

N° 477

Dactyl

UNIVERSITÉ DE NANCY I

U. E. R. DE SCIENCES MATHÉMATIQUES

Sc. N. 73/112/A

CONTRIBUTION A L'ETUDE
DE L'UNIVERSALISATION
DES EQUATIONS DE COUCHE LIMITE



THESE

pour obtenir le diplôme de

DOCTEUR DE SPECIALITE

DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

MIRGAUX Alain

Ingénieur E.N.S.E.M. - Maître ès-Sciences

Thèse soutenue le 2 novembre 1973 devant le jury :

- | | | |
|-----|--------------|------------------|
| MM. | LEGRAS J. | <i>Président</i> |
| | LUCIUS M. | <i>Examineur</i> |
| | PEUBE J.-L. | <i>Examineur</i> |
| | SALJNIKOV V. | <i>Invité</i> |

UNIVERSITÉ DE NANCY I

U. E. R. DE SCIENCES MATHÉMATIQUES

**CONTRIBUTION A L'ETUDE
DE L'UNIVERSALISATION
DES EQUATIONS DE COUCHE LIMITE**



THESE

pour obtenir le diplôme de

**DOCTEUR DE SPECIALITE
DE MATHÉMATIQUES APPLIQUEES**

par

MIRGAUX Alain

Ingénieur E.N.S.E.M. - Maître ès-Sciences

Thèse soutenue le 2 novembre 1973 devant le jury :

MM.	LEGRAS J.	<i>Président</i>
	LUCIUS M.	<i>Examineur</i>
	PEUBE J.-L.	<i>Examineur</i>
	SALJNIKOV V.	<i>Invité</i>

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à Monsieur le Professeur LEGRAS, fondateur de l'enseignement des Mathématiques Appliquées à l'Université de Nancy, qui m'a initié à l'Analyse Numérique et qui me fait l'honneur de présider le Jury.

Que Monsieur SALJNIKOV, Professeur à l'Université de Belgrade, dont les travaux sont à l'origine de cette recherche, soit vivement remercié pour les conseils qu'il m'a donnés.

Que Monsieur le Professeur LUCIUS qui a dirigé ce travail et qui par son aide incessante et ses encouragements m'a permis de mener à bien cette entreprise, trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur PEUBE qui m'a fait l'honneur de venir à Nancy participer au Jury.

Enfin, que soient remerciés le Personnel de l'I. U. C. A. pour l'aide technique qu'il m'a apportée et Madame MARCHAND pour le soin et la gentillesse dont elle a fait preuve et qui ont permis la réalisation matérielle de cette thèse en un temps très court.

	Pages
<u>Notations</u>	
<u>Introduction</u>	
<u>RAPPELS</u>	
<u>I - VISCOSITE ET COUCHE LIMITE</u>	1
1 - Fluide réel et fluide parfait	1
2 - Notion de couche limite	2
3 - Définition des grandeurs caractéristiques de la couche limite	4
<u>II - LES EQUATIONS DE COUCHE LIMITE</u>	6
1 - Résultats généraux	6
2 - Cas des fluides à propriétés physiques constantes	8
3 - Couche limite incompressible laminaire bidimensionnelle stationnaire	9
4 - Différentes formes des équations de couche limite	11
<u>III - UNIVERSALISATION DES EQUATIONS DE COUCHE LIMITE</u>	14
 <u>Première Partie : Etude de la Méthode d'Universalisation sur un exemple</u>	
<u>I - ETUDE THEORIQUE DE L'UNIVERSALISATION</u>	16
1 - Choix de l'exemple	17
2 - Rappels d'analyse fonctionnelle - Notations	18
3 - Existence et unicité de la solution du problème I	19
a - Théorème	19
b - Application au problème I	20
4 - Universalisation du problème I	22
5 - Convergence de la solution universelle approchée vers la solution exacte	27
a - Convergence de la suite Φ_m^*	27
b - Convergence de la série $\sum \Phi_m^*$	30
c - Convergence de la solution approchée, $\Phi_{(M+1)}^*$, vers la solution exacte Ψ	31

<u>II - APPLICATION NUMERIQUE</u>	35
1 - Choix d'une classe de problèmes d'évolution	35
2 - Détermination de la solution exacte	35
3 - Solution universelle approchée au rang M	37
4 - Etude de trois cas concrets	38
a - Exemple 1	38
b - Exemple 2	43
c - Exemple 3	48
d - Conclusion	54

Seconde Partie : Universalisation des équations de couche limite

<u>I - LES METHODES PARAMETRIQUES DU TYPE LOITSIANSKI</u>	55
1 - Etude des paramètres de forme de Loitsianski	56
a - Définition des paramètres de forme	57
b - Transformation de l'équation de quantité de mouvement	62
c - Relation de récurrence	64
d - Indépendance des paramètres de forme	65
2 - Universalisation de L.G. Loitsianski	66
a - Transformation des équations de couche limite avec les variables de similitude	66
b - Obtention des équations universelles	69
c - Résolution numérique et exploitation	70

II - PREMIERE GENERALISATION DE L'EQUATION UNIVERSELLE DE LOITSIANSKI

1 - Généralisation des équations de solutions affines de Falkner-Skan	71
a - Choix d'une nouvelle variable transversale	72
b - Universalisation	75
2 - Approximation monoparamétrique	77
a - Equation universelle monoparamétrique	77
b - Méthode numérique de résolution	79
c - Tables universelles monoparamétriques et leur utilisation	85
d - Cas de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire	88

3 - Approximation biparamétrique	92
a - Equation universelle biparamétrique	92
b - Discrétisation	93
c - Abandon de l'approximation biparamétrique	95

III - SECONDE GENERALISATION DE L'EQUATION UNIVERSELLE DE LOITSIANSKI

1 - Amélioration de la première généralisation	99
a - Nouveau choix de variable transversale	99
b - Universalisation approchée au rang N	104
2 - Approximation monoparamétrique	106
a - Equation universelle monoparamétrique	106
b - Résolution numérique et utilisation des tables universelles	106
c - Cas de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire	109
d - Prévisions pour l'approximation biparamétrique	113
3 - Approximation biparamétrique	115
a - Equation universelle biparamétrique	115
b - Discrétisation générale	116
c - Tables universelles biparamétriques et leur utilisation	121
d - Résolution numérique partielle approchée	124
e - Résultats pour le cylindre circulaire	125

CONCLUSION

ANNEXES

<u>Annexe 1</u> : Etude des fonctions universelles du problème I	130
<u>Annexe 2</u> : Etude de la méthode du "Progonka"	133
I - Caractérisation de la méthode du Progonka	133
II - Conditions suffisantes de stabilité	136
<u>Annexe 3</u> : Une méthode directe de calcul de la couche limite laminaire plane pour le cas d'un cylindre circulaire	138
I - Transformation de Von Mises	138
II - Résolution Numérique	140

REFERENCES

1 - Discrétisation	140
2 - Particularités de cette méthode	143
3 - Résultats pour un cylindre circulaire	145
	147

NOTATIONS

1 - Symboles généraux de la théorie de la couche limite

- μ coefficient de viscosité dynamique
- ρ masse volumique
- ν coefficient de viscosité cinématique
- p forces de pression par unité de surface
- U_{∞} vitesse de l'écoulement libre en amont de l'obstacle
- U vitesse à la frontière extérieure de la couche limite
- Re nombre de Reynolds
- u composante longitudinale de la vitesse dans la couche limite
- v composante transversale de la vitesse dans la couche limite
- Ψ fonction de courant
- y distance à la paroi
- δ épaisseur finie de la couche limite
- δ^* épaisseur de déplacement
- δ^{**} épaisseur de quantité de mouvement
- H facteur de forme
- τ_0 coefficient de forces de frottement à la paroi par unité de surface
- $u_a, v_a, U_a, x_a, y_a, \delta_a^*, \delta_a^{**}, \tau_a$: variables et grandeurs caractéristiques adimensionnelles classiques de la couche limite.

2 - Notations utilisées pour les universalisations des équations de couche limite

- F fonction caractéristique
- λ paramètre de forme de Pohlhausen
- f_1, f_2, \dots, f_k : paramètres de forme de Loitsianski
- Z^{**} fonction associée à δ^{**}
- ξ variable transversale de Loitsianski
- η variable transversale de Görtler
- η_S variable transversale de Saljnikov
- Φ fonction de courant adimensionnelle, associée à ξ pour Loitsianski, associée à η dans la première généralisation proposée par Saljnikov.

- $\overline{\Phi}_s$ fonction de courant adimensionnelle associée à η_s dans la seconde généralisation
- Ψ profil de vitesse adimensionnelle dans la couche limite
- B_0 facteur de normalisation de Loitsianski
- B fonction de normalisation de Saljnikov
- β fonction principale de Görtler
- β_1, β_2 fonctions servant à utiliser les tables universelles biparamétriques

N.B. Les notations et conventions propres à la première partie sont précisées au début de celle-ci.

INTRODUCTION

Une des méthodes modernes de résolution des équations de couche limite laminaire consiste à transformer les équations de Prandtl du problème considéré en une forme "universelle" où n'apparaît plus, ni dans l'équation, ni dans les conditions aux limites, la vitesse de l'écoulement extérieur par laquelle on différencie les problèmes.

Loitsianski, Saljnikov et Oka ont proposé diverses formes possibles d'équations universelles en se basant sur l'introduction d'un ensemble infini de "paramètres de forme". Toutefois, aucune justification théorique de la convergence de ces méthodes n'a été avancée jusqu'à présent.

Les idées fondamentales de l'universalisation sont reprises à propos d'un problème parabolique linéaire, poursuivant ainsi une idée proposée par J.L. Peube. On étudie ainsi le problème :

$$\begin{cases} \Delta \Psi - k \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = f & (k > 0) \\ \Psi|_{\Gamma} = 0 & \forall t \in]0, T[\\ \Psi(x, 0) = 0 & \forall x \in \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Nous démontrons : - l'existence et l'unicité de la solution du problème initial

- l'existence d'une suite de solutions approchées déduites de l'équation "universelle" et qui converge, dans un espace fonctionnel approprié, vers la solution du problème initial, lorsque le nombre des "paramètres de forme" augmente indéfiniment.

La rapidité de convergence de cette suite est mise en évidence sur quelques cas concrets.

La méthode d'universalisation est ensuite développée sur l'équation de Prandtl correspondant au cas de l'écoulement laminaire plan permanent d'un fluide à propriétés physiques constantes :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \times \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = U \cdot \frac{dU}{dx} + \nu \cdot \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

A l'instigation de V. Saljnikov, nous avons introduit à la place de

la variable longitudinale x l'ensemble des "paramètres de formes" de Loitsianski :

$$f_k = U^{k-1} \times \frac{d^k U}{dx^k} \left(\frac{\delta^{k+2}}{\nu} \right)^k$$

En choisissant comme variable transversale la variable de Görtler :

$$\eta = \frac{U \cdot y}{\sqrt{2\nu \int_0^x U(s) ds}}$$

on obtient une équation universelle qui généralise l'équation de similitude de Falkner-Skan et dont l'approximation au rang N est :

$$\frac{\partial^3 \Phi_N^*}{\partial \eta^3} + \Phi_N^* \times \frac{\partial^2 \Phi_N^*}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \times \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_N^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \frac{1}{B^2} \times \sum_{k=1}^{k=N} \theta_k \times \left[\frac{\partial \Phi_N^*}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \Phi_N^*}{\partial \eta \cdot \partial f_k} - \frac{\partial \Phi_N^*}{\partial f_k} \times \frac{\partial^2 \Phi_N^*}{\partial \eta^2} \right]$$

Suivant un conseil de V. Saljnikov nous améliorons ensuite cette représentation en introduisant la variable transversale :

$$\eta_s = \frac{U^{b/2} \cdot y}{\sqrt{a_0 \nu \int_0^x U(s)^{b-1} \cdot ds}}$$

La nouvelle équation universelle approchée au rang N a alors la forme :

$$\frac{\partial^3 \Phi_{sN}^*}{\partial \eta_s^3} + \left[\frac{f_1}{B^2} \times \left(1 - \frac{b}{2} \right) + \frac{a_0}{2} \right] \times \Phi_{sN}^* \times \frac{\partial^2 \Phi_{sN}^*}{\partial \eta_s^2} + \frac{f_1}{B^2} \times \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_{sN}^*}{\partial \eta_s} \right)^2 \right] = \frac{1}{B^2} \times \sum_{k=1}^{k=N} \theta_k \times \left[\frac{\partial \Phi_{sN}^*}{\partial \eta_s} \times \frac{\partial^2 \Phi_{sN}^*}{\partial \eta_s \cdot \partial f_k} - \frac{\partial \Phi_{sN}^*}{\partial f_k} \times \frac{\partial^2 \Phi_{sN}^*}{\partial \eta_s^2} \right]$$

Ces deux universalisations ont été résolues numériquement dans leur approximation mono et biparamétrique. Nous expliquons la structure des tables "universelles" obtenues ainsi que la manière de les utiliser dans chaque cas concret ; ce qui met en évidence l'avantage du point de vue pratique de ces deux méthodes sur l'universalisation de Loitsianski.

Pour le cas de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, les gradeurs caractéristiques de la couche limite obtenues sont comparées aux valeurs calculées par Terrill et à celles déterminées par une méthode directe de résolution réalisée à partir d'une étude de W. Walter ; en utilisant la transformation de Von Mises :

$$\eta_v = \frac{\Psi}{\nu} \quad ; \quad w = u^2 \quad ; \quad W = U^2$$

l'équation de Prandtl est alors mise sous la forme :

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \sqrt{w} \times \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_v^2} = W'$$

RAPPELS

Bien que les fluides jouent un rôle important dans le monde qui nous entoure, leur étude, malgré d'illustres prédécesseurs comme Archimède, n'est sortie de l'empirisme le plus élémentaire qu'au XVIII^e siècle, époque où des mathématiciens parmi lesquels PASCAL, NEWTON, BERNOULLI et EULER, commencèrent à énoncer les lois fondamentales qui régissent l'équilibre et le mouvement des liquides.

Au siècle suivant le développement de la balistique conduit l'Autrichien MACH à découvrir l'importance de la vitesse du son pour caractériser les différents types d'écoulement des fluides compressibles. De nos jours l'aéronautique a ouvert à la mécanique des fluides les domaines des écoulements hypersoniques et des écoulements dans les gaz raréfiés.

Le sujet de notre étude se rapporte à la théorie de la couche limite, partie de la mécanique des fluides qui est née vers 1904 avec les premiers travaux de PRANDTL et s'est ensuite considérablement développée sous l'impulsion de nombreux physiciens, comme BLASIUS, VON KARMAN, POHLHAUSEN.

Nous allons tout d'abord rappeler succinctement les bases de cette théorie, ainsi que les résultats essentiels qui nous seront utiles ; ensuite nous exposerons brièvement les grandes lignes du présent exposé.

I - VISCOSITE ET COUCHE LIMITE

1 - Fluide réel et fluide parfait

La plupart des recherches en mécanique des fluides étaient fondées sur le concept de fluide parfait, généralement incompressible et toujours sans dissipation d'énergie par frottement interne. Au sein d'un tel fluide en mouvement l'interaction entre une partie quelconque de ce fluide et le reste de la masse liquide est uniquement constituée de forces perpendiculaires à la surface de séparation comme en hydrostatique ; il y a donc glissement sans frottement. Autrement dit, un fluide parfait n'offre aucune résistance interne à un changement de forme.

Bien que l'hydrodynamique des fluides parfaits donne une représentation satisfaisante du mouvement des fluides réels dans de nombreux cas, elle tombe complètement en défaut pour rendre compte du mouvement uniforme d'un corps solide dans un milieu "infini", elle indique en effet l'absence de sillage, ce qui constitue le paradoxe de d'ALEMBERT.

Ce résultat inacceptable est expliqué par le fait que les forces de cohésion d'un fluide réel en mouvement comportent également des composantes tangentielles liées aux frottements des couches de fluides entre elles et caractérisées par la viscosité. En un point d'un fluide réel en écoulement laminaire, la loi de frottement de Newton traduit la proportionnalité entre les forces de viscosité par unité de surface, τ , et le gradient de vitesse :

$$\tau = \mu \left(\frac{dV}{dy} \right)$$

μ étant le coefficient de viscosité dynamique.

Dans le cas d'un obstacle en mouvement relatif par rapport à un fluide réel, ces forces de frottement dues à la viscosité obligent le fluide à adhérer à la paroi du corps, alors que la théorie du fluide parfait conduit à dire qu'il y a glissement sans frottement du liquide sur l'obstacle ; ce qui constitue la seconde différence fondamentale entre fluide parfait et fluide réel.

2 - Notion de couche limite

Le fait que le fluide réel adhère à la paroi d'un obstacle placé au sein d'un écoulement implique l'existence des forces de frottement dans une couche mince au voisinage de la surface du corps. Dans cette couche mince la vitesse du fluide par rapport à l'obstacle s'accroît, normalement à la paroi, de zéro au contact jusqu'à une valeur maximale qui correspond à la vitesse de l'écoulement externe non visqueux. Cette zone qui entoure l'obstacle, et où les actions de la viscosité prédominent, est appelée "couche limite dynamique" et son concept est dû à Prandtl.

L'exemple le plus simple pour étudier la couche limite est celui d'une plaque plane placée avec une incidence nulle dans un écoulement rectiligne permanent à filets parallèles (figure 0-1).

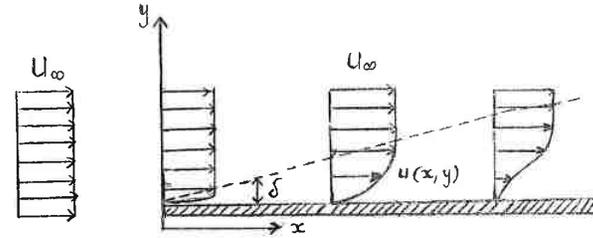


Figure (0-1)

Dans le but de simplifier l'étude mathématique on peut, comme le montre la figure ci-dessus, diviser l'écoulement en deux régions :

- la couche limite près de la paroi, dans laquelle les forces de frottement internes doivent être prises en compte et qui est le siège de la plupart des pertes d'énergie
- l'extérieur, où les forces sont petites et peuvent être négligées, et donc où le fluide suit avec une bonne approximation la théorie du fluide parfait.

Remarquons que dans certains cas, par exemple cylindre ou sphère à surface lisse, la couche limite s'épaissit considérablement le long de l'obstacle ce qui provoque un courant de retour dans la couche limite (figure 0-2) ; celui-ci en éjecte les particules de fluide ralenties. Cela signifie que la couche limite n'est plus en contact avec la paroi ; on parle alors de "détachement de la couche limite".

Ce phénomène est toujours accompagné de la formation dans le sillage de l'obstacle de tourbillons, de zones de fluide mort dans lesquelles la répartition de vitesse s'éloigne beaucoup de celle du fluide parfait ; ce qui explique la grande perte d'énergie causée par le détachement de la couche limite.

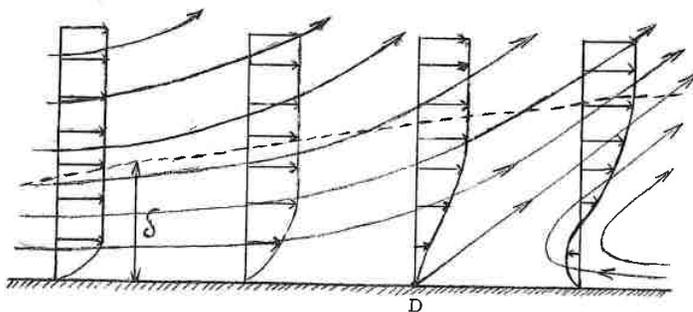


Figure (0-2)

3 - Définition des grandeurs caractéristiques de la couche limite

La définition de l'épaisseur de couche limite, δ , est d'une certaine façon arbitraire car la transition entre la vitesse dans la couche limite et celle de l'écoulement extérieur se fait asymptotiquement comme le montre la figure (0-3). Cependant cela a peu d'importance pratique car la vitesse dans la couche limite atteint une valeur qui diffère très peu de la vitesse extérieure à une faible distance de la paroi.

Il est donc possible de définir l'épaisseur de couche limite, δ , en un point de l'obstacle comme la distance de la paroi à laquelle la vitesse $u(x, y)$ ne diffère de la vitesse extérieure, $U(x)$, que de un pour cent. Remarquons que cette épaisseur est d'autant plus petite que le coefficient de viscosité cinématique, D , est plus faible et que la vitesse extérieure U est plus grande.

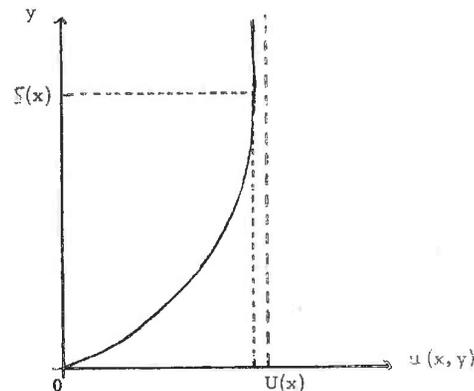


Figure (0-3)

Pour palier à cette ambiguïté on utilise souvent d'autres grandeurs, dites "caractéristiques", de la couche limite qui ont une définition mathématique, en un point de l'obstacle ; elles sont au nombre de trois :

- l'épaisseur de déplacement :

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (0-1)$$

qui signifie que le débit de fluide réel est le même que celui d'un fluide parfait en écoulement à la vitesse U lorsqu'on déplace la paroi de la distance δ^* (figure (0-4)).

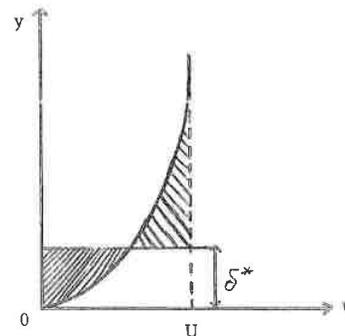


Figure (0-4)

- l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} (1 - \frac{u}{U}) dy \quad (0-2)$$

qui traduit la perte de quantité de mouvement dans la couche limite par rapport à l'écoulement du fluide parfait.

- la force de frottement à la paroi par unité de surface :

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (0-3)$$

qui traduit la composante tangentielle de la force de résistance à l'avancement et qui permet de localiser le point de décollement de la couche limite ; en effet, en ce point, le gradient de vitesse normalement à la paroi s'annule.

Remarque : ces formules ne sont applicables que pour les points de l'obstacle où la couche limite adhère à la paroi et sous réserve de la convergence des intégrales.

II - LES EQUATIONS DE COUCHE LIMITE

1 - Résultats généraux

Reynolds a mis en évidence deux types différents d'écoulement :

- le régime laminaire, où les filets de fluide restent parallèles entre eux ;
- le régime turbulent, où les particules suivent des trajectoires désordonnées qui donnent naissance à des tourbillons.

Le passage de l'un à l'autre, en fonction de la vitesse, se fait par une zone de transition mal définie ; mais pour un écoulement de fluide donné, le régime turbulent s'établit pour une valeur constante du nombre de Reynolds, $Re = \frac{VL}{\nu}$ (L étant une longueur caractéristique de l'écoulement). Nous ferons à partir de maintenant l'hypothèse implicite que nous sommes en régime laminaire.

Le mouvement le plus général d'un fluide réel quelconque est alors déterminé par la connaissance en chaque point de cinq inconnues : les trois composantes de la vitesse \vec{V} , la pression p, et la masse volumique ρ . Pour y arriver on dispose de cinq équations : les trois équations du mouvement, l'équation de conservation de la masse, et l'équation d'état donnée par la thermodynamique, $p = f(\rho)$.

La description du mouvement selon Euler, c'est-à-dire par rapport à un repère fixe, s'exprime à l'aide de :

- l'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse au cours du temps t, dans un volume élémentaire quelconque pris au sein du fluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (0-4)$$

- les équations du mouvement qui proviennent de la seconde loi de Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{\Gamma}$. Or pour un fluide en mouvement, l'analyse des actions extérieures qui s'exercent sur une masse de fluide montre qu'elles se décomposent en forces de volume, \vec{F} , (que nous supposons être dues uniquement à la pesanteur) et en forces de surface, \vec{S} que caractérise le tenseur de taux de déformation, \vec{S} . En rapportant les forces de volume à l'unité de masse de fluide et celles de surface à l'unité de surface, on obtient le résultat suivant :

$$\rho \vec{\Gamma} = \rho \vec{F} + \text{div}(\vec{S})$$

En réalité nous avons déjà vu que les forces de surface se décomposaient en forces de pression, normales aux surfaces de séparation, et en contraintes tangentielles ; on peut donc écrire :

$$\rho \vec{\Gamma} = \rho \vec{F} - \text{grad } p + \text{div}(\vec{T}) \quad (0-5)$$

où, \vec{T} , est le tenseur des contraintes de frottement.

Remarque : l'accélération en un point du fluide, $\vec{\Gamma}$, est donnée, selon Euler, par la formule suivante :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \text{ grad } \vec{V}$$

2 - Cas des fluides à propriétés physiques constantes

Nous allons nous limiter à l'étude des fluides isovolumes à viscosité constante. Dans ces conditions nous n'avons plus besoin de l'équation d'état et le mouvement de tels fluides sera déterminé par les équations de continuité et de comportement qui prennent alors les formes suivantes :

- équation de continuité :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (0-6)$$

- équation de comportement :

$$\rho \vec{\Gamma} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \mu \cdot \Delta \vec{V} \quad (0-7)$$

qui porte le nom d'"équation de Navier-Stokes".

Remarquons au passage que pour un fluide parfait cette équation se simplifie et devient :

$$\rho \vec{\Gamma} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p \quad (0-8)$$

appelée "équation d'Euler".

Considérons maintenant la relation :

$$\Delta \vec{V} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{V}) - \operatorname{Rot} (\operatorname{Rot} \vec{V}) \quad (0-9)$$

elle nous permet de distinguer deux sortes d'écoulements :

- l'écoulement irrotationnel, où en tout point la vitesse \vec{V} vérifie : $\operatorname{Rot} \vec{V} = \vec{0}$. On en déduit aisément que le champ des vitesses au sein du fluide dérive d'un potentiel, φ ; d'où son appellation d'écoulement potentiel, souvent utilisée. De plus pour un fluide incompressible, ce potentiel des vitesses est alors une fonction harmonique.

- L'écoulement rotationnel, quand le rotationnel de la vitesse n'est pas nul.

En raison de la forme prise par l'équation de continuité (0-6), la relation (0-9) devient :

$$\Delta \vec{V} = - \operatorname{Rot} (\operatorname{Rot} \vec{V})$$

ce qui nous amène à la constatation suivante : un fluide à propriétés physiques constantes, en écoulement potentiel, se comporte comme un fluide parfait.

Pour en revenir à la couche limite, cela explique la division de l'espace environnant l'obstacle en deux régions, figure (0-5) :

- la couche limite, attenante à la paroi, dans laquelle le mouvement est rotationnel ; il est donc décrit par l'équation de Navier-Stokes (0-7).

- Le reste du fluide pour lequel on peut appliquer l'équation d'Euler (0-8).

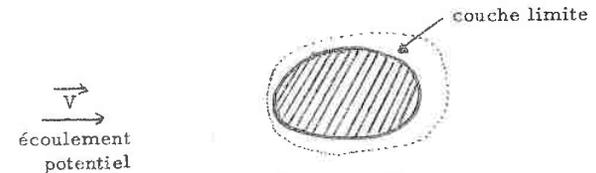


Figure (0-5)

3 - Couche limite incompressible laminaire bidimensionnelle stationnaire

Nous ne considérerons dans la suite que le cas du fluide à propriétés physiques constantes en mouvement plan permanent. De plus nous supposons que l'obstacle de forme cylindrique à faible courbure et de longueur "infinie" est placé perpendiculairement à l'écoulement.

Nous choisissons enfin un système de coordonnées locales lié à la géométrie de l'obstacle, figure (0-6) ; x est l'abscisse curviligne mesurée de long de la section droite à partir du point d'arrêt, endroit où la ligne de courant qui sépare les écoulements supérieur et inférieur frappe l'obstacle. L'axe des x est tangent à la surface et celui des y lui est perpendiculaire. On désignera par, u et v, les composantes de la vitesse par rapport à ce système.

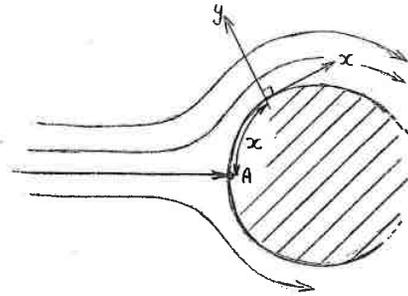


Figure (0-6)

Dans ces conditions, le rayon de courbure étant grand par rapport à l'épaisseur de couche limite, on peut assimiler en un point x le profil à une plaque plane ; l'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (0-10)$$

Dans le but de simplifier encore les équations de couche limite, Prandtl a introduit les hypothèses suivantes : sous réserve d'une faible courbure de la surface et d'une vitesse très peu défléchie dans la couche limite, on peut négliger les composantes transversales par rapport aux longitudinales, le gradient de vitesse normalement à la paroi étant prépondérant aux variations de long de l'obstacle. Cela conduit à négliger la seconde équation de Navier-Stokes et à écrire la première sous la forme :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (0-11)$$

A la frontière extérieure de la couche limite le fluide se comporte comme un fluide parfait et on peut lui appliquer l'équation de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot U^2 = C^{ste} \quad (0-12)$$

ce qui nous donne la relation :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx} \quad (0-13)$$

et l'équation de Navier-Stokes se réduit finalement à :

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (0-14)$$

appelée équation de Prandtl. L'équation de continuité conserve la forme usuelle :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (0-15)$$

Il faut joindre à cela les conditions aux limites qui traduisent l'adhérence du fluide à la paroi et le raccordement avec l'écoulement potentiel loin de la surface, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} y = 0 & u = v = 0 \\ y \rightarrow \infty & u \rightarrow U \end{cases} \quad (0-16)$$

4 - Différentes formes des équations de couche limite

Nous conserverons les hypothèses faites au paragraphe précédent et nous allons en premier lieu établir l'équation de quantité de mouvement qui se déduit de l'équation de Navier-Stokes (0-14) et de l'équation de continuité (0-15).

En prémultipliant l'équation (0-15) par u et en additionnant membre à membre avec la relation (0-14), on obtient :

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (u \cdot v)}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

or l'équation (0-15) s'écrit en la multipliant par U :

$$\frac{\partial (Uu)}{\partial x} + \frac{\partial (Uv)}{\partial y} = u \cdot \frac{dU}{dx}$$

donc en soustrayant membre à membre ces deux dernières relations :

$$\frac{\partial}{\partial x} [u \cdot (U-u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (U-u)] + (U-u) \frac{dU}{dx} = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

intégrons maintenant cette équation par rapport à y dans une section transversale de la couche limite :

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy + \frac{dU}{dx} \int_0^{\infty} (U-u) dy + [u(U-u)]_{y=0}^{y=\infty} = \nu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}^{y=\infty}$$

et en tenant compte des conditions aux limites (0-16), il vient :

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy + \frac{dU}{dx} \int_0^{\infty} (U-u) dy = \nu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0}$$

introduisons pour finir les grandeurs caractéristiques de la couche limite définies par les formules (0-1), (0-2) et (0-3), soit :

$$U \delta^* = \int_0^{\infty} (U-u) dy \quad U^2 \delta^{**} = \int_0^{\infty} u(U-u) dy \quad \zeta_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

on obtient donc :

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta^{**}) + U \delta^* \cdot \frac{dU}{dx} = \frac{\zeta_0}{\rho}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{U} \cdot \frac{dU}{dx} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\zeta_0}{\rho U^2} \quad (0-17)$$

On introduit généralement le facteur de forme de la couche limite, H, défini par :

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad (0-18)$$

l'équation de quantité de mouvement prend alors la forme :

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + (2+H) \frac{\delta^{**}}{U} \cdot \frac{dU}{dx} = \frac{\zeta_0}{\rho U^2} \quad (0-19)$$

Les équations de couche limite, (0-14) et (0-15) peuvent être réduites à une équation unique, en intégrant l'équation de continuité (0-15) ; pour cela on introduit la fonction de courant, Ψ , définie par :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (0-20)$$

et l'équation de Navier - Stokes devient :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = U \cdot \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (0-21)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} y = 0 & \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \\ y \rightarrow \infty & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow U \end{cases} \quad (0-22)$$

En résumé les équations de la couche limite incompressible, laminaire plane, permanente peuvent s'écrire :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \cdot \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (0-14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (0-15)$$

$$\begin{cases} y = 0 & u = v = 0 \\ y \rightarrow \infty & u \rightarrow U \end{cases} \quad (0-16)$$

ou :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = U \cdot \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \quad (0-21)$$

$$\begin{cases} y = 0 & \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \\ y \rightarrow \infty & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow U \end{cases} \quad (0-22)$$

Remarque : pour résoudre ces équations, il faut également ajouter une condition initiale du type :

$$x = x_0 \quad u = u_0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}$$

III - UNIVERSALISATION DES EQUATIONS DE COUCHE LIMITE

Après l'introduction par L. Prandtl de la notion de couche limite et des hypothèses simplificatrices qui ont conduit aux équations que nous venons de rappeler, de nombreux mécaniciens ont développé des méthodes numériques pour les résoudre dans les cas où la solution mathématique exacte n'était pas connue ; citons entre autres : H. Blasius, Th. Von Karman, K. Pohlhausen, V.M. Falkner, S.W. Skan, D.R. Hartree, A. Walz, L. Howarth... dont on peut trouver une synthèse des travaux dans l'ouvrage de H. Schlichting [1] .

Bien que chaque nouvelle méthode constituait une amélioration, c'est au cours des quinze dernières années que les plus grands progrès ont été réalisés, tant en ce qui concerne les idées sur la résolution des équations de couche limite que l'étude des problèmes concrets d'une manière aussi simple et exacte que possible. C'est en effet à partir de 1957, date de la publication des travaux de H. Görtler [2] , que les méthodes d'obtention de solutions universelles des différents problèmes de couche limite se sont considérablement développés. (Voir les ouvrages de V. Saljnikov [3] et L.G. Loitsianski [4]).

Comme il apparaît dans les équations (0-14), (0-19) ou (0-21), les problèmes de couche limite se différencient essentiellement par la vitesse de l'écoulement potentiel extérieur U . Une des méthodes modernes de résolution des équations de couche limite laminaire consiste donc à transformer les équations fondamentales de l'écoulement considéré en une forme, dite "universelle", qui ne contient plus ni dans les équations, ni dans les conditions aux limites la vitesse U .

Une série d'auteurs, parmi lesquels V.Y. Chkadov [5] , L.G. Loitsianski [6] , V. Saljnikov - S. Oka [7] , ont déjà proposé des formes possibles d'universalisation en se basant sur l'introduction de différents paramètres de forme à la place de la variable longitudinale x .

Nous développons l'étude mathématique des problèmes posés par cette méthode dans la première partie. Devant la complexité des équations de couche limite qui rend non aisé pour le moment l'étude directe de leur universalisation, nous avons été amené à considérer un problème d'évolution plus simple, suivant ainsi une idée de J.L. Peube.

Nous avons choisi à l'instigation de V. Saljnikov, une universalisation à l'aide des paramètres de forme de Loitsianski, La seconde partie est consacrée, après avoir présenté l'origine et quelques propriétés de ces paramètres, à l'obtention et à la résolution numérique des équations universelles qui découlent de choix différents de la variable transversale.

Pour le cas d'un obstacle cylindrique de section droite circulaire, nous comparons les résultats obtenus par ces méthodes universelles à ceux d'une méthode directe de calcul et à la solution de R.M. Terrill [8] considérée comme exacte.

PREMIERE PARTIE

ETUDE DE LA METHODE D'UNIVERSALISATION
SUR UN EXEMPLE

Pour les problèmes de couche limite laminaire plane, la méthode d'universalisation consiste à mettre les équations du problème considéré sous une forme universelle qui ne contient plus ni dans l'équation, ni dans les conditions la vitesse de l'écoulement à la frontière extérieure de la couche limite, U , par laquelle on différencie les écoulements. On substitue, pour cela, à la variable longitudinale x , un ensemble de N paramètres de formes qui seront précisés ultérieurement.

De nombreuses questions se posent alors :

- existence et unicité de la solution du problème universalisé
- convergence de sa solution vers celle du problème de départ quand le nombre de paramètres N tend vers l'infini.
- Qualité de l'approximation obtenue pour un rang N donné.

Ces problèmes sont à l'étude mais nécessitent des résultats d'analyse fonctionnelle très délicats concernant les problèmes paraboliques non linéaires. C'est pourquoi, suivant une idée de J. L. Peube, nous allons développer les principes de cette méthode sur un problème parabolique linéaire du même type.

Dans la première section nous étudierons les problèmes mathématiques posés par l'universalisation de l'exemple choisi. Ensuite, dans la seconde section, nous appliquerons la méthode sur un cas concret et nous comparerons les résultats obtenus par universalisation à ceux de la solution exacte.

I - ETUDE THEORIQUE DE L'UNIVERSALISATION

Après avoir introduit un problème d'évolution à partir des équations de couche limite, nous démontrerons l'existence et l'unicité de sa solution ; ensuite, nous procéderons à son universalisation et nous étudierons la convergence de la solution universelle approchée vers sa solution exacte.

1 - Choix de l'exemple

Pour un fluide à propriétés physiques constantes en mouvement plan permanent autour d'un obstacle, les équations de la couche limite laminaire se réduisent avec les hypothèses de Prandtl à la première équation de Navier - Stokes

$$u \times \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = U \cdot \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (0-14)$$

avec les conditions :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (0-15)$$

$$\begin{cases} y = 0 & u = v = 0 \\ y \rightarrow \infty & u \rightarrow U \\ x = x_0 & u = u_0 \end{cases} \quad (0-16)$$

Dans l'équation (0-14) les termes du second membre fixent la nature de l'équation. Il s'agit donc d'un problème parabolique pour la vitesse u par rapport à la variable transversale y, la non-linéarité provenant du premier membre.

En écrivant l'équation (0-14) sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{v}{\nu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{\nu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{U}{\nu} \cdot \frac{dU}{dx}$$

nous avons été amené à considérer l'équation parabolique linéaire :

$$\Delta \varphi - k \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f \quad (k > 0) \quad (1-1)$$

où la variable t joue le même rôle que la variable longitudinale x de (0-14) la fonction f, qui correspond au terme $-\frac{U}{\nu} \cdot \frac{dU}{dx}$, sera donc supposé fonction de la seule variable t.

Nous avons introduit un ensemble de conditions initiales et aux limites et nous considérerons finalement le problème d'évolution du premier ordre en t suivant :

$$I \begin{cases} (1-1) & \Delta \varphi - k \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f \quad (k > 0) \\ (1-2) & \varphi|_{\Gamma} = 0 \quad \forall t \in]0, T[\\ (1-3) & \varphi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

où, Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière Γ et φ est une fonction définie dans le cylindre $\Omega \times]0, T[$ et à valeur dans \mathbb{R} .

Nous faisons de plus l'hypothèse suivante sur la fonction f :

$$(1-4) \quad f \in \mathcal{D} (]0, T[)$$

2 - Rappels d'analyse fonctionnelle - Notations

Soit Ω un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , nous définissons les espaces fonctionnels suivants :

- $\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables à support compact contenu dans Ω .
- $L^2(\Omega)$: espace des classes de fonctions réelles définies sur Ω et de carré sommable pour la mesure de Lebesgue dx, si on le munit du produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx$$

$L^2(\Omega)$ a alors une structure d'espace de Hilbert, on définit la norme associée par :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(f, f)_{L^2(\Omega)}} = \left[\int_{\Omega} f^2(x) dx \right]^{1/2}$$

- espace de Sobolev $H^1(\Omega)$: espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées d'ordre 1, prises au sens des distributions sont dans $L^2(\Omega)$.

