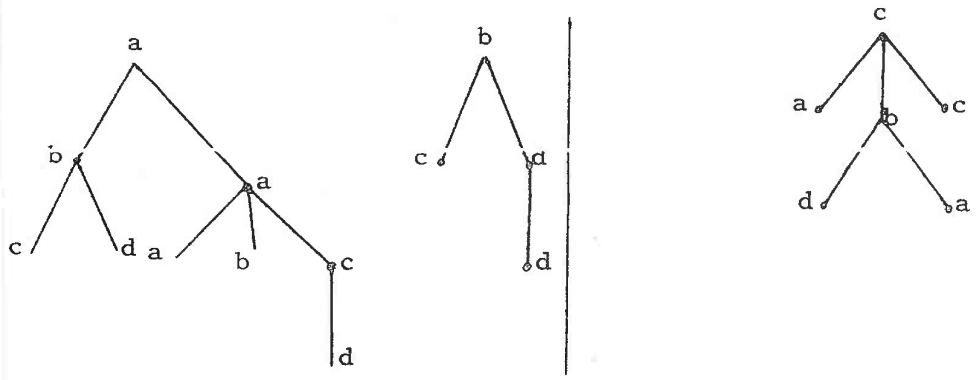
Pour tout entier n, nous noterons a^n le mot $\underbrace{a\ a \ldots a}_{n \text{ fois}}$. En particulier, $a^0 = \Lambda$.

0. 1 Ramification (PAIR - QUERE) (PAIR 1969)

0. 1. 1 Définition des ramifications

Il s'agit d'étudier algébriquement la notion de graphe arborescent à une ou plusieurs racines.

Une pseudo arborescence sur V est, à un isomorphisme près, une arborescence orientée et étiquetée par des éléments de V. On appelle ramification, toute suite finie de pseudo arborescence sur V (voir figure 0. 1). On notera $\hat{V}$, l'ensemble des ramifications sur V.



Ramification r

Ramification s

figure 0. 1

$\hat{V}$ est muni :

- d'une loi de composition interne associative : la concaténation notée +, et ayant un élément neutre : la ramification vide notée Λ .
- d'une loi de composition externe à opérateur dans V : l'enracinement noté $\times$. On identifiera $x \in V$ à $x \times \Lambda$, donc $\hat{V}$ contient V.

La figure 0. 2 donne un exemple de concaténation et d'enracinement pour r et s définis à la figure 0. 1.

s de la figure 0. 1 est égal à : $d \times (a+b \times (d+a)+c)$

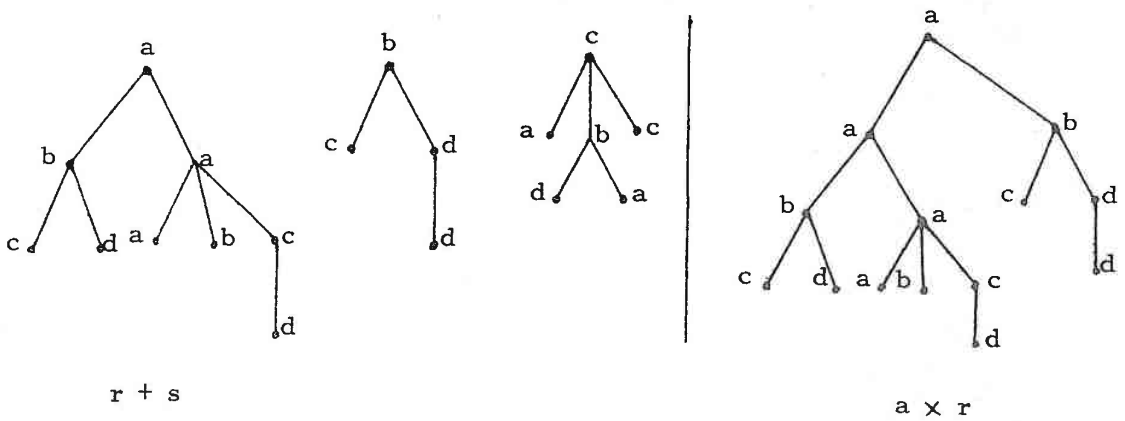


figure 0. 2

0. 1. 2 Principe de récurrence

Proposition 0. 1. 2. 1 : pour tout $r \in \hat{V} - \{\Lambda\}$, il existe $a \in V$, r' et $r'' \in \hat{V}$ uniques tels que : $r = a \times r' + r''$

De cette proposition, on déduit le principe de récurrence suivant :

Proposition 0. 1. 2. 2 : soit p un prédicat sur $\hat{V}$; si :

- $p(\Lambda)$ est vrai
- $p(r)$ et $p(s) \Rightarrow (\forall a \in V)\ p(a \times r + s)$ est vrai

alors $p(r)$ est vrai pour tout $r \in \hat{V}$.

0. 1. 3 Quelques fonctions de ramifications

Nous allons définir par récurrence quelques fonctions sur $\hat{V}$.

<u>mot des racines</u> : Soit ρ l'application de $\hat{V}$ dans V^* définie par :

$\rho(\Lambda) = \Lambda$

$\rho(a \times r + s) = a\ \rho(s)$

$\rho(r)$ est le mot des racines de r. Pour la ramification r (figure 0. 1) $\rho(r) = ab$

<u>mot des feuilles</u> : Soit φ l'application de $\hat{V}$ dans V^* définie par :

$\varphi(\Lambda) = \Lambda$

$\varphi(a \times r + s) =$ si $r = \Lambda$ alors $a\ \varphi(r)$ sinon $\varphi(r)\ \varphi(s)$.

Pour la ramification r de la figure 0. 1, le mot des feuilles est $\varphi(r) = c\ d\ a\ b\ d\ c\ d$

<u>familles de prédécesseur</u> a : Soit $a \in V$. On appelle famille de prédécesseur a dans une ramification r de $\hat{V}$ les mots de $f_a(r)$, où f_a est l'application de $\hat{V}$ dans $\mathcal{P}(V^*)$ définie par :

$f_a(\Lambda) = \emptyset$

$f_a(r + s) = f_a(r) \cup f_a(s)$

$f_a(b \times r) =$ si $b = a$ alors $\{\rho(r)\} \cup f_a(r)$ sinon $f_a(r)$

Dans la ramification r de la figure 0. 1, il existe trois familles de prédécesseur a : ba, abc, Λ .

<u>0. 1. 4 Bilangages grammaticaux</u> (QUERE)

Une grammaire est un quadruplet $g = (T, N, ::=, X)$, où T est le vocabulaire terminal, N le vocabulaire non terminal, X un langage régulier sur $V = N \cup T$.

$::=$ est une relation binaire entre V et V^* ; si on note K_x l'ensemble des mots α tels que $x ::= \alpha$, $::=$ vérifie

- $\forall x \in N$ K_x est un langage régulier
- $\forall x \in T$ $K_x = \{\Lambda\}$

Une ramification r sur V est <u>engendrée au sens large</u> par $\mathcal{G}$ si chacune des familles α de prédécesseurs A, $A \in V$, vérifie $A ::= \alpha$.

Notons $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ ces ramifications.

Les ramifications <u>engendrées au sens strict</u> par $\mathcal{G}$ sont les ramifications de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ dont le mot des racines appartient à X .
Notons $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ ces ramifications.

$\mathcal{L}(\mathcal{G})$ est le bilangage engendré au sens large par $\mathcal{G}$;

$\mathcal{S}(\mathcal{G})$ est le bilangage engendré au sens strict par $\mathcal{G}$;

On appelle <u>bilangage grammatical</u> tout ensemble de ramification engendré par une grammaire.

De façon immédiate, on a :

<u>Proposition 0. 1. 4</u> : Si r et s appartiennent à $\hat{V}$ et a $\in$ V alors :

- $r + s \in \mathcal{L}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow r \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ et $s \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$
- $a \times r \quad \mathcal{L}(\mathcal{G}) \Leftrightarrow r \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ et $a ::= \rho(r)$.

L'ensemble des mots des feuilles des ramifications de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ s'appelle <u>langage engendré par</u> $\mathcal{G}$. Les langages engendrés une grammaire sont les langages à contexte libre.

0. 2 Schémas fonctionnels

Nous utilisons ici le vocabulaire de (EILENBERG - WRIGHT) tout en manipulant des schémas fonctionnels (KREISEL - KRIVINE) ; compte tenu de l'utilisation que nous voulons en faire au chapitre 2, il est inutile d'introduire les théories par les catégories. Les théories définies ci-dessous correspondent aux théories libres de (EILENBERG - WRIGHT).

0. 2. 1 Théorie et schémas fonctionnels

Une <u>théorie</u> π est une famille $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles disjoints.
Nous supposerons dans la suite que $F = \bigcup F_n$ $(n \geqslant 0)$ est fini.

Soit alors $\mathcal{G} = (F, \{X\}, ::=, X)$ la C - grammaire définie par :

$(\forall n \geqslant 0) \qquad (\forall a \in F_n) \qquad X ::= a\ X^n$;

tout mot engendré par $\mathcal{G}$ est appelé <u>schéma fonctionnel sur la théorie π</u> et nous noterons $\bar{\pi}$ l'ensemble des schémas fonctionnels sur π.

On a les résultats suivants :

<u>Proposition 0. 2. 1. 1</u> : Soit $a \in F_0$; si x a y et z sont des schémas fonctionnels sur π alors x z y est un schéma fonctionnel sur π.

Théorème 0. 2. 1. 2 : Pour tout schéma fonctionnel x, il existe un entier n unique, il existe $a \in F_n$, et $a_1, \ldots, a_n \in \overline{\pi}$ uniques tels que $x = a\, a_1 \ldots a_n$.

0. 2. 2 Algèbres sur une théorie

Soit $\pi = (F_n)_{n \in N}$, une théorie.

Théorème 0. 2. 2 : Soit un ensemble E, et, pour chaque n, une application $\varphi_n : a \longrightarrow \varphi_n(a) = \hat{a}$ de F_n dans l'ensemble des applications de E^n dans E. Alors, il existe une application et une seule $\varphi_E : \overline{\pi} \longrightarrow E$ $(\varphi_E(x) = \overline{x})$, telle que, pour tout $a \in F_n$ et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \overline{F}$

$$\overline{a\, x_1 \ldots x_n} = \hat{a}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$$

S'il n'y a pas de confusion possible, nous noterons φ au lieu de φ_E.
Pour a appartenant à F_0, on identifie $\overline{a}$ et $\hat{a}$.

Exemple : Soit $E = F^*$;
$\forall a \in F_n \qquad \varphi_n(a) : (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow a\, x_1 \ldots x_n \in F^*$

Dans ce cas, l'application φ_{F^*} de $\overline{\pi}$ dans F^* est l'injection canonique de $\overline{\pi}$ dans F^*.

E est une π - algèbre si on se donne, pour tout n, une application de F_n dans l'ensemble des applications de E^n dans E. Les éléments de F_n représentent les opérations n - aires sur la π - algèbre E.

0. 2. 3 Morphismes

Par composition des opérations de $F = \bigcup_n F_n$, on peut définir de nouvelles opérations.
Soit $N = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un ensemble fini (ensemble des variables) tel que : $N \cap F = \emptyset$.

On définit $\pi(N)$ comme la théorie $(F_0 \cup N.\ F_1.\ F_2 \ldots\ldots)$.
$\overline{\pi}(N)$ est l'ensemble des schémas fonctionnels sur $\pi(N)$.

Soit E une π - algèbre, $x_1, \ldots, x_n$ n éléments de X ; on prolonge l'application φ_0 de F_0 dans E par une application $\varphi_{x_1 \ldots x_n} : F_0 \cup N \longrightarrow E$, définie par :

$$\varphi_{0_{x_1 \ldots x_n}}(a) = \underline{\text{si}}\ a \in F_0\ \underline{\text{alors}}\ \varphi_0(a)$$
$$\underline{\text{si}}\ a = A_k \in N\ \underline{\text{alors}}\ x_k.$$

On note encore $\overline{a} = \varphi_{0_{x_1 \ldots x_n}}(a)$

D'après le théorème O. 2. 2, l'application φ se prolonge en une application $\varphi_{x_1 \ldots x_n}$ de $\overline{\pi}(N)$ dans E, telle que

$$\varphi_{x_1 \ldots x_n}(a\, a_1 \ldots a_m) = \hat{a}(\varphi_{x_1 \ldots x_n}(a_1), \ldots, \varphi_{x_1 \ldots x_n}(a_m)).$$

Donc $\omega \in \overline{\pi}(N)$ définit une application de E^n dans E :

$$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \varphi_{x_1 \ldots x_n}(\omega).$$

Nous noterons encore $\hat{\omega}$ cette application.
ω est un <u>morphisme</u> à n variables de la théorie π.

<u>0. 2. 3. 1 Composition de morphismes</u>

Nous allons définir la composition à l'aide de la substitution sur le monoïde libre. Soit V^* le monoïde libre engendré par V ; soient A un élément de V et $\alpha \in V^*$. On appelle substitution de α à A la fonction définie de la façon suivante :

$$S(A\,;\,\alpha)(\Lambda) = \Lambda$$

$$(\forall B \in V) \quad S(A\,;\,\alpha)(B\,\beta) = \underline{\text{si}}\ A = B\ \underline{\text{alors}}\ \alpha S(A\,;\,\alpha)(\beta)$$

$$\underline{\text{sinon}}\ B\,S(A\,;\,\alpha)(\beta)$$

Plus généralement, soient $A_1, \ldots, A_n$ n éléments de V distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n mots sur V. On appelle substitution de $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ à $A_1, \ldots, A_n$, l'application définie par :

$$S(A_1, \ldots, A_n\,;\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\Lambda) = \Lambda$$

$$(\forall B \in V)\ S(A_1, \ldots, A_n\,;\,\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(B\,\beta) = \underline{\text{si}}\ (B = A_k)\ \underline{\text{alors}}\ \alpha_k\ S(\ldots)(\beta)$$

$$\underline{\text{si}}\ (\forall k)\ B \neq A_k \text{ alors } B\ S(\ldots)(\beta)$$

Soit alors $N = \{A_1, \ldots, A_n\}$ et $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n \in \overline{\pi}(N)$

On définit $\omega(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ par :

$$\omega(\omega_1, \ldots, \omega_n) = S(A_1, \ldots, A_n\,;\,\omega_1, \ldots, \omega_n)(\omega)$$

D'après la proposition 0. 2. 1. 1, $\omega(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ appartient bien à $\overline{\pi}(N)$.

<u>Proposition 0. 2. 3. 1</u> : $\hat{\omega}(\hat{\omega}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \hat{\omega}_n(x_1, \ldots, x_n))$

$$= \widehat{\omega(\omega_1, \ldots, \omega_n)}(x_1, \ldots, x_n)$$

Cette proposition signifie que le diagramme suivant est commutatif :
$\mathcal{F}(E^n, E)$ désigne l'ensemble des applications de E^n dans E.

m est l'application qui, au schéma $\psi \in \overline{\pi}(N)$ associe $m(\psi) = \hat{\psi}$. $m^{(n)}$ est l'application produit de $\overline{\pi}(N)^n$ dans $\mathcal{A}(E^n, E)$

$$\begin{array}{ccc} (\overline{\pi}(N))^n & \xrightarrow{\omega(\ldots)} & \overline{\pi}(N) \\ \Big\downarrow m^{(n)} & & \Big\downarrow m \\ \mathcal{A}(E^n, E)^n & \xrightarrow{\hat{\omega}} & \mathcal{A}(E^n, E) \end{array}$$

On reconnait la composition des applications.

<u>Remarque 1</u> : si $\omega_i \in \overline{\pi}$ $\hat{\omega}_i$ définit une application constante de E^n dans E et nous identifierons $\hat{\omega}_i$ et cette constante (qui est aussi $\varphi(\omega_i)$. Dans ce cas, le diagramme devient :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\pi}^n & \xrightarrow{\omega} & \overline{\pi} \\ \Big\downarrow \varphi^{(n)} & & \Big\downarrow \varphi \\ E^n & \xrightarrow{\hat{\omega}} & E \end{array}$$

<u>Remarque 2</u> : si $M \subset N$ alors $\overline{\pi}(M) \subset \overline{\pi}(N)$. Nous supposerons toujours que les morphismes ont été choisi dans $\overline{\pi}(N)$ pour N contenant suffisamment d'éléments.

<u>0. 2. 3. 2 Degré d'un morphisme</u>

A tout morphisme ω associons lui un entier $d(\omega)$ que nous appellerons degré de ω. Le degré désigne le nombre d'opérateurs qui composent ω ; il est défini par récurrence de la manière suivante :

$$\forall a \in F_0 \qquad d(a) = 1$$

$$\forall a \in N \qquad d(a) = 0$$

$$(\forall a \in F_n)\ (\forall a_i \in \overline{\pi}(N)) \qquad d(a\, a_1\, a_2 \ldots a_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} d(a_i)$$

Le degré défini ici est le même que celui défini par (EILENBERG-WRIGHT)

<u>0. 2. 4 π - homomorphisme</u>

Soit A et B deux π - algèbres. Soit h une application de A dans B. h est un <u>π - homomorphisme</u> si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^+,\ \forall a \in F_n \qquad h(\hat{a}(a_1, \ldots, a_n)) = \hat{a}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

$$\forall a \in F_0 \qquad h(\varphi_A(a)) = \varphi_B(a)$$

On remarquera que φ_A est l'unique π-homomorphisme de la π-algèbre $\overline{\pi}$ dans A.

<u>Proposition 0. 2. 4</u> : soient A et B deux π - algèbres, soit h un π - homomorphisme de A dans B.
Pour tout schéma fonctionnel a, $h \circ \varphi_A(a) = \varphi_B(a)$

Procédons par récurrence sur le degré de a.

$a = \omega a_1 a_2 \dots a_n \quad \omega \in F_n,\ a_i \in \overline{\pi},\ d^\circ(a_i) < d(a)$

$$h(\varphi_A(\omega a_1 \dots a_n)) = h(\widehat{\omega}(\varphi_A(a_1), \dots, \varphi_A(a_n))$$
$$= \widehat{\omega}(h \circ \varphi_A(a_1), \dots, h \circ \varphi_A(a_n))$$

par hypothèse de récurrence

$h \circ \varphi_A(a_i) = \varphi_B(a_i)$

donc

$$h \circ \varphi_A(\omega a_1 \dots a_n) = \widehat{\omega}(\varphi_B(a_1), \dots, \varphi_B(a_n))$$
$$= \varphi_B(\omega a_1 \dots a_n)$$

Le résultat étant vrai pour les schémas fonctionnels de degré 1, est donc vrai pour tout schéma fonctionnel.

1

un outil algébrique pour la description d'images

1 UN OUTIL ALGEBRIQUE POUR LA DESCRIPTION D'IMAGES

Nous allons d'abord présenter un outil pour décrire en particulier des figures, et nous montrerons dans quelle mesure il nous permet de décrire ou de construire des figures. Nous comparerons cet outil avec ce que différents auteurs ont fait dans cette voie.

1.1 Figures - Représentations

1.1.1 Définitions - notations

Un espace de figures (E, F, G) est la donnée de deux ensembles E et F et d'un groupe G opérant sur E et F, G opérant fidèlement et transitivement (1) sur F.

Tout élément g de G définit une application de $E \cup F$ dans $E \cup F$:

$g : x \longrightarrow gx$

nous noterons g(x) l'élément gx et plus généralement si

$x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \qquad g(x) = (g(x_1), \ldots\ldots, g(x_n))$.

Soit un espace de figures (E, F, G), une représentation r sur (E, F, G) est un triplet (K, o, e) tel que :

$K \subset E$

$o \in F$

$e \in F$

K est appelé le support de r, o l'origine de r et e l'extrémité de r. o et e sont les pôles de r.

Si r est une représentation, o(r), e(r), supp(r) désignent respectivement l'origine, l'extrémité et le support de r.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentations sur (E, F, G).

G définit sur $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence $\sim$:

$r_1 \sim r_2 \Longleftrightarrow \exists\, g \in G \qquad g(r_1) = r_2$

---

(1) G opère fidèlement et transitivement sur F si et seulement si :

$\forall x \in F, \quad \forall y \in F \qquad \exists g \in G$, g unique, tel que, $g(x) = y$

Une figure est une classe d'équivalence de $\mathcal{F} = \mathcal{R}/\sim$. $r \in \mathcal{R}$, nous noterons $\overline{r}$ la figure, classe d'équivalence de r. Le support d'une figure f est la classe d'équivalence du support de la représentation r associée ; nous le noterons supp (f).

Exemples d'espaces de figures

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^2$, G est le groupe des translations.
   Parmi les figures, nous trouvons en particulier les vecteurs libres.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, G est le groupe des similitudes centrées en (0, 0, 0).
3. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi$, G est le groupe des déplacements du plan.
   G opère sur F de la manière suivante :
   si g est le composé d'une rotation d'angle θ et d'une translation
   alors : $g((x, y, \alpha)) = (g(x, y), \alpha + \theta\ (2\pi))$
   Un pôle pourra donc être schématisé par un point du plan origine d'un vecteur unitaire dont l'angle indiquera la valeur de α .
   Nous verrons l'intérêt de cet exemple, qui avec l'exemple 1, nous servira d'illustration dans la suite.
4. Comme G opère fidèlement et transitivement sur lui-même, ($\emptyset$, G, G) est un espace de figure.

1.1.2 Opérations sur les figures

Nous allons nous servir des pôles pour composer les représentations entre elles. Nous définirons trois opérations binaires : +, o, $\times$; et une opération unaire : $-$.

Soit $f = \overline{(K, o, e)}$ une figure ; on définit $\underline{-f}$ comme étant la classe suivant $\sim$ de (K, e, o) (échange de l'origine et de l'extrémité).

Définissons $\underline{f_1 + f_2}$ (f_1, $f_2 \in \mathcal{F}$). Soient $r_1 = (K_1, o_1, e_1)$ une représentation de f_1 et $r_2 = (K_2, o_2, e_2)$ l'unique représentation de f_2 telle que $e_1 = e_2$ (l'unique puisque G opère fidèlement et transitivement sur F).
$f_1 + f_2$ est alors définie comme la classe de $(K_1 \cup K_2, o_1, e_2)$. + correspond intuitivement à l'addition vectorielle.

Si on choisit la représentation (K_2, o_2, e_2) telle que $o_2 = o_1$, alors f_1 o f_2 est la classe de $(K_1 \cup K_2, o_1, e_2)$ (mise en commun des origines).

Enfin si on choisit r_2 telle que $e_1 = e_2$ alors $f_1 \times f_2$ est la classe de $(K_1 \cup K_2, o_1, e_2)$ (mise en commun des extrémités).

La figure 1.1 montre ce que sont ces opérations dans le cas de l'exemple 1, la figure 1.2 dans le cas de l'exemple 3. En 1.1, o schématise l'origine et $\times$ l'extrémité. En 1.2, les pôles appartiennent à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/2\pi$ et l'origine (x, y, α) est schématisée par un o muni d'un vecteur unitaire dont l'orientation indique la valeur de α, et l'extrémité est schématisée par $\times$ aussi muni d'un vecteur unitaire.

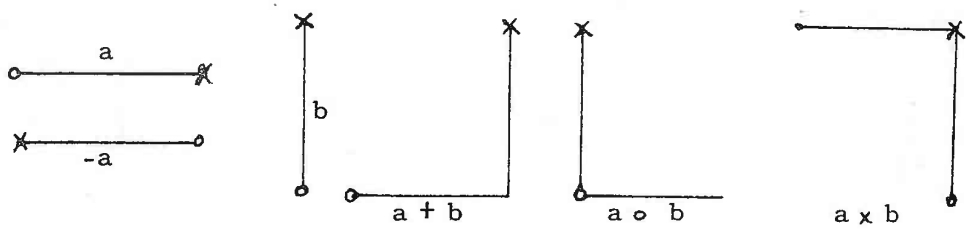


figure 1.1

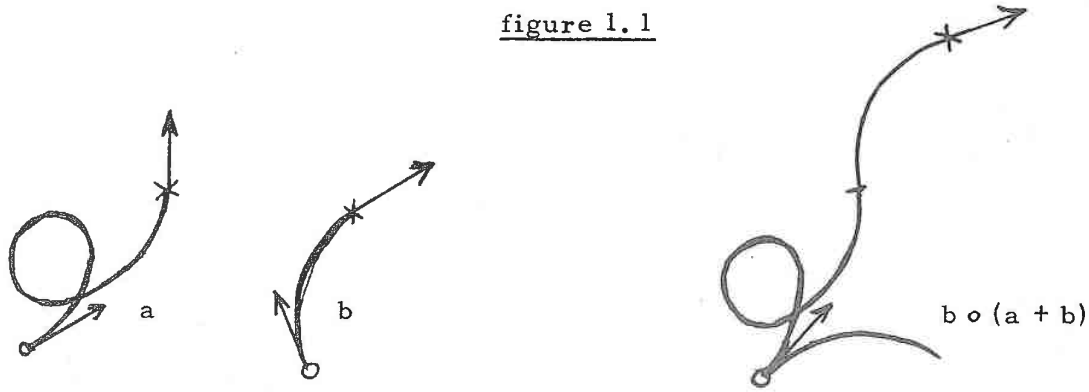


figure 1.2

Nous avons bien défini des lois de compositions internes sur $\mathcal{F}$: en effet si nous reprenons la construction de $f_1 \top f_2$ ($\top \in \{+, o, \times\}$) avec r'_1 et r'_2 : $r'_1 = g(r_1)$ et donc $r'_2 = g(r_2)$.

d'où $(K'_1 \cup K'_2, o'_1, e'_2) = g(K_1 \cup K_2, o_1, e_2)$ et donc

$f_1 \top f_2 = \overline{(K'_1 \cup K'_2, o'_1, e'_2)} = \overline{(K_1 \cup K_2, o_1, e_2)}$

Donnons quelques propriétés algébriques :

- les trois lois +, o, $\times$ sont associatives :

$$f_1 \top (f_2 \top f_3) = (f_1 \top f_2) \top f_3 \qquad \top \in \{+, o, \times\}$$

- o et $\times$ sont "idem-potentes" :

$$f \times f = f \circ f = f$$

- + possède un élément neutre, la classe de ($\emptyset$, a, a) que nous noterons λ :

$$f + \lambda = \lambda + f = f$$

remarquons que :

$$f_1 \circ f_2 = (f_1 \circ \lambda) + f_2$$
$$f_1 \times f_2 = f_1 + (f_2 \times \lambda)$$

- $\times$ s'exprime en fonction de o et $-$ (et réciproquement o s'exprime en fonction de x et $-$) :

$$f_1 \times f_2 = -((-f_2) \circ (-f_1))$$

1.1.3 Longueurs d'une représentation, d'une figure

Définition : Soit (E, F, G) un espace de figures. On appelle longueur d'une représentation r = (K, o, e) et on note $\ell(r)$ l'élément g de G tel que g(o) = e.

