

T H E S E

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR INGENIEUR

(Spécialité informatique)

par

DIDIER MERLE

Sujet

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

CONTRIBUTION A L'ETUDE D'UN ANALYSEUR

DE MODELES A RESEAUX DE FILES D'ATTENTE

- ALGORITHMES DE CALCUL ET APPLICATIONS -

Soutenue le 16 Octobre 1978 devant la Commission d'examen composée de :

MM.

Claude PAIR

Président

Jean-Claude DERNIAME

Examineurs

Jacques LENFANT

Dominique POTIER

Philippe de RIVET

Michel VERAN



D 136 035513 1

(11) 1978 MERLE D.

T H E S E

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR INGENIEUR

(Spécialité informatique)

par

DIDIER MERLE

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

Sujet

CONTRIBUTION A L'ETUDE D'UN ANALYSEUR

DE MODELES A RESEAUX DE FILES D'ATTENTE

- ALGORITHMES DE CALCUL ET APPLICATIONS -

Soutenue le 16 Octobre 1978 devant la Commission d'examen composée de :

MM.

Claude PAIR

Président

Jean-Claude DERNIAME

Examineurs

Jacques LENFANT

Dominique POTIER

Philippe de RIVET

Michel VERAN

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

Je tiens à remercier,

*Monsieur le Professeur Claude Pair, Président de l'INPL,
de me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse,*

*Monsieur Dominique Potier pour l'encadrement de qualité
qu'il m'a prodigué en dirigeant ce travail,*

*Messieurs les Professeurs Jean-Claude Derniame et
Jacques Lenfant qui ont bien voulu accepter de participer au jury,*

*Monsieur Philippe de Rivet pour toute l'aide et les
conseils dont j'ai bénéficié,*

*et Monsieur Michel Véran avec qui ce fut un plaisir de
collaborer.*

*Je remercie tous mes camarades de l'IRIA, Anne Schroeder,
Marc Badel, Jacques Leroudier et Michel Scholl dont la compétence et l'amitié
m'ont permis de travailler dans un environnement idéal.*

*Je tiens d'autre part à remercier les membres du Service
"Evaluation des Performances", dirigé par Monsieur de Rivet, de CII-HB, et
particulièrement Monsieur Jean-Paul Corré.*

*Je remercie enfin Madame Dominique Poulicet et toutes les
personnes qui ont participé à la réalisation matérielle excellente de ce
mémoire.*

PLAN

INTRODUCTION

CHAPITRE I - PRESENTATION DE QNAP

I - Introduction

II - Les méthodes de résolution

II.1 - *Simulation*

II.2 - *Méthodes mathématiques exactes*

II.2.1 - *Méthode d'analyse numérique d'une chaîne de Markov*

II.2.2 - *Méthode analytique BCMP*

II.3 - *Méthodes mathématiques approchées*

II.3.1 - *Méthode itérative*

II.3.2 - *Méthode de diffusion*

III - Langage de description

III.1 - *Description des stations*

III.1.1 - *Stations actives*

III.1.2 - *Stations passives*

III.2 - *Conditions d'exécution*

III.3 - *Contrôle de résolution*

III.4 - *Grandeurs calculées*

IV - Exemples

IV.1 - *Modèle de système interactif*

IV.2 - *Modèle de noeud de commutation de paquets*

IV.3 - *Modèle de gestion de disque*

IV.4 - *Modèle de système multiprogrammé à temps partagé*

V - Conclusion

ANNEXES

CHAPITRE II - ALGORITHMES DE RESOLUTION DES RESEAUX DE TYPE BCMP

I - Introduction

II - Théorème de Baskett-Chandy-Muntz-Palacios

II.1 - Hypothèses

II.1.1 - Routage

II.1.2 - Processus d'arrivée au réseau

II.1.3 - Stations

II.2 - Théorème

II.2.1 - Taux d'arrivée

II.2.2 - Etats du système

II.2.3 - Probabilités à l'équilibre

II.3 - Conclusion

III - Algorithmes de calcul

III.1 - Réseaux fermés

III.1.1 - Calcul de la constante de normalisation

III.1.1.1 - Calcul des matrices H_j et K_j

III.1.1.2 - Calcul du produit $G \cdot K_j$

III.1.1.3 - Calcul de K_j dans le cas de dépendance globale

III.1.1.4 - Calcul du produit de convolution dans le cas d'une station à taux fixe

III.1.1.5 - Stations à serveur infini

III.1.1.6 - Algorithme général de calcul de la constante de normalisation

III.1.2 - Grandeurs élémentaires

III.1.2.1 - Cas général

III.1.2.2 - Cas des stations à dépendance globale

III.1.2.3 - Cas des stations à taux constant

III.1.2.4 - Nombre moyen de clients dans le cas d'une station à serveur infini

III.1.3 - *Grandeurs diverses*

III.1.4 - *Problèmes d'implémentation*

III.1.4.1 - *Espace mémoire*

III.1.4.2 - *Contrôle des débordements*

III.2 - *Réseaux ouverts*

III.2.1 - *Calcul de la constante de normalisation*

III.2.2 - *Grandeurs élémentaires*

III.2.2.1 - *Débits*

III.2.2.2 - *Taux d'utilisation*

III.2.2.3 - *Nombre de clients*

III.3 - *Réseaux mixtes*

III.3.1 - *Calcul de la constante de normalisation*

III.3.1.1 - *Stations à taux fixe*

III.3.1.2 - *Stations à serveur infini*

III.3.1.3 - *Stations à dépendance globale limitée*

III.3.2 - *Grandeurs élémentaires*

III.3.2.1 - *Sous-chaînes fermées*

III.3.2.1.1 - *Débits*

III.3.2.1.2 - *Nombre moyen de clients*

III.3.2.1.3 - *Taux d'utilisation*

III.3.2.2 - *Sous-chaînes ouvertes*

III.3.2.2.1 - *Débits*

III.3.2.2.2 - *Nombre moyen de clients*

III.3.3.3.3 - *Taux d'utilisation*

III.4 - *Généralisations*

III.4.1 - *Réseaux ouverts à taux d'arrivée externes constants,
et à taux de service dépendant des classes*

III.4.2 - *Réseaux ouverts à processus d'arrivée globale*

III.4.2.1 - *Constante de normalisations*

III.4.2.2 - *Probabilités marginales*

- III.4.3 - Réseaux ouverts à processus d'arrivée par sous-chaînes
- III.4.4 - Réseaux fermés avec blocage
- III.4.5 - Réseaux mixtes avec contraintes de population

IV - Conclusion - Exemples

- IV.1 - Exemple de réseau fermé
- IV.2 - Exemple de réseau ouvert
- IV.3 - Exemple de réseau mixte

ANNEXES

CHAPITRE III - APPLICATIONS

I - Introduction

II - Etude de robustesse de certaines hypothèses du théorème BCMP

II.1 - Stations PAPS avec classes de clients

II.1.1 - Le modèle considéré

II.1.2 - Résultats

II.2 - Stations PAPS à temps de service corrélés

II.2.1 - Le modèle considéré

II.2.2 - Résultats

III - Etude d'un modèle de système informatique

III.1 - Introduction

III.2 - Le système étudié

III.2.1 - Architecture globale

III.2.2 - Mesures disponibles

III.2.3 - Problèmes posés pour la modélisation

III.3 - Les modèles étudiés

III.3.1 - Utilisation des données brutes

III.3.2 - Données corrigées

III.3.3 - Influence de la durée d'exécution des programmes en quadriprogrammation

III.4 - Conclusion

ANNEXES

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

Les méthodes quantitatives d'évaluation des performances des systèmes informatiques sont usuellement divisées en deux classes :

- les mesures sur le système réel :
 - matérielles,
 - logicielles,
- les modèles de systèmes, probabilistes ou déterministes, dont la résolution peut être obtenue par :
 - simulation,
 - des méthodes analytiques,
 - des méthodes statistiques.

Si des mesures sur un système réel en donnent une image très fine et permettent de diagnostiquer des erreurs ou des blocages, elles ne peuvent en général, ni expliquer ni a fortiori prédire son fonctionnement. Par contre, le but même d'une expérience de modélisation est de donner une image relativement simple et interprétable du système étudié et d'en déduire des résultats sur son comportement pour différentes charges ou dans de nouvelles configurations.

Cependant, ces distinctions ne doivent pas faire oublier les liens étroits qui existent entre ces deux approches. Nous pouvons noter en particulier les suivants :

- Les mesures sont nécessaires pour fournir des données à un modèle quel qu'il soit,
- Un modèle peut aider à préciser les mesures à effectuer sur le système réel en déterminant les paramètres clés de son fonctionnement.

Pour notre part, nous ne nous intéressons dans ce mémoire qu'à l'aspect modélisation des systèmes informatiques, et plus spécialement aux modèles mis sous forme de réseaux de files d'attente. Ce type de modèle correspond à une vue

le plus souvent assez naturelle d'un système informatique où les ressources (unité centrale, canaux, périphériques) sont représentés par des stations (dans notre terminologie une station est constituée de files d'attente associées à des serveurs) et où les différents utilisateurs de ces ressources (programmes, tâches, requêtes) définissent des populations de clients transitant à travers un réseau dont les noeuds sont ces stations. Il est clair que ce mode de représentation introduit une simplification du système réel qu'il reste à apprécier ponctuellement, et que nous ne traiterons pas ici.

Les qualités essentielles des modèles à réseaux de files d'attente, qui peuvent expliquer leur popularité actuelle, sont les suivantes :

- fournir une bonne représentation des phénomènes globaux régissant les systèmes informatiques,
- ceci à l'aide d'un modèle relativement intuitif et simple à définir,
- pour laquelle les données sont le plus souvent accessibles par des mesures assez peu sophistiquées (probabilités de transition, taux de service, etc...).

Par ailleurs, les progrès réalisés ces dernières années en théorie des files d'attente permettent de disposer d'un large éventail de techniques de résolution, approchées ou exactes, qui offrent des domaines d'application complémentaires. Il paraît donc intéressant de regrouper au sein d'un même outil l'ensemble de ces techniques afin d'en faciliter la mise en oeuvre. C'est cet objectif qui a conduit à la réalisation du produit logiciel QNAP (Queueing Network Analysis Package) dont nous présentons, dans ce mémoire, quelques aspects et des exemples d'utilisation.

QNAP fait l'objet d'un travail en coopération, aussi nous ne parlerons ici que des points pour lesquels l'auteur a apporté sa contribution. Ainsi le Chapitre I sera consacré à la présentation de l'aspect externe du produit :

- les différentes méthodes de résolution proposées,
- le langage de spécification de réseaux de files d'attente.

Le Chapitre II décrit en détail les algorithmes de calcul d'un module de résolution particulier basé sur les théorèmes établis par Baskett-Chandy-Muntz et Palacios (BCMP). Cette méthode sera référencée dans la suite comme la méthode analytique BCMP. Enfin le Chapitre III est consacré à deux études illustrant l'utilisation de QNAP et des modules de résolution qu'il incorpore. Il s'agit tout d'abord d'examiner la robustesse de certaines hypothèses du théorème BCMP, puis de modéliser un système informatique réel.

CHAPITRE I

PRESENTATION DE QNAP

I - INTRODUCTION

QNAP peut être défini comme un outil de construction et de résolution de modèles à files d'attente. A cet effet, il est composé d'un ensemble de programmes FORTRAN pour lequel les données sont introduites par l'intermédiaire d'un fichier.

Ces données sont constituées à partir d'un langage de spécification qui permet de décrire :

i) la configuration du réseau :

selon notre terminologie, par ailleurs très classique, un réseau est composé d'un ensemble de stations (serveurs et file d'attente) à travers lesquelles transitent des clients selon un certain routage. Ces clients peuvent être réparties en plusieurs classes définissant des comportements différents.

ii) le traitement effectué au niveau de chaque station :

ce traitement peut être une simple consommation de temps (dans le cas d'analyse mathématique BCMP) ou mettre en jeu des mécanismes complexes décrits par un algorithme (synchronisation sur sémaphore, lancement d'activités parallèles, etc...).

iii) le programme contrôlant la résolution du réseau :

ce programme permet d'initialiser ou de modifier les paramètres du modèle d'activer les modules de résolution, d'enchaîner et de combiner des résolutions.

Ce langage de spécification sera brièvement présenté au paragraphe III de ce chapitre.

QNAP comprend d'autre part des modules de résolution que l'on peut diviser en trois classes :

- i) simulation à événements discrets,
- ii) méthodes mathématiques exactes :
 - méthode numérique d'analyse d'un modèle markovien,
 - méthode analytique BCMP,
- iii) méthodes mathématiques approchées :
 - méthode itérative,
 - méthode de diffusion.

Toutes ces méthodes permettent le calcul des grandeurs (taux d'utilisation, longueur moyenne de file d'attente, etc...) qui caractérisent à l'état stationnaire les stations qui composent le réseau. Ces méthodes seront décrites succinctement au paragraphe II de ce chapitre. La méthode analytique BCMP sera présentée plus longuement au chapitre II.

Les buts poursuivis par les concepteurs de QNAP sont essentiellement les suivants :

- i) réduire le travail de programmation :

pour un modèle représenté sous la forme d'un réseau de files d'attente, le travail de programmation est réduit à l'écriture dans un langage simple de la structure et des caractéristiques du modèle.

- ii) rendre transparent les méthodes de résolution :

chacun des modules de résolution peut être activé sans que l'utilisateur ait à se préoccuper dans le détail des fondements théoriques et des algorithmes de calcul de la méthode choisie. Cependant il doit être conscient des hypothèses de validité de cette méthode. Un effort de documentation du produit est entrepris à cet effet (notices d'utilisation, messages d'erreur clairs, etc...).

iii) QNAP met en oeuvre des méthodes de résolution mathématiques qui sont en général moins familières que des méthodes de simulation, mais le plus souvent considérablement moins coûteuses du point de vue du temps de calcul et plus sûres quant aux résultats obtenus. A terme, il est projeté d'aiguiller automatiquement l'utilisateur vers la méthode de résolution la plus appropriée au modèle étudié, s'il le désire.

iv) fournir un outil suffisamment souple pour permettre des études comparatives entre diverses méthodes. Son utilisation doit permettre de préciser les limites de chaque technique, sa précision et sa rapidité, et d'améliorer les algorithmes correspondants. D'autre part QNAP permet la résolution en une seule étape de modèles complexes faisant intervenir des réseaux imbriqués (modélisation hiérarchique, méthode de décomposition).

II - LES METHODES DE RESOLUTION

II.1 - Simulation

Il s'agit d'un programme de simulation de type "événements discrets" [LeP76], conçu et réalisé par M. Véran. Le noyau de synchronisation, écrit en FORTRAN, suit la même philosophie, que celui de FORTSIM [BaV76]. Ce module permet de simuler des modèles, sous forme de réseaux de files d'attente, spécifiés à l'aide du langage de description utilisé dans toute son extension.

Nous trouvons par exemple :

- . des opérations de synchronisation entre stations (synchronisation sur sémaphore, sur drapeaux),
- . la création d'activité parallèles (création de clients fils),
- . la manipulation d'attributs liés aux stations ou aux clients,
- . la création d'objets structurés.

Notons d'autre part que les générateurs de nombre aléatoires disponibles permettent de tirer les lois classiques (exponentielles, Erlang, hyperexponentielles, etc...) et en outre de générer des nombres aléatoires corréllés [Bad77].

L'un des problèmes importants à régler pour conduire correctement une simulation est le contrôle de la précision des résultats obtenus. Dans la version actuelle de QNAP un intervalle de confiance est calculé pour les taux d'utilisation des serveurs par la méthode des blocs [Con63] et édité conjointement avec la grandeur elle-même. L'extension du contrôle de précision est envisagé pour toutes les grandeurs calculées. Les calculs pourront être effectués par la méthode des blocs ou celle des points de régénération [GrI74].

II.2 - Méthodes mathématiques exactes

II.2.1 - Méthode d'analyse numérique d'une chaîne de Markov

Cette méthode s'applique lorsque le modèle peut être défini par une chaîne de Markov du premier ordre à nombre fini d'états. Le principe de la méthode consiste à construire la matrice de transition de la chaîne de Markov associée au modèle puis à calculer le vecteur propre associé à la valeur propre dominante.

La matrice de transition est construite en déterminant, pour chaque état pris individuellement, vers quels états une transition est possible en un seul intervalle de temps. Le nombre d'états peut être grand, mais la matrice de transition est habituellement creuse. Dans QNAP seuls les éléments non nuls sont conservés, ainsi que leur position dans la matrice.

Le vecteur des probabilités à l'équilibre est calculé à l'aide d'algorithmes itératifs efficaces, adaptés à ce type de problème [Ste78]. Ce vecteur est utilisé pour calculer les probabilités d'état marginales de chaque station et les grandeurs qui en dérivent.

Ces algorithmes sont issus du programme d'analyse de chaînes de Markov MARCA de W.J. Stewart [Ste76] pour lequel un sous-programme d'interface a été écrit.

Le champ d'application de cette méthode est très vaste. Nous pouvons ainsi introduire dans un réseau les éléments suivants :

- des distributions de temps de service de type Erlang, hyperexponentiel,
- des taux de service, ou des probabilités de transition dépendant de l'état du système,
- des transitions instantanées qui permettent d'introduire des mécanismes de synchronisation entre stations.

Les limites inhérentes à ce type de résolution proviennent en pratique de la multiplication des états de la chaîne de Markov dès que le modèle atteint une certaine complexité. L'espace mémoire disponible limite alors la taille des modèles que l'on peut traiter. De même le temps de calcul peut devenir prohibitif. Il reste que cette méthode peut dans de nombreux cas remplacer avantageusement une simulation lorsque les autres méthodes mathématiques ne sont pas applicables. C'est d'autre part un outil de recherche très appréciable.

II.2.2 - Méthode analytique BCMP

Pour la méthode précédente, la difficulté des calculs provient donc d'une part, du dénombrement des états de la chaîne de Markov associée au modèle, d'autre part, du calcul numérique des probabilités d'état stationnaires.

Un certain nombre de résultats théoriques sur des réseaux particuliers permettent d'obtenir de façon explicite ces probabilités stationnaires. Ces résultats ont été en particulier présentés par Baskett-Chandy-Muntz et Palacios [BaC75]. Nous les exposerons en détail au chapitre II, et ne donnerons ici que leurs principales conditions d'application.

Nous considérons des réseaux ouverts, fermés ou mixtes de files d'attente pour lesquels le routage est défini par une matrice de transition fixe $P = ((p_{ir} ; j_s))$ qui définit une chaîne de Markov du premier ordre ($p_{ir} ; j_s$ est la probabilité constante pour qu'un client de classe r ayant achevé d'être servi à la station i rejoigne la station j en passant en classe s). Les stations composant le réseau sont de quatre types pour lesquels le service est réduit à une consommation de temps :

- type 1 : station FIFO monoserveur - la distribution du temps de service est exponentielle identique pour chaque classe de clients.

- type 2 : station "processeur partagé" (limite du round-robin lorsque le quantum tend vers zéro), monoserveur. La distribution des temps de service est de type Cox [Cox55], éventuellement différente pour chaque classe.

- type 3 : station LIFO avec préemption et reprise, monoserveur. La distribution des temps de service suit le même modèle qu'une station de type 2.

- type 4 : station à serveur infini (délai pur). Il existe autant de serveurs que de clients susceptibles de requérir du service (pas d'attente). La distribution des temps de service est de type Cox, identique pour chaque serveur, éventuellement différente pour chaque classe.

Pour des réseaux ouverts ou mixtes, le ou les processus d'arrivée au réseau sont poissonniens.

Ces hypothèses vérifiées, et si $E = (N_1, N_2, \dots, N_I)$ est un état du réseau (I est le nombre de stations, N_i un état d'une station i) le théorème établit que :

$$P(E) = \frac{1}{C} d(E) \prod_{i=1}^I f_i(N_i)$$

dans les expressions $f_i(N_i)$ n'apparaissent que les probabilités p_{ir} ; j_s et les taux de service de la station i (ce qui rend inutile la détermination éventuelle des moments d'ordre supérieur à 1 des distributions). D'autre part, la forme produit de l'expression de $P(E)$ que nous expliciterons au Chapitre II permet des calculs efficaces et rapides dont nous exposerons les algorithmes dans ce même chapitre II.

II.3 - Méthodes mathématiques approchées

II.3.1 - Méthode itérative

Une importante limitation de la méthode mathématique BCMP est de ne pas accepter le cas de réseaux qui comportent des station FIFO à lois de service générales. Cette restriction est levée par des méthodes itératives [ChH75] dont celle réalisée par R. Marie [Mar78].

Les hypothèses de validité sont analogues à celles présentées pour la méthode analytique BCMP (avec cependant une seule classe de clients) mais incorporant des stations FIFO multiserveurs dont la distribution des temps de service est de type de Cox (ce type de station est usuellement noté M/K/n si le processus d'arrivée est markovien).

Le principe de la méthode pour un réseau constitué de stations du type M/K/1 est le suivant [Mar77] :

L'hypothèse de base consiste à supposer le réseau (noté R) équivalent (au sens de l'identité de la distribution des probabilités d'état stationnaires) à un réseau de type BCMP ayant la même structure et pour lequel le taux de service de chaque station i (soit u_i) dépend du nombre de clients dans la station soit :

$$u_i(n_i) = u_i^0 b_i(n_i) \text{ où } u_i^0 \text{ est le taux de service nominal,}$$

$$b_i \text{ une fonction positive.}$$

Ce taux de service est calculé par itération successive de la manière suivante :

à l'étape (k) des itérations le taux de service pour une station i est déterminé par :

$$u_i^{(k)}(n_i) = a_i^{(k-1)}(n_i-1) \frac{p_i^{(k-1)}(n_i-1)}{p_i^{(k-1)}(n_i)}$$

où : $a_i^{(k-1)}(n_i-1)$ est le débit à la station i d'un réseau $R_i^{(k-1)}$ de même structure que $R^{(k-1)}$ et où la station i est remplacée par une station de taux de service infini, avec $n_i - 1$ clients dans ce réseau.

$p_i^{(k-1)}(n_i)$ la probabilité stationnaire d'une station M/K/i de taux de service u_i^0 soumise à un flux d'arrivée de taux dépendant de l'état $a_i^{(k-1)}(n_i)$.

L'arrêt des itérations est réalisé en calculant la somme des nombres moyens de clients dans chaque station et en vérifiant les équations de Chang-Lavenberg [ChL72].

La méthode a donné de très bons résultats avec en général un nombre assez faible d'itérations.

II.3.2 - Méthode de diffusion

Cette technique est basée sur l'utilisation de résultats concernant les chaînes de Markov à temps continu et espace d'état continu pour étudier des chaînes de Markov à temps continu et espace d'état discret. Son application aux réseaux de files d'attente permet de traiter des modèles admettant les hypothèses retenues au paragraphe précédent étendues aux réseaux multi-classes [GeP77].

Schématiquement, le calcul se déroule en trois phases :

i) calcul pour chaque station du réseau des deux premiers moments de la distribution du nombre total d'arrivées à la station, en supposant par hypothèse que le processus décrivant le temps des intersorties est un processus de renouvellement.

ii) pour chaque station, appliquer à la distribution du nombre de clients une équation de diffusion dont les paramètres sont calculés en i) (les méthodes présentées en [Gel75] et [Kob74] se distinguent essentiellement par les conditions aux limites imposées à l'équation de diffusion).

iii) discrétisation de la distribution obtenue en ii) pour obtenir les probabilités marginales à l'état stationnaire de chaque station et en déduire les statistiques habituelles.

III - LE LANGAGE DE SPECIFICATION

Nous présentons dans ce paragraphe les traits principaux du langage de spécifications de QNAP réalisé par M. VERAN. Pour une définition plus complète de sa syntaxe et de ses possibilités, nous renvoyons le lecteur au Manuel d'utilisation [Ver77]. Le langage est composé de commandes qui correspondent aux deux fonctions déjà citées :

- i) description statique d'un réseau de files d'attente,
- ii) contrôle de résolution.

Le vocabulaire utilisé est le vocabulaire classique de la théorie des files d'attente. L'écriture d'un programme à l'aide du langage de spécification de QNAP est facilitée par l'utilisation d'un format libre et l'existence généralisée d'options par défaut. La liste complète des commandes est donnée en Annexe I.1. Nous détaillons ci-dessous les plus significatives d'entre elles. Leur utilisation est illustrée par plusieurs exemples au paragraphe IV.

III.1 - Description des stations

La commande /STATION/ permet de décrire chaque station du réseau, en indiquant à l'aide de paramètres (mots-clé) ses caractéristiques et les liaisons entre stations. Une station se compose d'une file d'attente associée à un ou plusieurs serveurs (station active) ou associée à un sémaphore ou une ressource (station passive).

III.1.1 - Stations actives

Les paramètres associés à une station active sont :

- NAME : identificateur de la file associée,
- SCHEDULING : politique de gestion de la file :
 - discipline de rangement des clients dans la file,
 - discipline de service,
- TYPE : type de la station :
 - MULTIPLE (n) : n nombre de serveurs associés,
 - DELAY : retard pur,
 - GEN : générateur de clients,
- INIT : nombre initial de clients dans la file,
- TRANSITION : ce paramètre précise la ou les destinations possibles d'un client au sortir de la station en fonction de la classe à laquelle il appartient. Il indique les probabilités de transitions associées ainsi que les changements de classe éventuels.

- SERVICE : description des opérations de service provoquées par la prise en charge d'un client par un serveur. Il peut s'agir non seulement de consommations de temps mais en outre d'opérations plus complexes telles que :

- . opérations de synchronisation,
- . lancement d'activités parallèles, etc...

Ces opérations de service sont définies au moyen d'un algorithme écrit dans un langage de type ALGOL.

- LOAD : ce paramètre qui n'est utilisable qu'en résolution mathématique, permet d'introduire des coefficients multiplicatifs du taux de service, liés au nombre de clients dans la file.
- MAX : nombre maximum de clients dans la station (files à capacité limitée).

Remarque :

Dans le cas des paramètres INIT, TRANSITION, LOAD, MAX, la valeur prise par le paramètre n'est pas nécessairement définie par une constante (numérique ou alphanumérique), mais peut l'être par l'intermédiaire de variables dont la valeur courante est évaluée lors de la phase d'exécution du programme de contrôle de résolution (voir la commande /EXEC/ du paragraphe III.3).

Exemple 1 :

```
/DECLAR/QUEUE A,B;  
/STATION/NAME=A;TYPE=GEN;  
    TRANSIT=B;SERVICE=CST(20);  
/STATION/NAME=B;  
    TRANSIT=OUT,0.8,B;  
    SERVICE=EXP(10);LOAD=1,2,3;
```

Toutes les 20 unités de temps un client est émis de l'extérieur vers la station B où il est traité pendant une durée distribuée suivant une loi exponentielle de moyenne 10, 5, 3.333, 3.333, etc... s'il y a 1, 2, 3, 4, etc... clients dans la station. A la fin du service le client sort du réseau avec une probabilité 0.8, ou est réinjecté dans la station B avec la probabilité 0.2.

Exemple 2 :

```
/DECLAR/QUEUE A,B,C;CLASS C1,C2;REAL T,N,PB,PC;  
/STATION/NAME=A;  
    SERVICE(C1)=CST(T);SERVICE(C2)=EXP(10);  
    INIT(C1)=N;INIT(C2)=10;  
    TRANSIT(C1)=B(C2);  
    TRANSIT(C2)=B,BP,C,PC;
```

Après qu'un client ait été servi à la station A, il est dirigé vers la station B avec la classe C2 s'il appartient à la classe C1, où dirigé vers B ou C sans changer de classe avec les probabilités PB et PC s'il appartient à la classe C2. Toutes les variables introduites sont initialisées au niveau de la commande /EXEC/.

III.1.2 - Stations passives

Les stations passives (ressources ou sémaphores) permettent de réaliser des opérations de synchronisation entre stations par l'intermédiaire des primitives classiques P et V. Ce mécanisme n'est disponible que pour un modèle simulé (dans le cas d'une résolution par analyse numérique, les conditions de synchronisation doivent être décrites explicitement).

Une ressource ou un sémaphore est constitué d'une file et d'un compteur d'unités disponibles. Les paramètres associés sont les suivants :

- NAME : identification de la file,
- SCHED : politique de gestion de la file,
- VALUE : valeur initiale du compteur,
- TYPE : type de la station (RESOURCE ou SEMAPHORE).

Contrairement à une ressource, un sémaphore n'est pas un objet physique et un client n'en est pas propriétaire. En conséquence un client peut effectuer une opération V sur un sémaphore sans avoir au préalable effectué d'opération P

sur celui-ci. A l'inverse un client ne peut libérer une unité de ressource que s'il a obtenu cette ressource auparavant.