Soit j un multi-indice, c'est-à-dire un élément de \mathbb{N}^n :

$$j = (j_1, j_2, \dots, j_n), \text{ d'ordre ou de longueur : } |j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$$

nous désignons alors par D^j l'opérateur de dérivation :

$$D^j = D_1^{j_1} \times D_2^{j_2} \times \dots \times D_n^{j_n} \quad \text{où } D_i^{j_i} = \frac{\partial^{j_i}}{\partial x_i^{j_i}}$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \sum_{|j| \leq 1} (u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v)_{L^2(\Omega)}$$

ce produit scalaire confère à $H^1(\Omega)$ une structure d'espace de Hilbert

- $H_0^1(\Omega)$: adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$

- $L^2(0, T; X)$: espace des fonctions $t \rightarrow u(t)$, mesurables, de $]0, T[$ à valeurs dans X , espace de Banach, et telles que :

$$\|u\|_{L^2(0, T; X)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{soit fini}$$

- $W(0, T; X)$ espace des fonctions de $L^2(0, T; X)$ dont les dérivées d'ordre 1 au sens des distributions sont dans $L^2(0, T; X')$. (X' désignant l'espace dual de X).

Afin de simplifier l'écriture des formules, nous utiliserons les notations suivantes pour les espaces fonctionnels, leur produit scalaire et leur norme :

$$\begin{aligned} - H &= L^2(\Omega) & ; & (\cdot, \cdot)_H & ; & \|\cdot\|_H \\ - V &= H_0^1(\Omega) & ; & (\cdot, \cdot)_V & ; & \|\cdot\|_V \\ - LV &= L^2(0, T; V) & ; & (\cdot, \cdot)_{LV} & ; & \|\cdot\|_{LV} \\ - W &= W(0, T; V) & ; & (\cdot, \cdot)_W & ; & \|\cdot\|_W \end{aligned}$$

3 - Existence et unicité de la solution du problème I

Nous allons utiliser à cette fin un théorème classique des problèmes d'évolution [9] dont nous nous contenterons de vérifier les hypothèses.

a - Théorème

Soient deux espaces de Hilbert séparables, V et H , tels qu'il existe une injection continue de V dans H et que V soit dense dans H .

Pour tout $t \in]0, T[$, T fini, soit $a(t; u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$, satisfaisant aux hypothèses suivantes :

- (i) l'application : $t \rightarrow a(t; u, v)$ est mesurable, $\forall u$ et $\forall v \in V$
- (ii) $\exists M$ indépendante de t telle que :

$$|a(t; u, v)| \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V \quad \text{p.p } t \in [0, T], \quad \forall u, \forall v \in V$$

- (iii) $\exists \alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\operatorname{Re} [a(t; v, v)] + \lambda \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{p.p } t \in [0, T], \quad \forall v \in V$$

Sous ces hypothèses on définit ainsi une famille d'opérateurs, $A(t)$, de V dans V' , tels que :

$$\langle A(t).u, v \rangle_{V'V} = a(t; u, v) \quad \forall A(t) \in \mathcal{L}(V, V')$$

(où, le symbole $\langle \dots \rangle$ désigne la dualité entre V et V')

et le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in L^2(0, T; V) \text{ telle que :} \\ u' \in L^2(0, T; V'), \text{ et} \\ u'(t) + A(t) \cdot u(t) = g(t) \quad \text{p.p } t \in [0, T] \text{ dans } V', \text{ avec } g \in L^2(0, T; V') \\ u(0) = u_0 \quad u_0 \in H; \end{array} \right.$$

admet alors une solution unique.

b - Application au problème I

Si nous prenons pour V et H les deux espaces de Hilbert correspondant aux notations du paragraphe précédent : $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$, on sait, en raison de la relation : $\|u\|_H \leq \|u\|_V \quad \forall u \in V$, que l'injection de V dans H est continue. De plus V est dense dans H , puisque par définition $H_0^1(\Omega)$ contient $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est dense dans $L^2(\Omega)$.

Nous choisissons la forme suivante :

$$(1-5) \quad a(t; u, v) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (D_i u, D_i v)_H \quad \forall u, \forall v \in V$$

d'après les propriétés du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, il est évident que ceci définit une forme bilinéaire sur $V \times V$; de plus étant indépendante du temps t , elle est mesurable par rapport à t pour tout u et v appartenant à V .

Afin de démontrer la continuité de cette forme, nous partons de sa définition (1-5) et en prenant les modules de chaque membre, on obtient :

$$|a(t; u, v)| = \frac{1}{k} \left| \sum_{i=1}^{i=n} (D_i u, D_i v)_H \right| \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{i=n} |(D_i u, D_i v)_H|$$

appliquons l'inégalité de Schwarz dans H, au second membre :

$$|a(t; u, v)| \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{i=n} \|D_i u\|_{H^*} \|D_i v\|_H$$

et en ajoutant à droite le terme positif : $\|u\|_{H^*} \|v\|_H$:

$$|a(t; u, v)| \leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{i=n} \|D_i u\|_{H^*} \|D_i v\|_H$$

Appliquons maintenant au second membre l'inégalité de Schwarz correspondant à la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{n+1} :

$$|a(t; u, v)| \leq \frac{1}{k} \left[\sum_{i=0}^{i=n} \|D_i u\|_H^2 \right]^{1/2} \times \left[\sum_{i=0}^{i=n} \|D_i v\|_H^2 \right]^{1/2}$$

la norme de H_0^1 étant la même que celle de $H^1(\Omega)$, on obtient :

$$(1-6) \quad |a(t; u, v)| \leq \frac{1}{k} \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, \forall v \in V$$

ce qui démontre la continuité de la forme $a(t; u, v)$.

Il reste à vérifier la troisième hypothèse (iii) ; en partant une nouvelle fois de la définition (1-5), nous obtenons la relation :

$$|a(t; v, v)| = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{i=n} \|D_i v\|_H^2 \quad \forall v \in V$$

or les normes dans V et H sont reliées par :

$$\|v\|_V^2 = \|v\|_H^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \|D_i v\|_H^2$$

donc :

$$(1-7) \quad |a(t; v, v)| + \frac{1}{k} \|v\|_H^2 = \frac{1}{k} \|v\|_V^2$$

Il suffit de prendre $\lambda = \frac{1}{k}$ et $0 < \alpha < \frac{1}{k}$ pour vérifier l'hypothèse (iii).

Posons : (1-8) $g = -\frac{1}{k} \cdot f$

Comme f appartient par hypothèse à $\mathcal{D}([0, T])$, on en déduit que g est dans l'espace $L^2(0, T; V')$. On peut donc appliquer le théorème énoncé ci-dessus :

Pour toute fonction f donnée de $\mathcal{D}([0, T])$, il existe une fonction unique, w, dans $L^2(0, T; V)$, telle que :

$$I' \begin{cases} (i) & w' \in L^2(0, T; V') \\ (ii) & w'(t) + A(t) \cdot w(t) = -\frac{1}{k} f(t) \text{ p.p pour } t \in]0, T[\text{ dans } V' \\ (iii) & w(0) = 0 \end{cases}$$

En utilisant la formulation variationnelle de (ii), soit :

$$(ii)' \quad \langle w', v \rangle + a(t; w, v) = -\frac{1}{k} \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$$

et en prenant pour v une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$, on démontre dans [10], en tenant compte du fait que la trace de w est nulle (c'est-à-dire $w|_{\Gamma} = 0$ $\forall t \in]0, T[$), que la solution de I' est la solution du problème de Dirichlet :

$$(1-9) \quad I'' \begin{cases} w' - \frac{1}{k} \cdot \Delta w = -\frac{1}{k} f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ w|_{\Sigma} = 0 \quad (\Sigma : \text{frontière latérale du cylindre } \Omega \times]0, T[) \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc démontré que le problème I avait une solution unique, φ , dans l'espace $W(0, T; V)$.

4 - Universalisation du problème I

Au paragraphe précédent nous avons mis en parallèle le problème d'évolution I avec l'équation de couche limite (0-14) en faisant correspondre la variable t à la variable longitudinale x, la fonction f jouant le même rôle que le terme $-\frac{U}{\nu} \frac{dU}{dx}$.

Par analogie avec les principes énoncés dans l'introduction de cette partie, nous allons universaliser le problème I en le transformant de

façon à faire disparaître la fonction f , qui différencie les problèmes d'évolutions du type I, de l'équation (1-1). Pour y parvenir, on est amené à remplacer la variable de temps, t , par un ensemble de paramètres, p_i , en définissant une application, P_M , de l'ouvert $]0, T[$ dans \mathbb{R}^{M+1} :

$$(1-10) \quad t \longrightarrow P_M(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_M(t))$$

Nous allons également associer à f une application, F , de \mathbb{R}^{M+1} dans \mathbb{R} et à la fonction φ une application, Φ , de $\Omega \times \mathbb{R}^{M+1}$ dans \mathbb{R} , telles que :

$$(1-11) \quad \begin{cases} F(P_M(t)) \equiv f(t) & \forall t \in]0, T[\\ \Phi(x, P_M(t)) \equiv \varphi(x, t) & \forall x \in \Omega; \forall t \in]0, T[\end{cases}$$

Avec la formule de différentiation :

$$(1-12) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=0}^M \frac{dp_i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} = \sum_{i=0}^M p'_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

nous pouvons effectuer le changement de variable (1-10) dans le problème I.

$$I \quad \begin{cases} (1-1) & \Delta \varphi - k \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f \quad (k > 0) \\ (1-2) & \varphi/\Gamma = 0 \quad \forall t \in]0, T[\\ (1-3) & \varphi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

qui s'écrit alors :

$$I_a \quad \begin{cases} (1-13) & \Delta \Phi - k \sum_{i=0}^M p'_i \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = F \\ (1-14) & \Phi/\Gamma = 0 \quad \forall P_M(t) \text{ correspondant à } t \in]0, T[\\ (1-15) & \Phi(x, P_M(0)) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Nous allons maintenant caractériser les paramètres p_i en les définissant à l'aide de la fonction f et de ses dérivées :

$$(1-16) \quad p_i = f^{(i)} \quad \text{pour } i = 0 \text{ à } M$$

ce qui a un sens du fait de l'appartenance de f à l'espace $\mathcal{D} (]0, T[)$. L'application P_M est donc continue et l'image de l'ouvert $]0, T[$ est un arc de courbe ouvert dans \mathbb{R}^{M+1} , \mathcal{P} .

D'après (1-11), on en déduit que :

$$(1-17) \quad F \equiv p_0$$

De plus, en calculant la dérivée des paramètres p_i on voit apparaître la relation de récurrence suivante :

$$(1-18) \quad p'_i = p_{i+1} \quad \text{pour } i = 0 \text{ à } M-1$$

On remarque que p'_M ne peut pas être définie par cette relation.

En utilisant ces derniers résultats, nous pouvons mettre le problème sous la forme équivalente :

$$I_b \quad \begin{cases} (1-19) & \Delta \Phi - k \sum_{i=0}^{M-1} p'_{i+1} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} - k p'_M \frac{\partial \Phi}{\partial p_M} = p_0 \\ (1-14) & \Phi/\Gamma = 0 \quad \forall P_M \in \mathcal{P} \\ (1-15) & \Phi(x, P_M(0)) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Le principe de l'universalisation est alors de remplacer le problème I_b par un problème approché, II, obtenu en introduisant le paramètre supplémentaire, p_{M+1} , défini par :

$$(1-20) \quad p_{M+1} = f^{(M+1)}$$

Son écriture se déduit de celle de I_b , nous allons donc désigner par, Φ^* , la fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^{M+2}$ à valeurs dans \mathbb{R} correspondant à Φ ; de même P_M^* sera l'application de $]0, T[$ dans \mathbb{R}^{M+2} , \mathcal{P}^* étant l'arc de courbe, image de l'ouvert $]0, T[$.

Nous allons donc remplacer la résolution du problème I par celle du problème II qui représente son universalisation approchée au rang M :

$$II \quad \begin{cases} (1-21) & \Delta \Phi^* - k \sum_{j=0}^M p'_{j+1} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p_j} = p_0 \\ (1-22) & \Phi^*/\Gamma = 0 \quad \forall P_M^* \in \mathcal{P}^* \\ (1-23) & \Phi^*(x, P_M^*(0)) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

En effet, l'équation (1-21) n'est pas équivalente à l'équation (1-19) puisqu'elle dépend d'un paramètre de plus. On ne peut donc espérer avoir coïncidence de la solution du problème II avec celle de I_b que lorsqu'on fera tendre M vers l'infini, le paramètre supplémentaire p_{M+1} disparaissant alors. Ce n'est donc que lorsque nous introduisons un nombre infini de paramètres p_i que nous pouvons parler d'universalisation du problème I, c'est pourquoi nous désignons le problème II comme une approximation au rang M de l'universalisation de I.

Nous allons chercher la solution du problème II sous la forme d'un développement en fonction des paramètres p_i :

$$(1-24) \quad \Phi_{(M+1)}^* = \sum_{i=0}^{i=M+1} p_i \cdot \Phi_i^*$$

(Nous montrerons, au paragraphe suivant, la convergence de $\Phi_{(M+1)}^*$ vers la solution Φ du problème I_b).

Nous pouvons tout de suite remarquer, d'après l'hypothèse faite sur la fonction f , (1-4), et la définition des paramètres p_i , (1-6) et (1-20), que ces derniers vérifient :

$$(1-25) \quad p_i(0) = 0 \quad \text{pour } i = 0 \text{ à } M+1$$

nous pouvons donc en déduire que :

$$\Phi_{(M+1)}^*(x, p_M^*(0)) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

d'après sa forme particulière, (1-24), la solution du problème II, $\Phi_{(M+1)}^*$ vérifie implicitement la condition initiale (1-23).

Nous allons maintenant déterminer les fonctions Φ_i^* , de la seule variable x , en tenant compte de la condition au contour (1-22) qui doit être vérifiée par la solution $\Phi_{(M+1)}^*$, nous devons donc avoir :

$$\sum_{i=0}^{i=M+1} p_i \cdot \Phi_{i/T}^* = 0 \quad \forall t \in]0, T[$$

c'est à dire :

$$(1-26) \quad \Phi_{i/T}^* = 0 \quad \text{pour } i = 0 \text{ à } M+1$$

en reportant le développement (1-24) dans l'équation (1-21) et en identifiant les coefficients des paramètres de même indice des deux membres, on obtient :

$$\begin{cases} \Delta \Phi_0^* = 1 \\ \Delta \Phi_1^* = k \Phi_0^* \\ \dots \\ \Delta \Phi_{M+1}^* = k \Phi_M^* \end{cases}$$

Les fonctions Φ_i^* du développement (1-24) seront donc définies par la résolution successive des problèmes elliptiques suivants :

$$(1-27) \quad \begin{cases} \begin{cases} \Delta \Phi_0^* = 1 \\ \Phi_{0/T}^* = 0 \end{cases} & \text{sur } (\Omega) \\ \begin{cases} \Delta \Phi_1^* = k \cdot \Phi_0^* \\ \Phi_{1/T}^* = 0 \end{cases} & \text{sur } (\Omega) \\ \dots \\ \begin{cases} \Delta \Phi_{M+1}^* = k \Phi_M^* \\ \Phi_{M+1/T}^* = 0 \end{cases} & \text{sur } (\Omega) \end{cases}$$

Etant indépendantes de f , ces fonctions Φ_i^* pourront donc être déterminées une fois pour toutes pour la classe des problèmes d'évolution du type I ; c'est pourquoi on les appelle "fonctions universelles de I". De plus, si, dans la plupart des cas concrets, les fonctions f sont lentement variables, on pourra à juste titre ne calculer que les premières.

Du point de vue pratique, on limitera le développement (1-24) à un certain ordre pour une fonction f donnée, et il suffira alors de calculer les paramètres p_i à l'aide de (1-16) et de reporter les résultats dans l'expression de $\Phi_{(M+1)}^*$, (1-24), pour obtenir une solution universelle approchée du problème considéré, dont la qualité dépendra de la rapidité de convergence de la série (1-24). On peut d'ailleurs remarquer que le premier terme de $\Phi_{(M+1)}^*$, $p_0 \Phi_0^*$, tient déjà compte de la fonction f , ce qui n'est pas le cas

lorsqu'on prend en première approximation la solution du problème sans second membre.

Il est évident que la validité de cette méthode repose sur la convergence de la série (1-24), c'est à dire de la solution du problème II, vers la solution, φ , du problème I, quand M tend vers l'infini. C'est ce que nous allons démontrer.

5 - Convergence de la solution universelle approchée vers la solution exacte

Nous allons d'abord étudier la convergence de la suite des fonctions Φ_m^* qui apparaissent dans la solution du problème II; ensuite nous montrerons la convergence de la série de somme partielle $\Phi_{(M+1)}^*$ et pour terminer nous établirons que sa limite n'est autre que la solution du problème I, φ .

a - Convergence de la suite Φ_m^*

Les fonctions Φ_m^* sont définies par la résolution successive des problèmes au contour dans Ω , (1-27). Or on démontre dans [10] que le problème de Dirichlet non homogène :

$$(1-28) \quad \begin{cases} \Delta u = g & g \in H = L^2(\Omega) \\ u|_{\Gamma} = 0 & \text{sur } \Omega \text{ borné et régulier} \end{cases}$$

admet une solution unique dans l'espace $V = H_0^1(\Omega)$; on en déduit donc que les fonctions Φ_m^* existent et sont uniques dans cet espace fonctionnel.

Afin de simplifier un peu les calculs, nous considérerons que l'ouvert Ω est contenu dans l'hypercube $(]0,1[)^n$ et que le coefficient k a la valeur 1.

Soit le problème au contour dans Ω :

$$(1-29) \quad \begin{cases} \Delta \Phi_m^* = \Phi_{m-1}^* & \Phi_m^* \text{ et } \Phi_{m-1}^* \in V \\ \Phi_m^*|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

multiplions les deux membres de l'équation par Φ_m^* et intégrons sur Ω (ce qui prend un sens pour $\Phi_{m-1}^* \in V$) :

$$\int_{\Omega} \Phi_m^*(u) \Delta \Phi_m^*(u) du = \int_{\Omega} \Phi_{m-1}^*(u) \cdot \Phi_m^*(u) du$$

en développant le Laplacien du premier membre et en utilisant le fait que V est dense dans H, ce qui permet d'introduire le produit scalaire dans H au second membre, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{\Omega} \Phi_m^*(u) \cdot D_i^2 \Phi_m^*(u) \cdot du = (\Phi_{m-1}^*, \Phi_m^*)_H$$

intégrons par parties l'intégrale du premier membre

$$\int_{\Omega} \Phi_m^*(u) \cdot D_i^2 \Phi_m^*(u) \cdot du = \left[\Phi_m^* \cdot D_i \Phi_m^* \right]_{\Gamma} - \int_{\Omega} (D_i \Phi_m^*)^2(u) du$$

la condition au contour annule le premier terme et on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{\Omega} \left[D_i \Phi_m^* \right]^2(u) du = - (\Phi_{m-1}^*, \Phi_m^*)_H$$

en introduisant la norme dans H au premier membre et en majorant le second membre à l'aide de l'inégalité de Schwarz dans H :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \Phi_m^*\|_H^2 \leq \| \Phi_{m-1}^* \|_H \times \| \Phi_m^* \|_H$$

soit en majorant encore le second membre :

$$(1-30) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \Phi_m^*\|_H^2 \leq \frac{1}{2} (\| \Phi_{m-1}^* \|_H^2 + \| \Phi_m^* \|_H^2)$$

Nous allons établir une autre inégalité en partant de la relation :

$$\Phi_m^*(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_j} D_j \Phi_m^*(x_1, \dots, v_j, \dots, x_n) dv_j \quad \forall j, j=1 \text{ à } n$$

en appliquant l'inégalité de Schwarz au second membre et en élevant le résultat au carré :

$$\Phi_m^{*2} \leq x_j \times \int_0^{x_j} \left[D_j \Phi_m^* \right]^2(x_1, \dots, v_j, \dots, x_n) dv_j$$

intégrons les deux membres sur Ω :

$$\int_{\Omega} \Phi_m^{*2} (u) du \leq \int_0^{x_j} x_j dx_j \times \int_{\Omega} [D_j \Phi_m^*]^2 (u) du$$

en introduisant la norme dans H et en majorant le second membre en tenant compte de l'hypothèse faite sur Ω , on obtient :

$$(1-31) \quad \|\Phi_m^*\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \times \|D_j \Phi_m^*\|_H^2 \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } n$$

En minorant le premier membre de (1-30) à l'aide de la relation ci-dessus on arrive à :

$$2 \|\Phi_m^*\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \times (\|\Phi_{m-1}^*\|_H^2 + \|\Phi_m^*\|_H^2)$$

c'est-à-dire :

$$(1-32) \quad \|\Phi_m^*\|_H^2 \leq \frac{1}{3} \times \|\Phi_{m-1}^*\|_H^2$$

En majorant le second membre de (1-30) avec l'inégalité (1-32), on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \Phi_m^*\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \times (\|\Phi_{m-1}^*\|_H^2 + \frac{1}{3} \|\Phi_{m-1}^*\|_H^2) = \frac{2}{3} \times \|\Phi_{m-1}^*\|_H^2$$

et en utilisant la relation (1-31) à l'ordre m-1, on obtient :

$$(1-33) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \Phi_m^*\|_H^2 \leq \frac{1}{3} \times \|D_j \Phi_{m-1}^*\|_H^2 \quad \forall j, j = 1 \text{ à } n$$

Ajoutons membre à membre les inégalités (1-32) et (1-33) :

$$\|\Phi_m^*\|_H^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \Phi_m^*\|_H^2 \leq \frac{1}{3} \times (\|\Phi_{m-1}^*\|_H^2 + \|D_j \Phi_{m-1}^*\|_H^2)$$

en majorant le second membre, on arrive à :

$$\|\Phi_m^*\|_H^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \Phi_m^*\|_H^2 \leq \frac{1}{3} \times (\|\Phi_{m-1}^*\|_H^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \Phi_{m-1}^*\|_H^2)$$

donc en introduisant la norme dans V :

$$(1-34) \quad \|\Phi_m^*\|_V^2 \leq \frac{1}{3} \times \|\Phi_{m-1}^*\|_V^2$$

cette relation traduit la convergence uniforme de la suite Φ_m^* vers 0 dans l'espace V.

b - Convergence de la série Θ_m^*

Nous rappelons que nous cherchons la solution du problème II, c'est-à-dire de l'universalisation approchée au rang M du problème I, sous la forme de la somme partielle d'une série, $\Phi_{(M+1)}^*$:

$$(1-24) \quad \Phi_{(M+1)}^* = \sum_{m=0}^{m=M+1} p_m \times \Phi_m^*$$

Désignons par Θ_m^* le terme général de cette série :

$$(1-35) \quad \Theta_m^* = p_m \times \Phi_m^*$$

en calculant la norme dans V des deux membres, on obtient :

$$\|\Theta_m^*\|_V^2 = p_m^2 \times \|\Phi_m^*\|_V^2$$

comme par hypothèse la fonction f appartient à $\mathfrak{D}]0, T[$ et que par leur définition les paramètres p_i sont liés aux dérivées de f , (1-16) et (1-20), on en déduit qu'il existe une constante positive L telle que :

$$(1-36) \quad \|p_m\|_{\infty} \leq L \quad \forall m, m \in \mathbb{N}$$

donc en intégrant l'égalité précédente par rapport à la variable t, après majoration du second membre par (1-36), on arrive à :

$$\int_0^T \|\Theta_m^*\|_V^2 (t) dt \leq L^2 \cdot T \cdot \|\Phi_m^*\|_V^2$$

En raison de la convergence uniforme de la suite Φ_m^* vers 0 dans V on peut donc dire que l'intégrale du premier membre sera finie pour tout m, ce qui nous permet d'affirmer que le terme général de la série, Θ_m^* , appartient à l'espace $L^2(0, T; V)$; donc :

$$(1-37) \quad \|\Theta_m^*\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq L^2 \cdot T \cdot \|\Phi_m^*\|_V^2 \quad \forall m, m \in \mathbb{N}$$

Calculons dans $L^2(0, T; V)$ la norme de $\Phi_{(M+1)}^*$ et en utilisant l'inégalité triangulaire dans cet espace, on obtient :

$$\|\Phi_{(M+1)}^*\|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq \sum_{m=0}^{m=M+1} \|\Theta_m^*\|_{L^2(0, T; V)}^2$$

donc, avec (1-37) :

$$\|\Phi_{(M+1)}^*\|_{LV}^2 \leq L^2 \times T \times \sum_{m=0}^{m=M+1} \|\Phi_m^*\|_V^2$$

soit, en utilisant la relation (1-34) au second membre :

$$\|\Phi_{(M+1)}^*\|_{LV}^2 \leq L^2 \times T \times \|\Phi_0^*\|_V^2 \times \sum_{m=0}^{m=M+1} \left(\frac{1}{3}\right)^m$$

et en majorant la somme partielle de la série géométrique :

$$(1-38) \quad \|\Phi_{(M+1)}^*\|_{LV}^2 \leq \frac{3}{2} \times L^2 \times T \times \|\Phi_0^*\|_V^2 \quad \forall M, M \in \mathbb{N}$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série, de terme général $(\mathbb{H})_m^*$ dans l'espace LV, mais il reste à démontrer que la limite de $\Phi_{(M+1)}^*$ quand M tend vers l'infini est la solution ψ du problème I.

c - Convergence de la solution approchée, $\Phi_{(M+1)}^*$ vers la solution exacte, ψ

Nous pouvons considérer l'équation :

$$(1-21) \quad \Delta \Phi^* - k \cdot \sum_{j=0}^{j=M} p_{j+1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p_j} = p_0$$

où, $\Phi^* = \Phi^*(x, p_0, p_1, \dots, p_M, p_{M+1})$, comme une équation dépendant de M+2 paramètres p_j .

En utilisant une transformation, \tilde{P}_{M-1} , analogue à P_M , (1-10), on peut définir la fonction $\tilde{\Phi}$:

$$(1-39) \quad \tilde{\Phi}(x, t, p_M, p_{M+1}) = \Phi^*(x, p_0, \dots, p_{M+1}) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\forall t \in]0, T[$$

et à l'aide de la formule de différentiation correspondante à \tilde{P}_{M-1} :

$$(1-12)' \quad \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{j=0}^{j=M-1} p'_j \times \frac{\partial}{\partial p_j} = \sum_{j=0}^{j=M-1} p_{j+1} \times \frac{\partial}{\partial p'_j}$$

on peut mettre l'équation (1-21) sous la forme équivalente :

$$(1-40) \quad \Delta \tilde{\Phi} - k \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - k p_{M+1} \frac{\partial \tilde{\Phi}^*}{\partial p_M} = f$$

Or la solution, $\Phi_{(M+1)}^*$, du problème II vérifie :

$$\frac{\partial \Phi_{(M+1)}^*}{\partial p'_M} = \Phi_M^* \quad \text{d'après (1-24)}$$

donc la solution correspondante, $\tilde{\Phi}_{(M+1)}$, du problème Π_a obtenu à partir de II par la transformation \tilde{P}_{M-1} vérifie l'équation :

$$(1-41) \quad \Delta \tilde{\Phi}_{(M+1)} - k \frac{\partial \tilde{\Phi}_{(M+1)}}{\partial t} = f + k \times p_{M+1} \times \Phi_M^*$$

Nous rappelons que le problème I de départ à la forme :

$$I \quad \begin{cases} (1-1) & \Delta \psi - k \frac{\partial \psi}{\partial t} = f \quad (k > 0) \\ (1-2) & \psi/\Gamma = 0 \quad \forall t \in]0, T[\\ (1-3) & \psi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Introduisons la fonction $\varepsilon_{(M+1)}$ qui représente l'erreur absolue commise en prenant pour solution approchée de I la solution universelle de rang M :

$$(1-42) \quad \varepsilon_{(M+1)} = \tilde{\Phi}_{(M+1)} - \psi$$

elle est solution du problème III suivant :

$$III \quad \begin{cases} (1-43) & \Delta \varepsilon_{(M+1)} - k \times \frac{\partial \varepsilon_{(M+1)}}{\partial t} = k \times p_{M+1} \times \Phi_M^* \\ (1-44) & \varepsilon_{(M+1)}/\Gamma = 0 \quad \forall t \in]0, T[\\ (1-45) & \varepsilon_{(M+1)}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Effectuons maintenant la transformation :

$$(1-46) \quad \begin{cases} \varepsilon_{(M+1)}^e = \varepsilon_{(M+1)} \times e^{-\beta t} \\ \Phi_M^e = \Phi_M^* \times e^{-\beta t} \end{cases} \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}$$

on a donc les relations suivantes :

$$\frac{\partial \varepsilon_{(M+1)}^e}{\partial t} = \left[\beta \times \varepsilon_{(M+1)}^e + \frac{\partial \varepsilon_{(M+1)}^e}{\partial t} \right] \times e^{\beta t}$$

$$\Delta \varepsilon_{(M+1)}^e = \Delta \varepsilon_{(M+1)}^e \times e^{\beta t}$$

en reportant ces résultats dans l'équation (1-43), on en déduit que la fonction $\xi_{(M+1)}^e$ est solution du problème III_a :

$$\text{III}_a \begin{cases} (1-47) & \Delta \xi_{(M+1)}^e - k \beta \xi_{(M+1)}^e - k \frac{\partial \xi_{(M+1)}^e}{\partial t} = k \cdot P_{M+1} \cdot \Phi_M^e \\ (1-44)' & \xi_{(M+1)}^e / \Gamma = 0 \quad \forall t \in]0, T[\\ (1-45)' & \xi_{(M+1)}^e(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1-47) par $\xi_{(M+1)}^e$ et intégrons sur

$$\int_{\Omega} \xi_{(M+1)}^e(u) \times \Delta \xi_{(M+1)}^e(u) \times du - k \cdot \beta \int_{\Omega} [\xi_{(M+1)}^e]^2(u) \times du - \frac{k}{2} \times \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [\xi_{(M+1)}^e]^2(u) \times du = k \times P_{M+1} \times \int_{\Omega} \xi_{(M+1)}^e(u) \times \Phi_M^e(u) \times du$$

intégrons par parties la première intégrale :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{\Omega} \xi_{(M+1)}^e(u) \times D_i^2 \xi_{(M+1)}^e(u) \times du = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\xi_{(M+1)}^e \times D_i \xi_{(M+1)}^e \right] / \Sigma - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\Omega} [D_i \xi_{(M+1)}^e]^2(u) du$$

le premier terme s'annule à cause de la condition au contour (1-44)', et en introduisant le produit scalaire et la norme dans H, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \xi_{(M+1)}^e\|_H^2 + k \cdot \beta \|\xi_{(M+1)}^e\|_H^2 + \frac{k}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|\xi_{(M+1)}^e\|_H^2 = - k \times P_{M+1} \times (\xi_{(M+1)}^e, \Phi_M^e)_H$$

en utilisant l'inégalité de Schwarz dans H au second membre et en majorant encore le résultat, on arrive à :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \xi_{(M+1)}^e\|_H^2 + k \cdot \beta \cdot \|\xi_{(M+1)}^e\|_H^2 + \frac{k}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|\xi_{(M+1)}^e\|_H^2 \leq \frac{k \cdot L}{2} \cdot \left[\|\xi_{(M+1)}^e\|_H^2 + \|\Phi_M^e\|_H^2 \right]$$

Soit :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \|D_i \xi_{(M+1)}^e\|_H^2 + k \cdot (\beta - \frac{L}{2}) \cdot \|\xi_{(M+1)}^e\|_H^2 + \frac{k}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|\xi_{(M+1)}^e\|_H^2 \leq \frac{k \cdot L}{2} \cdot \|\Phi_M^e\|_H^2$$

nous choisissons β , qui était arbitraire jusque là, de manière à ce que le coefficient du second terme soit égal à 1 :

$$(1-48) \quad \beta = \frac{1}{k} + \frac{L}{2}$$

on peut alors introduire la norme dans V :

$$\|\xi_{(M+1)}^e\|_V^2 + \frac{k}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|\xi_{(M+1)}^e\|_H^2 \leq \frac{k \cdot L}{2} \cdot \|\Phi_M^e\|_H^2$$

intégrons les deux membres de cette inégalité par rapport à la variable t de 0 à T :

$$\int_0^T \|\xi_{(M+1)}^e\|_V^2(t) dt + \frac{k}{2} \|\xi_{(M+1)}^e\|_H^2(T) \leq \frac{kLT}{2} \|\Phi_M^e\|_H^2$$

D'après la définition de Φ_M^e , (1-46), β étant positif, (1-48), on en déduit que le second membre est fini pour tout M ; on peut donc dire que $\xi_{(M+1)}^e$ appartient à l'espace LV. En introduisant la norme dans cet espace et en minorant le premier membre on obtient finalement :

$$(1-49) \quad \|\xi_{(M+1)}^e\|_{LV}^2 \leq \frac{kLT}{2} \|\Phi_M^e\|_H^2$$

En raison de la convergence uniforme de la suite Φ_m^* vers 0 dans V, comme β est positif, la suite Φ_M^e convergera uniformément vers 0 dans V pour toute valeur de t appartenant à un intervalle borné. Donc, quand M tend vers l'infini, la suite $\xi_{(M+1)}^e$ converge uniformément vers 0 dans LV. Nous avons donc démontré que la solution universelle approchée au rang M, $\Phi_{(M+1)}^*$, converge uniformément vers la solution du problème I, φ , dans l'espace $L^2(0, T; V)$ quand M tend vers l'infini.

II - APPLICATION NUMERIQUE

Nous allons développer la technique d'universalisation en nous limitant à une classe de problèmes d'évolution. Après avoir défini l'exemple choisi et expliciter rapidement le calcul de sa solution exacte, nous développerons son universalisation et en particulier la détermination des premières fonctions universelles. Enfin nous présenterons les résultats obtenus avec différentes fonctions f.

1 - Choix d'une classe de problèmes d'évolution

Afin de limiter les calculs, nous avons choisi d'étudier la méthode d'universalisation sur la classe des problèmes d'évolution du type I, mais en prenant pour Ω l'ouvert $]0, 1[$ de \mathbb{R} . Soit, donc :

$$I \begin{cases} (1-51) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f \\ (1-52) & \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0 \quad \forall t \in]0, T[\\ (1-53) & \varphi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[\end{cases}$$

La fonction f, qui différencie les problèmes d'évolution de cette classe sera définie ultérieurement, ainsi que la valeur de T.

2 - Détermination de la solution exacte

Nous nous bornerons à rappeler les points essentiels de l'obtention de la solution dont l'étude est faite par V.A. Ditkin et A.P. Prudnikov dans l'ouvrage [11].

Nous désignerons par Φ la transformée de Laplace par rapport à la variable t de la fonction

$$(1-54) \quad \Phi(x, p) = \int_0^\omega e^{-pt} \varphi(x, t) \times dt$$

et par F celle de la fonction f

$$(1-55) \quad F(p) = \int_0^\omega e^{-pt} \times f(t) \times dt$$

En appliquant cette transformation de Laplace à l'équation (1-51) et aux conditions aux limites (1-52) on obtient :

$$(1-56) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - p \Phi = F$$

$$(1-57) \quad \Phi(0, p) = \Phi(1, p) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre en x avec la condition au contour (1-57) peut se mettre sous la forme :

$$(1-58) \quad \Phi(x, p) = - \int_0^1 G(x, u; p) \cdot F(p) du$$

où, G est le noyau de Green de l'équation (1-56) :

$$(1-59) \quad G(x, u; p) = \begin{cases} \frac{\text{Sh}(x\sqrt{p}) \times \text{Sh}[(1-u)\sqrt{p}]}{\sqrt{p} \times \text{Sh}\sqrt{p}} & \text{pour } x \leq u \\ \frac{\text{Sh}(u\sqrt{p}) \times \text{Sh}[(1-x)\sqrt{p}]}{\sqrt{p} \times \text{Sh}\sqrt{p}} & \text{pour } x \geq u \end{cases}$$

d'autre part G est la transformée de Laplace de g définie par :

$$(1-60) \quad g(x, u; t) = \frac{1}{2} \left[V_3\left(\frac{x-u}{2}, t\right) - V_3\left(\frac{x+u}{2}, t\right) \right]$$

où V_3 est la fonction de Jacobi :

$$(1-61) \quad V_3(v, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{2ni\pi \cdot v - n^2 \pi^2 \cdot t}$$

ces résultats nous permettent d'écrire la solution du problème I sous la forme :

$$(1-62) \quad \varphi(x, t) = - \int_0^t f(v) \times \left[\int_0^1 g(x, u; t-v) du \right] \times dv$$

Afin de pouvoir calculer numériquement cette solution nous avons explicité la fonction g à l'aide de (1-61) :

$$(1-63) \quad g(x, u; t) = 2 \sum_{n=1}^{n=+\infty} \sin n\pi u \times \sin n\pi x \times e^{-n^2 \pi^2 t}$$

la solution du problème I, s'écrit donc :

$$(1-64) \quad \varphi(x, t) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{j=+\infty} \frac{\sin(2j+1)\pi x}{2j+1} \times \int_0^t \frac{f(v) \times dv}{e^{(2j+1)^2 \pi^2 (t-v)}} & \text{pour } x \in]0, 1[\\ 0 \text{ ailleurs} & t \in]0, T[\end{cases}$$

on peut remarquer que pour toutes valeurs de t elle est symétrique par rapport à l'axe $x = 1/2$.

3 - Solution universelle approchée au rang M

Comme nous l'avons vu dans la première section, la méthode d'universalisation consiste en pratique à approcher la solution exacte, φ , du problème I par un développement de la forme :

$$(1-65) \quad \Phi_{(M+1)}^* = \sum_{m=0}^{m=M+1} p_m \times q_m^*$$

les paramètres de forme, p_m , ayant encore la même définition :

$$(1-16) \quad p_m = f^{(m)} \quad \text{pour } m = 0 \text{ à } M+1$$

les fonctions universelles de I, q_m^* , étant explicitées par la résolution successive des équations différentielles d'ordre deux à valeurs au contour :

$$(1-66) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0^{*''} = 1 \\ q_0^*(0) = q_0^*(1) = 0 \\ q_1^{*''} = q_0^* \\ q_1^*(0) = q_1^*(1) = 0 \\ \dots \\ q_{M+1}^{*''} = q_M^* \\ q_{M+1}^*(0) = q_{M+1}^*(1) = 0 \end{array} \right.$$

nous obtenons ainsi pour les premières fonctions :

$$(1-67) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0^*(x) = \frac{1}{2!} (x^2 - x) \\ q_1^*(x) = \frac{1}{4!} (x^4 - 2x^3 + x) \\ q_2^*(x) = \frac{1}{6!} (x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x) \\ q_3^*(x) = \frac{1}{8!} (x^8 - 4x^7 + 14x^5 - 28x^3 + 17x) \end{array} \right. \quad \text{pour } x \in]0,1[\text{ prolongé par } 0 \text{ ailleurs}$$

Une rapide étude de ces polynômes montre que sur l'intervalle $]0,1[$ ils ont leur optimum au point d'abscisse $1/2$ et sont situés d'un seul côté de

l'axe des x ; de plus on démontre (voir Annexe 1) la relation suivante :

$$(1-68) \quad \left\| q_m^* \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{8^{m+1}} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

4 - Etude de trois cas concrets

Dans ce paragraphe nous allons appliquer la méthode d'universalisation à trois problèmes d'évolution de la classe I. Pour chaque fonction f choisie, nous avons calculé la solution exacte φ et les solutions universelles approchées en prenant plus ou moins de termes du développement (1-65), et nous comparons les résultats obtenus. Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur CII 10070 de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique de Nancy.

a - Exemple 1

Conformément à l'hypothèse faite sur la fonction f dans l'étude théorique, nous avons d'abord choisi pour f une fonction classique de l'espace $\mathcal{D} (]0, T[)$ appelée "Mollifier" ; soit, avec $T = 2$:

$$(1-69) \quad f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t \cdot (2-t)}} & \text{pour tout } t \in]0, 2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Afin de simplifier le calcul des premiers paramètres de forme, nous avons fait le changement de variables : $y = t-1$, et on obtient ainsi pour $y \in]-1, +1[$:

$$(1-70) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0(y) = e^{-\frac{1}{1-y^2}} \\ p_1(y) = -\frac{2y}{(1-y^2)^2} \times e^{-\frac{1}{1-y^2}} \\ p_2(y) = 2 \cdot \frac{(3y^4-1)}{(1-y^2)^4} \times e^{-\frac{1}{1-y^2}} \\ p_3(y) = -4y \frac{(6y^6 + 3y^4 - 10y^2 + 3)}{(1-y^2)^6} \times e^{-\frac{1}{1-y^2}} \end{array} \right.$$

ils sont prolongés par 0 en dehors de cet intervalle $] -1, +1[$.