Proposition 1.1 : Soit r_1 une représentation et soit $r_2 = g(r_1)$.
$$\ell(r_2) = g\, \ell(r_1)\, g^{-1}.$$

Notons $r_1 = (K_1, o_1, e_1)$, $r_2 = (K_2, o_2, e_2)$.

Nous avons :
$$e_2 = g(e_1)$$
$$e_1 = \ell(r_1)\,(o_1)$$
$$o_1 = g^{-1}\,(o_2) \qquad \text{d'où le résultat.}$$

Définitions : Soit f une figure sur (E, F, G). On appelle longueur de f et on note $\ell(f)$ l'ensemble $\{ g\, \ell(r)\, g^{-1} / g \in G,\ \overline{r} = f \}$

Soit 0 un point de F. On appelle longueur de f relative à 0 et on note $\ell_0(f)$ la longueur de la représentation de f dont l'origine est en 0.

Proposition 1.2 :
$$\ell_0(f_1 + f_2) = \ell_0(f_1)\ \ell_0(f_2)$$
$$\ell(f_1 \circ f_2) = \ell(f_2)$$
$$\ell(f_1 \times f_2) = \ell(f_1)$$
$$\ell(-f_1) = \ell(f_1)^{-1}$$

Seule la première égalité demande une démonstration.

Soient $r_1 = (K_1, o_1, e_1)$, $r_2 = (K_2, o_2, e_2)$, r, les représentations de f_1, f_2, $f_1 + f_2$ ayant leurs origines en 0.

Soit $r'_2 = \ell(r_1)\, r_2$, $r'_2 = (K'_2, o'_2, e'_2)$.

$o'_2 = e_1$ par définition de $\ell(r_1)$ et donc par construction de $f_1 + f_2$, l'extrémité e'_2 est aussi celle de r.

$$\ell(r'_2) = \ell(r_1)\, \ell(r_2)\, \ell(r_1)^{-1} \quad \text{(proposition 1.1)}$$

et $e'_2 = \ell(r_1)\, \ell(r_2)\, \ell(r_1)^{-1}(e_1)$

$$= \ell(r_1)\, \ell(r_2)\, \ell(r_1)^{-1}\, \ell(r_1)\,(0) = \ell(r_1)\, \ell(r_2)\,(0) = \ell_0(f_1)\, \ell_0(f_2)\,(0).$$

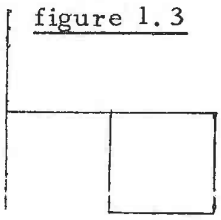
<u>Remarque</u> : + muni les figures sur ($\emptyset$, G, G) d'une structure de groupe : il suffit de remarquer que -f est le symétrique de f : f + (-f) = λ .

Remarquons alors que l'application ℓ_0 de $\mathcal{F}$ dans G : ℓ_0 : f : $\rightarrow \ell_0(f)$ est un isomorphisme de groupe.

1.2 Figures obtenues à partir d'un alphabet de base

Soient $\mathcal{F}$ l'ensemble des figures d'un espace de figures (E, F, G) et $\mathcal{R}$ celui des représentations ; soit A un sous-ensemble de $\mathcal{F}$ appelé alphabet ; soit Σ un ensemble de lois de composition interne sur $\mathcal{F}$.
On appelle ensemble de figure engendré par A et on note $\mathcal{F}$ (A, Σ) le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{F}$ contenant A et stable par les lois de Σ .
On notera $\mathcal{R}$ (A, Σ) l'ensemble des représentations des figures de $\mathcal{F}$ (A, Σ).

<u>figure 1.3</u>



Nous allons montrer dans la suite qu'en choisissant pour Σ l'ensemble des lois de composition précédemment introduites, on peut générer toutes les figures connexes comprenant de manière quelconque des figures de A, les points d'articulation étant les pôles.

Par exemple si A est l'ensemble $\{a, b\}$ de la figure 1.1, et si on se place dans le cadre de l'exemple 1, on espère obtenir à partir de S tous les "quadrillages connexes normés". On obtient par exemple le dessin de la figure 1.3 avec : b + ((b o a) + (a x ((bo a) + b)))

ou b + (b o a) + a + (-b) + (-a) + b.

Nous allons d'abord formaliser la notion de "toutes les figures connexes obtenues en ajustant sur leurs pôles les figures de A".

Définissons sur $\mathcal{R}$ la relation symétrique Γ :

$$r_1 \Gamma r_2 \iff r_1 \text{ et } r_2 \text{ ou un pôle en commun.}$$

<u>Définition</u> : On appelle <u>A-représentation</u> tout sous-graphe fini connexe de $(\mathcal{R}, \Gamma)$ dont les éléments sont des représentations de A.

Le support d'une A-représentation est la réunion des supports de ses éléments. L'ensemble de ses pôles est celui des pôles de ses éléments.

<u>1.2.1 Théorème</u> : Soit $\Sigma = \{+, o, x\}$. Pour toute A-représentation R de support K, pour tout x origine (resp. extrémité) d'un élément de K, il existe y tel que :

$$(K, x, y) \in \mathcal{R}(A, \Sigma) \qquad (\text{resp. } (K, y, x) \in \mathcal{R}(A, \Sigma)).$$

<u>1.2.1.1 Lemme de décomposition</u> : Soit R une A-représentation et r un élément de R. Le sous-graphe obtenu en enlevant r est la réunion de deux A-représentations et dans chacune d'elles, il existe un s tel que $s \Gamma r$.

Soient o et e l'origine et l'extrémité de r. Pour tout p de $R - \{r\}$, comme R est connexe, il existe un chemin de p à r dont l'avant dernier noeud est un élément de r ayant un pôle en o ou e.

L'ensemble des chemins dont le dernier noeud a un pôle en o définit un sous graphe connexe de $R - \{r\}$; de même pour e ; donc $R - \{r\}$ a au plus deux composantes connexes et dans chacune d'elles il existe un s tel que $r \Gamma s$ (si elle est non vide). D'où le résultat du lemme.

Démontrons alors le théorème par récurrence sur le nombre d'éléments de R. Il est clair que le résultat est vrai si R a un élément.

Supposons que R en ait n + 1. x est l'origine de r et l'extrémité de r est e.

D'après le lemme, R est égal à $P \cup Q \cup \{r\}$ munis de Γ et p de P et q de Q ont un pôle commun avec r. Supposons que x soit origine de p et e extrémité de q. D'après l'hypothèse de récurrence il existe y et z tels que, si K' et K'' sont les supports de P et Q, $r' = (K', x, y)$ et $(K'', z, e) = r''$ appartiennent à $\mathcal{R}(A, \Sigma)$.

Alors $((\overline{r'} \circ \overline{r}) \times \overline{r''})$ a une représentation unique ayant son origine en x et son support est celui de R.

Dans les autres cas : x(resp. e) pôle quelconque de p(resp. q), on reprend la même démonstration en considèrant les formules suivantes :

x origine de p, e origine de q : $((\overline{r'} \circ \overline{r}) + \overline{r''})$

e extrémité de p, e extrémité de q : $(\overline{r} \times (\overline{r'} + \overline{r}) \quad \overline{r''})$

x extrémité de p, e origine de q : $((\overline{r} \times (\overline{r'} + \overline{r})) + \overline{r''})$

On refait de même la démonstration dans le cas où x est extrémité d'un élément de R.

Nous allons montrer sur un exemple que le choix de y, dans le théorème précédent, n'est pas quelconque.

Soit $\mathcal{C}$ le groupe des translations de $\mathbb{R}^2$.
Plaçons nous sur l'espace de figures $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \mathcal{C})$.
Soit $\{a, b\}$ = A l'alphabet où

b est la classe de $(\{(0,0), (0,1)\}, (0,0), (0,1))$

a est la classe de $(\{(0,0), (1,0)\}, (0,0), (1,0))$ (voir figure 1.4)

Introduisons alors les notations suivantes : pour toute représentation r :

S(r) est le support de r $\quad (S(r) \subset \mathbb{R}^2)$

Posons $\quad x_m(r) = \inf\limits_{(x,y) \in S(r)} (x)$

$$x_M(r) = \sup_{(x,y) \in S(r)} (x)$$

$$y_m(r) = \inf_{(x,y) \in S(r)} (y)$$

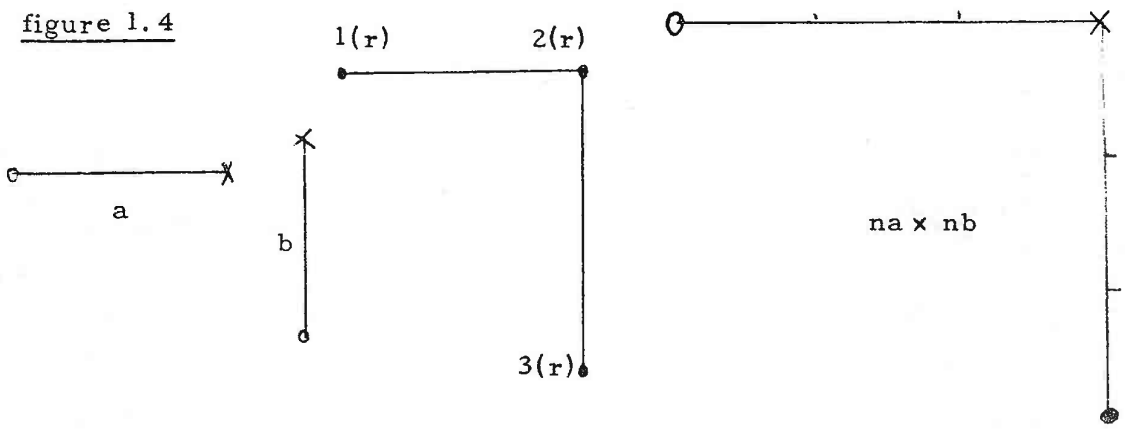
$$y_M(r) = \sup_{(x,y) \in S(r)} (y)$$

$1(r) = (x_m(r), y_M(r))$

$2(r) = (x_M(r), y_M(r))$

$3(r) = (x_M(r), y_m(r))$

figure 1.4



1.2.1.2 Proposition : Si $r \in \mathcal{R}(\Sigma, \{a, b\})$ et si le support de r est contenu dans celui de na x nb alors

ou $o(r)$ et $e(r) \in [1(r), 2(r)]$

ou $o(r)$ et $e(r) \in [2(r), 3(r)]$

et $o(r) \neq 2(r)$

La forme de la figure na x nb est indiquée à la figure 1.4. Le résultat de cette proposition indique que les origines et les extrémités des représentations dont le support est contenu dans celui de na x nb sont toutes deux situées soit sur le segment horizontal $[1, 2]$, soit sur le segment vertical $[2, 3]$.

Cette proposition est vrai si r est une représentation de a ou de b.

Supposons le vrai pour les représentations de f_1 et de f_2 et montrons le résultat pour les représentations de $f = f_1 \top f_2$ ($\top \in \Sigma = \{+, o, x\}$).

Nous ne ferons la démonstration que pour $f = f_1 + f_2$, les autres cas étant semblables.

Soient $r_1 = (K_1, o_1, e_1)$ et $r_2 = (K_2, o_2, e_2)$ les représentations de f_1 et f_2 telles que $e_1 = o_2$; $r = (K_1 \cup K_2, o_1, e_2)$ est une représentation de f.

a) $o_1 \in [2(r), 3(r)]$

$x_M(r) \geqslant x_M(r_1)$ or $o_1 \in [2(r), 3(r)]$ donc

$x_M(r) = x_M(r_1)$

donc $[2(r_1), 3(r_1)] \subset [2(r), 3(r)]$

par hypothèse de récurrence : $e_1 \in [2(r_1), 3(r_1)]$ donc

$e_1 \in [2(r), 3(r)]$ or $o_2 = e_1$ donc pour r_2 comme pour r_1

$e_2 \in [2(r), 3(r_1)]$.

D'autre part comme $o_1 \neq 2(r_1)$

$$o_1 \neq 2(r)$$

d'où le résultat.

b) la démonstration est la même si $o(r_1) \in (1(r), 2(r))$ d'où le résultat.

<u>1.2.2 Théorème</u> : Soit $\Sigma = \{+, -\}$. Pour toute A-représentation R de support K, pour tous pôles x et y de R,

$$\overline{(K, x, y)} \in \mathcal{G}(A, \Sigma)$$

La démonstration est identique à celle que fait Shaw dans (SHAW 1968) page 57, dans le cadre d'une étude très voisine.

Par contre, le choix de $\Sigma = \{+, -\}$ présente un inconvénient : par exemple, dans $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \mathcal{C})$ avec les figures de fig 1.1, pour décrire (b x a) + a, il faut faire b + (-a) + a + a (fig. 1.5)
c'est-à-dire, décrire deux fois une des branches de la figure. Plus généralement, en utilisant $\{+, -\}$ toute description de figures ayant au moins trois "branches", nous obligera à parcourir au moins une de ces branches deux fois.

<u>figure 1.5</u>

(b x a) + a

<u>1.2.3 Autres choix de Σ</u>

Nous avons abouti à des résultats positifs pour

$$\Sigma = \{+, o, x\} \text{ et } \Sigma = \{+, -\}.$$

Si $\Sigma' \subset \Sigma$ alors $\mathcal{G}(A, \Sigma') \subset \mathcal{G}(A, \Sigma)$; donc pour tout ensemble d'opérateur plus grand que l'un des deux précédents, nous aurons les mêmes résultats positifs.

Par contre, pour tout ensemble d'opérateurs Σ plus petit que l'un des deux précédents, on montre que l'ensemble des supports de $\mathcal{R}(A, \Sigma)$ est strictement contenù dans celui des A représentations. Par exemple, avec $\Sigma = \{+, o\}$ on ne peut pas obtenir de figure dont le support soit celui de a x b.

1.3 Comparaisons avec quelques autres travaux

De nombreux chercheurs ont travaillé à la reconnaissance des formes. Un nombre plus restreint a essayé d'utiliser les méthodes linguistiques dans ce domaine.

Pour cela, en général, on est parti d'un certain nombre de symboles de base, et on les a combiné entre eux pour construire les figures ou les analyser. Il faut cependant signaler les travaux de Kirsch (KIRSCH 1966) qui donne des exemples de grammaires où le symbole de base est le point de $\mathbb{Z}^2$. Ces grammaires, qui se rapprochent des grammaires contextuelles, peuvent en particulier engendrer les triangles rectangles isocèles (la figure 1.6 donne les règles de réécriture pour cet exemple).

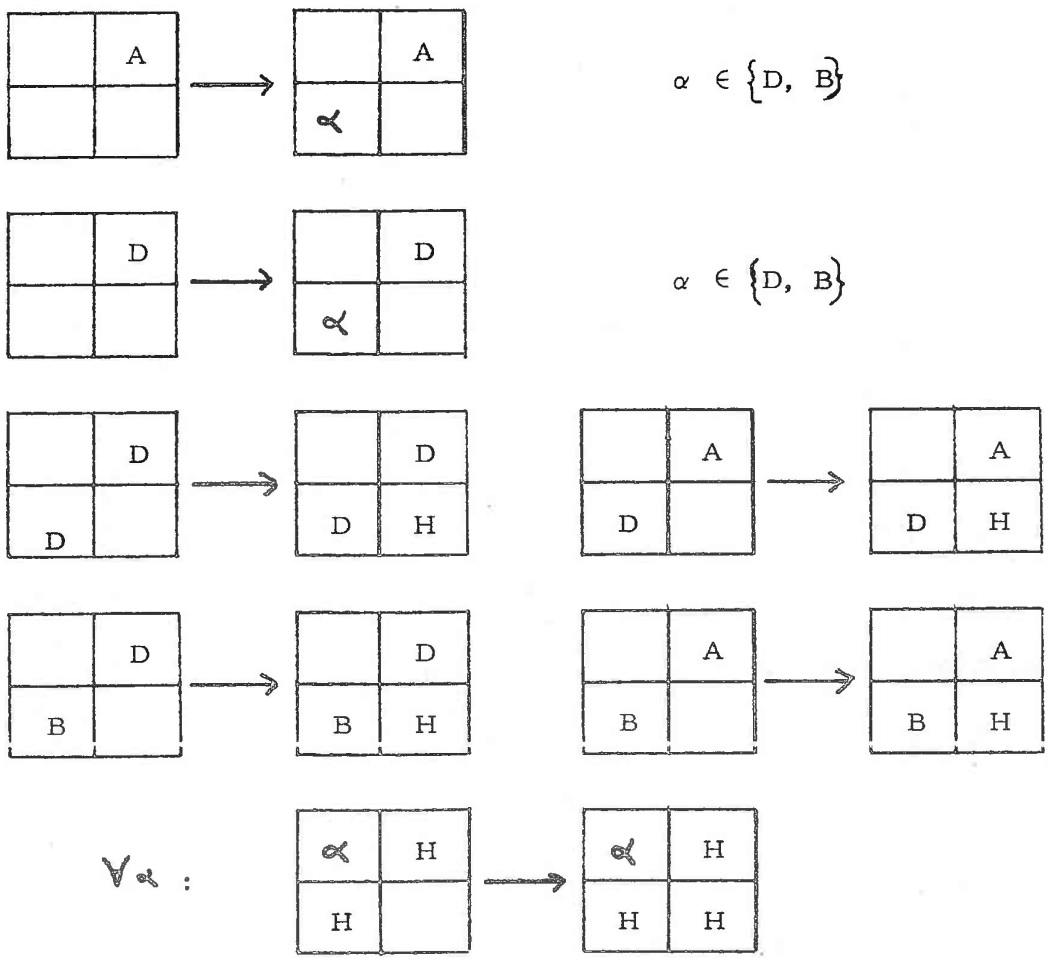
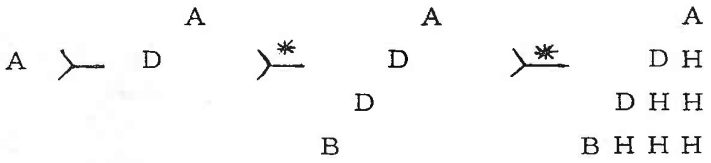


figure 1.6



Exemple de dérivation

figure 1.7

L'idée de prendre le point de $\mathbb{Z}^2$ comme symbole de base correspond à la discrétisation de l'image représentée en mémoire. Mais lourde et peu intuitive, elle a été peu suivie.

1.3.1 Construction par raccordement des tangentes

Eden (EDEN 1961, 1962) un des premiers, voulut décrire à partir de symboles de bases, des figures, plus particulièrement les lettres latines manuscrites. Les symboles utilisés sont ceux de la figure 1.8, cet alphabet de base étant enrichi par application des symétries verticales ou horizontales, ou une des deux translations verticales de module 1. Chaque lettre est définie par une suite de ces symboles qui sont ensuite concaténés, (figure 1.9).

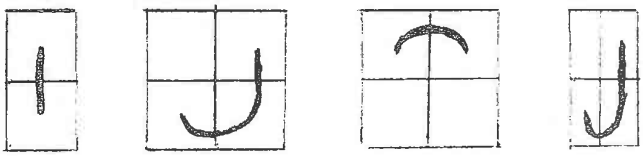


figure 1.8

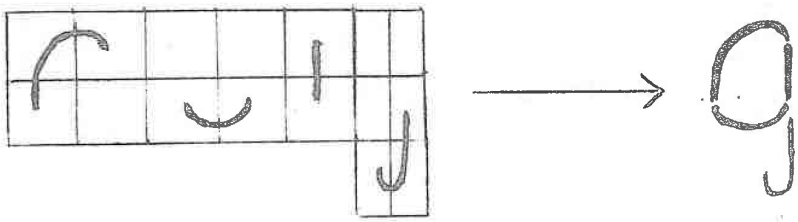


figure 1.9

Il peut ainsi engendrer tout l'alphabet.
Ce procédé fut utilisé pour l'affichage sur écran cathodique (avec en plus des raffinements techniques). Cependant le problème, très complexe, de la reconnaissance de l'écriture manuscrite ne fut pas résolu.

Plaçons nous sur l'espace de figure défini à l'exemple 3 de 1.1.1 ($\mathbb{R}^2$ muni des déplacements) et considérons l'alphabet $\{a, b, c, d, \langle espace \rangle\}$ défini à la figure 1.10 :

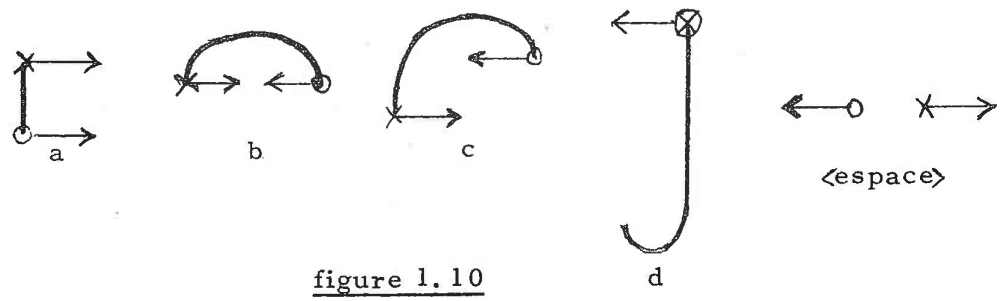


figure 1.10

Nous allons ainsi construire par raccordement des tangentes les mêmes figures ; par exemple : b + ((- a + c) o d) donne la lettre "g" et b + ((- a + c) o d) + ⟨espace⟩ + a + d + (- a) + b donne "gl" (figure 1.11)

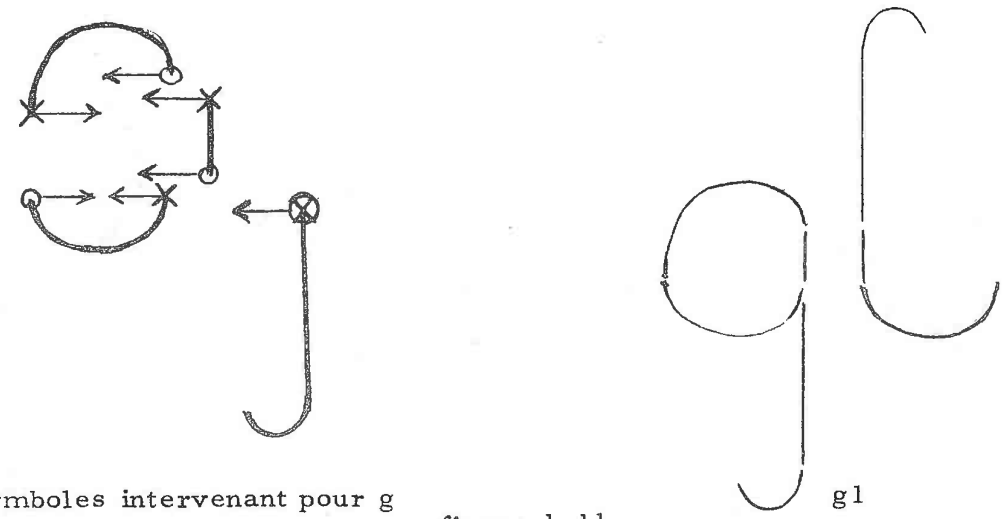


figure 1.11

Leydley (LEYDLEY 1964) (LEYDLEY et al. 1965) utilise pour la reconnaissance des chromosomes, des éléments de base (voir figure 1.12) qu'il ajuste par raccordement des tangentes en mettant les symboles bout à bout. Cette opération correspond au + introduit en 1.1.2 dans le cas de $\mathbb{R}^2$ muni des déplacements du plan.

Cette construction fut effectivement utilisée pour analyser les chromosomes. Dans une première phase, le contour de l'image est décomposé en ses constituants élémentaires, et on obtient donc une suite d'élément défini à une permutation circulaire près. Ensuite on procède à l'analyse syntaxique.

Une différence fondamentale apparait ici : les éléments de l'alphabet ne sont pas définis de manière unique comme dans le cas des langages : ils appartiennent à des classes et un problème important est la recherche des différents constituants et de leurs classes. Cette notion de classe présente aussi des dangers ; prenons les éléments décrits à la figure 1.12 : A courbe convexe, B ligne relativement droite, C courbe concave, D encoche, E courbe convexe de "grand rayon". Dans ce cas, le contour d'un chromosome submédian est codé par BDBABCABDBABCBA (voir fig. 1.13). Or, on remarque que le contour de l'objet de la figure 1.14 admet aussi cette décomposition ; en fait, ce "chromosome" est éliminé ensuite par un traitement numérique (rapport de longueurs de segments, ...).

D'autre part, une figure ne se décompose pas toujours de manière unique sur l'alphabet : où s'arrètent les classes "segments relativement droits" et "arc de cercle de grand rayon" ?

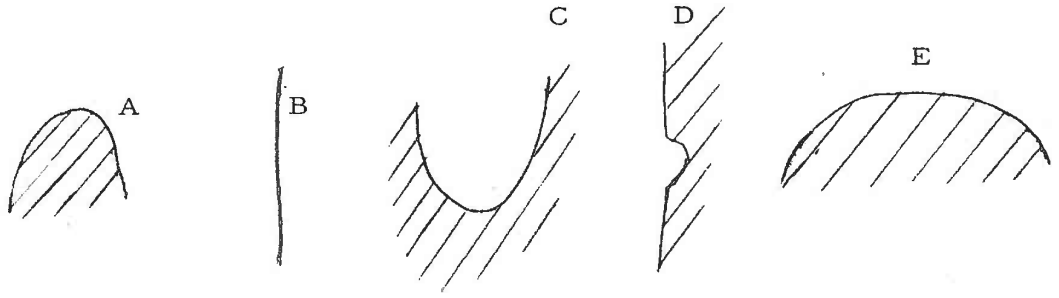


figure 1.12

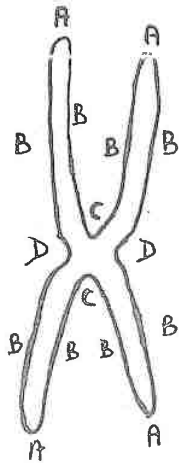


figure 1.13

figure 1.14

1.3.2 Exemple de Narasimhan (NARASIMHAN 1966)

Chaque symbole de base (dans $\mathbb{R}^2$?) est muni de pôles numérotés, et est défini à une translation près.

Si X a n noeuds, il est noté X(1, . . . , n) (voir figure 1.15).