Par ailleurs, il existe d'autres mécanismes de synchronisation permettant par exemple la gestion d'activités parallèles.

Exemple 3 :

```
/DECLAR/QUEUE A,B,S;  
/STATION/NAME=A;  
    SERVICE=EXP(6);P(S) END;  
    TRANSIT=B;INIT=5;  
/STATION/NAME=B;  
    SERVICE=BEGIN EXP(4);V(S) END;  
    TRANSIT=A;  
/STATION/NAME=S;TYPE=SEMAPHORE;  
    VALUE=3;
```

La station B a une capacité limitée à 3 clients. Quand la station B est saturée, le serveur A est bloqué.

III.2 - Conditions d'exécution

Les commandes /SIMUL/ et /COMPUTE/ sont utilisées pour préciser les conditions d'exécution des méthodes de résolution. Les modules de résolution sont activés au niveau de la commande /EXEC/ par des primitives spécifiques.

Exemple 4 :

```
/DECLAR/QUEUE A, B; REAL TAB(6);...  
/COMPUTE/METHOD=ANALYTIC;  
    INIT(C1)=1;INIT(C2)=5;  
    MARGINAL=A(TAB),B;  
/EXEC/COMPUTE;
```

Le modèle est étudié pour 1 client en classe C1 et 5 clients en classe C2 par la méthode analytique BCMP. Les probabilités marginales pour les stations A et B sont calculées, et celles de la station A sont stockées dans le tableau TAB.

Exemple 5 :

```
/DECLAT/QUEUE CPU;...
/STATION/NAME=CPU;...
/SIMUL/TMAX=10000;MESURE=200;
  TEST=BEGIN
    IF CPU.NBOUT>500
      THEN BEGIN
        PRINT("STOP");
        STOP
      END
    END;
  END;
```

le paramètre TMAX indique la longueur de la simulation, tandis qu'un processus de mesures, active toutes les TMAS/MESURE unités de temps, recueille des statistiques sur les station du réseau. Le paramètre TEST active une séquence d'instruction à chaque processus de mesure. Dans l'exemple ces instructions déclenchent l'arrêt de la simulation lorsque le nombre de passage à la station CPU est supérieur à 500 (NBOUT est un attribut standard de la classe interne QUEUE).

III.3 - Contrôle de résolution

La commande /STATION/ permet la description de la structure d'un réseau de files d'attente. Le contrôle de la résolution du modèle ou des modèles ainsi décrits est assuré par la commande /EXEC/.

Les fonctions principales de cette commande sont les suivantes :

i) initialiser les variables paramétrant le modèle : cette initialisation s'effectue par le biais d'un langage algorithmique simple qui comprend d'une part des instructions de style ALGOL, d'autre part une bibliothèque de fonctions (générateurs de nombres aléatoires, impression de variables, etc...).

ii) lancer les modules de résolution : au moyen de primitives spécifiques à chaque méthode (SIMUL, COMPUTE, MARCA...)

iii) modifier les variables ou le réseau et enchaîner les résolutions.

iv) sélectionner éventuellement un sous-réseau : cette fonction, assurée par la primitive NETWORK(.), permet de limiter la résolution à un sous-réseau et de permettre ainsi le traitement de modèles hiérarchiques ou décomposables.

Exemple 6 :

```
/DECLAR/QUEUE S1,S2;
      INTEGER N;REAL R1,R2;
/STATION/NAME=S1;
      SERVICE=ERLANG(10.0,2);TRANSIT=S2;
      INIT=N;
/STATION/NAME=S2;
      SERVICE=EXP(20.0);TRANSIT=S1;
/COMPUTE/INIT=N;
/SIMUL/TMAX=10000;MESURE=200;
/EXEC/BEGIN
      N:=1;
      WHILE N<=10 DO
      BEGIN
      COMPUTE;R1:=S1.MBUSY;
              R2:=S2.MBUSY;
      PRINT("ECART ABSOLU", R1-R2);
      PRINT("ECART RELATIF", (R1-R2)/R2);
      N:=N+1
      END
      END;
```

```
/END/
```

Dans cet exemple nous voulons étudier la robustesse d'un modèle analytique BCMP relativement à l'hypothèse exponentielle pour une station FIFO. La solution exacte est obtenue par analyse numérique markovienne (bien qu'erronnée pour la méthode d'analyse BCMP, le réseau sera traité, après impression d'un message d'erreur, en supposant que la station S1 est processeur partagé). Le modèle est traité pour un nombre de client variant de 1 à N. A chaque pas on calcule et

on imprime les écarts absolus et relatifs sur les taux d'utilisation de la station S1 (MBUSY est un attribut de la classe interne QUEUE).

III.4 - Les grandeurs calculées

Les grandeurs calculées de façon standard par chacune des méthodes de résolution sont, pour chaque station :

- le temps moyen de service (SERVICE),
- le taux d'utilisation (BUSY PCT),
- le nombre moyen de clients dans la station (CUST NB),
- le temps moyen de résidence (RESPONSE),
- le débit (THRUPUT).

D'autre part, en fonction de la spécificité des méthodes employées, des résultats supplémentaires sont produits dont en particulier :

i) en simulation :

- intervalles de confiance sur les taux d'utilisation,
- temps moyen de blocage d'une station (attente d'une ressources, etc...),
- nombre total de clients ayant quitté la file associée,

ii) en analyse markovienne :

- des indications sur la précision des calculs,
- sur les états de la chaîne de Markov,
- sur option les probabilités marginales d'état d'une station.

iii) en analyse mathématique BCMP :

- toutes les statistiques sont calculées par classe de clients,
- pour les réseaux fermés on peut obtenir sur option les probabilités marginales d'état d'une station, pour chaque classe et globalement, ainsi que la variance du nombre de clients dans la station.

IV - EXEMPLES

IV.1 - Modèle de système interactif : usage de classes de clients

a) Présentation du problème

Considérons un système constitué d'un ensemble de terminaux (TERM) d'une unité centrale (CPU), d'un tambour de swapping (DRUM) et d'un disque fichier (DISK) comme représenté sur la figure 1 :

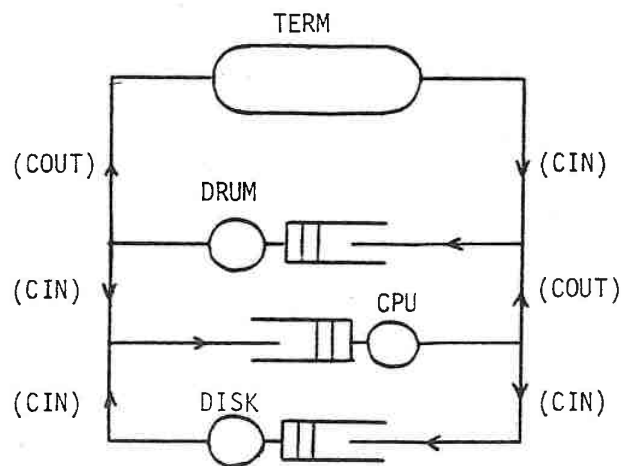


Figure 1

Nous supposons d'autre part que :

- un client provenant d'un terminal est dirigé sur l'unité centrale après passage par le tambour,
- un client provenant de l'unité centrale et accédant au tambour est ensuite dirigé vers un terminal.

Ce comportement peut être modélisé en introduisant deux classes de clients (CIN et COUT) telles que CIN soit la classe d'un client qui entre dans le système à partir d'un terminal, COUT la classe d'un client qui sort de l'unité centrale pour se rendre à un terminal. Ce modèle permet de connaître, suivant les caractéristiques des unités et le nombre de terminaux, le débit du système et les taux d'utilisation des unités CPU, DRUM, DISK.

b) Spécification du modèle dans le langage de QNAP

```
& MODELE DE SYSTEME INTERACTIF : USAGE DE CLASSES DE CLIENTS .....

/DECLAR/ QUEUE TERM, CPU, DRUM, DISK;  & DECLARATION DES FILES
      CLASS CIN, COUT;                & DECLARATION DES CLASSES

/STATION/ NAME=TERM;  & TERMINAUX .....

TYPE=DELAY;          & AUTANT DE TERMINAUX QUE DE CLIENTS
SERVICE=EXP(5000);  & DUREE DE SERVICE DISTRIBUEE SELON UNE LOI
                   & EXPONENTIELLE DE MOYENNE 5000
TRANSIT(COUT)=DRUM(CIN); & LES CLIENTS DE CLASSE COUT VONT DANS DRUM
                   & EN PASSANT DANS LA CLASSE CIN

/STATION/ NAME=DRUM;  & TAMBOUR DE SWAPPING .....
      SCHED=FS;

SERVICE(CIN)=EXP(100);
SERVICE(COUT)=EXP(50);
TRANSIT(CIN)=CPU;      & TRANSITION POUR LES CLIENTS DE CIN
TRANSIT(COUT)=TERM;    & TRANSITION POUR LES CLIENTS DE COUT

/STATION/ NAME=CPU;    & UNITE CENTRALE .....
SERVICE=EXP(20);
TRANSIT(CIN)=DISK,0.95,DRUM(COUT);
                   & TRANSITION VERS DISK
                   & AVEC LA PROBABILITE 0.95
                   & TRANSITION VERS DRUM ET LA CLASSE COUT
                   & AVEC LA PROBABILITE 0.05

/STATION/ NAME=DISK;   & DISQUE FICHIER .....

SERVICE=EXP(20);
TRANSIT(CIN)=CPU;

&----- PARAMETRISATION DE LA RESOLUTION -----

/COMPUTE/ METHOD=ANALYTIC;  & METHOD DEMANDEE : B.C.M.P.
      INIT(CIN)=10,20;    & ANALYSE AVEC 10 , PUIS 20 CLIENTS

&----- LANCEMENT EFFECTIF DE LA RESOLUTION -----

/EXEC/ COMPUTE;
```


c) Résultats

**** ANALYTIC RESOLUTION ****

```

****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 10
*****
*
*QUEUE TERM SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS COUT 5000. .9999 7.445 5000. .1489E-02 1716. *
*GLOBAL 5000. .9999 7.445 5000. .1489E-02 1716. *
*
*QUEUE CPU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS CIN 20.00 .5955 1.191 40.01 .2978E-01 295.8 *
*GLOBAL 20.00 .5955 1.191 40.01 .2978E-01 295.8 *
*
*QUEUE DRUM SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS CIN 100.00 .1488 .1861 125.0 .1488E-02 6594. *
*CLASS COUT 50.00 .7444E-01 .9307E-01 62.51 .1489E-02 6654. *
*GLOBAL 75.00 .2233 .2791 93.76 .2977E-02 3265. *
*
*QUEUE DISK SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS CIN 20.00 .5658 1.084 38.34 .2829E-01 315.2 *
*GLOBAL 20.00 .5658 1.084 38.34 .2829E-01 315.2 *
*
*****
****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 20
*****
*
*QUEUE TERM SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS COUT 5000. 1.0000 11.18 5000. .2236E-02 3944. *
*GLOBAL 5000. 1.0000 11.18 5000. .2236E-02 3944. *
*
*QUEUE CPU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS CIN 20.00 .8944 4.566 102.1 .4472E-01 345.1 *
*GLOBAL 20.00 .8944 4.566 102.1 .4472E-01 345.1 *
*
*QUEUE DRUM SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS CIN 100.00 .2235 .3317 148.4 .2235E-02 8799. *
*CLASS COUT 50.00 .1118 .1659 74.20 .2236E-02 8871. *
*GLOBAL 75.00 .3353 .4976 111.3 .4471E-02 4362. *
*
*QUEUE DISK SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS CIN 20.00 .8497 3.755 88.40 .4248E-01 382.4 *
*GLOBAL 20.00 .8497 3.755 88.40 .4248E-01 382.4 *
*
*****
**** END OF ANALYTIC RESOLUTION ****

```

IV.2 - Modèle d'un noeud de commutation de paquets

a) Présentation du problème

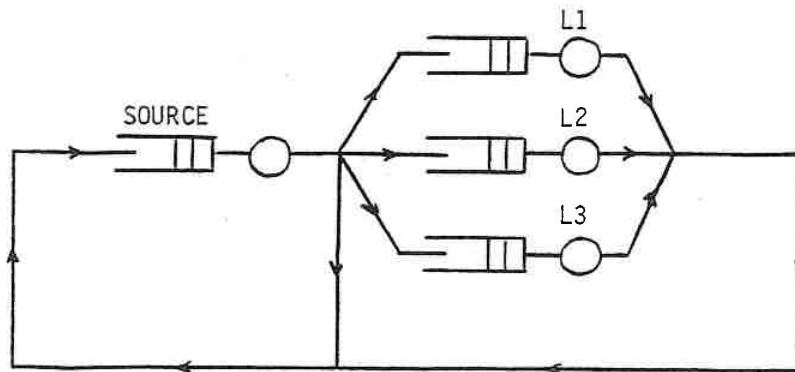


Figure 2

Le modèle représente le fonctionnement d'un noeud de commutation de paquets. Les paquets sont émis à partir d'une station SOURCE, et aiguillés, à leur arrivée au noeud de commutation, vers les lignes de sorties L1, L2, L3, avec des probabilités identiques.

Les paquets en attente derrière L1, L2, L3 sont stockés dans un nombre fini (NBUF) de buffers, à raison d'un paquet par buffer.

Lorsque l'ensemble des buffers est occupé, les paquets arrivant au noeud de commutation sont rejetés.

Les paquets transmis sur les lignes ou rejetés sont renvoyés vers la station SOURCE. Afin d'assurer que cette station se comporte comme une source infinie, c'est-à-dire qu'il y ait toujours au moins un paquet dans cette station, le nombre total N de paquets circulant dans le réseau est choisi tel que $N > NBUF$ (il est facile de vérifier que la solution du modèle est indépendante de N pourvu que $N > NBUF$).

Le modèle permet de calculer le taux de rejet des paquets en fonction du taux d'arrivée des paquets ($1/T_{SOURCE}$) de la vitesse des lignes, ($1/T_{LINE}$), et de la capacité en buffers (NBUF). Il est résolu par analyse markovienne.

b) Spécification du modèle dans le langage QNAP

```

& NOEUD DE COMMUTATION ...

/DECLAR/ QUEUE SOURCE,L1,L2,L3;
REAL PLOST,PLINE;      & PROBABILITES DE PERTE ET D'ENVOI
REAL TLINE, TSOURCE;
INTEGER NBUF;          & NOMBRE TOTAL DE BUFFERS DISPONIBLES
INTEGER N;             & NOMBRE DE CLIENTS DANS LE RESEAU

/STATION/ NAME=SOURCE;  & SOURCE DES PAQUETS SUR LE NOEUD ..
INIT=N;
SERVICE=BEGIN
    EXP(TSOURCE);      & PERIODE ENTRE ARRIVEES
                        & TEST SI BUFFER DISPONIBLE ...
    IF L(L1)+L(L2)+L(L3)<NBUF
    THEN BEGIN          & BUFFER LIBRE : ENVOI SUR UNE LIGNE
        PLOST:=0;
        PLINE:=1./3.;
        END
    ELSE BEGIN          & BUFFERS OCCUPES : PERTE DU PAQUET
        PLOST:=1;
        PLINE:=0;
        END;
    END;

    TRANSIT=SOURCE,PLOST,L1,PLINE,L2,PLINE,L3;

/STATION/ NAME=L1; SERVICE=ERLANG(TLINE,2.0); TRANSIT=SOURCE;
/STATION/ NAME=L2; SERVICE=ERLANG(TLINE,2.0); TRANSIT=SOURCE;
/STATION/ NAME=L3; SERVICE=ERLANG(TLINE,2.0); TRANSIT=SOURCE;

/EXEC/ BEGIN
    TSOURCE:=10;        & PERIODE D'EMISSION DES PAQUETS
    TLINE:=30;           & DUREE MOYENNE DE TRANSFERT SUR LIGNE
    NBUF:=4;             & NOMBRE TOTAL DE BUFFERS DISPONIBLES
    N:=5;                & NOMBRE DE CLIENTS DANS LE RESEAU
    MARCA;               & APPEL DE LA RESOLUTION NUMERIQUE ...
    PRINT(" TAUX DE PERTE DANS LE NOEUD : ",
    1.-(L1.MTHRPUT+L2.MTHRPUT+L3.MTHRPUT)/SOURCE.MTHRPUT);
    END;

```

*** MARCA : MARKOV CHAIN ANALYSER ***

TOTAL NUMBER OF STATES = 129
NUMBER OF NON-ZERO ELEMENTS IN ARRAY A = 648

```

*****
*
*QUEUE SOUR  SERVICE  BUSY PCT  CUST NB  RESPONSE  THRUPUT *
*GLOBAL      10.00    1.000    2.017    20.17     .10000   *
*
*QUEUE L1    SERVICE  BUSY PCT  CUST NB  RESPONSE  THRUPUT *
*GLOBAL      30.00    .6024    .9944    49.52     .2008E-01*
*
*QUEUE L2    SERVICE  BUSY PCT  CUST NB  RESPONSE  THRUPUT *
*GLOBAL      30.00    .6024    .9944    49.52     .2008E-01*
*
*QUEUE L3    SERVICE  BUSY PCT  CUST NB  RESPONSE  THRUPUT *
*GLOBAL      30.00    .6024    .9944    49.52     .2008E-01*
*
*****
NUMBER OF PREMULTS : 100
TAUX DE PERTE DANS LE NOEUD : .3976

```

IV.3 - Modèle de gestion de disque

a) Présentation du problème

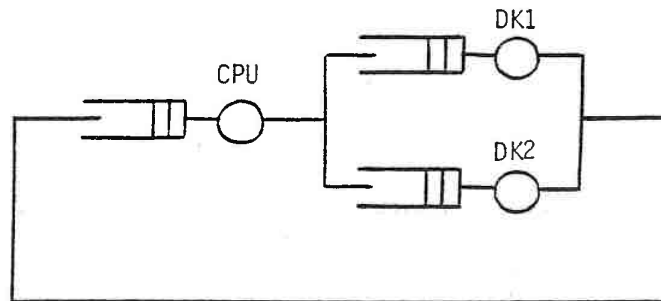


Figure 3

On considère un système constitué, comme représenté sur la figure 3, d'une unité centrale CPU, d'un canal unique CHANNEL, et de deux disques DK1 et DK2 connectés à ce canal.

L'exécution des programmes sur cette machine est formée d'une succession d'intervalles d'exécution sur l'unité centrale de durée moyenne (TCPU), et d'opérations d'entrée-sortie exécutées avec des probabilités identiques sur DK1 et DK2.

Chaque disque n'utilise le canal que lorsque les mouvements de bras sont achevés et si le canal est libre. Le modèle est résolu par simulation. Les résultats obtenus permettent d'évaluer l'effet du partage du canal par les deux disques sur les performances.

b) Spécification du modèle dans le langage de QNAP et résultats

```

& MODELE DE DISQUE (SIMPLIFIE ) ...

/DECLAR/ QUEUE CPU, DK1, DK2, CHANNEL;
      REAL SEEK= 30;      & DUREE MOYENNE DE DEPLACEMENT DE BRAS
      REAL ROTATION = 25 ; & DUREE DE ROTATION
      REAL TRANSFERT = 8 ; & DUREE MOYENNE DE TRANSFERT
      INTEGER N;          & NOMBRE DE CLIENTS ( PROGRAMMES )

/STATION/ NAME=CPU;      & UNITE CENTRALE
      SERVICE=EXP(20);    & DUREE ENTRE ACCES DISQUE
      TRANSIT=DK1,1,DK2,1; & ACCES EQUILIBRES AUX 2 DISQUES
      INIT=N;            & NIVEAU DE MULTIPROGRAMMATION

/STATION/ NAME=DK1;      & MODELE DE DISQUE .....
      SERVICE=BEGIN
      EXP(SEEK);          & DEPLACEMENT DE BRAS
                        & ( DISTRIBUTION EXPONENTIELLE )
      P(CHANNEL);         & DEMANDE D'ACCES AU CANAL
      UNIFORM(0.0,ROTATION); & DELAI ROTATIONNEL
                        & ( DISTRIBUTION UNIFORME )
      CST(TRANSFERT);     & TRANSFERT DE DUREE CONSTANTE
      V(CHANNEL);         & LIBERATION DU CANAL
      END;
      TRANSIT=CPU;

/STATION/ NAME=DK2; COPY=DK1; & DISQUE DK2 IDENTIQUE A DK1

/STATION/ NAME=CHANNEL;    & CANAL ( STATION PASSIVE ) ...
      TYPE=RESOURCE;
      VALUE=1;             & LE CANAL EST UNIQUE

/SIMUL/ TMAX=500000;      & DUREE DEMANDEE DE SIMULATION
      MESURE=500;

/EXEC/ BEGIN
      N:=10;              & NIVEAU DE MULTIPROGRAMMATION
      SIMUL;              & LANCEMENT DE LA SIMULATION
      END;

```

```

*** SIMULATION BEGINS ... ***
**TIME = 500000.00
*****
* NAME *BUSY.PCT*CONF.INT*RESPONSE* SERVICE* BLOCKED*CUST NB *SERV NB *
*****
* CPU * .661* .011* 38.964* 20.030* .000* 1.206* 16507*
* DK1 * .938* .011* 281.226* 56.046* 5.499* 4.707* 8368*
* DK2 * .906* .013* 246.152* 55.713* 5.615* 4.007* 8129*
* CHAN * .677* .007* 26.083* 20.527* .000* .861* 16497*
*****
*** END OF SIMULATION : TIME = 500000.00

```

IV.4 - Modèle de système multiprogrammé à temps partagé

a) Présentation de problème

Considérons le modèle de système multiprogrammé, temps partagé [PoL76, Bra74] dont l'architecture est schématisée par la figure 4.

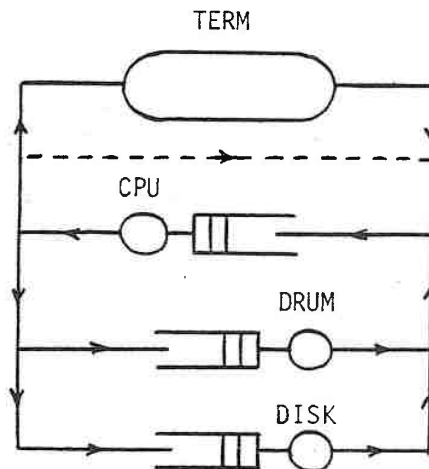


Figure 4

Le système est constitué de N terminaux interactifs (TERM), d'une unité centrale (CPU), d'un tambour supportant la pagination (DRUM) et d'un disque de fichier (DISK). Nous supposons que la distribution des temps entre défauts de page est une loi exponentielle dont la moyenne E est donnée par :

$$E = \text{ALPHA} \left(\frac{M}{n} \right)^K \quad (\text{cf. [BeK69]})$$

où M est la taille de la mémoire, n le nombre de programmes se partageant les ressources CPU, DRUM, DISK à un instant donné. On cherche à connaître le débit du système suivant les caractéristiques des unités, le comportement des programmes, et le nombre de terminaux connectés.

Le modèle est résolu de deux façons :

i) par une méthode de décomposition

La résolution directe par méthode BCMP de ce modèle n'est en effet pas possible car la loi de service de la station CPU ainsi que les probabilités de transition vers TERM, DRUM et DISK dépendent du nombre n de programmes en mémoire. Cependant, les interactions entre les terminaux et les autres unités étant faibles, le réseau est quasi-décomposable [Cou75] et nous pouvons alors remplacer l'ensemble CPU, DRUM, DISK par une station équivalente comme indiqué dans [Bra74]. Le taux de service $TEQU(n)$, $n = 1, 2, \dots, N$ de cette station équivalente sera obtenu en résolvant par BCMP le sous-réseau formé des stations CPU, DRUM, DISK avec successivement $n = 1, 2, \dots, N$ programmes.

Le réseau constitué par les terminaux et la station équivalente (cf. Fig. 5) peut alors être résolu également par la méthode BCMP.

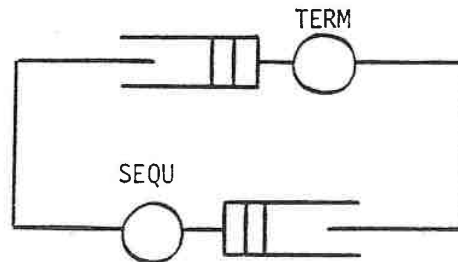


Figure 5

Nous procédons donc de la manière suivante :

Etape 1 : Nous sélectionnons le réseau CPU, DRUM, DISK par NETWORK (CPU, DRUM, DISK). Ce réseau est résolu pour un nombre n de clients variant de 1 à N en conservant dans un tableau TEQU les valeurs du taux de service pour la station équivalente.

Etape 2 : Nous sélectionnons et résolvons le réseau réduit constitué par les terminaux (TERM) et la station équivalente (SEQU). Le débit du système complet est le débit de la station équivalente, ou de façon identique, celui de la station TERM.

ii) Par la méthode d'analyse markovienne

Dans ce cas, on résoud directement le réseau représenté sur la Figure 4. Le débit du système complet est le débit de la station TERM.

b) Spécification et résolution du modèle par méthode de décomposition

Etape 1

```

& MODELE DE SYSTEME MULTIPROGRAMME ...

/DECLARATION/ QUEUE CPU,DRUM,DISK,TERM,SEQU;
              INTEGER M,N,I;
              REAL C,R,ALPHA,K,TDRUM,TDISK,PDRUN,PDISK,S,E;
              REAL TEQU(10);

& BOUCLE DE MULTIPROGRAMMATION (CPU, DRUM, DISK ).....

/STATION/NAME=CPU;
  SERVICE=EXP(S);
  TRANSIT=DRUM,PDRUN,DISK,PDISK,CPU;
/STATION/NAME=DRUM;
  TRANSIT=CPU;
  SERVICE=EXP(TDRUM);
/STATION/NAME=DISK;
  TRANSIT=CPU;
  SERVICE=EXP(TDISK);

& RESOLUTION PAR ANALYSE BCMP .....

/COMPUTE/INIT=N;
  METHOD=ANALYTIC;
&
  OPTION=NOUT;
/EXEC/BEGIN
  C:=800;R:=20;ALPHA:=0.01;K:=1.5;
  TDRUM:=10;TDISK:=30;M:=512;
  NETWORK(CPU,DRUM,DISK); & SELECTION DU SOUS-RESEAU A ANALYSER
  N:=1;
  WHILE N<=10 DO
    BEGIN
      E:=ALPHA*((N/N)**K); & DUREE DE VIE
      S:=1/(1/E+1/R+1/C); & SERVICE MOYEN UNITE CENTRALE
      PDRUN:=S/E; PDISK:=S/R; & PROBABILITES DE TRANSITION
      COMPUTE;
      TEQU(N):=CPU,NTHRUPUT*(1.0-PDISK-PDRUN);
      N:=N+1;
    END;
  END;

      **** ANALYTIC RESOLUTION ****

****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
*****
*
*QUEUE CPU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*GLOBAL 16.70 .3867 .3867 16.70 .2315E-01 26.49 *
*
*QUEUE DRUM SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*GLOBAL 10.000 .3337E-01 .3337E-01 10.000 .3337E-02 289.6 *
*
*
*QUEUE DISK SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*GLOBAL 30.00 .5800 .5800 30.00 .1933E-01 21.73 *
*
*****
      **** END OF ANALYTIC RESOLUTION ****

```

(Les résultats sont obtenus pour N=1,...,10 ; seuls sont présentés les résultats calculés pour N=1 en raison de la place prise par ces résultats).