Leurs graphes sont représentés sur la figure (1-1).

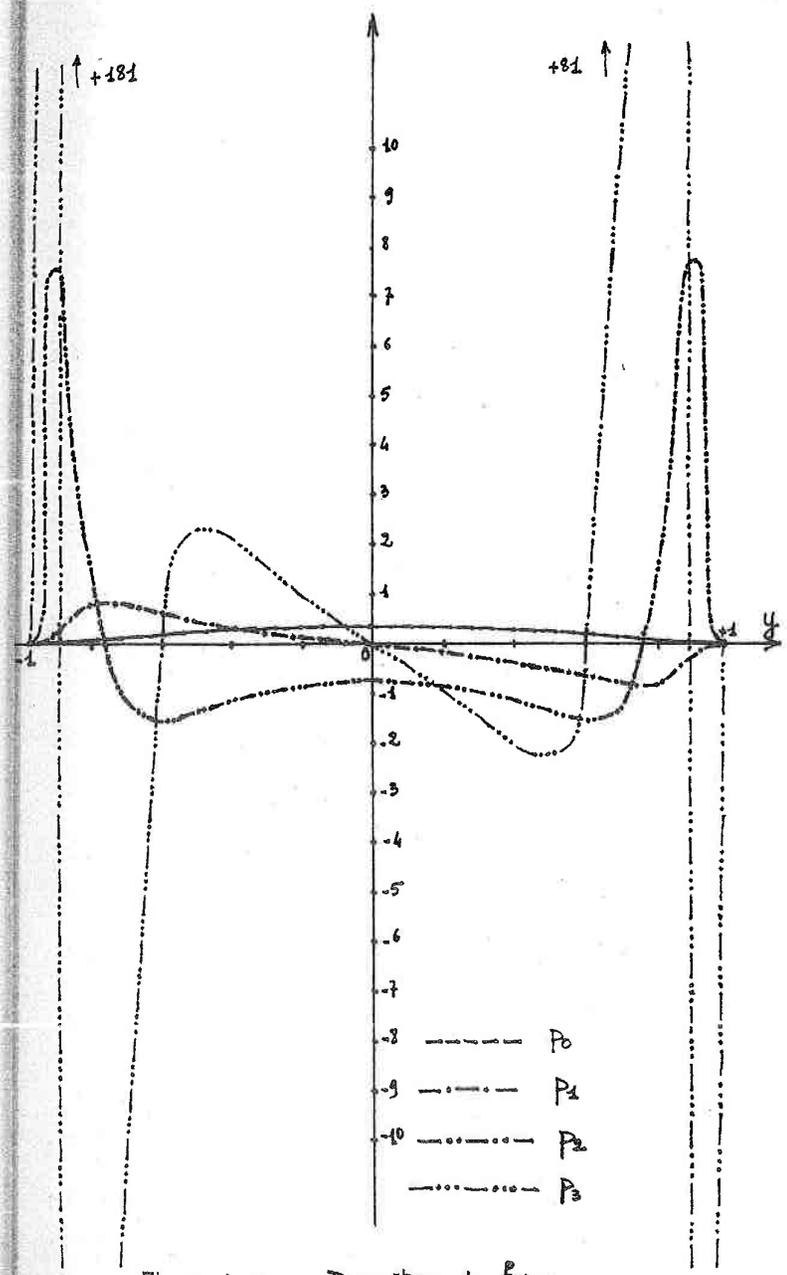


Figure 1.1 : Paramètres de forme

On constate que, bien que la fonction f soit régulière, ses dérivées successives n'ont pas cette propriété ; en effet, les fortes variations, qui sont concentrées aux extrémités de l'intervalle pour les premiers paramètres, gagnent l'ensemble du support et deviennent de plus en plus accentuées avec l'élévation de l'ordre de dérivation de la fonction f .

Sur les figures (1-2) et (1-3) nous avons représenté, en différentes abscisses x de l'intervalle $]0,1[$ compte tenu de la symétrie par rapport au milieu, l'évolution au cours du temps de la solution exacte φ et des solutions universelles approchées en prenant successivement un terme : $\Phi_{(0)}^*$, deux : $\Phi_{(1)}^*$, trois : $\Phi_{(2)}^*$ et quatre termes : $\Phi_{(3)}^*$, du développement (1-65).

On s'aperçoit que les résultats sont homogènes par rapport à la variable d'espace x , en effet les courbes varient peu d'une abscisse à l'autre. L'augmentation du nombre termes de (1-65) pris en compte améliore l'approche de la solution exacte, sauf aux extrémités de l'intervalle $]0,2[$ dans un premier temps. Les fortes variations des paramètres de forme se font alors sentir et il faudrait prendre une approximation universelle d'un rang plus élevé pour obtenir une estimation satisfaisante de φ . En particulier au voisinage de l'origine, $t = 0$, où la condition initiale (1-53) provoque une perturbation supplémentaire, mais la convergence de la série (1-65) est assurée par la rapide diminution en norme des fonctions universelles q_m^* .

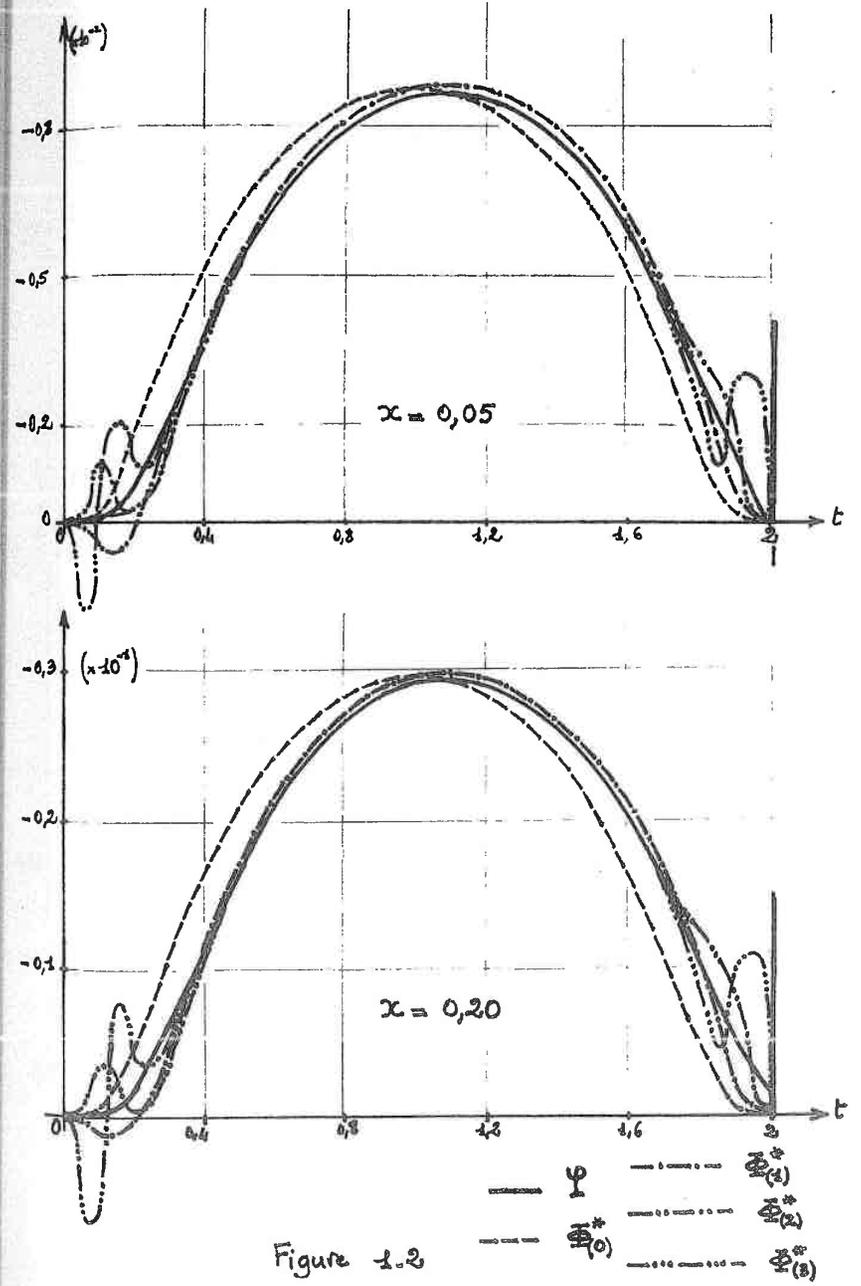


Figure 1.2

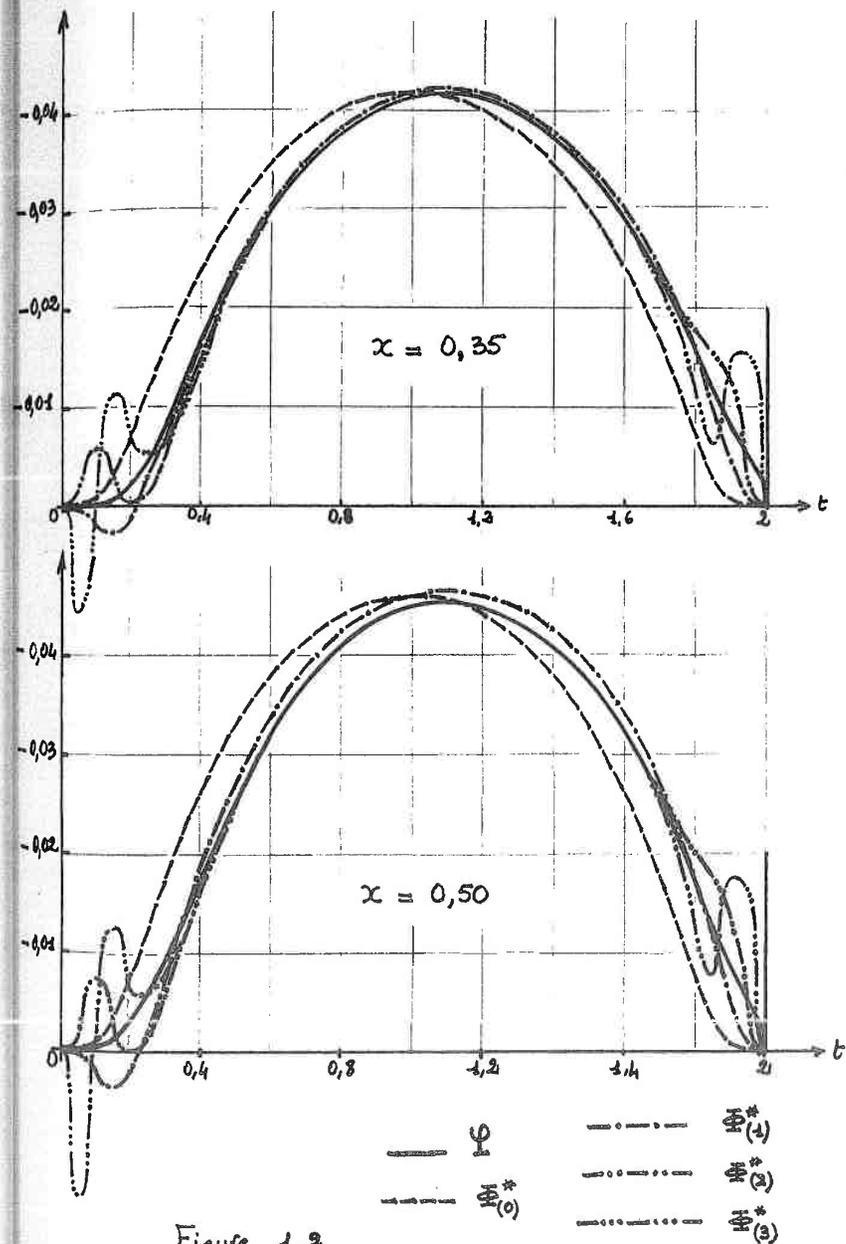


Figure 1-3

b - Exemple 2

Nous allons prendre une fonction f plus lentement variable que la précédente afin de régulariser les variations de ses dérivées successives. Pour y parvenir nous définissons f à l'aide d'un produit de convolution :

$$(1-71) \quad f(t) = \begin{cases} g \star h(t) & \text{pour } t \in]0, 3[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec :

$$(1-71)' \quad g(u) = \begin{cases} \frac{-1}{e^{1-u^2}} & \text{pour } u \in]-1, +1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et :

$$(1-71)'' \quad h(u) = \begin{cases} 1 & \text{pour } u \in]1, 2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit en explicitant le produit de convolution :

$$(1-72) \quad \begin{cases} g \star h(t) = \int_{-1}^{t-1} g(u) \cdot du & \text{pour } 0 < t \leq 1 \\ g \star h(t) = \int_{t-1}^{t-2} g(u) \cdot du & \text{pour } 1 \leq t \leq 2 \\ g \star h(t) = \int_{t-2}^1 g(u) \cdot du & \text{pour } 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

Cette fonction f appartient encore à l'espace $\mathcal{D}([0, T[)$, avec $T = 3$.

Les paramètres de forme sont alors définis par :

$$(1-73) \quad p_m(t) = \begin{cases} g^{(m)} \star h(t) & \text{pour } t \in]0, 3[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et leurs graphes sont représentés sur la figure (1-4).

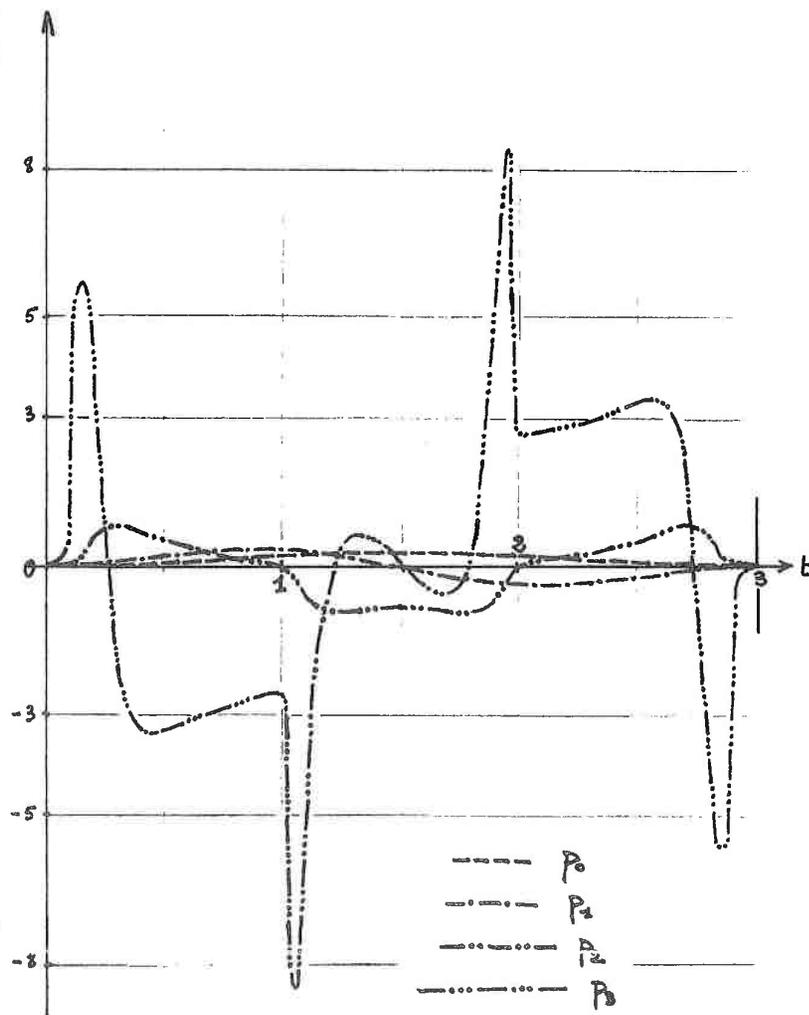


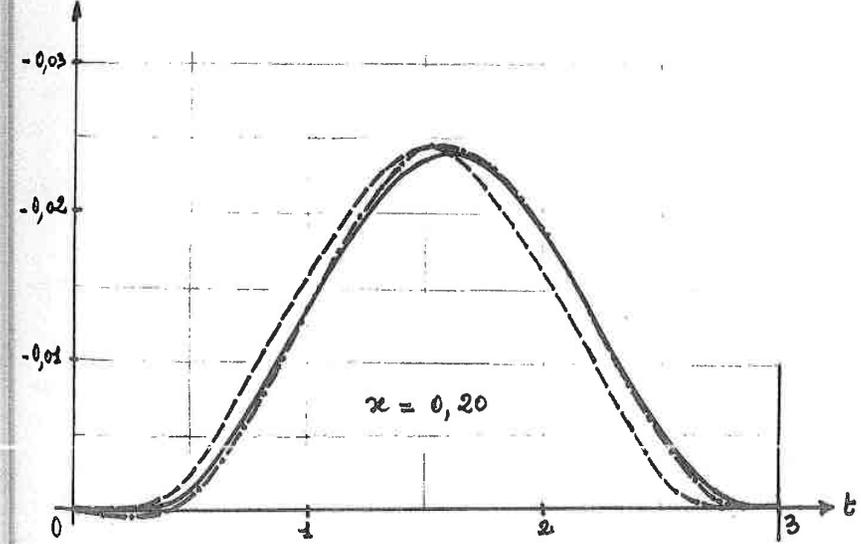
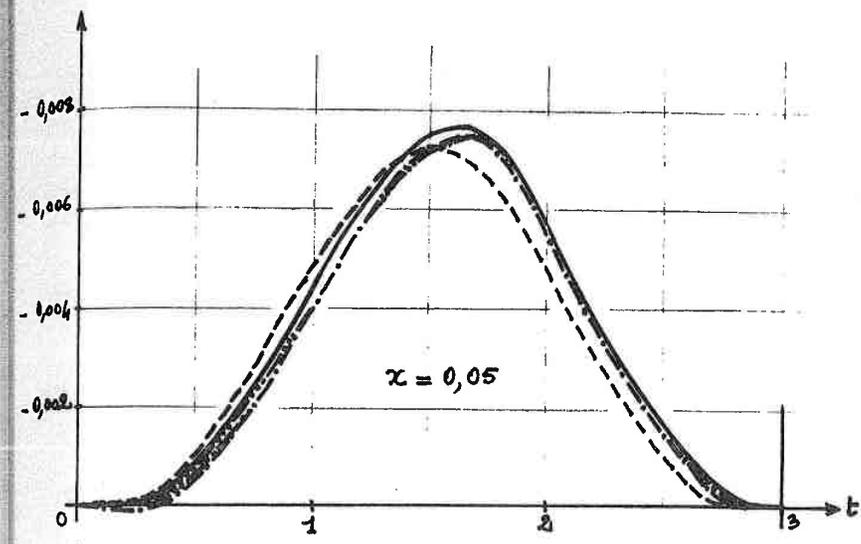
Figure 1-4 Paramètres de forme

Nous constatons une plus grande régularité des premiers paramètres de forme par rapport à l'exemple précédent, en particulier aux extrémités de l'intervalle où les amplitudes sont bien plus faibles.

Sur les figures (1-5) et (1-6), nous avons tracé, aux mêmes abscisses que l'exemple 1, l'évolution au cours du temps de la solution exacte et des solutions universelles approchées : $\Phi_{(0)}^*$, $\Phi_{(1)}^*$, $\Phi_{(2)}^*$ et $\Phi_{(3)}^*$. (Nous n'avons représenté que les courbes ou arcs de courbe distinguables les uns des autres).

Nous voyons qu'il y a encore une grande homogénéité par rapport à la variable d'espace x et que la convergence des solutions universelles approchées vers la solution exacte est plus nette que sur l'exemple 1. En effet l'approximation universelle Φ_2^* est pratiquement confondue avec Ψ et au voisinage des extrémités de l'intervalle de temps, $\Phi_{(3)}^*$ constitue déjà une estimation satisfaisante de Ψ .

Nous vérifions donc, par comparaison avec l'exemple précédent, que pour être sûr d'obtenir une bonne approximation de la solution exacte en ne calculant que les premiers termes de la série d'universalisation (1-65), il est primordial d'avoir une fonction f assez régulière ainsi que ses dérivées.



- ψ
- ψ_0^*
- · — ψ_1^*
- — · — ψ_2^*
- · — · ψ_3^*

Figure 1.5

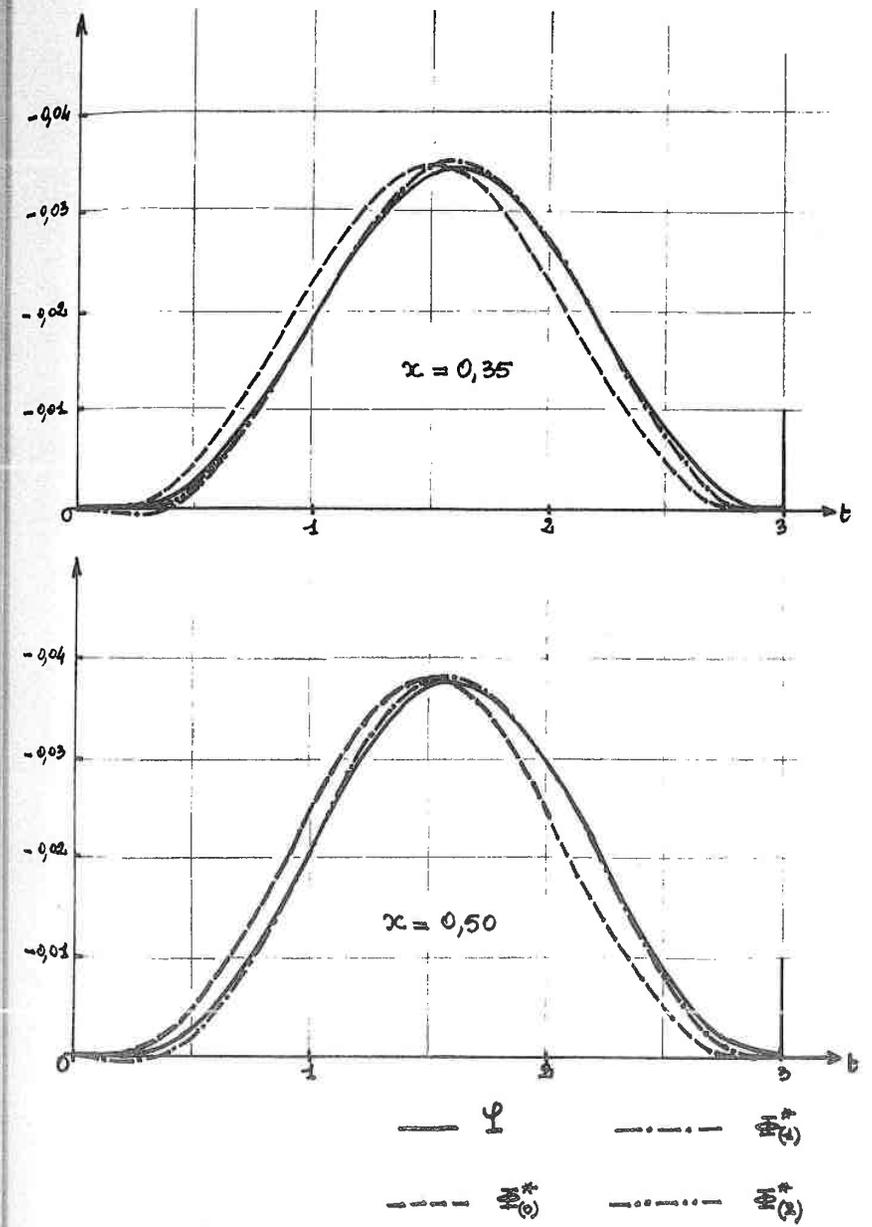


Figure 1-6

c - Exemple 3

Etant donné que peu de phénomènes physiques peuvent être représentés par des fonctions de $\mathcal{F} (]0, T[)$, nous avons testé la méthode d'universalisation sur une fonction n'appartenant pas à cet espace fonctionnel. Soit donc f définie par :

$$(1-74) \quad f(t) = \begin{cases} [1 - (1-t)^2]^n & \text{pour } t \in]0, 2[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Comme cette fonction et ses $(n-1)$ premières dérivées sont continues à l'origine, pour que l'approximation universelle au rang M , $\Phi_{(M+1)}^*$, vérifie la condition initiale (1-53),

$$(1-53) \quad \varphi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[$$

$$(1-65) \quad \Phi_{(M+1)}^* = \sum_{m=0}^{m=M+1} p_m^* \cdot q_m^*$$

il faut limiter le développement (1-65) aux termes qui vérifient cette condition ; donc théoriquement il ne faut pas prendre une solution approchée avec plus de n termes, c'est-à-dire une universalisation de rang M inférieur ou égal à $(n-2)$.

En réalité nous avons constaté qu'on pouvait prendre quelques termes supplémentaires en continuant d'améliorer l'approximation de la solution exacte et sans altérer la représentation au voisinage de l'origine. Ce fait est dû à la convergence rapide des fonctions universelles q_m^* vers 0 pour la classe des problèmes d'évolution du type I.

Nous présentons les résultats obtenus pour les valeurs 3 et 5 de la constante n , pour lesquels nous n'avons calculé que les quatre premiers termes de la série (1-65).

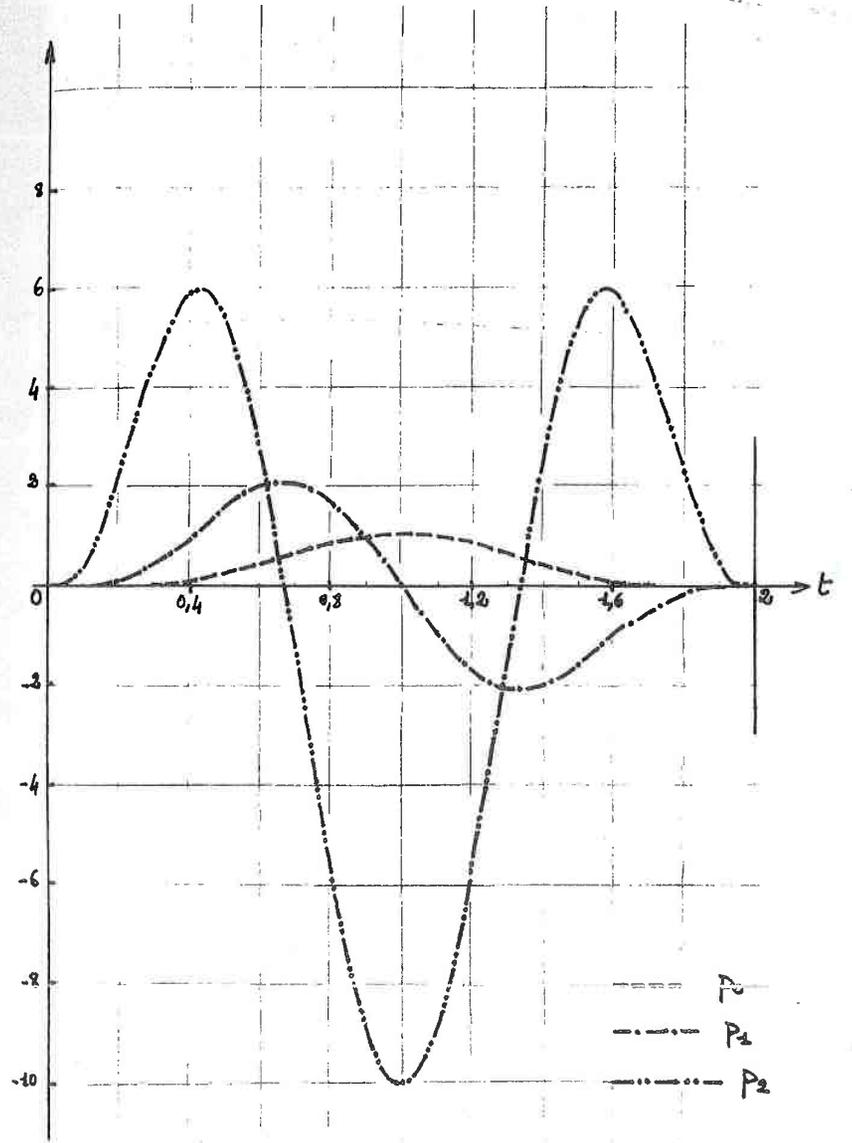


Figure 1-7 Paramètres de forme ($n=5$)

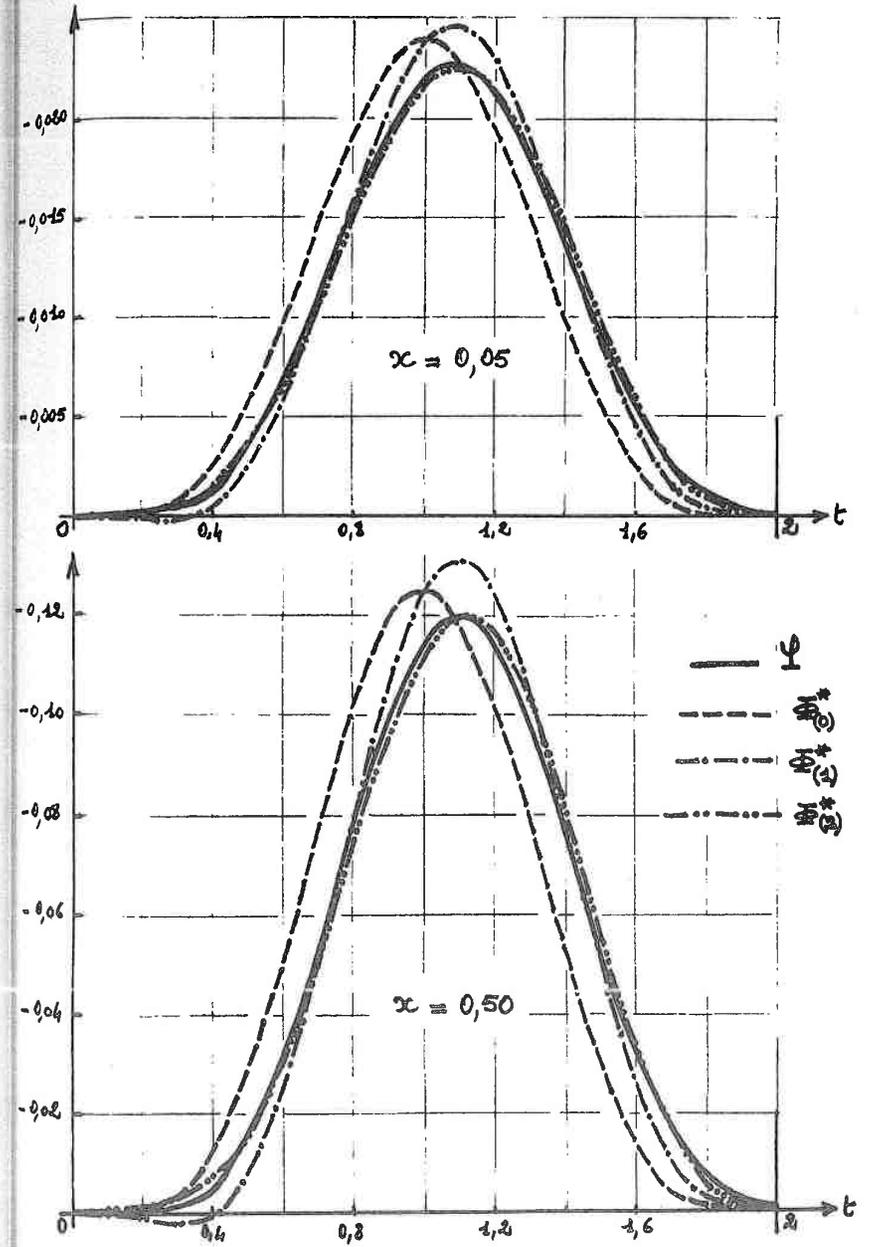


Figure 1.8

1er cas : n = 5

En faisant le changement de variables, $y = t-1$, les trois premiers paramètres de forme ont pour expression :

$$(1-75) \quad \begin{cases} P_0(y) = (1 - y^2)^5 & \text{pour } y \in]-1, +1[\\ P_1(y) = -10 \cdot y \cdot (1-y^2)^4 & \text{prolongé par 0} \\ P_2(y) = 10 \cdot (9y^2 - 1) \cdot (1-y^2)^3 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les graphes, figure (1-7), montrent une assez bonne régularité. Cela se traduit par une rapide convergence des solutions universelles approchées de rang croissant vers la solution exacte (figure (1-8)). En effet en prenant cinq termes, $\Phi_{(4)}^*$, on obtient une approximation de φ avec une erreur relative inférieure à 3 %, la précision étant meilleure au centre de l'intervalle qu'aux extrémités.

2ème cas : n = 3

Avec le même changement de variables, on obtient pour les premiers paramètres :

$$(1-76) \quad \begin{cases} P_0(y) = (1 - y^2)^3 \\ P_1(y) = -6y \cdot (1-y^2)^2 \\ P_2(y) = 6 \cdot (5y^2 - 1) \cdot (1-y^2) \\ P_3(y) = -24 \cdot y \cdot (5y^2 - 3) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } y \in]-1, +1[\\ \text{prolongé par 0 ailleurs} \end{array}$$

La discontinuité du quatrième paramètre, p_3 , aux extrémités de l'intervalle $]-1, +1[$ est mise en évidence sur la figure (1-9).

Les trois premiers paramètres sont plus réguliers que pour $n = 5$.

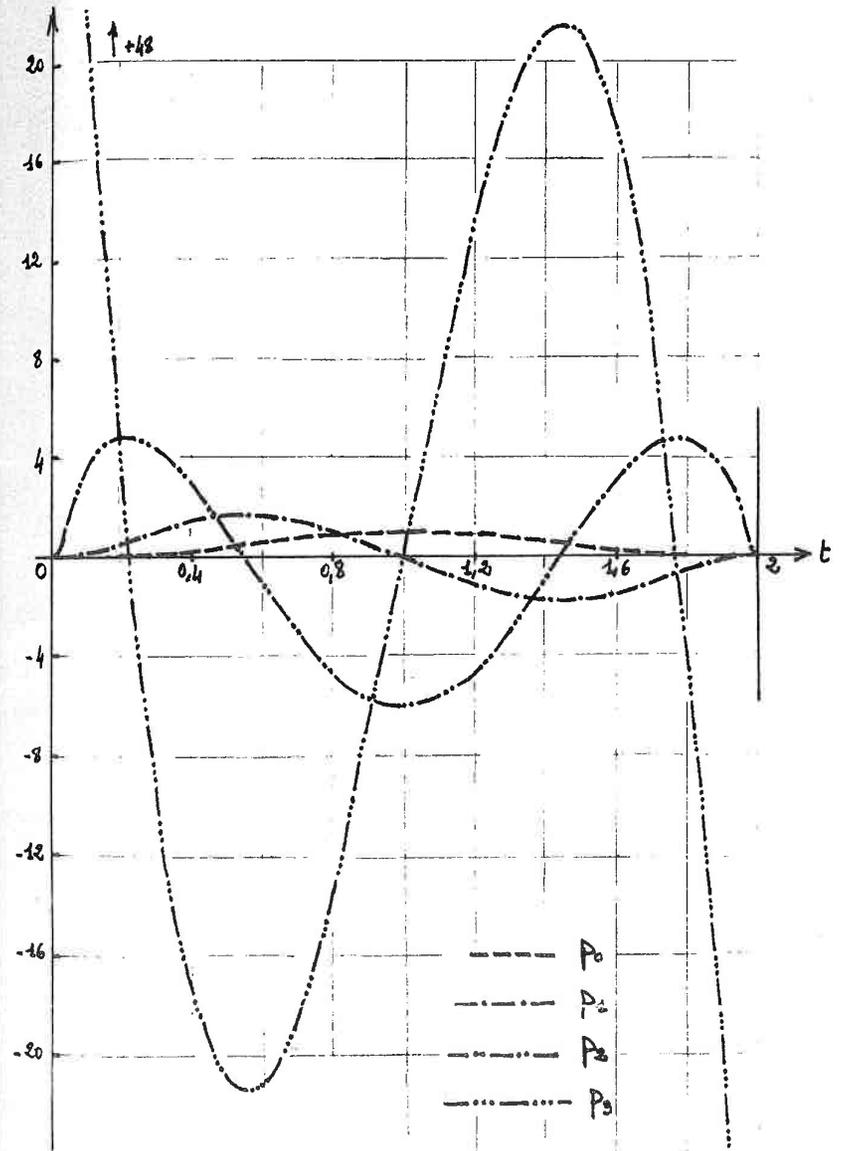


Figure 1-9 Paramètres de forme ($n=3$)

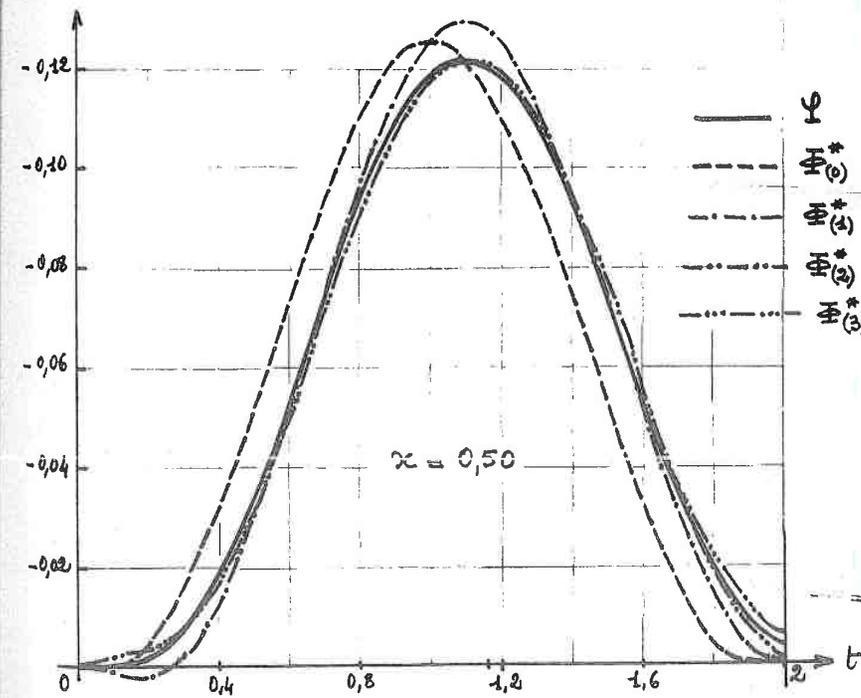
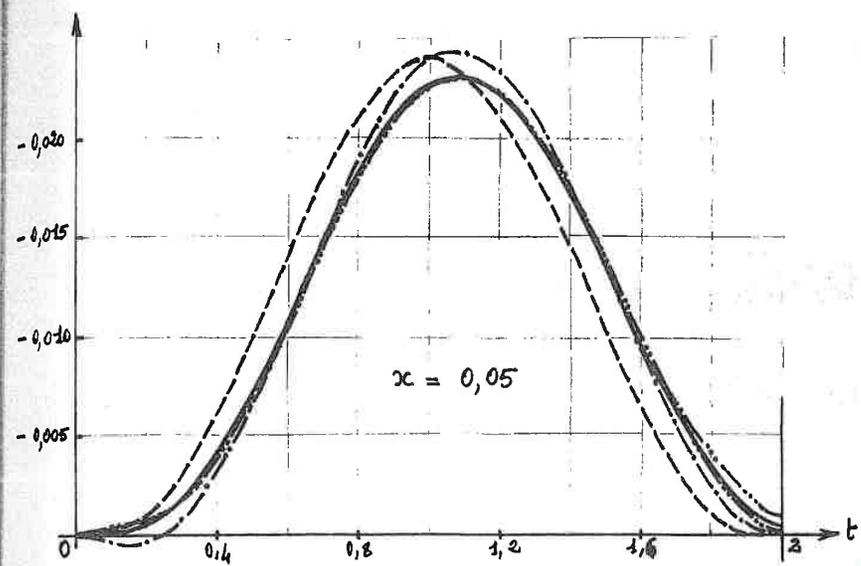


Figure 1-10

La figure (1-10), analogue à (1-8), montre que la prise en considération du paramètre p_3 , n'altère pas la qualité de l'approximation au voisinage de l'origine et améliore la précision obtenue avec trois termes, $\Phi_{(2)}^*$, puisque $\Phi_{(3)}^*$ est pratiquement confondue avec ψ , sauf pour les valeurs de t proches de 2.