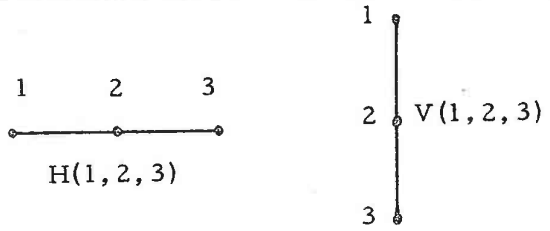


figure 1.15

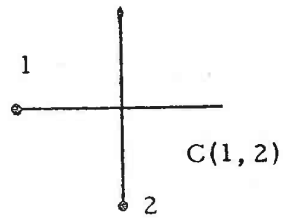


figure 1.16

On définit la concaténation par superposition de deux pôles :
si X(1, . . . , n) est concaténé à Y(1, . . . , m) par superposition des pôles i et j ; si dans le résultat de cette concaténation les pôles P($P \subset \{1, \ldots, n\}$) de X et Q de Y ($Q \subset \{1, \ldots, m\}$), sont conservés, on note la concaténation :

$$X.\ Y((i,j),\ P,\ Q) = Z(1, \ldots, p)$$

1, . . . , p étant la numérotation des pôles de la nouvelle image. Par exemple, à la figure 1.16 :

$$C(1,2) = H.V((2,2),\ \{1\},\ \{3\})$$

Avec cet outil, Narasimhan décrit une grammaire qui engendre, à partir de onze symboles, le langage fini des "caractères d'imprimerie majuscules manuscrits". Inversement, en partant d'un caractère généré, il en a fait l'analyse syntaxique.

Ce mode de concaténation, lourd à manipuler, est plus général que les concaténations introduites en 1.1.2 : dans notre modèle, les représentations ne permettent que la concaténation en deux pôles. Cette restriction peut parfois être gênante : si nous voulons générer des squelettes de molécules chimiques, il serait intéressant d'avoir comme symbole de base des radicaux stables comme le noyau benzènique qui a six liaisons de libres, c'est-à-dire, six pôles sur lesquels des greffes sont possibles.

1.3.3 Le modèle de Shaw (SHAW 1968, 1970)

L'outil décrit en 1.1 est très proche de celui qu'a développé Shaw. Nous allons brièvement le décrire ici en utilisant le vocabulaire introduit en 1.1. (En fait, il opère sur un graphe décrivant la figure.)

Les représentations sont des triplets (K, o, e) avec :

$$K \subset \mathbb{R}^n,\ o \in \mathbb{R}^n,\ e \in \mathbb{R}^n.$$

Une figure est une classe de représentations ; cette classe est définie par des conditions booléennes et n'est pas nécessairement stable par les translations. La figure a pourrait par exemple désigner la classe des vecteurs liés du plan dont l'origine est dans le premier quadran et dont le module est inférieur ou égal à 1.

Sur ces figures sont définies les opérations +, o, −, ×, introduites en 1.1.2. Si a et b sont des figures, on définit $a \top b$ comme la classe des $a_i \top b_j$ $a_i \in a$, $b_j \in b$. Si les conditions booléennes ne permettent pas la concaténation des représentations de a et b, le résultat sera la figure ayant un ensemble vide de représentation. D'autre part, est interdite la superposition complète (lors d'une concaténation) de deux représentations.

On remarquera que dans tous les cas $a \circ a \neq a$ contrairement au résultat de 1.1.2.

Shaw introduit un autre opérateur binaire, que nous noterons $\ast$, et qui superpose (si c'est possible) origine et extrémité :

$$a \ast b = \{\alpha \circ \beta \ / \ \alpha \in a, \beta \in b, \text{ extrémité de } \alpha = \text{extrémité de } \beta\}$$

Par exemple, si a désigne une classe d'arcs de cercle et b une classe de segments de droite horizontaux (voir figure 1.17), nous avons une représentation de $a \ast b$ (figure 1.18).

Shaw introduit enfin un indicage : tout nom de figure indicée dans une expression désigne un représentant et un seul de cette figure ; ce cas autorise la superposition de deux représentations.

Par exemple, $a_i \circ (b \times a_i)$ désigne la classe de $a \ast b$: en effet l'opérateur o nous impose que a_i et b ont leur origine en commun et l'opérateur x les extrémités. La figure 1.18 nous montre une représentation de $a_i \circ (b \times a_i)$ alors que la figure 1.19 nous montre une représentation de $a \circ (b \times a)$. On remarquera que si $a \circ a \neq a$, $a_i \circ a_i = a$.

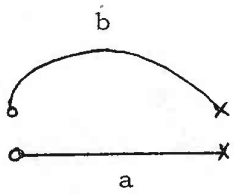


figure 1.17

figure 1.18

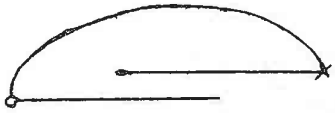


figure 1.19

Ce modèle a été utilisé efficacement pour analyser des photographies de chambre à étincelles. Si des outils "contextuels" comme l'indicage et l'opérateur $*$ ne posent pas de difficultés lorsqu'on les utilise pour analyser une figure, on peut cependant regretter qu'ils soient introduits comme opérateurs algébriques, car ils compliquent la structure et permettent plus difficilement une étude algébrique des langages engendrés par des grammaires.

1.3.4 Les chaînes codées (FEDER 1968)

Si on munit le plan d'un quadrillage suffisamment fin, on peut approcher toute courbe continue par une chaîne dont les segments sont choisis parmi les huit indiqués à la figure 1.20. On se ramène donc à des phrases linéaires codant des courbes. Si nous nous plaçons dans l'espace de figures $\mathbb{R}^2$ muni des translations, cette codification serait possible en n'utilisant que l'opérateur +. L'étude de Feder porte sur des classes de langages : nous avons ici une structure de monoïde et tous les types de grammaires habituellement définis peuvent l'être ici. Feder démontre, à l'aide des automates, que les courbes fermées convexes forment un langage contextuel qui n'est pas de Chomsky.

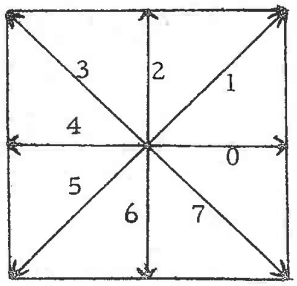


figure 1.20

Avec la théorie de Shaw, les courves fermées convexes forment un ensemble algébrique ; il suffit de considérer la grammaire, dont les règles sont :

$$X ::= A * B$$

$$A ::= A_0 + A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_i ::= i + A_i / \lambda , \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

$$B ::= B_3 + B_2 + B_1 + B_0$$

$$B_i ::= i + B_i/\lambda \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

λ désigne l'élément neutre de l'addition, i les figures symbolisées en figure 1.20.

Ceci justifie l'appellation d'bpérateurs contextuels" donnée à l'opérateur et à l'indicage introduit par Shaw.

1.3.5 Remarques

Toutes les méthodes décrites ici (sauf celle de Kirsch) consistent à construire des figures en mettant bout à bout des constituants élémentaires. Ces constituants sont donc articulés entre eux par des points. Or, parfois dans des figures, interviennent des relations topologiques telles que voisinage, intérieur, contact de surfaces ; ces relations peuvent être exprimées par des conditions booléennes dans des grammaires transformationnelles (voir par exemple (CLOWSE)) ou peuvent être vérifiées ensuite lorsque l'analyse syntaxique est terminée.

Comme le montre Feder, les figures ont souvent des structures "contextuelles". Pour décrire des classes de figures par des systèmes, il faudra donc, soit introduire des opérateurs contextuels, soit définir des classes plus larges que les ensembles algébriques.

2

ensembles algébriques

2 ENSEMBLES ALGEBRIQUES

Nous allons, dans ce chapitre, généraliser la notion de grammaire à contexte libre dans le cadre d'une algèbre quelconque. Les ensembles définis par ces grammaires seront exactement les ensembles algébriques.

Si on se place sur le monoïde libre, on peut définir un langage à contexte libre, soit à l'aide d'une C-grammaire et des dérivations, soit par un système à point fixe, soit par des bilangages grammaticaux. L'utilisation des dérivations permet de faire le lien avec les autres types de grammaires ; les systèmes à point fixe simplifient beaucoup de démonstrations ; les ramifications et les bilangages enfin, sont utiles pour aborder l'ambiguïté et l'analyse syntaxique. Ces trois notions seront introduites ici.

Notation : Pour tout ce qui se rapporte aux schémas fonctionnels, les notations utilisées sont celles de 0. 2 :

On se donne une famille dénombrable d'ensembles $\pi = (F_n)$

$\overline{\pi}$ désigne l'ensemble des schémas fonctionnels sur π

$\overline{\pi}(N)$ désigne l'ensemble des schémas fonctionnels sur

$\pi(N) = (F_0 \cup N, F_1, F_2, \ldots)$

π est appelé une théorie

Soit E un ensemble. La donnée, pour tout entier n, d'une application φ_π dans l'ensemble des fonctions de E^n dans E munit E d'une structure de π-algèbre. Nous notons φ_E (ou φ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'unique π-homomorphisme de $\overline{\pi}$ dans E.

2. 1 Grammaires algébriques

Définition : Soit $\pi = (F_n)$ une théorie. Une grammaire algébrique $\mathcal{G}$ sur π (ou encore π-grammaire) est la donnée d'un ensemble fini N, d'un élément X de N, et d'une relation finie $::=$ entre N et $\overline{\pi}(N)$. On notera $\mathcal{G} = (N, ::=, X)$.

2. 1. 1 Langage engendré par une grammaire algébrique

On définit la même dérivation que pour la C-grammaire $(N, F, ::=, X)$:

Définition : Soit $\mathcal{G} = (N, ::=, X)$ une π-grammaire. Soient $\alpha, \beta \in (F \cup N)^*$; on dit que α se réécrit β et on note $\alpha \succ_{\mathcal{G}} \beta$ si et seulement si :

$$(\exists\ \lambda \in (F \cup N)^*)\ (\exists\ \lambda' \in (F \cup N)^*)\ (\exists\ A \in N)\ (\exists\ \varphi \in \overline{\pi}(N))$$

$$(\alpha = \lambda A \lambda' \text{ et } \beta = \lambda \varphi \lambda' \text{ et } A ::= \varphi)$$

Proposition 2. 1. 1 : Si $\alpha \in \overline{\pi}(N)$ et $\alpha \succ_{\mathcal{G}} \beta$ alors $\beta \in \overline{\pi}(N)$

C'est une conséquence immédiate de la proposition 0. 2. 1. 1

Soit alors $\overset{*}{\succ}_{\mathcal{G}}$ la fermeture transitive de $\succ_{\mathcal{G}}$.

Si $\alpha \overset{*}{\succ}_{\mathcal{G}} \beta$, il existe $n \geqslant 0$ et une suite $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ et $(\alpha_i \succ \alpha_{i+1}$, pour $i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Une telle suite est une dérivation de longueur n et on note :

$$\alpha \overset{n}{\succ} \beta$$

Soit $\quad F(\mathcal{G}) = \left\{ \alpha \in \overline{\pi} \mid X \overset{*}{\succ}_{\mathcal{G}} \alpha \right\}$

Définition : Soit A une π-algèbre et $\mathcal{G}$ une π-grammaire.
On appelle ensemble engendré par $\mathcal{G}$ sur A et on note $L_A(\mathcal{G})$ (ou $L(\mathcal{G})$ si aucune confusion n'est possible) l'ensemble $\varphi_A(F(\mathcal{G}))$.

2. 1. 2 Ensembles algébriques et ensembles engendrés par des π-grammaires

2. 1. 2. 1 Système à point fixe

Soit π une théorie. Soit N l'alphabet des inconnues $N = \{A_1, \ldots, A_n\}$.
Considérons le système d'équations de la forme :

pour $i = 1, \ldots, n \qquad A_i = \bigcup_{j=1}^{P_i} \alpha_{ij} \qquad \alpha_{ij} \in \overline{\pi}(N)$

Un tel système est dit système à point fixe.

Soit A une π-algèbre et $\mathcal{P}(A)$ son ensemble de parties. Soit alors Φ l'application de $\mathcal{P}(A)^n$ dans $\mathcal{P}(A)^n$ qui transforme le n uple $(E_1, \ldots, E_n)$ en $(E'_1, \ldots, E'_n)$ tel que :

pour $i = 1, \ldots, n$: $E'_i = \bigcup_{j=1}^{P_i} \widehat{\alpha ij}(E_1, \ldots, E_n)$

Une solution de ce système est un n-uple $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E} = \Phi(\mathcal{E})$

Tout système à point fixe sur une π-algèbre A possède une <u>solution minimale</u> (au sens de l'inclusion) qui peut être obtenue de la façon suivante :

Soit $X_0 = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$

$X_{i+1} = \Phi(X_i)$

$X = \bigcup_{n \geq 0} X_i$. On a bien $X = \Phi(X)$. Toutes les solutions du système contiennent X_0, donc $\Phi^n(X_0)$, et donc X est bien solution minimale. Pour un résultat sur l'unicité de la solution, on pourra consulter (LESCANNE).

On dit qu'<u>une partie de A est algébrique</u> si elle est une composante de la solution minimale d'un système à point fixe.

<u>Proposition 2.1.2.1</u> Soit S un système et $(E_1, \ldots, E_n)$ la solution minimale de S sur la π-algèbre $\overline{\pi}$. Soit $(F_1, \ldots, F_n)$ la solution minimale de S sur la π-algèbre A. Alors $F_i = \varphi_A(E_i)$

En effet (cf. remarque 1 de 0.2.3.1), on a le diagramme commutatif suivant ($\varphi^{(n)}_A$ désigne l'application produit définie sur $\overline{\pi}^n$) :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\pi}^n \arrow[r, "\alpha ij"] \arrow[d, "\varphi^{(n)}_A"] & \overline{\pi} \arrow[d, "\varphi_A"] \\
A^n \arrow[r, "\widehat{\alpha ij}"] & A
\end{tikzcd}$$

soit plus généralement en prenant les ensembles des parties :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\overline{\pi})^n \arrow[r, "\alpha ij"] \arrow[d, "\varphi^{(n)}_A"] & \mathcal{P}(\overline{\pi}) \arrow[d, "\varphi_A"] \\
\mathcal{P}(A)^n \arrow[r, "\widehat{\alpha ij}"] & \mathcal{P}(A)
\end{tikzcd}$$

Comme $\varphi_A^{(n)}(\emptyset, \ldots, \emptyset) = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$

$$\varphi_A^{(n)}(\bigcup_k X_k) = \bigcup_k \varphi_A^{(n)}(X_k)$$

on a bien $\varphi_A^{(n)}(E_1, \ldots, E_n) = (F_1, \ldots, F_n)$

2.1.2.2 Système associé à une grammaire

Soit $\mathcal{G} = (N, ::=, A_1)$ une π-grammaire ($N = \{A_1, \ldots, A_n\}$). Associons lui un système à point fixe S de la façon suivante :

Si les règles de $\mathcal{G}$ sont : $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, $A_i ::= \alpha_{ij}$

alors les équations de S sont :

$$1 \leqslant i \leqslant n \qquad A_i = \bigcup_{j=i}^{k_i} \alpha_{ij}$$

De la même manière, on peut associer à tout système à point fixe une grammaire algébrique.

Soit alors A une π-algèbre. Notons $L(A_i)$ le langage engendré par la grammaire $(N, ::=, A_i)$.

Théorème 2.1.2.2 : Sur une π-algèbre, tout système à point fixe à n inconnues $A_1, \ldots, A_n$ possède une solution minimale formée des langages $L(A_i)$ de la grammaire associée au système.

Compte tenu de la proposition 2.1.2.1, on se ramène à la seule démonstration pour la π-algèbre $\overline{\pi}$, or, dans ce cas, nous sommes dans le monoïde libre où ce résultat est bien connu (GROSS-LENTIN).

Corollaire : les langages engendrés par les π-grammaires sont les ensembles algébriques et eux seuls.
Nous les appelerons langages algébriques.

2.1.3 Grammaires équivalentes

Définition : Soit A une π-algèbre. Soient $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux π-grammaires. On dit que $\mathcal{G}_1$ est équivalente à $\mathcal{G}_2$ sur A si

$$L_A(\mathcal{G}_1) = L_A(\mathcal{G}_2)$$

On dit que $\mathcal{G}_1$ est équivalente à $\mathcal{G}_2$ si $F(\mathcal{G}_1) = F(\mathcal{G}_2)$. Dans ce cas (cf. proposition 2.1.2.1), $\mathcal{G}_1$ est équivalente à $\mathcal{G}_2$ sur toute π-algèbre.

2.1.3.1 Réduction supérieure et inférieure d'une π-grammaire

$\mathcal{G}_1$ est équivalente à $\mathcal{G}_2$ si les langages engendrés sur le monoïde F^* sont égaux. On généralise donc sans difficulté les notions analogues définies pour les C-grammaires ([BAR-HILLEL, PERLES, SHAMIR]).

Théorème 2.1.3.1 : Soit $\mathcal{G} = (N, ::=, X)$ une π-grammaire. Il existe $\mathcal{G}' = (N', ::=', X)$ équivalente à $\mathcal{G}$ vérifiant :

a) $N' \subset N$, $::=' \subset ::=$

b) $(\forall A \in N')(\exists \alpha \in \overline{\pi})$ $A \overset{*}{\underset{\mathcal{G}'}{\succ}} \alpha$ (réduite inférieure)

c) $(\forall A \in N')(\exists \lambda, \lambda' \in (F \cup N)^*)$ $X \overset{*}{\underset{\mathcal{G}'}{\succ}} \lambda A \lambda'$ (réduite supérieuse)

Dans la suite, nous supposerons que toutes nos π-grammaires sont réduites supérieurement et inférieurement.

2.1.3.2 Réduite de Chomsky

Dans le cas des C-grammaires, on dit qu'une grammaire est sous la forme réduite de Chomsky, si chacune de ses règles est d'un des trois types suivants :

$$A ::= B\,C, \quad A ::= B, \quad A ::= a$$

où A, B, C sont des non terminaux et a est un terminal.

Pour toute C-grammaire, il existe une C-grammaire équivalente qui est sous la forme réduite de Chomsky. Nous allons généraliser ce résultat.

<u>Définition</u> : Une π-grammaire $\mathcal{G} = (N, ::=, X)$ est dite C-réduite si chacune de ses règles est de la forme :

$$A ::= a\alpha \qquad \alpha \in N^* \qquad a \in F_{|\alpha|}$$

ou $$A ::= B \qquad B \in N$$

Une π-grammaire est donc C-réduite lorsque le degré de chaque second membre de règle est inférieur ou égal à 1.

<u>Théorème 2.1.3.2</u> : Pour toute π-grammaire $\mathcal{G}$, il existe une π-grammaire équivalente qui est C-réduite.

Appelons terme de $\mathcal{G}$, tout morphisme figurant dans un second membre d'une règle de $\mathcal{G}$. Soit n la somme des degrés des termes de $\mathcal{G}$ dont le degré est supérieur à 2.

Procédons par récurrence sur n.

Si $n = 0$ $\mathcal{G}$ est elle-même C-réduite.

Supposons le résultat établi jusqu'au rang $n - 1$.

Soit $a\alpha$ un terme de $\mathcal{G}$ tel que $d(a\alpha) \geqslant 2$:

$a \in F_m$ et il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \overline{\pi}(N)$ tels que :

$a\alpha_1, \ldots, \alpha_m = a\alpha, \quad \sum_{i=1}^{m} d(\alpha_i) = d(a\alpha) - 1$

Remplaçons dans le système associé à $\mathcal{G}$ le terme $a\alpha$ par le terme $aA'_1, \ldots, A'_m$ et ajoutons les équations

$$A'_j = \alpha_j \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

Nous obtenons alors un système équivalent auquel il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence puisque la somme des degrés des termes dont le degré est au moins 2, est majorée par

$$n - d(a\alpha) + \sum_{j=1}^{m} d(\alpha_i) = n - 1$$

<u>2.1.3.3 Cas de morphismes équivalents</u>

On dit que deux morphismes ω et ω' de $\overline{\pi}(N)$ sont équivalents pour la π-algèbre A si les applications $\hat{\omega}$ et $\hat{\omega}'$ associées (0.2.3) sont égales.

<u>Théorème</u> : Soit $\mathcal{G} = (N, ::=, X)$ une π-grammaire. Soient A une π-algèbre et ω et ω' deux morphismes équivalents sur A. La π-grammaire $\mathcal{G}'$ obtenue en remplaçant dans les règles de $\mathcal{G}$ le morphisme ω par ω' est équivalente à $\mathcal{G}$ sur A.

Le résultat est évident en raisonnant sur les systèmes d'équations.

2. 1. 4 Image par un homomorphisme

<u>Théorème 2. 1. 4</u> : Soient A et B deux π-algèbres et h un π-homomorphisme de A dans B. Soit $\mathcal{G}$ une π-grammaire. Alors

$$h(L_A(\mathcal{G})) = L_B(\mathcal{G})$$

En effet : $L_A(\mathcal{G}) = \varphi_A(F(\mathcal{G}))$

$L_B(\mathcal{G}) = \varphi_B(F(\mathcal{G}))$

or $\quad h \circ \varphi_A = \varphi_B$ (proposition 0. 2. 4)

donc $\quad h \circ \varphi_A(F(\mathcal{G})) = \varphi_B(F(\mathcal{G}))$

2. 2 Structures associées aux grammaires

Dans le cas des langages à contexte libre, les "marqueurs de phrases" ont leurs noeuds étiquetés par des non terminaux. Les théories algébriques évoquées ici étant plus générales que celles du monoïde, il nous faudra, pour plus de précision, étiqueter les noeuds avec les numéros des règles appliquées dans les dérivations.

Nous supposerons donc que toutes les règles des grammaires sont numérotées par des entiers p, $p \in M \subset \mathbb{N}$.

2. 2. 1 Bilangage des structures

Soit $\mathcal{G} = (N, ::=, X)$ une π-grammaire ($N = \{A_1, \ldots, A_n\}$). Ses règles sont numérotées par des entiers p, $p \in M \subset \mathbb{N}$.

Pour tout A de N, posons :

$T(A) = \{ p \in M \,/\,$ la règle de numéro p est $A ::= \alpha,\ \alpha \in \overline{\pi} \}$

(T (A) est l'ensemble des numéros des règles "terminales" de premier membre A)

$N(A) = \{ p \in M \,/\,$ la règle de numéro p est $A ::= \alpha \in \overline{\pi}(N) \quad \overline{\pi} \}$

$P(A) = N(A) \cup T(A)$

P(A) est donc l'ensemble des numéros de règles de premier membreA.

Soit alors, pour tout A de N, $\mathcal{G}_A = (V, \longrightarrow, Y_A)$ la grammaire (au sens de O. 1) où :

$V = M$

$Y_A = P(A)$

$\longrightarrow$ est définie par :

si p est le numéro de la règle $A ::= \alpha_0 A'_1 \alpha_1 \ldots A'_k \alpha_k$ $(\alpha_0 \in F^*,$ $A'_i \in N)$ alors $p \longrightarrow P(A'_1) \ldots P(A'_k)$

En particulier, si $p \in T(A)$ alors $p \longrightarrow \wedge$.

On appelle <u>bilangage des structures de $\mathcal{G}$</u> le bilangage grammatical engendré au sens strict par $\mathcal{G}_X$.

Nous le noterons $\mathcal{BL}(\mathcal{G}, X)$.

Nous nous intéresserons aussi aux ramifications engendrées au sens large par $\mathcal{G}_X$ et dont le mot des racines a pour longueur 1. Nous noterons $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ ce bilangage.

Toute ramification r de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ se décompose de la manière unique sous la forme $r = p \times (r_1 + r_2 + \ldots + r_k)$; si $p \in P(A)$ alors $r \in \mathcal{BL}(\mathcal{G}, A)$; de même $r_i \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ et donc nous avons la proposition suivante :

<u>Proposition 2. 2. 1</u> : pour toute ramification r de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$, il existe $p \in M$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $r_1, \ldots, r_k \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ tels que :

$$r = p \times (r_1 + \ldots + r_k).$$

2.2.2 Schémas fonctionnels associés aux structures

A chaque structure r, nous allons faire correspondre le schéma fonctionnel qui lui est attaché.

Pour toute règle de numéro p, notons ω_p ($\omega_p \in \overline{\pi}(N)$) le morphisme second membre de cette règle.

Soit $\omega_p = \alpha_0 A'_i \alpha_i \ldots A'_k \alpha_k$, où $\alpha_i \in F^*$, $A'_i \in N$

Posons : $\Omega(p \times \wedge) = \omega_p$

$$\Omega(p \times (r_1 + r_2 + \ldots + r_k)) = \alpha_0 \Omega(r_1) \ldots \Omega(r_k) \alpha_k$$

Il est immédiat que :

$$\forall r \in \mathcal{B}(\mathcal{G}) \qquad \Omega(r) \in \overline{\pi}.$$

Posons $X_i = \left\{ \Omega(r) / r \in \mathcal{B}\mathcal{L}(\mathcal{G}, A_i) \right\} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$

<u>Proposition 2.2.2</u> : Les X_i forment la solution minimale du système à point fixe sur $\overline{\pi}$ associé à $\mathcal{G}$.

Soit $A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \alpha_{ij} \quad 1 \leqslant i \leqslant n$ le système associé à $\mathcal{G}$.

Montrons d'abord que (X_i) est solution du système.

Soit $a \in X_i \qquad a = \Omega(r)$, $r \in \mathcal{B}\mathcal{L}(\mathcal{G}, A_i)$

donc $r = p \times (r_1 + \ldots + r_k)$, $\omega_p = \alpha_0 A'_1 \alpha_1 \ldots A'_k \alpha_k$

et $\quad r_k \in \mathcal{B}\mathcal{L}(\mathcal{G}, A'_k)$

$a = \Omega(r) = \alpha_0 \Omega(r_1) \ldots \Omega(r_k) \alpha_k$

donc $a \in \omega_p (X_1, \ldots, X_n)$; comme il existe j tel que $\alpha_{ij} = \omega_p$

donc $a \in \bigcup_{j=1}^{p_i} \alpha_{ij} (X_1, \ldots, X_n)$

Réciproquement, soit $a = \alpha_{ij}(a_1, \ldots, a_n)$ $\quad (a_k \in X_k)$

$$a_k = \Omega(r_k) \qquad r_k \in \mathcal{BL}(\mathcal{G}, A_k)$$

Soit p le numéro de la règle $A_i ::= \alpha_{ij}$; $\alpha_{ij} = \omega_p$

$$\omega_p = \alpha_0 \, A'_1 \ldots A'_m \, \alpha_m ;$$

$$a = \alpha_0 \, a'_1 \ldots a'_m \, \alpha_m = \Omega(p \times (r'_1 + \ldots + r'_m))$$

or $p \times (r'_1 + \ldots + r'_m) \in \mathcal{BL}(\mathcal{G}, A_i)$ donc

$$a \in X_i$$

Donc $(X_1, \ldots, X_n)$ est bien solution du système.