Etape 2

& RESEAU AVEC TERMINAUX ET STATION EQUIVALENTE

```

/STATION/ NAME=TERM;
          TYPE=DELAY;
          SERVICE=EXP(5000);
          TRANSIT=SEQU;
/STATION/ NAME=SEQU;
          SERVICE=EXP(1);   LOAD=TEQU;
          TRANSIT=TERM;

/EXEC/ BEGIN
      NETWORK(TERM,SEQU);
      FOR N:=3,5,7 DO COMPUTE;
      END;
  
```

**** ANALYTIC RESOLUTION ****

```

****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 3
*****
*
*QUEUE TERM SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*GLOBAL 5000. .9310 1.928 5000. .3856E-03 2779. *
*
*QUEUE SEQU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*GLOBAL 1795. .6924 1.072 2779. .3856E-03 5000. *
*
*****
**** END OF ANALYTIC RESOLUTION ****
  
```

**** ANALYTIC RESOLUTION ****

```

****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 5
*****
*
*QUEUE TERM SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*GLOBAL 5000. .9649 2.828 5000. .5656E-03 3840. *
*
*QUEUE SEQU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*GLOBAL 1582. .8946 2.172 3840. .5656E-03 5000. *
*
*****
**** END OF ANALYTIC RESOLUTION ****
  
```

**** ANALYTIC RESOLUTION ****

```

****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 7
*****
*
*QUEUE TERM SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*GLOBAL 5000. .9699 3.353 5000. .6706E-03 5438. *
*
*QUEUE SEQU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*GLOBAL 1452. .9736 3.647 5438. .6706E-03 5000. *
*
*****
**** END OF ANALYTIC RESOLUTION ****
  
```

Nota : On peut aisément calculer toutes les statistiques du modèle à partir des résultats de l'étape 1, et des probabilités marginales du réseau équivalent. Les probabilités marginales sont disponibles en utilisant dans /COMPUTE/ l'option MARGINAL.

c) Spécification et résolution du modèle par analyse markovienne

```
& RESOLUTION DU RESEAU COMPLET PAR ANALYSE MARKOVienne .....
/STATION/NAME=CPU:      & MODIFICATION DES STATIONS ....
  SERVICE=BEGIN
    I=L(CPU)+L(DRUM)+L(DISK):  & NIVEAU INSTANTANE
                                & DE MULTIPROGRAMMATION
    E=ALPHA*(N/I)**K:  S=1/(1/E+1/R+1/C):
    PDRUM=S/E:  PDISK=S/R:
    EXP(S):
  END:
  TRANSIT=DRUM,PDRUM,DISK,PDISK,TERM:
/STATION/NAME=TERM:
  TRANSIT=CPU:
  INIT=N:

/EXEC/ BEGIN
  NETWORK(TERM,CPU,DRUM,DISK):
  FOR N:=3,5,7 DO  MARCA:
  END:
```

*** MARCA : MARKOV CHAIN ANALYSER ***

TOTAL NUMBER OF STATES = 20
NUMBER OF NON-ZERO ELEMENTS IN ARRAY A = 80

```
*****
*
*QUEUE CPU    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      14.14      .3085      .3781      17.34      .2181E-01*
*
*QUEUE DRUM   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      10.00      .6001E-01  .6702E-01  11.17      .6001E-02*
*
*QUEUE DISK   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      30.00      .4628      .6260      40.63      .1543E-01*
*
*QUEUE TERM   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      5000.      .9309      1.928      5000.      .3956E-03*
*
*****
NUMBER OF PREMULTS : 38
```

*** MARCA : MARKOV CHAIN ANALYSER ***

TOTAL NUMBER OF STATES = 56
NUMBER OF NON-ZERO ELEMENTS IN ARRAY A = 266

```
*****
*
*QUEUE CPU    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      11.17      .4525      .6749      16.65      .4052E-01*
*
*QUEUE DRUM   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      10.00      .1733      .2369      13.67      .1733E-01*
*
*QUEUE DISK   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      30.00      .6787      1.260      55.69      .2262E-01*
*
*QUEUE TERM   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      5000.      .9648      2.820      5000.      .5657E-03*
*
*****
NUMBER OF PREMULTS : 91
```

*** MARCA : MARKOV CHAIN ANALYSER ***

TOTAL NUMBER OF STATES = 120
NUMBER OF NON-ZERO ELEMENTS IN ARRAY A = 624

```
*****
*
*QUEUE CPU    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      8.289      .5368      .9402      14.52      .6476E-01*
*
*QUEUE DRUM   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      10.00      .3725      .7270      19.52      .3725E-01*
*
*QUEUE DISK   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      30.00      .8051      1.902      73.87      .2684E-01*
*
*QUEUE TERM   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT *
*GLOBAL      5000.      .9697      3.350      5000.      .6701E-03*
*
*****
NUMBER OF PREMULTS : 271
```

V - CONCLUSION

Le but de QNAP est d'intégrer dans un même ensemble de programmes les différentes techniques générales permettant la résolution de réseaux de files d'attente (nous ne nous sommes pas intéressés à la multitude de réseaux particuliers qui fleurissent dans la littérature).

La description de ces réseaux et le contrôle de leur résolution sont assurés par un langage simple qui résout d'une manière très souple les problèmes de paramétrisation du modèle, l'enchaînement des résolutions, le traitement de modèles hiérarchiques ou hybrides. Notons que, dans sa version actuelle, le mode d'utilisation usuel de QNAP est non interactif au sens où le fichier de données est créé préalablement à l'exécution. Cette caractéristique résulte pour une part de la structure interne du produit, mais essentiellement de la philosophie qui a conduit la réalisation du projet :

i) du point de vue implantation, il est difficile de prévoir des points de reprise après détection d'une erreur (erreurs syntaxiques dans le langage de spécification, hypothèses erronées pour la méthode de résolution choisie).

ii) certaines méthodes se prêtent mal à une utilisation en mode interactif si l'on veut obtenir une bonne précision sur les résultats (simulation, méthode numérique d'analyse d'un modèle markovien, en particulier).

iii) l'accent est mis sur la réalisation de modèles complexes (structurellement, à cause du degré de paramétrisation, ou par l'imbrication de sous-modèles) pour lesquels le temps de calcul ou la masse des résultats sont importants.

iv) le problème de modifier les données, ou la structure d'un réseau ne se pose pas puisque la plupart des paramètres du réseau peuvent être mis à jour au niveau de la commande /EXEC/ et que le fichier de données peut comporter autant de modèles différents qu'il est souhaité.

Néanmoins, en ce qui concerne la plupart des modèles de complexité moyenne ou utilisant les méthodes les plus rapides (analyse BCMP en particulier), la résolution peut être menée et suivie aisément à partir d'une console interactive en utilisant les facilités fournies par le système hôte (éditeur de texte en particulier).

Notons que les techniques utilisées dans QNAP sont à la base de divers outils d'analyse de réseaux de files d'attente [Kek74, SaM77, ZaL77, KrT77]. Ceux dont nous avons connaissance ne proposent, à l'exclusion de RESQ, qu'une seule méthode de résolution et ne bénéficient donc pas de la complémentarité offerte par les différents modules composant QNAP. A titre indicatif, nous donnons en annexe I.2 quelques précisions concernant trois de ces outils.

A la lumière des premières expériences de mise en oeuvre de QNAP, nous pouvons dégager deux domaines d'activité où le produit peut apporter une aide efficace :

i) Recherche en modélisation

Tout particulièrement en ce qui concerne l'étude systématique de modèles théoriques où il s'agit de tester certaines hypothèses, de vérifier la validité et la précision d'une nouvelle technique de résolution, ou d'expériences de robustesse. QNAP facilite également le calcul et l'édition d'exemples numériques.

ii) Aide à la conception et à l'évaluation de systèmes informatiques

QNAP fournit un ensemble de fonctions qui permettent la description d'une architecture de système. Il est ainsi possible de tester différentes organisations, de dimensionner les ressources et d'apprécier les performances globales. En tant qu'outil d'évaluation, il fournit un mode de représentation, largement validé par l'expérience, avec une structure suffisamment souple pour conduire à un résultat satisfaisant, par rapport aux mesures sur le système réel, après les raffinements successifs du modèle initial nécessaires.

ANNEXE I.1

LISTE DES COMMANDES DU LANGAGE DE SPECIFICATION

/DECLARATION/	Déclaration de toutes les <u>files</u> , <u>classes</u> et <u>étiquettes</u> , des <u>variables</u>
/STATION/	Description d'une station active ou d'une station passive. Paramètres : NAME, SCHED, TYPE, VALUE, TRANS, SERVICE, LOAD, MAX.
/EXEC/	Spécification du programme de contrôle de résolution d'un modèle.
/SIMUL/	Initialisation des paramètres de lancement d'une simulation. Paramètres : TMAX, OUT, MESURE, RANDOM, TRACE.
/COMPUTE/	Initialisation des paramètres de lancement d'un calcul analytique. Paramètres : INIT, METHOD, OPTION.
/START/	Ré-initialisation de l'analyseur.
/LIST/, /NOLIST/	Impression ou arrêt de l'impression du fichier d'entrée.
/DUMP/	Sortie de la mémoire libre de l'analyseur.
/END/	Fin de fichier d'entrée.

ANNEXE I.2

Quelques exemples d'outils d'analyse de réseaux de files d'attente

1 - RESQ [SaM77]

RESQ est un produit interne IBM comportant un module de simulation [Sau75] pour lequel le contrôle statistique des résultats est très développé, et un module de résolution analytique BCMP [Rei75]. Le programme, écrit en PL1, permet la résolution de modèle hybrides simulation - analyse mathématique.

Son utilisation peut être conversationnelle ou non, mais sa philosophie relève du premier mode. Quatre commandes principales initialisent un dialogue avec l'utilisateur :

- SETUP : création du modèle initial,
- LIST : listage d'un modèle,
- EVAL : résolution du modèle,
- CHANGE : modification des paramètres d'un modèle.

2 - SNAP [KrT77]

Il s'agit d'un programme FORTRAN d'analyse de réseaux de type BCMP.

Un fichier de données du modèle est créé directement en format fixe ou à l'aide d'un programme conversationnel de type question-réponse. Des données complémentaires concernant les directives d'exécution et de modification du modèle créé initialement complètent le fichier d'entrée au programme. La paramétrisation du modèle est assurée par ces directives de modification et peut faire appel à des programmes utilisateurs qui doivent être édités conjointement à SNAP.

Un aspect intéressant de SNAP est de permettre l'édition de courbes à partir du fichier résultat créé par le programme (dans le cas de QNAP, l'utilisateur a la possibilité d'écrire sur fichier au niveau de la commande /EXEC/, le traitement de ce fichier lui incombant ensuite).

3 - QSOLVE [ZaL77]

QSOLVE est un programme PL1 d'analyse numérique de modèle markovien mis sous forme de réseau de files d'attente. Le programme résoud les équations d'équilibre globales du système à l'aide d'algorithmes classiques de résolution d'équations linéaires.

Il semble cependant (d'après la documentation disponible) que ses possibilités soient réduites à la résolution de modèles où les politiques de service au niveau des stations sont relativement sophistiquées, et les distributions des temps de service générales.

CHAPITRE II

ALGORITHMES DE RESOLUTION DES RESEAUX DE TYPE BCMP

I - INTRODUCTION

Ainsi que nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, les réseaux de files d'attente ont fait l'objet récemment de développements tant du point de vue théorique que du point de vue pratique, en particulier comme modèles de systèmes informatiques.

Nous ne nous intéressons ici qu'à un type particulier de réseau dont l'étude des probabilités d'état stationnaires conduit à ce qu'il est convenu de nommer la forme "produit", soit plus simplement :

$$p(E) = \frac{1}{C} d(E) \prod_{i=1}^I f_i(N_i)$$

où $E = (N_1, \dots, N_I)$

I le nombre de stations du réseau

$d(E)$ une fonction qui ne dépend que des processus d'arrivée au réseau

N_i l'état d'une station (en terme de configuration des clients)

f_i une fonction ne dépendant que du type de la station considérée.

Les premiers résultats obtenus dans ce domaine sont dûs à J.R. Jackson [Jac 63] et concernent des réseaux de stations à file PAPS dont la distribution des temps de service est exponentielle, et où les clients sont d'un seul type. Ces résultats sont repris et développés par Gordon et Newell pour des réseaux fermés [GoN 67].

Les plus importantes extensions qui utilisent les propriétés d'équilibre local de ces réseaux [ChH77], sont ensuite introduites par Baskett, Chandy, Muntz et Palacios [BaC75], Reiser et Kobayashi [ReK75], et indépendamment semble-t-il, par une méthode de démonstration différente, par Barbour et Kelly [Bar76, Kel75]. Les généralisations essentielles qui sont apportées sont relatives à de

nouveaux types de stations admises et à la possibilité de définir plusieurs classes de clients. Ce sont ces résultats que nous présentons ici.

Enfin, des résultats récents traitent de réseaux avec blocage [Pit76], et de réseaux qui admettent des contraintes quant à la taille des populations qui y séjournent [Lam77]. Notons d'autre part un certain nombre d'études qui examinent avec précision les propriétés stochastiques des réseaux de type BCMP [Mun72, BeM75].

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : le paragraphe II présente en détail les hypothèses et l'énoncé du théorème de Baskett, Chandy, Muntz et Palacios, le paragraphe III est consacré aux algorithmes de calcul de la constante de normalisation et des grandeurs élémentaires qui caractérisent à l'état stationnaire chaque station du réseau. Nous concluons et donnons quelques exemples de résolution au paragraphe IV.

II - THEOREME DE BASKETT-CHANDY-MUNTZ ET PALACIOS [BaC75]

II.1 - Hypothèses

II.1.1 - Routage

Nous considérons un réseau constitué d'un nombre fini, I , de stations que visitent des clients appartenant à un nombre fini, R , de classes de clients.

Un client de classe r quittant la station i se rend à la station j en prenant la classe s avec la probabilité $p_{ir;js}$. Nous supposons que le graphe associé au réseau est décomposable en M composantes connexes [Ber70]. Par convention (non restrictive) nous supposons dans toute la suite qu'une classe r ne peut appartenir qu'à une seule composante connexe. Une composante sera notée S_m . Un client en provenance de l'extérieur entre dans le réseau à la station j en classe s avec la probabilité $p_{m;j s}$ si s appartient à S_m . Un client de classe r quitte le réseau à la station i avec la probabilité $p_{ir;m}$ si r appartient à S_m . De façon évidente nous avons les relations :

$$\sum_{j,s} p_{ir;js} + p_{ir;m} = 1 \quad \forall (i,r) \quad r \in S_m$$

Une composante connexe, ou sous-chaine, peut être ouverte ou fermée. Dans ce dernier cas, le nombre de clients circulant dans la sous-chaine reste constant. Un réseau sera dit fermé si toutes les sous-chaines qui le composent sont fermées, ouvert si elles sont ouvertes, mixte s'il existe concurremment des sous-chaines ouvertes et des sous-chaines fermées.

II.1.2 - Processus d'arrivée

Dans le cas d'un réseau ouvert ou mixte, il peut exister autant de processus d'arrivée poissonniens de paramètre $v_m(\bar{n}_m)$ que de sous-chaines ouvertes. $\bar{n}_m$ est le nombre instantané de clients dans la sous-chaine S_m . Dans ce cas nous aurons d'autre part les relations suivantes :

$$\sum_{j,s \in S_m} p_{m;j s} = 1 \quad \forall m.$$

Dans le cas d'un réseau ouvert, il peut exister un processus poissonnier unique de paramètre $v(\bar{n})$ où $\bar{n}$ est le nombre instantané de clients dans le réseau.

Nous aurons alors :

$$\sum_m \sum_{j,s \in S_m} p_{m;js} = 1$$

II.1.3 - Stations

Nous distinguerons quatre types de stations :

Type 1 : discipline de service "Premier Arrivé, Premier Servi" (PAPS).

La distribution des temps de service est exponentielle. Le taux de service peut dépendre du nombre instantané de clients dans la station. Il n'y a qu'un serveur.

Type 2 : discipline de service "Processeur Partagé (PP). Chaque classe de clients à une distribution des temps de service coxienne [Cox55]. Le taux de service de chaque classe peut dépendre du nombre instantané de clients dans la station et/ou du nombre de clients de cette classe dans la station. Un seul serveur.

Type 3 : discipline de service "Dernier Arrivé, Premier Servi" avec préemption et reprise (DAPSPR). Chaque classe de client à une distribution des temps de service coxienne suivant le même modèle qu'une station PP. Un seul serveur.

Type 4 : il existe un nombre de serveurs au moins égal au nombre de clients susceptibles d'être servis (SI pour Serveur Infini). Chaque classe de clients admet une distribution des temps de service coxienne, identique pour chaque serveur.

II.2 - Théorème BCMP

II.2.1 - Taux d'arrivée

Considérons les systèmes d'équations, définis pour chaque sous-chaine S_m , suivants :

$$(1) \quad \sum_{(i,r) \in S_m} e_{ir} p_{ir;js} + p_{m;js} = e_{js} \quad (j,s) \in S_m$$

Dans le cas d'une sous-chaine ouverte ce système admet une solution

unique si et seulement la chaîne de Markov associée à la matrice P constituée des $p_{ir;js}$ complétée par les $p_{m,js}$ est irréductible.

Dans le cas d'une sous-chaîne fermée ce système admet une solution définie à une constante multiplicative près si et seulement si la chaîne de Markov associée à la matrice P constituée des $p_{ir;js}$ est irréductible.

Le coefficient e_{ir} peut être interprété comme les taux d'arrivée (relatif dans le cas d'une sous-chaîne fermée) des clients de classe r à la station i.

II.2.2 - Etats du système

Le théorème énoncé dans [BaC75] est relatif à des états permettant une description complète du réseau. Dans la pratique et pour ce qui nous concerne nous ne considérerons que les probabilités marginales relatives aux états suivants :

$$E = (N_1, N_2, \dots, N_I)$$

où

$$N_i = (n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iR})$$

et où n_{ir} est le nombre de clients de classe r dans la station i.

II.2.3 - Probabilités à l'équilibre

Pour un réseau satisfaisant les hypothèses énoncées au paragraphe II.2.1 et tel que le système (1) admette une solution, la probabilité stationnaire que le réseau soit dans l'état E est donnée par :

$$\text{Prob}(E) = \frac{1}{C} d(E) f_1(N_1) f_2(N_2) \dots f_I(N_I)$$

où :

- C est la constante de normalisation

$$- d(E) \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{dans le cas d'un réseau fermé} \\ \bar{n}-1 & \\ \prod_{n=0}^{\bar{n}-1} v(n) & \text{dans le cas d'arrivées externes globales} \\ \bar{n}_m-1 & \\ \prod_{S_m \text{ ouverte}} \prod_{n_m=0}^{\bar{n}_m-1} v_m(n_m) & \text{dans le cas d'arrivées externes} \\ & \text{distinctes pour les sous-chaînes ouvertes} \end{array} \right.$$

- Dans le cas de taux de service constants :

$$f_i(N_i) = \begin{cases} n_i! \left(\frac{1}{u_i^0}\right)^{n_i} \prod_{r=1}^R \frac{e_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} & \text{type 1} \\ n_i! \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} \left(\frac{e_{ir}}{u_{ir}^0}\right)^{n_{ir}} & \text{type 2 ou 3} \\ \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} \left(\frac{e_{ir}}{u_{ir}^0}\right)^{n_{ir}} & \text{type 4} \end{cases}$$

avec : $n_i = \sum_{r=1}^R n_{ir}$,

u_i^0 taux de service de la station i (type 1)

u_{ir}^0 taux de service de la station i pour la classe r (types 2, 3 ou 4).

- Dans le cas où le taux de service dépend de l'état de la station nous admettrons les formes suivantes :

- i) $u_{ir} = u_{ir}^0 b_i(n_i)$
- ii) $u_{ir} = u_{ir}^0 c_{ir}(n_{ir})$
- iii) $u_{ir} = u_{ir}^0 b_i(n_i) c_{ir}(n_{ir})$

où b_i et c_{ir} sont des fonctions strictement positives avec les restrictions suivantes :

- seule la forme i) est valide dans le cas d'une station de type 1
avec en outre :

$$\forall r \quad u_{ir}^0 = u_i^0$$

- une station de type 4 n'admet pas de taux de service dépendant de l'état, mais la distribution des probabilités d'état est identique à celle d'une station de type 2 ou 3 où le taux de service est $u_{ir} = u_{ir}^0 n_i$.

Nous aurons donc les formes suivantes pour les fonctions f_i :

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad f_i(N_i) &= n_i! \left(\prod_{p=1}^{n_i} \frac{1}{b_i(p)} \right) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} \left(\frac{e_{ir}}{u_{ir}^0} \right)^{n_{ir}} \\
\text{ii)} \quad f_i(N_i) &= n_i! \prod_{r=1}^R \left(\prod_{q=1}^{n_{ir}} \frac{1}{c_{ir}(q)} \right) \frac{1}{n_{ir}!} \left(\frac{e_{ir}}{u_{ir}^0} \right)^{n_{ir}} \\
\text{iii)} \quad f_i(N_i) &= n_i! \left(\prod_{p=1}^{n_i} \frac{1}{b_i(p)} \right) \prod_{r=1}^R \left(\prod_{q=1}^{n_{ir}} \frac{1}{c_{ir}(q)} \right) \frac{1}{n_{ir}!} \left(\frac{e_{ir}}{u_{ir}^0} \right)^{n_{ir}}
\end{aligned}$$

en tenant compte des remarques faites précédemment. Notons par ailleurs que les formes i) et ii) peuvent être considérées comme des cas particulier de la forme iii).

Nous poserons dans la suite :

$$\begin{aligned}
B_i(n_i) &= \prod_{p=1}^{n_i} \frac{1}{b_i(p)} \\
\text{et} \quad C_{ir}(n_{ir}) &= \prod_{q=1}^{n_{ir}} \frac{1}{c_{ir}(q)}
\end{aligned}$$

II.3 - Conclusion

Nous noterons d'abord quelques remarques relatives au théorème :

i) dans l'expression des probabilités d'état stationnaires, les distributions de temps de service n'interviennent que par leur moyenne. Cette remarque présente un intérêt certain dans la mesure où elle nous dégage de la nécessité de calculer ou de mesurer des moments d'ordre supérieur.

ii) la forme produit de cette expression, jointe aux caractéristiques des fonctions f_i (où l'on reconnaît des coefficients multinomiaux) nous permettra d'utiliser des algorithmes de calcul efficaces.

iii) le problème fondamental qui justifie la recherche d'algorithmes spécifiques est le calcul de la constante de normalisation. Nous verrons dans la suite que les problèmes posés par ce calcul sont différents suivant la nature du réseau : ouvert, fermé ou mixte.

Il est bien évident que malgré les extensions qui sont apportées par rapport au théorème de Jackson, la généralité des réseaux de type BCMP est toute relative. Notons par exemple :

- pour des stations à file PAPS la distribution des temps de service doit être exponentielle.

- Toujours dans ce cas, le taux de service doit être identique pour chaque classe de clients.

- Les files sont à capacité illimitée.
- Aucun mécanisme de synchronisation n'est disponible.
- On ne peut pas définir de priorités entre classes de clients ...

Il est cependant deux applications importantes du théorème, qui ne sont pas immédiatement évidentes :

i) transitions non instantanées en intercallant des stations de type 4 (délai pur).

ii) transitions définissant une chaîne de Markov d'ordre supérieur à 1 en jouant sur les changements de classe (cf. § IV).

III - ALGORITHME DE CALCUL

Nous présentons dans cette section les algorithmes de calcul de la constante de normalisation du réseau et des grandeurs élémentaires classiques :

- taux d'utilisation,
- nombre moyen de clients,
- débits etc...,

pour chaque station et chaque classe de clients.

Historiquement, les premiers algorithmes efficaces sont dûs à Buzen [Buz73] et Moore [Moo72] et sont relatifs à des réseaux de type Jackson fermés. Williams et Bhandiwad [WiB74] ont présenté des extensions des algorithmes de Buzen pour plusieurs classes de clients en utilisant la notion de fonctions auxiliaires. Reiser et Kobayashi [ReK75, ReK76] introduisent leurs algorithmes au moyen des fonctions génératrices et des produits de convolution, et généralisent alors largement les algorithmes disponibles (cf. aussi plus récemment [BaB77, KrT77A]).

Notre démarche vise à étudier dans la mesure du possible tous les cas prévus par le théorème BCMP, et nous nous attachons essentiellement à présenter un ensemble cohérent d'algorithmes, en indiquant, à la suite de notre expérience, les points où des difficultés d'implémentation peuvent intervenir, et ce qui en pratique nous paraît réalisable (au sens de raisonnablement efficace). Nous ne négligeons pas en particulier le calcul des grandeurs élémentaires, ni les problèmes posés par les réseaux ouverts ou mixtes. Nous indiquons d'autre part un certain nombre de particularités qui conduisent à des calculs plus rapides.

Par rapport aux travaux de Reiser [Rei76] des compléments et extensions ont été introduits, dont :

. Pour les réseaux ouverts ou mixtes, et dans certains cas particuliers où la stabilité du réseau peut être déduite simplement des données, nous indiquons les formules et algorithmes permettant d'obtenir les grandeurs élémentaires relatives aux stations.

. Dans le cas de réseaux fermés et dans le cas où les hypothèses théoriques le permettent, nous autorisons le taux de service d'une station à dépendre du nombre instantané de clients par classe dans la station.

. Dans tous les cas les grandeurs élémentaires sont calculées pour chaque classe de clients.

. Les algorithmes présentés ne sont pas restreints à des réseaux sans communication entre classes (sous-chainés réduites à une classe). Nous précisons donc quand cela est utile la liaison entre résultats portant sur les sous-chainés et résultats portant sur les classes de clients.

. Nous indiquons une méthode de calcul de la constante de normalisation de réseaux ouverts dans le cas où le taux d'arrivée des processus d'entrée dépend de l'état du réseau.

Dans la suite, nous étudions successivement les algorithmes ou les formules relatives à des réseaux fermés, ouverts puis mixtes qui sont implantés dans QNAP. Pour chacun de ces cas nous considérons d'abord le calcul de la constante de normalisation, puis celui des grandeurs élémentaires classiques. Enfin, un paragraphe est consacré à des généralisations qui n'ont pas donné lieu, pour QNAP, à une réalisation pratique à l'heure actuelle.

III.1 - Réseaux fermés

III.1.1 - Calcul de la constante de normalisation

Un réseau fermé est tel que le nombre de clients présents à chaque instant dans le réseau est constant. D'autre part comme il n'y a pas par définition de communication entre sous-chainés, le nombre de clients dans chaque sous-chaine reste constant.

Soit $\bar{N}_m$ le nombre de clients dans la sous-chaine S_m . Un état E du réseau est "possible" si et seulement si :

$$\forall m \sum_{i=1}^I \sum_{r \in S_m} n_{ir} = \bar{N}_m$$

Nous noterons $\mathcal{E}$ l'ensemble des états du réseau. La constante de normalisation du réseau sera donc définie par :

$$C = \sum_{E \in \mathcal{E}} f_1(N_1) f_2(N_2) \dots f_I(N_I)$$

Soit

$$C = \sum_{E \in \mathcal{E}} \prod_{i=1}^I n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} C_{ir}(n_{ir}) \left(\frac{e_{ir}}{u_{ir}^0} \right)^{n_{ir}}$$

Nous poserons $x_{ir} = \frac{e_{ir}}{u_{ir}^0}$, quantité communément appelée intensité de trafic

Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_M)$ un vecteur de M variables auxiliaires, la variable X_m étant attachée à la sous-chaine S_m , et $g_i(X_1, X_2, \dots, X_M)$ la série formelle multivariable définie par :

$$g_i(X_1, X_2, \dots, X_M) = \sum_{n_{i1}=0}^{\infty} \dots \sum_{n_{iR}=0}^{\infty} n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} C_{ir}(n_{ir}) x_{ir}^{n_{ir}} X_m^{n_{ir}}$$

$r \in S_m$

Pour simplifier l'écriture les sommes $\sum_{n_{i1}=0}^{\infty} \dots \sum_{n_{iR}=0}^{\infty}$ seront notées $\sum_{n_i \geq 0}$.

Soit $g(X_1, X_2, \dots, X_M)$ la série formelle définie par :

$$\begin{aligned} g(X_1, X_2, \dots, X_M) &= \prod_{i=1}^I g_i(X_1, X_2, \dots, X_M) \\ &= \prod_{i=1}^I \sum_{n_i \geq 0} n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} C_{ir}(n_{ir}) x_{ir}^{n_{ir}} X_m^{n_{ir}} \\ &= \sum_{n_1 \geq 0} \dots \sum_{n_I \geq 0} \prod_{i=1}^I n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} C_{ir}(n_{ir}) x_{ir}^{n_{ir}} X_m^{n_{ir}} \\ &= \sum_{n_1 \geq 0} \dots \sum_{n_I \geq 0} \left(\prod_{m=1}^M X_m^{\sum_{i=1}^I \sum_{r \in S_m} n_{ir}} \right) \prod_{i=1}^I n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} C_{ir}(n_{ir}) x_{ir}^{n_{ir}} \end{aligned}$$

Il est donc clair que la constante de normalisation C est le coefficient du monôme $X_1^{\bar{N}_1} X_2^{\bar{N}_2} \dots X_M^{\bar{N}_M}$ dans $g(X_1, X_2, \dots, X_M)$.