Nous avons également fait le calcul avec cinq termes, $\Phi_{(4)}^*$; l'approximation obtenue ne diffère de la solution exacte qu'avec une erreur relative inférieure à 1%, sauf au voisinage immédiat des extrémités de l'intervalle.

d - CONCLUSION

Sur ces trois exemples nous avons constaté la bonne convergence de la méthode d'universalisation. Cette convergence étant d'autant plus rapide que la fonction f qui différencie les problèmes d'évolution du type I, est plus lentement variable. Résultat logique, puisque nous avons vu dans la première section que la suite $\mathcal{E}_{(M+1)}^e$, des fonctions qui caractérisaient l'erreur commise par l'approximation universelle de rang M , convergeait vers 0 dans l'espace LV d'autant plus rapidement que la constante L était plus petite ;

$$(1-49) \quad \left\| \mathcal{E}_{(M+1)}^e \right\|_{LV}^2 \leq \frac{kLT}{2} \times \left\| \Phi_M^e \right\|_H^2$$

or, L est la borne supérieure des modules des amplitudes des paramètres.

$$(1-36) \quad \left\| p_m \right\|_{\omega} \leq L \quad \forall m, m \in \mathbb{N}$$

Enfin, nous remarquons que dans tous les cas l'universalisation avec un seul terme, $\Phi_{(0)}^*$, donne déjà une idée convenable du comportement de la solution exacte, ce qui n'est pas le cas en prenant en première approximation la solution du problème I sans second membre qui est identiquement nulle.

DEUXIEME PARTIE

UNIVERSALISATIONS DES EQUATIONS DE COUCHE LIMITE

Les résultats obtenus dans la première partie sur un problème parabolique linéaire, qui n'est autre qu'une forme très simplifiée du problème de couche limite étudié, constituent un début de justification à l'application de la technique d'universalisation aux équations de couche limite laminaire incompressible stationnaire plane. Des études analogues ont déjà été effectuées à Belgrade sur la couche limite thermique, V. Saljnikov - V. Djordjevic [12], et pour les fluides compressibles, Z. Boricic [13] et B. Obrovic [14], et sont en cours à Poitiers pour le cas instationnaire, J. Nérault [15].

La question de l'existence et de l'unicité du problème de couche limite a déjà été étudiée par O.A. Olénik [16] et cette étude est également poursuivie à Nancy par Chipot [17]. Les problèmes soulevés par l'universalisation sont d'une telle complexité que nous nous contenterons d'appliquer cette méthode sans pouvoir, pour le moment, démontrer la convergence de la solution approchée du problème universalisé vers la solution exacte.

Dans une première section nous allons présenter les caractéristiques communes des méthodes paramétriques du type Loitsianski. Dans les sections deux et trois, nous étudierons deux extensions de l'universalisation de L. G. Loitsianski proposées par V. Saljnikov, qui diffèrent par le choix de la variable transversale utilisée. Nous expliquerons également les méthodes numériques mises en œuvre pour résoudre les équations universelles obtenues, en nous limitant aux approximations mono et bi paramétriques.

I - LES METHODES PARAMETRIQUES DU TYPE LOITSIANSKI

M. Blasius a été le premier à établir une méthode générale permettant le calcul de la couche limite bidimensionnelle autour d'un obstacle cylindrique perpendiculaire au courant. L. Howarth et surtout H. Görrler l'ont considérablement améliorée tout en élargissant son domaine d'application.

Malheureusement le défaut essentiel de ces méthodes est d'être fondées sur la représentation de la répartition de vitesse de l'écoulement

potentiel extérieur, U , sous forme d'une série entière de la variable x ; ce qui est tout à fait inapproprié pour le cas des profils assez minces, très souvent employés, car la vitesse U augmente très rapidement au voisinage du bord d'attaque, pour varier ensuite très peu le long de l'obstacle ; en conséquence on doit prendre un grand nombre de termes de la série et on ne peut calculer l'épaisseur de couche limite, δ , avec une précision convenable que dans une région proche du point d'arrêt ; il faut ensuite prendre une méthode numérique du type différences finies dont l'emploi est très délicat à cause d'instabilités.

Parallèlement en U.R.S.S., V. Y. Schkadov [18] et l'équipe de L. G. Loitsianski [4] ont travaillé à la simplification de la méthode classique de Karman-Pohlhausen qui utilise une représentation analytique du profil des vitesses par une famille de fonctions dépendant d'un paramètre, Λ , appelé "paramètre de forme de Pohlhausen".

Afin de transformer les équations de couche limite en une forme universelle, c'est-à-dire ne dépendant pas de la vitesse de l'écoulement extérieur, U , on introduit à la place de la variable longitudinale x des paramètres de forme, et suivant le choix de ces paramètres on aboutit à des approximations universelles différentes (voir V. Y. Schkadov [5], L. G. Loitsianski [6], V. Saljnikov - S. Oka [7]). Or la comparaison des résultats obtenus dans des cas simples, (V. Saljnikov [3]), a montré que la méthode de Loitsianski se rapprochait le plus des résultats exacts ; ce fait est dû au comportement des premiers paramètres le long de l'obstacle qui pour Loitsianski sont petits sauf au voisinage du point de décollement et assurent ainsi une bonne convergence. C'est pourquoi V. Saljnikov a choisi ces paramètres pour effectuer les universalisations présentées plus loin.

1 - Etude des paramètres de forme de Loitsianski

Nous allons donner dans ce paragraphe les idées essentielles qui ont conduit Loitsianski à choisir ses paramètres et qui sont exposées dans sa publication [19]. Nous expliquerons ensuite quelques unes de leurs pro-

priétés et montrerons les conditions d'écoulement pour lesquelles ils sont indépendants.

a - Définition des paramètres de forme

La notion de similitude en Mécanique des fluides, (voir H. Schlichting [1], chapitre 8), a donné lieu à de nombreuses méthodes de résolution. Postérieurement au travail de Th von Karman [20], K. Pohlhausen [21], a fondé la construction de solutions de similitude sur la représentation des profils de vitesse dans la couche limite, sous la forme d'une famille monoparamétrique :

$$(2-1) \quad \frac{u}{U} = \varphi\left(\frac{y}{h} ; \lambda\right)$$

où, suivant le choix de la largeur caractéristique h : δ , δ^* ou δ^{**} le paramètre de forme de Pohlhausen, λ , devient :

$\frac{U' \delta^2}{\nu}$, $\frac{U' \delta^{*2}}{\nu}$ ou $\frac{U' \delta^{**2}}{\nu}$. Les variables $\frac{u}{U}$ et $\frac{y}{h}$ jouent le rôle de coordonnées de similitude et λ est le paramètre de similitude de la famille de vitesses.

En effet, si dans deux sections différentes de la couche limite λ a la même valeur cela signifie que les profils de vitesse dans ces deux sections sont semblables. Si λ est constant dans toute la couche limite, il y a alors une similarité de mouvement dans l'ensemble de la couche limite ; l'équation (2-1) admet alors pour solution la classe des solutions de similitude de la couche limite plane en écoulement potentiel.

Dans le cas général des écoulements à profils de vitesse non semblables, le paramètre λ est fonction de la coordonnée longitudinale ; dans les théories monoparamétriques, il est solution d'équations différentielles simples (voir K. Pohlhausen [21]).

L'équation (2-1) peut s'étendre au cas de plusieurs coordonnées afin de traiter des problèmes plus complexes, tels que la couche limite thermique ou la couche limite tridimensionnelle. En généralisant la notion

habituelle de similitude, le système d'équation obtenu constitue alors une similitude spécifique du mouvement dans la couche limite.

On a d'abord choisi les fonctions φ_i des équations (2-1) de façon intuitive en prenant toutes les fonctions classiques du type trigonométriques, potentielles, ... et en comparant les résultats obtenus aux solutions exactes ou aux données expérimentales. Vers 1930 des progrès furent accomplis par utilisation de la classe des solutions exactes de différents problèmes concrets correspondants à la répartition de vitesse à la frontière extérieure de la couche limite de la forme : $U = b_0 - b_1 \cdot x$ ($b_1 > 0$) (voir L. Howarth [22] et N.E. Kotchin - L.G. Loitsianski [23]).

Malgré ce choix rationnel il subsistait encore une certaine imprécision quant à la détermination de la famille des paramètres dans les différents cas concrets. Loitsianski propose alors, comme point de départ d'une solution pluriparamétrique de similitude généralisée, la représentation du profil des vitesses suivantes :

$$(2-2) \quad \frac{u}{U} = \varphi \left(\frac{y}{\delta^{**}} ; f_1, f_2, \dots \right)$$

où f_1, f_2 , sont les paramètres de forme, ce qui constitue une généralisation de la méthode de Pohlhausen (2-1).

En utilisant cette relation (2-2) on peut définir une nouvelle fonction de courant, Φ , adimensionnelle :

$$(2-3) \quad \Phi = \frac{B_0 \cdot \psi}{U \cdot \delta^{**}} = \Phi(\xi ; f_1, f_2, \dots)$$

avec les nouvelles coordonnées de similitude Φ et ξ :

$$(2-4) \quad \xi = \frac{B_0 \cdot y}{\delta^{**}}$$

où, B_0 , est un facteur de normalisation.

Loitsianski a montré que l'on peut choisir Φ de cette façon et construire les paramètres f_k afin que la vitesse adimensionnelle (2-2) ou la fonction de courant Φ (2-3) satisfasse l'équation de couche limite laminaire

plane incompressible et stationnaire :

$$(0-21) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

avec les conditions :

$$(0-22)' \quad \begin{cases} y = 0 & \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ y \rightarrow \infty & \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U \\ x = x_0 & \delta^{**} = \delta_0^{**} \end{cases}$$

Loitsianski déduit le premier paramètre f_1 de celui de Pohlhausen en prenant comme grandeur caractéristique l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**} au lieu de δ :

$$(2-5) \quad f_1 = \frac{U' \delta^{**2}}{\nu}$$

(Remarque : nous désignerons souvent dans la suite les dérivées par rapport à la variable longitudinale x par U', U'', \dots)

On démontrera au paragraphe suivant que l'équation de quantité de mouvement (0-19) prend alors la forme :

$$(2-6) \quad \frac{df_1}{dx} = \frac{U'}{U} \cdot F + \frac{U''}{U'} \cdot f_1$$

or, en utilisant la relation (2-5) :

$$(2-7) \quad \frac{df_1}{dx} = \frac{U'}{U \cdot f_1} \left[F \cdot f_1 + U U'' \cdot \frac{\delta^{**4}}{\nu^2} \right]$$

ce qui donne l'idée de la forme du deuxième paramètre f_2 :

$$(2-8) \quad f_2 = U \cdot U'' \cdot \frac{\delta^{**4}}{\nu^2}$$

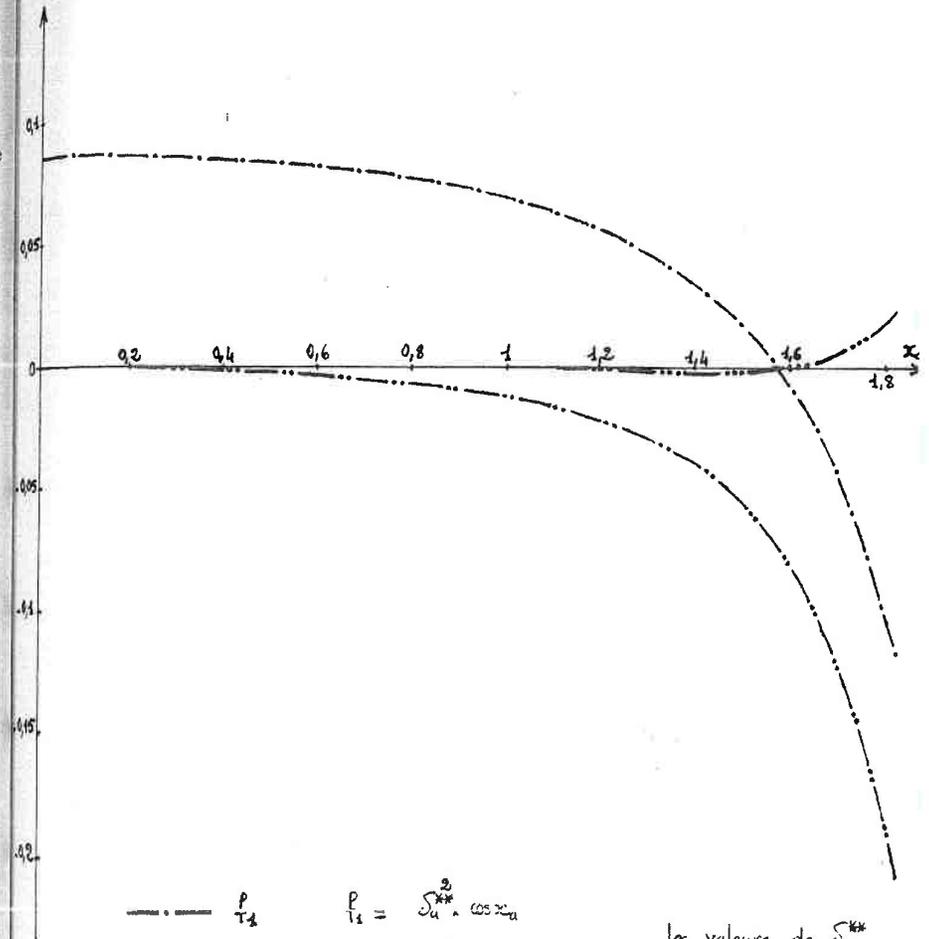
On peut ensuite définir les autres paramètres de forme, f_k par la relation générale :

$$(2-9) \quad f_k = U^{k-1} \cdot \left(\frac{d^k U}{dx^k} \right) \cdot \left(\frac{\delta^{**2}}{\nu} \right)^k$$

On constate que le premier paramètre, f_1 , caractérise la variation de la répartition de vitesse, U , à la frontière de la couche limite, au point considéré. Son signe définit l'augmentation ou la diminution de la vitesse U ; c'est à dire que la couche limite a le caractère de l'écoulement dans un convergent ou dans un divergent.

Le second paramètre, f_2 , prend en compte la courbure de la vitesse extérieure U au point considéré et son signe représente la concavité ou la convexité de cette vitesse.

Les paramètres suivants sont liés aux dérivées d'ordre plus élevé et leur influence est toujours plus petite comme l'ont montré des calculs concrets; par exemple pour un obstacle cylindrique de section droite circulaire, on voit que les deux premiers paramètres sont prépondérants sauf au voisinage du point de décollement de la couche limite, (figure 2-1).



— · — ·	f_1	$f_1 = \int_a^{2\pi} \cos^2 \alpha_0$	les valeurs de $\int_a^{2\pi}$ sont données par R.M. Terrill, [8]
— · · — ·	f_2	$f_2 = - \int_a^{2\pi} \sin^2 \alpha_0$	
— · · · — ·	f_3	$f_3 = - \int_a^{2\pi} \sin^2 \alpha_0 \cos \alpha_0$	

Figure 2-1 : Cas du cylindre de section droite circulaire

b - Transformation de l'équation de quantité de mouvement

Dans l'introduction nous avons établi l'équation de quantité de mouvement dans la forme suivante :

$$(0-19) \quad \frac{d\delta^{**}}{dx} + (2+H) \frac{\delta^{**}}{U} \cdot \frac{dU}{dx} = \frac{\gamma_0}{\rho \cdot U^2}$$

et on rappelle que le facteur de forme, H, est le rapport de l'épaisseur de déplacement, δ^* , à l'épaisseur de quantité de mouvement, δ^{**} , et que γ_0 est le coefficient de forces de frottement à la paroi par unité de surface :

$$(0-3) \quad \gamma_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Nous allons transformer la relation (0-19) en introduisant les grandeurs

$$(2-10) \quad \zeta = \left[\frac{\partial \left(\frac{u}{U} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta^{**}} \right)} \right]_{y=0}$$

$$(2-11) \quad f = - \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{u}{U} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta^{**}} \right)^2} \right]_{y=0}$$

ces deux quantités peuvent être exprimées à l'aide de grandeurs déjà définies.

En effet :

$$\zeta = \frac{\delta^{**}}{U} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{et} \quad f = - \frac{\delta^{**2}}{U} \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{y=0}$$

or la condition d'adhérence à la paroi appliquée à l'équation de couche limite (0-14) :

$$(0-14) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \cdot U' + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

donne la relation :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = - \frac{U U'}{\nu}$$

donc :

$$(2-12) \quad \begin{cases} \zeta = \frac{\delta^{**} \gamma_0}{\mu \cdot U} \\ f = \frac{U' \delta^{**2}}{\nu} = f_1 \end{cases}$$

On peut tirer l'épaisseur de quantité de mouvement en fonction de f_1 et en dérivant par rapport à la variable x on obtient :

$$\frac{d \delta^{**}}{dx} = \frac{\delta^{**} f_1'}{2 f_1} - \frac{\delta^{**} U''}{2 U'}$$

soit en reportant dans l'équation (0-19) :

$$\frac{\delta^{**} f_1'}{2 f_1} - \frac{\delta^{**} U''}{2 U'} + (2+H) \frac{\delta^{**} U'}{U} = \frac{\nu_0}{\rho U^2}$$

d'où l'on peut tirer la dérivée f_1' :

$$f_1' = \frac{U''}{U'} f_1 - 2(2+H) \frac{U' f_1}{U} + 2 \frac{\nu_0 f_1}{\rho U^2 \delta^{**}}$$

et en exprimant le dernier terme à l'aide des relations (2-12), il vient :

$$f_1' = \frac{U''}{U'} f_1 - 2(2+H) \frac{U'}{U} f_1 + 2 \frac{U'}{U} \zeta$$

d'où la forme transformée de l'équation de quantité de mouvement :

$$(2-6) \quad f_1' = \frac{U'}{U} F + \frac{U''}{U'} f_1$$

avec :

$$(2-13) \quad F = 2 \left[\zeta - (2+H) f_1 \right]$$

Si on tire F de l'équation (2-6) on obtient :

$$F = U \left[\frac{f_1'}{U'} - \frac{U'' f_1}{(U')^2} \right]$$

on peut remarquer que la quantité entre crochets est la dérivée par rapport à la variable x de f_1/U'

donc :

$$F = U \left(\frac{f_1}{U'} \right)'$$

en posant :

$$(2-14) \quad Z^{**} = \frac{\delta^{**2}}{U}$$

La définition du premier paramètre, f_1 (2-5), devient :

$$f_1 = U' \cdot Z^{**}$$

et on obtient finalement une autre forme transformée de l'équation de quantité de mouvement :

$$(2-15) \quad \frac{dZ^{**}}{dx} = \frac{F}{U}$$

Remarques : 1) la grandeur F ne dépend que de la variable longitudinale x comme le montre les relations (2-12) et (2-13).

2) en combinant les formules (2-5), (2-14) et (2-15) on obtient :

$$2 \frac{\delta^{**}}{U} (\delta^{**})' = \frac{F}{U}$$

$$d'où : (\delta^{**})' = \frac{F}{2U} \times \frac{U}{\delta^{**}} = \frac{F}{2U} \times \frac{U' \delta^{**}}{f_1}$$

et finalement :

$$(2-16) \quad \frac{(\delta^{**})'}{\delta^{**}} = \frac{U' F}{2 U f_1}$$

c - Relation de récurrence

La formule de définition générale des paramètres de forme de Loitsianski peut s'écrire :

$$(2-9)' \quad f_k = U^{k-1} \times U^{(k)} \times (Z^{**})^k$$

si on dérive par rapport à x cette relation, on a :

$$f_k' = (k-1) \cdot U^{k-2} \times U' \times U^{(k)} \times (Z^{**})^k + U^{k-1} \times U^{(k+1)} \times (Z^{**})^k + k \cdot U^{k-1} \times U^{(k)} \times (Z^{**})^{k-1} \times (Z^{**})'$$

en utilisant l'expression (2-15) et en multipliant les deux membres par $U Z^{**}$ on obtient :

$$\frac{U}{U'} f_1 f_k' = (k-1) U^{k-1} \cdot U' \cdot (Z^{**})^k \cdot (U' Z^{**}) + U^k \cdot U^{(k+1)} \cdot (Z^{**})^{k+1} + k \cdot U^{k-1} \cdot U^{(k)} \cdot (Z^{**})^k \cdot F$$

à l'aide de (2-9)', nous arrivons à la relation de récurrence suivante :

$$(2-17) \quad \frac{U}{U'} f_1 f_k' = C_k = f_{k+1}' + f_k \cdot \left[k \cdot F + (k-1) f_1 \right]$$

que nous utiliserons au cours de l'universalisation pour simplifier l'écriture des équations.

d - Indépendance des paramètres de forme

Nous allons former une combinaison linéaire des n premiers paramètres de forme, soit :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \cdot f_k = \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k \cdot U^{k-1}$$

en posant : $\beta_k = \alpha_k (Z^{**})^k \cdot U^{(k)}$

Nous pouvons considérer que nous avons un polynôme de degré (n-1) en U, qui est une fonction quelconque. Nous pouvons donc dire que si on a :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \beta_k \cdot U^{k-1} = 0$$

cela implique alors que : $\beta_k = 0 \quad \forall k, k = 1 \text{ à } n.$

Comme la grandeur Z^{**} , (2-14), est non nulle le long de l'obstacle on en déduit que :

$$\forall k, k = 1 \text{ à } n \quad \alpha_k = 0 \quad \text{si } U^{(k)} \neq 0$$

Nous venons donc de démontrer, puisque toute combinaison linéaire nulle de n paramètres f_k implique que ses coefficients soient tous nuls à condition que les n premières dérivées de la vitesse U soient non nulles, que "L'ensemble des n premiers paramètres de forme de Loitsianski constitue un système de n fonctions indépendantes de la variable x, sauf quand la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite, U, est un polynôme de la variable x".

En particulier pour certains écoulements du type de Tani [24], où la vitesse U est représentée par des fonctions de la forme :

$$U(x) = C \cdot x^m \quad \text{avec } m \text{ entier positif}$$

ils ne sont pas indépendants.

Mais un ensemble fini de paramètre f_k formera un système libre pour le cas de l'écoulement potentiel autour d'un cylindre de section droite circulaire, puisque la vitesse U est alors donnée par :

$$U(x) = 2 U_\infty \cdot \sin \frac{x}{R}$$

U_∞ étant la vitesse de l'écoulement potentiel amont et R le rayon du cylindre.

2 - Universalisation de L.G. Loitsianski

a - Transformation des équations de couche limite avec les variables de similitude

Nous avons vu que l'idée de similitude généralisée des profils de vitesse en différentes sections de la couche limite avait conduit Loitsianski à prendre comme nouvelle variable transversale, ξ , à la place de y :

$$(2-4) \quad \xi = \frac{B_0 \cdot y}{\delta^{**}}$$

l'autre coordonnée de similitude étant la nouvelle fonction de courant, Φ :

$$(2-3) \quad \Phi = \frac{B_0 \cdot \Psi}{U \cdot \delta^{**}}$$

la variable longitudinale x est conservée pour le moment.

Nous allons tout d'abord transformer les équations de couche limite à l'aide de ces nouvelles variables ξ et Φ (voir L.G. Loitsianski [6]). Nous partons des équations :

$$(0-21) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = U U' + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

$$(0-22)' \quad \begin{cases} y = 0 & \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \\ y \rightarrow \infty & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow U \\ x = x_0 & \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

et en utilisant les relations de différentiations :

$$(2-18) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) - \xi \frac{(\delta^{**})'}{\delta^{**}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{B_0}{\delta^{**}} \frac{\partial}{\partial \xi} ; \frac{\partial}{\partial y^2} = \left(\frac{B_0}{\delta^{**}} \right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^2} ; \frac{\partial}{\partial y^3} = \left(\frac{B_0}{\delta^{**}} \right)^3 \frac{\partial}{\partial \xi^3} \end{cases}$$

on obtient les équations suivantes :

$$(2-19) \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} ; \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{U B_0}{\delta^{**}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} ; \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{U B_0^2}{\delta^{**2}} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = (U' \delta^{**} + U \delta^{**'}) \frac{\Phi}{B_0} + \frac{U \delta^{**}}{B_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \xi \frac{\delta^{**'}}{B_0} U \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = U' \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \xi} - \xi \cdot U \frac{\delta^{**'}}{\delta^{**}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \end{cases}$$

en reportant les relations (2-19) dans les équations (0-21) et (0-22') et après introduction de la fonction F par l'intermédiaire de (2-16) on obtient les équations de couche limite sous la forme :

$$(2-20) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{F+2f_1}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{f_1}{B_0^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right] = \frac{U f_1}{U' B_0^2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right]$$

$$(2-21) \begin{cases} \xi = 0 & \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0 \\ \xi \rightarrow \infty & \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \rightarrow 1 \\ x = x_0 & \Phi = \Phi_0 \end{cases}$$

Pour intégrer l'équation (2-20) avec les conditions (2-21), nous avons besoin de connaître les grandeurs F et B₀.

La fonction F est définie par (2-13) :

$$(2-13) \quad F = 2 [\zeta - (2+H) f_1]$$

avec (0-18) $H = \frac{\delta^{**}}{\delta^{**'}}$ et (2-10) $\zeta = \left[\frac{\partial(\frac{u}{U})}{\partial(\frac{y}{\delta^{**}})} \right]_{y=0}$

qui deviennent après changement de variables :

$$(2-22) \begin{cases} \zeta = B_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right)_{\xi=0} \\ H = \frac{1}{B_0} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) d\xi \end{cases}$$

Pour un écoulement extérieur à la couche limite constant, le paramètre f₁, d'après sa définition (2-5), est identiquement nul. Loitsianski fait alors l'hypothèse suivante : la solution de l'équation (2-20) avec les conditions (2-21) doit être, lorsque f₁ est nul, celle de Blasius pour la plaque plane à incidence zéro, c'est-à-dire :

$$(2-23) \quad \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \xi^3} + \Phi_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} = 0$$

$$(2-24) \begin{cases} \xi = 0 & \Phi_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} = 0 \\ \xi \rightarrow \infty & \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \rightarrow 1 \end{cases}$$

or lorsque f₁ est nul, l'équation (2-20) devient :

$$(2-25) \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{F}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0$$

de la comparaison des équations (2-23) et (2-25), on tire la relation :

$$(2-26) \text{ pour } f_1 = 0 \quad \begin{cases} F = 2 \zeta_0 = 2 B_0^2 \\ \Phi = \Phi_0 \end{cases}$$

et avec la définition de ζ par (2-22), on en déduit la détermination du facteur de normalisation B₀ :

$$(2-27) \quad B_0 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi^2} \right)_{\xi=0}^{-1}$$

d'après les calculs de Blasius pour la plaque plane, on obtient :

$$(2-28) \quad B_0 = 0,470$$

Si on part de la définition de l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$(0-2) \quad \delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

et qu'on effectue le changement de variables, on arrive à :

$$(2-29) \quad B_0 = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) d\xi = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \left(1 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \right) d\xi$$

ce qui permet de trouver une autre expression du facteur de forme, H :

$$(2-22) \quad \begin{aligned} H &= \frac{1}{B_0} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) d\xi \\ H &= \frac{1}{B_0} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} \right) d\xi + \frac{1}{B_0} \int_0^\infty \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) d\xi \end{aligned}$$

d'où :

$$(2-30) \quad H = H_0 + \frac{1}{B_0} \left[\lim_{\xi \rightarrow 0} (\Phi - \Phi_0) \right]$$

avec, d'après Blasius :

$$(2-31) \quad H_0 = 2,592.$$

b - Obtention des équations universelles

La présence de la vitesse extérieure à la couche limite, U, et de sa dérivée dans le second membre de l'équation (2-20) implique que pour chaque cas particulier d'écoulement il faut refaire les calculs. Pour remédier à cet inconvénient, Loitsianski a remplacé la variable longitudinale x par l'ensemble "infini" de ses paramètres de forme définis par :

$$(2-9) f_k = U^{k-1} \cdot U^{(k)} \cdot (Z^{**})^k \quad \text{où} \quad (2-14) \quad Z^{**} = \frac{\delta^{**2}}{x}$$

avec la relation de récurrence :

$$(2-17) \frac{U}{U'} \cdot f_1 \cdot f'_k = f_{k+1} + f_k \cdot [kF + (k-1)f_1] = \theta_k$$

Remarque : Loitsianski introduit un ensemble "infini" de paramètres de forme pour n'étudier ensuite, à juste titre, que les approximations mono et biparamétriques. Il nous a semblé plus strict de ne considérer qu'un système fini de paramètres lorsqu'on présentera les universalisations dans les sections deux et trois. Mais il ne faut pas oublier que la solution des équations universelles tronquées au rang N ne converge vers la solution exacte du problème de couche limite que lorsque N tend vers l'infini.

Toutes les grandeurs qui étaient fonction de la seule variable longitudinale x deviennent des fonctions des paramètres de forme :

$$\zeta = \zeta(f_1, f_2, \dots); H = H(f_1, f_2, \dots); F = F(f_1, f_2, \dots)$$

la fonction de courant, Φ , devient elle : $\Phi = \Phi(\xi; f_1, f_2, \dots)$

En utilisant la formule de différentiation suivante :

$$(2-32) \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=1}^{k=\infty} f'_k \cdot \frac{\partial}{\partial f_k} = \frac{U'}{U f_1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \theta_k \cdot \frac{\partial}{\partial f_k}$$

on met l'équation (2-20) sous la forme universelle de Loitsianski :

$$(2-33) \begin{cases} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} + \frac{F+2f_1}{2B_0^2} \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{f_1}{B_0^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right] = \\ = \frac{1}{B_0^2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \theta_k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial f_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_k} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) \end{cases}$$

avec les conditions :

$$(2-34) \begin{cases} \xi = 0 \\ \xi \rightarrow \infty \\ f_1 = f_2 = \dots = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \rightarrow 1 \\ \Phi = \Phi_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Solution de Blasius} \\ \text{pour la plaque plane} \end{array}$$

le point déterminé par $f_1 = f_2 = \dots = 0$ est un point singulier de l'équation (2-33) et la solution de l'équation ne peut être alors quelconque : d'après l'hypothèse de Loitsianski ce doit être la solution de Blasius pour la plaque plane.

c - Résolution numérique et exploitation

L'équation (2-33) avec les conditions (2-34) est universelle car elle est valable pour toutes les vitesses U. Il suffit donc d'intégrer numériquement et de tabuler la solution en fonction des différentes valeurs des paramètres de forme. Or on trouve dans le premier membre de l'équation (2-33) la fonction F qui dépend de la solution de cette équation ; mais les difficultés rencontrées lors de l'intégration sont compensées en parties, d'après Loitsianski, par le choix des variables de similitude, ξ et Φ ; en effet, on obtient déjà une bonne approche des solutions exactes par la méthode monoparamétrique.

Ensuite, pour chaque cas particulier ; les calculs se réduisent à la détermination de l'épaisseur de quantité de mouvement, δ^{**} , ou, ce qui revient au même, de la quantité Z^{**} (2-14) qui est la solution de l'équation différentielle non linéaire du premier ordre :

$$(2-15) \frac{dZ^{**}}{dx} = \frac{F(f_1, f_2, \dots)}{U} = \frac{F(U'Z^{**}, UU'Z^{**2}, \dots)}{U}$$

Les résultats obtenus par la méthode monoparamétrique sont déjà très satisfaisants en ce qui concerne le cas de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire (voir L.G. Loitsianski [6]) et sont améliorés par l'approximation biparamétrique, puisqu'on obtient pratiquement la solution exacte de Terrill, [8], sauf au voisinage du point de décollement. (voir L.G. Loitsianski [19]).

Les méthodes numériques employées pour résoudre les équations mono et biparamétrique sont détaillées dans les publications de L.M. Simuni - N.M. Terentiew [25] et de L.M. Simuni - E.F. Ozerova [26].

II - PREMIERE GENERALISATION DE L'EQUATION UNIVERSELLE DE LOITSIANSKI

Nous venons de voir que la méthode biparamétrique de Loitsianski donnait de très bons résultats sauf au voisinage du point de décollement de la couche limite, en particulier pour l'écoulement autour d'un cylindre de section droite circulaire. Mais, comme l'indique V. Saljnikov [27], du point de vue pratique cette méthode possède l'inconvénient de compliquer l'obtention des grandeurs caractéristiques de la couche limite dans chaque cas particulier. En effet il faut chaque fois effectuer une intégration supplémentaire, celle de l'équation de quantité de mouvement (2-15) qui n'est pas linéaire ; or ce calcul a présenté quelques difficultés pour le cas des cylindres elliptiques (voir I. Nayfeld [28]).

C'est pourquoi, à l'instigation de V. Saljnikov, nous avons choisi une méthode qui vise à associer les avantages de la méthode paramétrique de V. Saljnikov - S. Oka [7], qui offre dans chaque cas particulier un calcul rapide mais moins précis des grandeurs caractéristiques de la couche limite à partir des tables universelles sans intégration supplémentaire, et ceux de la méthode de Loitsianski, c'est-à-dire une convergence rapide due au choix des paramètres de forme de similitude.

Dans le premier paragraphe nous allons établir la nouvelle équation universelle ; ensuite nous développerons l'approximation monoparamétrique qui a été testée pour le cas du cylindre circulaire. Dans le troisième paragraphe nous expliquerons les raisons qui nous ont conduits à renoncer à la résolution numérique de l'approximation biparamétrique.

1 - Généralisation des équations de solutions affines de Falkner-Skan

a - Choix d'une nouvelle variable transversale

Nous rappelons que les équations de la couche limite laminaire pour un fluide incompressible en mouvement plan permanent se réduisent avec les hypothèses de Prandtl à une équation pour la fonction de courant

$$(0-21) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \cdot U' + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

avec les conditions :

$$(0-22) \quad \begin{cases} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 & \text{pour } y = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U & \text{pour } y \rightarrow + \infty \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0 & \text{pour } x = x_0 \end{cases}$$

En suivant l'idée de Loitsianski, [19], sur la similitude affine généralisée des profils de vitesse dans différentes sections de la couche limite, V. Saljnikov a choisi d'introduire à la place de la variable transversale y la variable de Görtler, [2] :

$$(2-35) \quad \eta = \frac{U \cdot y}{\sqrt{2 \nu \int_0^x U(s) \cdot ds}}$$

qui, dans le cas d'une répartition de vitesse à la frontière extérieure de la couche limite du type : $U(x) = Cx^m$, se réduit à la variable des solutions de similitude :

$$\eta = \sqrt{\frac{(m+1) \cdot C \cdot x^{m-1}}{2 \nu}}$$

elle généralise ainsi l'utilisation de la variable choisie dans le cas des solutions affines.

En conservant la variable longitudinale x nous définissons la nouvelle fonction de courant, $\bar{\psi}$, par :

$$(2-36) \quad \Phi = \frac{\Psi}{\sqrt{2 \int_0^x U(s) ds}}$$

Nous allons transformer l'équation (0-21) avec les conditions (0-22) à l'aide de ce changement de variables. Soient les formules de différentiations :

$$(2-37) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{y}{\sqrt{2 \int_0^x U(s) ds}} \times \left[U' - \frac{U^2}{2 \int_0^x U ds} \right] \times \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{U}{\sqrt{2 \int_0^x U ds}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{U^2}{2 \int_0^x U ds} \times \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}; \\ &\quad \frac{\partial^3}{\partial y^3} = \frac{U^3}{\left[2 \int_0^x U ds \right]^{3/2}} \times \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \end{aligned} \right.$$

avec lesquelles nous obtenons les relations :

$$(2-38) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= U \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\sqrt{2 \int_0^x U ds}} \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{U^3}{2 \int_0^x U ds} \times \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\sqrt{U} \times U}{\sqrt{2 \int_0^x U ds}} \times \Phi + \sqrt{2 \int_0^x U ds} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \times \left[U' - \frac{U^2}{2 \int_0^x U ds} \right] \times \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= U' \times \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + U \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} + \frac{U \times y}{\sqrt{2 \int_0^x U ds}} \times \left[U' - \frac{U^2}{2 \int_0^x U ds} \right] \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \end{aligned} \right.$$

qui, reportées dans (0-21), donnent après simplification :

$$(2-39) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \Phi \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{2 \cdot U' \int_0^x U ds}{U^2} \times \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \\ &= \frac{2 \int_0^x U ds}{U} \times \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'on exprime l'épaisseur de quantité de mouvement, δ^{**} (0-2), à l'aide des nouvelles variables, on obtient :

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \frac{\sqrt{2 \int_0^x U ds}}{U} \times \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \times \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \times d\eta$$

on définit, alors, le facteur de normalisation B, par :

$$(2-40) \quad B = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \times \left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \times d\eta$$

Nous pouvons remarquer la différence importante avec la méthode de Loitsianski, où B_0 était une constante déterminée par les relations (2-27) ou (2-29) et dont la valeur était calculée d'après Blasius (2-28). A partir de maintenant la grandeur B sera une fonction continue de la variable longitudinale x qui ne coïncidera avec la constante de Loitsianski qu'au point d'arrêt :

$$(2-41) \quad \begin{cases} B = B(x) \\ B(0) = B_0 = 0,470. \end{cases}$$

L'épaisseur de quantité de mouvement s'écrit donc :

$$(2-42) \quad \delta^{**} = B \times \frac{\sqrt{2 \int_0^x U ds}}{U}$$

Si nous exprimons le premier paramètre de Loitsianski, f_1 (2-5), à l'aide de la relation précédente, nous obtenons :

$$(2-43) \quad f_1 = \frac{2 \cdot U' \cdot \int_0^x U ds}{U^2} \times B^2$$

où on peut mettre en évidence la fonction principale de Görtler [2], β , définie par :

$$(2-44) \quad \beta = \frac{2 U'}{U^2} \times \int_0^x U ds$$

et donc :

$$(2-45) \quad f_1 = \beta \times B^2$$

En utilisant ces dernières relations, l'équation (2-39) s'écrit :

$$(2-46) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \Phi \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \times \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ & \frac{U \times f_1}{U' \times B^2} \times \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

avec les conditions :

$$(2-47) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta &= 0 & \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 \\ \eta &\rightarrow \infty & \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &\rightarrow 1 \\ x &= x_0 & \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_0 \end{aligned} \right.$$

le premier membre de (2-46) constitue l'équation de Falkner-Skan dans la forme de Hartree, [29] :

$$\frac{\partial^3 \Phi_H}{\partial \eta^3} + \Phi_H \times \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial \eta^2} + \beta \times \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0$$

b - Universalisation

Nous avons indiqué dans la première partie que l'universalisation proprement dite d'un problème donné ne peut être obtenue qu'en introduisant un nombre infini de paramètres, mais comme du point de vue pratique nous sommes obligés de ne considérer qu'une approximation universelles ne dépendant que d'un nombre fini de paramètres, nous allons donc développer l'universalisation approchée au rang N.