Il reste à montrer que nous avons bien là, la solution minimale.

Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ la solution minimale et montrons que

$(X_1, \ldots, X_n) \subset (Y_1, \ldots, Y_n)$

Procédons par récurrence sur la taille des ramifications :

pour $r = \Lambda$ $\quad r \notin \mathcal{BL}(\mathcal{G}, A_i)$

$r = p \times (r_1 + \ldots + r_k)$ $\quad$ et p est le numéro de la règle

$A_i ::= \alpha_0 \, A_{i_1} \ldots A_{i_k} \, \alpha_k$

par hypothèse de récurrence $\Omega(r_j) \in Y_{ij}$ $\quad 1 \leqslant j \leqslant k$

et donc $\alpha_0 \, \Omega(r_1) \ldots \Omega(r_k) \, \alpha_k \in \omega_p(Y_1, \ldots, Y_n)$

et donc $\Omega(r) \in Y_i$

Donc : $\forall i, \; 1 \leqslant i \leqslant n, \; \forall r \in \mathcal{BL}(\mathcal{G}, A_i), \; \Omega(r) \in Y_i$

Donc $(X_1, \ldots, X_n)$ est la solution minimale.

<u>Définition</u> : Soit A une π-algèbre. Pour tout x de $L_A(\mathcal{G})$, on appelle structure associée à x toute ramification r de $\mathcal{BL}(\mathcal{G}, X)$ telle que $\varphi_A \circ \Omega(r) = x$.

<u>Remarque</u> : L'assertion " $\mathcal{G}$ est ambiguë" (c'est-à-dire : il existe r_1 et r_2 appartenant à $\mathcal{BL}(\mathcal{G}, X)$, $r_1 \neq r_2$, tels que $\varphi_A \circ \Omega(r_1) = \varphi_A \circ \Omega(r_2)$ est équivante à
"l'application $\varphi_A \circ \Omega$ définie sur $\mathcal{BL}(\mathcal{G}, X)$ n'est pas injective."

L'étude de l'ambiguïté peut donc se décomposer en :

- injectivité de Ω, c'est-à-dire étude de l'ambiguïté du langage des schémas fonctionnels $F(\mathcal{G})$; ce qui se ramène à un cas particulier de l'étude de l'ambiguïté des langages à contexte libre : $F(\mathcal{G})$ est un langage à contexte libre mais la classe des langages à contexte libre qui sont des schémas fonctionnels est strictement contenue dans celle des langages à contexte libre.

- injectivité de φ_A restreinte à $F(\mathcal{G})$; φ_A n'est pas, en général, injective et dans certains cas, pour un élément $a \in A$ donné $\varphi_A^{-1}(a)$ contient une infinité d'éléments : c'est, en particulier, le cas des figures à cause de la "superposition".

2.3 Ensembles algébriques sur le groupe libre

Comme illustration de ce qui précède, nous allons faire une courte étude sur les ensembles algébriques dans le cas du groupe libre. Les principaux résultats de cette étude nous serviront dans les chapitres suivants.

Nous considérons le groupe libre comme une π-algèbre où $\pi = (F_n)$ est donné par :

$$F_0 = V$$
$$F_2 = \{\cdot\}$$
pour $i \neq 0, 2$ $\quad F_i = \emptyset$

$\hat{\ }$ est la loi de composition interne du groupe notée multiplicativement. Nous abandonnons ici la notation préfixée pour reprendre la notation habituelle sur les groupes et les monoïdes.

2.3.1 Définition du groupe libre (MAGNUS-KARRAS-SOLITAR)

Nous ne nous intéresserons qu'aux groupes ayant un nombre fini de générateurs.

Soit A un alphabet fini, et A' disjoint de A de même cardinal et f une bijection de A sur A'. Posons $V = A \cup A'$; f et f^{-1} induisent une bijection de V sur V et nous noterons a^{-1} l'image de a par cette bijection.

Cette bijection s'étend à une application de V^* dans V^* :

$$x_1 x_2 \dots x_n \in V^* \longrightarrow x_n^{-1} \dots x_1^{-1}$$

Soit E la relation sur V^* telle que

$\forall x, y \in V^*, \ \forall a \in V, \quad x a a^{-1} y \ E \ x y$

Soit E^* la plus petite relation symétrique et transitive contenant E.

Remarque : nous avons préféré introduire dès E la stabilité par concaténation, ceci pour simplifier la démonstration.

Proposition 2.3.1.1 : E^* est une relation d'équivalence sur V^* ;

$$(x \ E^* \ y \text{ et } z \ E^* \ t) \Rightarrow x z \ E^* \ y t$$

Le groupe libre sur A est défini comme quotient de V^* par E^* : $G = V^*/E^*$.

G est un groupe. G possède la propriété universelle suivante : pour tout groupe F, pour toute application f de A dans F, il existe un homomorphisme de groupe h unique qui rend le diagramme suivant commutatif :
(i désigne l'injection canonique de A dans G)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & F \\ & G \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

On notera <u>e l'élément neutre de G</u> qui est la classe de Λ .

Un mot $a_1 \ldots a_n \in V^*$ est dit <u>irréductible</u> si, pour tout i, $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$. En particulier, Λ est irréductible.

Nous allons construire un opérateur R qui, à tout mot α de V^* lui associe un mot $R(\alpha)$ irréductible équivalent ; R est défini par récurrence :

$$R(\Lambda) = \Lambda$$

Si $R(\alpha) = \gamma b$, $R(\alpha a) =$ <u>si</u> $b = a^{-1}$ <u>alors</u> γ <u>sinon</u> $R(\alpha)\, a$

<u>Proposition 2.3.1.2</u> : Pour tout mot α, $R(\alpha)$ est irréductible.

Démontrons le résultat par récurrence sur la longueur n de α.

Le résultat est évident pour n = 0 ; au rang n + 1 :

$\alpha = \beta a$; si $R(\beta a) = \gamma a^{-1}$ alors $R(\beta a) = \gamma$

sinon $R(\beta a) = R(\beta)\, a$

Dans les deux cas, comme $R(\beta)$ est irréductible par hypothèse de récurrence, $R(\beta a)$ est irréductible.

<u>Proposition 2.3.1.3</u> : Si α est irréductible, $R(\alpha) = \alpha$.

La démonstration est immédiate par récurrence sur la longueur de α.

<u>Proposition 2.3.1.4</u> : Pour tout mot $\alpha \in V^*$, $R(\alpha)\, E^* \alpha$.

Procédons par récurrence sur la longueur n de α.
Le résultat est évident pour n = 0. Supposons le vrai jusqu'au rang n.

Au rang n + 1 :

$\alpha = \gamma a$ $\quad R(\gamma)\, E^* \gamma$ par hypothèse de récurrence.

donc $R(\gamma)\, a\, E^* \gamma a$

or par définition de R : $R(\gamma a)\, E^* R(\gamma)\, a$,

donc $R(\gamma a)\, E^* \gamma a$

Théorème 2.3.1.5 : Pour tout mot α et β de V^* , on a l'équivalence suivante :

$$\alpha \; E^* \beta \Leftrightarrow R(\alpha) = R(\beta)$$

Lemme 1 : $R(\alpha) = R(\beta) \Rightarrow R(\alpha\gamma) = R(\beta\gamma)$

Procédons par récurrence sur la longueur de γ ; le résultat est évident pour $\gamma = \Lambda$.

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n ; au rang n + 1 :

$$\gamma = \gamma' a$$

$$R(\alpha\gamma') = R(\beta\gamma') \text{ par hypothèse de récurrence}$$

et donc $\quad R(\alpha\gamma' a) = R(\beta\gamma' a)$ par définition de R.

Lemme 2 : $R(x\, a\, a^{-1}\, y) = R(xy)$

Comme $R(x\, a\, a^{-1}) = R(x)$

en utilisant le lemme 1

$$R(x\, a\, a^{-1}\, y) = R(xy)$$

Soit E' la relation d'équivalence définie par :

$$\alpha\, E'\, \beta \Leftrightarrow R(\alpha) = R(\beta)$$

D'après le lemme 2, E est contenue dans E' et donc E^* est contenu dans E'

donc $\quad \alpha\, E^*\, \beta \Rightarrow R(\alpha) = R(\beta)$

or comme $\quad R(\alpha)\, E^*\, \alpha$ et $R(\beta)\, E^*\, \beta$ (proposition 2.3.1.4)

$$R(\alpha) = R(\beta) \Rightarrow \alpha\, E^*\, \beta$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

On appelle langage de Dyck sur l'alphabet $A \cup A'$ le langage à contexte libre engendré par la grammaire suivante :

$\forall a \in A \cup A' \quad D ::= a\, D\, a^{-1}\, D$

$\qquad\qquad\qquad\quad D ::= \Lambda$

<u>Proposition 2.3.1.6</u> : $R(\alpha)$ est l'unique élément irréductible de la classe d'équivalence de α.

Si $R(\alpha) = a_1 \dots a_n$, il existe $d_0, \dots, d_n \in D$ tel que $\alpha = d_0\, a_1\, d_1 \dots a_n d_n$

Comme conséquence immédiate du théorème qui précède et des propositions 2.3.1.2 et 2.3.1.3, nous avons l'unicité de l'élément irréductible de la classe de α.

Comme $\alpha\, E^*\, R(\alpha)$ $\exists m$ tel que $\alpha\, E^m R(\alpha)$; en procédant par récurrence sur m il vient de façon immédiate, d'après la définition de E, que

$$\alpha = d_0\, a_1\, d_1 \dots a_n\, d_n.$$

Dans la suite, nous considérerons $R(\alpha)$ comme le représentant canonique de la classe de α suivant E . Nous noterons <u>i l'injection canonique</u> de G dans V^*, f la projection canonique de V^* dans G :

$$f \circ i \text{ est l'identité sur } G.$$

Démontrons une autre propriété de R :

<u>Proposition 2.3.1.7</u> : $(\forall\, \alpha, \beta \in V^*)\ (R(\alpha\beta) = R(R(\alpha)\, R(\beta))$

De plus : $(\exists\, \gamma, \delta \in V^*)\ (\gamma\delta = R(\alpha\beta)$, γ plus grand facteur gauche commun à $R(\alpha)$ et $R(\alpha\beta)$, δ plus grand facteur droit commun à $R(\beta)$ et $R(\alpha\beta)$ et $|R(\alpha)| - |\gamma| = |R(\beta)| - |\delta|$)

$$R(\alpha\beta)\ E^*\ \alpha\beta$$

$$R(\alpha)\ \ E^*\ \alpha$$

$$R(\beta)\ \ E^*\ \beta$$

donc $R(R(\alpha)\, R(\beta))\ E^*\ \alpha\beta$ et donc, d'après le théorème ci-dessus, $R(\alpha\beta) = R(R(\alpha)\, R(\beta))$.

Soit ε le plus grand facteur droit de $R(\alpha)$ tel que ε^{-1} soit facteur gauche de $R(\beta)$.

$R(\alpha) = \gamma\,\epsilon \qquad R(\beta) = \epsilon^{-1}\,\delta$

donc $\gamma\,\delta\ E^{*}\ R(\alpha)\ R(\beta)$.

Comme $\gamma\,\delta$ est irréductible

$R(\alpha\,\beta) = \gamma\,\delta$

De plus, si ϵ commence par a, ϵ^{-1} se termine par a^{-1} et δ ne commence pas par a, donc γ est bien le plus grand facteur gauche commun à $R(\alpha)$ et à $R(\alpha\,\beta)$.

De même pour δ.

<u>Définition</u> : Soient α, β, $\gamma \in V^{*}$. On dit que γ <u>se réduit dans le contexte</u> (α, β) si :

$(\exists\ \delta,\ \delta_1,\ \epsilon,\ \epsilon_1 \in V^{*})\ (R(\alpha) = \delta\,\delta_1,\ R(\beta) = \epsilon_1\,\epsilon,\ R(\alpha\,\gamma\,\beta) = \delta\,\epsilon)$

Si γ ne se réduit pas dans le contexte (α, β), on dit que γ est <u>irréductible dans le contexte</u> (α, β).

<u>Proposition 2.3.1.8</u> : Si γ se réduit dans le contexte (α, β) alors $|R(\gamma)| \leqslant |R(\alpha)| + |R(\beta)|$

Comme $R(\alpha\,\gamma\,\beta) = R(R(\alpha)\ R(\beta)\ R(\gamma))$, on peut supposer α, β, γ irréductibles.

$R(\alpha\,\gamma\,\beta) = R(R(\alpha\,\gamma)\,\beta)$

d'après la proposition 2.3.1.7 :

$R(\alpha\,\gamma) = \alpha_1\ \gamma_1 \qquad |\alpha| - |\alpha_1| = |\gamma| - |\gamma_1|$

et $R(\alpha_1\ \gamma_1\ \beta) = \alpha_2\ \beta_1 \qquad |\beta| - |\beta_1| = |\alpha_1\ \gamma_1| - |\alpha_2|$

α_1 est le plus grand facteur gauche commun à α et $R(\alpha\gamma)$

α_2 est le plus grand facteur gauche commun à $\alpha_1\gamma_1$ et $R(\alpha\gamma\beta)$

β_1 est le plus grans facteur droit commun à β et $R(\alpha\gamma\beta)$

Comme γ se réduit dans le contexte (α, β)

$R(\alpha\gamma\beta) = \delta\,\epsilon$ $\quad$ δ facteur gauche de α

ϵ facteur droit de β.

Par définition même de β_1 : $|\beta_1| \geqslant |\epsilon|$

donc $|\delta| \geqslant |\alpha_2|$

donc α_2 est facteur gauche de α et de $\alpha_1\gamma_1$

or α_1 est le facteur gauche le plus grand commun à α et $\alpha_1\gamma_1$ donc

$$|\alpha_2| \leqslant |\alpha_1|$$

or $\quad |\alpha| + |\beta| - |\alpha_1| - |\beta_1| = |\gamma| + |\alpha_1| - |\alpha_2|$

soit $\quad |\alpha| + |\beta| - |\gamma| = 2|\alpha_1| + |\beta_1| - |\alpha_2|$

comme $|\alpha_2| \leqslant |\alpha_1|$: $\quad |\alpha| + |\beta| - |\gamma| \geqslant |\alpha_1| + |\beta_1| \geqslant 0$

ce qui achève la démonstration.

<u>Définition</u> : Soit $\alpha = a_0 \ldots a_n$ un mot sur V. On dit que α est cycliquement irréductible s'il vérifie une de ces assertions équivalentes :

- $a_n \neq a_0^{-1}$ et $(\forall\, i \in [1, n])\ (a_i \neq a_{i-1}^{-1})$
- α^2 est irréductible.

<u>Proposition 2.3.1.9</u> : Pour tout mot irréductible α, il existe α', $\alpha'' \in V$ uniques tels que α'' soit cycliquement irréductible et

$$\alpha = \alpha'\,\alpha''\,(\alpha')^{-1}$$

Soit en effet α' le plus grand facteur gauche de α tel qu'il existe α'' tel que $\alpha = \alpha' \alpha'' (\alpha')^{-1}$.

Comme α' est de longueur maximum, que α est irréductible, α'' est cycliquement irréductible.

Pour toute autre décomposition $\alpha = \beta' \beta'' (\beta')^{-1}$, comme α' est de longueur maximale, $\alpha' = \beta' \gamma$ et donc

$$\beta'' = \gamma \alpha'' \gamma^{-1}$$

et donc β'' n'est cycliquement irréductible que si $\gamma = \Lambda$, ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u> : en 2.3.2, nous considérons des expressions du type $E_n = \beta \alpha^n \gamma$ (α, β, γ irréductibles).

Quitte à remplacer β par $\beta \alpha'$ et γ par $(\alpha')^{-1} \gamma$, on pourra supposer α cycliquement irréductible.

<u>Conséquence</u> : Soit α un mot irréductible non vide,

$$\lim_{n \to \infty} |R(\alpha^n)| = +\infty$$

En d'autres termes, tout élément de G distinct de l'élément neutre e a un ordre infini :

En effet $\quad R(\alpha^n) = \alpha' \alpha''^n (\alpha')^{-1}$

et donc $\quad R(\alpha^n) = 2 \alpha' + n \alpha''$

<u>Proposition 2.3.1.10</u> : Soient α et β deux mots cycliquement irréductibles et soit γ un mot irréductible. S'il existe un entier n tel que γ se réduise dans le contexte (α^n, β^n), alors, il existe des entiers p et q et un mot ε tels que :

$$\gamma = (\alpha^{-1})^p \; \varepsilon (\beta^{-1})^q \qquad |\varepsilon| < |\alpha| + |\beta|$$

Soit p et q les plus grands entiers tels qu'il existe ε tel que

$$\gamma = (\alpha^{-1})^p \, \varepsilon \, (\beta^{-1})^q$$

Si γ se réduit dans le contexte (α^n, β^n), il se réduit dans le contexte $(\alpha^{n+1}, \beta^{n+1})$ et on peut donc supposer que n est plus grand que p et q.

$$\alpha^n \, \gamma \, \beta^n \; E^* \; \alpha^{n-p} \, \varepsilon^{n-q}$$

<u>Lemme</u> : si γ se réduit dans le contexte (α^n, β^n), alors ε se réduit dans le contexte $(\alpha^{n-p}, \beta^{n-q})$

En effet, supposons ε irréductible dans $(\alpha^{n-p}, \beta^{n-q})$

$$R(\alpha^{n-p} \, \varepsilon \, \beta^{n-q}) = \alpha' \, \varepsilon' \, \beta' \text{ avec}$$

α' le plus grand facteur gauche de α^{n-p}

et β' le plus grand facteur droit de β^{n-q}

et $\varepsilon' \neq \Lambda$

Supposons par exemple $p \neq 0$ et $q \neq 0$

$$\alpha = a_1 \ldots a_n$$

$$\varepsilon' = a \, \varepsilon''$$

$$\alpha' = \alpha'' \, b \qquad b \neq a^{-1}$$

- Soit $\alpha' = \alpha^{n-p}$ dans ce cas (proposition 2.3.1.7) $\varepsilon' \, \beta' = R(\varepsilon \, \beta)$

  et donc comme $\gamma = \alpha^{-p} \, \varepsilon \, \beta^{-q}$ est irréductible

  $a \neq a_1$ et donc α' est le plus grand facteur gauche de α'' et de $R(\alpha^n \, \gamma \, \beta^n)$

- Soit $|\alpha'| < |\alpha^{n-p}|$ et dans ce cas $\alpha' a$ n'est facteur gauche ni de α^{n-p} ni de α^n.

De même pour β', et donc γ est irréductible dans α^n, β^n.

Donc ϵ se réduit dans le contexte $(\alpha^{n-p}, \beta^{n-p})$ et donc il existe ϵ' et ϵ'' tels que

$\epsilon = \epsilon' \epsilon''$ et $(\epsilon')^{-1}$ est facteur droit de α^{n-p}

et $(\epsilon'')^{-1}$ est facteur gauche de β^{n-p}

comme p et q sont maximum

$$|\epsilon'| < |\alpha|$$
$$|\epsilon''| < |\beta| \quad \text{et donc}$$
$$|\epsilon| < |\alpha| + |\beta|$$

2.3.2 Une propriété des ensembles algébriques infinis sur G.

On sait que pour tout langage à contexte libre infini, il existe des mots α, β, γ, δ, ϵ tels que $\beta\delta \neq \Lambda$ et tels que $\alpha\beta^n\gamma\delta^n\epsilon$ appartiennent au langage pour tout entier n (GINSBURG). Nous allons donner un résultat qui, dans une certaine mesure, généralise ce théorème au cas du groupe libre.

Dans la suite, nous supposerons toujours que nos π-grammaires seront réduites supérieurement et inférieurement.

Remarquons qu'il suffit que de A dérive $\alpha A \beta$ ($\alpha \neq e$ ou $\beta \neq e$) pour conclure que $X \overset{*}{\rightarrow} t\,\alpha^n z\,\beta^n u$, mais on ne sait pas si cette famille est infinie.

Prenons, par exemple, la π-grammaire dont les règles sont :

$$X ::= a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}\,X\,a\,b^{-1}\,a^{-1}\,b$$

$$X ::= b$$

Il est clair que :

$$X \overset{*}{\rightarrowtail} (a\,b\,a^{-1}\,b^{-1})^n\ X\ (a\,b^{-1}\,a^{-1}\,b)^n$$

$$X \overset{*}{\rightarrowtail} (a\,b\,a^{-1}\,b^{-1})^n\ b\ (a\,b^{-1}\,a^{-1}\,b)^n = b$$

Donc l'ensemble engendré par cette grammaire est $\{b\}$. On remarquera que $\alpha = a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}$ et $\beta = a\,b^{-1}\,a^{-1}\,b$ sont tels que $\alpha\,\beta \neq e$.

<u>Théorème 2.3.2.1</u> : Pour tout ensemble algébrique infini L sur le groupe libre G, il existe x, y, z, t, u $\in$ G tels que :

$L \cap \{t\,x^n\,z\,y^n\,u \mid n \geqslant 0\}$ est infini.

<u>Lemme 1</u>: Soit $\mathcal{G} = (N, ::=, X)$ une π-grammaire telle que $L_G(\mathcal{G})$ soit infini. Il existe $\mathcal{G}' = (N', ::=', X)$ équivalente à $\mathcal{G}$ sur G telle que pour tout $A \in N'$, l'ensemble des éléments de G qui dérivent de A est infini.

Soit N' l'ensemble des non terminaux dont dérive une infinité d'éléments de G. N' contient l'axiome X.

Pour tout non terminal $B \notin N'$, il suffit de remplacer chaque règle comportant une occurence de B par l'ensemble des règles où l'on a substitué à B chacun des éléments qui en dérivent.

On remarquera que par cette construction de $\mathcal{G}'$, si de $A \in N'$ dérive un mot α sur $N' \cup V$ pour la grammaire $\mathcal{G}'$, alors α dérive aussi de A pour la grammaire $\mathcal{G}$.

Or comme $L(\mathcal{G}')$ est infini, il existe $A \in N'$, $\alpha, \beta \in G$ tels que

$$A \underset{\mathcal{G}'}{\overset{*}{\rightarrowtail}} \alpha\,A\,\beta, \quad \alpha \neq e \text{ ou } \beta \neq e$$

Ce qui démontre le lemme suivant.

<u>Lemme 2</u> : Soit $\mathcal{G} = (N, ::=, X)$ une π-grammaire telle que $L(\mathcal{G})$ soit infini. Il existe $A \in N$, $\alpha, \beta \in G$ tels que :

- $L(A)$ est infini
- $\alpha \neq e$ ou $\beta \neq e$
- $A \overset{*}{\rightarrowtail} \alpha A \beta$

Il en résulte que $A \overset{*}{\rightarrowtail} \alpha^n A \beta^n$

Démonstration du théorème :

Ramenons nous dans le cas du monoïde libre en faisant correspondre à tout élément x de G la représentation canonique $i(x)$ dans V^* ; f est la projection canonique de V^* dans G.

Posons $a = i(\alpha)$, $b = i(\beta)$

$(\forall y \in i(L(A)))$ $A \overset{*}{\rightarrowtail} f(i(\alpha)^n\ y\ i(\beta)^n)$

Quitte à remplacer $i(L(A))$ par $(\alpha')^{-1}\ i(L(A))\ \beta'$ (cf. remarque après la proposition 2. 3. 1. 9), on peut supposer que a et b sont cycliquement irréductibles.

<u>1er cas</u> : $(\exists\, y \in i(L(A)))\ (\exists\, m \in \mathbb{N})$ (y irréductible dans le contexte (a^m, b^m) et $|a^m| > |y|$ et $|b^m| > |y|$)

dans ce cas, y est irréductible dans le contexte (a^{m+p}, b^{m+p})

et donc $\left\{ f(a^{m+p}\ y\ b^{m+p}) \mid p \in \mathbb{N} \right\}$ forme un sous-ensemble infini de $L(A)$.

Or : $(\exists\, t, u \in G)$ $X \overset{*}{\rightarrowtail} t A u$

donc $X \overset{*}{\rightarrowtail} t\, f(a^{m+p}\ y\ b^{m+p})\, u$

$X \overset{*}{\rightarrowtail} t\, \alpha^{m+p} f(y)\ \beta^{m+p}\ u$ qui sont tous distincts pour des valeurs de p distinctes.

<u>2ème cas</u> : $(\forall\, y \in i(L(A)))\ (\exists\, n \in \mathbb{N})$ (y se réduit dans (a^n, b^n))

donc (proposition 2.3.1.10) $y = a^{-p_y}\, \epsilon_y\, b^{-q_y}$, $|k_y| < |a| + |b|$

Posons $p_y = q_y + k_y$

ϵ_y décrit un ensemble fini quand y décrit $i(L(A))$.

Donc il existe ϵ tel que l'ensemble $L(\epsilon) = \{ y \in i(L(A)) \mid \epsilon_y = \epsilon \}$ soit infini.

Distinguons alors deux sous-cas :

a) $(\exists\, M \in \mathbb{N})\ (\forall\, y \in L(\epsilon))\ (|k_y| < M)$

donc dans ce cas :

$(\exists\, k \in \mathbb{N})\ (\exists\, L' \subset L(\epsilon))$ (L' est infini et $(\forall\, y \in L')\ k_y = k$)

donc pour $y \in L'$ $\quad y = a^{-k}\, a^{-q_y}\, \epsilon\, b^{-q_y}$

Comme L' est infini, q_y parcourt un ensemble infin $I \subset \mathbb{N}$ quand y parcourt L'

d'où : $(\forall\, q \in I)$ $\quad A \overset{*}{\rightarrowtail} f(a^{-k}\, a^{-q}\, \epsilon\, b^{-q})$

$$X \overset{*}{\rightarrowtail} u\, \alpha^{-k}\, \alpha^{-q}\, f(\epsilon)\, \beta^{-q}\, t$$

Ces éléments étant distincts pour deux valeurs de q distinctes.

b) $(\forall\, M \in \mathbb{N})\ (\exists\, y \in L(\epsilon))\ (|k_y| \geqslant M)$

k_y décrit donc un ensemble infini I de $\mathbb{Z}$ quand y décrit $L(\epsilon)$; sans particulariser le problème, on peut supposer que I contient un ensemble infini I^+ d'entiers positifs :

$(\forall\, k \in I^+)\ (\exists\, q \in \mathbb{N})\ (\forall\, n \in \mathbb{N})$ $\quad A \overset{*}{\rightarrowtail} \alpha^n A\, \beta^n \overset{*}{\rightarrowtail} \alpha^n f(a^{-q-k}\, \epsilon\, \beta^{-q})\beta^n$

en prenant $n = q$ $\qquad A \overset{*}{\rightarrowtail} \alpha^{-k} f(\epsilon)$

et donc $\qquad X \overset{*}{\rightarrowtail} u\, \alpha^{-k} f(\epsilon)\, t \quad (k \in I^+)$

et ces éléments sont tous distincts pour des valeurs de k distinctes, d'où le résultat.