Ce coefficient ainsi que ceux correspondant aux monômes de degré inférieur est obtenu en effectuant successivement des produits de convolution de façon très classique sur les polynômes égaux aux sommes partielles des g_i de degré inférieur ou égal à $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \dots, \bar{N}_M)$. Il est donc d'autre part nécessaire de calculer pour chaque série g_i les coefficients de $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_M^{n_M}$ pour $0 \leq n_1 \leq \bar{N}_1, \dots,$

$0 \leq n_M \leq \bar{N}_M$ à partir des termes de la forme $n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} C_{ir}(n_{ir}) x_{ir}^{n_{ir}}$.

Donc les deux problèmes essentiels à résoudre sont :

- Calcul des coefficients des monômes $X_1^{n_1} \dots X_M^{n_M}$
- produit de convolution (noté *)

Notations :

$$. N_r^* = \bar{N}_m \text{ si } r \in S_m \text{ et } \bar{n}_{im} = \sum_{r \in S_m} n_{ir}$$

$$. H_j(n_{j1}, n_{j2}, \dots, n_{jR}) = n_j! B_n(n_j) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{jr}!} C_{jr}(n_{jr}) x_{jr}^{n_{jr}}$$

$H_j[0 : N_1^*, \dots, 0 : N_R^*]$ matrice associée à la station j dont les éléments sont les $H_j(n_{j1}, \dots, n_{jR})$

. $F_j[0 : \bar{N}_1, \dots, 0 : \bar{N}_M]$ matrice complémentaire à la station j dont les éléments sont les coefficients des monômes $X_1^{n_1} \dots X_M^{n_M}$ dans le produit $\prod_{i=1, i \neq j}^I g_i(X_1, X_2, \dots, X_M)$

. $G[0 : \bar{N}_1, \dots, 0 : \bar{N}_M]$ matrice des constantes de normalisation

. $K_j[0 : \bar{N}_1, \dots, 0 : \bar{N}_M]$ matrice des coefficients des monômes $X_1^{n_1} \dots X_M^{n_M}$ dans $g_j(X_1, X_2, \dots, X_M)$

. Dans la suite, nous supposerons que les éléments de ces matrices sont initialisés à 0.

. On notera que pour tout j $G = F_j * K_j$.

. Pour le calcul des grandeurs élémentaires telles que :

- taux d'utilisation,
- nombre moyen de clients dans une station,

il est nécessaire de conserver, si l'on veut éviter des calculs redondants, les matrices F_j et G , et l'une des matrices H_j ou K_j .

III.1.1.1 - Calcul des matrices H_j et K_j

Le calcul est basé sur la remarque suivante :

$$H_j(n_{j1}, \dots, n_{jR}) = \frac{1}{b_j(n_j)} \sum_{\substack{r=1 \\ n_{jr} > 0}}^R \frac{x_{jr}}{c_{jr}(n_{jr})} H_j(n_{j1}, \dots, n_{jr-1}, \dots, n_{jR})$$

D'autre part :

$$K_j(\bar{n}_{j1}, \dots, \bar{n}_{jM}) = \sum_{\substack{\sum_{jr} \bar{n}_{jr} = \bar{n}_1 \\ r \in S_1}} \dots \sum_{\substack{\sum_{jr} \bar{n}_{jr} = \bar{n}_M \\ r \in S_M}} H_j(n_{j1}, \dots, n_{jR})$$

On notera qu'il est inutile de calculer un terme $H_j(n_{j1}, \dots, n_{jR})$ tel qu'il existe m tel que $\sum_{r \in S_m} n_{jr} > \bar{N}_m$.

D'où l'algorithme :

procédure assgen (H, K, j)

$H(0, \dots, 0) := 1.0$; $K(0, \dots, 0) := 1.0$;

pour n_1 de 1 à N_1^* faire

pour n_2 de 0 à N_2^* faire

$\vdots$

pour n_R de 0 à N_R^* faire

pour m de 1 à M faire

$\bar{n}_m := \sum_{r \in S_m} n_r$; $n := \sum_{m=1}^M \bar{n}_m$;

si $\bar{n}_m > \bar{N}_m$ alors aller en eti fsi

fait ;

$t := 0$;

pour r de 1 à R faire

si $n_r \neq 0$ alors

$t := t + \frac{x_{jr}}{c_{jr}(n_r)} H(n_1, \dots, n_{r-1}, \dots, n_R)$

fsi

fait ;

$H(n_1, \dots, n_R) := \frac{t}{b_j(n)}$

```

      K( $\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_M$ ) := K( $\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_M$ ) + H( $n_1, \dots, n_R$ )
eti ; fait ;
      :
      fait
fin ;

```

Le calcul de H_j nécessite au plus :

$R(N_1^* + 1) \dots (N_R^* + 1)$ additions
 $(R+1)(N_1^* + 1) \dots (N_R^* + 1)$ multiplications
 $R(N_1^* + 1) \dots (N_R^* + 1)$ divisions

Le calcul de K_j $R(N_1^* + 1) \dots (N_R^* + 1)$ additions

III.1.1.2 - Calcul du produit $G^* K_j$

Il s'agit d'un produit de convolution discret :

$$G^* K_j(n_1, n_2, \dots, n_M) = \sum_{0 \leq k_1 \leq n_1} \dots \sum_{0 \leq k_M \leq n_M} G(k_1, \dots, k_M) K_j(n_1 - k_1, \dots, n_M - k_M)$$

nous noterons la symétrie de l'expression de droite.

```

procédure convgen (G, K)
  pour  $n_1$  de  $\bar{N}_1$  à 0 pas -1 faire
    :
    :
  pour  $n_M$  de  $\bar{N}_M$  à 0 pas -1 faire
    pour  $k_1$  de 0 à  $n_1$  faire
      :
      :
    pour  $k_M$  de 0 à  $n_M$  faire
       $G(n_1, \dots, n_M) := G(n_1, \dots, n_M) + G(k_1, \dots, k_M) K(n_1 - k_1, \dots, n_M - k_M)$ 
      fait ;
    fait
  fait ;
  :
  fait
fin ;

```

Ce calcul nécessite :

$$\prod_{m=1}^M \frac{(\bar{N}_m + 2)(\bar{N}_m + 1)}{2} \quad \text{additions et multiplications}$$

III.1.1.3 - Calcul de la matrice K_j dans le cas de dépendance globale

Ce cas est relatif aux stations dont le taux de service ne dépend pas du nombre de clients par classe. Nous avons alors :

$$g_j(X_1, X_2, \dots, X_M) = \sum_{n_j \geq 0} B_j(n_j) n_j! \prod_{r=1}^R \frac{x_{jr}^{n_{jr}} x_m^{n_{jr}}}{n_{jr}!}$$

avec $r \in S_m$

d'où :

$$g_j(X_1, X_2, \dots, X_M) = \sum_{n_j \geq 0} B_j(n_j) n_j! \prod_{m=1}^M \frac{(\bar{x}_{jm} X_m)^{\bar{n}_{jm}}}{\bar{n}_{jm}}$$

où

$$\bar{x}_{jm} = \sum_{r \in S_m} x_{jr} \quad \text{et} \quad \bar{n}_{jm} = \sum_{r \in S_m} n_{jr}$$

et

$$g_j(X_1, X_2, \dots, X_M) = \sum_{n_j=0}^{\infty} B_j(n_j) (\bar{x}_{j1} X_1 + \dots + \bar{x}_{jn} X_M)^{n_j}$$

Nous montrons plus loin que la connaissance des matrices H_j est inutile dans le cas de station dépendance globale, pour le calcul des grandeurs élémentaires citées plus haut. Le calcul de K_j est effectué par l'intermédiaire de l'algorithme suivant :

procédure assdgl (K,j)

$K(0, \dots, 0) := 1.0 ;$

pour n_1 de 1 à $\bar{N}_1$ faire

pour n_2 de 0 à $\bar{N}_2$ faire

$\vdots$

pour n_M de 0 à $\bar{N}_M$ faire

$n := 0 ;$

pour m de 1 à M faire

$n := n + n_m ;$

si $n_m \neq 0$ alors

$K(n_1, \dots, n_M) := K(n_1, \dots, n_M) + \bar{x}_{jm} K(n_1, \dots, n_{m-1}, \dots, n_M)$

fsi

fait

$K(n_1, \dots, n_M) := \frac{1}{b_j(n)} K(n_1, \dots, n_M)$

fait ;

$\vdots$

fait

fin ;

III.1.1.4 - Calcul du produit de convolution dans le cas d'une station à taux fixe.

Dans ce cas le taux de service est constant quelque soit l'état de la file d'où :

$$g_j(X_1, X_2, \dots, X_M) = \sum_{n_j=0}^{\infty} (\bar{x}_{j1}X_1 + \dots + \bar{x}_{jM}X_M)^{n_j}$$

Soit formellement :

$$g_j(X_1, X_2, \dots, X_M) = \frac{1}{1 - (\bar{x}_{j1}X_1 + \dots + \bar{x}_{jM}X_M)}$$

notons $\bar{g}_{j-1}(X_1, X_2, \dots, X_M)$ la série suivante :

$$\bar{g}_{j-1}(X_1, \dots, X_M) = \prod_{i=1}^{j-1} g_i(X_1, \dots, X_M)$$

$$\bar{g}_j(X_1, \dots, X_M) = \frac{\bar{g}_{j-1}(X_1, \dots, X_M)}{1 - (\bar{x}_{j1}X_1 + \dots + \bar{x}_{jM}X_M)}$$

d'où

$$\bar{g}_j(X_1, \dots, X_M) = \bar{g}_{j-1}(X_1, \dots, X_M) + \bar{g}_j(X_1, \dots, X_M)(\bar{x}_{j1}X_1 + \dots + \bar{x}_{jM}X_M)$$

donc en identifiant les monômes $X_1^{\bar{n}_{j1}} \dots X_M^{\bar{n}_{jM}}$ nous déduisons un algorithme dû à Williams et Bhandiwad [WiB74] qui généralise celui de Buzen [Buz73]. Soit :

```

procédure convtfx (G, j)
  pour n1 de 0 à  $\bar{N}_1$  faire
    :
    :
  pour nM de 0 à  $\bar{N}_M$  faire
    pour m de 1 à M faire
      si nm ≠ 0 alors
        G(n1, n2, ..., nM) := G(n1, n2, ..., nM) +  $\bar{x}_{jm}$  G(n1, ..., nm-1, ..., nM)
      fsi
    fait
  fait ;
  :
  :
  fait
fin ;

```

Le nombre d'opérations est $M(\bar{N}_1 + 1) \dots (\bar{N}_M + 1)$ additions et multiplications.

Nous montrerons plus loin que le calcul des grandeurs élémentaires ne nécessite pas d'autre connaissance que la matrice G.

III.1.1.5 - Stations à serveur infini

Nous avons $g_j(X_1, X_2, \dots, X_M) = \sum_{n_j \geq 0} \prod_{r=1}^R \frac{(x_{jr} X_m)^{n_{jr}}}{n_{jr}!}$ si $r \in S_m$

$$\text{Soit } g_j(X_1, X_2, \dots, X_M) = \exp(\bar{x}_{j1} X_1 + \dots + \bar{x}_{jM} X_M)$$

Supposons que le réseau considéré comprenne i_0 stations à serveur infini, numérotées de 1 à i_0 pour simplifier. Alors :

$$\bar{g}_{i_0}(X_1, X_2, \dots, X_M) = \exp \left[\sum_{i=1}^{i_0} (\bar{x}_{i1} X_1 + \dots + \bar{x}_{iM} X_M) \right]$$

Nous avons donc intérêt, pour ce qui concerne le calcul de la constante de normalisation, à regrouper ces stations en une seule station équivalente telle que les intensités de trafic résultantes soient :

$$\forall m \quad \bar{x}_{om} = \sum_{i=1}^{i_0} \bar{x}_{im}$$

et à initialiser la matrice G à l'aide des coefficients utiles de $\bar{g}_{i_0}$, soit :

$$G(n_1, \dots, n_M) = \prod_{m=1}^M \frac{\bar{x}_{om}^{n_m}}{n_m!} \quad \text{pour } 0 \leq n_1 \leq \bar{N}_1 \dots 0 \leq n_M \leq \bar{N}_M$$

or :

$$G(n_1, \dots, n_M) = \prod_{m=1}^M G(0, \dots, n_m, \dots, 0) = \prod_{m=1}^M \frac{\bar{x}_{om}^{n_m}}{n_m!} G(0, \dots, n_m-1, \dots, 0)$$

et $G(0, \dots, 0) = 1$

procédure assdel (G, j)

$G(0, \dots, 0) := 1.0$;

pour m de 1 à M faire

pour n_m de 1 à $\bar{N}_m$ faire

$$G(0, \dots, n_m, \dots, 0) := \frac{\bar{x}_{om}}{n_m} G(0, \dots, n_m-1, \dots, 0)$$

fait ;

fait ;

pour n_1 de 0 à $\bar{N}_1$ faire

$\vdots$

pour n_M de 0 à $\bar{N}_M$ faire

$$G(n_1, \dots, n_M) := \prod_{m=1}^M G(0, \dots, n_m, \dots, 0)$$

fait ;

$\vdots$

fait

fin ;

Nous procédons bien sûr de même pour le calcul des matrices K_j . Le nombre d'opérations nécessaires pour chaque calcul est :

$\bar{N}_1 \times \dots \times \bar{N}_M$ divisions

$M(\bar{N}_1 + 1) \dots (\bar{N}_M + 1) + \bar{N}_1 \times \dots \times \bar{N}_M$ multiplications.

III.1.1.6 - Algorithme général de calcul de la constante de normalisation

Des paragraphes précédants nous pouvons déduire un schéma de calcul de la matrice des constantes de normalisation et des matrices associées à chaque station :

```

si  $i_0 \neq 0$  alors assdel (G,0) ;
      pour  $i$  de 1 à  $i_0$  faire
        assdel ( $K_i, i$ )
      fait

fsi ;
pour  $i$  de  $i_0 + 1$  à I faire
  si  $i$  "à taux fixes" alors convtfx (G,i)
    sinon si  $i$  "à dépendance globale" alors assdgl( $K_i, i$ )
      sinon assgen( $H_i, K_i, i$ )
    fsi ;
  convgen (G,  $K_i$ )
fsi ;
fait ;

```

Rappelons que dans le cas de stations à dépendance globale ou à serveur infini, il n'est pas nécessaire de calculer la matrice H_i , mais qu'il est utile de conserver la matrice K_i . Dans le cas d'une station "générale" c'est la matrice H_i qu'il faut préserver pour le calcul des grandeurs élémentaires. Dans le cas d'une station à taux fixes ces deux matrices ne sont pas nécessaires.

Nous verrons au paragraphe suivant que sauf dans le cas des stations à taux fixe la matrice complémentaire est nécessaire. Cette matrice peut être obtenue simplement au cours du calcul de la constante de normalisation en omettant le produit de convolution pour la station correspondante. Ce processus nécessite

autant de matrices que de stations non à taux fixe. Une idée intéressante serait de procéder à une déconvolution à partir de la matrice G et des matrices $-K_j$ par la procédure CONVGEN. Ce processus est malheureusement entaché d'une instabilité numérique fréquente qui nous a fait préférer la première solution pour QNAP. Le dernier type d'implémentation peut cependant se révéler nécessaire si les contingences de place mémoire sont prépondérantes.

Nous noterons que comme sous-produit direct de ces calculs nous pouvons déduire les probabilités marginales d'état d'une station à partir des matrices associées et complémentaires dans le cas de stations à serveur infini, à dépendance globale ou générale. Cependant on s'intéresse le plus souvent à des grandeurs plus globales que nous étudions dans le paragraphe suivant.

Une autre remarque intéressante est de noter que le calcul de la constante de normalisation pour $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_M$ clients nous permet de déduire directement la constante de normalisation pour toutes valeurs $0 \leq \bar{n}_1 \leq \bar{N}_1, \dots, 0 \leq \bar{n}_M \leq \bar{N}_M$.

III.1.2 - Grandeurs élémentaires

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au calcul des grandeurs, définies pour chaque station, chaque classe ou globalement, suivantes :

- Nombre moyen de clients dans une station (lq_{ir}, lgq_i),
- Taux d'utilisation ($util_{ir}, util_i$),
- débit moyen (deb_{ir}, deb_i).

Notons que ces quantités sont additives, et que nous avons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} lgq_i &= \sum_{r=1}^R lgq_{ir} \\ util_i &= \sum_{r=1}^R util_{ir} \\ deb_i &= \sum_{r=1}^R deb_{ir} \end{aligned}$$

III.1.2.1 - Cas général

Toutes les grandeurs citées plus haut se déduisent des probabilités marginales suivantes :

$p_i(n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iR}) = \text{Prob} \{ n_{i1} \text{ clients de classe 1, } \dots, n_{iR} \text{ clients de classe R dans la station i} \}$

nous avons :

$$p_i(n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iR}) = \frac{1}{C} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

$$\text{si } \forall m \quad \bar{n}_{im} = \sum_{r \in S_m} n_{ir} \leq \bar{N}_m$$

$$p_i(n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iR}) = 0 \quad \text{sinon .}$$

Définissons aussi les probabilités suivantes :

$p_i(\bar{n}_{i1}, \dots, \bar{n}_{iM}) = \text{Prob} \{ \bar{n}_{i1} \text{ clients de sous-chaine } S_1, \dots, \bar{n}_{iM} \text{ clients de sous-chaine } S_M, \text{ dans la station i} \}$

$$p_i(\bar{n}_{i1}, \dots, \bar{n}_{iM}) = \frac{1}{C} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) K_j(\bar{n}_{i1}, \dots, \bar{n}_{iM})$$

$$\text{si } \forall m \quad \bar{n}_{im} \leq \bar{N}_m$$

$$= 0 \quad \text{sinon .}$$

Notons que :

$$\begin{aligned} p_i(\bar{n}_{i1}, \dots, \bar{n}_{iM}) &= \sum_{\substack{\sum_{r \in S_1} n_{ir} = \bar{n}_{i1}}} \dots \sum_{\substack{\sum_{r \in S_M} n_{ir} = \bar{n}_{iM}}} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \\ &= \frac{1}{C} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \sum_{\substack{\sum_{r \in S_1} n_{ir} = \bar{n}_{i1}}} \dots \sum_{\substack{\sum_{r \in S_M} n_{ir} = \bar{n}_{iM}}} H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \end{aligned}$$

i) taux d'utilisation

Pour des stations de type 1, 2 ou 3, nous définirons le taux d'utilisation pour la classe r comme la proportion de temps d'occupation du serveur par un client de classe r . Si la station i est dans l'état $N_i = (n_{i1}, \dots, n_{iR})$ la probabilité qu'un client de classe r soit en cours de service est :

$$\frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \quad (\text{cf. annexe II-1})$$

Si un client au moins est en cours de service.

D'où :

$$\text{util}_{ir} = \sum_{\mathbf{n} \in \{0, \dots, 0\}} \frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

Remarquons que util_i est la probabilité que la station i soit occupée, d'où :

$$\text{util}_i = 1 - \frac{1}{C} F_i(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_M)$$

Dans le cas d'une station à serveur infini, le taux d'utilisation pour une classe r est défini usuellement comme étant le nombre moyen de serveurs occupés par des clients de classe r . Cette définition coïncide avec celle du nombre de moyen de clients de classe r dans la station et doit être utilisée pour vérifier les équations de Chang-Lavenberg [ChL72].

Cependant, elle ne permet pas d'obtenir la probabilité d'occupation de la station (vue comme un tout). Nous sommes alors amenés à définir le taux d'utilisation d'une station serveur infini i pour une classe r comme la proportion de service accordée à cette classe. Dans ce cas l'expression ci-dessus convient et la quantité :

$$\text{util}_i = \sum_{r=1}^R \text{util}_{ir}$$

donne la probabilité que la station i soit occupée. D'autre part nous avons vu qu'une station serveur infini est "équivalente" à une station PP avec un taux de service de la forme $u_{ir} = u_{ir}^0 n_i$ (le terme "équivalente" est pris dans le sens d'une identité des distributions du nombre de clients dans la station). Le taux d'utilisation de la station SI calculé par la formule (2) est alors le même que pour la station PP équivalente.

ii) nombre moyen de clients

Soit L_{ir} la variable aléatoire dont une réalisation est le nombre de clients de classe r dans la station i . Nous avons :

$$\lgq_{ir} = E(L_{ir}) = \sum_{n_{ir}=0}^{N^*} n_{ir} p_{ir}(n_{ir})$$

où $p_{ir}(n_{ir}) = \text{Prob} \{ n_{ir} \text{ clients de classe } r \text{ dans la station } i \}$.

De façon évidente nous avons :

$$p_{ir}(n_{ir}) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^R \sum_{n_{ir}=0}^{\infty} p_{is}(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

D'où :

$$lq_{ir} = \sum_{n_{i1}=0}^{\infty} \dots \sum_{n_{iR}=0}^{\infty} n_{ir} p_{ir}(n_{i1}, \dots, n_{iR}) = \sum_{\mathcal{C}} n_{ir} p_{ir}(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

iii) débit moyen

Pour une station de type 1, 2 ou 3 un client de classe r est en cours de service si la station i est dans l'état $N_i = (n_{i1}, \dots, n_{iR})$ avec la probabilité :

$$\frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

Le client est servi suivant le taux $u_{ir} = u_{ir}^0 b_i(n_i) c_{ir}(n_{ir})$.

D'où le débit :

$$\begin{aligned} deb_{ir} &= \sum_{\mathcal{C}^+} u_{ir}^0 b_i(n_i) c_{ir}(n_{ir}) \frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \quad (3) \\ &= \sum_{\mathcal{C}^+} u_{ir}^0 b_i(n_i) c_{ir}(n_{ir}) \frac{n_{ir}}{n_i} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \\ &\quad \text{avec } \mathcal{C}^+ = \mathcal{C} - \{0, \dots, 0\} \end{aligned}$$

si $r \in S_m$ alors :

$$deb_{ir} = \frac{e_{ir}}{C} \sum_{\bar{n}_{i1}=0}^{\bar{N}_1} \dots \sum_{\bar{n}_{im}=1}^{\bar{N}_m} \dots \sum_{\bar{n}_{iM}=0}^{\bar{N}_M} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) H_i(n_{i1}, \dots, n_{ir-1}, \dots, n_{iR})$$

d'où :

$$deb_{ir} = \frac{e_{ir}}{C} G(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_m - 1, \dots, \bar{N}_M)$$

Dans le cas d'une station de type 4 et si cette station est dans l'état

$N_i = (n_{i1}, \dots, n_{iR})$ il y a n_{ir} serveurs dévolus à des clients de classe r . Ces clients sont servis avec le taux u_{ir}^0 . D'où le débit pour la classe r :

$$deb_{ir} = \sum_{\mathcal{C}^+} u_{ir}^0 n_{ir} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

ce qui, formellement est un cas particulier de l'expression (3) lorsque le taux de service est $u_{ir}^0 n_{ir}$ donc dans tous les cas, nous aurons :

$$\text{deb}_{ir} = \frac{e_{ir}}{C} G(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_m - 1, \dots, \bar{N}_M)$$

L'algorithme de calcul du taux d'utilisation et du nombre moyen de clients pour une station i sera donc :

```

procédure utilgen (F,H)
    util := 0 ; lgq := 0 ;
    pour r de 1 à R faire
        utilr := 0 ; lgqr := 0
    fait ;
    pour n1 de 0 à N1* faire
        :
    pour nR de 0 à NR* faire
        n := 0
        pour m de 1 à M faire
             $\bar{n}_m := \sum_{r \in S_m} n_r$  ; n := n +  $\bar{n}_m$  ;
            si  $\bar{n}_m > \bar{N}_m$  alors aller en et eti fsi
        fait ;
        t := F(N1 -  $\bar{n}_1$ , ..., NM -  $\bar{n}_M) H (n1, ..., nR) ;
        pour r de 1 à R faire
            si nr ≠ 0 alors
                utilr := utilr +  $\frac{n_r}{n}$  t ;
                lgqr := lgqr + nr t
            fsi
        fait ;
    eti : fait ;
        :
    fait ;
    pour r de 1 à R faire
        utilr := utilr/C ; util := util + utilr ;
        lgqr := lgqr/C ; lgq = lgq + lgqr
    fait ;
fin$ 
```

Dans les cas particuliers que nous avons notés pour le calcul de la constante de normalisation certaines simplifications peuvent intervenir.

III.1.2.2 - Cas des stations à dépendance globale

Nous avons noté que dans ce cas, le calcul de la constante de normalisation pouvait être mené en utilisant directement les intensités de trafic cumulées au niveau des sous-chaines :

$$\bar{x}_{im} = \sum_{r \in S_m} x_{ir}$$

Nous pouvons calculer le taux d'utilisation et le nombre moyen de clients pour une sous-chaine m dans une station i par un algorithme identique au précédent mais simplifié. Nous nous proposons de montrer les résultats, assez intuitifs, suivants :

$$\begin{aligned} \text{util}_{ir} &= \frac{x_{ir}}{\bar{x}_{im}} \text{util}_{im} \\ \lgq_{ir} &= \frac{x_{ir}}{\bar{x}_{im}} \lgq_{im} \end{aligned}$$

i) taux d'utilisation :

$$\begin{aligned} \text{util}_{ir} &= \sum_{\delta^+} \frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{ir}) = \sum_{\delta^+} \frac{n_{ir}}{n_i} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \\ &= \frac{1}{C} \sum_{\bar{n}_{i1}=0}^{\bar{N}_1} \dots \sum_{\bar{n}_{im}=1}^{\bar{N}_m} \dots \sum_{\bar{n}_{iM}=0}^{\bar{N}_M} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \sum_{s \in S_1} \dots \sum_{s \in S_M} \frac{n_{ir}}{n_i} H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \\ &= \frac{x_{ir}}{C} \sum_{\bar{n}_{i1}=0}^{\bar{N}_1} \dots \sum_{\bar{n}_{im}=1}^{\bar{N}_m} \dots \sum_{\bar{n}_{iM}=0}^{\bar{N}_M} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \sum_{s \in S_1} \dots \sum_{s \in S_M} \frac{1}{b_i(n_i)} H_i(n_{i1}, \dots, n_{ir}-1, \dots, n_{iR}) \\ &= \frac{x_{ir}}{C} \sum_{\bar{n}_{i1}=0}^{\bar{N}_1} \dots \sum_{\bar{n}_{im}=1}^{\bar{N}_m} \dots \sum_{\bar{n}_{iM}=0}^{\bar{N}_M} \frac{1}{b_i(n_i)} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) K_i(\bar{n}_{i1}, \dots, \bar{n}_{im}-1, \dots, \bar{n}_{iM}) \\ &= \frac{x_{ir}}{\bar{x}_{im}} \text{util}_{im} \end{aligned}$$

ii) nombre moyen de clients :

$$\lgq_{ir} = \sum_{\delta^+} n_{ir} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) = \sum_{\delta^+} n_{ir} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_{ir}}{C} \sum_{\bar{n}_{i1}=0}^{\bar{N}_1} \dots \sum_{\bar{n}_{im}=1}^{\bar{N}_m} \dots \sum_{\bar{n}_{iM}=0}^{\bar{N}_M} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \sum_{s \in S_1} \dots \sum_{s \in S_M} \frac{n_i}{b_i(n_i)} R_i(n_{i1}, \dots, \\
&\quad n_{ir-1}, \dots, n_{iR}) \\
&= \frac{x_{ir}}{C} \sum_{\bar{n}_{i1}=0}^{\bar{N}_1} \dots \sum_{\bar{n}_{im}=1}^{\bar{N}_m} \dots \sum_{\bar{n}_{iM}=0}^{\bar{N}_M} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \frac{n_i}{b_i(n_i)} K_i(\bar{n}_{i1}, \dots, \bar{n}_{im-1}, \dots, \bar{n}_{iM}) \\
&= \frac{x_{ir}}{C} \lg q_{im} .
\end{aligned}$$

Ces résultats ont une importance pratique non négligeable, en effet l'effort de calcul devra dans ce cas porter sur les sous-chainés et non sur les classes de clients, les premières pouvant être en nombre beaucoup plus faible que les dernières.