Nous introduisons à la place de la variable longitudinale x un ensemble fini de N paramètres :

$$(2-48) \quad x \longrightarrow \left[f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x) \right]$$

où les f_k sont les paramètres de forme de Loitsianski :

$$(2-9') \quad f_k = U^{k-1} \times U^{(k)} \times \left[\frac{\sigma^{**2}}{\nu} \right]^k \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } N$$

l'équation de quantité de mouvement sous la forme (2-15), est indépendante du choix de la variable transversale ; nous pouvons déduire la relation de récurrence suivante :

$$(2-17)' \quad \frac{U}{U'} \times f_1 \times f'_1 = \theta_\ell = f_{\ell+1} + f_\ell \times \left[\ell F + (\ell-1) f_1 \right] \quad \text{pour } \ell = 1 \text{ à } N-1$$

où, la fonction F est toujours définie par :

$$(2-13) \quad F = 2. \left[\zeta - (2+H) f_1 \right], \quad \text{avec : } (2-12) \quad \zeta = \frac{\tau_{0, \delta}^{**}}{\mu \cdot U} = B \times \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=0}$$

Avec la formule de différentiation :

$$(2-49) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{U'}{U \cdot f_1} \times \sum_{\ell=1}^{\ell=N-1} \theta_\ell \cdot \frac{\partial}{\partial \eta_\ell} + f'_N \cdot \frac{\partial}{\partial f_N}$$

l'équation (2-46) s'écrit :

$$(2-50) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Phi_N}{\partial \eta^3} + \Phi_N \times \frac{\partial^2 \Phi_N}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \times \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_N}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ & \frac{1}{B^2} \times \sum_{\ell=1}^{\ell=N-1} \theta_\ell \times \left[\frac{\partial \Phi_N}{\partial \eta_\ell} \times \frac{\partial^2 \Phi_N}{\partial \eta_\ell \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_N}{\partial \eta_\ell} \times \frac{\partial^2 \Phi_N}{\partial \eta^2} \right] + \\ & + \frac{U \cdot f_1}{U' \cdot B^2} \times f'_N \times \left[\frac{\partial \Phi_N}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \Phi_N}{\partial f_N \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_N}{\partial f_N} \times \frac{\partial^2 \Phi_N}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

D'après le principe de l'universalisation exposé dans la première partie nous devons introduire le paramètre supplémentaire f_{N+1} afin de pouvoir exprimer la dérivée, f'_N , à l'aide de la relation de récurrence précédente. Mais nous allons supposer que ce paramètre f_{N+1} est sans influence.

La validité de cette hypothèse repose sur la constatation qui a été faite sur le comportement des paramètres de forme de Loitsianski au paragraphe précédent. Nous avons alors vu que leur influence diminue considérablement lorsque leur indice augmente et on peut raisonnablement ne prendre en considération que les premiers paramètres : (par exemple : figure (2-1)). Nous avons alors la relation :

$$(2-51) \quad \frac{U}{U'} \times f_1 \times f'_N = \theta_N = f_N \times \left[N \cdot F + (N-1) \cdot f_1 \right]$$

qui permet d'écrire l'universalisation approchée au rang N du problème de couche limite considéré :

$$(2-52) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Phi_N^*}{\partial \eta^3} + \Phi_N^* \cdot \frac{\partial^2 \Phi_N^*}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_N^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ & \frac{1}{B^2} \sum_{k=1}^{k=N} \theta_k \cdot \left[\frac{\partial \Phi_N^*}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \Phi_N^*}{\partial f_k \cdot \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_N^*}{\partial f_k} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_N^*}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

avec les conditions :

$$(2-53) \left\{ \begin{aligned} & \text{pour } \eta = 0 & \Phi_N^* = \frac{\partial \Phi_N^*}{\partial \eta} = 0 \\ & \eta \rightarrow \infty & \frac{\partial \Phi_N^*}{\partial \eta} \rightarrow 1 \\ & f_1 = f_2 = \dots = f_N = 0 & \Phi_N^* = \Phi_0 \end{aligned} \right. \quad \text{Solution de Blasius pour la plaque plane}$$

Pour alléger l'écriture des formules, nous désignerons dans la suite Φ_N^* par Φ .

2 - Approximation monoparamétrique

Nous allons présenter dans ce paragraphe la méthode de résolution numérique de l'équation universelle approchée avec un seul paramètre, ainsi que la manière d'exploiter les tables universelles dans chaque cas concret. Nous illustrerons cela en donnant les résultats obtenus pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire et nous les comparerons à ceux de la solution exacte de R. M. Terrill [8].

a - Equation universelle monoparamétrique

Lorsque N a la valeur 1, nous obtenons d'après (2-52), (2-53) et (2-51) :

$$(2-54) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Phi_1^*}{\partial \eta^3} + \Phi_1^* \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ & \frac{f_1 \cdot F}{B^2} \cdot \left[\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial f_1 \cdot \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial f_1} \times \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

avec les conditions :

$$(2-55) \left\{ \begin{aligned} & \eta = 0 & \Phi_1^* = \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \eta} = 0 \\ & \eta \rightarrow \infty & \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \eta} \rightarrow 1 \\ & f_1 = 0 & \Phi_1^* = \Phi_0 \end{aligned} \right. \quad \text{Solution de Blasius pour la plaque plane}$$

La fonction caractéristique F ne dépend que du paramètre f_1 comme nous allons le montrer ; en partant de la relation :

$$(2-16) \quad F = \frac{2 \cdot U \cdot f_1}{U'} \times \frac{(\delta^{**})'}{\delta^{**}}$$

lorsqu'on exprime la dérivée de l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**} :

$$(2-42) \quad \delta^{**} = \frac{B}{U} \times \sqrt{2 \nu \int_0^x U \, ds}$$

$$(\delta^{**})' = \frac{\sqrt{2 \nu \int_0^x U \, ds}}{U} \times B' - \frac{B \times U'}{U^2} \sqrt{2 \nu \int_0^x U \, ds} + \frac{B \cdot \nu}{\sqrt{2 \nu \int_0^x U \, ds}}$$

$$\text{soit : } (\delta^{**})' = \frac{B'}{B} \cdot \delta^{**} - \frac{U'}{U} \cdot \delta^{**} + \frac{\nu \cdot B^2}{U \cdot \delta^{**}}$$

et en effectuant le changement de variables : $x \rightarrow f_1$, on obtient pour F après simplifications

$$F = 2 \times \frac{f_1 \cdot F}{B} \times \frac{dB}{df_1} - 2 f_1 + 2 B^2$$

qui permet d'arriver à l'expression suivante :

$$(2-56) \quad F = \frac{2 \cdot (B^2 - f_1)}{1 - \frac{2}{B} \cdot f_1 \cdot \frac{dB}{df_1}}$$

nécessaire pour l'intégration numérique de (2-54).

Remarque : Si on effectue la localisation par rapport au paramètre f_1 , ce qui signifie pour Loitsianski qu'on néglige les dérivées partielles par rapport à f_1 , l'équation (2-54)

devient :

$$(2-57) \quad \frac{\partial^3 \Phi_{IL}^*}{\partial \eta^3} + \Phi_{IL}^* \frac{\partial^2 \Phi_{IL}^*}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_{IL}^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 0$$

qui est l'équation de similitude de Falkner-Skan dans la forme de Hartree [29].

b - Méthode numérique de résolution

Nous ne calculerons pas la solution de l'équation (2-54) sous la forme d'un développement comme nous l'avons décrit dans la première partie, car la non linéarité de (2-54) rend non aisé la détermination de la fonction universelle de ce problème. Nous l'avons donc résolue comme une équation à deux variables : η et f_1 .

L'équation (2-54) étant du troisième ordre par rapport aux dérivées partielles en η , nous allons d'abord diminuer cet ordre en posant :

$$(2-58) \quad \varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

nous obtenons alors :

$$(2-59) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \Phi \times \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{f_1}{B^2} [1 - \varphi^2] = \frac{f_1 \cdot F}{B^2} \times \left[\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right]$$

Nous avons choisi pour discrétiser cette équation par la méthode des différences finies le schéma implicite suivant :

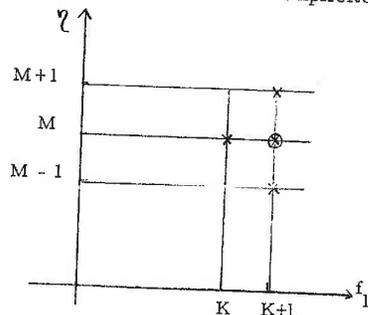


Figure 2-2

en désignant par $\Delta \eta$ et Δf_1 les pas du maillage, les coordonnées (η, f_1) d'un nœud du réseau sont définies par :

$$(2-60) \quad \begin{cases} \eta = (M-1) \times \Delta \eta & M = 1, 2, \dots, N \\ f_1 = K \times \Delta f_1 & K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Remarque : - le pas $\Delta \eta$ sera fixe. En raison de la définition de l'épaisseur de couche limite δ nous bornerons convenablement la variation de la variable transversale η ; donc, pour chaque valeur de f_1 , nous avons un nombre d'inconnues fini, N.

- le pas Δf_1 sera, lui, variable ; on est en effet obligé de le diminuer à l'approche du point de décollement de la couche limite pour éviter la divergence de la méthode.

En supposant que la solution est connue pour une valeur donnée de f_1, K , nous allons calculer la solution au pas suivant, $K+1$. Nous nous plaçons au nœud de coordonnées $(M, K+1)$ et nous approchons les dérivées partielles en ce point par les formules suivantes (différences centrées) :

$$(2-61) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \approx \frac{\varphi_{M+1} - \varphi_{M-1}}{2 \cdot \Delta \eta} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \approx \frac{\varphi_{M+1} - 2 \varphi_M + \varphi_{M-1}}{(\Delta \eta)^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \approx \frac{\varphi_M^{K+1} - \varphi_M^K}{\Delta f_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \approx \frac{\Phi_M^{K+1} - \Phi_M^K}{\Delta f_1} \end{cases}$$

où, nous avons indiqué l'indice correspondant à f_1 que lorsqu'il avait une valeur différente de : $K+1$.

Nous constatons de plus que l'équation (2-59) n'est pas linéaire, or la résolution directe de telles équations est difficile, aussi nous allons la linéariser. Pour obtenir une bonne approximation exacte de (2-59), nous calculons, à f_1 fixé, la solution à l'aide d'une méthode itérative. Si nous

désignons par i l'indice d'itération nous pouvons alors linéariser (2-59) en utilisant les relations suivantes :

$$(2-62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi \times \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \rightarrow \Phi^{i-1} \times \frac{\partial \Phi^i}{\partial \eta} \\ \varphi^2 \rightarrow \varphi^{i-1} \times \varphi^i \\ \varphi \times \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \rightarrow \varphi^{i-1} \times \frac{\partial \varphi^i}{\partial f_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \rightarrow \frac{\partial \Phi^{i-1}}{\partial f_1} \times \frac{\partial \varphi^i}{\partial \eta} \end{array} \right.$$

En reportant les formules de discrétisations (2-61) dans l'équation (2-59) linéarisée à l'aide de (2-62), nous obtenons, au nœud de coordonnées $(M, K+1)$ à l'itération i , l'équation aux différences finies linéaire valable pour $M = 2$ à $(N-1)$:

$$(2-63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi_{M+1}^i - 2 \varphi_M^i + \varphi_{M-1}^i}{(\Delta \eta)^2} + \frac{\Phi_M^{i-1} \times \varphi_{M+1}^i - \varphi_{M-1}^i}{2 \cdot \Delta \eta} + \frac{f_1}{(B^{i-1})^2} \left[1 - \varphi_M^{i-1} \times \varphi_M^i \right] \\ = \frac{f_1 \times F^{i-1}}{(B^{i-1})^2} \times \left[\varphi_M^{i-1} \times \frac{\varphi_M^{K+1} - \varphi_M^K}{\Delta f_1} - \frac{\Phi_M^{i-1} - \Phi_M^K}{\Delta f_1} \times \frac{\varphi_{M+1}^i - \varphi_{M-1}^i}{2 \cdot \Delta \eta} \right] \end{array} \right.$$

où B^{i-1} , F^{i-1} et Φ_M^{i-1} sont déterminés par :

$$(2-64) \quad \left\{ \begin{array}{l} B^{i-1} = \int_0^{\infty} \varphi^{i-1} \times (1 - \varphi^{i-1}) \, d\eta \neq \int_0^{\eta_{Max}} \varphi^{i-1} (1 - \varphi^{i-1}) \, d\eta \\ F^{i-1} = \frac{2 \left[(B^{i-1})^2 - f_1 \right]}{1 - \frac{2}{B^{i-1}} \times f_1 \times \frac{B^{i-1} - B_K}{\Delta f_1}} \\ \Phi_M^{i-1} = \int_0^{\eta} \varphi^{i-1} \cdot d\eta \end{array} \right.$$

et avec les conditions aux limites suivantes :

$$(2-65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1^i = \Phi_1^i = 0 \\ \varphi_N^i = 1 \end{array} \right. \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ et } \forall K \in \mathbb{Z}$$

Nous pouvons mettre l'équation (2-63) sous la forme :

$$(2-66) \quad a_M^{i-1} \times \varphi_{M-1}^i - 2 \cdot b_M^{i-1} \times \varphi_M^i + c_M^{i-1} \cdot \varphi_{M+1}^i = d_M^{i-1} \quad \text{pour } M = 2 \text{ à } (N-1)$$

les coefficients a_M^{i-1} , b_M^{i-1} , c_M^{i-1} et d_M^{i-1} étant des grandeurs connues avant le début de l'itération i et dont les expressions sont :

$$(2-67) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_M^{i-1} = 1 - \frac{\Delta \eta}{2} \times \left[\frac{\Phi_M^{i-1}}{(B^{i-1})^2} + \frac{f_1 \times F^{i-1}}{(B^{i-1})^2} \times \frac{\Phi_M^{K+1} - \Phi_M^K}{\Delta f_1} \right] \\ b_M^{i-1} = 1 + \frac{(\Delta \eta)^2 \cdot \varphi_M^{i-1} \times f_1}{2 \cdot (B^{i-1})^2} \left[1 + \frac{F^{i-1}}{\Delta f_1} \right] \\ c_M^{i-1} = 1 + \frac{\Delta \eta}{2} \times \left[\frac{\Phi_M^{i-1}}{(B^{i-1})^2} + \frac{f_1 \cdot F^{i-1}}{(B^{i-1})^2} \times \frac{\Phi_M^{K+1} - \Phi_M^K}{\Delta f_1} \right] \\ d_M^{i-1} = - \frac{(\Delta \eta)^2 \times f_1}{(B^{i-1})^2} \left[1 + \frac{\varphi_M^{i-1} \times \varphi_M^K \times F^{i-1}}{\Delta f_1} \right] \end{array} \right.$$

A chaque itération nous avons donc à résoudre un système linéaire de $N-2$ équations à $N-2$ inconnues, φ_M^i , (2-66). Nous avons utilisé la méthode du "Progonka" dont l'étude est faite dans l'annexe 2 et qui est une forme particulière de la méthode classique de Gauss (voir J. LEGRAS [30]) appliquée à un système linéaire dont la matrice est tridiagonale

On pose :

$$(2-68) \quad \varphi_M^i = K_M^i + L_M^i \times \varphi_{M+1}^i \quad \text{pour } M = 2 \text{ à } N-1$$

et en remplaçant φ_{M-1}^i par cette relation dans (2-66), on obtient après identification avec (2-68) :

$$(2-69) \quad \begin{cases} K_M^i = \frac{a_M^{i-1} \times K_{M-1}^i - d_M^{i-1}}{2 \cdot b_M^{i-1} - a_M^{i-1} \times L_{M-1}^i} \\ L_M^i = \frac{C_M^{i-1}}{2 \cdot b_M^{i-1} - a_M^{i-1} \times L_{M-1}^i} \end{cases} \quad \text{pour } M = 2 \text{ à } N-1$$

la première des conditions aux limites (2-65) implique pour les coefficients de Progonka K_M^i et L_M^i :

$$(2-70) \quad K_1^i = L_1^i = 0 \quad \forall i \in N \text{ et } \forall f_1$$

La méthode du Progonka consiste donc pour résoudre les systèmes linéaires du type de (2-66), à calculer d'abord les coefficients de Progonka K et L par les relations (2-69) avec l'initialisation (2-70) en faisant varier M de 2 à N-1, et ensuite à obtenir la solution en appliquant la formule (2-68), M variant cette fois-ci de N-1 à 2 et φ_N^i étant déterminé par (2-65).

Nous démontrons dans l'annexe 2 que les relations :

$$(2-71) \quad \begin{cases} a_M^{i-1} > 0 \\ c_M^{i-1} > 0 \\ b_M^{i-1} > \frac{a_M^{i-1} + c_M^{i-1}}{2} \end{cases} \quad M = 2, N-1$$

constituent des conditions suffisantes de stabilité de cette méthode.

Pour chaque pas en f_1 , nous initialisons la méthode itérative en prenant la solution trouvée au pas précédent :

$$(2-72) \quad \begin{cases} \varphi_M^{K+1} = \varphi_M^K \\ \Phi_M^{K+1} = \Phi_M^K \end{cases} \quad \forall M, M = 1 \text{ à } N$$

et nous avons choisi comme test de sortie de ces itérations la réalisation simultanée des conditions suivantes :

$$(2-73) \quad \begin{cases} \text{Max}_{M=2, N-1} |\varphi_M^i - \varphi_M^{i-1}| < \varepsilon \\ \text{Max}_{M=2, N-1} |\Phi_M^i - \Phi_M^{i-1}| < \varepsilon \\ |F^i - F^{i-1}| < \varepsilon \end{cases}$$

où ε est un infiniment petit.

Nous rappelons que d'après la condition initiale (2-55), nous commencerons les calculs pour la valeur nulle de f_1 . Nous générerons alors la solution de Blasius pour la plaque plane. Pour passer des valeurs positives de f_1 aux valeurs négatives, il faut repartir de 0.

Nous venons de voir comment calculer la solution pour une valeur fixée du paramètre de forme f_1 ; or il ne faut pas oublier que les tables universelles que nous trouvons doivent nous permettre d'évaluer les grandeurs caractéristiques de la couche limite dans chaque cas concret ; le paramètre f_1 ne pourra donc pas prendre n'importe quelles valeurs. En effet nous sommes limités d'une part par le point d'arrêt et d'autre part par le point de décollement de la couche limite.

Le choix de la variable de Gortler, η , comme variable transversale et la généralisation de la notion de similitude conduisent au fait qu'au point d'arrêt la fonction principale de Gortler, β , est égale à 1. (voir H. Schlichting [1], chapitre 8) donc :

$$(2-74) \quad \beta = \frac{f_1}{2} = 1 \quad \text{au point d'arrêt}$$

et on pourra tester l'approche de ce point en calculant β .

Remarque : d'après l'expression de F, (2-56), on constate que F doit être nulle au point d'arrêt, ce qui peut constituer un autre test.

Au point de décollement, les forces de frottement à la paroi disparaissent, le coefficient χ_0 , (0-3) est donc nul ce qui traduit par la relation :

$$(2-75) \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \quad \text{au point de décollement}$$

on testera l'approche de ce point en calculant cette quantité par la formule :

$$(2-76) \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = \frac{4 \cdot \varphi_2^i - 3 \cdot \varphi_1^i - \varphi_3^i}{2 \cdot \Delta \eta}$$

Du point de vue pratique : 1) Pour la variable transversale nous avons pris comme pas : $\Delta \eta = + 0,05$, et N est déterminé de façon à obtenir la solution pour toute la couche limite. Or, d'après Blasius, la définition de l'épaisseur de couche limite δ correspond à la valeur 5 pour η . Nous avons donc pris, par mesure de prudence, la valeur 161 pour N.

2) Pour le paramètre de forme f_1 nous avons pris comme valeur initiale du pas : $|\Delta f_1| = + 0,0005$; ce pas étant diminué pour des raisons de stabilité à l'approche du point de décollement :

$- 0,07 < f_1 \leq - 0,06$	$\Delta f_1 = - 0,00025$
$- 0,08 < f_1 \leq - 0,07$	$\Delta f_1 = - 0,000125$
$- 0,083125 < f_1 \leq - 0,08$	$\Delta f_1 = - 0,00003125$
$f_1 \leq - 0,083125$	$\Delta f_1 = - 0,000005$

3) Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur CII 10070 de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique de Nancy.

c - Tables universelles monoparamétriques et leur utilisation

Pour chaque valeur du paramètre de forme f_1 on obtient les renseignements suivants :

- le profil de vitesse adimensionnelle dans la couche limite :

$$\varphi_M \text{ pour } M = 1 \text{ à } N$$

- la fonction de courant adimensionnelle :

$$\Phi_M \text{ pour } M = 1 \text{ à } N$$

- le rapport : $\beta = f_1/B^2$

- les grandeurs A, B, H, ζ :

$$(2-77) \quad \begin{cases} A = \int_0^{\infty} (1 - \varphi) \times d\eta \neq \eta_{\max} - \Phi(\eta_{\max}) = 8 - \Phi_N \quad (N=161) \\ B = \int_0^{\infty} \varphi \times (1 - \varphi) \times d\eta \neq \int_0^{\eta_{\max}} \varphi \times (1 - \varphi) \cdot d\eta \\ H = A/B \\ \zeta = B \times \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \end{cases}$$

qui serviront à déterminer les grandeurs caractéristiques de la couche limite dans les cas concrets. Ces résultats, calculés une fois pour toutes, constituent les tables universelles monoparamétriques :

f_1	A	B	H	ζ	$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}$	β

$f_1 = \dots$		
η	φ	Φ
0		
0,05		

8,0		

figure : 2-3

Nous rappelons que ces tables ne sont valables que pour un fluide incompressible en mouvement laminaire plan permanent. Afin de calculer les grandeurs caractéristiques de la couche limite, δ^* , δ^{**}

et $\zeta_0 \dots$, dans chaque cas concrets vérifiant les conditions d'écoulement ci-dessus, il faut déterminer la valeur du paramètre f_1 qui correspond à une abscisse longitudinale x donnée.

Lorsque la répartition de vitesse à la frontière extérieure de la couche limite, U , est précisée, on peut calculer la fonction principale de Görtler, β , pour une abscisse x_0 donnée :

$$(2-44) \quad \beta(x_0) = \frac{2 \cdot U'}{U^2} \int_0^{x_0} U(s) \cdot ds$$

et on peut chercher dans la colonne β de la première table universelle le terme qui est le plus proche de $\beta(x_0)$; on peut ensuite évaluer, en interpolant, les valeurs : $A(x_0)$, $B(x_0)$, $H(x_0)$, $\zeta(x_0)$ et $f_1(x_0)$ qui vont nous permettre de calculer δ^* , δ^{**} et ζ_0 au point de l'obstacle d'abscisse x_0 .

L'épaisseur de déplacement, $\delta^*(x_0)$, est calculé à l'aide de $A(x_0)$:

$$(2-78) \quad \delta^*(x_0) = \frac{A(x_0)}{U(x_0)} \times \sqrt{2 \cdot \nu \cdot \int_0^{x_0} U(s) ds}$$

l'épaisseur de quantité de mouvement, $\delta^{**}(x_0)$, est évaluée par :

$$(2-42) \quad \delta^{**}(x_0) = \frac{B(x_0)}{U(x_0)} \times \sqrt{2 \cdot \nu \cdot \int_0^{x_0} U(s) \cdot ds}$$

et le coefficient de forces de frottement à la paroi par unité de surface, $\zeta_0(x_0)$, est déterminé par :

$$(2-12) \quad \zeta_0(x_0) = \mu \frac{U(x_0) \cdot \zeta(x_0)}{\delta^{**}(x_0)}$$

ou

$$(2-79) \quad \zeta_0(x_0) = \frac{\mu \times U^2(x_0)}{\sqrt{2 \nu \int_0^{x_0} U(s) ds}} \times \left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}(x_0)$$

La valeur $f_1(x_0)$ permet d'obtenir le profil de vitesse et la fonction de courant dans cette section de la couche limite à l'aide de la seconde table universelle.

Nous constatons que nous n'avons pas eu besoin d'intégrer une équation différentielle supplémentaire comme c'était le cas pour la méthode de Loitsianski.

d - Cas de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire

Nous allons tester cette approximation monoparamétrique sur le cas du cylindre de section droite circulaire pour lequel, R. M. Terrill a donné une solution considérée comme exacte, [8].

Terrill utilise les variables adimensionnelles classiques de la couche limite :

$$(2-80) \quad \begin{cases} x_a = \frac{x}{L} & y_a = \frac{y}{L} \times \sqrt{Re} \\ u_a = \frac{u}{U_0} & v_a = \frac{v}{U_0} \times \sqrt{Re} \end{cases}$$

où L et U_0 sont une longueur et une vitesse caractéristique de l'écoulement et Re est le nombre de Reynolds correspondant :

$$Re = \frac{U_0 \cdot L}{\nu}$$

A l'aide de ces variables Terrill donne les valeurs des grandeurs caractéristiques de la couche limite, calculées sous la forme adimensionnelle suivante :

$$(2-81) \quad \begin{cases} \delta_a^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u_a}{U_a}\right) \times dy_a \\ \delta_a^{**} = \int_0^\infty \frac{u_a}{U_a} \cdot \left(1 - \frac{u_a}{U_a}\right) \cdot dy_a \\ \zeta_a = \left[\frac{\partial u_a}{\partial y_a} \right]_{y_a=0} \end{cases}$$

Nous venons de voir que l'approximation monoparamétrique nous fournissait les valeurs A , B , H , ζ qui sont calculées avec la variable de Görtler, η , comme variable transversale. Entre cette variable adimensionnelle et y_a , il existe la relation :

$$(2-82) \quad \eta = \gamma_1 \times y_a \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = \frac{U_a}{\sqrt{2 \nu \int_0^{x_0} U_a(s) ds}}$$

et on calculera donc les grandeurs caractéristiques adimensionnelles

par les formules :

$$(2-83) \quad \begin{cases} \delta_a^* = \frac{A}{\gamma_1} \\ \delta_a^{**} = \frac{B}{\gamma_1} \\ \gamma_a = U_a \times \gamma_1 \times \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \end{cases}$$

Pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire de rayon R, la répartition de vitesse à la frontière extérieure de la couche limite est de la forme :

$$(2-84) \quad U(x) = 2 \cdot U_\infty \cdot \sin \frac{x}{R}$$

où U_∞ est la vitesse de l'écoulement établi en amont de l'obstacle.
La vitesse adimensionnelle, U_a , est alors :

$$(2-85) \quad U_a(x_a) = \sin \frac{x}{R} = \sin x_a \quad (U_0 = 2 \cdot U_\infty)$$

en prenant un rayon unité on peut confondre les abscisses x et x_a ; le coefficient de proportionnalité γ_1 est donc la fonction :

$$(2-86) \quad \gamma_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{2x(1 - \cos x)}} = \cos \frac{x}{2}$$

et la fonction principale de Görtler, β , qui sert à exploiter les tables universelles a l'expression suivante :

$$(2-87) \quad \beta = \frac{2 \cdot \cos x}{1 + \cos x}$$

Nous obtenons finalement les résultats qui sont représentés sur les figures (2-4) et (2-5) avec ceux de Terrill.

Nous constatons une bonne approximation jusqu'à l'abscisse 0,8, ensuite les résultats s'éloignent des valeurs exactes, la précision s'altérant progressivement jusqu'au point de décollement. Ceci est compréhensible lorsqu'on regarde la figure (2-1), où on s'aperçoit que le paramètre f_2 n'est plus négligeable à partir environ de l'abscisse 0,7. Cette approximation monoparamétrique donne une moins bonne approche de la solution de Terrill que celle de Loitsianski ; en particulier, elle conduit à avancer le point de décollement à l'abscisse 1,70, au lieu de 1,77 pour Loitsianski, la valeur de Terrill étant 1,823. Mais comme nous venons de le voir, elle présente l'avantage d'être plus simple d'emploi que celle de Loitsianski.

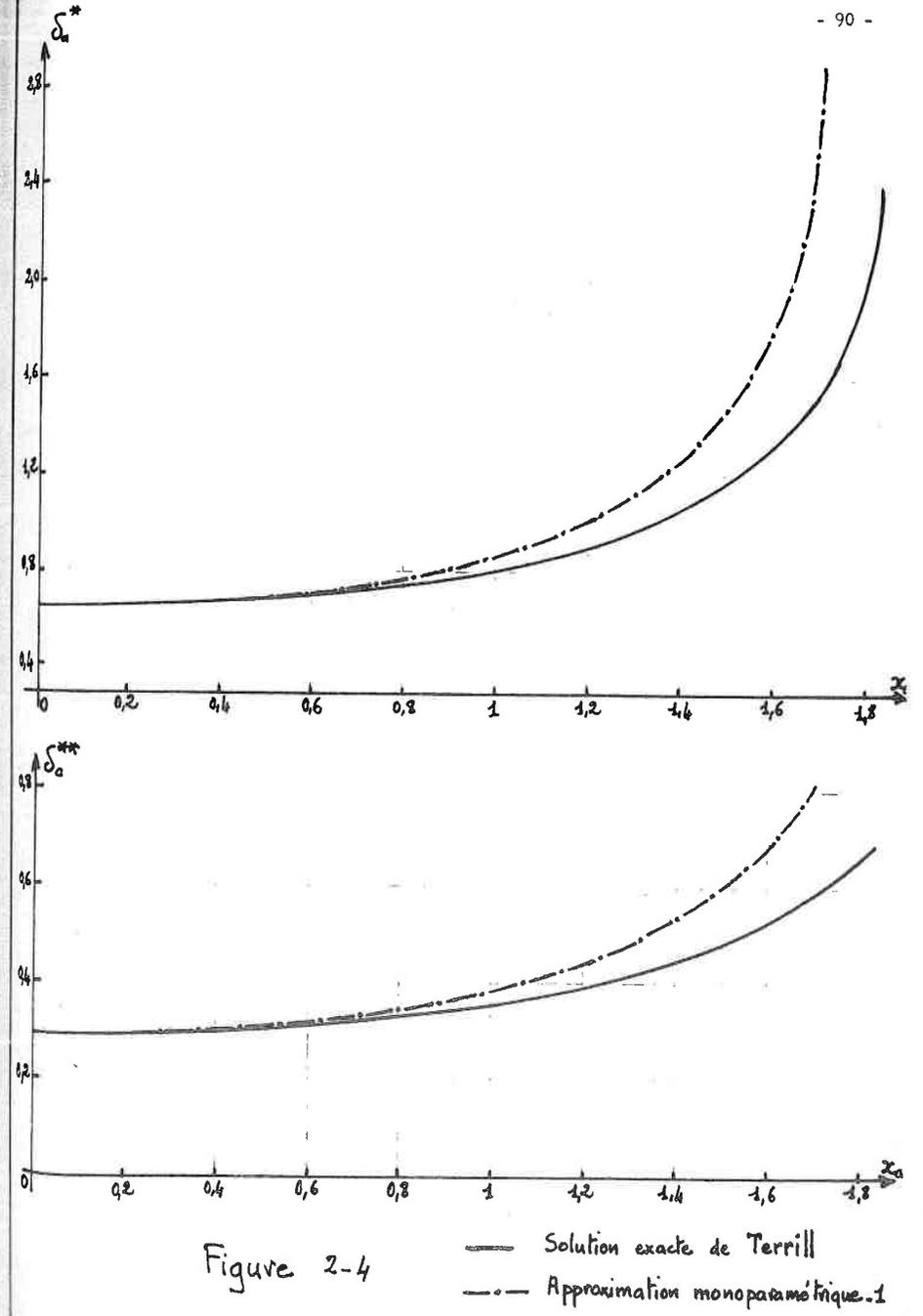
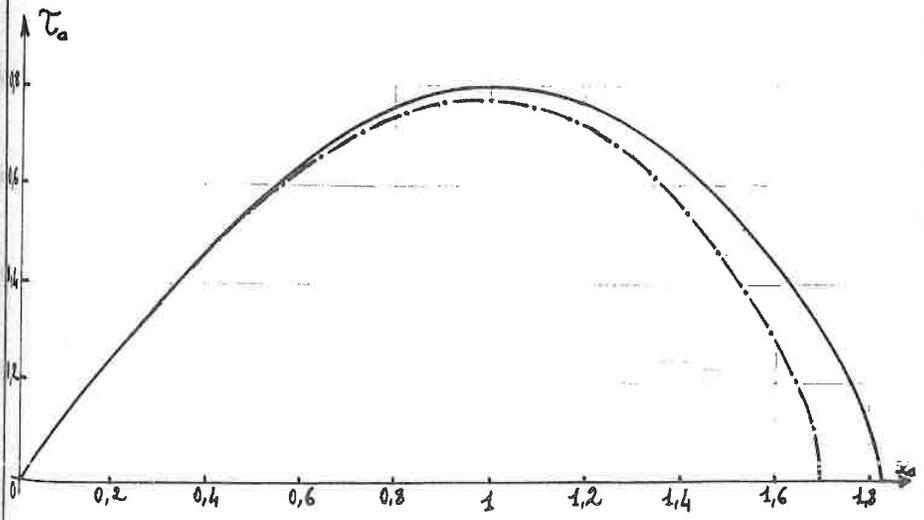
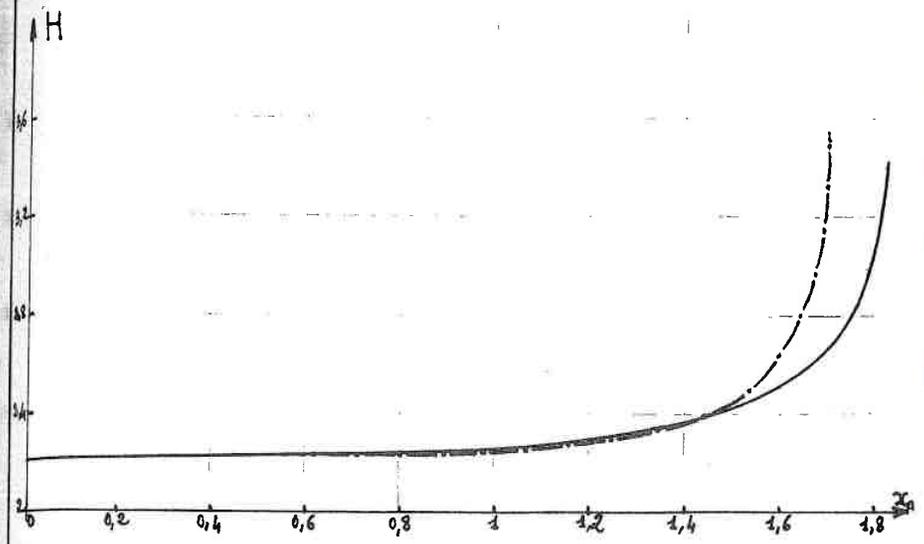


Figure 2-4

— Solution exacte de Terrill
-.- Approximation monoparamétrique.1



— Solution exacte de Terrill
- - - Approximation monoparamétrique-1

Figure 2-5

3 - Approximation biparamétrique

Nous allons généraliser ce qui a été dit dans le paragraphe précédent au cas de l'équation universelle ne dépendant que des deux paramètres de forme f_1 et f_2 . Nous expliquerons ensuite les raisons qui nous ont conduits à abandonner la résolution numérique de l'équation discrétisée.

a - Equation universelle biparamétrique

En partant de l'équation universelle approchée au rang N, (2-52), et en se limitant aux deux premiers paramètres f_1 et f_2 nous obtenons, grâce à la définition de θ_1 par (1-17)¹ et de θ_2 par (2-51), l'équation universelle biparamétrique :

$$(2-88) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Phi_2^*}{\partial \eta^3} + \Phi_2^* \times \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \times \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ & \frac{f_2 + f_1 \cdot F}{B^2} \times \left[\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta \times \partial f_1} - \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial f_1} \times \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta^2} \right] + \frac{f_2 \times (f_1 + 2 F)}{B^2} \times \\ & \quad \times \left[\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta \times \partial f_2} - \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial f_2} \times \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

avec les conditions :

$$(2-89) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta = 0 & \quad \Phi_2^* = \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} = 0 \\ \eta \rightarrow \infty & \quad \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} \rightarrow 1 \\ f_1 = f_2 = 0 & \quad \Phi_2^* = \Phi_0 \end{aligned} \right. \quad \text{solution de Blasius pour la plaque plane}$$

Nous allons établir une nouvelle formulation de la grandeur F. Lorsqu'on dérive par rapport à la variable x l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**} , (2-42), on obtient :

$$(\delta^{**})' = \frac{B'}{B} \cdot \delta^{**} - \frac{U'}{U} \cdot \delta^{**} + \frac{\nu \cdot B^2}{U \delta^{**}}$$

en reportant dans la relation (2-16) :

$$F = 2 \times \frac{U \cdot B'}{U' \cdot B} f_1 - 2 \cdot f_1 + 2 \times \frac{U \cdot f_1}{U' \cdot (\delta^{**})^2} \times B^2$$

et en effectuant le changement de variables : $x \rightarrow (f_1, f_2)$, on arrive après simplification à :

$$F = 2 \cdot (B^2 - f_1) + \frac{2}{B} \times \left[(f_2 + f_1 \cdot F) \times \frac{\partial B}{\partial f_1} + f_2 \cdot (f_1 + 2F) \times \frac{\partial B}{\partial f_2} \right]$$

qui permet d'écrire F sous la forme :

$$(2-90) \quad F = 2 \cdot \frac{B^2 - f_1 + \frac{f_2}{B} \times \left[-\frac{\partial B}{\partial f_1} + f_1 \times \frac{\partial B}{\partial f_2} \right]}{1 - \frac{2}{B} \times \left[f_1 \times \frac{\partial B}{\partial f_1} + 2 \cdot f_2 \times \frac{\partial B}{\partial f_2} \right]}$$

cette expression est nécessaire pour l'intégration numérique de (2-88); ainsi que celle de B, (2-40).

b - Discretisation

Nous nous proposons de résoudre ce problème comme une équation dépendant de trois variables : η , f_1 et f_2 . A l'aide de la relation (2-58) on se ramène à une équation du second ordre en φ par rapport à η :

$$(2-91) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \Phi \times \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{f_1}{B^2} \times [1 - \varphi^2] &= \frac{f_2 + f_1 \cdot F}{B^2} \times \left[\varphi \times \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] + \\ &+ \frac{f_2 \cdot (f_1 + 2F)}{B^2} \times \left[\varphi \times \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \right.$$

Afin de pouvoir déterminer la solution pour un couple donné de valeurs des paramètres, (f_1, f_2) , nous utiliserons la méthode des différences finies avec le schéma implicite suivant :

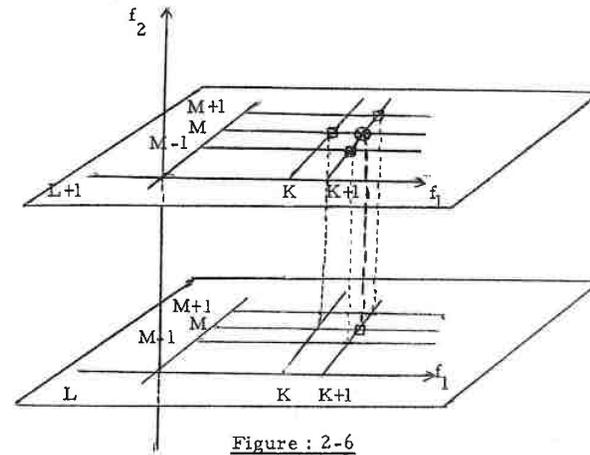


Figure : 2-6

Si on désigne par $\Delta \eta$, Δf_1 et Δf_2 les pas suivant les trois axes, un nœud du réseau tridimensionnel aura pour coordonnées :

$$(2-92) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta &= (M-1) \times \Delta \eta & M &= 1 \text{ à } N \\ f_1 &= K \times \Delta f_1 & K &\in \mathbb{Z} \\ f_2 &= L \times \Delta f_2 & L &\in \mathbb{Z} \end{aligned} \right.$$

Au nœud défini par le triplet $(M, K+1, L+1)$, nous approcherons les dérivées partielles par les formules de discrétisation (2-61) auxquelles il faut ajouter :

$$(2-93) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} &\approx \frac{\varphi_M^{L+1} - \varphi_M^L}{\Delta f_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} &\approx \frac{\Phi_M^{L+1} - \Phi_M^L}{\Delta f_2} \end{aligned} \right.$$

La présence de dérivées partielles par rapport au second paramètre de forme, qui disparaissent pour l'approximation biparamétrique

localisée, indique d'après (2-93) que le calcul de la solution φ pour une valeur donnée de f_1 du plan (L+1) nécessite la connaissance de la solution pour la même valeur de f_1 mais pour la couche précédente, L.