<u>Corollaire 2. 3. 2. 2</u> : $\left\{a^n\, b^n\, c^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ n'est pas un ensemble algébrique sur le groupe libre.

<u>Corollaire 2. 3. 2. 3</u> : $\left\{a^n\, b^n\, c\, a^{-n}\, b^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ n'est pas un ensemble algébrique sur le groupe libre.

Démontrons par exemple le premier corollaire.

Supposons $L = \left\{a^n\, b^n\, c^n\right\}$ algébrique. Il existe x, y, z, t, u tels que pour une infinité d'indices p, $p \in I$, les $w_p = t\, x^p\, z\, y^p\, u$ soient tous distincts et appartiennent à L.

Quitte à changer notre choix de t, u, z, on peut supposer x et y cycliquement irréductibles (cf. remarque suivant 2. 3. 1. 9).

Soit $I_x \subset I$ l'ensemble des indices p tel que :
$(\forall\, p \in I_x)\ x^p$ se réduit dans le contexte $(t,\ z\, y^p\, u)$.
On définit de même I_y.

Comme $\left\{w_p \mid p \in I\right\}$ est infini, $I - I_x$ ou $I - I_y$ est infini. Supposons, par exemple, que x^p ne se réduit pas dans le contexte $(t,\ z\, y^p u)$ pour $p \in I'$, I' infini et I' contenu dans I.

Posons $t = t_1 \ldots t_k$

$x = x_1 \ldots x_\ell$

Soit $\alpha = t_{i+1} \ldots t_k$ le plus grand facteur droit de t tel que α^{-1} soit facteur gauche de x^p

$w_p\ E^*\ t_1 \ldots t_i\ \ x_j \ldots x_\ell (x_1 \ldots x_\ell)^{p-p'}\, z\, y^p\, u$

d'autre part, il existe n tel que

$w_p\ E^*\ a^n\, b^n\, c^n$

comme pour $p \in I'$, x^p ne se réduit pas dans le contexte $(t,\ z\ y^p\ u)$

pour n suffisamment grand, on en déduit que

$t_1 \ldots t_i = a^i$

et $R(w_p) = a^i\ \alpha'_p\ \gamma'_p\ \beta'_p\ u'_p$

où α'_p est le plus grand facteur droit de $x_j \ldots x_\ell (x_1 \ldots x_\ell)^{p-p'}$

γ'_p est un facteur de z

β'_p est un facteur de y^p

et u'_p est un facteur droit de u

Distinguons alors deux cas :

1) α'_p n'est pas borné quand p décrit I', dans ce cas $x_1 \ldots x_\ell = a^\ell$

distinguons deux sous-cas :

a) $(\exists\ k \in \mathbb{N})\ (\forall\ p \in I')\ (p \geqslant k \Rightarrow y^p$ se réduit dans le contexte $(t\ x^p\ z,\ u))$

alors $R(t\ x^p\ z\ y^p\ u)$ ne peut contenir qu'un nombre fini d'occurences de b et c et donc $\{R(t\ x^p\ z\ y^p\ u) \mid p \in I'\}$ ne peut être qu'une famille finie, ce qui est contradictoire avec nos hypothèses.

b) y^p ne se réduit pas pour un sous-ensemble infini d'indices $p \in I'$

- soit β'_p est borné et le même raisonnement qu'en a) nous conduit à une famille finie $\{R(t\ x^p\ z\ y^p\ u) \mid p \in I'\}$ ce qui est contradictoire.
- soit β'_p n'est pas borné et le même raisonnement qu'avec α'_p nous conduit à $y = c^m$ et là encore, nous n'aurons qu'un nombre fini d'occurences de b, ce qui est contradictoire avec nos hypothèses.

2) α'_p est borné quand p décrit I', et donc β'_p n'est pas borné d'où on en déduit comme précédemment, que $y = c^m$ et donc que le nombre d'occurences de a et de b dans $R(w_p)$ est fini, ce qui est contradictoire avec nos hypothèses.

Donc $\{a^n b^n c^n\}$ n'est pas algébrique.

Pour l'ensemble $\{a^n b^n c\, a^{-n} b^{-n}\}$ un raisonnement analogue nous conduit à $x = a^{\ell}$ et $y = a^{-m}$ et par conséquent à un nombre fini d'occurences de b et de b^{-1}, ce qui est contradictoire.

2.3.3 Le problème des mots

Problème : Exixte-t-il un algorithme général, qui, étant donnée une π-grammaire $\mathcal{G}$, indique si un élément appartient à l'ensemble algébrique engendré par $\mathcal{G}$?

La réponse est non dans le cas du groupe libre et ce problème est connu des algébristes sous le nom de problème des mots (cf. (MAGNUS-KARRAS-SOLITAR)).

Nous allons en donner ici une démonstration plus "linguistique" (cf. la démonstration de (GROSS-LENTIN) pour l'intersection des langages à contextes libres).

Théorème 2.3.3 : Le problème de la reconnaissance est indécidable sur le groupe libre.

Soient A un alphabet et G le groupe libre engendré par A.

Soient $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_n$ des mots de A^* (qu'on identifie à des éléments de G).

Soit alors la π-grammaire dont les règles sont :

$$X \longrightarrow g_i \, X \, h_i^{-1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$X \longrightarrow g_i \, h_i^{-1} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Pour savoir si l'élément neutre appartient à l'ensemble engendré par la grammaire, il est équivalent de chercher une suite $i_1, \ldots, i_k$ telle que :

$$g_{i_1} \ldots g_{i_k} = (h_{i_k}^{-1} \ldots h_{i_1}^{-1})^{-1}$$

Soit encore : $g_{i_1} \ldots g_{i_k} = h_{i_1} \ldots h_{i_k}$. On reconnaît là le problème de Post pour les couples (g_i, h_i). D'où le théorème.

2.3.4 Emploi d'un marqueur

Si nous voulons démontrer que $\left\{ a^n b^n \alpha_n c^n d^n \mid n \geqslant 0, \alpha_n \in L_n \right\}$ n'est pas un langage à contexte libre, il serait commode de remplacer α_n par un marqueur ou d'introduire un marqueur avant α_n ; ce marqueur, lorsqu'on passe en groupe, peut être choisi tel qu'il ne puisse y avoir de simplification entre $a^n b^n$ et $c^n d^n$ (c'est le cas de c dans le corollaire 2.3.2.3).

Avant de démontrer un résultat sur les groupes, nous allons démontrer un tel résultat sur le monoïde.

Définitions :

Soit V et V' deux vocabulaires, un homomorphisme h de V^* dans V'^* est dit alphabétique si :

$$(\forall a \in V) \; h(a) \in V' \text{ ou } h(a) = \Lambda$$

Soit V et V' deux vocabulaires disjoints et φ une bijection de V sur V', on appelle langage de Dyck d'alphabet V, V', le langage engendré par la C-grammaire suivante :

$a \in V \qquad D ::= a\ D\ \varphi(a)\ D$

$a \in V' \qquad D ::= a\ D\ \varphi^{-1}_{(a)}\ D$

$\qquad\qquad D ::= \Lambda$

<u>Notations</u> : Soit V un alphabet, $V_1 \subset V$. Posons $V_2 = V - V_1$.
Tout mot α de V s'écrit de manière unique

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \beta\ a\ \beta' \\ \text{ou} \quad \alpha = \beta \end{array}\right\} \quad \beta \in V_2^*,\ a \in V_1$$

Nous allons insérer un marqueur γ avant la première occurence d'un élément de V_1 :

Soit γ un mot sur un alphabet W. Notons alors

$s_\gamma^{V_1}(\alpha)$ = <u>si</u> α s'écrit $\beta\ a\ \beta'$ <u>alors</u> $\beta\ \gamma\ a\ \beta'$

<u>sinon</u> si $\alpha \in V_2^*$ <u>alors</u> α.

Si aucune confusion n'est possible, nous noterons s_γ pour $s_\gamma^{V_1}$.

<u>Théorème 2.3.4.1</u> (1) : Soit L un langage à contexte libre sur V, alors $s_\gamma(L)$ est un langage à contexte libre.

<u>Lemme 1</u> : Si $V \cap W = \emptyset$ et si L est un langage régulier, alors $s_\gamma(L)$ est régulier.

En effet $s_\gamma(L) = h^{-1}(L) \cap (V_{1\gamma}\ a\ V^* \cup V_1^*)$ en prenant pour h l'homomorphisme alphabétique défini par :

$\forall a \in V \qquad h(a) = a$

$\forall a \in W \qquad h(a) = \Lambda$

(1) La démonstration de ce résultat est due à Monsieur PAIR.

<u>Lemme</u> 2 : Si L est régulier, $s_\gamma(L)$ est régulier.

Soit, en effet, $\gamma' \in W'^*$ tel que $W' \cap V = \emptyset$.

Soit h' l'homomorphisme de monoïde tel que :

$$h'(\gamma') = \gamma$$

$$(\forall a \in V) \qquad h(a) = a$$

$s_\gamma(L) = h' \circ s_{\gamma'}(L)$ donc d'après le lemme 1, $s_\gamma(L)$ est régulier.

<u>Lemme 3</u> : Soit V' un alphabet et soit h un homomorphisme alphabétique de V'^* dans V^*. Soit $V'_1 = \{a \in V' \mid h(a) \in V_1\}$

$$h \circ s_\gamma^{V'_1}(\alpha) = s_{h(\gamma)}^{V_1} \circ h(\alpha)$$

Si $\alpha \in (V' - V'_1)^*$, le résultat est immédiat.

Si α se décompose en $\beta\ a\ \beta'$, $\beta \in (V' - V'_1)^*$, $a \in V'_1$

alors $\qquad s_\gamma^{V'_1}(\alpha) = \beta\ \gamma\ a\ \beta'$ et

donc $\qquad h \circ s_\gamma^{V'_1}(\alpha) = h(\beta)\ h(\gamma)\ h(a)\ h(\beta')$

or $\quad h(\beta) \in V_2^*$

$\quad h(a) \in V_1$

donc $s_\gamma^{V_1}(h(\beta)\ h(a)\ h(\beta')) = h(\beta)\ h(\gamma)\ h(a)\ h(\beta')$

<u>Lemme 4</u> : Soit D un langage de Dyck d'aphabet V. Soit K un langage régulier sur V et γ un mot de D ;

$$s_\gamma(K \cap D) = s_\gamma(K) \cap D$$

$$s_\gamma(K \cap D) \subset s_\gamma(K) \cap s_\gamma(D)$$

or comme $\gamma \in D$ $\quad s_\gamma(D) \subset D$

donc $\quad s_\gamma(K \cap D) \subset s_\gamma(K) \cap D$

Réciproquement, soit $\alpha \in s_\gamma(K) \cap D$; distinguons deux cas :

- soit $\alpha = \beta\,\gamma\,a\,\beta'$: $\alpha = s_\gamma(\beta\,a\,\beta')$ avec

  $\beta\,a\,\beta' \in K$, $\beta \in V_2^*$, $a \in V_1$;

  comme $\gamma \in D$ $\quad \beta\,a\,\beta' \in D$

  donc $\quad \beta\,a\,\beta' \in K \cap D$.

- soit $\alpha = \beta$ $\quad \beta \in V_2^*$ et donc

  $\alpha \in K \cap D$ et donc $\alpha = s_\gamma(\alpha) \in s_\gamma(K \cap D)$

  ce qui achève la démonstration du lemme.

Démontrons alors le théorème.

On sait qu'il existe un homomorphisme h, un langage de Dyck D sur un alphabet V' et un langage régulier K sur V' tels que $L = h(K \cap D)$ (théorème de Chomsky-Schutzenberger).

Soit $V'' \cup \overline{V}''$ un alphabet disjoint de V et V' tel qu'il existe une bijection $x \longrightarrow \overline{x}$ de V'' sur $\overline{V}''$ et une bijection φ de V sur V''.

Prolongeons l'homomorphisme h à $(V'' \cup \overline{V}'')^*$ par :

$\forall \overline{x} \in \overline{V}''$ $\quad h(\overline{x}) = \Lambda$

$\forall x \in V''$ $\quad h(x) = \varphi^{-1}(x)$

Soit $\delta = \varphi(x)$ alors $\gamma = h(\delta\,\tilde{\overline{\delta}})$ (1) et posons $\gamma' = \delta\,\tilde{\overline{\delta}}$.

Notons D' le langage de Dyck sur $V' \cup (V'' \cup \overline{V}'')$; $D \subset D'$.

---

(1) $\tilde{\alpha}$ est l'image miroir de α ; si $\alpha = a\,b\,c$, $\tilde{\alpha} = c\,b\,a$

Comme $K \subset V'^*$

$K \cap D' = K \cap D$

donc $L = h(K \cap D')$

en posant $V'_1 = h^{-1}(V_1)$ d'après les lemmes 3 et 4

$$s_\gamma^{V_1}(L) = h\left[s_{\gamma'}^{V'_1}(K \cap D')\right] = h\left[s_{\gamma'}^{V'_1}(K) \cap D'\right]$$

or $s_{\gamma'}^{V'_1}(K)$ est régulier (lemme 2)

donc $s_\gamma^{V_1}(L)$ est un langage à contexte libre (théorème de Chomsky-Schützenberger, réciproque) ce qui achève la démonstration du théorème.

Nous allons maintenant énoncer un résultat pour les ensembles algébriques sur les groupes.

Dans la suite, π' désigne la théorie (F'_n) avec

$F'_0 = V \cup \{c\}$ $\quad (c \notin V)$ $\quad V = A \cup A'$ (cf. 2.3.1)

$F'_2 = \{\cdot\}$

$F'_i = \emptyset \quad i \neq 0,\ i \neq 2$

G est le groupe libre engendré par $A \cup \{c\}$. G est muni de façon évidente d'une structure de π'-algèbre.

<u>Théorème 2.3.4.2</u> : Soit G' le sous-groupe de G engendré par A, soit L un ensemble algébrique contenu dans $\{G' c^n G' \mid n \geqslant 1\}$ alors $L' = \{\alpha c \beta \mid (\exists q \in \mathbb{N})(\alpha c^q \beta \in L)\}$ est algébrique.

En appliquant ce théorème puis le corollaire 2.3.2.3, on obtient immédiatement :

<u>Corollaire 2.3.4.3</u> : Soit (M_n) une suite de parties non vides de $\mathbb{N}^+$. Dans la π'-algèbre G, $\{a^n b^n c^k a^{-n} b^{-n} \mid n \in \mathbb{N},\ k \in M_n\}$ n'est pas algébrique.

Démontrons le théorème.

Faisons le lien entre le monoïde et le groupe : F'^*_0 est muni canoniquement d'une structure de π'-algèbre et il existe un π'-homomorphisme f unique de F'_0 dans G qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \overline{\pi'} \arrow[rr, "\varphi_G"] \arrow[dr, "\varphi_{F'^*_0}"'] & & G \\ & F'_0 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

donc tout ensemble algébrique sur G est l'image par f d'un ensemble algébrique sur F'_0.

Soit L un ensemble algébrique contenu dans $\{G' c^n G' \mid n \geqslant 1\}$ et soit L_0 un langage à contexte libre sur F'_0 tel que $f(L_0) = L$.

Notons D le langage de Dyck sur $A \cup A'$

Soit x sur F'_0 tel que $f(x) = a_1 \ldots a_p c^n b_1 \ldots b_q$ avec $a_1 \ldots a_p \in G'$, $b_1 \ldots b_q \in G'$. D'après la proposition 2.3.1.6, il existe

$d_0, \ldots, d_{p+q+n} \in D$ tels que

$$x = d_0\, a_1\, d_1 \ldots d_{p-1}\, a_p\, d_p\, c\, d_{p+1} \ldots b_q\, d_{p+q+n}$$

Soit h l'homomorphisme alphabétique de $(F'_0 \cup \{d\})^*$ dans $(F'_0 \cup \{d\})^*$ défini par :

$h(c) = \Lambda$

$(\forall a,\ a \neq c)$ $\quad h(a) = a$

Soit enfin h' l'homomorphisme alphabétique de $(F'_0 \cup \{d\})^*$ dans F'^*_0 défini par :

$$h(d) = c$$

$$\forall a \in F'_0 \qquad h(a) = a$$

alors $s_d^{\{c\}}(x) = d_0\, a_1 \ldots a_p\, d_p\, d\, c\, d_{p+1} \ldots b_q\, d_{p+q+n}$

et $h \circ s_d^{\{c\}}(x) = d_0\, a_1 \ldots a_p\, d_p\, d_{p+1} \ldots d_{p+n}\, b_1 \ldots b_q\, d_{p+q+n}$

soit en posant $z = d_{p+1} \ldots d_{p+n}$

$h \circ s_d^{\{c\}}(x) \qquad = d_0\, a_1 \ldots a_p\, d_p\, d\, z\, b_1 \ldots b_q\, d_{p+q+n}$

$h' \circ h \circ s_d^{\{c\}}(x) \quad = d_0\, a_1 \ldots a_p\, d_p\, c\, z\, b_1 \ldots b_q\, d_{p+q+n}$

et $f \circ h' \circ h \circ s_d^{\{c\}}(x) = a_1 \ldots a_p\, c\, b_1 \ldots b_q$

il est clair alors que

$$f \circ h' \circ h \circ s_d^{\{c\}}(L_0) = L'$$

or (théorème 2.3.4.1) $f \circ h' \circ h \circ s_d^{\{c\}}(L_0)$ est un langage à contexte libre et donc

L' est un ensemble algébrique.

<u>Remarque 1</u> : Nous avons ici donné un énoncé assez simple pour le théorème 2.3.4.2, ceci parce que cet énoncé suffisait pour l'utilisation que nous voulons en faire au chapitre 3. Il est clair que le théorème 2.3.4.1 peut conduire à des versions plus sophistiquées du théorème 2.3.4.2.

<u>Remarque 2</u> : A tout élément x d'un groupe libre G, on peut faire correspondre i(x), la représentation canonique de x dans le monoïde sous-

jacent V^*. Soit $\mathcal{A}$ la classe des ensembles algébriques sur les groupes libres et $\mathcal{C}$ celle des ensembles algébriques sur le monoïde libre. A un élément $L \subset V^*$ de $\mathcal{C}$ on peut lui faire correspondre $f(L)$ contenu dans le groupe libre engendré par V et $i \circ f(L) = L$ donc $\mathcal{C} \subset i(\mathcal{A})$.

On peut se demander si cette inclusion est stricte. Un résultat qui milite en faveur d'une réponse positive est le théorème 2.3.3. Mais la plupart des classes qui généralisent les C-langages contiennent $a^n b^n c^n$, or justement $i(\mathcal{A})$ ne contient pas cet ensemble. Quelle est la réponse ?

3

ensembles algébriques de figures

3 ENSEMBLES ALGEBRIQUES DE FIGURES

Soit $\mathcal{F}$ un espace de figures. Pour une théorie π donnée, $\mathcal{F}$ est muni d'une structure de π-algèbre et nous allons comparer suivant le choix de π, les ensembles algébriques que nous obtenons.

Dans ce qui suit, les morphismes O-aires ω de π et les éléments $\varphi_{\mathcal{F}}(\omega)$ de $\mathcal{F}$ seront identifiés si aucune confusion n'est possible. T, en particulier, désignera l'alphabet des figures de base et l'ensemble F_0 de π. T' désignera $\{-a \,/\, a \in T\}$. λ désigne toujours l'élément neutre pour l'addition +.

Considérons alors les théories libres engendrées par les ensembles suivants (dans tous les cas, $F_i = \emptyset$ pour $i > 2$) :

Théorie π_1

$$F_2 = \{+, o, \times\}$$
$$F_1 = \{-\}$$
$$F_0 = T$$

Théorie π_2

$$F_2 = \{+, o\}$$
$$F_1 = \{-\}$$
$$F_0 = T$$

Théorie π_3 $\quad F_2 = \{+, o\}$

$F_1 = \emptyset$

$F_0 = T \cup T' \cup \{\lambda\}$

Théorie π_4 $\quad F_2 = \{+, o, \times\}$

$F_1 = \emptyset$

$F_0 = T$

Théorie π_5 $\quad F_2 = \{+\}$

$F_1 = \{-\}$

$F_0 = T$

Théorie π_6 $\quad F_2 = \{+\}$

$F_1 = \emptyset$

$F_0 = T \cup T'$

Nous noterons $\mathcal{A}_i$ la classe des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont algébriques pour la théorie π_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Nous avons vu (1.2) que pour toute T-représentation R, il existe une représentation r de même support que R telle que $\{\bar{r}\} \in \mathcal{A}_i$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6). C'est ce qui justifie le choix de ces six structures algébriques.

Nous allons montrer que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_5 = \mathcal{A}_6$, mais qu'en général $\mathcal{A}_4 \neq \mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_5 \neq \mathcal{A}_1$. De plus, le support étant la "partie con-

crète" de la figure, nous nous intéresserons aussi à la classe des supports des ensembles algébriques.

Si A est un ensemble de figures, on définit $\mathrm{supp}(A) = \bigcup_{f \in A} \mathrm{supp}(f)$.

Nous appellerons S_i la classe des ensembles $\mathrm{supp}(A)$ pour $A \in \mathcal{A}_i$. Bien sûr, si $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j$, $S_i = S_j$, mais la réciproque n'est pas nécessairement exacte.

Nous verrons aussi les limites des ensembles algébriques : en particulier, un ensemble de figures fermées ne forme pas, en général, un ensemble algébrique.

3.1 $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$

Il est clair que $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$. La réciproque est fondée sur le résultat suivant (1.1.2) :

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F} \qquad f_1 \times f_2 = -((-f_2) \circ (-f_1))$$

Donc, d'après le théorème 2.1.2.3, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$.

3.2 $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_5 = \mathcal{A}_6$

Il est clair que : $\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_2$

$\mathcal{A}_6 \subset \mathcal{A}_5$

La réciproque s'appuie sur le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soit $N = \{A_1, \ldots, A_n\}$ et $N' = \{A'_1, \ldots, A'_n\}$. Pour tout morphisme $\omega \in \overline{\pi}_2(N)$ (respec. $\overline{\pi}_5(N)$), il existe deux morphismes ω' et $\omega'' \in \overline{\pi}_3(N \cup N')$ (resp. $\overline{\pi}_6(N \cup N')$) tels que :

$$\forall (f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{F}^n \quad \hat{\omega}(f_1, \ldots, f_n) = \hat{\omega}'(f_1, \ldots, f_n, -f_1, \ldots, -f_n)$$
$$= -\hat{\omega}''(f_1, \ldots, f_n, -f_1, \ldots, -f_n)$$

Démontrons ce résultat par récurrence sur le degré de ω.

Si le degré de ω est nul, ω est une projection :

$\omega = A_i$ et il suffit de prendre $\omega' = A_i$

$\omega'' = A'_i$

Supposons le résultat établi jusqu'au rang n.

Soit ω tel que $d(\omega) = n + 1$

$$\omega = a(\psi_1, \ldots, \psi_k) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{k} d(\psi_i) = n, \quad a \in F$$

Soit ψ'_i et ψ''_i les morphismes associés de $\overline{\pi}_3(N \cup N')$ vérifiant le lemme.

Distinguons, suivant les cas :

1) $a \in T$, donc $k = 0$, dans ce cas, on prend $\omega' = a$

et $\omega'' = -a \in T'$

2) $a = - \in F_1$, donc $k = 1$, il suffit de prendre $\omega' = \psi''_1$

$\omega'' = \psi'_1$

3) $a = +$, $a \in F_2$, donc $k = 2$

Comme $A + B = -\left[-B + (-A)\right]$

prenons $\omega' = +(\psi'_1, \psi'_2)$

$\omega'' = +(\psi''_2, \psi''_1)$

$a = o, \ a \in F_2$

Comme $A \circ B = -(-B + (A \circ \lambda))$

prenons $\omega' = o(\psi'_1, \psi'_2)$

$\omega'' = +(\psi''_2, o(\psi'_1, \lambda))$

Nous avons envisagé tous les cas possibles, ce qui établit le lemme.

Soit L un élément de $\mathcal{A}_2$ et $\left\{A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \alpha_{ij}, \ i = 1, \ldots, n\right\}$ un système dont la première composante de la solution minimale est L.

Considérons le système : $A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \alpha_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n$

$$A'_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} -\alpha_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n$$

il est clair que ce système est équivalent au système

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \alpha'_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$A'_i = \bigcup_{j=1}^{p_i} \alpha''_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n$$

où $\alpha' ij$ et $\alpha'' ij$ sont les morphismes associés à αij tels que

$$\widehat{\alpha_{ij}} = \widehat{\alpha_{ij}}' = -\widehat{\alpha_{ij}}''$$

et par conséquent, L est aussi un élément de $\mathcal{A}_3$.

De même pour $\mathcal{A}_5$ et $\mathcal{A}_6$.

<u>Remarque</u> : Un groupe G est muni canoniquement d'une structure de π_5-algèbre et d'une structure de π_6-algèbre. Le même lemme peut être établi sur G et on démontre de la même manière que la classe des ensembles algébriques sur la π_5-algèbre G est égale à celle des ensembles algébriques sur la π_6-algèbre G.

3.3 $\mathcal{A}_4 \subset \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_4 \neq \mathcal{A}_1$

Il est clair que $\mathcal{A}_4 \subset \mathcal{A}_1$.

Nous allons montrer, sur un exemple que cette inclusion est, en général, stricte.