L'algorithme de calcul est le suivant :

```

procédure utilgdg (F,K,i)
  pour m de 1 à M faire
    utilm := 0 ; lgqm := 0
  fait ;
  pour n1 de 0 à N1 faire
    :
  pour nM de 0 à NM faire
    n := 0 ;
    pour m de 1 à M faire
      n := n + nm
    fait ;
    t := F(N1 - n1, ..., NM - nM) K(n1, ..., nM) ;
    pour m de 1 à M faire
      si nm ≠ 0 alors
        utilm := utilm +  $\frac{n_m}{n}$  t ;
        lgqm := lgqm + nm t
      fsi
    fait
  fait ;
  :

```

```

fait ;
util := 0 ; lgq := 0 ;
pour r de 1 à R faire
    si r  $\in$  Sm alors
        utilr :=  $\frac{x_{ir}}{x_{im}}$  utilm ; util := util + utilr ;
        lgqr :=  $\frac{x_{ir}}{x_{im}}$  lgqm ; lgq := lgq + lgqr
    fsi
fait ;
fin

```

III.1.2.3 -- Cas des stations à taux constant

Ce cas est un cas particulier du précédent. Nous posons donc le problème du calcul des taux d'utilisation et du nombre moyen de clients au niveau des sous-chaines. Dans ce cas nous supposons non connues les matrices H_i , F_i et K_i .

i) taux d'utilisation

D'après le paragraphe précédant nous avons :

$$util_{im} = \frac{\bar{x}_{im}}{C} \sum_{\bar{n}_{i1}=0}^{\bar{N}_1} \dots \sum_{\bar{n}_{im}=1}^{\bar{N}_m} \dots \sum_{\bar{n}_{iM}=0}^{\bar{N}_M} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) K_i(\bar{n}_{i1}, \dots, \bar{n}_{im}-1, \dots, \bar{n}_{iM})$$

d'où

$$util_{im} = \frac{\bar{x}_{im}}{C} G(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_m - 1, \dots, \bar{N}_M)$$

ii) nombre moyen de clients

Soit $l_{im}(z_{im})$ la fonction génératrice associée aux probabilités suivantes :

$p_{im}(\bar{n}_{im}) = \text{Prob} [\bar{n}_{im} \text{ clients appartenant à la sous-chaine } m \text{ dans la station } i]$

soit $f_i(X_1, \dots, X_M) = \prod_{j \neq i} g_j(X_1, \dots, X_M)$

alors $l(z_{im})$ est le coefficient du monôme $X_1^{\bar{N}_1} \dots X_M^{\bar{N}_M}$ dans

$$\frac{1}{C} \frac{f_i(X_1, \dots, X_M)}{1 - (\bar{x}_{i1} X_1 + \dots + \bar{x}_{im} z_{im} X_m + \dots + \bar{x}_{iM} X_M)}$$

ce que nous noterons :

$$l_{im}(z_{im}) = \frac{1}{C} \left[\frac{f_i(X_1, \dots, X_M)}{1 - (\bar{x}_{i1}X_1 + \dots + \bar{x}_{im}z_{im}X_m + \dots + \bar{x}_{iM}X_M)} \right]_{\bar{N}_1 \dots \bar{N}_M}$$

or :

$$lgq_{im} = l'_{im}(1)$$

d'où

$$\begin{aligned} lgq_{im} &= \frac{1}{C} \left[\frac{f_i(X_1, \dots, X_M) \bar{x}_{im} X_m}{(1 - (\bar{x}_{i1}X_1 + \dots + \bar{x}_{iM}X_M))^2} \right]_{\bar{N}_1 \dots \bar{N}_M} \\ &= \frac{1}{C} \left[\frac{g(X_1, \dots, X_M) \bar{x}_{im} X_m}{1 - (\bar{x}_{i1}X_1 + \dots + \bar{x}_{iM}X_M)} \right]_{\bar{N}_1 \dots \bar{N}_M} \end{aligned}$$

donc si nous notons G_i la matrice obtenue par convolution de G en utilisant la procédure convtxf appliquée à la station i , nous aurons :

$$lgq_{im} = \frac{\bar{x}_{im}}{C} G_i(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_m - 1, \dots, \bar{N}_M)$$

III.1.2.4 - Nombre moyen de clients dans le cas d'une station à serveur infini

De même que précédemment nous avons :

$$l_{im}(z_{im}) = \frac{1}{C} [f_i(X_1, \dots, X_M) \exp(\bar{x}_{i1}X_1 + \dots + \bar{x}_{im}z_{im}X_m + \dots + \bar{x}_{iM}X_M)]_{\bar{N}_1 \dots \bar{N}_M}$$

d'où

$$lgq_{im} = \left(\frac{\partial l_{im}}{\partial z_{im}} \right)_{z_{im}=1} = \frac{1}{C} [f_i(X_1, \dots, X_M) \exp(\bar{x}_{i1}X_1 + \dots + \bar{x}_{iM}X_M) \bar{x}_{im} X_m]_{\bar{N}_1 \dots \bar{N}_M}$$

et

$$lgq_{im} = \frac{\bar{x}_{im}}{C} G(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_m - 1, \dots, \bar{N}_M)$$

III.1.3 - Grandeurs diverses

i) Temps de réponse moyen

A l'état stationnaire, nous utiliserons la formule de Little [Lit71] :

$$\text{resp}_{ir} = \frac{\text{lgq}_{ir}}{\text{deb}_{ir}} \quad \text{resp}_i = \frac{\text{lgq}_i}{\text{deb}_i}$$

ii) Temps moyen de service

Pour des stations de type 1, 2 ou 3 nous aurons :

$$\text{serv}_{ir} = \frac{\text{util}_{ir}}{\text{deb}_{ir}} \quad \text{serv}_i = \frac{\text{util}_i}{\text{deb}_i}$$

Dans le cas d'une station de type 4, le temps moyen de service est égal au temps de réponse (pas d'attente).

iii) Probabilités marginales

Nous avons noté que :

$$p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) = \frac{1}{C} F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

$$\text{avec } \bar{n}_{im} = \sum_{r \in S_m} n_{ir} .$$

- Dans le cas général (dépendance globale et dépendance par classe), nous disposons des matrices F_i et H_i et le calcul est peu coûteux.

- Dans le cas de dépendance globale ou de stations à serveur infini, il est nécessaire de calculer les éléments de la matrice H_i .

- Dans le cas de stations à taux fixe, nous ne disposons ni de la matrice H_i ni de la matrice F_i . La matrice H_i s'obtient en utilisant la procédure assgen (ou convtfx légèrement adaptée). La matrice F_i s'obtient par déconvolution en se rappelant que :

$$F_i(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) = G(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) - \sum_{\substack{m=1 \\ \bar{n}_{im} \neq \bar{N}_m}}^M \bar{x}_{im} G(\bar{N}_1 - \bar{n}_{i1}, \dots, \bar{N}_m - 1 - \bar{n}_{im}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM})$$

Le calcul est alors possible sans trop perdre des avantages notés dans les calculs relatifs aux stations à taux constant. Le problème concerne principalement la précision de calcul, assez médiocre (Nous avons obtenu dans un cas des valeurs négatives pour les probabilités de l'ordre de 10^{-6} et moins).

Ce calcul des probabilités marginales est intéressant par les grandeurs que nous pouvons en déduire, par exemple :

- Distribution du nombre total de clients dans une station (utilisée en modélisation hiérarchique, ou pour des modèles décomposables.

- Taux d'arrivées conditionnés par le nombre de clients dans une station (résolution approchée de modèles ne vérifiant pas les hypothèses BCMP).

- Variance de la distribution du nombre de clients dans une station.

III.1.4 - Problèmes d'implémentation

III.1.4.1 - Espace mémoire

En ce qui concerne la réalisation pratique des algorithmes que nous avons présentés divers choix sont possibles suivant les contingences de temps et/ou d'espace mémoire disponible. Le tableau ci-dessous indique la place nécessaire pour chaque étape de calcul (chaque étape partant sur une station).

type de station	Constante de normalisation	Grandeur élémentaire (*)
à taux fixe	$G(0:\bar{N}_1, \dots, 0:\bar{N}_M)$	$G(0:\bar{N}_1, \dots, 0:\bar{N}_M)$ $G_j(0:\bar{N}_1, \dots, 0:\bar{N}_M)$
à serveur infini ou à dépendance globale	$G(0:\bar{N}_1, \dots, 0:\bar{N}_M)$ $K_j(0:\bar{N}_1, \dots, 0:\bar{N}_M)$	$K_j(0:\bar{N}_1, \dots, 0:\bar{N}_M)$ $F_j(0:\bar{N}_1, \dots, 0:\bar{N}_M)$
à dépendance par classe (générale)	$G(0:\bar{N}_1, \dots, 0:\bar{N}_M)$ $H_j(0:\bar{N}_1^*, \dots, 0:\bar{N}_R^*)$	$H_j(0:\bar{N}_1^*, \dots, 0:\bar{N}_R^*)$ $F_j(0:\bar{N}_1, \dots, 0:\bar{N}_M)$

(*) non compris le calcul des probabilités marginales.

Donc en théorie nous pouvons nous contenter de ne conserver en mémoire qu'une zone de $\sum_{m=1}^M (\bar{N}_m + 1) + \sum_{r=1}^R (N_r^* + 1)$ mots (tout au moins en ce qui concerne les matrices de travail).

En pratique, une telle solution nécessite des écritures et lectures sur mémoire secondaire et/ou d'effectuer deux fois certains calculs (F_j et K_j ou H_j), ceci au préjudice du temps d'exécution.

III.1.4.2 - Contrôle des débordements

La constante de normalisation d'un réseau fermé est donc obtenue comme somme d'un nombre qui peut être grand de termes positifs. Nous concevons bien que des problèmes de débordement peuvent se poser.

Les causes de débordement sont liées aux valeurs de N_m ($m:1 \rightarrow M$) et des x_{ir} ($i:1 \rightarrow I$; $r:1 \rightarrow R$) en supposant que les u_{ir}^0 sont choisis de façon à n'avoir pas de problèmes avec les fonctions B_i et C_{ir} . Nous savons que les intensités de trafic x_{ir} sont, pour les sous-chaînes fermées, définies à une constante multiplicative près.

Le principe de contrôle des débordements consistera alors à déterminer un facteur a ($a < 1$ dans le cas de débordement vers le haut, $a > 1$ dans le cas de débordement vers le bas) tel que la constante de normalisation calculée avec les intensités de trafic ax_{ir} soit correctement évaluée. Notons cependant qu'il n'existe pas nécessairement de valeur de a prévenant à la fois un débordement vers le haut et vers le bas pour la matrice G (dans ce cas, il faudrait prévoir des coefficients différents suivant l'endroit où l'on se trouve dans G). Nous indiquons dans la suite des méthodes tendant à régler le problème dans la majorité des cas pratiques.

i) prévention des débordements hauts :

De façon évidente la constante de normalisation C est majorée par :

$$C_0 = \sum_{\substack{n_{ir} \geq 0 \\ \forall i \forall r}} \prod_{i=1}^I n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} C_{ir}(n_{ir}) x_{ir}^{n_{ir}}$$

$$= \prod_{i=1}^I \sum_{\substack{n_{ir} \geq 0 \\ \forall r}} n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{1}{n_{ir}!} C_{ir}(n_{ir}) x_{ir}^{n_{ir}}$$

En posant $B_i(n_i) = 1$ $n_i > \bar{N}_1 + \dots + \bar{N}_M = \bar{N}$ (nombre total de clients dans le réseau)
 $C_{ir}(n_{ir}) = 1$ pour $n_{ir} > N_r^*$

$$\begin{aligned} \text{Soit } b_i &= \max_{n_i \geq 0} [B_i(n_i)] \\ c_{ir} &= \max_{n_{ir} \geq 0} [C_{ir}(n_{ir})] \\ \bar{x}_i &= \sum_{r=1}^R x_{ir} \end{aligned}$$

Nous supposons que sauf pour les stations à serveur infini $\bar{x}_i < 1$

$$\text{alors : } C_0 \leq \prod_{i=1}^{i_0} \exp(\bar{x}_i) \prod_{i=i_0+1}^I b_i \prod_{r=1}^R c_{ir} \frac{1}{1 - \bar{x}_i} = C_1$$

Si C_1 est inférieur au maximum admissible (soit δ_+) alors la constante de normalisation le sera.

Sinon, il faudra choisir un coefficient multiplicatif a (< 1) des intensités de trafic tel que :

$$a \leq e^{\frac{\log \delta - \log C_1}{\bar{N}}}$$

ii) choix heuristique des intensités de trafic

Une solution heuristique proposée par Balbo et al. [BaB77] consiste à minimiser la distance des intensités de trafic par rapport à 1, la distance choisie étant la distance quadratique. Nous obtenons le coefficient multiplicateur suivant :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^R x_{ir}}{\sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^R x_{ir}^2}$$

Le défaut de cette méthode est d'être inefficace dans le cas où les intensités de trafic ont des ordres de grandeur très différents.

iii) contrôle "dynamique"

Le principe de la méthode est de tester un débordement éventuel des éléments de la matrice G (après une première initialisation des intensités de trafic par i) ou ii)) et si l'indice $(n_1, \dots, n_M)$ est le premier pour lequel

un débordement se produit, recommencer le calcul avec des intensités de trafic corrigées par un facteur $a(n_1, \dots, n_M)$ de façon à ce que $G(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_M)$ ne déborde pas.

Tout le problème est donc de calculer $a(n_1, \dots, n_M)$, ce qui dans notre cas a été résolu de façon parfaitement heuristique de la manière suivante :

Nous supposons que les éléments de G sont de la forme :

$$\begin{aligned} G(n_1, \dots, n_M) &= \alpha^{n_1 + \dots + n_M} \text{ dans le cas d'overflow } (\alpha > 0) \\ G(n_1, \dots, n_M) &= \beta^{-(n_1 + \dots + n_M)} \text{ dans le cas d'underflow } (\beta > 0) \end{aligned}$$

Si $G(n_1, \dots, n_M)$ est la première valeur en overflow par exemple nous aurons :

$$G(n_1, \dots, n_M) \approx \delta_+$$

donc $a(n_1, \dots, n_M)$ tel que :

$$\frac{\alpha^{\bar{N}+1}}{a(n_1, \dots, n_M)} < \delta_+$$

$$\left(\frac{1}{n_1 + \dots + n_M} - \frac{1}{\bar{N}+1} \right) \text{Log } \delta_+$$

et $a(n_1, \dots, n_M) > e$

L'avantage essentiel de cette méthode est de permettre le calcul de la constante de normalisation même si l'initialisation des intensités de trafic n'est pas bonne.

Son inconvénient principal est de nécessiter parfois plusieurs itérations avant d'aboutir à un résultat.

III.2 - Réseaux ouverts

Pour un réseau ouvert, défini selon les hypothèses du paragraphe II-1, le nombre de clients dans chaque sous-chaine n'est pas limité. La constante de normalisation s'écrit alors :

$$C = \sum_{n_1 \geq 0} \dots \sum_{n_I \geq 0} d(E) \prod_{i=1}^I n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R c_{ir}(n_{ir}) \frac{1}{n_{ir}!} \left(\frac{e_{ir}}{u_{ir}} \right)^{n_{ir}}$$

Le réseau sera dit stable si la constante C est finie. Dans la suite de ce paragraphe nous ne développerons que les calculs qui ont conduit

à une réalisation dans la version actuelle de QNAP (Avril 1978) et qui couvrent la plus grande partie des cas pratiques.

Les hypothèses limitatives suivantes ont été introduites :

- ① Les taux d'arrivée externes sont constants :
- globaux : $\forall n, v(n) = v_o$
 - par sous-chaines : $\forall S_m, \forall n_m, v_m(n_m) = v_{om}$

dans la suite les intensités de trafic sont définies par :

$$\begin{aligned}
 - x_{ir} &= \frac{e_{ir} v_o}{u_{ir}^o} \\
 - x_{ir} &= \frac{e_{ir} v_{om}}{u_{ir}^o} \quad \text{si } r \in S_m
 \end{aligned}$$

- ② Nous supposons que pour une station i de type 1, 2 ou 3 le taux de service u_{ir} pour une classe r ne dépend que du nombre total de clients dans la station suivant les relations :

$$\begin{aligned}
 u_{ir} &= u_{ir}^o b_i(n_i) \quad \text{si } n_i < d_i \\
 u_{ir} &= u_{ir}^o \quad \text{si } n_i \geq d_i
 \end{aligned}$$

III.2.1 - Calcul de la constante de normalisation

L'hypothèse ① conduit au résultat suivant :

$$C = \prod_{i=1}^I \sum_{n_i \geq 0} n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R C_{ir}(n_{ir}) \frac{1}{n_{ir}!} x_{ir}^{n_{ir}}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 C &= \prod_{i=1}^I \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \\
 C &= \prod_{i=1}^I C_i
 \end{aligned}$$

Cette relation traduit la mutuelle indépendance des stations qui composent le réseau. La stabilité du réseau résulte donc de la stabilité de chacune des stations.

L'hypothèse (2) nous permet d'écrire :

$$\sum_{n_i \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) = \sum_{n_i=0}^{\infty} B_i(n_i) x_i^{n_i}$$

R

où $x_i = \sum_{r=1}^R x_{ir}$

En conséquence le réseau est stable si et seulement si pour toute station i la série de terme général $B_i(n_i) x_i^{n_i}$ converge. Le problème est donc double soit :

- a) démontrer la convergence de cette série de façon automatique,
- b) en calculer pratiquement la somme.

Or, pour les stations à taux fixe, à serveur infini ou dans le cadre de l'hypothèse (2) (dont une motivation pratique est le fait qu'il paraît difficile de fournir les valeurs $b_i(n_i)$ pour toute valeur positive de n_i), nous pouvons conclure a priori à partir des intensités de trafic :

i) station à taux fixe :

$$C_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} B_i(n_i) x_i^{n_i} = \sum_{n_i=0}^{\infty} x_i^{n_i}$$

si $x_i < 1$	$C_i = \frac{1}{1 - x_i}$
--------------	---------------------------

ii) station à serveur infini :

$$C_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{x_i^{n_i}}{n_i!}$$

$\forall x_i$	$C_i = \exp(x_i)$
---------------	-------------------

iii) station à dépendance globale limitée

$$B_i(n_i) = \prod_{k=1}^{n_i} \frac{1}{b_i(k)} \quad \text{donc pour } n_i \geq d_i \quad B_i(k) = B_i(d_i - 1)$$

En conséquence :

$$C_i = \sum_{n_i=0}^{d_i-1} B_i(n_i) x_i^{n_i} + B_i(d_i-1) \sum_{n_i=d_i}^{\infty} x_i^{n_i}$$

si $x_i < 1$

$$C_i = \frac{B_i(d_i-1) x_i^{d_i}}{1 - x_i} + \sum_{n_i=0}^{d_i-1} B_i(n_i) x_i^{n_i}$$

Remarque :

On notera en particulier que l'on retrouve bien les constantes de normalisation des stations M/M/1 et M/G/∞ isolées.

III.2.2 - Grandeurs élémentaires

Les probabilités marginales définies au paragraphe III.1.2.1 sont données par :

$$p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) = \frac{1}{C_i} n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!}$$

et
$$p_i(n_i) = \frac{1}{C_i} B_i(n_i) x_i^{n_i}$$

Nous en déduisons les résultats suivants :

III.2.2.1 - Débits moyens

$$\begin{aligned} \text{deb}_{ir} &= \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} u_{ir}^0 b_i(n_i) \frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \\ &= \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{ir} \geq 1} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} x_{ir} u_{ir}^0 B_i(n_i-1) (n_i-1)! \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^R \frac{x_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!} \right) \frac{x_{ir}^{n_{ir}-1}}{(n_{ir}-1)!} \end{aligned}$$

Donc dans tous les cas où la constante de normalisation est finie :

$$\text{deb}_{ir} = x_{ir} u_{ir}^0$$

III.2.2.2 - Taux d'utilisation

$$\text{util}_{ir} = \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} \frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

$$= x_{ir} \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} \frac{p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})}{b_i(n_i + 1)}$$

Nous pouvons remarquer que le rapport des taux d'utilisation de deux classes est égal au rapport des intensités de trafic. D'autre part, d'après notre définition du taux d'utilisation, le taux d'utilisation pour la station i est trivialement égal à $1 - \frac{1}{C_i}$, d'où dans tous les cas considérés :

$$\text{util}_{ir} = \frac{x_{ir}}{x_i} \frac{C_i - 1}{C_i}$$

III.2.2.3 - Nombre de clients dans la station

$$\begin{aligned} \text{lgq}_{ir} &= \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} n_{ir} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \\ &= x_{ir} \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} \frac{(n_i + 1) p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})}{b_i(n_i + 1)} \end{aligned}$$

De même que précédemment, nous sommes ramenés au calcul du nombre moyen de clients dans la station avec :

$$\text{lgq}_{ir} = \frac{x_{ir}}{x_i} \text{lgq}_i$$

Soit $l_i(z_i)$ la fonction génératrice des probabilités marginales $p_i(n_i)$:

$$l_i(z_i) = \sum_{n_i \geq 0} p_i(n_i) z_i^{n_i} = \frac{1}{C_i} \sum_{n_i \geq 0} B_i(n_i) x_i^{n_i} z_i^{n_i}$$

et on a : $\text{lgq}_i = l'_i(1)$

i) stations à taux fixe :

$$l_i(z_i) = \frac{1}{C_i} \frac{1}{1 - x_i z_i} \quad \text{d'où}$$

$$\text{lgq}_i = \frac{x_i}{1 - x_i}$$

ii) stations à serveur infini :

$$l_i(z_i) = \frac{1}{C_i} \exp(x_i z_i) \quad \text{d'où}$$

$$\text{lgq}_i = x_i$$

iii) stations à dépendance globale limitée

$$l_i(z_i) = \frac{1}{C_i} \left[\frac{b_i(d_i-1)(x_i z_i)^{d_i}}{1 - x_i z_i} + \sum_{k=0}^{d_i-1} B_i(k)(x_i z_i)^k \right]$$

soit

$$lgq_i = \frac{1}{C_i} \left[\frac{B_i(d_i-1)x_i^{d_i}}{(1-x_i)^2} (x_i + d_i(1-x_i)) + \sum_{k=0}^{d_i-1} (k+1)B_i(k+1)x_i^k \right]$$

De même, nous pouvons calculer la variance des probabilités marginales $p_i(n_i)$:

$$var_i = l''_i(1) + l'_i(1)(1 - l'_i(1))$$

i) station à taux fixe :

$$var_i = \frac{x_i}{(1-x_i)^2}$$

ii) station à serveur infini :

$$var_i = x_i$$

iii) station à dépendance globale limitée

$$\begin{aligned} var_i = & \frac{1}{C_i} \left[\frac{B_i(d_i-1)x_i^{d_i}}{(1-x_i)^3} (d_i(d_i-1) + 2d_i(1-d_i)x_i + (1-d_i)(2-d_i)x_i^2) + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{d_i-3} (k+1)(k+2)B_i(k+2)x_i^k \right] \\ & + lgq_i(1 - lgq_i) \end{aligned}$$

III.3 - Réseaux mixtes

Dans la suite, nous supposons que le réseau composé de :

.M₁ sous-chaines ouvertes (de 1 à M₁) correspondant à R₁ classes (de 1 à R₁)

.M₂ sous-chaines fermées (de M₁+1 à M) correspondant à R₂ classes (de R₁+1 à R₂)

Rappelons qu'un état du réseau est défini par :

$$E = (N_1, N_2, \dots, N_I)$$

avec $N_i = (n_{i1}, \dots, n_{iR})$

où n_{ir} est le nombre de clients de classe r dans la station i . Un état E est admissible si et seulement si :

$$\cdot \forall i \quad \forall r \quad n_{ir} \geq 0$$

$$\cdot \forall S_m \text{ fermée} \quad \sum_{i=1}^I \sum_{r \in S_m} n_{ir} = \bar{N}_m$$

Nous adopterons les notations suivantes :

$$\delta_1 = \{(n_{11}, \dots, n_{1R_1}; \dots; n_{I1}, \dots, n_{IR_1}) / \forall i, \forall r \in [1, R_1], n_{ir} \geq 0\}$$

$$\delta_{j1} = \{(n_{j1}, \dots, n_{jR_1}) / \forall r \in [1, R_1], n_{jr} \geq 0\}$$

$$\delta_2 = \{(n_{1R_1+1}, \dots, n_{1R}; \dots; n_{IR_1+1}, \dots, n_{IR}) / \forall i, \forall m, \sum_{i=1}^I \sum_{r \in S_m} n_{ir} = \bar{N}_m\}$$

$$\delta_{j2} = \{(n_{jR_1+1}, \dots, n_{jR}) / \forall m, 0 \leq \sum_{r \in S_m} n_{jr} \leq \bar{N}_m\}$$

Les problèmes à résoudre dans le cas des réseaux mixtes sont doubles :

i) Problème d'existence d'une solution stable, dû à la présence des sous-chaines ouvertes,

ii) Prise en compte de la condition partant sur les sous-chainées fermées : $\forall m \quad \sum_{i=1}^I \sum_{r \in S_m} n_{ir} = \bar{N}_m$.

D'autre part, dans la version actuelle de QNAP, les sous-chainées ouvertes doivent vérifier les conditions (1) et (2) déjà imposées pour les réseaux ouverts.

III.3.1 - Calcul de la constante de normalisation

En fonction des hypothèses retenues, la constante de normalisation s'écrit :

$$C = \sum_{\mathcal{G}_1} \sum_{\mathcal{G}_2} \prod_{i=1}^I B_i(n_i) n_i! \prod_{r=1}^{R_1} \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} \prod_{r=R_1+1}^R \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} C_{ir}(n_{ir})$$

Soit :

$$C = \sum_{\mathcal{G}_2} \prod_{i=1}^I \left(\prod_{r=R_1+1}^R C_{ir}(n_{ir}) \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} \right) \sum_{\mathcal{G}_1} B_i(n_i) n_i! \prod_{r=1}^{R_1} \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!}$$

posons : $\bar{n}_i = \sum_{r=R_1+1}^R n_{ir}$ et $x_i^0 = \sum_{r=1}^{R_1} x_{ir}$

$$\text{et } \bar{B}_i(\bar{n}_i) = \frac{1}{\bar{n}_i!} \sum_{\mathcal{G}_{i1}} B_i(n_i) n_i! \prod_{r=1}^{R_1} \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} = \frac{1}{\bar{n}_i!} \sum_{k=0}^{\infty} B_i(\bar{n}_i+k) \frac{(\bar{n}_i+k)!}{k!} x_i^0{}^k$$

Si pour toute valeur de $\bar{n}_i$ (en nombre fini) $\bar{B}_i(\bar{n}_i)$ est fini alors le réseau est stable, et la constante de normalisation s'écrit :

$$C = \sum_{\mathcal{G}_2} \prod_{i=1}^I \bar{B}_i(\bar{n}_i) \bar{n}_i! \prod_{r=R_1+1}^R C_{ir}(n_{ir}) \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!}$$

et nous sommes ramenés au calcul de la constante de normalisation d'un réseau fermé.

Donc le calcul de la constante de normalisation d'un réseau mixte pourra s'effectuer en deux étapes :

1) Calcul pour chaque station i de la fonction $\bar{B}_i(\bar{n}_i)$ pour toute valeur de $\bar{n}_i$ inférieure ou égale au nombre total de clients dans les sous-chainés fermées.

2) Calcul de la constante de normalisation du réseau fermé constitué par les sous-chainés fermées, avec des taux de service modifiés. Notons que pour chaque valeur de $\bar{n}_i$ le calcul de $\bar{B}_i(\bar{n}_i)$ est un calcul de constante de normalisation pour un réseau ouvert.

III.3.1.1 - Stations à taux fixe

$$\bar{B}_i(\bar{n}_i) = \frac{1}{\bar{n}_i!} \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR_1} \geq 0} n_i! \prod_{r=1}^{R_1} \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} = \frac{1}{\bar{n}_i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{n}_i+k)!}{k!} x_i^0{}^k$$

avec $x_i^0 = \sum_{r=1}^{R_1} x_{ir}$

donc si $x_i^0 < 1$ alors

$$\bar{B}_i(\bar{n}_i) = \frac{1}{(1 - x_i^0)^{\bar{n}_i + 1}}$$

D'où, en conservant les notations utilisées pour un réseau fermé, l'étape i du calcul de la constante de normalisation sera constitué de la séquence suivante :

1) modifier les valeurs des intensités de trafic des appartenant à des sous-chaines fermées :

$$x'_{ir} = x_{ir} / (1 - x_i^0)$$

2) appliquer la procédure convtrfx comme pour un réseau fermé

3) multiplier par $1/(1-x_i^0)$ tous les éléments de G

III.3.1.2 - Stations à serveur infini

$$\bar{B}_i(\bar{n}_i) = \frac{1}{\bar{n}_i!} \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR_1} \geq 0} \prod_{r=1}^{R_1} \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} = \frac{1}{\bar{n}_i!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_i^0}{k!}^k$$

d'où :
$$\bar{B}_i(\bar{n}_i) = \frac{\exp(x_i^0)}{\bar{n}_i!}$$

Donc la contribution des sous-chaines ouvertes est réduite à une constante $\exp(x_i^0)$. Le calcul peut donc être mené comme pour un réseau fermé sans tenir compte des sous-chaines ouvertes et en multipliant la matrice G par $\exp(x_i^0)$ en fin de calcul.