On initialisera donc les calculs par la couche, L = 0, c'est-à-dire par les résultats de la méthode monoparamétrique. Ensuite, pour une valeur donnée de f_2 , on procédera comme pour la méthode monoparamétrique en faisant varier f_1 .

Nous n'entrerons pas plus dans les détails de la méthode numérique, qui sera développée pour la seconde généralisation de l'équation universelle de Loitsianski, car nous avons renoncé à obtenir les tables universelles biparamétriques pour les raisons que nous allons expliquer.

c - Abandon de l'approximation biparamétrique

Notre but en essayant de résoudre l'approximation biparamétrique était d'obtenir de nouvelles tables universelles dont l'utilisation devait conduire à une amélioration des résultats obtenus avec la méthode monoparamétrique.

Afin de constater le gain de précision on aurait fait les calculs pour l'écoulement autour du cylindre circulaire. Il nous fallait donc résoudre l'équation universelle biparamétrique pour les valeurs des paramètres f_1 et f_2 permettant d'obtenir au moins l'ensemble de la couche limite dans ce cas concret.

Avec les variables adimensionnelles caractéristiques de la couche limite, (2-80), la vitesse de l'écoulement potentiel est sinusoidale pour l'obstacle cylindrique circulaire

$$(2-85) \quad U_a(x) = \sin x \quad (\text{pour simplifier } x = x_a \text{ si } R = 1)$$

Nous allons essayer d'évaluer le domaine de variation de f_2 nécessaire. En partant de sa définition (2-8) et en utilisant la relation (2-42) on obtient après simplification :

$$f_2 = U \cdot U'' \times \left(\frac{\delta^{**2}}{y} \right)^2 = 4 \cdot \frac{U'' \cdot B^4}{U^3} \left[\int_0^x U(s) ds \right]^2$$

et donc pour ce cas concret :

$$(2-94) \quad f_2 = -4 \times B^4 \times \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)^2 = -4 \times B^4 \times t^2 \times \frac{x}{2}$$

en prenant pour B, les valeurs trouvées au cours du calcul monoparamétrique on obtient la courbe représentée sur la figure (2-7) où on a également fait figurer les variations de f_2 correspondant aux résultats exacts de Terrill : d'après (2-83) :

$$f_2 = -4 \times (\gamma_1 \delta_a^{**})^4 \times t^2 \times \frac{x}{2}$$

et comme pour le cylindre circulaire : (2-86) $\gamma_1 = \cos \frac{x}{2}$

on a :

$$(2-95) \quad f_{2T} = -(\delta_a^{**})^4 \times \sin^2 x$$

Comme B est fonction des deux paramètres f_1 et f_2 , les valeurs de B pour les couples de valeurs (f_1, f_2) correspondant à des abscisses x données du cylindre circulaire n'ont aucune raison d'être égales aux valeurs de B trouvées dans le cas monoparamétrique aux mêmes abscisses x .

Le véritable graphe des variations du paramètre f_2 le long du cylindre circulaire se situera donc en principe, pour l'approximation biparamétrique, entre la courbe de Terrill qui serait obtenue dans le cas où la méthode biparamétrique donnerait la solution exacte, (2-95), et l'autre courbe, (2-94), qui suppose que l'approximation biparamétrique n'apporterait aucune amélioration de la détermination de δ^{**} par rapport au cas monoparamétrique.

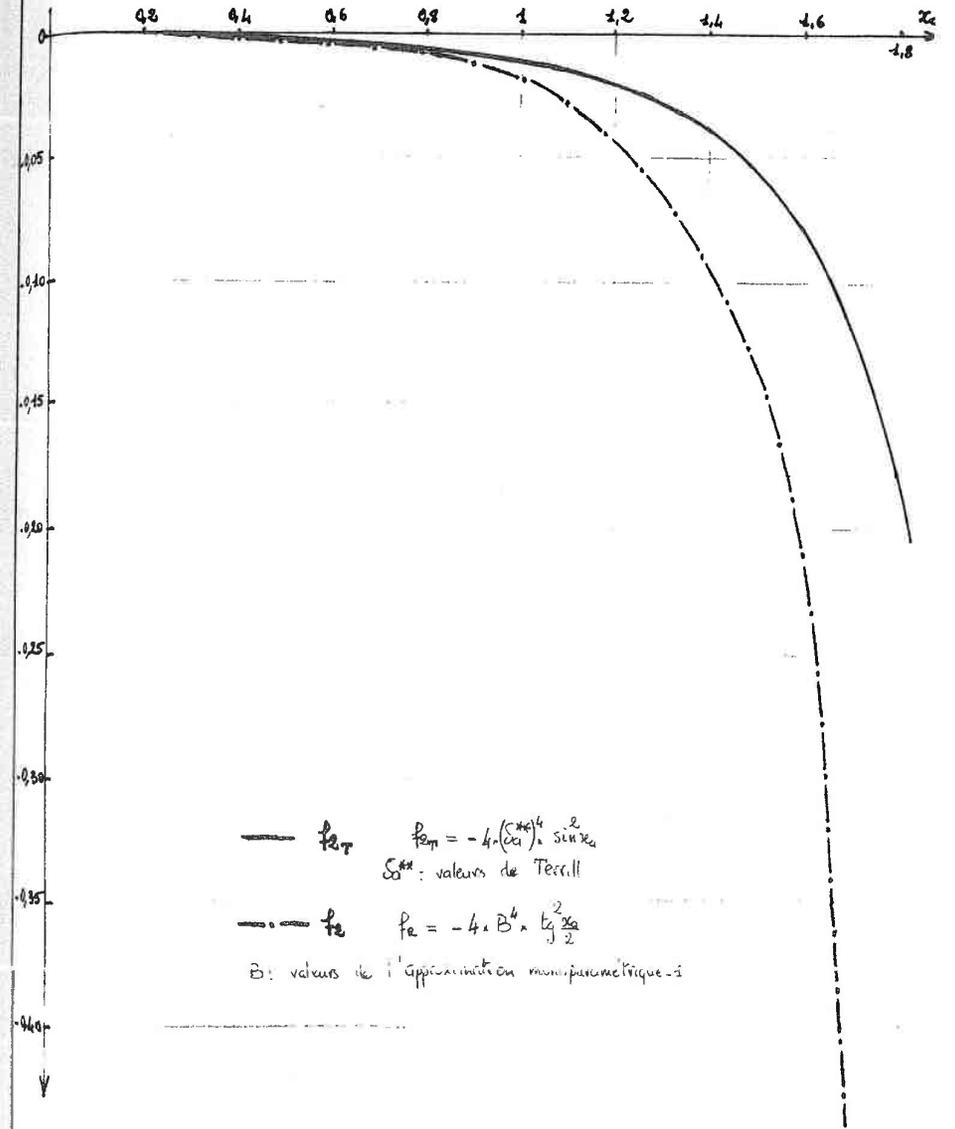


Figure 2-7

Même en pensant obtenir des résultats proches de ceux de Terrill, on voit que la plage de variation du paramètre f_2 s'étend de 0 à une valeur négative de l'ordre de -0,25. Or pour obtenir des tables universelles assez fines, c'est à dire ne nécessitant pas de grandes interpolations lors de leur utilisation, il faut prendre un pas Δf_2 petit.

En choisissant par exemple $\Delta f_2 = -0,001$, il faudra faire les calculs d'environ 250 couches pour aller du point d'arrêt au point de décollement. Si de plus on prend un pas en f_1 de même ordre de grandeur, la durée des calculs est très importante : environ 5 minutes par couche en laissant le pas Δf_1 fixe, ce qui donne une durée total d'une vingtaine d'heures !

Nous aurions pu entreprendre la résolution de cette méthode biparamétrique malgré ces contraintes ; mais, n'étant pas sûr a priori de la qualité des résultats, nous avons préféré l'abandonner. En effet, avant de résoudre numériquement une méthode biparamétrique, même d'une manière partielle comme nous le verrons dans la suite, il faut déjà disposer d'une approximation monoparamétrique correspondante au moins aussi satisfaisante que celle de Loitsianski. C'est pourquoi nous nous sommes orientés en premier lieu vers l'amélioration de l'approximation monoparamétrique que nous venons d'étudier.

III - SECONDE GENERALISATION DE L'EQUATION UNIVERSELLE DE LOITSIANSKI

Après avoir renoncé à exploiter l'approximation biparamétrique de la première généralisation en raison de la grande durée des calculs sur ordinateur, nous avons cherché à améliorer cette généralisation de l'universalisation de Loitsianski.

Notre but est toujours d'arriver à associer les avantages de la méthode de Loitsianski, (c'est-à-dire faire l'universalisation à l'aide des mêmes paramètres de forme dont la convergence rapide vers zéro nous permet d'obtenir une bonne approche de la solution en ne considérant que les premiers paramètres), et ceux de la méthode de Saljnikov - Oka [7] qui permet une évaluation rapide et simple des grandeurs caractéristiques de la couche limite à partir des tables universelles dans chaque cas concret.

La première tentative n'est pas une réussite totale malgré ses avantages. En effet on obtient une précision plus faible que celle de la méthode de Loitsianski. De plus le calcul des tables universelles à deux paramètres est très coûteux, mais nous n'avons pas de point de comparaison avec Loitsianski. Nous avons donc cherché à combler ces deux handicaps et plus particulièrement le premier.

A partir d'une constatation faite sur les graphes de la fonction F obtenus par différents auteurs, V. Saljnikov déduit une nouvelle variable transversale. Nous suivons pratiquement le même plan que pour la section précédente, mais les problèmes posés par la résolution de l'approximation biparamétrique seront développés dans le troisième paragraphe.

1 - Amélioration de la première généralisation

a - Nouveau choix de variable transversale

La fonction F qui a été introduite lors de la transformation de l'équation de quantité de mouvement, (I-1-b), se retrouve dans la plupart des méthodes à un paramètre. D'après les différents auteurs ayant développé une représentation monoparamétrique du type Karman-Pohlhausen, on s'aperçoit que les variations de F en fonction du paramètre utilisé sont pratiquement linéaires, (voir figure (2-8)).

Nous pouvons donc représenter en première approximation F par :

$$(2-96) \quad F \simeq a - b \times f_1 \quad \text{avec } a > 0 \text{ et } b > 0$$

ce qui permet de linéariser l'équation transformée de quantité de mouvement :

$$(2-6) \quad f_1' = \frac{U'}{U} \times F + \frac{U''}{U'} \cdot f_1 = a \cdot \frac{U'}{U} + \left(\frac{U''}{U'} - b \frac{U'}{U} \right) \times f_1$$

et en l'intégrant on arrive à :

$$f_1 = \frac{a \cdot U'}{U^b} \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds + C \times \frac{U'}{U^b}$$

Pour un écoulement autour d'un corps avec point d'arrêt, on détermine la constante C par la condition que f_1 doit rester fini en ce point où la vitesse U est nulle. La partie principale de U au voisinage de l'abscisse 0 est alors : $x \cdot U'(0)$, donc :

$$f_1 \simeq \frac{a}{b} \frac{U'(x) \cdot U'^{b-1}(0)}{U'^b(0)} + C \times \frac{U'(x)}{x \cdot U'^b(0)} = \frac{a}{b} \times \frac{U'(x)}{U'(0)} + \frac{C}{x} \times \frac{U'(x)}{U'^b(0)}$$

ce qui implique que C doit être nulle :

$$(2-97) \quad f_1 = \frac{a \cdot U'}{U^b} \times \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds$$

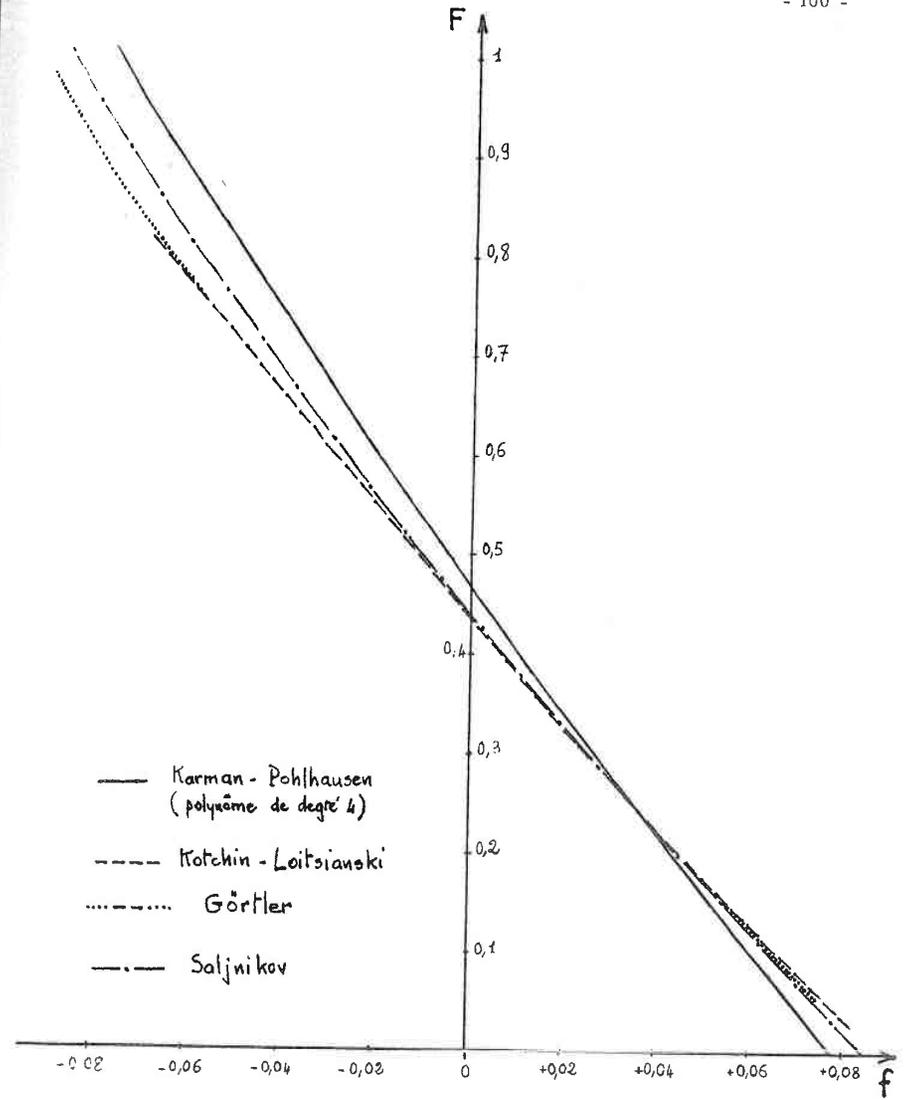


Figure 2-8

Nous pouvons tout de suite remarquer que lorsque nous prenons comme variable transversale celle de Görtler, η (2-35), nous obtenons l'expression de f_1 :

$$(2-43) \quad f_1 = 2 \times B^2 \times \frac{U'}{U^2} \times \int_0^x U(s) \cdot ds$$

qu'on ne peut retrouver à partir de (2-97) qu'en donnant à a et b les valeurs 2. B^2 et 2, ce qui ne correspond pas à la réalité. En effet nous trouvons pour l'approximation monoparamétrique-1 : $a = 0,4408$ et $b = 5,714$. (en prenant pour B la valeur 0,470, on obtient $a_0 = \frac{a}{B^2} \neq 2$).

Nous constatons donc la grande différence existant entre la pente de la linéarisation de F qui découle de l'expression de la variable transversale η , et la pente réelle du graphe de F linéarisé déterminé d'après les calculs effectués avec cette même variable. Nous allons donc faire un autre choix de variable transversale afin de retrouver une expression de f_1 qui soit en accord avec la quasilinearité réelle de F.

Pour tenir compte du fait que F n'est pas parfaitement linéaire, il aurait fallu introduire un terme correctif dans son expression :

$$(2-98) \quad F = a - b \times f_1 + \varepsilon(f_1)$$

ce qui aurait compliqué l'intégration de l'équation (2-6) et aurait abouti à une formulation de f_1 différente de (2-97).

En réalité on modifie l'expression de f_1 pour en tenir compte. Si Loitsianski a introduit une correction additive, [6] :

$$f_1 = \left[a + \varepsilon(f_1) \right] \frac{U'}{U^b} \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds$$

V. Saljnikov préfère une correction multiplicatrice :

$$(2-99) \quad f_1 = a_0 \times B^2 \times \frac{U'}{U^b} \times \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds \quad (\text{en posant } a = a_0 \times B^2)$$

en effet, B est une grandeur variable déterminée de la même façon que dans la première généralisation. Cela suppose néanmoins que B soit considéré comme constant lors de l'intégration de l'équation (2-6) linéarisée à l'aide de :

$$(2-100) \quad F = a_0 \times B^2 - b \times f_1 \quad \text{avec } a_0 > 0 \text{ et } b > 0$$

Nous faisons donc le changement de variables suivant :

$$(2-101) \quad \eta_s = \frac{U^{b/2} \times y}{\sqrt{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds}}$$

et nous définissons la nouvelle fonction de courant adimensionnelle par :

$$(2-102) \quad \Phi_s = \frac{U^{b/2-1}}{\sqrt{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds}} \times \Psi$$

(Pour alléger les formules nous noterons dans la suite η_s par η et Φ_s par Φ , sauf quand il y a un risque de confusion avec les variables de la section précédente).

Nous allons transformer l'équation de couche limite (0-21) avec les conditions (0-22) à l'aide de ces nouvelles variables η et Φ . Soient les formules de différentiation :

$$(2-103) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{y \cdot U^{b/2-1}}{2 \sqrt{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds}} \times \left[b \cdot U' - \frac{U^b}{\int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds} \right] \times \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{U^{b/2}}{\sqrt{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds}} \times \frac{\partial}{\partial \eta} ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{U^b}{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds} \times \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} ; \\ \frac{\partial^3}{\partial y^3} &= \frac{U^{3b/2}}{\left[a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds \right]^{3/2}} \times \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \end{aligned} \right.$$

avec lesquelles nous obtenons les relations :

$$(2-104) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= U \times \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} ; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{U^{b/2+1}}{\sqrt{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds}} \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} ; \\ \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{U^{b+1}}{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds} \times \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} ; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\sqrt{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds}}{U^{b/2-1}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\sqrt{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds}}{U^{b/2}} \times \\ &\quad \left[\left(1 - \frac{b}{2}\right) \cdot U' + \frac{U^b}{2 \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds} \right] \times \Phi + \frac{y}{2} \left[b \cdot U' - \frac{U^b}{\int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds} \right] \times \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= U' \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + U \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} + \frac{y \cdot U^{b/2}}{2 \sqrt{a_0 \cdot \nu \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds}} \times \left[b \cdot U' - \frac{U^b}{\int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds} \right] \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \end{aligned} \right.$$

qui reportées dans l'équation (0-21) :

$$(0-21) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \times \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = U \cdot U' + \nu \times \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

donnent après simplification

$$(2-105) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \frac{a_0}{2} \left[1 + (2-b) \cdot \frac{U'}{U} \times \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds \right] \times \Phi \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{a_0 \cdot U'}{U^b} \times \\ \times \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \frac{a_0}{U^{b-1}} \times \int_0^x U^{b-1}(s) \cdot ds \times \\ \times \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

Nous définissons la grandeur B par :

$$(2-106) \quad B = \int_0^\infty \frac{\partial \Phi_s}{\partial \eta_s} \times \left(1 - \frac{\partial \Phi_s}{\partial \eta_s} \right) \times d \eta_s$$

avec les propriétés :

$$(2-41) \begin{cases} B = B(x) \\ B(0) = B_0 = 0,470 \end{cases}$$

donc en exprimant l'épaisseur de quantité de mouvement avec les nouvelles variables on obtient :

$$(2-107) \quad \delta^{**} = \frac{B}{U^{b/2}} \cdot \sqrt{a_0 \cdot \nu} \cdot \int_0^x U^{b-1} \cdot ds$$

qui permet de retrouver la relation (2-99) à partir de la définition de f_1 (2-5) ; le changement de variables transversales (2-101) est donc correct.

L'équation (2-105) s'écrit alors :

$$(2-108) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \bar{\Phi}}{\partial \eta^3} + \left[\frac{f_1}{B^2} \left(1 - \frac{b}{2}\right) + \frac{a_0}{2} \right] \times \bar{\Phi} \times \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ & \frac{U \cdot f_1}{U' \cdot B^2} \left[\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x \cdot \partial \eta} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

avec les conditions :

$$(2-109) \begin{cases} \eta = 0 & \bar{\Phi} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} = 0 \\ \eta \rightarrow \infty & \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} \rightarrow 1 \\ x = x_0 & \bar{\Phi} = \bar{\Phi}_0 \end{cases}$$

b - Universalisation approchée au rang N

Nous procéderons comme pour la première généralisation. Soit donc le changement de variables :

$$(2-48) \quad x \longrightarrow [f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)]$$

où les f_k sont les paramètres de Loitsianski :

$$(2.9') \quad f_k = U^{k-1} \times U^{(k)} \times \left[\frac{\delta^{**2}}{\nu} \right]^k \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } N$$

vérifiant la relation de récurrence :

$$(2-17)' \quad \frac{U}{U'} \times f_1 \times f'_\ell = \theta_\ell = f_{\ell+1} + f'_\ell \times [L \cdot F + (\ell-1) \cdot f_1] \quad \text{pour } \ell = 1 \text{ à } N-1$$

Avec la formule de différentiation

$$(2-49) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{U'}{U \times f_1} \sum_{\ell=1}^{\ell=N-1} \theta_\ell \times \frac{\partial}{\partial f_\ell} + f'_N \times \frac{\partial}{\partial f_N}$$

l'équation (2-108) s'écrit :

$$(2-110) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_N}{\partial \eta^3} + \left[\frac{f_1}{B^2} \left(1 - \frac{b}{2}\right) + \frac{a_0}{2} \right] \times \bar{\Phi}_N \times \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_N}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_N}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ & \frac{1}{B^2} \times \sum_{\ell=1}^{\ell=N-1} \theta_\ell \times \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_N}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_N}{\partial f_\ell \cdot \partial \eta} - \frac{\partial \bar{\Phi}_N}{\partial f_\ell} \times \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_N}{\partial \eta^2} \right] + \\ & \frac{U \cdot f_1}{U' \cdot B^2} \times f'_N \times \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_N}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_N}{\partial f'_N \cdot \partial \eta} - \frac{\partial \bar{\Phi}_N}{\partial f'_N} \times \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_N}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

Conformément au principe de l'universalisation nous introduisons maintenant le paramètre supplémentaire f_{N+1} et nous faisons encore l'hypothèse qu'il est négligeable. Ce qui permet de définir, f'_N , par la relation :

$$(2-51) \quad \frac{U}{U'} \times f_1 \times f'_N = \theta_N = f_N [N \cdot F + (N-1) \cdot f_1]$$

L'universalisation approchée au rang N du problème de couche limite considéré est donc définie par :

$$(2-111) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \bar{\Phi}_N^*}{\partial \eta^3} + \left[\frac{f_1}{B^2} \left(1 - \frac{b}{2}\right) + \frac{a_0}{2} \right] \times \bar{\Phi}_N^* \times \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_N^*}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \left[1 - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_N^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{B^2} \times \sum_{k=1}^{k=N} \theta_k \times \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_N^*}{\partial \eta} \times \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_N^*}{\partial f_k \cdot \partial \eta} - \frac{\partial \bar{\Phi}_N^*}{\partial f_k} \times \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_N^*}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

avec les conditions

$$(2-112) \begin{cases} \eta = 0 & \bar{\Phi}_N^* = \frac{\partial \bar{\Phi}_N^*}{\partial \eta} = 0 \\ \eta \rightarrow \infty & \frac{\partial \bar{\Phi}_N^*}{\partial \eta} \rightarrow 1 \\ f_1 = f_2 = \dots = f_N = 0 & \bar{\Phi}_N^* = \bar{\Phi}_0 \end{cases} \quad \text{solution de Blasius pour la plaque plane}$$

(Nous désignerons dans la suite Φ_N^* par Φ afin d'alléger l'écriture des formules de discrétisation).

2 - Approximation monoparamétrique

a - Equation universelle monoparamétrique

En donnant la valeur 1 à N dans (2-111) et (2-112), et en définissant θ_1 à l'aide de (2-51), on obtient :

$$(2-113) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^3 \Phi_1^*}{\partial \eta^3} + \left[\frac{f_1}{B^2} \cdot (1 - \frac{b}{2}) + \frac{a_0}{2} \right] \cdot \Phi_1^* \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \\ \frac{f_1 \cdot F}{B^2} \cdot \left[\frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial f_1 \cdot \partial \eta} - \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial \eta^2} \right] \end{array} \right. =$$

avec les conditions :

$$(2-14) \left\{ \begin{array}{l} \eta = 0 \quad \Phi_1^* = \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \eta} = 0 \\ \eta \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial \eta} \rightarrow 1 \\ f_1 = 0 \quad \Phi_1^* = \Phi_0 \end{array} \right. \quad \text{solution de Blasius pour la plaque plane}$$

La fonction F est déterminée à partir de (2-16) en dérivant par rapport à la variable x, l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**} sous la forme (2-107) et en effectuant le changement de variables : $x \rightarrow f_1$.
Soit :

$$(2-115) \quad F = \frac{a_0 \cdot B^2 - b \cdot f_1}{1 - \frac{2}{B} \cdot f_1 \cdot \frac{dB}{df_1}}$$

b - Résolution numérique et utilisation des tables universelles

Nous avons employé la même méthode numérique que pour l'approximation monoparamétrique précédente. En raison de la grande ressemblance entre les deux équations nous ne donnerons donc les

renseignements propres à cette nouvelle équation monoparamétrique.

Après avoir abaissé l'ordre de l'équation grâce à : (2-58)'

$\Psi = \frac{\partial \Phi_s}{\partial \eta_s}$ nous appliquons la méthode des différences finies sur le schéma

implicite (figure (2-2)) avec les formules de discrétisation (2-61). En linéarisant à l'aide des relations (2-62) nous obtenons un système linéaire du type :

$$(2-66) \quad a_M^{i-1} \varphi_{M-1}^i - 2 \cdot b_M^{i-1} \varphi_M^i + c_M^{i-1} \varphi_{M+1}^i = d_M^{i-1} \quad \text{pour } M = 2 \text{ à } N-1$$

où les coefficients sont déterminés par la connaissance de la solution à l'itération (i-1) :

$$(2-116) \left\{ \begin{array}{l} a_M^{i-1} = 1 - \left[\frac{a_0}{2} + (1 - \frac{b}{2}) \cdot \frac{f_1}{(B^{i-1})^2} \right] \cdot \frac{\Delta \eta}{2} \cdot \left[\Phi_M^{i-1} + \frac{f_1 \cdot F^{i-1}}{(B^{i-1})^2} \cdot \frac{\Phi_M^{K+1} - \Phi_M^K}{\Delta f_1} \right] \\ b_M^{i-1} = 1 + \frac{(\Delta \eta)^2 \cdot \varphi_{M-1}^{i-1} \cdot f_1}{2 \cdot (B^{i-1})^2} \cdot \left[1 + \frac{F^{i-1}}{\Delta f_1} \right] \\ c_M^{i-1} = 1 + \left[\frac{a_0}{2} + (1 - \frac{b}{2}) \cdot \frac{f_1}{(B^{i-1})^2} \right] \cdot \frac{\Delta \eta}{2} \cdot \left[\Phi_M^{i-1} + \frac{f_1 \cdot F^{i-1}}{(B^{i-1})^2} \cdot \frac{\Phi_M^{K+1} - \Phi_M^K}{\Delta f_1} \right] \\ d_M^{i-1} = - \frac{(\Delta \eta)^2 \cdot f_1}{(B^{i-1})^2} \cdot \left[1 + \frac{\varphi_{M-1}^{i-1} \cdot \varphi_M^K \cdot F^{i-1}}{\Delta f_1} \right] \end{array} \right.$$

Le système (2-66) est résolu par la méthode du "Progonka" (voir annexe 2). Les initialisations et les tests de sortie des itérations sont les mêmes que pour l'équation monoparamétrique précédente.

Les bornes de variations du paramètre f_1 seront encore déterminées par le point d'arrêt et le point de décollement. Ce dernier est encore testé par l'annulation des forces de frottement à la paroi, (2-76). D'après la correction multiplicatrice de f_1 introduite par V. Saljnikov, (2-99), on définit la grandeur β_1 :

$$(2-117) \quad \beta_1 = \frac{f_1}{B} = \frac{a_0 \cdot U'}{U^b} \cdot \int_0^x U^{b-1} \cdot ds$$

dont la valeur approchée au point d'abscisse nulle, calculée en prenant la partie principale de $U : x \cdot U'(0)$, est :

$$(2-118) \quad x \rightarrow 0 \quad \beta_1 \rightarrow \frac{a_0}{b}$$

ce qui implique, d'après (2-115), que F doit être nulle au point d'arrêt.

Les renseignements fournis nous permettent de constituer des tables universelles analogues à celles décrites figure (2-3), il suffit de remplacer β par β_1 . Leur utilisation est identique : pour chaque cas concret, U étant précisé, on peut calculer la valeur de la grandeur β_1 pour une abscisse x_0 donnée par (2-117). Ensuite, de la première table on en déduit les valeurs $A(x_0)$, $B(x_0)$, $\zeta(x_0)$, $f_1(x_0)$, qui permettent de calculer les grandeurs caractéristiques correspondantes de la couche limite :

$$(2-119) \quad \delta^*(x_0) = \frac{A(x_0)}{U^{b/2}(x_0)} \cdot \sqrt{a_0 \cdot \nu \cdot \int_0^{x_0} U^{b-1} ds}$$

$$(2-107) \quad \delta^{**}(x_0) = \frac{B(x_0)}{U^{b/2}(x_0)} \cdot \sqrt{a_0 \cdot \nu \cdot \int_0^{x_0} U^{b-1} ds}$$

$$(2-120) \quad \tau_0(x_0) = \frac{\mu \cdot U^{b/2+1}(x_0)}{\sqrt{a_0 \cdot \nu \cdot \int_0^{x_0} U^{b-1} ds}} \cdot \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}(x_0)$$

Le profil de vitesse et la fonction de courant sont obtenus dans la seconde table à l'aide de $f_1(x_0)$.

Nous remarquons que nous n'avons pas encore eu besoin d'une intégration supplémentaire :

Du point de vue pratique : 1) Nous avons pris pour faire les calculs les valeurs $a_0 = 2$ et $b = 5,71$ qui correspondaient à la représentation approchée de F pour l'approximation monoparamétrique précédente et qui sont encore valables a posteriori pour celle-ci :

2) Le pas du paramètre f_1 , Δf_1 , a été diminué à l'approche du point d'arrêt pour avoir une meilleure précision et progressivement en direction du point de décollement pour limiter le nombre d'itérations à chaque pas et éviter ainsi une divergence précoce. Soit :

$f_1 \geq +0,083$	$\Delta f_1 = +0,0001$
$+0,080 \leq f_1 < +0,083$	$\Delta f_1 = +0,00025$
$0 \leq f_1 < +0,080$	$\Delta f_1 = +0,0005$
$-0,070 < f_1 \leq 0$	$\Delta f_1 = -0,0005$
$-0,075 < f_1 \leq -0,070$	$\Delta f_1 = -0,00025$
$-0,080 < f_1 \leq -0,075$	$\Delta f_1 = -0,0001$
$-0,083 < f_1 \leq -0,080$	$\Delta f_1 = -0,00005$
$f_1 \leq -0,083$	$\Delta f_1 = -0,00001$

3) Nous avons pris pour la variable transversale, le pas constant $\Delta \eta = 0,05$, avec 161 points afin d'obtenir toute la couche limite.

4) Les calculs ont également été effectués sur l'ordinateur CII 10070 de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique de Nancy.

c - Cas de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire

Comme la variable transversale η_s et la variable adimensionnelle y_a sont proportionnelles.

$$(2-121) \quad \eta_s = \gamma_2 \cdot y_a \quad \text{avec} \quad \gamma_2 = \frac{b/2}{\sqrt{a_0 \cdot \int_0^{x_a} U_a^{b-1} ds}}$$

les grandeurs caractéristiques adimensionnelles seront calculées par les formules :

$$(2-122) \begin{cases} \delta_a^* = \frac{A}{\gamma_2} & \delta_a^{**} = \frac{B}{\gamma_2} \\ \tau_a = U_a \cdot \gamma_2 \cdot \left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta_s} \right]_{\eta_s = 0} \end{cases}$$

Nous rappelons que la vitesse adimensionnelle, U_a , est pour le cylindre circulaire :

$$(2-25) \quad U_a(x_a) = \sin \frac{x}{R} = \sin x_a$$

Comme b n'est pas entier, il n'est pas possible de simplifier β_1 et δ_2 , et ils ont été tabulés numériquement.

Nous avons représenté sur les figures (2-9) et (2-10) les résultats obtenus par cette nouvelle méthode (Approximation monoparamétrique - 2) avec ceux de Terrill et ceux de l'approximation monoparamétrique - 1. Nous constatons une nette amélioration par rapport à la généralisation précédente ; en effet les valeurs calculées s'éloignent lentement de celles de Terrill vers le point de décollement, mais la précision est satisfaisante pour l'ensemble de la couche limite.

Nous pouvons remarquer que cette nouvelle méthode donne des résultats légèrement meilleurs que ceux de l'approximation monoparamétrique de Loitsianski ; en particulier le point de décollement est maintenant situé à l'abscisse 1,79, au lieu de 1,77 pour Loitsianski, la valeur calculée par Terrill étant 1,823.

Nous avons amélioré sensiblement la première généralisation, tout en conservant sa facilité d'emploi.