Prenons pour $\mathcal{F}$ l'espace des figures $\mathbb{R}^2$ muni du groupe des translations et soit $T = \{a, b\}$ l'ensemble des figures définies par :

a est la classe de $([(0,0), (1,0)], (0,0), (1,0))$

b est la classe de $([(0,0), (0,1)], (0,0), (0,1))$ (cf. figure 3.1)

Soit $\mathcal{G}_1$ une grammaire algébrique sur π_1 définie par :

X::= b + X + (-a)

X::= b + (-a)

Il est clair que $L(\mathcal{G}_1) = \{ nb + n(-a) \ / \ n \geqslant 1 \}$

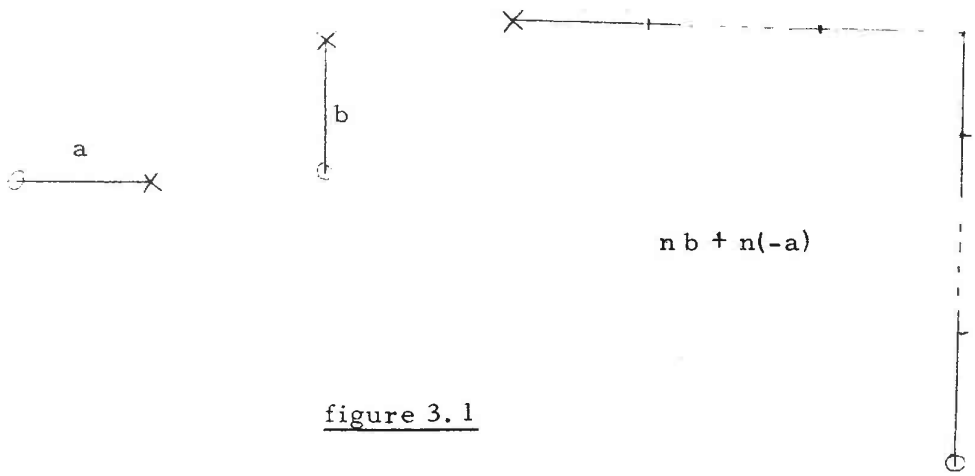


figure 3.1

Compte tenu de la proposition 1.2.1.2, $L(\mathcal{G}_1) \notin \mathcal{A}_4$.
Cependant, cette démonstration n'est fondée que sur des considérations portant sur les origines et les extrémités.

Nous allons montrer que $\mathrm{supp}(L(\mathcal{G}_1)) \notin S_4$, ce qui nous donnera le résultat plus puissant :

Théorème 3.3 : $S_4 \subset S_1$, $S_4 \neq S_1$.

Dans cette démonstration, nous allons procéder par l'absurde : nous supposons l'existence d'une π_4-grammaire $\mathcal{G}_4$ telle que
$\mathrm{supp}(L(\mathcal{G}_4)) = \mathrm{supp}(L(\mathcal{G}_1))$
et nous arriverons à une contradiction.

Notations : Nous reprenons les notations de 1.2.1 :

pour toute représentation r $\mathrm{supp}(r)$ désigne son support

$o(r)$ et $e(r)$ son origine et son extrémité.

Posons $x_M(r) = \sup\limits_{(x,y) \in \mathrm{supp}(r)} (x)$ $\qquad$ $x_m(r) = \inf\limits_{(x,y) \in \mathrm{supp}(r)} (x)$

$$y_M(r) = \sup_{(x,y) \in \mathrm{supp}(r)} (y) \qquad y_m(r) = \inf_{(x,y) \in \mathrm{supp}(r)} (y)$$

On définit alors : $1(r) = (x_m(r),\ y_M(r))$

$2(r) = (x_M(r),\ y_M(r))$

$3(r) = (x_M(r),\ y_m(r))$ (voir figure 3.2)

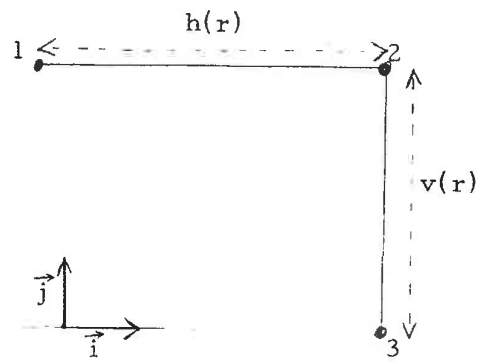


figure 3.2

Comme nous sommes dans $\mathbb{R}^2$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ désigneront les vecteurs de la base canonique.

Posons $h(r) = x_M(r) - x_m(r)$, $v(r) = y_M(r) - y_m(r)$

$d(r) = h(r) - v(r)$

Pour toute translation t, $h(t(r)) = h(r)$, $v(t(r)) = v(r)$ et donc, nous pouvons passer au quotient : h, v et d sont aussi définis pour les figures.

Si, par exemple, $f = na \times pb$ $h(f) = n$, $v(f) = p$, $d(f) = n-p$

Soit $R = \mathcal{R}(\{+, o, \times\}, \{a, b\})$ l'ensemble des représentations construites à l'aide des représentations de a et b des opérations $+, o, \times$.

Nous ne considérons que les figures dont le support est contenu dans celui

d'une figure na $\times$ nb et dont, par conséquent (proposition 1.2.1.2), pour une représentation r, les deux pôles o(r) et e(r) appartiennent au même "côté", c'est-à-dire, à l'un des segments $[1(r), 2(r)]$ ou $[2(r), 3(r)]$. Pour deux figures f' et f'', nous dirons que le support de f' est contenu dans celui de f'' s'il existe des représentations r' et r'' de f' et f'', telles que $\mathrm{supp}(r') \subset \mathrm{supp}(r'')$ et nous noterons $\mathrm{supp}(f') \subset \mathrm{supp}(f'')$.

Posons
$$R_v = \{ r \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})\, (\mathrm{supp}(\overline{r}) \subset \mathrm{supp}(na \times nb) \wedge o(r) \in [2(r), 3(r)] \wedge e(r) \in [2(r), 3(r)]\ )\}$$

$$R_h = \{ r \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})\, (\mathrm{supp}(\overline{r}) \subset \mathrm{supp}(na \times nb) \wedge o(r) \in [1(r), 2(r)] \wedge e(r) \in [1(r), 2(r)]\ )$$

Compte tenu de la proposition 1.2.1.2, $R_v \cap R_h = \emptyset$.

Notons F_v et F_h les ensembles de figures dont les représentations appartiennent respectivement à R_v et R_h.

Définissons sur R_v les fonctions suivantes (qui, par passage au quotient, sont définies sur les figures) :

$$O(r) = h(r) - |2(r), o(r)|$$

$$E(r) = h(r) - |2(r), e(r)| \qquad \text{(voir figure 3.3)}$$

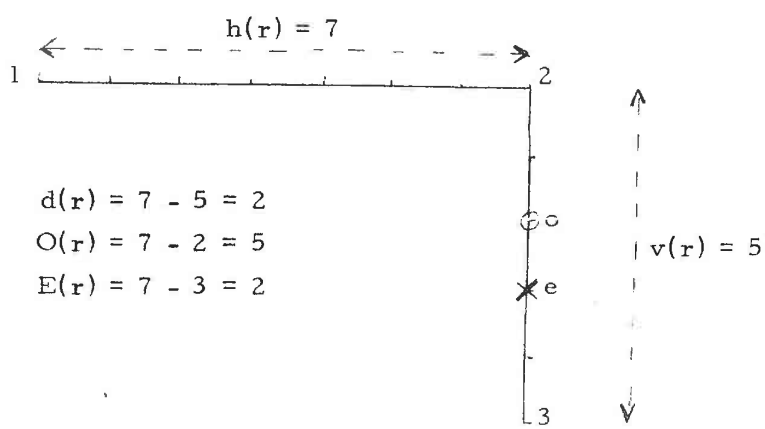


figure 3.3

De même, on définit sur R_h :

$$O(r) = v(r) - |2(r),\ o(r)|$$

$$E(r) = v(r) - |2(r),\ e(r)|$$

<u>Lemme</u> 1 : Soit $f \in F_v$ (respec. $f \in F_h$) alors

$$\begin{cases} h(f) \geqslant O(f) \geqslant d(f) \\ h(f) \geqslant E(f) \geqslant d(f) \end{cases} \qquad \left(\text{respec.} \begin{cases} v(f) & O(f) & -d(f) \\ v(f) & E(f) & -d(f) \end{cases}\right)$$

D'autre part, la donnée de $O(f)$, $E(f)$, $h(f)$ et $d(f)$ caractérise f.

Les inégalités résultent immédiatement des définitions des fonctions O, E, h, v et d. L'appartenance à F_v et la donnée de $h(f)$ et $d(f)$ caractérise le support de f et les données supplémentaires de $O(f)$ et $E(f)$ fixent les pôles.

<u>Conséquence</u> : L'ensemble des figures $f \in F_v \cup F_h$ telles que $h(f)$ et $v(f)$ soient majorés par un entier donné, est fini.

<u>Lemme</u> 2 : Soient f, f_1, f_2 trois figures de $F_v \cup F_h$ et un opérateur $\perp \in \{+, o, \times\}$ tels que $f = f_1 \perp f_2$.

Soient r, r_1, r_2 des représentations de f, f_1 et f_2 tels que $o(r_1) = o(r)$ et $e(r_2) = e(r)$.

Si aucun des supports de f_1 et f_2 n'est contenu dans l'autre, alors

$$1(r) = 1(r_1) \Rightarrow (3(r) = 3(r_2) \wedge 3(r) \notin \mathrm{supp}(r_1) \wedge 1(r) \notin \mathrm{supp}(r_2))$$

$\mathrm{supp}(r)$, $\mathrm{supp}(r_1)$, $\mathrm{supp}(r_2)$ sont connexes et $\mathrm{supp}(r_1) \cup \mathrm{supp}(r_2) = \mathrm{supp}(r)$

Supposons $1(r) = 1(r_1)$ et $3(r) = 3(r_1)$; comme $\mathrm{supp}(r)$ est connexe, $\mathrm{supp}(r) = \mathrm{supp}(r_1)$ et dans ce cas, donc $\mathrm{supp}(r_2) \subset \mathrm{supp}(r_1)$.

Donc, si $1(r) = 1(r_1)$, $3(r) \notin \mathrm{supp}(r_1)$ et donc $3(r) = 3(r_2)$. Alors si $1(r)$ appartenait à $\mathrm{supp}(r_2)$, on aurait $\mathrm{supp}(r_2) = \mathrm{supp}(r)$ et $\mathrm{supp}(r_1) \subset \mathrm{supp}(r)$.

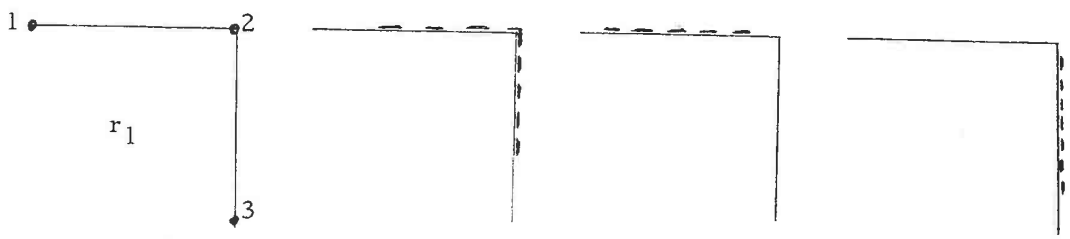
<u>Lemme</u> 3 : Soit f, f_1, f_2 des figures de $F_v \cup F_h$ et un opérateur $\perp \in \{+, o, \times\}$ tels que $f = f_1 \perp f_2$. Notons r, r_1, r_2 des représentations de f, f_1, f_2 telles que $o(r) = o(r_1)$ et $e(r) = e(r_2)$.

Supposons qu'il existe $q > 0$ et $k > 0$ tels que $\mathrm{supp}(f_1) = \mathrm{supp}(ka \times qb)$ alors :

soit $2(r) = 2(r_1) = 2(r_2)$

soit $\mathrm{supp}(r_2) \subset [2(r), 3(r)]$

soit $\mathrm{supp}(r_2) \subset [1(r), 2(r)]$



les trois cas possibles pour r_2

<u>figure 3.4</u>

Remarquons que $y_M(r) = \sup(y_M(r_1), y_M(r_2))$;

de même $x_M(r) = \sup(x_M(r_1), x_M(r_2))$

par suite, $2(r) = 2(r_1)$. Supposons $2(r_2) \neq 2(r_1)$ et distinguons deux cas :

a) $2(r_2) \in [2(r), 3(r)]$

or $2(r_2) = (x_M(r_2), y_M(r_2))$ donc $y_M(r_2) < y_M(r)$

Soit $(x, y) \in \mathrm{supp}(r'')$: $y \leqslant y_M(r)$

Comme $(x, y) \in \mathrm{supp}(r) = [1(r), 2(r)] \cup [2(r), 3(r)]$

Nécessairement $(x, y) \in [2(r), 3(r)]$

Donc $\mathrm{supp}(r_2) \subset [2(r), 3(r)]$

b) $2(r_2) \in [1(r), 2(r)]$. La démonstration est analogue au cas précédent et nous mène à :

$$\mathrm{supp}(r_2) \in [1(r), 2(r)] .$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.

Dans ce qui suit, $\mathcal{G}_4 = (N, ::=, X)$ désigne une π_4-grammaire C-réduite sur l'alphabet $T = \{a, b\}$ et, on suppose que $\mathrm{supp}(L(\mathcal{G}_4)) = \mathrm{supp}(L(\mathcal{G}_1))$. Pour tout schéma fonctionnel α de $\overline{\pi}_4(N)$, $L(\alpha)$ désigne l'ensemble des figures qui dérivent de α dans $\mathcal{G}_4$; en particulier $L(X) = L(\mathcal{G}_4)$.

Définissons alors, pour les symboles non terminaux, les trois propriétés suivantes :

<u>Propriété P_1</u> : Soit $A \in N$; on dit que A vérifie P_1 si et seulement si :

- $L(A)$ est infini
- il existe un sous-ensemble fini F_A de $L(A)$ tel que :

$$(\exists \ell > 0)(\exists P \in \{O, E\})(\forall f \in L(A) - F_A)((d(f) > 0 \wedge f \in F_v \wedge P(f) = \ell) \vee (d(f) = 0 \wedge P(f) > \ell))$$

(O et E désignent les fonctions définies plus haut)

<u>Propriété P_2</u> : Soit $A \in N$; on dit que A vérifie P_2 si et seulement si :

- L(A) est infini
- il existe un sous-ensemble fini F_A de L(A) tel que :

$$(\exists \ell > 0)(\exists P \in \{O, E\})(\forall f \in L(A) - F_A)((d(f) < 0 \wedge f \in F_h \wedge P(f) = \ell) \vee (d(f) = 0 \wedge P(f) > \ell))$$

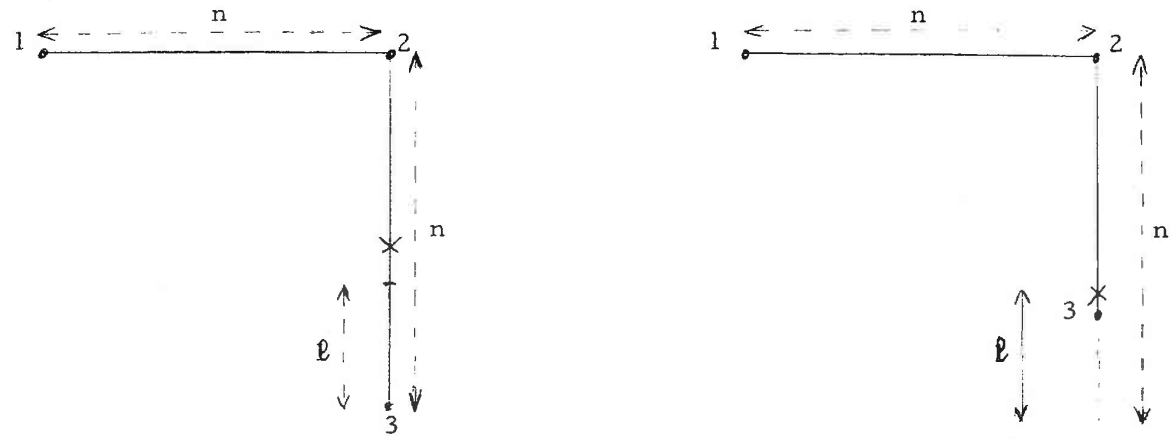
<u>Propriété P_3</u> : Soit $A \in N$; on dit que A vérifie P_3 si et seulement si :

- L(A) est infini
- il existe un sous-ensemble fini F_A de L(A) tel que :

$$(\forall f \in L(A) - F_A)(d(f) = 0).$$

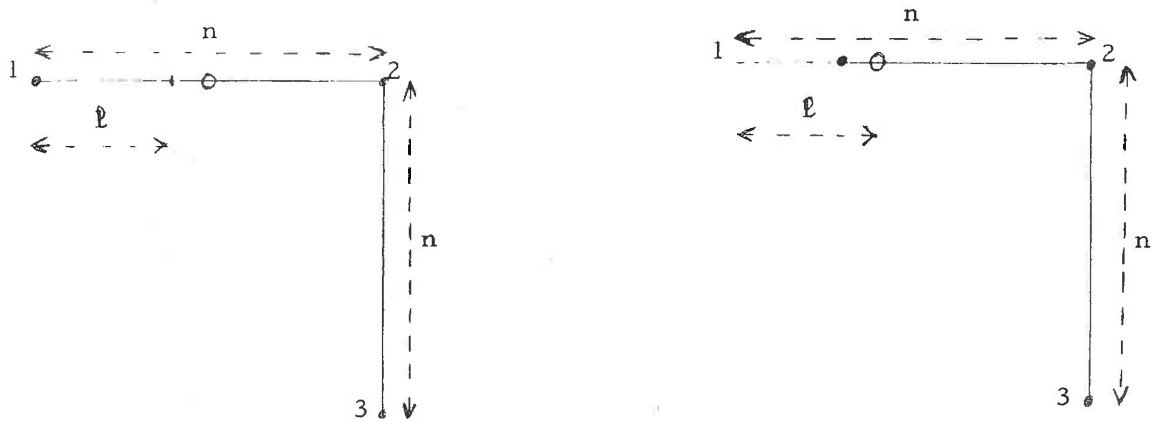
Les lemmes 4, 4 bis et 5 étudient respectivement les éléments de N vérifiant les propriétés P_1, P_2 et P_3.

La figure 3.5 montre la forme des figures dérivant de A lorsque A vérifie P_1, P_2.



$E(f) \geqslant \ell$ et $d(f) = 0$ ou $E(f) = \ell$ et $d(f) > 0$

$A \rightarrowtail^{*} f$ A vérifiant P_1 (avec $P = E$)



$O(f) \geqslant \ell$ et $d(f) = 0$ ou $O(f) = \ell$ et $d(f) < 0$

$A \rightarrowtail^{*} f$ A vérifiant P_2 (avec $P = O$)

figure 3.5

<u>Lemme 4</u> : Si A vérifie P_1, pour toute règle $A ::= C \perp D$ telle que $L(C \perp D)$ soit infini, l'une des quatre propriétés suivantes est vérifiée :

a) C vérifie P_1 et pour tout $f' \in L(C)$, pour tout $f'' \in L(D)$, $h(f' \perp f'') = h(f')$

b) D vérifie P_1 et pour tout $f'' \in L(D)$, pour tout $f' \in L(C)$, $h(f' \perp f'') = h(f'')$

c) C (ou resp. D) vérifie P_3 et pour tout $f' \in L(C) - F_C$ et pour tout $f'' \in L(D)$, $h(f' \perp f'') = h(f') = v(f') = v(f' \perp f'')$ (respec. $h(f' \perp f'') = h(f'') = v(f'') = v(f' \perp f'')$)

d) C et D vérifient P_3 et pour tout $f' \in L(C) - F_C$ et pour tout $f'' \in L(D) - F_D$, $h(f' \perp f'') = h(f') = v(f') = v(f' \perp f'')$ ou $h(f' \perp f'') = h(f'') = v(f'') = v(f' \perp f'')$

<u>Lemme 4 bis</u> : Même énoncé que le lemme 4 en remplaçant P_2 par P_1, v par h et h par v.

Nous ne démontrerons que le lemme 4 ; la démonstration du lemme 4 bis est semblable.

Distinguons deux cas :

<u>premier cas</u> : pour une infinité d'éléments f de $L(C \perp D)$, $d(f) > 0$.
Sans particulariser le problème, nous pouvons, par exemple, supposer que $P = E$ et $\perp = +$

Notons $F_n = \{ f \in L(C \perp D) \,/\, h(f) = n \wedge d(f) > 0 \}$ et $F = \bigcup_n F_n$

Notons $F' = \{ f' \in L(C) \,/\, (\exists f'' \in L(D))\ (f' + f'' \in F) \}$

et de même $F'' = \{ f'' \in L(D) \,/\, (\exists f' \in L(C))\ (f' + f'' \in F) \}$

$C + D \succ\!\!\overset{*}{\longrightarrow} f' + f'' = f$. Nous noterons r', r'' et r des représentations de f', f'' et f telles que $o(r') = o(r)$, $e(r'') = e(r)$ (et par conséquent, comme $\perp = +$, $e(r') = o(r'')$).

Soit M l'ensemble des entiers n tels que $F_n \neq \emptyset$; comme F est infini, M est infini (conséquence du lemme 1).

On peut supposer (cf. lemme 2) que pour une infinité d'entiers $n \in M_1 \subset M$, il existe $f \in F_n$, $f' \in F'$, $f'' \in F''$ tels que $f = f' + f''$, et $l(r) = l(r')$, donc comme $f \in F_v$, $h(f) = h(f')$.

On notera F'_1 le sous-ensemble de F' dont les éléments vérifient cette relation.

(Dans l'autre cas : $h(f'') = h(f_n)$, la démonstration est semblable).

Dans la suite, pour ne pas être gêné par les figures de F_A, nous nous placerons toujours dans le cas où les figures $f \in L(A)$ sont telles que

$$h(f) > \sup_{f' \in F_A} (h(f')) = m$$

De ce fait, nous n'éliminons qu'un nombre fini de figures (cf. lemme 1).

<u>Lemme 4.1</u> : $(\forall\, f'' \in L(D))\ (\exists\ p \in \mathbb{N})\ (\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(pb))$

En effet :

$C + D \succ\!\!\overset{*}{\longrightarrow} f' + f'' = f$.

Si le support de f'' n'appartient pas à $\{\mathrm{supp}(kb) \;/\; k \geqslant 1\}$ alors (lemme 2)

$$2(r') = 2(r'') = 2(r).$$

f'' étant fixé, on peut choisir $f' \in F'$ tel que $h(f') > \sup(h(f''), v(f''))$ et par conséquent $h(f) = h(f')$

de plus, si $f' \in F'_1$, $d(f') > 0$ et donc, comme $v(f'')$ $h(f')$

$$d(f) = h(f') - v(f)$$

$$= h(f') - \sup(f''), v(f')) > 0$$

donc $E(f) = \ell$ (d'après P_1)

donc $|2(r'') \quad e(r'')| = h(f') - \ell$

et comme $h(f')$ peut parcourir M_1, cette égalité ne peut pas être et donc, $supp(f'') = supp(kb)$ ou $supp(f'') = supp(ka)$, mais comme $f' \in F_v$, les pôles de f' sont sur $[2(r) \quad 3(r)]$ et donc $supp(f'') = supp(kb)$

<u>Lemme 4.2</u> : $(\exists\, c \in \mathbb{Z})\,((\overline{r''} \in F'' \Rightarrow o\overrightarrow{(r'')\ e(r'')} = c\vec{j})$

et $(\forall f \in F')\,(E(f) = \ell - c))$

$(\forall f' \in F')\,(\exists f'' \in F'')\,(f' + f'') \in F$ Soit $f = f' + f''$

Comme $E(f) = \ell$: $|\overrightarrow{2(r') \quad e(r')} + \overrightarrow{o(r'') \quad e(r'')}| = h(f') - \ell$ (2)

Soit c tel que $c\,j = o(r'') \quad e(r'')$

d'autre part $d(f) > 0$

donc $h(f) - (|2(r') \quad e(r'')| + |e(r'') \quad 3(r'')|) \geqslant d(f) > 0$

en introduisant (2) :

$$|e(r'') \quad 3(r'')| < \ell \qquad (3)$$

Soit, maintenant $f'_1 \in F' \subset F_v$

Posons $f_1 = f'_1 + f''$; deux cas sont possibles :

- soit $3(r'') = 3(r_1)$ alors si $d(f_1) = 0$

$E(f) = |e(r'') \quad 3(r'')| < \ell$ ce qui est contraire aux hypothèses. (A vérifie P_1 et $f \notin F_A$)

donc $d(f_1) > 0$, donc $E(f_1) = \ell$

c'est-à-dire : $|\overrightarrow{2(r'_1) \quad e(r'_1)} + \overrightarrow{o(r'') \quad e(r'')}| = h(f'_1) - \ell$

comme $E(f'_1) = h(f'_1) - |2(r'_1) \quad e(r'_1)|$ $E(f'_1) = 1 - c$

$= E(f')$

et donc, en reprenant (2) avec f'' quelconque appartenant à F'',
on trouve $\overrightarrow{o(r'')\ e(r'')} = c\vec{j}$.

- soit $3(r'_1) = 3(r_1)$ mais alors comme $d(f'_1) > 0$, on peut reprendre le raisonnement ci-dessus.

Ce qui achève la démonstration de ce lemme.

<u>Lemme 4.3</u> : c étant défini au lemme 4.2, pour tout $f'' \in L(D) - F''$, toute représentation r'' de f'' vérifie

$$(\exists\, c'' \geqslant c)\ (\overrightarrow{o(r'')\ e(r'')} = c''\vec{j})$$

Soit $f' \in F' \subset F_v$

$f = f' + f'' \in L(A)$ et, de par le choix de f'', $d(f) = 0$

$E(f) \geqslant \ell$

or $f \in F_v$; $E(f) = h(f) - |2(r)\ E(r)|$

$$= h(f) - |\overrightarrow{2(r')\ e(r')} + \overrightarrow{o(r'')\ e(r'')}|$$

$$= h(f') - |(E(f') - h(f'))\vec{j} + c''\vec{j}|$$

$$E(f) = h(f') - |(E(f') - h(f') + c'')\vec{j}| \qquad (4)$$

et, comme $E(f') - h(f')$ est négatif, que l'expression (4) est égale à ℓ si on substitue c à c'', que $E(f) \geqslant \ell$, on en déduit que $c'' \geqslant c$.

<u>Lemme 4.4</u> : $(h(f') > m \wedge f' \in L(B) - F') \Rightarrow (d(f') = 0 \wedge E(f') \geqslant \ell - c)$

Soit $f'' \in F''$;

Nécessairement $f = f' + f'' \in L(A) - F$ et $d(f) = 0$

si $d(f') \neq 0$ $3(r) = 3(r'')$ et donc :

$E(f) = h(f) - |2(r) \quad e(r)|$ $\quad$ (or $\quad |2(r) \quad 3(r)| = h(f)$)

$= |3(r'') - e(r'')| < \ell$ $\quad$ d'après (3) du lemme 4.2; ceci est contraire aux hypothèses.

donc $d(f') = 0$ $\quad$ et donc $3(r) = 3(r')$

soit $f = f' + f''$ $\quad E(f) \geqslant 1$

donc $|3(r') \quad e(r'')| = E(f)$

$$= |\overrightarrow{3(r') \quad e(r')} + \overrightarrow{o(r'') \quad e(r'')}|$$

$$= |1'' + c| = 1'' + c \geqslant \ell$$

donc $1'' \geqslant 1 - c$

<u>Remarque</u> : avec $\perp = \times$, la démonstration du lemme 4.4 aurait été un peu différente car, si ici nécessairement on avait $f' \in F_v$, on pouvait avoir dans ce dernier cas $f' \in F_h$ et $e(r') = 2(r')$, mais cette dernière égalité nous donnait avec $v(f') = h(f') \geqslant 1 - c$, encore la condition $E(f') \geqslant 1 - c$.