III.3.1.3 - Stations à dépendance globale limitée

Rappelons que dans ce cas, le taux de service, d'une station i pour une classe r appartenant à une sous-chaine ouverte, ne dépend que du nombre total de clients, de telle façon que :

$$\begin{cases} u_{ir} = u_{ir}^0 b_i(n_i) & \text{si } n_i < d_i \\ u_{ir} = u_{ir}^0 & \text{si } n_i \geq d_i \end{cases}$$

i) $\bar{n}_i \geq d_i$

$$\bar{n}_i! \bar{B}_i(\bar{n}_i) = \sum_{k=0}^{\infty} B_i(\bar{n}_i + k) \frac{(\bar{n}_i + k)!}{k!} x_i^0{}^k = B_i(d_i - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\bar{n}_i + k)!}{k!} x_i^0{}^k$$

si $x_i^0 < 1$ alors

$$\bar{B}_i(\bar{n}_i) = \frac{B_i(d_i - 1)}{(1 - x_i^0)^{\bar{n}_i + 1}}$$

ii) $\bar{n}_i < d_i$

$$\begin{aligned} \bar{n}_i! \bar{B}_i(\bar{n}_i) &= \sum_{k=0}^{d_i - \bar{n}_i - 1} B_i(\bar{n}_i + k) \frac{(\bar{n}_i + k)!}{k!} x_i^0{}^k + B_i(d_i - 1) \sum_{k=d_i - \bar{n}_i}^{\infty} \frac{(\bar{n}_i + k)!}{k!} x_i^0{}^k \\ &= \sum_{k=0}^{d_i - \bar{n}_i - 1} (B_i(\bar{n}_i + k) - B_i(d_i - 1)) \frac{(\bar{n}_i + k)!}{k!} x_i^0{}^k + \frac{B_i(d_i - 1)}{(1 - x_i^0)^{\bar{n}_i + 1}} \bar{n}_i! \end{aligned}$$

si $x_i^0 < 1$

$$\bar{B}_i(\bar{n}_i) = \frac{B_i(d_i - 1)}{(1 - x_i^0)^{\bar{n}_i + 1}} + \sum_{k=0}^{d_i - \bar{n}_i - 1} (B_i(\bar{n}_i + k) - B_i(d_i - 1)) \frac{(\bar{n}_i + k)!}{\bar{n}_i! k!} x_i^0{}^k$$

Ces calculs faits on pourra appliquer les algorithmes de calcul assgen ou assdgl relativement aux sous-chaines fermées avec :

$$\begin{cases} \bar{b}_i(\bar{n}_i) = \bar{B}_i(\bar{n}_i) / \bar{B}_i(\bar{n}_i - 1) \\ \text{et } \bar{b}_i(0) = \bar{B}_i(0) \end{cases}$$

III.3.2 - Grandeurs élémentaires

De même que pour les réseaux fermés nous supposons que nous disposons de la matrice G et des matrices H_i , F_i , K_i pour chaque station i. Ces matrices portent sur les sous-chaines fermées.

Nous pouvons définir les probabilités marginales suivantes :

$$p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR_1}, n_{iR_1+1}, \dots, n_{iR}) = \frac{1}{C} F_i(N_{M_1+1} - n_{iM_1+1}, \dots, N_{M-n_{iM}}) B_i(n_i) n_i! \prod_{r=1}^{R_1} \frac{x_{ir}}{n_{ir}!} \prod_{r=R_1+1}^R C_{ir}(n_{ir}) \frac{x_{ir}}{n_{ir}!} n_{ir}$$

et

$$\bar{p}_i(n_{iR_1+1}, \dots, n_{iR}) = \frac{1}{C} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \bar{B}_i(\bar{n}_i) \bar{n}_i! \prod_{r=R_1+1}^R C_{ir}(n_{ir}) \frac{x_{ir}}{n_{ir}}^{n_{ir}}$$

III.3.2.1 - Sous-chaînes fermées

III.3.2.1.1 - Débits

Considérons une classe r appartenant à une sous-chaine fermée S_m .

Nous avons :

$$\text{deb}_{ir} = \frac{1}{C} \sum_{\mathcal{G}_{i1}} \sum_{\mathcal{G}_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) u_{ir}^0 b_i(n_i) c_{ir}(n_{ir}) B_i(n_i) n_i! \prod_{s=1}^{R_1} \frac{x_{is}}{n_{is}}^{n_{is}}$$

$$\prod_{s=R_1+1}^R \frac{x_{is}}{n_{is}}^{n_{is}} C_{is}(n_{is})$$

Soit :

$$\text{deb}_{ir} = \frac{x_{ir}}{C} u_{ir}^0 \sum_{\mathcal{G}_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) B_i(\bar{n}_i - 1) (\bar{n}_i - 1) \left[\prod_{s=R_1+1}^R \frac{x_{is}}{n_{is}}^{n_{is}} C_{is}(n_{is}) \right]$$

$$\frac{x_{ir}}{(n_{ir} - 1)!} C_{ir}(n_{ir} - 1)$$

d'où, quelque soit le type de la station :

$$\text{deb}_{ir} = \frac{1}{C} x_{ir} u_{ir}^0 G(\bar{N}_{M_1+1}, \dots, \bar{N}_m - 1, \dots, \bar{N}_M)$$

III.3.2.1.2 - Nombre moyen de clients dans la station

On voit facilement que :

$$\text{lgq}_{ir} = \frac{1}{C} \sum_{\mathcal{G}_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \bar{p}_i(n_{iR_1+1}, \dots, n_{iR}) n_{ir}$$

donc le calcul sera effectué comme pour un réseau fermé, sans tenir compte des sous-chaînes ouvertes, avec en particulier les résultats suivants :

- pour une station à taux fixe :

$$\text{lgq}_{ir} = \frac{x_{ir}}{C} G_i(\bar{N}_{M_1+1}, \dots, \bar{N}_m - 1, \dots, \bar{N}_M) \quad \text{si } r \in S_m$$

- pour une station à serveur infini :

$$\lgq_{ir} = \frac{x_{ir}}{C} G(\bar{N}_{M_1+1}, \dots, \bar{N}_m-1, \dots, \bar{N}_M) \quad \text{si } r \in S_m$$

- pour une station à dépendance globale, le calcul est réalisé à partir des sous-chaines.

III.3.2.1.3 - Taux d'utilisation

Par définition nous avons :

$$\text{util}_{ir} = \frac{1}{C} \sum_{\mathcal{G}_{i1}} \sum_{\mathcal{G}_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_m - \bar{n}_{im}) \frac{n_{ir}}{n_i} B_i(n_i) n_i! \prod_{s=1}^{R_1} \frac{x_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!} \prod_{s=R_1+1}^R \frac{x_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!} C_{is}(n_{is})$$

i) Station à taux fixe

Dans ce cas un calcul tout à fait analogue à celui des débits conduit au résultat suivant :

$$\text{util}_{ir} = \frac{x_{ir}}{C} G(\bar{N}_{M_1+1}, \dots, \bar{N}_m-1, \dots, \bar{N}_M)$$

ii) Station à serveur infini

Soit $U_i(\bar{n}_i)$ défini par :

$$U_i(\bar{n}_i) = \bar{n}_i \sum_{\mathcal{G}_{i1}} \frac{1}{n_i} \prod_{r=1}^{R_1} \frac{x_{ir}}{n_{ir}} n_{ir}$$

On montre que :

$$U_i(\bar{n}_i) = \frac{(-1)^{\bar{n}_i-1}}{x_i^{\bar{n}_i}} \bar{n}_i! \left[\exp(x_i^0) \left(\sum_{k=0}^{\bar{n}_i-1} (-1)^k \frac{x_i^0 k}{k!} \right) - 1 \right]$$

et, d'autre part,

$$U_i(\bar{n}_i+1) = \frac{(\bar{n}_i+1)}{x_i^0} (\exp x_i^0 - U_i(\bar{n}_i))$$

Nous aurons alors :

$$\text{util}_{ir} = \sum_{\mathcal{G}_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_m - \bar{n}_{im}) \frac{n_{ir}}{n_i} U_i(\bar{n}_i) \prod_{s=R_1+1}^R \frac{x_{is}^{n_{is}}}{n_{is}!} C_{is}(n_{is})$$

Et un calcul analogue à celui d'un réseau fermé en modifiant la fonction associée à la station (H_i).

Nota : Il semble que, d'un point de vue numérique, la formule calculant $U_i(\bar{n}_i)$ par récurrence donne de mauvais résultats.

ii) Station à dépendance globale limitée

Nous traiterons le problème de façon identique en définissant la fonction suivante (pour $\bar{n}_i > 0$) :

$$U_i(\bar{n}_i) = \frac{\bar{n}_i!}{\bar{n}_i!} \sum_{\delta_{i1}} B_i(n_i) \frac{n_i!}{n_i!} \prod_{r=1}^{R_1} \frac{x_{ir}}{n_{ir}!} = \frac{1}{(\bar{n}_i-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} B_i(\bar{n}_i+k) \frac{(\bar{n}_i+k-1)!}{k!} x_i^0{}^k$$

On montre que :

$$U_i(\bar{n}_i) = \frac{B_i(d_i-1)}{(1-x_i^0)^{\bar{n}_i}} + \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{n}_i \geq d_i \\ d_i - \bar{n}_i - 1 \\ \sum_{k=0} (B_i(\bar{n}_i+k) - B_i(d_i-1)) \frac{(\bar{n}_i+k-1)!}{k!(\bar{n}_i-1)!} x_i^0{}^k \end{cases}$$

et :

$$\text{util}_{ir} = \sum_{\delta_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \frac{n_{ir}}{\bar{n}_i} U_i(\bar{n}_i) \bar{n}_i! \prod_{s=R_1+1}^R \frac{x_{is}}{n_{is}!} C_{is}(n_{is})$$

III.3.2.2 - Sous-chaînes ouvertes

III.3.2.2.1 - Débits

Pour une classe r appartenant à une sous-chaine ouverte nous trouvons :

$$\text{deb}_{ir} = u_{ir}^0 x_{ir}$$

III.3.2.2.2 - Nombre moyen de clients

$$\text{lgq}_{ir} = \frac{1}{C} \sum_{\delta_{i1}} \sum_{\delta_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) n_{ir} B_i(n_i) n_i! \prod_{s=1}^{R_1} \frac{x_{is}}{n_{is}!} \prod_{s=R_1+1}^R \frac{x_{is}}{n_{is}!} C_{is}(n_{is})$$

Soit :

$$\text{lgq}_{ir} = \frac{x_{ir}}{C} \sum_{\delta_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) L_i(\bar{n}_i) \bar{n}_i! \prod_{s=R_1+1}^R \frac{x_{is}}{n_{is}!} C_{is}(n_{is})$$

avec

$$L_i(\bar{n}_i) = \sum_{k=0}^{\infty} B_i(\bar{n}_i + k + 1) \frac{(\bar{n}_i + k + 1)}{k! \bar{n}_i!} x_i^o{}^k$$

Nous pouvons faire deux remarques :

- si r et s sont deux classes appartenant à des sous-chaines ouvertes alors :

$$\frac{\lg q_{ir}}{\lg q_{is}} = \frac{x_{ir}}{x_{is}}$$

Il suffira donc d'effectuer les calculs pour une seule des classes appartenant à une sous-chaine ouverte.

$$- L_i(\bar{n}_i) = (\bar{n}_i + 1) B_i(\bar{n}_i + 1)$$

i) Station à taux fixe

$$L_i(\bar{n}_i) = (\bar{n}_i + 1) \frac{1}{(1 - x_i^o)} \bar{n}_i + 2$$

d'où

$$\lg q_{ir} = \frac{x_{ir}}{1 - x_i^o} \left(1 + \sum_{s=R_i+1}^R \lg q_{is} \right)$$

Et un calcul immédiat si l'on connaît le nombre moyen de clients pour les classes appartenant à des sous-chaines fermées.

ii) Station à serveur infini

$$L_i(\bar{n}_i) = \frac{\exp(x_i^o)}{\bar{n}_i!}$$

d'où

$$\lg q_{ir} = x_{ir}$$

iii) Station à dépendance globale limitée

Dans ce cas nous calculerons les termes $L_i(\bar{n}_i)$ et par un calcul analogue à celui de la constante de normalisation nous en déduirons le nombre moyen de clients.

III.3.2.2.3 - Taux d'utilisation

$$util_{ir} = \frac{1}{C} \sum_{\mathcal{E}_{i1}} \sum_{\mathcal{E}_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \frac{n_{ir}}{n_i} B_i(n_i) n_i! \prod_{s=1}^{R_1} \frac{x_{is}}{n_{is}}^{n_{is}} \prod_{s=R_1+1}^R \frac{x_{is}}{n_{is}}^{n_{is}} C_{is}(n_{is})$$

soit :

$$util_{ir} = \frac{x_{ir}}{C} \sum_{\mathcal{E}_{i2}} F_i(\bar{N}_{M_1+1} - \bar{n}_{iM_1+1}, \dots, \bar{N}_M - \bar{n}_{iM}) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_i(\bar{n}_i + k + 1) \frac{(\bar{n}_i + k)!}{i!} x_i^0 \right) \prod_{s=R_1+1}^R \frac{x_{is}}{n_{is}}^{n_{is}} C_{is}(n_{is})$$

et de même que précédemment si r et s appartiennent à des sous-chaines ouvertes :

$$\frac{util_{ir}}{util_{is}} = \frac{x_{ir}}{x_{is}}$$

Cette propriété peut être utilisée avec profit si l'on connaît les taux d'utilisation pour les classes appartenant à des sous-chaines fermées. En effet :

$$\sum_{s=1}^{R_1} util_{is} + \sum_{s=R_1+1}^R util_{is} = util_i$$

or : $util_i = 1 - \text{Prob} \{0 \text{ clients dans la station } i\}$

$$= 1 - \frac{F_i(\bar{N}_{M_1+1}, \dots, \bar{N}_M)}{C}$$

d'où si r appartient à une sous-chaine ouverte :

$$util_{ir} = \frac{x_{ir}}{x_i^0} \left[1 - \frac{F_i(\bar{N}_{M_1+1}, \dots, \bar{N}_M)}{C} - \sum_{s=R_1+1}^R util_{is} \right]$$

Dans le cas particulier d'une station à taux fixe (pour laquelle nous ne sommes pas supposés connaître la matrice F_i) nous avons :

$$util_{ir} = x_{ir}$$

III.4 - Généralisations

Le but de ce paragraphe est d'indiquer d'une part quelques généralisations possibles des algorithmes réalisés pour QNAP. Ces généralisations concernent les réseaux ouverts (et peuvent s'étendre aux réseaux mixtes), mais présentent des défauts tels que l'on peut douter de l'utilité d'une réalisation pratique. Notons d'autre part qu'un réseau ouvert peut dans certains cas être remplacé par un réseau fermé constitué par le rebouclage des sorties sur les entrées par l'intermédiaire d'une station fictive dont le taux de service est le taux d'arrivée pour le processus d'entrée, et dans lequel le nombre de clients est suffisamment grand pour que la probabilité pour que la station fictive soit inoccupée soit (presque) nulle.

Nous introduisons d'autre part les algorithmes de calcul pour deux résultats dus à Pittel [Pit76] et Lam [Lam77] qui généralisent les théorèmes de Baskett et al.

III.4.1 - Réseaux ouverts à taux d'arrivée externes constants, et à taux de service dépendant des classes

Nous ferons ici l'hypothèse suivante :

③ pour une station i du type 1, 2 ou 3, le taux de service u_{ir} pour une classe r est de la forme :

$$u_{ir}(n_{i1}, \dots, n_{iR}) = u_{ir}^0 b_i(n_i) c_{ir}(n_{ir})$$

avec :

$$b_i(n_i) = 1 \quad \text{si} \quad n_i \geq d_i$$

$$c_{ir}(n_{ir}) = 1 \quad \text{si} \quad n_{ir} \geq d_{ir}$$

Nous savons que dans le cadre de l'hypothèse 1

$$C = \prod_{i=1}^I C_i = \prod_{i=1}^I \sum_{\mathcal{G}} H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

avec

$$\mathcal{G} = \{ n_{ir} / \forall r, n_{ir} \geq 0 \}$$

$$H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) = n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R C_{ir}(n_{ir}) \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!}$$

soit :

$$\begin{aligned}\delta_- &= \{ n_{ir} / \sum_{r=1}^R n_{ir} < d_i \} \\ \delta_+ &= \{ n_{ir} / \sum_{r=1}^R n_{ir} \geq d_i \} \\ \mathcal{E} &= \delta_- \cup \delta_+ \quad \text{et} \quad \delta_- \cap \delta_+ = \emptyset\end{aligned}$$

Alors $C_i = C_{i1} + C_{i2}$

avec :

$$\begin{aligned}C_{i1} &= \sum_{\delta_-} H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) - B_i(d_i - 1) \sum_{\delta_-} n_i! \prod_{r=1}^R C_{ir}(n_{ir}) \frac{1}{n_{ir}!} x_{ir}^{n_{ir}} \\ \text{et} \\ C_{i2} &= B_i(d_i - 1) \sum_{\delta_+} n_i! \prod_{r=1}^R C_{ir}(n_{ir}) \frac{1}{n_{ir}!} x_{ir}^{n_{ir}}\end{aligned}$$

C_{i1} est la somme d'un nombre fini de termes qui peuvent être calculés de manière analogue à la constante de normalisation d'un réseau fermé (cf. §. III.2.2.2.1.). Le calcul formel de C_{i2} donne lieu à des développements assez fastidieux au bout desquels nous obtenons le résultat suivant :

$$\text{si} \quad \sum_{r=1}^R x_{ir} < 1$$

alors :

$$C_{i2} = B_i(d_i - 1) \sum_{e \in \mathcal{P}(\mathbb{E}_R)} C_i(e)$$

avec $\mathbb{E}_R$ l'ensemble des classes du réseau et :

$$C_i(e) = \frac{\prod_{r \in \bar{e}} (C_{ir}(d_{ir} - 1))}{1 - x_i(\bar{e})} \sum_{\delta_e} n_i(e)! \prod_{r \in e} (C_{ir}(n_{ir}) - C_{ir}(d_{ir} - 1)) \frac{1}{n_{ir}!} \left[\frac{x_{ir}}{(1 - x_i(\bar{e}))} \right]^{n_{ir}}$$

où :

$$n_i(e) = \sum_{r \in e} n_{ir}$$

$\bar{e}$ le complémentaire de e

$$x_i(\bar{e}) = \sum_{r \in \bar{e}} x_{ir}$$

et $\delta_e = \{ n_{ir} / \forall r \in e \quad n_{ir} < d_{ir} \}$

En pratique, nous pouvons calculer les termes $C_i(e)$ de façon analogue à la constante de normalisation d'un réseau fermé. Cependant, le nombre prohibitif de termes à calculer (2^R) rend une telle réalisation assez problématique et explique qu'en l'état elle ne soit pas implantée dans QNAP (bien que nous ne désespérons pas de trouver des améliorations). Un résultat positif néanmoins, la condition de stabilité du réseau est donné par :

$$\forall i \sum_{r=1}^R x_{ir} < 1$$

En ce qui concerne les grandeurs élémentaires, on montre les résultats suivants :

i) débit d'une station i pour la classe r :

$$\text{deb}_{ir} = u_{ir}^0 x_{ir}$$

ii) taux d'utilisation :

$$\text{util}_{ir} = x_{ir} \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} \frac{p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})}{b_i(n_{i1}+1) c_{ir}(n_{ir}+1)}$$

iii) nombre moyen de clients :

$$\text{lgq}_{ir} = x_{ir} \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} \frac{(n_{i1}+1) p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})}{b_i(n_{i1}+1) c_{ir}(n_{ir}+1)}$$

Et pour les taux d'utilisation et le nombre moyen de clients un calcul analogue à celui des C_i .

III.4.2 - Réseaux ouverts à processus d'arrivée global

Nous admettons ici que :

④ Le taux d'arrivée externe défini par :

$$v(n) = \begin{cases} v_0 a(n) & \text{si } n < E_0 \\ v_0 & \text{si } n \geq D_0 \end{cases}$$

où n est le nombre de clients total dans le réseau.

III.4.2.1 - Calcul de la constante de normalisation

$$\text{Posons } A(n) = \prod_{k=0}^{n-1} a(k)$$

alors l'hypothèse admise nous permet d'écrire : $A(n) = A(D_0)$ si $n \geq D_0$

soit $\mathcal{S} = \{ n_{ir} / \forall i, \forall r, n_{ir} \geq 0 \}$

alors :

$$C = \sum_{\mathcal{S}} A(n) \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \quad \text{avec } n = \sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^R n_{ir}$$

$$\text{soit } \mathcal{S}_1 = \{ n_{ir} / \sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^R n_{ir} < D_0 \}$$

alors :

$$C = \sum_{\mathcal{S}_1} (A(n) - A(D_0)) \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \\ + \sum_{\mathcal{S}} A(D_0) \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

En conséquence, la constante de normalisation est la somme de deux termes dont l'un :

$$C_1 = \sum_{\mathcal{S}_1} (A(n) - A(D_0)) \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

est une somme finie, et l'autre :

$$C_2 = \sum_{\mathcal{S}} A(D_0) \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

une somme infinie proportionnelle à la constante de normalisation d'un réseau ouvert à taux d'arrivée constant v_0 . La condition de stabilité du réseau est donc :

$$\forall i \quad \sum_{r=1}^R x_{ir} < 1 \quad \text{dans le cadre de l'hypothèse } \textcircled{3}$$

Le problème réside dans le calcul de la quantité C_1 . Pour simplifier les notations nous poserons : $\bar{A}(n) = A(n) - A(D_0)$.

Nous aurons donc :

$$C_1 = \sum_{\mathcal{G}_1} \bar{A}(n) \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

$$\text{Soit : } \mathcal{G}(n) = \{ n_{ir} / \sum_{i=1}^I \sum_{r=1}^R n_{ir} = n \}$$

$$C_1 = \sum_{n=0}^{D_0-1} \bar{A}(n) G(n)$$

$$G(n) = \sum_{\mathcal{G}(n)} \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

De façon analogue au calcul de la constante de normalisation d'un réseau fermé, nous poserons :

$$g(X) = \prod_{i=1}^I g_i(X)$$

$$\text{avec } g_i(X) = \sum_{n_{i1} \geq 0} \dots \sum_{n_{iR} \geq 0} n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R C_{ir}(n_{ir}) \frac{1}{n_{ir}!} (x_{ir} X)^{n_{ir}}$$

$G(n)$ est le coefficient de X^n dans $g(X)$. Le calcul s'effectuera donc de la façon suivante :

étape 1 :

Pour toute station i , calculer les coefficients $H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$

tels que $\sum_{r=1}^R n_{ir} < D_0$ à l'aide des procédures appropriées (assgen, assdgl, convtfx ou assdel).

étape 2 :

Pour toute station i , calculer le vecteur K_i défini par

$$K_i(n_i) = \sum_{n_{i1} + \dots + n_{iR} = n_i} H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) \quad \text{avec } 0 \leq n_i < D_0$$

étape 3 :

Calcul du vecteur G défini par $G(n) = K_1 * \dots * K_I(n)$ pour $0 \leq n < D_0$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{étape 4 :} \\ C_1 = \sum_{n=0}^{D_0-1} \bar{A}(n) G(n) \end{array} \right.$$

III.4.2.2 - Probabilités marginales

Nous avons :

$$p_j(n_{j1}, \dots, n_{jR}) = \frac{1}{C} \sum_{\mathcal{G}_j} A(n) \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

avec

$$\mathcal{G}_j = \{ n_{ir} / \forall r, \forall i \neq j \quad n_{ir} \geq 0 \}$$

et

$$p_j(n_{j1}, \dots, n_{jR}) = \frac{H_j(n_{j1}, \dots, n_{jR})}{C} \sum_{\mathcal{G}_j} A(n) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

$$p_j(n_{j1}, \dots, n_{jR}) = \frac{1}{C} G_j(n_j) H_j(n_{j1}, \dots, n_{jR}) \quad \text{ou} \quad n_j = \sum_{r=1}^R n_{jr}$$

d'autre part si $n_j \geq D_0$

$$G_j(n_j) = A(D_0) \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

En conséquence pour $n_j \geq D_0$ les probabilités marginales s'expriment de façon analogue aux probabilités marginales d'un réseau à taux d'arrivée constante. Le calcul des termes $G_j(n_j)$ pourra donc être réalisé de la façon suivante :

a) pour les termes tels que $n_j < D_0$ un calcul analogue à celui de la constante de normalisation.

b) pour les termes tels que $n_j \geq D_0$ le calcul est un sous-produit de calcul de la constante de normalisation (en omettant la $j^{\text{ième}}$ convolution dans l'étape 3).

Le calcul des grandeurs élémentaires s'en déduit.

III.4.3 - Réseaux ouverts à processus d'arrivée par sous-chaine

L'hypothèse retenue ici est la suivante :

(5) Il existe un processus d'arrivée par sous-chaine. Le taux d'arrivée est défini par :

$$v_m(\bar{n}_m) = \begin{cases} v_{om} a(\bar{n}_m) & \text{si } \bar{n}_m < D_{om} \\ v_{om} & \text{si } \bar{n}_m \geq D_{om} \end{cases}$$

où $\bar{n}_m$ est le nombre total de clients dans la sous-chaine S_m .

Nous noterons $A_m(\bar{n}_m) = \prod_{n=0}^{\bar{n}_m-1} a_m(n)$, avec $A_m(\bar{n}_m) = A_m(D_{om})$ si $\bar{n}_m \geq D_{om}$.

La constante de normalisation est définie par :

$$C = \sum_{m=1}^M \prod_{i=1}^I A_m(\bar{n}_m) \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

Notons E_M l'ensemble des sous-chaines, e une partie de E_M et $\bar{e}$ le complémentaire de e dans E_M .

Soit :

$$\mathcal{E}_e = \{ n_{ir} / \forall S_m \in e, \sum_{i=1}^I \sum_{r \in S_m} n_{ir} < D_{om} ; \forall S_m \in \bar{e}, \forall r \in S_m, n_{ir} \geq 0 \}$$

alors

$$C = \sum_{e \in \mathcal{P}(E_M)} \sum_{\mathcal{E}_e} C(e)$$

$$\text{où } C(e) = \prod_{S_m \in e} (A_m(\bar{n}_m) - A_m(D_{om})) \prod_{S_m \in \bar{e}} A_m(D_{om}) \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

notons $S_{m_1}, \dots, S_{m_{k(e)}}$ les sous-chaines de e .

$$\sum_{\mathcal{E}_e} C(e) = \sum_{\bar{n}_{m_1}=0}^{D_{om_1}-1} \dots \sum_{\bar{n}_{m_{k(e)}}=0}^{D_{om_{k(e)}}-1} \prod_{S_m \in e} (A_m(\bar{n}_m) - A_m(D_{om})) \prod_{S_m \in \bar{e}} A_m(D_{om}) G_e(\bar{n}_{m_1}, \dots, \bar{n}_{m_{k(e)}})$$

où :

$$G_e(\bar{n}_{m_1}, \dots, \bar{n}_{m_{k(e)}}) = \sum_{\mathcal{E}_{\bar{e}}} \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

avec $\mathcal{S}_e = \{ n_{ir} / \forall i, \forall S_m \in \bar{e}, \forall r \in S_m, n_{ir} \geq 0 \}$

Donc $G_e(\bar{n}_{m_1}, \dots, \bar{n}_{m_{k(e)}})$ est la constante de normalisation d'un réseau mixte.

Le calcul de la constante de normalisation pourra donc s'effectuer de la manière suivante :

étape 1 :

Pour tout élément e de $\mathcal{P}(E_M)$ calculer $G_e(D_{om_1} - 1, \dots, D_{om_{k(e)}} - 1)$ comme constante de normalisation d'un réseau mixte. D'évidence nous en déduisons les valeurs de $G_e(\bar{n}_{m_1}, \dots, \bar{n}_{m_{k(e)}})$ pour $0 \leq \bar{n}_{m_1} \leq D_{om_1} - 1, \dots, 0 \leq \bar{n}_{m_{k(e)}} \leq D_{om_{k(e)}} - 1$.