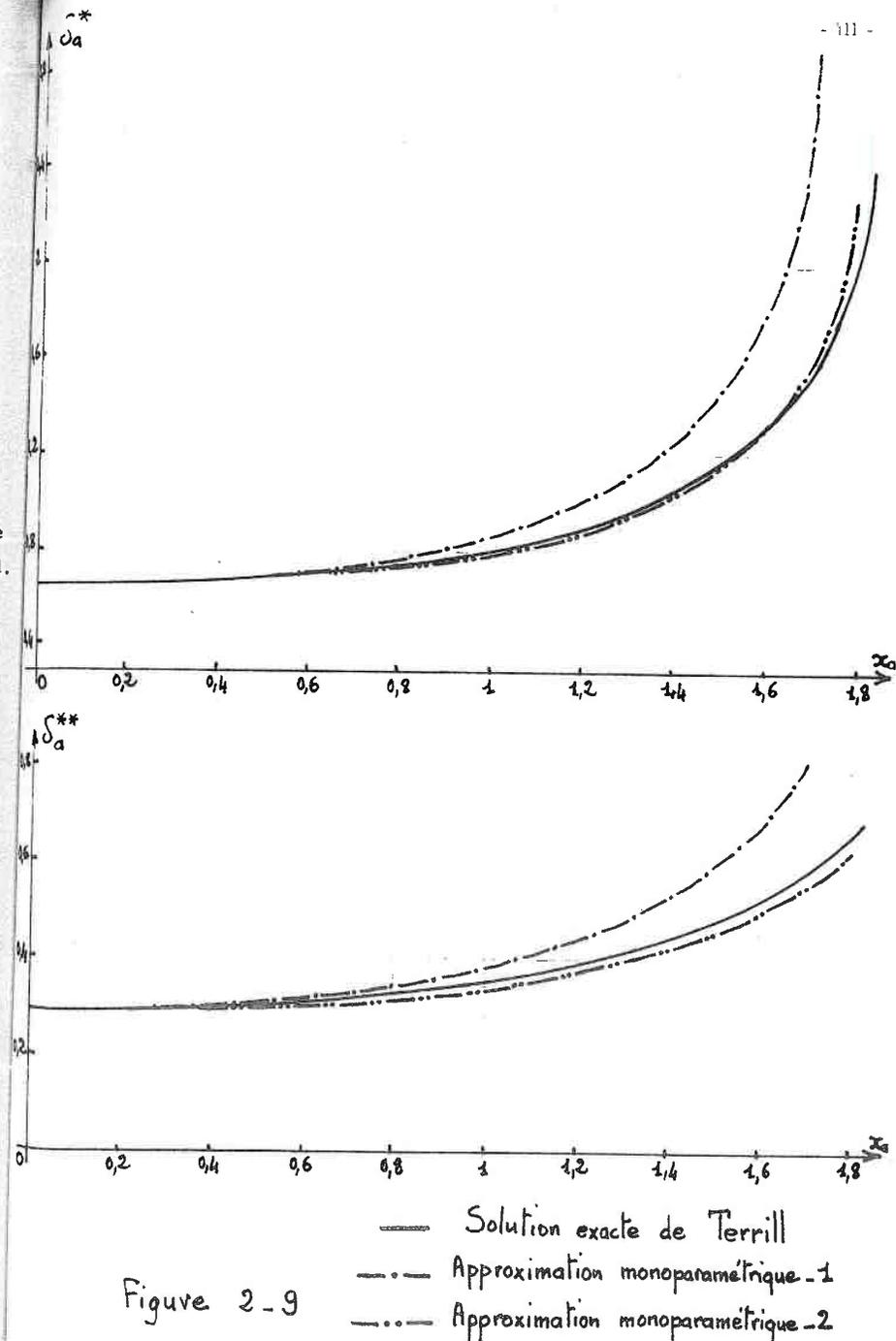


Figure 2-9

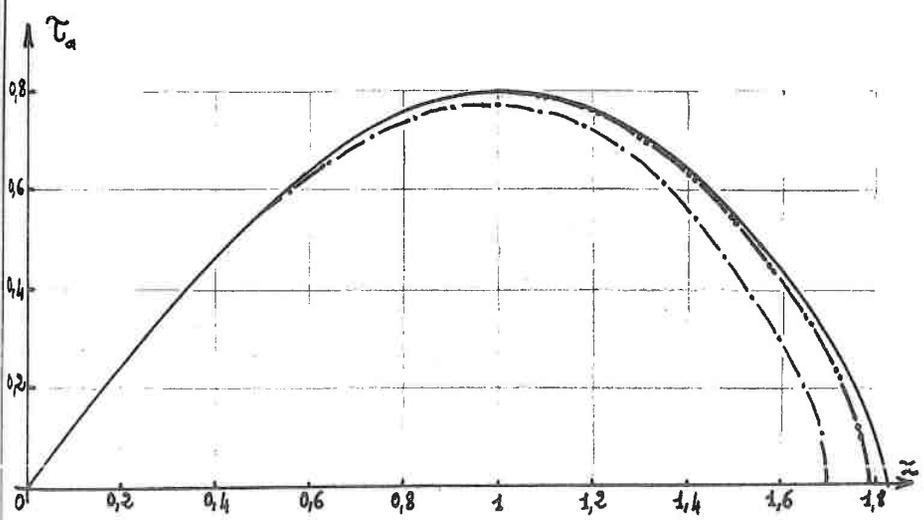
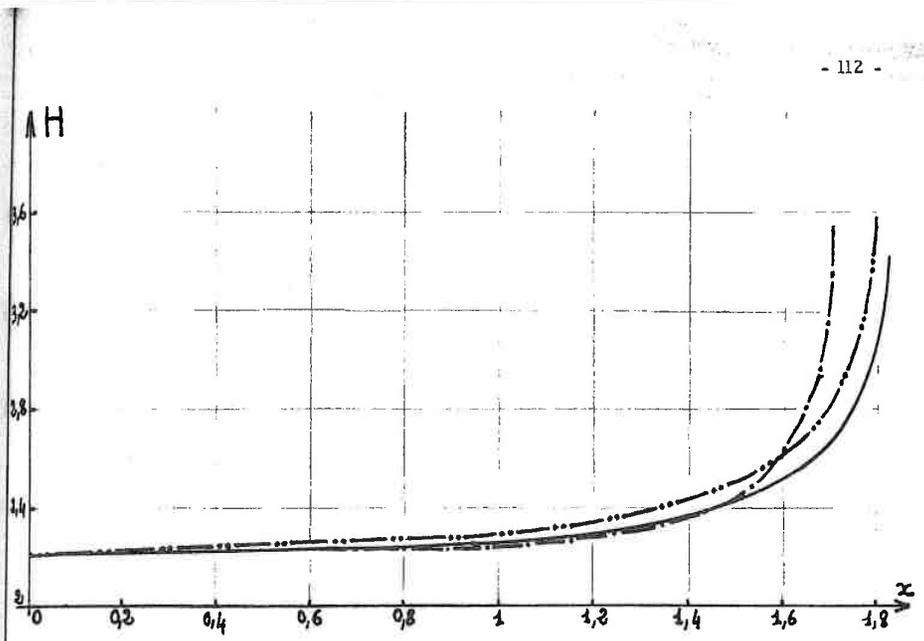


Figure 2-10

- Solution exacte de Terrill
- .-.- Approximation monoparamétrique -1
- .-.- Approximation monoparamétrique -2

d - Prévisions pour l'approximation biparamétrique

En améliorant la précision, nous avons déjà atteint l'objectif principal que l'on s'était fixé. Avant de développer l'approximation biparamétrique, nous allons chercher à savoir si le calcul des tables universelles à deux paramètres sera moins coûteux que pour la méthode précédente.

En pensant appliquer une méthode de différences finies analogue à celle esquissée pour l'approximation biparamétrique - 1, nous savons que le temps de calcul dépendra essentiellement des plages de variation du second paramètre, f_2 . Afin de pouvoir faire la comparaison, nous allons évaluer le domaine de variation de f_2 correspondant à la totalité de la couche limite pour le cylindre circulaire.

Dans la définition de f_2 , (2-8), on remplace l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**} par la formule (2-107) :

$$f_2 = U \cdot U'' \cdot \left(\frac{\delta^{**2}}{\nu} \right)^2 = a_0^2 \cdot \frac{U'' \cdot B^4}{U^{2b-1}} \cdot \left[\int_0^x U(s)^{b-1} \cdot ds \right]^2$$

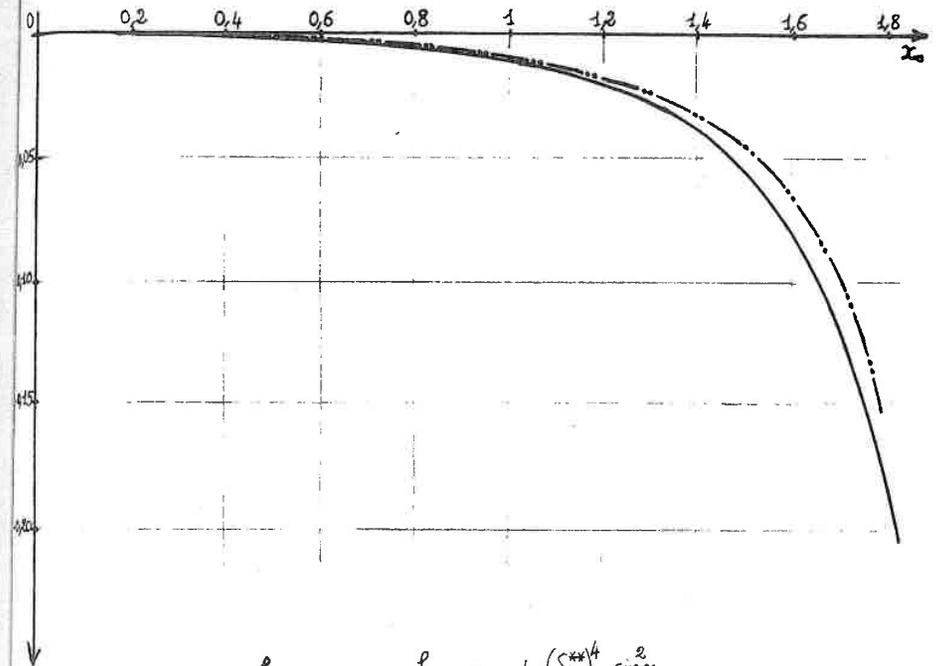
ce qui donne pour le cylindre circulaire :

$$f_2 = - \frac{a_0^2 \cdot B^4}{(\sin x_a)^{2b-2}} \left[\int_0^{x_a} \sin u^{b-1} \cdot du \right]^2$$

nous pouvons évaluer f_2 en prenant pour a_0 , b , B les valeurs trouvées pour le calcul monoparamétrique. On obtient la courbe représentée sur la figure (2-11) avec celle déterminée à l'aide des résultats de Terrill

$$(2-95) \quad f_{2T} = - \left(\frac{\delta_a^{**}}{a} \right)^4 \cdot \sin^2 x_a$$

Nous constatons que la courbe prévisionnelle est au dessus de celle de Terrill. Comme la courbe réelle correspondant à l'approximation biparamétrique - 2 sera située en principe entre ces deux courbes, nous pouvons donc dire que f_2 variera de 0 à environ - 0,20. Si nous prenons un pas en f_2 assez petit, par exemple : $\Delta f_2 = - 0,001$, il faudra alors faire le calcul de 200 couches au maximum. Nous rappelons que pour l'approximation biparamétrique - 1, nous avons évalué un nombre minimum nécessaire de l'ordre de 250 couches, pour le même pas.



— f_{2T}

$$f_{2T} = -4x(\sigma_a^{**})^4 \sin^2 x_a$$

σ_a^{**} : valeurs de R.M. Terrill

... f_2

$$f_2 = -\frac{a_0^2 \cdot B^4}{(\sin x_a)^{2b-2}} \cdot \left[\int_0^{x_a} (\sin x)^{b-1} dx \right]^2$$

B: valeurs de l'approximation monoparamétrique-2

Figure 2-11

La résolution numérique de l'approximation biparamétrique - 2 sera donc plus courte en principe que celle de la méthode précédente. Bien que la durée des calculs soit encore importante, comme l'approximation monoparamétrique - 2 donne déjà de bons résultats, nous pouvons entreprendre la résolution de l'approximation biparamétrique - 2 avec l'espoir d'obtenir une excellente précision.

3 - Approximation biparamétrique

Dans ce paragraphe nous allons développer la méthode numérique générale permettant de résoudre l'équation biparamétrique - 2. Nous expliquerons ensuite la manière d'utiliser les tables universelles à deux paramètres. Enfin nous donnerons les résultats pour le cylindre circulaire, calculés grâce à une résolution partielle approchée.

a - Equation universelle biparamétrique

En donnant à N la valeur 2 dans l'équation (2-111) et en exprimant θ_1 par (2-17)' et θ_2 par (2-51), nous obtenons l'équation universelle approchée au rang 2 :

$$(2-123) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^3 \Phi_2^*}{\partial \eta^3} + \left[\frac{f_1}{B^2} \cdot (1 - \frac{b}{2}) + \frac{a_0}{2} \right] \cdot \Phi_2^* \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta^2} + \frac{f_1}{B^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ & \frac{f_2 + f_1 \cdot F}{B^2} \cdot \left[\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta \cdot \partial f_1} - \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta^2} \right] + \frac{f_2 \cdot (f_1 + 2F)}{B^2} \cdot \\ & \quad \times \left[\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta \cdot \partial f_2} - \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial \eta^2} \right] \end{aligned} \right.$$

avec les conditions :

$$(2-124) \left\{ \begin{aligned} \eta = 0 & \quad \Phi_2^* = \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} = 0 \\ \eta \rightarrow \infty & \quad \frac{\partial \Phi_2^*}{\partial \eta} \rightarrow 1 \\ f_1 = f_2 = 0 & \quad \Phi_2^* = \Phi_0 \end{aligned} \right. \quad \begin{array}{l} \text{solution de Blasius} \\ \text{pour la plaque plane} \end{array}$$

En procédant comme les fois précédentes, la grandeur F peut être mise sous la forme :

$$(2-125) \quad F = \frac{a_0 \cdot B^2 - b \cdot f_1 + 2 \cdot \frac{f_2}{B} \cdot \left[\frac{\partial B}{\partial f_1} + f_1 \cdot \frac{\partial B}{\partial f_2} \right]}{1 - \frac{2}{B} \cdot \left[f_1 \cdot \frac{\partial B}{\partial f_1} + 2 \cdot f_2 \cdot \frac{\partial B}{\partial f_2} \right]}$$

cette relations, ainsi que celle définissant B, (2-106), sont nécessaires pour l'intégration de l'équation (2-123). Dans la suite nous désignerons Φ_2^* par Φ afin de simplifier l'écriture des formules.

b - Discretisation générale

Nous allons résoudre ce problème comme une équation dépendant de 3 variables : ϑ , f_1 , f_2 . Nous abaissons le degré de l'équation (2-123) à l'aide de la relation (2-58) :

$$(2-126) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \left[\frac{f_1}{B^2} \left(1 - \frac{b}{2} \right) + \frac{a_0}{2} \right] \cdot \Phi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{f_1}{B^2} \cdot \left[1 - \varphi^2 \right] = \\ & \frac{f_2 + f_1 \cdot F}{B^2} \cdot \left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right] + \frac{f_2 \cdot (f_1 + 2 \cdot F)}{B^2} \cdot \left[\varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right] \end{aligned} \right.$$

Nous avons vu lors des approximations monoparamétriques 1 et 2 que la discretisation associée à la linéarisation permettaient de ramener le calcul de la solution, pour une valeur de f_1 fixée, à la résolution d'un système linéaire du type (2-66). Nous employions alors la méthode du Progonka pour obtenir sa solution. Cet algorithme simple et rapide peut tomber en défaut si les conditions de stabilité (2-71) ne sont plus vérifiées. C'est pourquoi nous avons pris une discretisation plus élaborée.

Pour un couple (f_1, f_2) donné, nous calculons la solution φ par la méthode des différences finies à l'aide du schéma implicite :

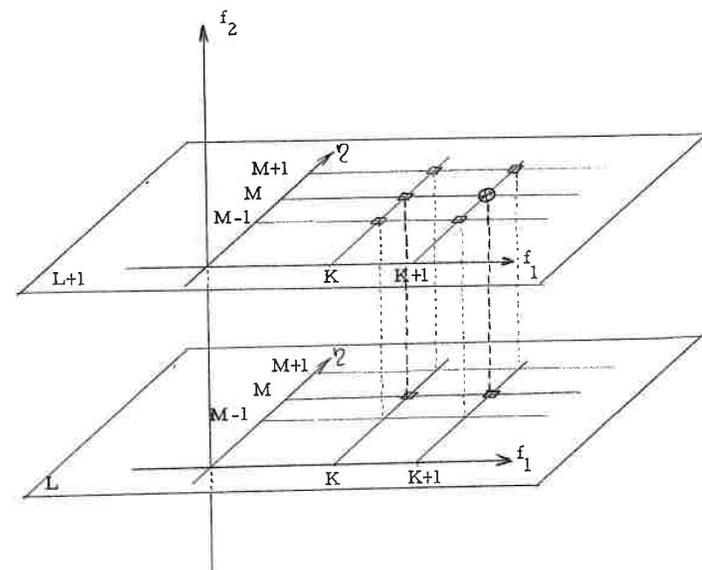


Figure 2-12

En désignant par $\Delta \vartheta$, Δf_1 , Δf_2 les pas sur les trois axes, les coordonnées d'un nœud du mouillage seront définies par :

$$(2-92) \quad \begin{aligned} \vartheta &= (M-1) \cdot \Delta \vartheta & M &= 1 \text{ à } N \\ f_1 &= K \cdot \Delta f_1 & K &\in \mathbb{Z} \\ f_2 &= L \cdot \Delta f_2 & L &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Au point défini par le triplet $(M, K+1, L+1)$, nous rapprocherons les dérivées partielles par les formules suivantes où les indices correspondants à f_1 et f_2 ne sont indiqués que lorsqu'ils prennent des valeurs différentes de $K+1$ et $L+1$:

$$(2-127) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &\approx \frac{1}{2 \cdot \Delta \eta} \cdot \left[s_1 \cdot (\varphi_{M+1} - \varphi_{M-1}) + (1-s_1) \cdot (\varphi_{M+1}^K - \varphi_{M-1}^K) \right] \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} &\approx \frac{1}{(\Delta \eta)^2} \cdot \left[s_2 \cdot (\varphi_{M+1} - 2 \cdot \varphi_M + \varphi_{M-1}) + (1-s_2) \cdot (\varphi_{M+1}^K - 2 \cdot \varphi_M^K + \varphi_{M-1}^K) \right] \\ \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} &\approx \frac{1}{\Delta f_1} \cdot \left[s_3 \cdot (\varphi_M - \varphi_M^K) + (1-s_3) \cdot (\varphi_M^L - \varphi_M^K) \right] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} &\approx \frac{1}{\Delta f_1} \cdot \left[s_4 \cdot (\Phi_M - \Phi_M^K) + (1-s_4) \cdot (\Phi_M^L - \Phi_M^K) \right] \\ \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} &\approx \frac{1}{\Delta f_2} \cdot \left[s_5 \cdot (\varphi_M - \varphi_M^L) + (1-s_5) \cdot (\varphi_M^K - \varphi_M^K) \right] \\ \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} &\approx \frac{1}{\Delta f_2} \cdot \left[s_6 \cdot (\Phi_M - \Phi_M^L) + (1-s_6) \cdot (\Phi_M^K - \Phi_M^K) \right] \end{aligned} \right.$$

les coefficients s_1 à s_6 étant compris entre 0 et 1.

Nous linéarisons l'équation (2-126) en utilisant les relations suivantes :

$$(2-128) \left\{ \begin{aligned} \Phi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &\longrightarrow \Phi^{i-1} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^i \\ \varphi^2 &\longrightarrow \varphi^{i-1} \cdot \varphi^i \\ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} &\longrightarrow \varphi^{i-1} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \right)^i \\ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} &\longrightarrow \varphi^{i-1} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial f_2} \right)^i \\ \frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &\longrightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial f_1} \right)^{i-1} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^i \\ \frac{\partial \Phi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &\longrightarrow \left(\frac{\partial \Phi}{\partial f_2} \right)^{i-1} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^i \end{aligned} \right.$$

où i désigne l'indice de l'itération en cours.

En reportant les formules de discrétisation (2-127) dans l'équation (2-126) linéarisée à l'aide de (2-128), nous obtenons au point (M, K+1, L+1) l'équation suivante, valable pour M variant de 2 à N-1 :

$$(2-129) \left\{ \begin{aligned} &\frac{s_2}{(\Delta \eta)^2} \cdot (\varphi_{M+1}^i - 2 \cdot \varphi_M^i + \varphi_{M-1}^i) + \frac{1-s_2}{(\Delta \eta)^2} \cdot (\varphi_{M+1}^K - 2 \cdot \varphi_M^K + \varphi_{M-1}^K) + \\ &\frac{f_1}{(B^{i-1})^2} \cdot (1 - \varphi^{i-1} \cdot \varphi^i) + \left[\frac{f_1}{(B^{i-1})^2} \cdot (1 - \frac{b}{2}) + \frac{a_0}{2} \right] \cdot \Phi_M^{i-1} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{s_1}{2 \cdot \Delta \eta} \cdot (\varphi_{M+1}^i - \varphi_{M-1}^i) + \frac{1-s_1}{2 \cdot \Delta \eta} \cdot (\varphi_{M+1}^K - \varphi_{M-1}^K) \right] = \\ &\frac{f_2 + f_1 \cdot F^{i-1}}{(B^{i-1})^2} \cdot \left[\frac{\varphi_M^{i-1} \cdot \frac{s_3 \cdot (\varphi_M^i - \varphi_M^K) + (1-s_3) \cdot (\varphi_M^L - \varphi_M^K)}{\Delta f_1}}{s_4 \cdot (\Phi_M^{i-1} - \Phi_M^K) + (1-s_4) \cdot (\Phi_M^L - \Phi_M^K)} \cdot \frac{s_1 \cdot (\varphi_{M+1}^i - \varphi_{M-1}^i)}{2 \cdot \Delta \eta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-s_5) \cdot (\varphi_{M+1}^K - \varphi_{M-1}^K)}{2 \cdot \Delta \eta} \right] \\ &+ \frac{f_2 \cdot (f_1 + 2 \cdot F^{i-1})}{(B^{i-1})^2} \cdot \left[\frac{\varphi_M^{i-1} \cdot \frac{s_5 \cdot (\varphi_M^i - \varphi_M^L) + (1-s_5) \cdot (\varphi_M^K - \varphi_M^K)}{\Delta f_2}}{s_6 \cdot (\Phi_M^{i-1} - \Phi_M^L) + (1-s_6) \cdot (\Phi_M^K - \Phi_M^K)} \cdot \frac{s_1 \cdot (\varphi_{M+1}^i - \varphi_{M-1}^i)}{2 \cdot \Delta \eta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-s_1) \cdot (\varphi_{M+1}^K - \varphi_{M-1}^K)}{2 \cdot \Delta \eta} \right] \end{aligned} \right.$$

où B^{i-1} , Φ^{i-1} , F^{i-1} sont déterminés par :

$$(2-130) \left\{ \begin{aligned} B^{i-1} &= \int_0^{\eta^{\max}} \varphi^{i-1} \cdot (1 - \varphi^{i-1}) \cdot d\eta \quad ; \quad \Phi^{i-1} = \int_0^{\eta} \varphi^{i-1} \cdot d\eta \\ F^{i-1} &= \frac{a_0 \cdot (B^{i-1})^2 - b \cdot f_1 + 2 \cdot \frac{f_2}{B^{i-1}} \cdot \left[\frac{B^{i-1} - B_K}{\Delta f_1} + f_1 \cdot \frac{B^{i-1} - B_L}{\Delta f_2} \right]}{1 - \frac{2}{B^{i-1}} \cdot \left[f_1 \cdot \frac{B^{i-1} - B_K}{\Delta f_1} + 2 \cdot f_2 \cdot \frac{B^{i-1} - B_L}{\Delta f_2} \right]} \end{aligned} \right.$$

avec : $B_K = \int_0^{\eta^{\max}} \varphi_K \cdot (1 - \varphi_K) \cdot d\eta$ et $B_L = \int_0^{\eta^{\max}} \varphi_L \cdot (1 - \varphi_L) \cdot d\eta$

et les conditions aux limites :

$$(2-65) \quad \begin{cases} \Psi_1^i = \Phi_1^i = 0 & \forall i \in \mathbb{N} \\ \Psi_N^i = 1 & \forall K, \forall L \end{cases}$$

On est donc ramené pour chaque couple (f_1, f_2) , à résoudre un système linéaire du type :

$$(2-66) \quad a_M^{i-1} \cdot \Psi_{M-1}^i - 2 \cdot b_M^{i-1} \cdot \Psi_M^i + c_M^{i-1} \cdot \Psi_{M+1}^i = d_M^{i-1} \quad \text{pour } M = 2 \text{ à } N-1$$

en posant pour simplifier :

$$(2-131) \quad z = \frac{a_0}{2} \cdot (B^{i-1})^2 + (1 - \frac{b}{2}) f_1; \quad z_1 = \frac{f_2 + f_1 \cdot F^{i-1}}{\Delta f_1}; \quad z_2 = \frac{f_2 \cdot (f_1 + 2 \cdot F^{i-1})}{\Delta f_2}$$

les coefficients du système soit :

$$(2-132) \quad \begin{cases} a_M^{i-1} = s_2 - \frac{\Delta \varrho}{2 \cdot (B^{i-1})^2} \cdot \left[z \cdot \Phi_M^{i-1} + s_1 \cdot z_1 \cdot \left[s_4 \cdot (\Phi_M^{i-1} - \Phi_M^K) + (1-s_4) \cdot (\Phi_M^L - \Phi_M^K) \right] \right. \\ \quad \left. + s_1 \cdot z_2 \cdot \left[s_6 \cdot (\Phi_M^{i-1} - \Phi_M^L) + (1-s_6) \cdot (\Phi_M^K - \Phi_M^K) \right] \right] \\ b_M^{i-1} = s_2 + \frac{(\Delta \varrho)^2 \cdot \Psi_M^{i-1}}{2 \cdot (B^{i-1})^2} \cdot \left[f_1 + s_3 \cdot z_1 + s_5 \cdot z_2 \right] \\ c_M^{i-1} = s_2 + \frac{\Delta \varrho}{2 \cdot (B^{i-1})^2} \cdot \left[z \cdot \Phi_M^{i-1} + s_1 \cdot z_1 \cdot \left[s_4 \cdot (\Phi_M^{i-1} - \Phi_M^K) + (1-s_4) \cdot (\Phi_M^L - \Phi_M^K) \right] \right. \\ \quad \left. + s_1 \cdot z_2 \cdot \left[s_6 \cdot (\Phi_M^{i-1} - \Phi_M^L) + (1-s_6) \cdot (\Phi_M^K - \Phi_M^K) \right] \right] \\ d_M^{i-1} = - (1-s_2) \cdot \left(\Psi_{M+1}^K - 2 \Psi_M^K + \Psi_{M-1}^K \right) \\ \quad - \left(\frac{\Delta \varrho}{B^{i-1}} \right)^2 \cdot \left[f_1 + z_1 \cdot \Psi_M^{i-1} \cdot \left[s_3 \cdot (\Psi_M^K - (1-s_3) \cdot (\Psi_M^L - \Psi_M^K)) \right] \right. \\ \quad \left. + z_2 \cdot \Psi_M^{i-1} \cdot \left[s_5 \cdot \Psi_M^L - (1-s_5) \cdot (\Psi_M^K - \Psi_M^K) \right] \right] \\ \quad - \frac{\Delta \varrho}{2} \cdot \frac{1-s_1}{(B^{i-1})^2} \cdot \left(\Psi_{M+1}^K - \Psi_{M-1}^K \right) \cdot \left[z - z_1 \cdot \left[s_4 \cdot \Phi_M^K - (1-s_4) \cdot (\Phi_M^L - \Phi_M^K) \right] \right. \\ \quad \left. - z_2 \cdot \left[s_6 \cdot \Phi_M^L - (1-s_6) \cdot (\Phi_M^K - \Phi_M^K) \right] \right] \end{cases}$$

Le système (2-66) avec (2-132) sera donc résolu par la méthode du Progonka, les paramètres s_1 à s_6 étant ajustés pour chaque quadrant du plan f_1, f_2 afin de vérifier les conditions de stabilité de la méthode (2-71).

Nous initialisons les calculs par la couche $L = 0$ qui correspond aux résultats de l'approximation monoparamétrique -2. Ensuite, pour chaque couche L , nous procéderons d'une manière analogue à la méthode monoparamétrique ; en particulier l'initialisation des itérations i , le test de sortie sont les mêmes (2-72), (2-73) et les valeurs de f_1 sont bornées de la même façon (2-75), (2-118).

Nous démarrerons les calculs, f_2 étant fixé, pour la valeur discrète de f_1 la plus proche de celle annulant $\theta_2 = f_2 + f_1 \cdot F$, où F sera pris en première approximation égal à la valeur correspondante de la couche précédente. En effet les dérivées partielles par rapport à f_1 , qui ne peuvent pas être calculées correctement pour toute valeur initiale de f_1 , seront alors multipliées par un nombre très faible, θ_2^0 ; elles n'influenceront donc pratiquement pas sur la détermination de l'initialisation de la couche.

Les coefficients a_0 et b constituent deux paramètres supplémentaires du programme ; en effet pour chaque couche ils représentent la linéarisation de la fonction F , (2-100), et ne peuvent théoriquement être calculés qu'une fois connue la solution pour la valeur de f_2 considérée. Il faudrait donc recommencer le calcul de chaque couche jusqu'à stabilité de a_0 et b . En réalité, d'après les résultats de Loitsianski, on constate que les courbes de F graduées en f_2 sont quasiment parallèles entre-elles. La pente b est très peu variable et l'ordonnée à l'origine, $a_0 \cdot B^2$, peut être déterminée par une formule empirique simple. En pratique nous n'aurons donc à faire au maximum que deux passages par couche pour ajuster les valeurs de a_0 et b .

c - Tables universelles biparamétriques et leur utilisation

Pour chaque couche, on obtient des tables monoparamétriques analogues à celles déjà décrites (voir figure (2-3)). En conservant pour chaque valeur de f_1 les renseignements nécessaires pour déterminer les grandeurs caractéristiques de la couche limite, on crée ainsi les tables universelles biparamétriques, soit :

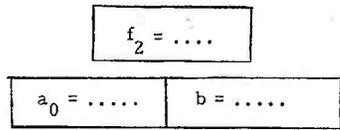


Table 1

f_1	A	B	H	ζ	$\left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \eta_s} \right]_{\eta_s=0}$	β_1	β_2

Table 2

	$f_1 = ..$		$f_1 = ..$			$f_1 = ..$	
η_s	ψ_s	Φ_s	ψ_s	Φ_s		ψ_s	Φ_s
0							
$\eta_{s \max}$							

Figure 2-13

- où
- ψ_s représente le profil de vitesse adimensionnelle dans la couche limite
 - Φ_s caractérise la fonction de courant adimensionnelle
 - les grandeurs de la table 1 sont calculées par :

$$(2-133) \left\{ \begin{array}{l} A = \int_0^{\eta_{s \max}} (1 - \psi_s) \cdot d\eta_s \\ H = \frac{A}{B} \\ \beta_1 = \frac{f_1}{B^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \int_0^{\eta_{s \max}} \psi_s (1 - \psi_s) d\eta_s \\ \zeta = B \times \left[\frac{\partial \psi_s}{\partial \eta_s} \right]_{\eta_s=0} \\ \beta_2 = \frac{f_2}{B^4} \end{array} \right.$$

Ces résultats sont calculés une fois pour toutes et ne sont valables que pour un fluide incompressible en écoulement laminaire plan permanent.

Afin de simplifier l'utilisation de ces tables on peut tracer les courbes de β_2 en fonction de β_1 en les graduant en f_2 à partir des deux colonnes de droite des tables 1, on obtient ainsi des abaques du types :

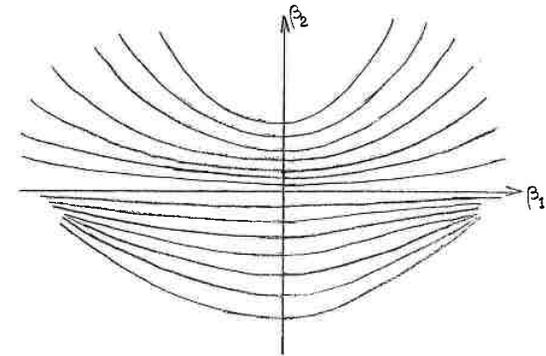


Figure 2-14

Dans chaque cas concret, la vitesse de l'écoulement à la frontière extérieure de la couche limite, U, étant précisée, on peut calculer les quantités β_1 et β_2 pour une abscisse x_0 donnée :

$$(2-117) \quad \beta_1(x_0) = \frac{a_0 \cdot U'}{U^b} \times \int_0^{x_0} U_{(s)}^{b-1} \cdot ds$$

$$(2-134) \quad \beta_2(x_0) = \frac{a_0^2 \cdot U''}{U^{2b-1}} \times \left[\int_0^{x_0} U_{(s)}^{b-1} \cdot ds \right]^2$$

ce qui détermine un point du plan (β_1, β_2) , et on trouve à l'aide des abaques, figure (2-14), la valeur de f_2 correspondante, $f_2(x_0)$.

Nous pouvons ensuite chercher dans la colonne β_1 de la table 1 associée à $f_2(x_0)$ le terme qui est le plus proche de $\beta_1(x_0)$; on évalue alors par interpolation les valeurs de A (x_0), B (x_0), $f_1(x_0)$, $\zeta(x_0)$, ... qui vont permettre

d'obtenir les grandeurs caractéristiques de la couche limite au point d'abscisse x_0 . (Remarque : si $f_2(x_0)$ n'est pas une valeur existant dans les tables universelles, il faudra faire une interpolation entre les tables associées aux deux valeurs de f_2 encadrant $f_2(x_0)$).

L'épaisseur de déplacement, $\delta^*(x_0)$, est calculée par :

$$(2-119) \quad \delta^*(x_0) = \frac{A(x_0)}{U^{b/2}(x_0)} \sqrt{a_0 \cdot \nu \cdot \int_0^{x_0} U(s)^{b-1} \cdot ds}$$

l'épaisseur de quantité de mouvement, $\delta^{**}(x_0)$, est déterminée par :

$$(2-107) \quad \delta^{**}(x_0) = \frac{B(x_0)}{U^{b/2}(x_0)} \sqrt{a_0 \cdot \nu \cdot \int_0^{x_0} U(s)^{b-1} \cdot ds}$$

et le coefficient de forces de frottement à la paroi par unité de surface,

$\tau_0(x_0)$, par :

$$(2-12) \quad \tau_0(x_0) = \mu \frac{U(x_0) \cdot \zeta(x_0)}{\delta^{**}(x_0)}$$

le profil de vitesse et la fonction de courant peuvent être déterminés dans cette section de la couche limite à l'aide de $f_1(x_0)$ dans la table 2.

Nous constatons encore que nous n'avons pas eu à intégrer une équation différentielle supplémentaire comme dans la méthode universelle de Loitsianski.

d - Résolution numérique partielle approchée

Nous avons essayé d'obtenir des résultats avec l'approximation biparamétrique pour le cas du cylindre circulaire afin d'avoir une idée de l'amélioration qu'elle peut apporter aux valeurs monoparamétriques.

Il était hors de question d'exploiter complètement cette méthode, en prenant des pas en f_1 et f_2 assez petits pour obtenir des tables universelles fines. Nous nous sommes bornés à ne faire les calculs que pour le troisième quadrant du plan f_1, f_2 et en prenant des pas constants cinq fois plus grand que ceux souhaités, soit : $\Delta f_1 = \Delta f_2 = -0,005$.

Nous avons initialisé chaque couche pour la valeur $f_1 = 0$, mais à cause des dérivées partielles par rapport à f_1 , nous avons ajouté une phase itérative entre cette valeur initiale et le pas précédent ($f_1 = +0,005$). Pour les calculs nous avons pris les coefficients s_1 à s_6 égaux à 1, sauf dans la phase initiale où s_3 et s_4 sont nuls pour déterminer la solution au pas positif. De plus nous avons laissé a_0 et b constants et n'avons donc fait qu'un seul passage par couche.

e - Résultats pour le cylindre circulaire

Nous avons représenté sur les figures (2-15) et (2-16) les résultats obtenus à l'aide de la résolution partielle approchée qui vient d'être décrite ; nous avons également fait figurer les courbes de Terrill et celles provenant de l'approximation monoparamétrique -2.

Nous constatons une nette amélioration par rapport à cette dernière malgré les simplifications importantes faites dans la méthode numérique au détriment de la précision. Le point de décollement est maintenant situé à l'abscisse 1,815, au lieu de 1,79 pour l'approximation monoparamétrique -2 ; la valeur de Terrill étant 1,823.

Nous pouvons espérer une précision encore meilleure, avec les tables universelles biparamétriques calculées avec la méthode exposée en b. En effet nous voyons sur les figures (2-15) et (2-16) que le gain de précision est faible jusqu'à $\pi/2$. Or d'après la définition des paramètres de forme de Loitsianski, pour le cylindre circulaire f_1 et f_3 sont nuls et f_4 est négligeable devant f_2 à cette même abscisse (figure (2-1)) ; l'approximation biparamétrique -2 devrait donc logiquement donner une solution très proche de la solution exacte.

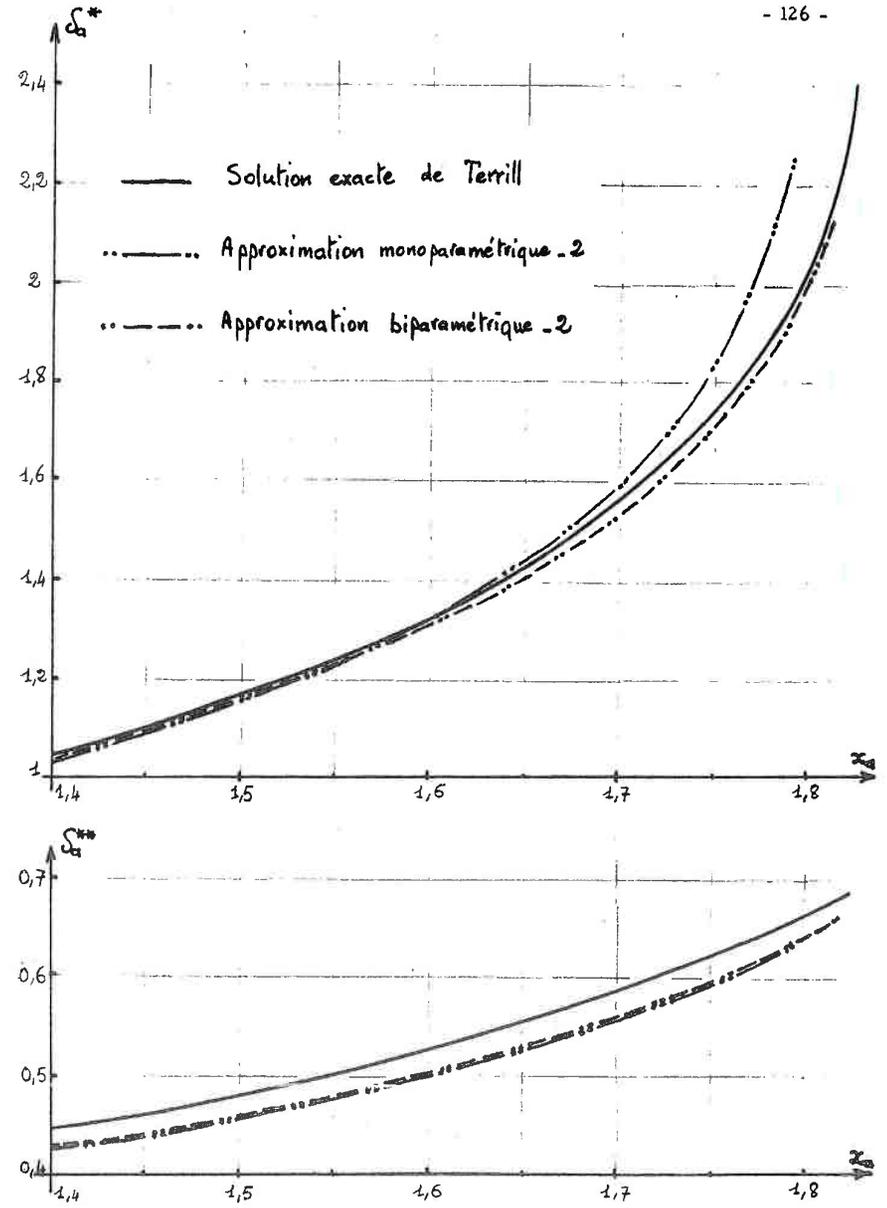
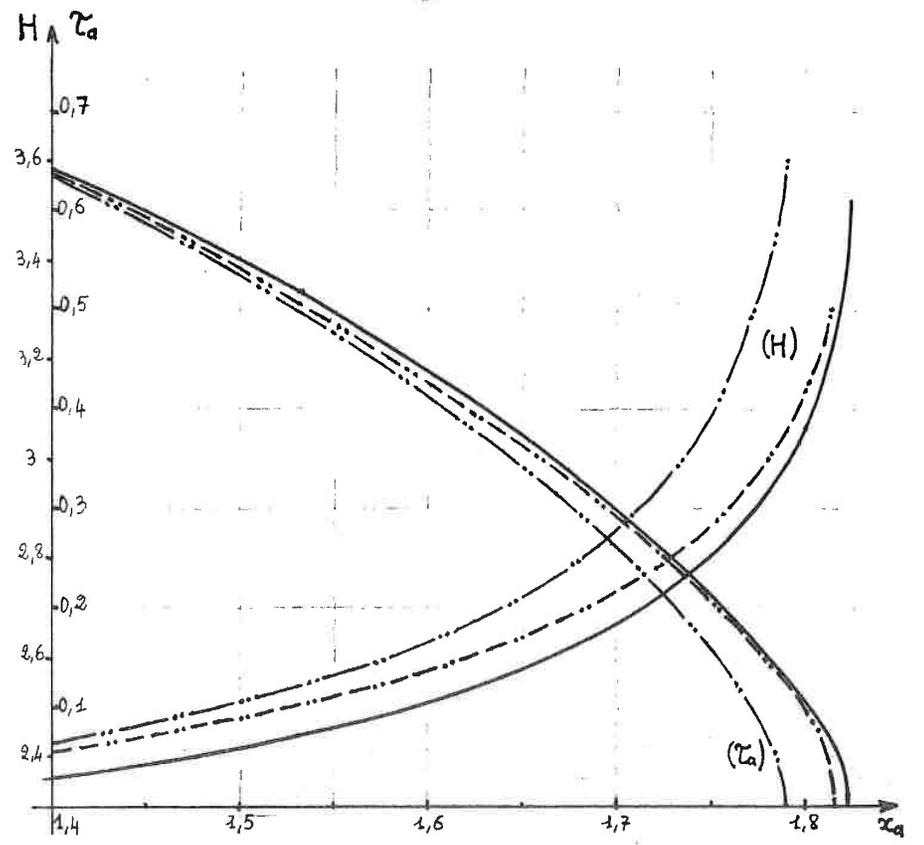


Figure 2-15



- Solution exacte de Terrill
- .. — .. Approximation monoparamétrique -2
- .. - - - .. Approximation biparamétrique -2

Figure 2-16

CONCLUSION

La méthode d'universalisation introduite par Loitsianski pour les problèmes de couche limite laminaire n'a reçu jusqu'à présent aucune justification théorique. Cette étude est en cours mais nécessite des résultats d'analyse fonctionnelle très délicats concernant les problèmes paraboliques non linéaires.