Remarquons enfin que si $f = f' + f''$, $f' \in L(C)$ et $f'' \in L(B)$

dans tous les cas $\quad h(f) = h(f')$

Ce qui achève la démonstration du premier cas.

<u>Second cas</u> : Sauf pour un nombre fini d'éléments de $L(C \perp D)$,

on a : $\quad f \in L(C \perp D) \Rightarrow d(f) = 0$

La démonstration dans ce cas, est la même que celle du lemme suivant.

<u>Lemme 5</u> : Si A vérifie P_3, pour toute règle $A ::= C \perp D$ telle que $L(C \perp D)$ soit infini, l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

a) C (ou respec. D) vérifie P_1 et pour tout $f' \in L(C)$, pour tout $f'' \in L(D)$, $h(f' \perp f'') = h(f')$ (respec. $h(f' \perp f'') = h(f'')$)

b) C (ou respec. D) vérifie P_2 et pour tout $f' \in L(C)$, pour tout $f'' \in L(D)$, $v(f' \quad f'') = v(f')$ (respec. $v(f' \perp f'') = v(f'')$)

c) C (ou respec. D) vérifie P_3 et pour tout $f'' \in L(C) - F_C$, et pour $f'' \in L(D)$, $h(f' \perp f'') = h(f') = v(f') = v(f' \perp f'')$ (respec. $h(f' \perp f'') = h(f'') = v(f'') = v(f' \perp f'')$)

d) C et D vérifient P_3 et pour tout $f' \in L(C) - F_C$, pour tout $f'' \in L(D) - F_D$, soit $h(f' \perp f'') = h(f') = v(f') = v(f' \perp f'')$, soit $h(f' \perp f'') = h(f'') = v(f'') = v(f' \perp f'')$

Comme précédemment, pour ne pas être gêné par les figures de F_A, nous nous plaçons dans le cas où $f \in L(A)$ est tel que

$$h(f) > \sup_{f' \in F_A} (h(f'))$$

Si $f = f' \perp f''$, nous noterons r, r' et r'' des représentations de f, f' et f'' telles que $o(r) = o(r')$ et $e(r) = e(r')$.

<u>Premier cas</u> : Supposons que C vérifie P_3

Supposons L(D) fini.

Sauf pour un nombre fini d'éléments de L(C), nous avons :

$$f' \in L(C) \Rightarrow h(f') \geqslant \sup_{f \in L(D)} (h(f))$$

Soient $f' \in L(C)$ et $f'' \in L(D)$; $f' \perp f'' = f \in L(A)$

si $h(f') > h(f'')$ et $v(f') > v(f'')$, comme $d(f') = 0$ et $d(f) = 0$,

$$h(f) = h(f') = v(f) = v(f')$$

ce qui nous donne le résultat dans le cas c)

Supposons L(D) infini.

Soit $f' \in L(C)$; pour tout $f'' \in L(D)$

$$f = f' \perp f'' \in L(A) \text{ et } d(f) = 0$$

Quand f'' parcourt L(D) qui est infini, $v(f'')$ ou $h(f'')$ n'est pas borné (lemme 1).

Supposons que $h(f'')$ n'est pas borné.

$h(f') + h(f'') \geqslant h(f' \perp f'') \geqslant h(f'')$

$v(f') + v(f'') \geqslant v(f' \perp f'')$ comme $f' \perp f'' \in L(A)$

$$v(f' \perp f'') = h(f' \perp f'') \quad \text{donc}$$

$v(f'') \geqslant h(f'') - v(f')$. f' étant fixé, on voit que si $h(f'')$ est suffisamment grand, $v(f'') \neq 0$, donc $\mathrm{supp}(f'')$ sera égal à $\mathrm{supp}(q\,a \times p\,b)$ $q > 0$, $p > 0$.

Donc (lemme 3), $2(r') = 2(r'') = 2(r)$

donc f' étant toujours fixé, $h(f' \perp f'') = h(f'') = v(f'')$ sauf pour un nombre fini d'éléments de L(D).

Donc, D vérifie P_3.

Soit alors F_C et F_D les ensembles finis définis par P_3

posons $m_v = \sup\limits_{f \in F_C \cup F_D} (v(f))$ $\qquad m_h = \sup\limits_{f \in F_C \cup F_D} (h(f))$

$$m = \sup(m_v, m_c)$$

Soit $f \in L(C \perp D)$ tel que $h(f) > m$

$f = f' \perp f''$; soit $h(f') > h(f'')$ et alors

$h(f) = v(f) = h(f') = v(f')$

si $h(f'') \geqslant h(f')$

$h(f) = v(f) = h(f'') = v(f'')$

ce qui achève la démonstration du lemme dans ce cas (d).

<u>Second cas</u> : ni C ni D ne vérifient P_3

Comme $L(C \perp D)$ est infini, $L(C)$ ou $L(D)$ est infini.

Supposons, par exemple, $L(C)$ infini ; nous noterons F' le sous-ensemble (infini) de $L(C)$ vérifiant :

$$f \in F' \Rightarrow d(f) \neq 0 \wedge \sup(h(f), v(f)) > \sup_{f \in F_A}(\sup(h(f), v(f)))$$

<u>Lemme 5.1</u> : $(\forall f \in L(D)\ (\exists k \in \mathbb{N})\ (\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(kb) \vee \mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(ka))$

Soit $f'' \in L(D)$

$(\forall f' \in F')\ (f = f' \perp f'' \in L(A) \wedge d(f) = 0)$

$h(f) \geqslant h(f')$

$h(f) = v(f) \leqslant v(f') + v(f'')$

$h(f') \leqslant v(f') + v(f'')$

donc, si $h(f')$ n'est pas borné, $v(f')$ ne l'est pas non plus et donc $\mathrm{supp}(f')$ est égal à $\mathrm{supp}(q'a \times p'b)$ avec q' et $p' > 0$.

Supposons le support de f'' aussi égal au support de $(q''a \times p''b)$, alors (lemme 3) $2(r') = 2(r) = 2(r'')$. Or f' peut être choisi tel que, par exemple, $h(f') > \sup(v(f''), h(f''))$

et donc $\quad h(f') = h(f)$

et $\quad v(f) = \sup(v(f''), v(f'))$

et donc $\quad v(f) \neq h(f) \quad (\text{car } h(f') \neq v(f'))$

donc $d(f) \neq 0$ ce qui est contraire aux hypothèses ;
donc, le support de f'' est, soit contenu dans celui de $k\,a$, soit dans celui de $k\,b$.

$F' \subset F_v \cup F_h$. Supposons qu'il existe une infinité d'éléments de F' contenus dans F_v, et de plus, supposons que $\perp = \times$.

<u>Lemme 5.2</u> : $(\exists\, c \in \mathbb{N})\,(\forall f \in L(D))\,(|3(f)\ \ e(f)| = c)$
Soit $f' \in F' \cap F_v$

Pour toute figure $f'' \in L(D)$

$$C \times D \overset{*}{\rightarrowtail} f' \times f'' = f \qquad \text{et} \quad d(f) = 0$$

comme $\text{supp}(f'')$ est un segment vertical ou horizontal (lemme 5.1)
nécessairement, soit $1(r') = 1(r)$ ou $3(r') = 3(r)$.

comme $f' \in F_v$, l'extrémité de f'' est sur le segment $[2(r), 3(r)]$,
comme le support de f'' est celui de $k\,a$ ou celui de $k\,b$,
si $\sup(h(f'), v(f')) > k$, nécessairement $1(r') = 1(r)$.

comme $d(f') \neq 0$ et $d(f) = 0$,
donc nécessairement $3(r') \neq 3(r) \quad 3(r'') = 3(r),\ d(f') > 0$,
$\text{supp}(f'') = \text{supp}(k\,b)$

et $\quad |2(r')\ \ e(r')| + |e(r'')\ \ 3(r'')| = h(f') \qquad (5)$

et ceci pour tout $f'' \in L(D)$

d'où le résultat du lemme 5.2.

<u>Lemme 5.3</u> : Soit $K = \sup(k \mid (\exists f'' \in L(D))(\mathrm{supp}(f'') = \mathrm{supp}(k\,b)))$
$(\forall f' \in F')(h(f') > K \Rightarrow (f' \in F_v \wedge E(f') = c))$

Soit $f'' \in L(D)$ $\mathrm{supp}(f'') = \mathrm{supp}(k\,b)$

soit $f' \in F'$ $d(f') \neq 0$ $f = f' \times f''$ et $d(f) = 0$

Si $f' \in F_v$, le même raisonnement que pour le lemme 5.2, nous conduit à l'égalité (5)

d'où $h(f') - |2(r')\ 3(r')| = c$

Si $f' \in F_h$, nécessairement, $2(r) = 2(r'') = e(r')$

comme $h(f) = h(f')$

$v(f) = \sup(k,\ v(f'))$

comme $h(f') \neq v(h')$

$h(f') > k$

$d(f) \neq 0$ ce qui est contraire à nos hypothèses, donc nécessairement $f' \in F_v$.

Il ne nous reste plus qu'à constater que si $f' \in L(C) - F'$ et si $\sup(h(f'), v(f'))$ est supérieur à $\sup_{f \in F_A}(\sup(h(f), v(f)))$

alors $d(f') = 0$ (par définition même de F')

Donc C vérifie P_1.

Soit, alors, $f = f' \times f''$ $f' \in L(C)$, $f'' \in L(D)$

nécessairement $h(f) = h(f')$ et donc le lemme 5 est démontré (cas a)

Soit $N' \subset N$ l'ensemble des non terminaux vérifiant P_1, P_2 ou P_3 ; $X \in N'$.
Pour tout $A \in N'$, on lui associe un ensemble fini F_A par la définition de la propriété P_i que vérifie A. Soit $F = \bigcup_{A \in N'} F_A$: F est fini.

Pour tout $A \in N'$, notons F'_A l'ensemble des éléments f de L(A) tels qu'il existe une règle $C \perp D$ telle que :

- $L(C \perp D)$ est fini
- $A \succ\!\!- C \perp D \overset{*}{\succ\!\!-} f$

Soit $F' = \bigcup_{A \in N'} F_A$: F' est fini.

Posons $m = \sup_{f \in F \cup F'} (\sup(h(f), v(f)))$

<u>Lemme 6</u> : Soit $A \in N'$ et $f \in L(A)$ tels que $\sup(h(f), v(f)) > m$.
Alors pour toute règle $A ::= C \perp D$, pour tout $f' \in L(C)$, $f'' \in L(D)$
si $f' \perp f'' = f$

soit $\sup(h(f'), v(f')) = \sup(h(f), v(f))$ et $C \in N'$

soit $\sup(h(f''), v(f'')) = \sup(h(f), v(f))$ et $D \in N'$

Il suffit de constater que A et $C \perp D$ vérifient les hypothèses soit du lemme 4, soit du lemme 4 bis, soit du lemme 5.

Si par exemple, A et $C \perp D$ vérifient les hypothèses du lemme 5, supposons que la propriété a) du lemme 5 soit alors vérifiée :

C vérifie P_1, $D \notin N'$

et $h(f) = h(f')$

$v(f') < h(f')$ or $h(f) = v(f)$

donc $\sup(h(f'), v(f')) = \sup(h(f), v(f))$

Si par exemple, A et $C \perp D$ vérifient les hypothèses du lemme 4, supposons que la propriété d) du lemme 4 soit alors vérifiée :

C et D vérifient P_3

et soit $h(f) = v(f) = h(f') = v(f')$

soit $h(f) = v(f) = h(f'') = v(f'')$

Traitons encore un cas :

A et $C \perp D$ vérifient les hypothèses du lemme 4 et la propriété b) du lemme 4 est vérifiée :

D vérifie P_1, $C \notin N'$.

on a $h(f) \geqslant v(f)$ (car $d(f) \geqslant 0$)

$h(f'') = h(f)$ $v(f'') \leqslant h(f'')$

et donc là encore :

$\mathrm{supp}(h(f), v(f)) = \mathrm{supp}(h(f''), v(f''))$

Dans tous les autres cas, on démontre de même que le lemme est encore vérifié.

<u>Conséquence</u> : Quel que soit $A \in N$, quel que soit $f \in L(A)$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ne peut avoir

$$A \overset{n}{\rightarrowtail} f \quad \text{et} \quad \sup(h(f), v(f)) > m$$

Procédons par récurrence sur n : le résultat est vrai pour $n = 0$, s'il est vrai jusqu'au rang $n - 1$, au rang n :

$A \rightarrowtail C \perp D \overset{n-i}{\rightarrowtail} f' \perp f'' = f$ or, le lemme 6 nous dit que

soit $\sup(h(f'), v(f')) > m$

soit $\sup(h(f''), v(f'')) > m$

Donc, par hypothèse de récurrence, on ne peut avoir $A \overset{n}{\rightarrowtail} f$.

Donc, il n'existe pas de grammaire $\mathcal{G}_4$ telle que supp(L($\mathcal{G}_4$)) soit infini et contenu dans supp(L($\mathcal{G}_1$)).

Ceci achève la démonstration du théorème 3.3.

3.4 $\mathcal{A}_6 \not\subset \mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_4 \not\subset \mathcal{A}_6$

Il est clair que $\mathcal{A}_6 \subset \mathcal{A}_1$

D'autre part, L($\mathcal{G}_1$) défini en 3.3 appartient à $\mathcal{A}_6$ or, L($\mathcal{G}_1$) n'appartient pas à $\mathcal{A}_4$, ce qui montre que

$$S_6 \not\subset S_4$$

Nous allons maintenant construire $\mathcal{G}_4$ telle que L($\mathcal{G}_4$) $\in \mathcal{A}_4$, L($\mathcal{G}_4$) $\notin \mathcal{A}_5$.

Prenons pour $\mathcal{S}$ l'espace de figures $\mathbb{R}^2$ muni des translations, a et b désignent encore les figures que nous avons déjà utilisées, et c sera un "marqueur" qui sera placé "au bout" de la figure. L'origine et l'extrémité de c sont confondues :

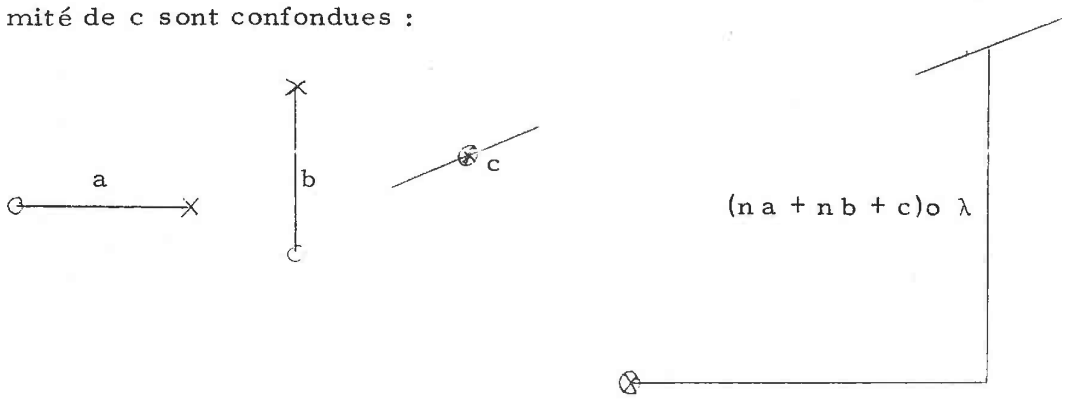


figure 3.6

$\mathcal{G}_4$ est définie par les règles : $X ::= (A + c) \circ \lambda$

$A ::= a + b$

$A ::= a + A + b$

Il est clair que $L_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}_4) = \{(na + nb + c) \circ \lambda \mid n \geqslant 1\}$

(cf. figure 3. 6)

Supposons qu'il existe une π_6-grammaire $\mathcal{G}_6 = (N, ::=, X)$ qui soit équivalente à $\mathcal{G}_4$ sur $\mathcal{F}$. Comme $c = -c$, on peut supposer qu'il n'y a aucune occurrence de $-c$ dans les règles de $\mathcal{G}_6$.

Posons $T = \{a, b, c\}$ et $T' = \{-a, -b, -c\}$

Le monoïde $(T \cup T')^* = M$ ainsi que le groupe libre G engendré par T sont aussi des π_6-algèbres. Il existe un π_6-homomorphisme h de M dans $\mathcal{F}$, défini par :

$$h(\Lambda) = \lambda$$

$$x \in T \cup T' \qquad h(x) = x \in \mathcal{F}$$

$$h(\alpha\beta) = h(\alpha) + h(\beta)$$

De même, il existe un π_6-homomorphisme h' de M dans G défini par :

$$h(\Lambda) = e$$

$$x \in T \qquad h(x) = x \in G$$

$$-x \in T' \qquad h(-x) = x^{-1}$$

$$h(\alpha\beta) = h(\alpha)\, h(\beta)$$

<u>Lemme 1</u> : $h(L_M(\mathcal{G}_6)) = L_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}_6)$

$h'(L_M(\mathcal{G}_6)) = L_G(\mathcal{G}_6)$

C'est une conséquence immédiate du théorème 2.1.4.

Soit D_n l'ensemble des figures engendrées par $(\{a, b, c\}, \{+, -\})$ et dont les supports sont contenus dans celui de $na + nb$.

<u>Lemme 2</u> : Si $h(\alpha) \in D_n$ et si $h(\alpha)$ a même origine que $pa + qb$ alors

$$h'(\alpha) = a^p b^q$$

Démontrons ce lemme par récurrence sur la longueur n de α.

Le résultat est immédiat pour $n = 0$.

Supposons le vrai jusqu'à l'ordre $n-1$. A l'ordre n :

$\alpha = \alpha' d \qquad d \in \{a, b, -a, -b\} \qquad h(\alpha) = h(\alpha') + h(d)$

distinguons suivant d :

- $d = a$, comme $h(\alpha) \in D_n$, nécessairement $q = 0$
  et comme $h(\alpha)$ a même origine et extrémité que pa, $h(\alpha')$ a même origine et extrémité que $(p-1)a$ et donc

$$h'(\alpha') = a^{p-1}$$

et $\qquad h'(\alpha) = a^p$

- $d = b$, $h(\alpha')$ a même origine et extrémité que $pa + (q-1)b$ et donc

$$h(\alpha') = a^p b^{q-1}$$

et $\qquad h(\alpha) = a^p b^q$

- on démontre de même pour $d = -a$ et $d = -b$

Ce qui achève la démonstration du lemme.

Soit maintenant $\alpha \in L_M(\mathcal{G}_6)$. D'après le lemme 1,

$(\exists\, n \in \mathbb{N})\ h(\alpha) = (n\,a + n\,b + c) \circ \lambda$

α contient au moins une occurrence de c (la figure c ne peut pas être engendrée par a et b).

Décomposons α :

$\alpha = \alpha_0\ c\ \alpha_1 \ldots c\ \alpha_p \qquad \alpha_i \in \{a, b, -a, -b\}^*$

$h(\alpha) = h(\alpha_0) + h(c) + h(\alpha_1) + \ldots + h(\alpha_p)$

$h(\alpha_0)$ doit avoir même origine et extrémité que $n\,a + n\,b$ pour que le support de $h(\alpha_0) + c$ soit contenu dans celui de $(n\,a + n\,b + c) \circ \lambda$, donc

$$h'(\alpha_0) = a^n\ b^n \quad \text{d'après le lemme 2.}$$

De plus, comme toutes les occurrences de c se superposent, $h(\alpha_i)$ a même origine et extrémité que λ et donc

$$h'(\alpha_i) = e \qquad 1 \leqslant i \leqslant p$$

Enfin, si on applique le lemme 2 à $-\alpha_p$:

$$h'(-\alpha_p) = a^n\ b^n \quad \text{et donc}$$

$$h'(\alpha_p) = b^{-n}\ a^{-n}$$

Comme $(\forall\, n \geqslant 1)\ (\exists\, \alpha \in L_M(\mathcal{G}_6))\ (h(\alpha) = (n\,a + n\,b + c) \circ \lambda)$

$$h'(L_M(\mathcal{G}_6)) = \{a^n\ b^n\ c^p\ b^{-n}\ a^{-n} \mid n \geqslant 1,\ p \neq 0,\ p \in M_n \subset \mathbb{N}\}$$

Or, d'après le corollaire 2.3.4.3, cet ensemble n'est pas algébrique sur G.

Donc $\qquad L(\mathcal{G}_4) \notin \mathcal{A}_6$

donc $\qquad \mathcal{A}_4 \neq \mathcal{A}_6$

Remarque : Considérons l'ensemble de figures suivant :

$$L = \left\{ (k\,a + k\,b) \circ (n\,b + n\,a) \circ (m(-a) + m\,b) \;\middle|\; n \geqslant 1,\ m \geqslant 1,\ k \geqslant 1 \right\}$$

L appartient à $\mathcal{A}_4$ (figure 3.7)

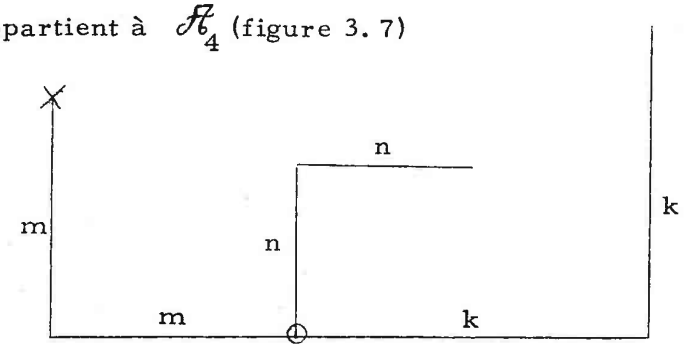


figure 3.7

supp(L) n'appartient pas à S_6. Sans en faire la démonstration, donnons en la raison intuitive. Les figures de L sont formées de 3 branches et si on les décrit à l'aide de π_6, quel que soit le choix pour l'origine et l'extrémité, on devra parcourir dans les deux sens une de ces branches, par exemple la branche centrale. Ceci suppose que la grammaire génère des ensembles de sous-figures du type

$$n\,a + n\,b - n\,b - n\,a = (n\,a + n\,b) \circ \lambda$$

où nous venons de voir qu'un tel ensemble n'est pas algébrique dans $\mathcal{F}$ muni d'une π_6-algèbre.

3.5 Quelques ensembles non algébriques

3.5.1 Conséquences des résultats sur les groupes

Soit $\mathcal{F} = (E, F, G)$ un espace de figures.

Munissons $\mathcal{F}$ d'une structure de π_3-algèbre et munissons aussi G d'une structure de π_3-algèbre de la façon suivante :

$$\forall\, g_1,\ g_2 \in G \qquad g_1 + g_2 = g_1\, g_2$$

$$g_1 \circ g_2 = g_2$$

Il est clair que les ensembles algébriques sur la π_3-algèbre G sont les ensembles algébriques de G muni de sa structure de groupe.

Soit alors O un point de E, l_O la fonction qui, à chaque figure, associe sa longueur relative à O (1.1.3) :

$$l_O : \mathcal{F} \longrightarrow G$$

l_O est un π_3-homomorphisme.

Pour tout ensemble algébrique L de $\mathcal{F}$, $l_O(F)$ est donc un ensemble algébrique de G(d'après 2.1.3).

On peut en déduire, par exemple, que si G est libre, $\{ n\,a + n\,b + n\,c \mid n \geqslant 1\}$ n'est pas algébrique sur $\mathcal{F}$ puisque $\{ l_O(a)^n\, l_O(b)^n\, l_O(c)^n \mid n \geqslant 1\}$ n'est pas algébrique sur G (corollaire 2.3.2.2).

3.5.2 Cas des figures fermées

Dans R^2 muni des translations, soient a, b, c les figures décrites à la figure 3.8.

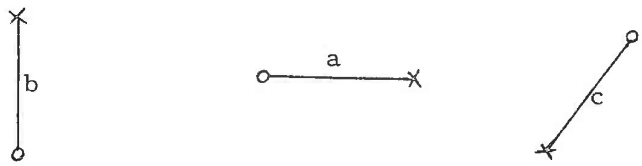


figure 3.8

La figure $na + nb + nc$ est une "figure fermée".
L'ensemble des $\{na + nb + nc \mid n \geqslant 1\}$ est-il algébrique dans la π_1-algèbre ? La réponse est non. La démonstration est du même type que celle qui est faite pour démontrer le théorème 3.3.

Nous avons le même résultat pour les carrés de côtés n.

Les résultats sont à rapprocher de ceux de (FEDER) : en n'utilisant que l'opération $+$ introduite ici, il montre que l'ensemble des courbes fermées convexes n'est pas algébrique.

4

le problème de la reconnaissance

4 LE PROBLEME DE LA RECONNAISSANCE

Soit $\mathcal{F}$ = (E, F, G) un espace de figures et $\mathcal{R}$ son ensemble de représentations. Dans ce chapitre, nous ne considèrerons, en vertu des résultats des chapitres précédents, que la π_3-algèbre $\mathcal{F}$ et des π_3-grammaires, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est muni des lois + et o définies en 1. 1. 2 et que pour toute figure f de l'alphabet terminal T, -f appartient aussi à T.

$\mathcal{G}$ = (N, ::=, X) désigne dans ce qui suit une π_3-grammaire que nous supposerons C-réduite (sauf en 4. 1). Toutes les règles de $\mathcal{G}$ sont numérotées par des entiers p, $p \in P \subset \mathbb{N}$. P_A désigne les numéros des règles de premiers membres A.

Comme dans le chapitre précédent, nous identifierons un élément ω de $\overline{\pi}_3$ et sa réalisation $\varphi_{\mathcal{F}}(\omega)$ dans $\mathcal{F}$.

4. 1 Indécidabilité dans le cas général

Théorème 4. 1 : Le problème de la reconnaissance des figures est indécidable.

Pour démontrer ce résultat, ramenons-nous au cas du groupe libre où ce résultat est déjà connu (théorème 2. 3. 3).

Soit G un groupe ; ($\emptyset$, G, G) est un espace de figures qui, muni de l'addition, est isomorphe à G (cf. remarque 1. 1. 3). Le problème de la reconnaissance se pose donc dans les mêmes termes que pour G.

Ce résultat n'est pas surprenant ; nous sommes placés ici dans un cas extrème où les supports vides ne pouvaient pas nous renseigner sur la "composition" de la figure. Dans la suite de ce chapitre, nous allons montrer que si l'on se donne la décomposition de la figure en éléments de l'alphabet, l'analyse syntaxique devient possible.