étape 2 :

Pour tout élément de $\mathcal{P}(E_M)$ calculer :

$$\sum_{\mathcal{S}_e} C(e) = \sum_{\bar{n}_{m_1}=0}^{D_{om_1}-1} \dots \sum_{\bar{n}_{m_{k(e)}}=0}^{D_{om_{k(e)}}-1} \prod_{S_m \in C} (A_m(\bar{n}_m) - A_m(D_{om})) \prod_{S_m \in \bar{e}} A_m(D_{om}) G_e(\bar{n}_{m_1}, \dots, \bar{n}_{m_{k(e)}})$$

étape 3 :

$$\text{Calculer : } C = \sum_{e \in \mathcal{P}(E_M)} \sum_{\mathcal{S}_e} C(e)$$

III.4.4 - Application des résultats de Pittel à des réseaux de files d'attente à capacité limitée

Le type de réseau dont il est question ici sort du cadre du théorème BCMP. En effet, l'une des hypothèses de ce théorème est que les files d'attente sont à capacité illimitée et plus généralement qu'il n'existe pas de contraintes de capacité dans un sous-ensemble du réseau. Il n'existe que peu de résultats sur les réseaux avec blocage [PuP77, New68] et la plupart ne partent que sur des réseaux particuliers. Seul le résultat présenté par Pittel [Pit76] comporte une certaine généralité et présente d'autre part l'avantage de conduire à une solution sous forme produit. Les conditions d'application sont les suivantes :

i) la structure du réseau est de type BCMP (sans que des changements de classe éventuels soient envisagés).

ii) Un état E du réseau doit vérifier :

$$\forall i, \forall r \quad n_{ir} \geq 0 \quad \forall r \quad \sum_{i=1}^I n_{ir} = N_r$$

et un ensemble d'autres conditions portant sur les n_{ir} qui limitent l'espace d'état. Nous noterons $\mathcal{E}$ l'ensemble des états possibles du réseau.

iii) Lorsqu'un client de classe r quitte la station i pour se rendre à une station j (selon la probabilité $p_{ir;jr}$) et que cette dernière station n'est pas libre à cause des contraintes de capacité, deux politiques sont envisagées :

(a) le client retourne instantanément à la station i. Cette politique n'est possible que lorsque le réseau vérifie certaines conditions de symétrie :

$$\forall i, j \quad \forall r \quad e_{ir} p_{ir;jr} = e_{jr} p_{jr;ir}$$

(b) le client poursuit son chemin à partir de la station j en accord avec la matrice de transition jusqu'à ce qu'une station puisse l'admettre. On suppose que ce cheminement est instantané.

Ces hypothèses vérifiées et si E est un état admissible alors :

$$p(E) = \frac{1}{C} \prod_{i=1}^I f_i(N_i)$$

où $f_i(N_i)$ sont les mêmes fonctions que celles présentées pour les réseaux BCMP

avec

$$C = \sum_{\mathcal{E}} p(E)$$

Une application simple de ce résultat concerne les réseaux de files à capacité limitée lorsque les hypothèses sont vérifiées.

Dans ce cas, les algorithmes décrits pour les réseaux BCMP fermés sont applicables avec :

$$H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) = \begin{cases} n_i! B_i(n_i) \prod_{r=1}^R \frac{x_{ir}^{n_{ir}}}{n_{ir}!} & \text{si } n_i \leq L_i \\ 0 & \text{si } n_i > L_i \end{cases}$$

où L_i est la capacité maximale de la station i.

Cependant, il faut noter que les hypothèses de validité du résultat sont très contraignantes, en effet :

- . seule la politique a semble présenter un intérêt pratique,
- . dans ce dernier cas la condition de symétrie impose des réseaux très particuliers par exemple :
 - la matrice de transition est symétrique,
 - elle se transforme après permutations de lignes et colonnes en matrice tridiagonales,
 - le réseau est de type serveur central.

III.4.5 - Les extensions de S.S. Lam à des réseaux à contrainte de population

Un grand nombre de problèmes pratiques imposent des limitations sur la taille de la population qui transitent dans un système. Le modèle de noeud de commutation du chapitre I, le problème de limiter le degré de multiprogrammation pour éviter l'écroulement d'un système d'exploitation en sont des exemples.

S.S. Lam [Lam77] a étendu les résultats concernant les réseaux de type BCMP à des réseaux de même structure pour lesquels des contraintes portant sur le nombre de clients dans chaque sous-chaine sont introduites.

Soit E un état du réseau. Nous noterons $n(E)$ le vecteur $(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_M)$ où $\bar{n}_m$ est le nombre total de clients dans la sous-chaine S_m .

Pour chaque sous-chaine S_m on définit les fonctions suivantes :

(a) fonctions de perte :

$$L_m(n(E)) = \begin{cases} 0 & \text{si une arrivée externe à la sous-chaine } S_m \text{ est refusée.} \\ 1 & \text{si une arrivée externe à la sous-chaine } S_m \text{ est acceptée } ((\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_M) \rightarrow (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_m+1, \dots, \bar{n}_M)) \end{cases}$$

(b) fonctions d'injection :

$$T_m(n(E)) = \begin{cases} 0 & \text{si le départ d'un client de la sous-chaine } S_m \text{ entraîne l'injection immédiate d'un client dans } S_m \\ 1 & \text{si un départ n'engendre pas d'arrivée } ((\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_M) \rightarrow (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_m-1, \dots, \bar{n}_M)) \end{cases}$$

Soit E un état possible. Le théorème énoncé par Lam statue que :

Si la chaîne de Markov définie sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des états du réseau est ergodique, et si :

$$\forall S_m, \quad \forall n(E) \quad T_m((\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_M)) = 1 \Rightarrow L_m((\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_m - 1, \dots, \bar{n}_M)) = 1$$

alors :

$$p(E) = \frac{1}{C} d(E) \prod_{i=1}^I f_i(N_i)$$

$$\text{avec} \quad C = \sum_{E \in \mathcal{E}} p(E)$$

Comme indiqué dans [Lam77] le calcul de la constante de normalisation pourra se dérouler de la manière suivante :

$$\text{soit :} \quad \bar{N}_m = \max_{E \in \mathcal{E}} (\bar{n}_m)$$

$$\mathcal{E}_+ = \{n_{ir} / \forall S_m \sum_{i=1}^I \sum_{r \in S_m} n_{ir} = \bar{N}_m\}$$

étape 1 :

$$G(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_M) = \sum_{\mathcal{E}_+} \prod_{i=1}^I H_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

Soit la constante de normalisation d'un réseau fermé (ou mixte si l'un des N_m est infini), d'où l'on déduit tous les termes $G(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_M)$ pour $0 \leq \bar{n}_M \leq \bar{N}_M$.

étape 2 :

$$C = \sum_{n(E) \text{ possible}} d(E) G(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_M)$$

IV. CONCLUSION

Nous avons décrits dans ce chapitre les algorithmes de calcul de la constante de normalisation et des statistiques élémentaires à l'état stationnaire d'un réseau de files d'attente vérifiant les hypothèses des théorèmes de Baskett-Chaudy-Muntz et Palacios. Tous ces algorithmes à l'exclusion de ceux du paragraphe III.4 ont été réalisés dans le cadre du projet QNAP [MeP78].

Deux détails n'ont pas été abordés jusqu'ici et peuvent être matière à problèmes :

- . La résolution du système d'équation (1) du paragraphe II.2.1. (Calcul des taux d'arrivée) relève d'algorithmes classiques tel qu'une méthode itérative de type Gauss-Seidel [Kah58] que nous avons choisi.

- . La détermination des sous-chaines composant le réseau est réalisée à partir d'algorithmes de recherche de composantes connexes dans un graphe [DeP71], cette recherche est mise à profit pour vérifier la cohérence du réseau (les réseaux comportant des états transitoires ou absorbants font l'objet d'un diagnostic et sont éventuellement rejetés).

Même pour des réseaux relativement complexes, le temps de calcul de la constante de normalisation et des statistiques élémentaires est en général très faible et peuvent justifier une utilisation en mode interactif.

Nous concluons ce chapitre par trois exemples de calcul concernant successivement un réseau fermé, un réseau ouvert et un réseau mixte. Ces exemples n'ont qu'une valeur d'école et les paramètres choisis n'ont pas de signification particulière. Les données sont introduites au moyen du langage de description de QNAP. Données et résultats sont produits en annexe II.2.

IV.1 - Exemple de réseau fermé

Cet exemple permet d'illustrer l'utilisation des classes de clients pour modéliser des transitions définissant une chaîne de Markov d'ordre supérieur à 1.

Le réseau considéré est de type "serveur central" et comprend quatre stations (figure 1) :

- l'unité centrale : UC ,
- trois stations P_1, P_2, P_3 jouant le rôle de périphériques.

Nous voulons représenter deux types de comportement vis à vis des stations P_1, P_2, P_3 :

i) après une durée de service dans l'UC, un client accède P_1, P_2, P_3 ou UC de façon aléatoire. Les clients vérifiant cette condition définissant la classe C_0 .

ii) les stations P_1, P_2, P_3 sont accédées successivement dans cet ordre. Pour décrire ce processus, nous introduisons trois classes $C11, C12, C13$ telles que :

- un client de classe $C11$ (respectivement $C12, C13$) ayant achevé son service à la station UC se rend à la station P_1 (resp. P_2, P_3) en passant en classe $C12$ (resp. $C13, C11$).

Les résultats sont présentés en annexe II.2.1.

IV.2 - Exemple de réseau ouvert

Nous utilisons ici un modèle de CYCLADE [Pou74] qui comporte 7 noeuds et 16 lignes (figure 2).

Les taux d'arrivée des paquets provenant de l'extérieur sont égaux, les destinations équiprobables. Entre le noeud de départ et le noeud d'arrivée on utilise le minimum de lignes, les ambiguïtés sont levées figure 3.

A chaque ligne correspond une station au sens de QNAP ($S1, \dots, S16$). Le problème est de représenter un routage fixe à travers le réseau. Nous ferons donc correspondre chaque noeud d'arrivée à une classe de clients ($A, \dots, G$).

Les résultats sont présentés en annexe II.2.2.

IV.3 - Exemple de réseau mixte

Nous considérons un système informatique, dont l'architecture est présentée (figure 4), constitué de :

- l'unité centrale CPU ,
- de mémoires auxiliaires, DISK, TAPE,
- d'un disque de swapping, SWAP,

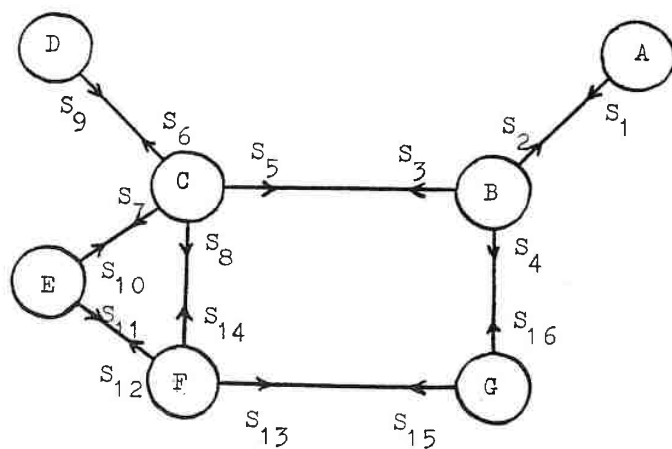


Figure 2

Noeud Source	Noeud de destination	Noeud de transition
A	F	C
B	F	C
C	G	F
D	G	F
F	C, D	B
G	A, B	C

Figure 3

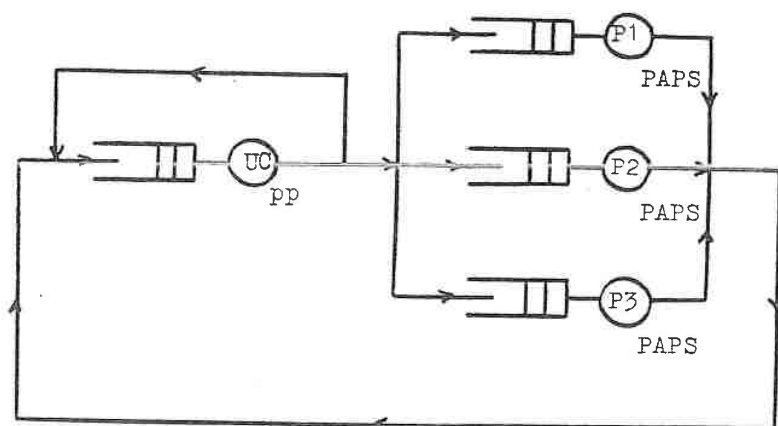


Figure 1

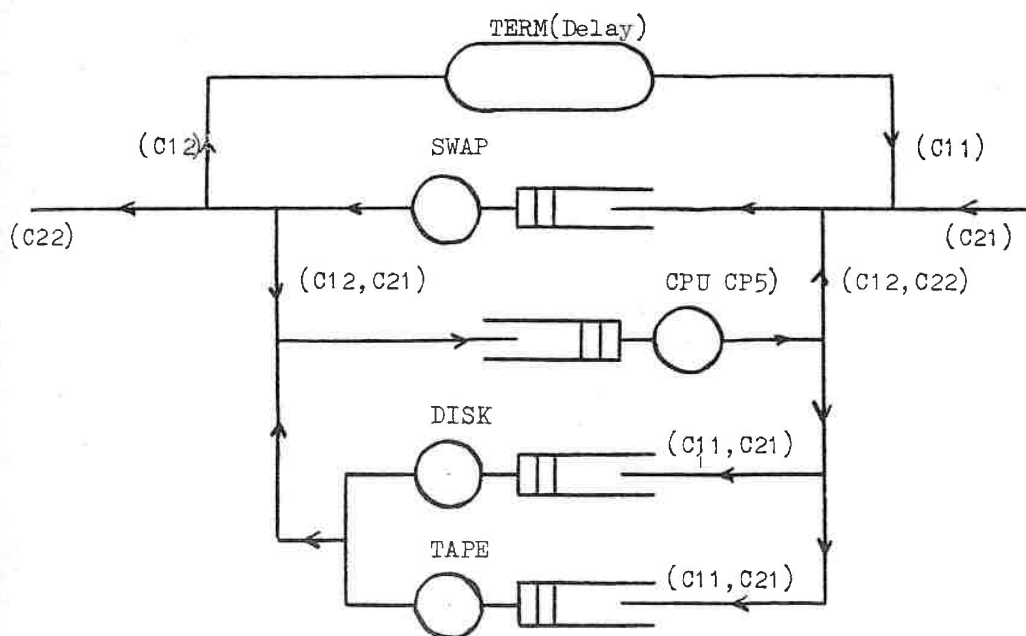


Figure 4

- d'un ensemble de terminaux, TERM, représenté par une station de type délai pur.

Les clients parcourant le réseau proviennent des terminaux, ou de l'extérieur (station source EXT) et constituent deux populations distinctes (classes C1 et C2).

Au niveau de la station SWAP un client issu des terminaux ou de l'extérieur se rend à la station CPU, tandis qu'un client provenant de la station CPU sera dirigé vers les terminaux ou l'extérieur suivant sa classe d'origine. Ce comportement pourra être modélisé en introduisant comme pour l'exemple IV.1 des classes supplémentaires (C11, C12, et C21, C22).

Les résultats sont présentés en annexe II.2.3.

ANNEXE II.1

Calcul de la probabilité qu'un client de classe r soit en cours de service à la station i, si l'état de cette station est $(n_{i1}, \dots, n_{iR})$

II.1.1 - Cas d'une station de type 1 (PAPS)

Il est nécessaire de recourir à des états plus fins que ceux qu'il suffisait de considérer jusqu'à maintenant. Un état d'une station i, PAPS, est représenté par un vecteur y_i tel que :

$$y_i = (y_{i1}, \dots, y_{in_i})$$

où n_i est le nombre de clients dans la station i et y_{ij} la classe du client $j^{\text{ième}}$ dans l'ordre PAPS. Le client en cours de service est de classe x_{i1} .

D'après [BaC75] la probabilité marginale que la station i soit dans un état y_i est donnée par :

$$p_i(y_i) = \frac{1}{K} B_i(n_i) \left(\frac{1}{u_i^0}\right)^{n_i} \prod_{j=1}^{n_i} e_{iy_{ij}}$$

Notons que si y'_i est un vecteur dont les composantes se déduisent par permutation des éléments de y_i alors $p_i(y'_i) = p_i(y_i)$.

Supposons d'autre part que l'état y_i corresponde à n_{i1} clients de classe 1, ..., n_{iR} clients de classe R.

Le nombre de permutations conduisant à des états différents de y_i est :

$$\binom{n_i}{n_{i1}} \binom{n_i - n_{i1}}{n_{i2}} \dots \binom{n_i - n_{i1} - \dots - n_{iR-1}}{n_{iR}} \quad (1)$$

(1) Nous rappelons que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$.

On peut vérifier ainsi que :

$$p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) = \frac{1}{K} B_i(n_i) \frac{n_i!}{n_{i1}! \dots n_{iR}!} \left(\frac{1}{u_{i0}}\right)^{n_i} \prod_{r=1}^R e_{ir}^{n_{ir}}$$

Nous en déduisons d'autre part la probabilité qu'un client de classe r soit en cours de service si la station i est dans l'état $(n_{i1}, \dots, n_{iR})$:

$$\begin{aligned} & \binom{n_i-1}{n_{i1}} \dots \binom{n_i-n_{i1}-1}{n_{ir-1}} \dots \binom{n_i-n_{i1}-1}{n_{iR}} \frac{1}{K} B_i(n_i) \left(\frac{1}{u_{i0}}\right)^{n_i} \prod_{r=1}^R e_{ir}^{n_{ir}} \\ &= \frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR}) . \end{aligned}$$

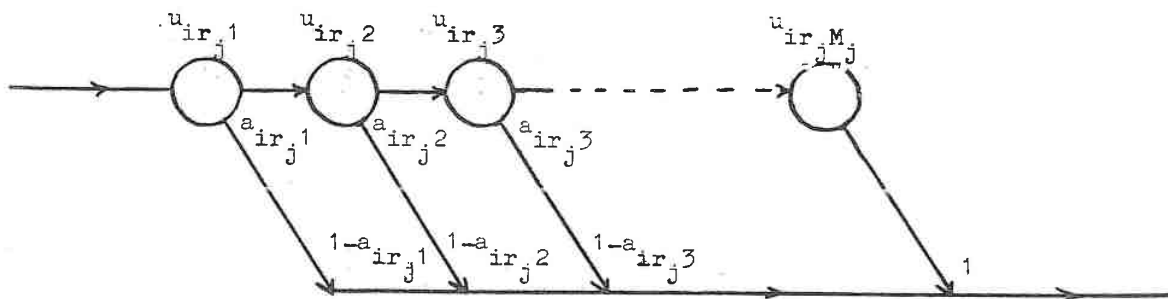
II.1.2 - Cas d'une station de type 2 (DAPSPR) :

Un état d'une station de ce type peut être défini par :

$$y_i = [(r_1, m_1), \dots, (r_{n_i}, m_{n_i})]$$

- où :
- n_i est le nombre de clients dans la station
 - r_j la classe du client $j^{\text{ième}}$ dans l'ordre DAPS
 - m_j l'étape de service dans laquelle se trouve le client.

Rappelons que Cox [Cox55] a montré qu'une distribution à transformée de Laplace rationnelle peut être représentée par le réseau suivant :



- o
- chaque étape est une station exponentielle de taux de service $u_{ir,j,k}$.

Toujours d'après [BaC75] la probabilité marginale que la station i soit dans l'état y_i peut s'écrire :

$$p_i(y_i) = \frac{1}{K} \left(\prod_{j=1}^{n_i} \frac{e_{ir_j} A_{ir_j m_j}}{u_{ir_j m_j}} \right) B_i(n_i) \prod_{r=1}^R C_{ir}(n_{ir})$$

avec $A_{ir_j m_j} = \prod_{k=1}^{m_j} a_{ir_j k}$

La probabilité marginale $P_i(Y_i)$ avec $Y_i = (r_1, \dots, r_{n_i})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} P_i(Y_i) &= \sum_{m_1=1}^{M_1} \dots \sum_{m_{n_i}=1}^{M_{n_i}} \frac{1}{K} \left(\prod_{j=1}^{n_i} \frac{e_{ir_j} A_{ir_j m_j}}{u_{ir_j m_j}} \right) B_i(n_i) \prod_{r=1}^R C_{ir}(n_{ir}) \\ &= \frac{1}{K} \left(\prod_{j=1}^{n_i} \frac{e_{ir_j}}{u_{ir_j}^0} \right) B_i(n_i) C_{ir}(n_{ir}) \end{aligned}$$

En effet, on montre très simplement que $u_{ir_j}^0 = \sum_{m_j=1}^{M_j} \frac{A_{ir_j m_j}}{u_{ir_j m_j}}$

Nous sommes donc ramenés à un problème tout à fait analogue au précédent.

II.1.3 - Cas des stations de type 3 (PP) et de type 4 (SI)

Dans le cas d'une station PP, chaque client est servi alternativement avec un taux $\frac{1}{n_i}$ si la station est dans l'état $(n_{i1}, \dots, n_{iR})$. Donc la proportion de temps pendant laquelle les clients de classe r reçoivent du service est :

$$\frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

Pour une station serveur infini, il y a autant de serveurs que de clients dans la station. Si cette station est dans l'état $(n_{i1}, \dots, n_{iR})$ il y a n_i serveurs actifs dont n_{ir} dévolus à la classe r . Donc des clients de classe r utilisent une "fraction" $\frac{n_{ir}}{n_i}$ de la station et suivant notre définition le taux d'utilisation d'une station SI sera donné par :

$$\sum_{\text{états possibles}} \frac{n_{ir}}{n_i} p_i(n_{i1}, \dots, n_{iR})$$

ANNEXE II.2

II.2.1 - Réseau fermé

a) Données

```
&  MODELE DE RESEAU SERVEUR CENTRAL:
&    - 4 STATIONS,
&    - 4 CLASSES,
&    - 2 SOUS-CHAINES (CLASSE C0, CLASSES C11, C12, C13)
&
/DECLARATION/QUEUE UC,P1,P2,P3;CLASS C0,C11,C12,C13;
&
/STATION/NAME=UC;SCHED=P5;
      SERVICE(C0)=EXP(1.0);
      SERVICE=EXP(2.0);
      LOAD=1.0,1.0,1.0,1.0,10.0;
      TRANSIT(C0)=P1,1.0,P2,1.0,P3,1.0,UC,1.0;
      TRANSIT(C11)=P1,0.5,UC;
      TRANSIT(C12)=P2,0.5,UC;
      TRANSIT(C13)=P3,0.5,UC;
&
/STATION/NAME=P1;
      SERVICE=EXP(20.0);
      TRANSIT(C0)=UC;
      TRANSIT(C11)=UC(C12);
/STATION/NAME=P2;
      SERVICE=EXP(25.0);
      TRANSIT(C0)=UC;
      TRANSIT(C12)=UC(C13);
/STATION/NAME=P3;
      SERVICE=EXP(30.0);
      TRANSIT(C0)=UC;
      TRANSIT(C13)=UC(C11);
&
/COMPUTE/INIT(C0)=2;
      INIT(C11)=5,10;
&
/EXEC/COMPUTE;
```

b) Résultats

**** ANALYTIC RESOLUTION ****

```

****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 2
****SUBCHAIN 2 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 5
*****
*
*QUEUE UC SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C0 .9963 .3495E-01 .4884E-01 1.392 .3508E-01 55.62 *
*CLASS C11 1.996 .8306E-01 .1110 2.666 .4161E-01 117.5 *
*CLASS C12 1.996 .8306E-01 .1110 2.666 .4161E-01 117.5 *
*CLASS C13 1.996 .8306E-01 .1110 2.666 .4161E-01 117.5 *
*GLOBAL 1.777 .2841 .3817 2.387 .1599 41.39 *
*
*QUEUE P1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C0 20.00 .1754 .3744 42.69 .8770E-02 185.4 *
*CLASS C11 20.00 .4161 .8926 42.90 .2081E-01 197.4 *
*GLOBAL 20.00 .5915 1.267 42.84 .2958E-01 193.8 *
*
*QUEUE P2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C0 25.00 .2192 .6069 69.20 .8770E-02 158.9 *
*CLASS C12 25.00 .5202 1.450 69.70 .2081E-01 170.6 *
*GLOBAL 25.00 .7394 2.057 69.55 .2958E-01 167.1 *
*
*QUEUE P3 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C0 30.00 .2631 .9699 110.6 .8770E-02 117.5 *
*CLASS C13 30.00 .6242 2.324 111.7 .2081E-01 128.6 *
*GLOBAL 30.00 .8873 3.294 111.4 .2958E-01 125.3 *
*
*****
****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 2
****SUBCHAIN 2 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 10
*****
*
*QUEUE UC SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C0 .9909 .2177E-01 .3249E-01 1.479 .2197E-01 89.54 *
*CLASS C11 1.986 .1054 .1531 2.884 .5308E-01 185.5 *
*CLASS C12 1.986 .1054 .1531 2.884 .5308E-01 185.5 *
*CLASS C13 1.986 .1054 .1531 2.884 .5308E-01 185.5 *
*GLOBAL 1.865 .3380 .4917 2.713 .1812 63.51 *
*
*QUEUE P1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C0 20.00 .1099 .2871 52.26 .5493E-02 311.8 *
*CLASS C11 20.00 .5308 1.389 52.33 .2654E-01 324.5 *
*GLOBAL 20.00 .6407 1.676 52.32 .3203E-01 322.3 *
*
*QUEUE P2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C0 25.00 .1373 .5486 99.86 .5493E-02 264.2 *
*CLASS C12 25.00 .6635 2.657 100.1 .2654E-01 276.7 *
*GLOBAL 25.00 .8008 3.206 100.1 .3203E-01 274.5 *
*
*QUEUE P3 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C0 30.00 .1648 1.132 206.0 .5493E-02 158.0 *
*CLASS C13 30.00 .7962 5.495 207.0 .2654E-01 169.8 *
*GLOBAL 30.00 .9610 6.627 206.9 .3203E-01 167.8 *
*
*****
**** END OF ANALYTIC RESOLUTION ****
/START/
*** CPU TIME = 1.568