Un début de justification a donc été entrepris sur un problème parabolique linéaire plus simple. L'existence et l'unicité de sa solution ont été démontrées dans un espace fonctionnel approprié. Nous avons ensuite appliqué les idées fondamentales de l'universalisation : le problème de départ a d'abord été transformé par un changement de variables mettant en œuvre un ensemble de N paramètres de forme ; puis, en les définissant à l'aide de la fonction qui différencie les équations de la famille étudiée et en introduisant un paramètre supplémentaire, nous obtenons l'approximation au rang N de l'universalisation du problème initial.

Nous avons montré que la solution du problème universalisé au rang N pouvait se mettre sous la forme d'un développement en fonction des paramètres de forme, dont les coefficients sont des fonctions universelles pour la classe d'équations paraboliques considérée. Nous avons démontré que cette solution converge vers la solution du problème de départ lorsque le nombre de paramètres de forme tend vers l'infini. Enfin, l'application numérique qui a été effectuée a mis en évidence la rapidité de convergence de cette méthode.

Les résultats obtenus sur ce problème parabolique linéaire laissent espérer une véritable justification théorique de l'universalisation des équations de la couche limite laminaire et permettent d'appliquer sans plus attendre cette méthode à divers problèmes de couche limite, en particulier celui de la couche limite plane incompressible stationnaire.

En prenant une variable transversale issue de la même idée de similitude généralisée qui avait conduit Loitsianski à introduire ses paramètres de forme, nous avons obtenu une première équation universelle. Son approximation monoparamétrique possède l'avantage considérable par rapport à celle de Loitsianski de présenter une grande facilité d'utilisation

des tables universelles dans chaque cas concret ; par contre elle donne des résultats un peu moins bon que cette dernière.

Ceci a été corrigé en introduisant une autre variable transversale. Une nouvelle équation universelle a ainsi été obtenue. Son approximation monoparamétrique donne des résultats légèrement plus précis que celle de Loitsianski. La résolution partielle de l'approximation biparamétrique qui a été effectuée, laisse espérer une excellente précision une fois les tables universelles à deux paramètres réalisées, tout en gardant la grande facilité d'emploi qui a été constatée pour la méthode précédente.

La lourdeur des calculs est compensée par le fait qu'ils sont effectués une fois pour toutes. Il est certain que dans chaque cas particulier on peut développer des méthodes analytiques comme celle de Terrill pour un cylindre circulaire ou des méthodes numériques qui soient plus précises. Mais il faut alors faire des calculs très longs ou disposer d'un ordinateur puissant ; par contre l'utilisation des tables universelles biparamétriques ne nécessite le calcul que de deux coefficients.

Nous pensons, que du point de vue pratique, l'ingénieur préférera dans la plupart des cas se servir de tables universelles existantes d'une façon simple et rapide, plutôt que de mettre au point une méthode propre au problème étudié même si la précision est un peu moins bonne.

ANNEXE 1

Etude des Fonctions Universelles du Problème I

Afin de simplifier cette étude, nous avons effectué le changement de variables suivant : $y = x - \frac{1}{2}$. Les fonctions universelles du problème I sont alors définies par la résolution successive des équations différentielles d'ordre deux à valeurs au contour :

$$(1-66)' \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0^{**} = 1 \\ q_0^* (-1/2) = q_0^* (1/2) = 0 \\ \\ q_1^{**} = q_0^* \\ q_1^* (-1/2) = q_1^* (1/2) = 0 \\ \text{-----} \\ q_{M+1}^{**} = q_M^* \\ q_{M+1}^* (-1/2) = q_M^* (1/2) = 0 \end{array} \right.$$

et nous obtenons pour les premières fonctions :

$$(1-67)' \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0^*(y) = \frac{1}{2!} \cdot (y^2 - \frac{1}{4}) \\ q_1^*(y) = \frac{1}{4!} \cdot (y^4 - \frac{3}{2} y^2 + \frac{5}{4}) \\ q_2^*(y) = \frac{1}{6!} \cdot (y^6 - \frac{15}{4} y^4 + \frac{75}{24} y^2 - \frac{61}{26}) \\ q_3^*(y) = \frac{1}{8!} \cdot (y^8 - 7 y^6 + \frac{175}{2^3} y^4 - \frac{427}{2^4} y^2 + \frac{1385}{2^8}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{pour } y \in]-1/2, +1/2[\\ \text{prolongé par 0 ailleurs} \end{array}$$

Proposition 1 : q_m^* est un polynôme pair de degré $2m + 2$.

Cette affirmation étant vérifiée pour les premières fonctions, nous faisons l'hypothèse de récurrence suivante :

$$q_{n-1}(y) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i \cdot y^{2(n-i)}$$

le polynôme q_n est défini par :

$$\begin{cases} q_n'' = q_{n-1} \\ q_n(-1/2) = q_n(1/2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc : } q_n(y) = \left[\sum_{i=0}^{i=n} \frac{a_i \cdot y^{2(n-i)+2}}{[2(n-i)+1] \cdot [2(n-i)+2]} \right] + C_1 \cdot y + C_2$$

les constantes d'intégration C_1 et C_2 sont déterminées par les conditions aux limites ; C_1 étant nulle, la proposition 1 est démontrée.

Proposition 2 : q_m^* a un optimum local unique, en $y = 0$, sur l'intervalle $[-1/2, +1/2]$

En raison des conditions aux limites, cela signifie que q_m^* est situé d'un seul côté de l'axe sur cet intervalle.

Calculons les dérivées des premières fonctions :

$$q_0'(y) = y$$

$$q_1'(y) = \frac{1}{3!} \cdot y \cdot \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$q_2'(y) = \frac{1}{5!} \cdot y \cdot \left(y - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \left(y + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \left(y^2 + \frac{5}{4} \right)$$

ce sont des polynômes impairs qui n'ont pas de racines réelles, autres que 0, sur $[-1/2, +1/2]$, donc les premières fonctions vérifient cette proposition.

Faisons l'hypothèse de récurrence suivante : q_{n-1} vérifie la proposition 2. Grâce à la parité, il suffit de raisonner sur $[0, +1/2]$. Supposons par l'absurde que q_n ait un optimum local pour une valeur y^* strictement comprise entre 0 et $+1/2$; sa dérivée, q_n' , s'annule donc pour cette valeur, en plus de 0. En appliquant le théorème de Rolle à q_n' , on montre que sa dérivée q_n'' , c'est-à-dire q_{n-1} , s'annule pour une valeur y^{**} comprise entre 0 et y^* ; ce qui est contraire à l'hypothèse faite. La proposition 2 est donc démontrée.

Proposition 3 : (1-68) $\|q_m^*\|_\infty \leq \frac{1}{8^{m+1}} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

La solution du problème au contour :

$$\begin{cases} q_n'' = q_{n-1} \\ q_n(-1/2) = q_n(+1/2) = 0 \end{cases}$$

peut se mettre sous la forme :

$$q_n(y) = \int_{-1/2}^{+1/2} g(y,u) \cdot q_{n-1}(u) \cdot du \quad \text{pour } y \in]-1/2, +1/2[$$

où, g est le noyau de Green du problème considéré :

$$g(y,u) = \begin{cases} (y-1/2) \cdot (u+1/2) & \text{pour } -1/2 \leq u \leq y \\ (y+1/2) \cdot (u-1/2) & \text{pour } y \leq u \leq 1/2 \end{cases}$$

Calculons l'optimum de q_n sur $]-1/2, +1/2[$

$$q_n(0) = - \int_{-1/2}^0 \frac{2n+1}{4} \cdot q_{n-1}(u) \cdot du + \int_0^{+1/2} \frac{2n-1}{4} \cdot q_{n-1}(u) \cdot du$$

en effectuant le changement de variable, $v = -u$, dans la première intégrale et en tenant compte de la parité de q_{n-1} , on obtient :

$$q_n(0) = \int_0^{+1/2} \frac{2v-1}{4} \cdot q_{n-1}(v) \cdot dv + \int_0^{+1/2} \frac{2u-1}{4} \cdot q_{n-1}(u) \cdot du$$

donc :

$$\|q_n\|_\infty = |q_n(0)| = \left| \int_0^{+1/2} \frac{2u-1}{2} \cdot q_{n-1}(u) \cdot du \right|$$

en majorant la quantité sous le signe intégral :

$$\|q_n\|_\infty \leq \|q_{n-1}\|_\infty \cdot \int_0^{+1/2} |u-1/2| \cdot du$$

soit :

$$\|q_n\|_\infty \leq \frac{1}{8} \cdot \|q_{n-1}\|_\infty$$

ou

$$\|q_n\|_\infty \leq \frac{1}{8^n} \cdot \|q_0\|_\infty$$

et comme : $\|q_0\|_\infty = \frac{1}{8}$, la proposition 3 est démontrée.

$$(2'-4) \begin{bmatrix} 1 & c'_2 & & & & \\ & 1 & c'_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & c'_{N-2} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_2 \\ d'_3 \\ \vdots \\ d'_{N-2} \\ d'_{N-1} \end{bmatrix}$$

ensuite on obtient la solution de proche en proche en partant de la dernière équation :

$$(2'-5) \begin{cases} v_{N-1} = d'_{N-1} \\ v_M = d'_M - c'_M \times v_{M+1} \end{cases} \text{ pour } M \text{ variant de } N-2 \text{ à } 2$$

On constate que nous retrouvons pratiquement la formule de Progonka :

$$(2-68)' \quad v_M = K_M + L_M \times v_{M+1} \text{ pour } M \text{ variant de } N-1 \text{ à } 2.$$

il suffit de poser :

$$(2'-6) \begin{cases} d'_M = K_M \\ c'_M = -L_M \\ d'_{N-1} = K_{N-1} + L_{N-1} \end{cases} \quad M = 2 \text{ à } N-2$$

Appliquons la méthode de Gauss sans pivoter au système (2'-3). Supposons qu'on ait déjà fait apparaître des zéros en dessous de la diagonale dans les (m-3) premières colonnes :

$$(2'-7) \begin{bmatrix} 1 & -L_2 & & & & \\ & 1 & -L_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -L_{M-1} \\ & & & & & a_M \\ & & & & & -2b_M & c_M \\ & & & & & & & c_{N-2} \\ & & & & & & & & a_{N-2} & -2b_{N-2} \\ & & & & & & & & & & c_{N-1} \\ & & & & & & & & & & & a_{N-1} & -2b_{N-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{M-1} \\ v_M \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ K_{M-1} \\ d_M \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} - c_{N-1} \end{bmatrix}$$

nous allons déterminer les coefficients K_M et L_M en fonction des termes déjà calculés. Pour faire apparaître un zéro dans la colonne (m-2) à la ligne (m-1), on retranche à cette ligne, la ligne (m-2) multipliée par a_M :

	(m-2)			
	1	$-L_{M-1}$	0	K_{M-1}
(m-1)	0	$-2b_M + a_M \cdot L_{M-1}$	c_M	$d_M - a_M \times K_{M-1}$

Pour rendre le coefficient de la diagonale égal à 1, il suffit de diviser la ligne (m-1) par $(-2b_M + a_M \cdot L_{M-1})$:

	(m-2)	(m-1)		
	1	$-L_{M-1}$	0	K_{M-1}
(m-1)	0	1	$\frac{c_M}{-2b_M + a_M \cdot L_{M-1}}$	$\frac{d_M - a_M \cdot K_{M-1}}{-2b_M + a_M \cdot L_{M-1}}$

nous retrouvons donc les relations :

$$(2-69)' \quad \begin{cases} K_M = \frac{a_M \cdot K_{M-1} - d_M}{2b_M - a_M \cdot L_{M-1}} \\ L_M = \frac{c_M}{2b_M - a_M \cdot L_{M-1}} \end{cases} \text{ pour } M = 3 \text{ à } N-1$$

La première équation du système (2'-3)

$$-2b_2 \times v_2 + c_2 \times v_3 = d_2$$

peut s'écrire :

$$v_2 = -\frac{d_2}{2b_2} + \frac{c_2}{2b_2} \times v_3$$

donc

$$(2'-8) \quad K_2 = -\frac{d_2}{2b_2} ; L_2 = \frac{c_2}{2b_2}$$

les formules (2-69)' pourront être appliquées pour $M = 2$ à condition de poser :

$$(2-70)' \quad K_1 = L_1 = 0$$

que l'on peut obtenir à partir de (2-68)' en utilisant la condition

$$(2'-2) : \quad v_1 = 0.$$

La méthode de Gauss sans pivoter pour un système du type (2'-3) consiste donc :
 1) à calculer les coefficients K_M et L_M pour M variant de 2 à $N-1$ à l'aide de (2-69)' et (2-70)'
 2) à obtenir les valeurs V_M par (2-68)' pour M variant de $N-1$ à 2.
 Donc :

Méthode du "Progonka" = Méthode de Gauss sans pivoter appliquée à un système linéaire d'équations dont la matrice est tridiagonale.

Remarques : 1) Nous avons supposé que les divisions étaient possibles, sinon il faut associer à l'élimination la technique du pivot.

2) "Progonka" est le nom donné par l'équipe de Loitsianski à cette méthode ; mais on peut la trouver sous d'autres formes, par exemple dans l'ouvrage de Richtmyer et Morton [33] .

II - CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILITE

En premier lieu si la condition suivante est réalisée :

$$(2'-9) \quad 2 \times |b_M| > |a_M| + |c_M| \quad \forall M, M = 2 \text{ à } N-1$$

La matrice du système (2'-3) est à dominante diagonale stricte. Elle est donc inversible d'après le théorème d'Adamard et le système à une solution unique.

Mais en appliquant la méthode de Gauss sans pivoter, il peut arriver qu'il y ait un pivot nul au cours de l'élimination ; dans ce cas la méthode diverge quand bien même le système est de Cramer.

Nous allons démontrer que les conditions (2'-10) suffisent à affirmer qu'il n'y aura pas de pivot nul pendant les calculs.

$$(2'-10) \quad \begin{cases} a_M > 0 \\ c_M > 0 \\ 2 b_M > a_M + c_M \end{cases} \quad \forall M, M = 2 \text{ à } N-1$$

En effet pour qu'il n'y ait pas de pivot nul il faut et il suffit que la condition suivante soit réalisée :

$$(2'-11) \quad 2b_M - a_M \times L_{M-1} \neq 0 \quad \forall M, M = 2 \text{ à } N-1$$

Pour $M = 2$:

(2'-11) se réduit à : $2b_2 \neq 0$, ce qui est vérifiée d'après (2'-10) puisque $2b_2 > 0$. On en déduit, d'après (2'-8) que :

$$0 < L_2 < 1$$

Pour $M = 3$:

$$2b_3 - a_3 \times L_2 > a_3 + c_3 - a_3 \times L_2 = c_3 + a_3 \times (1 - L_2)$$

or : $a_3 > 0$, $c_3 > 0$ et $0 < 1 - L_2 < 1$

donc : $2b_3 - a_3 \times L_2 > 0$, la condition (2'-11) est vérifiée

de plus
$$L_3 = \frac{c_3}{2b_3 - a_3 \times L_2} < \frac{c_3}{c_3 + a_3 \times (1 - L_2)}$$

on en déduit : $0 < L_3 < 1$.

Hypothèse de récurrence
$$\begin{cases} 2b_{M-1} - a_{M-1} \times L_{M-2} > 0 \\ 0 < L_{M-1} < 1 \end{cases}$$

D'après (2'-10)

$$2b_M - a_M \times L_{M-1} > a_M + c_M - a_M \times L_{M-1} = c_M + a_M \times (1 - L_{M-1})$$

comme $a_M > 0$, $c_M > 0$ et $0 < 1 - L_{M-1} < 1$, nous pouvons donc

dire que : $2b_M - a_M \times L_{M-1} > 0$

de plus :
$$L_M = \frac{c_M}{2b_M - a_M \times L_{M-1}} < \frac{c_M}{c_M + a_M \times (1 - L_{M-1})}$$

on en déduit : $0 < L_M < 1$.

On vient donc de démontrer que les conditions (2'-10) suffisent pour que :

$$(2'-12) \quad \begin{cases} 2b_M - a_M \times L_{M-1} > 0 \\ 0 < L_M < 1 \end{cases} \quad M = 2 \text{ à } N-1$$

ce qui implique que (2'-11) est vérifiée.

ANNEXE 3

Une Méthode Directe de Calcul de la Couche Limite
Laminaire Plane pour le Cas d'un Cylindre Circulaire

Développant un article de W. Walter [31], nous appliquons une méthode directe de résolution des équations de couche limite plane. Nous établissons une nouvelle forme des équations de Prandtl à l'aide de la transformation de Von Mises dans le premier paragraphe. Dans le second nous expliquons la méthode numérique employée et nous donnons les résultats obtenus pour le cas d'un cylindre circulaire.

I - TRANSFORMATION DE VON MISES

Nous rappelons que les équations de couche limite laminaire pour un fluide à propriétés physiques constantes en écoulement plan permanent se réduisent, avec les hypothèses de Prandtl, à la première équation de Navier-Stokes :

(0-14) $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = U \cdot \frac{dU}{dx} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

à laquelle il faut adjoindre l'équation de continuité :

(0-15) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

et les conditions :

(0-16) $\begin{cases} y = 0 & u = v = 0 \\ y \rightarrow \infty & u \rightarrow U \\ x = x_0 & u = u_0 \end{cases}$

Nous allons réduire le système différentiel, (0-14) + (0-15), à une seule équation en utilisant le changement de variables de Von Mises, [32].

$$(3'-1) \quad \eta_v = \frac{\Psi}{\sqrt{\nu}}$$

où Ψ est la fonction de courant définie par :

$$(0-20) \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

ce qui permet d'intégrer l'équation de continuité (0-15).

Nous introduisons de plus les nouvelles variables :

$$(3'-2) \quad \begin{cases} w = u^2 \\ W = U^2 \end{cases}$$

En partant de :

$$(3'-3) \quad \begin{cases} u = \sqrt{w}; U = \sqrt{W} \\ \frac{\partial \eta_v}{\partial x} = -\frac{v}{\sqrt{\nu}}; \frac{\partial \eta_v}{\partial y} = \frac{u}{\sqrt{\nu}} \end{cases}$$

on obtient les relations :

$$(3'-4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{w}} \times \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{v}{\sqrt{\nu}} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\nu}} \times \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{w}}{2 \cdot \nu} \times \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_v^2} \\ U \cdot \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{dW}{dx} \end{cases}$$

qui reportées dans (0-14) et (0-16) donnent après simplification, l'équation

$$(3'-5) \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \sqrt{w} \times \frac{\partial^2 w}{\partial \eta_v^2} = \frac{dw}{dx}$$

avec les conditions :

$$(3'-6) \quad \begin{cases} \eta_v = 0 & w = 0 \\ \eta_v \rightarrow \infty & w \rightarrow W \\ x = x_0 & w = w_0 \end{cases}$$

On a ainsi défini un problème au contour du type parabolique.

L'équation (3'-5) est quasiment linéaire, mais n'est pas fortement parabolique. La paroi, $\eta_v = 0$, est une ligne singulière où l'équation (3'-5) dégénère ; en effet tant que $\frac{dw}{dx}$ n'est pas nul, elle ne peut être satisfaite que si le terme $\frac{\partial^2 w}{\partial \eta_v^2}$ est non borné.

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème est étudiée par W. Walter [31] ainsi que celle de l'équation discrétisée à l'aide de la méthode des différences finies.

La nouvelle variable transversale, η_v , sera notée, η , dans la suite afin d'alléger l'écriture des formules.

II - RESOLUTION NUMERIQUE

1 - Discrétisation

L'équation (3'-5) avec les conditions (3'-6) est résolue, pour une abscisse x donnée, par une méthode de différences finies construite sur le schéma implicite suivant :

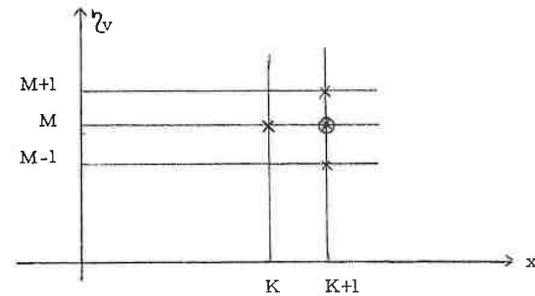


Figure : 3'-1

En désignant par Δx et $\Delta \eta$ les pas sur les deux axes, les coordonnées d'un nœud du maillage sont :

$$(3'-7) \quad \begin{cases} x = K \times \Delta x & K \in \mathbb{N} \\ \eta_v = (M-1) \times \Delta \eta & M = 1 \text{ à } N \end{cases}$$

La solution étant supposée connue à l'abscisse d'indice, K , nous déterminons la solution au pas suivant, $(K+1)$. Les dérivées partielles sont approchées au point repéré par $(M, K+1)$ à l'aide des formules de discrétisation suivantes où l'indice du pas ne figure que lorsque sa valeur diffère de $K+1$:

$$(3'-8) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{w_M^K - w_{M-1}^K}{\Delta x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \approx \frac{w_{M+1}^K - 2 \cdot w_M^K + w_{M-1}^K}{(\Delta \eta)^2} \end{cases}$$

L'équation (3'-5) est linéarisée en utilisant une méthode itérative, où i sera l'indice de l'itération en cours. Nous utilisons la relation :

$$(3'-9) \quad \sqrt{w} \times \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \longrightarrow (\sqrt{w})^{i-1} \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^i$$

qui permet de mettre l'équation (3'-5) sous la forme discrétisée suivante, valable pour M variant de 2 à $N-1$:

$$(3'-10) \quad \frac{w_M^i - w_{M-1}^i}{\Delta x} - \sqrt{w_M^{i-1}} \times \frac{w_{M+1}^i - 2 \cdot w_M^i + w_{M-1}^i}{(\Delta \eta)^2} + W_M^i$$

avec les conditions aux limites :

$$(3'-11) \quad \begin{cases} w_1^i = 0 & \forall i \in \mathbb{N} \\ w_N^i = W_N & \forall K \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A l'itération i du pas $K+1$, la solution sera donc obtenue par la résolution du système linéaire suivant :

$$(3'-12) \quad a_M^{i-1} \times w_{M-1}^i - 2 \cdot b_M^{i-1} \times w_M^i + c_M^{i-1} \cdot w_{M+1}^i = d_M^{i-1} \quad \text{pour } M=2 \text{ à } N-$$

avec :

$$(3'-13) \begin{cases} a_M^{i-1} = c_M^{i-1} = \sqrt{w_M^{i-1}} \\ b_M^{i-1} = \sqrt{w_M^{i-1}} + \frac{(\Delta\eta)^2}{2 \cdot \Delta x} \\ d_M^{i-1} = -(\Delta\eta)^2 \times \left[w_M^i + \frac{w_M^K}{\Delta x} \right] \end{cases}$$

Nous avons utilisé la méthode du "Progonka" et nous constatons que les conditions suffisantes de stabilité démontrées dans l'annexe 2 sont ici toujours vérifiées, en effet :

$$(3'-14) \begin{cases} a_M^{i-1} > 0 \\ c_M^{i-1} > 0 \\ b_M^{i-1} > \frac{a_M^{i-1} + c_M^{i-1}}{2} \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{N} \text{ et } \forall K \in \mathbb{N}$$

Pour chaque pas en x nous initialisons la méthode itérative à l'aide de la solution calculée au pas précédent.

$$(3'-15) \quad \frac{0}{w_M^{K+1}} = w_M^K \quad M = 2 \text{ à } N-1$$

et nous avons pris comme test de sortie des itérations

$$(3'-16) \quad \text{Max}_{M=2 \text{ à } N-1} \left| w_M^i - w_M^{i-1} \right| < \varepsilon'$$

où ε' est un infiniment petit.

Les calculs seront démarrés pour une abscisse où la solution pourra être déterminée à l'aide de valeurs connues. Ils seront arrêtés au point de décollement de la couche limite dont l'approche sera testée en calculant $\left[\frac{\partial w}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}$, qui est proportionnel aux forces de frottement à la paroi par unité de surface, par :

$$(3'-17) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \simeq \frac{1}{60 \times \Delta \eta} \cdot \left[300 (w_2 - w_3) + 200 \cdot w_4 - 75 \cdot w_5 + 12 \cdot w_6 \right]$$

2 - Particularités de cette méthode

Il est évident qu'il faudra une résolution propre à chaque cas concret, puisque dans l'équation (3'-5) le terme $\frac{dw}{dx}$ dépend de la vitesse de l'écoulement à la frontière extérieure, U, qui différencie les problèmes de couche limite. Mais on peut espérer mettre au point un programme général pouvant s'adapter aux divers écoulements ; pour cela il suffit d'introduire un nombre de paramètres suffisant pour obtenir une souplesse assez grande, par exemple : U, U', Δx , $\Delta \eta$, N, ...

La condition au contour supérieur :

$$(3'-6) \quad \eta_v \longrightarrow \infty \quad w \longrightarrow W$$

est approchée, compte tenu de la définition physique de l'épaisseur de couche limite δ , par une condition à distance finie, qui donne pour l'équation discrétisée :

$$(3'-11) \quad w_N^i = W_N \quad \forall i, \forall K \in \mathbb{N}$$

où N est la borne supérieure de l'indice M ; ce qui caractérise donc, pour un pas $\Delta \eta$ donné, le nombre de points de discrétisation utilisés pour déterminer la solution.

Or, d'après la définition de la variable η_v , on s'aperçoit que la valeur $\eta_{v \max}$, pour laquelle on atteint l'épaisseur de couche limite, dépend de l'abscisse x. La valeur de N va donc varier au cours du calcul. Nous l'avons déterminée, à chaque pas, en partant de la relation

$$(3'-18) \quad \frac{u}{U} = 0,99 \quad \text{pour } y = \delta$$

qui devient ici :

$$(3'-19) \quad \frac{w}{W} = 0,98 \quad \text{pour } \eta_v = \eta_{v \max}$$

N est alors déterminé de façon à ce que la condition suivante soit réalisée :

$$(3'-20) \quad \frac{w_N^i}{W_N} \geq 1 - 2 \cdot \varepsilon \quad \text{avec } \varepsilon \leq 10^{-2}$$

Les grandeurs caractéristiques de la couche limite sont calculées, en un point d'abscisse x_0 donné, par les formules :

- épaisseur de déplacement :

$$(3'-21) \quad \delta^* (x_0) = \sqrt{D} x \left[\int_0^{\eta_{v \max}} \frac{d\eta_v}{\sqrt{w}} - \frac{\eta_{v \max}}{\sqrt{W(x_0)}} \right]$$

- épaisseur de quantité de mouvement :

$$(3'-22) \quad \delta^{**} (x_0) = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{W(x_0)}} \eta_{v \max} - \frac{\sqrt{D}}{W(x_0)} x \int_0^{\eta_{v \max}} \sqrt{w} \cdot d\eta_v$$

- coefficient de forces de frottement à la paroi par unité de surface :

$$(3'-23) \quad \gamma_0 (x_0) = \frac{\mu}{2\sqrt{D}} x \left[\frac{\partial w}{\partial \eta_v} \right]_{\eta_v=0}$$

- le profil de vitesse adimensionnelle est obtenu par le rapport : $\sqrt{\frac{w}{W}}$
et la fonction de courant adimensionnelle est calculée par :

$$(3'-24) \quad \psi_a = \frac{1}{\sqrt{W}} \cdot \int_0^{\eta_v} \sqrt{w} \cdot d\eta_v$$

La correspondance entre la variable de Von Mises et celle de Görtler est réalisée grâce à la relation :

$$(3'-25) \quad \eta = \gamma_1 x \int_0^{\eta_v} \frac{d\eta_v}{\sqrt{w}} \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = \frac{U_a}{\sqrt{2 \int_0^{x_a} U_a(s) \cdot ds}}$$

U_a étant la vitesse adimensionnelle caractéristique de l'écoulement.

Remarque : Les intégrales sont calculées sur des supports de points régulièrement répartis par des méthodes composites ou d'intégration par arc. (voir J. Legras [30]). En raison de la condition au contour pour $\eta_v = 0$, $1/\sqrt{w}$ n'est pas défini en ce point ; on calcule donc l'intégrale :

$$(3'-26) \quad I = \int_0^{\eta_v} \frac{d\eta_v}{\sqrt{w}}$$

en linéarisant w au voisinage de la paroi, on obtient alors :

$$(3'-27) \quad I \approx \frac{2 \times \Delta \eta}{\sqrt{w_2}} + \int_{\Delta \eta}^{\eta_v} \frac{d\eta_v}{\sqrt{w}} \quad (w_2 = w(x, \Delta \eta))$$

3 - Résultats pour un cylindre circulaire

Les calculs ont été initialisés pour l'abscisse $x = 0$ à l'aide des valeurs données par R.M. Terrill [8].

Les grandeurs caractéristiques adimensionnelles de la couche limite sont calculées par les relations :

$$(3'-28) \quad \begin{cases} \delta_a^* (x_0) = \int_0^{\eta_{v \max}} \frac{d\eta_v}{\sqrt{w}} - \frac{\eta_{v \max}}{\sqrt{W(x_0)}} \\ \delta_a^{**} (x_0) = \frac{\eta_{v \max}}{\sqrt{W(x_0)}} - \frac{1}{W(x_0)} x \int_0^{\eta_{v \max}} \sqrt{w} \cdot d\eta_v \\ \gamma_a (x_0) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial w}{\partial \eta_v} \right]_{\eta_v=0} \end{cases}$$

En prenant un pas $\Delta \eta$ constant égal à + 0,005 et un pas Δx variable :

$0 \leq x < 1,50$	$\Delta x = + 0,005$
$1,50 \leq x < 1,70$	$\Delta x = + 0,002$
$1,70 \leq x < 1,82$	$\Delta x = + 0,001$
$x \geq 1,82$	$\Delta x = + 0,0005$

nous obtenons avec $\xi = 10^{-4}$ les résultats présentés dans le tableau (3'-2).

La précision est telle que les courbes correspondantes seraient confondues avec celles obtenues par Terrill. Le point de décollement est situé plus loin que celui trouvé par Terrill : 1,838 au lieu de 1,823. En prenant un pas $\Delta \eta$ moitié mais avec $\xi = 10^{-2}$ nous obtenons 1,833, mais la précision est moins bonne car on n'a pris en considération, pour des raisons de taille mémoire sur ordinateur, que les valeurs correspondant à l'épaisseur de couche limite δ , sans aller au delà comme pour les premiers résultats, ce qui nuit à la détermination des grandeurs caractéristiques autres que γ_a .

x_a	S_a^*		S_a^{**}		H		γ_a	
	Terrill	Walter	Terrill	Walter	Terrill	Walter	Terrill	Walter
0,3	0,659 ₅	0,661	0,297	0,294	2,220	2,248	0,357	0,339
0,5	0,681	0,683	0,306	0,305	2,226	2,242	0,557 ₅	0,535 ₅
0,8	0,741	0,743	0,330	0,330	2,243	2,250	0,755	0,732
1	0,806	0,808 ₅	0,356	0,356	2,263	2,268	0,798	0,777
1,3	0,970	0,975	0,417	0,419	2,327	2,327	0,712	0,699
1,5	1,168 ₅	1,174	0,483	0,486	2,421	2,417	0,552	0,547
1,65	1,428	1,433	0,555	0,559	2,572	2,565	0,374	0,378
1,73	1,660	1,663	0,607	0,611	2,736	2,723	0,251	0,262
1,78	1,892	1,887	0,645 ₅	0,650	2,930	2,904	0,154	0,174
1,80	2,033	2,016	0,663	0,667	3,067	3,022	0,105	0,131
1,821	2,285	2,212	0,681	0,687	3,350	3,221	0,032	0,076
1,823	2,410	2,337	0,684	0,689	3,521	3,248	0,002	0,070

Figure 31-2

REFERENCES

- [1] H. SCHLICHTING
 "Grenzschichttheorie"
 Verlag Braun - Karlsruhe - 1965
- [2] H. GORTLER
 "A new serie for the calculation of steady laminar boundary layer flows"
 J. of Math. and Mech., Vol 6, n° 1, January 1957,
 (pp. 1 - 66).
- [3] V. SALJNIKOV
 "Méthodes modernes de résolution des équations de la couche limite laminaire"
 Faculté des Sciences, Laboratoire de Dynamique des Fluides - Poitiers - 1969.
- [4] L.G. LOITSIANSKI
 "Laminare Grenzschichten"
 Akademie Verlag - Berlin - 1967.
- [5] V.Y. SCHKADOV
 "La couche limite avec gradient de pression dans un écoulement compressible"
 Izvest. Akademii Nauk SSSR, Odelenije tech. nauk. Mech. i Masinostr., 1963 n° 2.
- [6] L.G. LOITSIANSKI
 "Les équations universelles et les approximations paramétriques dans la théorie de la couche limite laminaire"
 Prikladnaja matem. i mek. tom. 29, n° 1 - 1965 (p. 70-87).
- [7] V. SALJNIKOV - S. OKA
 "Sur une forme possible des équations universelles de la couche limite laminaire"
 Izvestija AH.SSSR, Mekanika Zidkosri i gaza n° 1 - 1969
- [8] R.M. TERRILL
 "Laminar boundary layer flow near separation with and without suction"
 Phil. Trans. Roy. Soc., London, A, 253, n° 1022 - 1960.
- [9] D. HUET - M. LUCIUS
 "Equations aux dérivées partielles de la physique"
 Université de Nancy I, UER de Sciences Mathématiques
 Cours de D.E.A. 1971-72.

- [10] J.L. LIONS - E. MAGENES
"Problèmes aux limites non homogènes et applications"
Vol. n° 1 - Dunod - Paris - 1968.
- [11] V.A. DITKIN - A.P. PRUDNIKOV
"Integral transforms and Operational calculus"
Pergamon Press - 1965.
- [12] V. SALJNIKOV - V. DJORDJEVIC
"Universalisierung der Gleichung vom Temperatur grenz-
schichtproblem"
ZAMM, Band 48, Heft 8 und Sonderheft - 1968 (237-241)
- [13] Z. BORICIC
"Universalisation de l'équation de couche limite de Görtler
pour le problème de l'écoulement d'un fluide compressible"
Thèse de 3ième Cycle - Belgrade - 1968.
- [14] B. OBROVIC
"Universalisation de l'équation de couche limite de Görtler
pour le problème d'un gaz dissocié en équilibre"
Thèse de 3ième Cycle - Belgrade - 1969.
- [15] J. NERAULT
Thèse de 3ème Cycle - Poitiers - Laboratoire de
Dynamique des fluides. (à paraître).
- [16] O.A. OLEINIK
"Mathematical problems of boundary layer theory"
Lecture Notes, Spring Quarter - University of Minne-
sota - Minneapolis - 1969.
- [17] M. CHIPOT
Thèse de 3ième cycle - Université de Nancy I, U.E.R.
de Sciences Mathématiques - (à paraître).
- [18] V.Y. SCHKADOV
"Sur l'intégration des équations de la couche limite"
Doklady Akademii nauk SSSR, Tom. 126, n° 4 - 1959.
- [19] L.G. LOITSIANSKI
"Les paramètres de similitude dans la théorie de la couche
limite".
Consacré au 60ème anniversaire de l'Académicien
Sedov - Moscou 1970.
- [20] T. VON KARMAN
"Über laminare und turbulente Reibung"
ZAMM, 1, 233-1921.

- [21] K. POHLHAUSEN
"Zur näherungsweise Integration des Differentialgleichung
der laminaren Reibungsschicht"
ZAMM, 1, 252 - 1921.
- [22] L. HOWARTH
"On the solution of the laminar boundary layer equations"
Proc. Roy. Soc. London, A164, n° 919 - 1938
(pp. 547-579).
- [23] N.E. KOTCHIN - L.G. LOITSIANSKI
"Sur une méthode approchée de calcul de la couche limite
laminaire"
Doklady Akad. Nauk SSSR, 36, n° 9 - 1942.
- [24] J. TANI
Aero. Res. Inst. Tokyo Univ. 199 - 1941.
- [25] L.M. SIMUNI - N.M. TERENTIEW
"Numerische Lösung der Gleichungen der ein para metrigen
grenzschichttheorie"
Trudy Leningrad Polytech. Inst. n° 248 - 1965
(pp. 56 - 58).
- [26] L.M. SIMUNI - E.F. OZEROVA
"Résolution numérique de l'approximation biparamétrique de
l'équation universelle de Loitsianski".
Aerothermodynamika n° 313 - 1970 - (pp. 44-53).
- [27] V. SALJNIKOV
"Généralisation de l'équation universelle de la théorie de cou-
che limite de L.G. Loitsianski"
Institut Mathématique de Belgrade - 1972.
- [28] I. NAYFELD
"Le calcul de la couche limite laminaire plane dans le cas
d'un écoulement incompressible autour d'un cylindre ellipti-
que".
Diplôme soutenu à la Faculté des constructions mé-
caniques de Belgrade - 1969.
- [29] D.R. HARTREE
"On an equation occuring in Falkner and Skan's approximate
treatment of the equations of the boundary layer".
Proc. Cambr. Phil. Soc. 33, part II - 1937. (p. 223-239).

- (41)

- [30] J. LEGRAS
"Méthodes et techniques de l'analyse numérique"
Dunod - Paris - 1971
- [31] W. WALTER
"Existence and convergence theorems for the boundary
layer equations based on the line method"
Arch. Rational. Mech. Anal., vol. 39 - 1970.
- [32] R. VON MISES
"Bemerkungen zur Hydrodynamik"
Zeitschw. Angew. Math. Mech., n° 7, 1927 -
(pp. 425-431).
- [33] R.D. RICHTMEYER - K.W. MORTON
"Difference methods for initial value problems"
Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., n° 4,
Interscience, New-York - 1967.
-



NOM DE L'ETUDIANT : MIRGAUX Alain

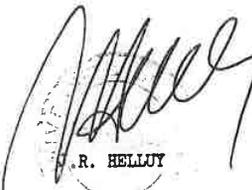
NATURE DE LA THESE : Doctorat de Spécialité en Mathématiques Appliquées

VU, APPROUVE

& PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 15.10.73

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I


R. HELLUY