Cela revient à partir, non d'une figure ou d'une représentation, mais d'une T-représentation, c'est-à-dire d'un graphe connexe dont les éléments sont des représentations de T, la relation binaire : avoir un pôle en commun. Le support d'une T-représentation est l'union des supports de ses éléments et son ensemble des pôles est l'ensemble des pôles de ses éléments.

4. 2 T-représentation associée à une structure

Montrons d'abord par un exemple quel est le problème qui se pose.

Prenons comme espace de figures l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni du groupe des translations. Posons :

$$a = \overline{(0,\ 1,\ [0,\ 1])}$$

$$b = \overline{(0,\ 3/2,\ [0,\ 3/2])}$$

Soit $\mathcal{G}_1$ la π_3-grammaire dont l'unique règle est : $X_1 ::= a + a + a$

et soit $\mathcal{G}_2$ la π_3-grammaire dont l'unique règle est : $X_2 ::= b + b$

Donnons-nous alors la T-représentation R décrite à la figure 4. 2.

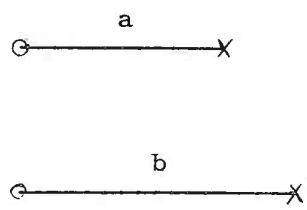


figure 4. 1

figure 4. 2

On peut alors se poser le problème de la reconnaissance de la façon suivante : existe-t-il une représentation r telle que le support de r soit celui de R, telle que l'origine et l'extrémité de r soient des pôles de R et telle que $\bar{r} \in L(\mathcal{G})$? Dans ce cas, la réponse est positive pour nos deux grammaires $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. Mais si on impose que la "décomposition" de r sur l'alphabet soit la même que R, alors seule $\mathcal{G}_1$ convient.
C'est ce point que nous allons préciser.

Soit $\mathcal{G} = (N, ::=, X)$ une π_3-grammaire. $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ est l'ensemble des structures associées à $\mathcal{G}$ et pour un élément $s \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, $\Omega(s)$ est une figure (cf. 2. 2. 1).

Soit O un point de l'espace des pôles F. Nous allons associer à toute ramification s de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ une T-représentation $\mathcal{T}_0(s)$:

- si s est de taille 1, alors $\mathcal{T}_0(s)$ est la représentation de $\Omega(s)$ d'origine O.

- si $s = p \times (s_1 + \ldots + s_q)$, distinguons suivant le second membre ω de la règle p :

si $\omega \in N$ alors $q = 1$ et $\mathcal{T}_0(s) = \mathcal{T}_0(s_1)$

si $\omega = AoB$ alors $q = 2$ et $\mathcal{T}_0(s) = \mathcal{T}_0(s_1) \cup \mathcal{T}_0(s_2)$

si $\omega = A+B$ alors $q = 2$ et $\mathcal{T}_0(s) = \mathcal{T}_0(s_1) \cup \ell_0(\Omega(s_1))(\mathcal{T}_0(s_2))$

où $\ell_0(\Omega(s_1))$ est la longueur de $\Omega(s_1)$ relativement au point O (cf. 1.1.3).

$\mathcal{T}_0(s)$ est une <u>T-représentation associée à la structure s</u>

Soit, par exemple, $\mathcal{G}'_1$ définie par : 1 : X : : = A+B

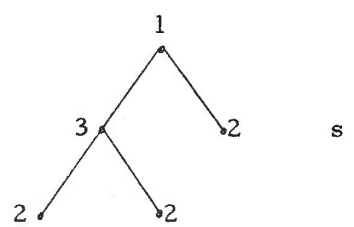
2 : B : : = a

3 : A : : = B+B

$\mathcal{G}'_1$ est une grammaire C-réduite de $\mathcal{G}_1$.

La ramification s = 1 X (3 X (2 + 2) + 2) (figure 4.3) appartient à $\mathcal{B}(\mathcal{G}'_1)$.

Si on prend pour 0 le zéro de $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_0(s)$ est représentée à la figure 4.2.



<u>figure 4.3</u>

$\mathcal{T}(s)$ est l'<u>ensemble des T-représentations associées à la structure s</u> :

$\mathcal{T}(s) = \{\mathcal{T}_0(s) \mid 0 \in F\}$.

De même, on définit $\mathcal{R}_0(s)$ comme la représentation de $\Omega(s)$ qui a pour origine 0.

La question que nous nous posons maintenant est : étant donné une représentation R, existe-t-il une structure $s \in \mathcal{BL}(\mathcal{G}, X)$ telle que $\mathcal{T}(s)$ con-

tienne R ? Quels sont tous les éléments de $\mathcal{BL}(\mathcal{G}, X)$ vérifiant cette propriété ?

Pour répondre à cette question, nous nous intéresserons aussi aux T-sous représentation de R, c'est à dire aux T-représentations dont les éléments sont des éléments de R.

4.3 Analyse syntaxique et reconnaissance pour les T-représentations

L'algorithme que nous allons décrire ici est un dérivé immédiat de l'algorithme d'analyse syntaxique ascendante globale de Monsieur Younger (YOUNGER).

Soit R une T-représentation de support S et soit Q son ensemble des pôles. Nous allons construire le bilangage des structures de $\mathcal{G}$ dont les T-représentations associées sont des T-sous-représentations de R.

Nous allons d'abord construire un tableau booléen B, l'ensemble des indices appartenant à $(P \cup T) \times Q \times Q$. Nous noterons + et . la somme et le produit booléen. B va vérifier :

(1) $(\forall a \in T)(\forall i, j \in Q)$

$$B(a, i, j) = 1 \Leftrightarrow (\exists r \in R)(\overline{r} = a \wedge o(r) = i \wedge e(r) = j)$$

(2) $(\forall p \in P)(\forall i, j \in Q)$

$$B(p, i, j) = 1 \Leftrightarrow (\exists s \in \mathcal{B}(\mathcal{G}))(\rho(s) = p \wedge \mathcal{T}_i(s) \subset R \wedge e(\mathcal{R}_i(s)) = j)$$

Posons, pour tout $a \in P \cup T$, pour tout $i, j \in Q$:

$B_0(a, i, j) =$ <u>si</u> $a \in T \wedge (\exists\, r \in R)\,(o(r) = i \wedge e(r) = j \wedge \overline{r} = a)$

<u>alors</u> 1

<u>sinon</u> 0

Définissons alors B_{n+1} à partir de B_n :

$a \in T : B_{n+1}(a, i, j) = B_0(a, i, j)$

$p \in P$: introduisons ici un intermédiaire :

$$\forall A \in N : B_n(A, i, j) = \sum_{p \in P_A} B(p, i, j)$$

d'où :

$B_{n+1}(p, i, j) = B_n(p, i, j) +$

<u>si</u> la règle de numéro p est : $A ::= C + D$ <u>alors</u> $\sum_{p \in Q} B_n(C, i, j) . B_n(D, k, j)$

<u>si</u> la règle de numéro p est : $A ::= C \circ D$ <u>alors</u> $\sum_{p \in Q} B_n(C, i, j) . B_n(D, i, j)$

<u>si</u> la règle de numéro p est : $A ::= a$ <u>alors</u> $B_n(a, i, j)$

<u>Lemme</u> : il existe un entier k tel que :

$$\forall n \geqslant k \quad B_n = B_k$$

En effet, nous avons une suite de tableaux et le passage d'un rang au suivant se fait par adjonction de 1. Donc il existe k tel que $B_k = B_{k+1}$ et par conséquent, pour $n \geqslant k$ $B_n = B_k$.

<u>Proposition 4.3.1</u> : Avec les notations précédentes, B_k vérifie (1) et (2).

B_k vérifie (1) par construction même de B_0.

Par récurrence sur n, montrons que :

$$(\forall p \in P)(B_n(p, i, j) = 1 \Rightarrow (\exists s \in \mathcal{B}(\mathcal{G}))(\rho(s) = p \wedge \mathcal{C}_i(s) \subset R \wedge e(\mathcal{R}_i(s)) = j))$$

Le résultat est vrai pour n = 0.

Supposons le vrai jusqu'au rang n-1. Au rang n :

Soit $B_{n-1}(p, i, j) = 1$ et dans ce cas, par hypothèse de récurrence, le résultat est vrai.

Sinon, supposons que la règle de numéro p soit A::= C + D

donc, il existe k tel $B_{n-1}(C, i, k) . B_{n-1}(D, k, j) = 1$

donc, il existe $p_1 \in P_C$ et $p_2 \in P_D$ tels que $B_{n-1}(p_1, i, k) = 1$

et $B_{n-1}(p_2, i, k) = 1$.

Par hypothèse de récurrence, il existe s_1 et s_2 appartenant à $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ tels que :

$$\rho(s_1) = p_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_i(s_1) \subset R \quad \text{et} \quad e(\mathcal{R}_i(s_1)) = k$$

$$\rho(s_2) = p_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_k(s_2) \subset R \quad \text{et} \quad e(\mathcal{R}_k(s_2)) = j$$

$s = p \times (s_1 + s_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ et

$\mathcal{C}_i(s) = \mathcal{C}_i(s_1) \cup \mathcal{C}_k(s_2) \subset R$ et $e(\mathcal{R}_i(s)) = j$

Donc, si le résultat est vrai au rang n et il est vrai au rang n+1, donc il est vrai pour le rang k.

Réciproquement

$$(\exists s \in \mathcal{B}(\mathcal{G}))(\rho(s) = p \wedge \mathcal{C}_i(s) \subset R \wedge e(\mathcal{R}_i(s)) = j)$$

$$\Rightarrow B_k(p, i, j) = 1.$$

Démontrons ce résultat sur la taille de s. Le résultat est évident si la taille de s est 1 : en effet, dans ce cas, la règle de numéro p est A : : = a avec $a \in T$, et $B_0(a, i, j) = 1$

et donc $\qquad B_m(p, i, j) = 1 \qquad (m \geqslant 1)$

Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n-1 ; au rang n :

$$s = p \times (s_1 + \ldots + s_q)$$

Supposons, par exemple, que la règle de numéro p soit A : : = C o D. Dans ce cas, q = 2. Notons $p_1 = \rho(s_1)$ et $p_2 = \rho(s_2)$.

$$\mathcal{C}_i(s) = \mathcal{C}_i(s_1) \cup \mathcal{C}_i(s_2) \qquad \text{et donc} \quad \mathcal{C}_i(s_1) \subset R$$

$$\text{et} \quad \mathcal{C}_i(s_2) \subset R$$

$$e(\mathcal{R}_i(s)) = e(\mathcal{R}_i(s_2)) = j$$

comme $\mathcal{C}_i(s_1) \subset R$, $(\exists k \in Q)\,(e(\mathcal{R}_i(s_1)) = k)$

Donc, par hypothèse de récurrence :

$$B_k(p_1, i, k) = 1 \quad \text{et} \quad B_k(p_2, i, j) = 1$$

et donc $\qquad B_k(p, i, j) = 1$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Nous allons maintenant construire la grammaire

$$\mathcal{G}' = (P \times Q \times Q, \rightarrow, P_x \times Q \times Q)$$

qui va définir nos structures (à une transcription près).

$\rightarrow$ est définie par :

$(\forall p, n, m \in P)(\forall i, j, k \in Q)$

- si la règle de numéro p est $A ::= C + D$ et si $n \in P_C$, $m \in P_D$

  et si $B(n, i, k)$ et $B(m, k, j)$ alors $(p, i, j) \rightarrow (n, i, k)(m, k, j)$

- si la règle de numéro p est $A ::= C \circ D$ et si $n \in P_C$, $m \in P_D$

  et si $B(n, i, k)$ et $B(m, i, j)$ alors $(p, i, j) \rightarrow (n, i, k)(m, i, j)$

- si la règle de numéro p est $A ::= a$ avec $a \in T$ et si $B(a, i, j)$

  alors $(p, i, j) \rightarrow \Lambda$

- si la règle de numéro p est $A ::= C$ avec $C \in N$ et si $n \in P_C$

  et si $B(n, i, j)$ alors $(p, i, j) \rightarrow (n, i, j)$.

Nous noterons $\mathcal{BL}'$ le bilangage engendré au sens strict par $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{B}'$ le bilangage engendré au sens large.

Soit t la première projection de $P \times Q \times Q$ dans P.

t définit une transcription de $\widehat{P \times Q \times Q}$ dans $\widehat{P}$.

<u>Proposition 4.3.2</u> : $t(\mathcal{BL}') \subset \mathcal{BL}(\mathcal{G}, X)$

$t(\mathcal{B}') \subset \mathcal{B}(\mathcal{G})$

Le résultat est évident : il suffit de constater, pour $p_A \in P_A$, $p_B \in P_B$, $p_C \in P_C$ que toute famille p_B p_C de prédécesseur p_A vérifie $A ::= B \perp C$ $(\perp \in \{+, \circ\})$.

<u>Proposition 4.3.3</u> : $\mathcal{B}'$ est l'ensemble de toutes les structures dont les T-représentations associées sont des T-sous-représentations de R.

Soit $s \in \mathcal{B}'$; il existe p, i, j tels que $(p, i, j) = \rho(s)$.
Nous allons montrer, par récurrence sur la taille de s, que la T-représentation $\mathcal{T}_i(s)$ est une T-sous-représentation de R et que la représentation $\mathcal{T}_i(s)$ a pour extrémité j .

Si s a pour taille 1, alors la règle de numéro p est : A::= a .
$\mathcal{T}_i(s)$ a un élément : la représentation d'origine i de a .

D'après la définition de $\mathcal{G}'$, B(a, i, j) = 1, cette représentation appartient à R et a pour extrémité j . Donc, $\mathcal{T}_i(s)$ est une T-sous-représentation de R et $R_i(s)$ a pour extrémité j (proposition 4.3.1).

Soit $s = (p, i, j) \times (s_1 + \ldots + s_q)$

Supposons, par exemple, que la règle de numéro p soit A::= C + D.
Dans ce cas $q = 2$.

D'après la définition de $\mathcal{G}'$:
$(\exists\, n \in P_C)(\exists\, m \in P_D)(\exists\, k \in \Omega)$ $\rho(s_1) = (n, i, k)$ et $\rho(s_2) = (m, k, j)$

$$\mathcal{T}_i(s) = \mathcal{T}_i(s_1) \cup \ell_i(\Omega(s_1))\, \mathcal{T}_i(s_2)$$

or comme l'extrémité de $\mathcal{R}_i(s_1)$ est k, $\ell_i(\Omega(s_1))(i) = k$
et donc $\ell_i(\Omega(s_1))\, \mathcal{T}_i(s_2) = \mathcal{T}_k(s_2)$
or par hypothèse de récurrence $\mathcal{T}_i(s_1)$ et $\mathcal{T}_k(s_2)$ sont des T-sous-représentations de R, donc, $\mathcal{T}_i(s_1) \cup \mathcal{T}_k(s_2)$ aussi.

D'autre part, l'extrémité de $\mathcal{T}_i(s)$ est celle de $\mathcal{T}_k(s_2)$ qui est, par hypothèse de récurrence, égale à j.
Ceci achève la première partie de la démonstration.

Réciproquement, soit $s \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ tel qu'il existe une T-représentation associée à s qui soit une T-sous-représentation de R. Montrons qu'il existe $s' \in \mathcal{B}'$ telle que $t(s') = s$.

Procédons par récurrence sur la taille de s.

Si la taille de s est 1, $s = p \in P$. Soit $A ::= a$, la règle de numéro p. Comme il existe i tel que $\mathcal{T}_i(s) \subset R$, il existe une représentation de a d'origine et d'extrémité j dans R et donc $(p, i, j) \in \mathcal{B}'$.

Soit $s = p \times (s_1 + \ldots + s_q)$. Supposons que la règle de numéro p soit : $A ::= C \circ D$.

Dans ce cas, $q = 2$.

Il existe i tel que $\mathcal{T}_i(s) \subset R$; or, $\mathcal{T}_i(s) = \mathcal{T}_i(s_1) \cup \mathcal{T}_i(s_2)$

Par hypothèse de récurrence, il existe k, s'_1 et s'_2 tels que

$$t(s'_1) = s_1 \qquad \rho(s'_1) = (\rho(s_1), i, k)$$

$$t(s'_2) = s_2 \qquad \rho(s'_2) = (\rho(s_2), i, j)$$

et donc $s' = (p, i, j) \times (s'_1 + s'_2) \in \mathcal{B}'$

et $t(s') = s$.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

<u>Théorème 4.3.4</u> : Il existe un algorithme qui, pour toute T-représentation R, pour tous pôles i, j de R, permet de décider s'il existe une structure $s \in \mathcal{BL}(\mathcal{G}, X)$ dont la T-représentation $\mathcal{T}_i(s)$ associée soit égale à R, dont la représentation $\mathcal{R}_i(s)$ ait pour extrémité j.

Le problème se ramène à savoir s'il existe un élément s de $\mathcal{BL}'$ dont la racine appartienne à $\{ (p, i, j) \mid p \in P_x \}$ et tel que $\mathcal{T}_i(s) = R$.

Pour que $\mathcal{T}_i(s) = R$, il suffit que le mot des feuilles de s contienne au moins une occurrence de tout triplet (a, k, l) tel que la représentation de a d'origine k, d'extrémité l, appartienne à R.

Or l'ensemble des ramifications de $\mathcal{B}\mathcal{L}'$ dont le mot des racines appartient à $\{(p, i, j) \mid p \in P_x\}$ est un bilangage grammatical et l'ensemble des mots de ses feuilles est donc un C-langage L (PAIR 1965).

D'autre part, le langage formé de tous les mots contenant une occurrence au moins de chacune des lettres d'un sous-ensemble donné d'un alphabet V est un langage régulier K.

Pour qu'il existe une ramification $s \in \mathcal{B}\mathcal{L}'$ telle que le mot des feuilles $\varphi(s)$ appartienne à K, il suffit qu'il existe α, $\alpha \in L \cup K$.

Le problème se ramène donc à savoir si l'intersection d'un C-langage et d'un langage régulier est non vide, or ce problème est décidable.

<u>Remarque</u> : Ce dernier théorème ne donne pas un algorithme de reconnaissance pour l'analyse effective d'une figure. Il faut, en effet, d'abord pouvoir passer de la figure à une T-représentation, c'est-à-dire reconnaître les différents constituants de la figure.

5

conclusion

Cette étude peut être poursuivie soit vers des problèmes théoriques, soit vers des applications concrètes.

Dans les chapitres précédents, nous avons soulevé quelques problèmes :

a) Comment passer à des classes plus vastes que celles des ensembles algébriques de figures (comment, en particulier, obtenir tous les carrés de côtés entiers ?) et comment formuler des relations topologiques sur les figures ? On peut introduire des "opérateurs contextuels" comme l'opérateur $\ast$ dans (SHAW 1968, 1970) ou penser à des grammaires transformationnelles (CLOWSES). Une solution de facilité serait de se limiter, dans un premier temps, à des π-grammaires, puis de faire des vérifications sur le résultat de l'analyse syntaxique (comme, par exemple, dans les langages de programmation pour vérifier le type des identificateurs).

   On pourrait aussi introduire la notion de classes de figures et d'opérations opérant sur ces classes (cf. structures déformées de (PAVEL) ou définition des "picture primitives" de (SHAW 1968)).

b) Si l'on se restreint à des figures qu'on peut parcourir continûment sans retour arrière (figure 5. 1, mais non figure 5. 2), la classe des ensembles algébriques sur π_1 est-elle égale à celle des ensembles algébriques sur π_6 ? Dans l'affirmative, il serait facile de se ramener aux résultats de (FEDER) établis à l'aide d'automates.

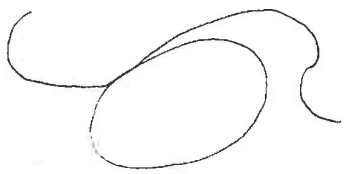


figure 5. 1

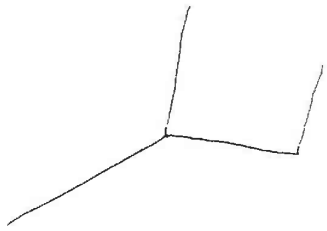


figure 5. 2

c) Etude de l'ambiguité : certaines figures peuvent avoir une infinité de structures pour une π-grammaire $\mathcal{G}$ donnée ; on peut alors dire que $\mathcal{G}$ est <u>fortement ambiguë</u>. Le problème de savoir si $\mathcal{G}$ est ambiguë est indécidable (conséquence du résultat analogue sur le monoïde), mais, on peut se poser la même question pour l'ambiguité forte.

Pour une représentation R, il peut exister une infinité de T-représentations ayant même support que R. Dans ce cas, ce n'est peut-être pas la grammaire qui est la cause de l'ambiguité forte. Nous sommes donc amenés à nous restreindre à un alphabet terminal T qui soit "libre", c'est-à-dire qui nous conduise, à partir d'une représentation donnée, à une unique T-représentation ayant même support. Mais il semble que, même dans ce cas, le problème de savoir si $\mathcal{G}$ est fortement ambiguë est indécidable.

Si T est "libre" et si la détermination de la T-représentation associée à la représentation r est effective, remarquons que l'énoncé du théorème 4. 2. 2. 3 devient :

"Il existe un algorithme qui, ayant pour données une représentation r et une π-grammaire $\mathcal{G}$, permet de décider si $\bar{r} \in L(\mathcal{G})$."

d) Les chapitres 2, 3 et 4 nous ont montré qu'une bonne connaissance sur les ensembles algébriques sur les groupes pouvait nous aider dans nos

démonstrations. Il serait, en particulier, intéressant de savoir si les ensembles algébriques sur le groupe libre sont "plus riches" que les ensembles algébriques sur le monoïde libre, c'est-à-dire si la possibilité d'effacement augmente la puissance des grammaires algébriques.

Deux applications naturelles d'une telle étude sont la génération et la reconnaissance d'image.

On pourrait définir un langage de génération graphique qui manipulerait des figures à l'aide des lois de composition introduites au chapitre 1. Les figures seraient présentes en mémoire principale sous une forme structurée et l'ordre d'affichage provoquerait l'exécution d'une procédure graphique dont la donnée serait la structure construite en mémoire.

Un tel langage peut être conçu comme une extension des langages tels que FORTRAN ou PL/1 avec des types nouveaux : les figures. Dans le cas des figures à trois dimensions, on pourrait notamment projeter dans un plan puis tracer. (Cette projection nous amènerait aussi à étudier des homomorphismes entre espaces de figures).

Dans le cadre d'une application physique ou biologique, ou de façon tout à fait générale, on peut aussi mettre au point une procédure d'analyse syntaxique de figures qui soit efficace. Compte tenu de l'indécidabilité de la reconnaissance dans le cas général et de ce que nous avons dit au c) ci-dessus, des précautions seront nécessaires pour le choix de l'alphabet terminal.

Une méthode consisterait à utiliser l'analyse syntaxique pour guider la reconnaissance des formes. On peut aussi concevoir que le résultat partiel d'une analyse syntaxique descendante indique les formes possibles de la partie de la figure qui reste à analyser.

références

BAR-HILLEL Y., PERLES M., SHAMIR E. (1961)

On formal properties of simple phrase structure grammars - Zeitschrift für Phonetik, Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung 14, p. 143-172.

CLOWSES M. B. (1969)

Transformational grammars and the organization of pictures. In Automatic Interpretation and Classification of Images, Ed. by A. Grasseli, Academic Press, New York, p. 43-77.

EDEN M. (1961)

On the formalization on handwriting - Appl. Math. Symp. A. M. S. Vol. 12, p. 83-88.

EDEN M. (1962)

Handwriting and pattern recognition - IRE Trans. IT. 8, p. 160-166.

EILENBERG S. AND WRIGHT J. B. (1967)

Automata in general algebras - IBM Research Note NC 725.

FEDER J. (1968)

Languages of encoded line patterns - Information and Control 13, p. 230-244.

GINSBURG S. (1966)

The mathematical theory of context-free languages Mc Graw-Hill, New York.

GROSS M. ET LENTIN A. (1967)

Notion sur les grammaires formelles - Gauthier-Villars, Paris.

KIRSCH R. (1964)

Computer Interpretation of English text and picture patterns - IEEE Transactions on Electronic computers EC-13,4 - p. 363-376.

KREISEL G. ET KRIVINE J. L. (1967)

Eléments de la logique mathématique. Théorie des modèles - Dunod, Paris.

LEDLEY R.S. (1964)

High-Speed automatic analysis of biomedical pictures - Sciences 146, p. 216-223.

LEDLEY, ROTOLO, GOLAB, JACOBSEN, GINSTER, WILSON (1965)

FIDAC : Film Inpart to Digital Automatic Computer and syntax directed pattern-recognition programming system- Optical and Electro-optical Information Processing, MIT Press Cambridge Mass, p. 591-613.

LESCANNE P. (1971)

Etude de quelques théories des langages et généralisation du théorème de Kleene. Thèse de spécialité, Université de Nancy I.

MAGNUS W., KARRAS A., SOLITAR D. (1965)

Combinatorial group theory - Intersciences Publishers, New York.

MOHR R. (1971)

Formalisation d'un outil pour la description d'images - R. I. R. O., R-2, p. 118-123.

NARASIMHAN R. (1966)

Syntax-directed interpretation of classes of pictures. Comm. ACM 9,3, p. 166-173.

PAIR C. (1965)

Etude de la notion de pile, application à l'analyse syntaxique. Collection des thèses de la Fac. des Sciences, Université de Nancy I.

PAIR C. (1969)

Sur les notions algébriques liées à l'analyse syntaxique. Exposé fait au Centre Automatique de l'Ecole des Mines, Fontainebleau (mars 1969), paru dans R. I. R. O., R-3 (1970) p. 3-29.

PAIR C., QUERE A. (1968)

Définition et étude des bilangages réguliers - Information and Control 13, p. 565-593.

PAVEL M. (1969)

Fondements mathématiques de la reconnaissance des structures - Hermann, Paris.

QUERE A. (1969)

Etude des ramifications et des bilangages. Thèse de spécialité, Fac. des Sciences, Université de Nancy I.

SHAW A. C. (1968)

The formal description and parsing of pictures. Ph. D. Thesis Comp. Sc. Dept. Stanford Univ.

SHAW A. C. (1970)

Parsing of graph-representable pictures JACM. Vol. 17, n° 3, p. 453-481.

YOUNGER D. M. (1967)

Recognition and parsing of context-free languages in time n^3 - Information and Control 10, p. 189-208.

NOM DE L'ETUDIANT : MOHR Roger

Nature de la thèse : Doctorat de Spécialité en Mathématiques Appliquées

Vu, Approuvé

et permis d'imprimer

NANCY, le 16 Février 1973

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY I

J.R. HELLUY