```

II.2.2 - Réseau ouvert

a) Données

```
& MODELE DE CYCLADE:OUVERT
& 7 NOEUDS (CLASSES A,B,C,D,E,F,G)
& 16 LIGNES (STATIONS S1,...,S16)
& 1 SOURCE (EXT)
&
/DECLARATION/QUEUE S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8,S9,S10,
                  S11,S12,S13,S14,S15,S16,EXT;
                  CLASS A,B,C,D,E,F,G;
&
& LIGNES ...
&
/STATION/NAME=S1;SERVICE=EXP(0.3);
  TRANS(B)=OUT ;TRANS(C)=S3;TRANS(D)=S3;TRANS(E)=S3;TRANS(F)=S3;TRANS(G)=S4;
/STATION/NAME=S2;SERVICE=EXP(0.3);
  TRANS(A)=OUT ;
/STATION/NAME=S3;SERVICE=EXP(0.3);
  TRANS(C)=OUT ;TRANS(D)=S6;TRANS(E)=S7;TRANS(F)=S8;
/STATION/NAME=S4;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(G)=OUT;
/STATION/NAME=S5;SERVICE=EXP(0.3);
  TRANS(A)=S2;TRANS(B)=OUT ;
/STATION/NAME=S6;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(D)=OUT ;
/STATION/NAME=S7;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(E)=OUT ;
/STATION/NAME=S8;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(F)=OUT ;TRANS(G)=S13;
/STATION/NAME=S9;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(A)=S5;TRANS(B)=S5;TRANS(C)=OUT ;TRANS(E)=S7;TRANS(F)=S8;TRANS(G)=S8;
/STATION/NAME=S10;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(A)=S5;TRANS(B)=S5;TRANS(C)=OUT ;TRANS(D)=S6;
/STATION/NAME=S11;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(F)=OUT ;TRANS(G)=S13;
/STATION/NAME=S12;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(E)=OUT;
/STATION/NAME=S13;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(G)=OUT;
/STATION/NAME=S14;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(A)=S5;TRANS(B)=S5;TRANS(C)=OUT;TRANS(D)=S6;
/STATION/NAME=S15;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(E)=S12;TRANS(F)=OUT;
/STATION/NAME=S16;SERVICE=EXP(0.4);
  TRANS(A)=S2;TRANS(B)=OUT;TRANS(C)=S3;TRANS(D)=S3;
&
& SOURCE ...
&
/STATION/NAME=EXT;TYPE=GEN;SERVICE=EXP(1.0/7);
  TRANS=S1(B),1.0,S1(C),1.0,S1(D),1.0,
    S1(E),1.0,S1(F),1.0,S1(G),1.0,
    S2(A),1.0,S3(C),1.0,S3(D),1.0,
    S3(E),1.0,S4(G),1.0,S5(A),1.0,
    S5(B),1.0,S6(D),1.0,S7(E),1.0,
    S8(F),1.0,S8(G),1.0,S9(A),1.0,
    S9(B),1.0,S9(C),1.0,S9(E),1.0,
    S9(F),1.0,S9(G),1.0,S10(A),1.0,
    S10(B),1.0,S10(C),1.0,S10(D),1.0,
    S11(F),1.0,S11(G),1.0,S12(E),1.0,
    S13(G),1.0,S14(A),1.0,S14(B),1.0,
    S14(C),1.0,S14(D),1.0,S15(F),1.0,
    S15(E),1.0,S16(A),1.0,S16(B),1.0,
    S16(C),1.0,S3(F),1.0,S16(D),1.0;
&
/EXEC/COMPUTE;
```

b) Resultats

```

*****
*
*QUEUE S1    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS B      .3000      .5000E-01   .7143E-01   .4286        .1667
*CLASS C      .3000      .5000E-01   .7143E-01   .4286        .1667
*CLASS D      .3000      .5000E-01   .7143E-01   .4286        .1667
*CLASS E      .3000      .5000E-01   .7143E-01   .4286        .1667
*CLASS F      .3000      .5000E-01   .7143E-01   .4286        .1667
*CLASS G      .3000      .5000E-01   .7143E-01   .4286        .1667
*GLOBAL       .3000      .3000       .4286       .4286        1.0000
*
*QUEUE S2    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS A      .3000      .3000       .4286       .4286        1.000
*GLOBAL       .3000      .3000       .4286       .4286        1.000
*
*QUEUE S3    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS C      .3000      .1500       .3000       .6000        .5000
*CLASS D      .3000      .1500       .3000       .6000        .5000
*CLASS E      .3000      .10000      .2000       .6000        .3333
*CLASS F      .3000      .10000      .2000       .6000        .3333
*GLOBAL       .3000      .5000       1.000       .6000        1.667
*
*QUEUE S4    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS G      .4000      .1333       .1538       .4615        .3333
*GLOBAL       .4000      .1333       .1538       .4615        .3333
*
*QUEUE S5    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS A      .3000      .2000       .3333       .5000        .6667
*CLASS B      .3000      .2000       .3333       .5000        .6667
*GLOBAL       .3000      .4000       .6667       .5000        1.333
*
*QUEUE S6    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS D      .4000      .4000       .6667       .6667        1.000
*GLOBAL       .4000      .4000       .6667       .6667        1.000
*
*QUEUE S7    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS E      .4000      .2667       .3636       .5455        .6667
*GLOBAL       .4000      .2667       .3636       .5455        .6667
*
*QUEUE S8    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS F      .4000      .2667       .4444       .6667       .6667
*CLASS G      .4000      .1333       .2222       .6667       .3333
*GLOBAL       .4000      .4000       .6667       .6667       1.0000
*
*QUEUE S9    SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS A      .4000      .6667E-01   .1111       .6667       .1667
*CLASS B      .4000      .6667E-01   .1111       .6667       .1667
*CLASS C      .4000      .6667E-01   .1111       .6667       .1667
*CLASS E      .4000      .6667E-01   .1111       .6667       .1667
*CLASS F      .4000      .6667E-01   .1111       .6667       .1667
*CLASS G      .4000      .6667E-01   .1111       .6667       .1667
*GLOBAL       .4000      .4000       .6667       .6667       1.0000
*
*QUEUE S10   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS A      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*CLASS B      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*CLASS C      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*CLASS D      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*GLOBAL       .4000      .2667       .3636       .5455       .6667
*
*QUEUE S11   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS F      .4000      .6667E-01   .7692E-01   .4615       .1667
*CLASS G      .4000      .6667E-01   .7692E-01   .4615       .1667
*GLOBAL       .4000      .1333       .1538       .4615       .3333
*
*QUEUE S12   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS E      .4000      .1333       .1538       .4615       .3333
*GLOBAL       .4000      .1333       .1538       .4615       .3333
*
*QUEUE S13   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS G      .4000      .2667       .3636       .5455       .6667
*GLOBAL       .4000      .2667       .3636       .5455       .6667
*
*QUEUE S14   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS A      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*CLASS B      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*CLASS C      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*CLASS D      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*GLOBAL       .4000      .2667       .3636       .5455       .6667
*
*QUEUE S15   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS E      .4000      .6667E-01   .7692E-01   .4615       .1667
*CLASS F      .4000      .6667E-01   .7692E-01   .4615       .1667
*GLOBAL       .4000      .1333       .1538       .4615       .3333
*
*QUEUE S16   SERVICE    BUSY PCT    CUST NB    RESPONSE    THRUPUT
*CLASS A      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*CLASS B      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*CLASS C      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*CLASS D      .4000      .6667E-01   .9091E-01   .5455       .1667
*GLOBAL       .4000      .2667       .3636       .5455       .6667
*
*
*QUEUE EXT   SOURCE OF ALL SUBCHAINS RATE= 7.0000
*
*****
*** END OF ANALYTIC RESOLUTION ***
/START/
*** CPU TIME = 4.129

```

II.2.3 - Réseau mixte

a) Données

```
& EXEMPLE DE RESEAU MIXTE
& 1 SOUS-CHAINE FERMEE (CLASSES C11,C12)
& 1 SOUS CHAINE OUVERTE (CLASSES C21,C22)
&
/DECLAR/QUEUE EXT,TERM,SWAP,CPU,DISK,TAPE;
      CLASS C11,C12,C21,C22;
&
& SOURCE EXTERIEURE
&
/STATION/NAME=EXT;TYPE=GEN;
      SERVICE=EXP(1000.0);
      TRANSIT=SWAP(C21);
&
& STATIONS
&
/STATION/NAME=TERM;TYPE=DELAY;
      SERVICE=EXP(1000.0);TRANSIT(C12)=SWAP(C11);
/STATION/NAME=SWAP;
      SERVICE=EXP(50.0);
      TRANSIT(C11)=CPU;TRANSIT(C12)=TERM;
      TRANSIT(C21)=CPU;TRANSIT(C22)=OUT;
/STATION/NAME=CPU;SCHED=PS;
      SERVICE(C11)=EXP(10.0);SERVICE(C21)=EXP(25.0);
      TRANSIT(C11)=SWAP(C12),1,DISK,10,TAPE,2;
      TRANSIT(C21)=SWAP(C22),1,DISK,10,TAPE,2;
/STATION/NAME=DISK;
      SERVICE=EXP(20.0);
      TRANSIT(C11)=CPU;
      TRANSIT(C21)=CPU;
/STATION/NAME=TAPE;
      SERVICE=EXP(60.0);
      TRANSIT(C11)=CPU;
      TRANSIT(C21)=CPU;
&
/COMPUTE/INIT(C11)=10;INIT(C12)=0;
&
/EXEC/COMPUTE;
```

b) Résultats

*** ANALYTIC RESOLUTION .NETWORK IS MIXED ***

SUBCHAIN 1 IS CLOSED CUSTNB= 10
SUBCHAIN 2 IS OPEN

```

*****
*
*QUEUE EXT SOURCE OF SUBCHAIN 2 RATE= .1000E-02
*
*QUEUE TERM SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C12 1000.0 .9756 3.523 1000.0 .3523E-02 1839.
*GLOBAL 1000.0 .9756 3.523 1000.0 .3523E-02 1839.
*
*QUEUE SWAP SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C11 50.00 .1761 .3079 87.39 .3523E-02 2751.
*CLASS C12 50.00 .1761 .3079 87.39 .3523E-02 2751.
*CLASS C21 50.00 .5000E-01 .8976E-01 89.76 .1000E-02 UDEF
*CLASS C22 50.00 .5000E-01 .8975E-01 89.76 .9999E-03 UDEF
*GLOBAL 50.00 .4523 .7952 87.91 .9046E-02 UDEF
*
*QUEUE CPU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C11 10.000 .4580 1.694 37.00 .4580E-01 181.4
*CLASS C21 25.00 .3250 1.297 99.79 .1300E-01 UDEF
*GLOBAL 13.32 .7829 2.991 50.88 .5880E-01 UDEF
*
*QUEUE DISK SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C11 20.00 .7046 3.307 93.87 .3523E-01 190.0
*CLASS C21 20.00 .2000 1.077 107.7 .9999E-02 UDEF
*GLOBAL 20.00 .9046 4.363 96.92 .4523E-01 UDEF
*
*QUEUE TAPE SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C11 60.00 .4228 .8601 122.1 .7046E-02 1297.
*CLASS C21 60.00 .1200 .2536 126.8 .2000E-02 UDEF
*GLOBAL 60.00 .5427 1.114 123.1 .9046E-02 UDEF
*
*****
*** END OF ANALYTIC RESOLUTION ***
/START/
*** CPU TIME = 2.775

```

CHAPITRE III

I - INTRODUCTION

Ce Chapitre est destiné à illustrer les domaines d'activité principaux de QNAP que nous avons indiqués en conclusion du Chapitre I :

- i) étude de propriétés des réseaux de files d'attente et comparaison des méthodes de résolution,
- ii) conception et évaluation des systèmes informatiques.

Nous proposons donc, au paragraphe II de ce Chapitre, deux études de robustesse des hypothèses du théorème de Baskett-Chandy-Muntz et Palacios. La première porte sur l'approximation qui consiste à substituer une station de type "processeur partagé" à une station PAPS, lorsque les clients susceptibles d'entrer dans cette station ont des temps de service différents. La deuxième série d'expériences examine l'influence de services exponentiels corrélés (les hypothèses du théorème BCMP stipulent que les temps de service sont indépendants). Ces deux études seront menées à l'aide de réseaux très simples afin de limiter le nombre de paramètres et de permettre des expériences assez systématiques.

En ce qui concerne le deuxième point, nous avons disposé de mesures sur le système GCOS-64 permettant d'alimenter des modèles globaux de l'architecture de ce système. Ces modèles sont présentés au paragraphe III. Cependant, nous avons pu conduire à terme le processus d'évaluation faute de données suffisantes pour conduire correctement le processus de validation. Néanmoins nous pouvons tirer de ces expériences quelques informations sur la validité de certaines hypothèses exigées par les modèles analytiques en comparant les résultats obtenus au moyen de modèles de simulation dont les propres hypothèses sont moins restrictives. D'autre part, nous dégageons certains points qu'il serait intéressant d'approfondir pour obtenir un modèle dont les résultats se rapprocheraient de la réalité, et les mesures ou informations qu'il resterait à recueillir.

II - ETUDE DE ROBUSTESSE DE CERTAINES HYPOTHESES DU THEOREME BCMP

Nous avons présenté au Chapitre II les hypothèses de validité du théorème BCMP, et mis l'accent sur certaines de ses lacunes. Cependant, la relative généralité des réseaux pris en compte et les avantages qu'ils présentent (facilité de mise en oeuvre, rapidité d'exécution) ont conduit à de nombreuses expériences de modélisation les utilisant [Ros76, RoD72, VrG77], avec des résultats parfois excellents et le plus souvent suffisants lorsqu'une très grande précision dans les prédictions effectuées n'est pas requise, ce qui est le cas dans la phase de conception d'un système informatique par exemple.

La surprenante adéquation des résultats de certains modèles est l'objet d'explications d'ordre théorique ou heuristique [DeB77, Sto77]. Notre propos est ici de quantifier l'erreur commise en utilisant des réseaux qui se prettent à une résolution mathématique BCMP à la place de réseaux dont les hypothèses sont moins restrictives :

- i) au paragraphe II.1, nous assimilons une station PAPS, à la loi de service exponentielle avec deux classes de clients, à une station PP,
- ii) au paragraphe II.2, une station à loi de service exponentielle corrélée, à une station PAPS exponentielle à services indépendants.

La méthode suivie est analogue à celle utilisée par J.P. Buzen et D. Potier pour l'étude des stations PAPS à loi de service générale où les résultats, obtenus pour un réseau constitué de deux stations (dont l'une M/M/1) en tandem, sont supposés généralisables à un réseau quelconque [BuP77].

II.1 - Stations PAPS avec classes de clients

II.1.1 - Le modèle considéré (cf. Figure 1)

Le modèle est constitué par deux stations (S1, S2) en tandem. La politique de rangement dans les files respectives est PAPS. La distribution des temps de service est exponentielle. Les clients qui transitent par la station S2 appartiennent à la classe C1. A la sortie de cette station, les clients restent en classe C1 avec la probabilité PROB, passent en classe C2 avec la probabilité 1-PROB. Donc, si $0 < \text{PROB} < 1$ et si les temps de service à la station S1 sont différents les

hypothèses du théorème BCMP ne sont pas vérifiées. Le réseau ainsi défini (réseau 1) sera traité par analyse numérique markovienne. Les résultats obtenus, en ce qui concerne les taux d'utilisation et le nombre moyen de clients des stations S1 et S2 seront comparés à ceux obtenus pour un réseau identique (réseau 2) où la station S1 est de type PP (processeur partagé).

Les paramètres du réseau sont les suivants :

- R1, R2 : rapport des temps moyen de service à la station S1 et à la station S2 pour des clients de classe C1 et C2 respectivement.
- PROB : probabilité qu'un client de classe C1 à la station S2 reste dans cette classe après achèvement de son service.
- N : nombre total de clients dans le réseau.

Quelques remarques peuvent être faites à propos du réseau 1 :

- Le nombre d'états est égal à $2^{N+1}-1$. En pratique, pour des raisons de taille mémoire disponible et de temps de calcul, l'étude sera effectuée pour un maximum de 7 clients (soit 255 états).

- Le nombre d'éléments non nuls de la matrice de transition est $4(2^N-1)$. Soit à peu près le double du nombre d'états (ce rapport est intéressant pour optimiser l'espace mémoire réservé pour une résolution numérique).

- Les solutions obtenues pour le réseau 1 et le réseau 2 coïncident pour $N=1$.

Le fichier de données en langage de QNAP est donné ci-après. Le paramètre OUTPUT dans la commande COMPUTE permet d'introduire l'étiquette logique d'un fichier sur lequel les paramètres de la fonction PRINT dans la commande /EXEC/ sont écrits. Ce fichier est utilisé ensuite pour éditer tableaux et courbes.

& ETUDE DE ROBUSTESSE , PAPS AVEC PLUSIEURS CLASSES ...
 & -----

```

/DECLAR/QUEUE S1,S2;CLASS C1,C2;
      INTEGER N,I,J,K;
      REAL TR1<5>=0.1 0.5 1.0 5.0 10.0;
      REAL TR2<4>=0.5 1.0 5.0 10.0;
      REAL TPROB<5>=0.1 0.3 0.5 0.7 0.9;
      REAL P<6>=5 0 1000 0 3 0.0005;
      REAL AUS1,ALS1,AUS2,ALS2,SUS1,SLS1,SUS2,SLS2;
      REAL R1,R2,PROB;

&
/STATION/NAME=S1;SCHED=FIFO;
      SERVICE<C1>=EXP<R1>;
      SERVICE<C2>=EXP<R2>;
      TRANSIT<C1>;
      INIT<C1>=N;
/STATION/NAME=S2;SCHED=FIFO;
      SERVICE=EXP<1.0>;
      TRANSIT<C1>=S1,PROB,S1<C2>;

&
/COMPUTE/PARAM=P;
      OUTPUT=7;

&
/EXEC/
BEGIN
  I:=1;
  WHILE I<=5 DO
    BEGIN
      R1:=TR1<I>;PRINT<R1>;
      J:=I;
      WHILE J<=4 DO
        BEGIN
          R2:=TR2<J>;PRINT<R2>;
          K:=1;
          WHILE K<=5 DO
            BEGIN
              PROB:=TPROB<K>;PRINT<PROB>;
              N:=1;
              WHILE N<=7 DO
                BEGIN
                  PRINT<N>;
                  COMPUTE;
                  AUS1:=S1.MBUSY;ALS1:=S1.MCUST;
                  AUS2:=S2.MBUSY;ALS2:=S2.MCUST;
                  PRINT<AUS1,ALS1,AUS2,ALS2>;
                  MARCA;
                  SUS1:=S1.MBUSY;SLS1:=S1.MCUST;
                  SUS2:=S2.MBUSY;SLS2:=S2.MCUST;
                  PRINT<SUS1,SLS1,SUS2,SLS2>;
                  N:=N+1;
                END;
              K:=K+1;
            END;
          J:=J+1;
        END;
      I:=I+1;
    END;
  END;
/END/

```

II.1.2 - Résultats

Les calculs sont effectués avec les valeurs des paramètres suivants :

N : 1, 2, 3, 4, 5 ;

PROB : 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 ;

R1	R2			
0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
0.5	1.0	5.0	10.0	
1.0	5.0	10.0		
5.0	10.0			

Nous comparons les réseaux 1 et 2 relativement aux taux d'utilisation et au nombre moyen de clients en calculant l'écart absolu et l'écart relatif sur ces quantités. Ces résultats sont présentés par les tableaux de l'annexe III.1. Les courbes portent pour chaque valeur des paramètres les écarts relatifs sur :

- a) les taux d'utilisation des stations S1 ou S2,
- b) le nombre moyen de clients dans la station S1,
- c) le nombre moyen de clients dans la station S2.

On montre simplement que les écarts relatifs sur les taux d'utilisation des stations S1 et S2 sont égaux en utilisant la relation de Chang-Lavenberg [ChL72]:

Cette relation lie les taux d'utilisation des stations d'un réseau à l'intensité de trafic à ces stations soit :

$$\frac{U_i}{U_j} = \frac{x_i}{x_j}$$

moyennant des hypothèses générales que vérifient les réseaux 1 et 2. En notant U_i^k ($i=1, 2$; $k=1,2$) le taux d'utilisation pour le réseau k et la station i , x_i l'intensité de trafic à la station i nous aurons :

$$\frac{U_1^1}{U_2^1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2}$$

d'où

$$\frac{U_1^1 - U_1^2}{U_1^1} = \frac{U_2^1 - U_2^2}{U_2^1}$$

Les conclusions que nous pouvons tirer de cette étude sont les suivantes :

i) taux d'utilisation

- L'écart relatif est maximum lorsque l'écart entre R_1 et R_2 est grand et lorsque $PROB \cdot R_1 = (1 - PROB) \cdot R_2$ (égalité des intensités de trafic par classe), ce qui est intuitivement normal.

- Les résultats obtenus par la méthode analytique BCMP dans l'hypothèse processeur partagé sont toujours optimistes.

- L'écart relatif croît avec le nombre de clients dans le réseau si c'est la station S1 qui est la plus chargée.

- De façon générale, les résultats restent le plus souvent acceptables et même bons si $R1/R2 < 10$.

ii) Nombre moyen de clients

- Les écarts sur cette quantité pour les stations S1 et S2 sont de signes opposés. De façon générale cet écart est positif pour la station la plus chargée.

- Cet écart augmente toujours en valeur absolue avec le nombre de clients dans le réseau.

- Il est quelquefois important (50 %), mais le plus souvent lorsque le nombre de clients dans la station considérée est assez faible. De même que pour les taux d'utilisation les résultats sont correctes lorsque $R1/R2 < 10$.

En conclusion, et en supposant que les résultats globaux énoncés ci-dessus se généralisent à des réseaux quelconques, l'heuristique, consistant à substituer une station PP (ou DAPS-PR) à une station PAPS dans laquelle transitent des clients appartenant à plusieurs classes, semble donner d'assez bons résultats en ce qui concerne les taux d'utilisation des ressources, et si l'on se contente d'un ordre de grandeur pour la charge des ressources.

II.2 - Stations PAPS à temps de service corrélés

II.2.1 - Le modèle considéré

Nous considérons deux stations S1 et S2 en tandem (figure 1) telles que la politique de mise en queue soit PAPS, les distributions de temps de service exponentielles. Ces temps de service sont indépendants dans le cas de la station

S2, corrélés pour la station S1 suivant le modèle de Jacobs et Lewis [JaL76, Bad77].

Soit T_n une variable aléatoire, distribuée suivant une loi exponentielle, représentant le $n^{\text{ième}}$ temps de service à la station S1 et t_n une réalisation de T_n . Si l'on tire t_{n+1} de la façon suivante :

$$t_{n+1} = \begin{cases} rt_n & \text{probabilité } r \\ rt_n + s_n & \text{probabilité } 1-r \end{cases}$$

alors on montre que si (s_n) est une suite de réalisation indépendante d'une variable aléatoire S, exponentielle de même moyenne que les T_n :

$$\text{Corr}(T_n, T_{n+1}) = r$$

et

$$\text{Corr}(T_n, T_{n+p}) = r^p$$

Cette méthode permet donc d'obtenir un cas particulier de temps de service distribués suivant une loi exponentielle dont le coefficient de corrélation est r.

Le réseau défini ci-dessus (réseau 1) sera comparé à un réseau de deux stations PAPS dont les temps de service suivent des lois exponentielles et sont indépendants, donc vérifient les hypothèses du théorème BCMP (réseau 2).

Les paramètres du modèle sont :

R1 : rapport des temps moyen de service des stations S1 et S2,

CORR : coefficient de corrélation des temps de service successifs à la station 1,

N : nombre de clients dans le réseau.

Le réseau 1 est résolu en simulation, la méthode de tirage des temps de service de S1 étant programmée directement au niveau du paramètre SERVICE de cette station en introduisant un nouvel attribut QTIR de la classe QUEUE. Le

client de la file de S1 est, pour le premier service, en classe C1 pour une question d'initialisation du processus de tirage, le reste de la simulation s'effectue avec des clients en classe C2. Le fichier de données est le suivant :

```
& ETUDE DE ROBUSTESSE ,LOI DE SERVICE CORRELEE ...
& -----

/DECLAR/QUEUE REAL QTIR;
  QUEUE S1,S2;
  CLASS C1,C2;
  REAL TCORR(5)=0.1 0.3 0.5 0.7 0.9;
  REAL TSERV(6)=0.1 0.5 1.0 2.5 5.0 10.0;
  REAL CORR,SERV,U1,L1,U2,L2;
  INTEGER N,I,J,N1;

&
/STATION/NAME=S1;
  SERVICE(C1)=BEGIN
    QTIR:=EXP(SERV);
    CST(QTIR);
    END;
  SERVICE(C2)=BEGIN
    QTIR:=QTIR*CORR;
    IF RANDU >= CORR THEN QTIR:=QTIR+EXP(SERV) ;
    CST(QTIR);
    END;
  TRANSIT(C1)=S2(C2);
  TRANSIT(C2)=S2;
  INIT(C1)=1;INIT(C2)=N1;
/STATION/NAME=S2;
  SERVICE=EXP(1.0);
  TRANSIT=S1;

&
/SIMUL/TMAX=15000;
  MESURE=100;
/COMPUTE/OUTPUT=?;

&
/EXEC/BEGIN
  I:=1;
  WHILE I <= 5 DO
    BEGIN
      SERV:=TSERV(I);PRINT(SERV);
      J:=1;
      WHILE J <= 5 DO
        BEGIN
          CORR:=TCORR(J);PRINT(CORR);
          N:=1;
          WHILE N<= 10 DO
            BEGIN
              PRINT(N);
              N1:=N-1;
              SIMUL;
              U1:=S1.NBUSY;L1:=S1.MCUST;
              U2:=S2.NBUSY;L2:=S2.MCUST;
              PRINT(U1,L1,U2,L2);
              N:=N+1;
            END;
          J:=J+1;
        END;
      I:=I+1;
    END;
  END;
/END/
```

II.2.2 - Résultats

Nous avons considéré les valeurs de paramètres suivantes :

R1 : 0.1, 0.5, 1.0, 2.5, 5.0, 10.0 ;

CORR : 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 ;

N : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ;

Les tableaux et courbes recouvrent les mêmes quantités que précédemment (avec en sus la visualisation des écarts relatifs sur les taux d'utilisation de S2, les équations de Chang-Lavenberg n'étant pas a priori vérifiées) et sont présentés en annexe III.2.

Le problème essentiel rencontré dans cette étude est dû à l'utilisation d'une simulation pour résoudre le réseau 1. Les résultats obtenus sont tels que l'intervalle de confiance sur les taux d'utilisation est de l'ordre de 2 %. Leur interprétation doit donc tenir compte de fluctuation possible des résultats de simulation dans cet intervalle, d'autant que nous ne disposons pas des intervalles de confiance sur le nombre moyen de clients dans une station.

En fonction de ces restrictions nous tirerons les conclusions suivantes :

i) taux d'utilisation

- l'écart relatif semble passer par un maximum lorsque les deux stations sont équilibrées ($R1 = 1.0$) et croître avec le coefficient de corrélation et dans une certaine mesure avec N (cette dernière assertion devant être prise avec prudence, dans certains cas l'état semble croître puis décroître ensuite).

- l'écart relatif est négatif (les fluctuations annoncées ci-dessus peuvent expliquer certaines valeurs positives mais non significatives).

- les résultats sont très acceptables surtout si l'on s'éloigne de $R1 = 1.0$ (Maximum pour $R1 = 1.0$, $CORR = 0.9$).

ii) nombre de clients

- Sauf pour $R1 = 0.1$ l'écart relatif semble décroître pour la station S1 lorsque R1 augmente, avec changement de signe au passage de $R1 = 1.0$. Ce résultat est inversé pour S2 où l'écart décroît lorsque R1 diminue à partir de 5.0.

- De même que pour le taux d'utilisation l'écart croît avec le coefficient de corrélation, et, bien que pour la majorité des cas considérés cet écart croisse avec N, il est difficile de tirer une conclusion générale à ce propos.

- Comme pour l'étude précédente l'écart est important lorsque la station considérée est peu chargée, et reste modéré lorsque les stations sont équilibrées (de l'ordre de 10 %).

En conséquence, l'approximation faite ici paraît être raisonnable et conduire dans la majorité des cas à des résultats acceptables.

III - ETUDE D'UN MODELE DE SYSTEME INFORMATIQUE

III.1 - Introduction

Une expérience de modélisation d'un système informatique peut schématiquement se décomposer en les phases suivantes :

i) étude du système réel d'un point de vue fonctionnel (gestion des processus à l'unité centrale, files d'attente du système, gestion des entrées-sorties),

ii) élaboration d'un modèle du système, ce qui implique la détermination des entrées et des résultats prédits par ce modèle, ainsi que le choix d'une ou plusieurs méthodes de résolution,

iii) programmation du modèle,

iv) recueil de mesures sur le système réel, dans le but de fournir :

- des données,
- des mesures de comparaisons,

v) validation par comparaison entre les résultats du modèle et des mesures sur le système réel,

vi) utilisation du modèle validé avec pour objectif de comprendre le fonctionnement du système étudié et éventuellement de prédire les performances d'un système extrapolé (conception d'une nouvelle architecture, évaluation d'une nouvelle configuration).

Remarquons tout d'abord que ces phases sont liées et doivent conduire à des itérations de l'ensemble du processus (par exemple, la phase de validation peut entraîner la redéfinition du modèle et rendre nécessaire des mesures complémentaires). D'autre part, l'activité d'un système est mesurée relativement à une charge donnée qui lui est soumise (programmes synthétiques ou charge réelle) et dont la représentativité doit être précisée. Aussi l'étude d'un système doit débiter par l'analyse de cette charge, le plus souvent par des méthodes statistiques [Sch78].

Dans l'étude présentée, nous utilisons une chaîne de programmes qui représentent une charge classique du système étudié.

Les modèles que nous construisons sont des modèles sous forme de réseau de files d'attente fréquemment utilisés dans le cadre de la modélisation des performances globales d'un système informatique.

Le système étudié et les mesures disponibles sont brièvement décrites au paragraphe III.2, en ne présentant que les points particuliers qui nous intéressent. Le paragraphe III.3 est consacré aux différents modèles que nous avons envisagés et aux résultats obtenus. Nous concluons par le paragraphe III.4 en indiquant quelles sont, à notre sens, les informations et mesures qu'il serait nécessaire de recueillir pour élaborer un modèle conduisant à de meilleurs résultats. Nous indiquons néanmoins deux types d'utilisation possibles des modèles construits au paragraphe III.3, dans le but de prédire les performances de systèmes dérivés de celui que nous avons considéré.

III.2 - Le système étudié

III.2.1 - Architecture globale

Le système GCOS-64 [CII76] des ordinateurs CII-HB-64 est un exemple de système multiprogrammé à mémoire virtuelle segmenté dont l'architecture présente certaines analogies avec le système MULTICS [CoV65] (segmentation, protection en anneaux, etc...). Un schéma de configuration classique est spécifié figure 2.

Au niveau de l'unité centrale (CPU), les tâches actives sont servies suivant une politique DAPS avec préemption si elles sont des priorités différentes (16 niveaux de priorités), PAPS si elles sont de même priorité. Les synchronisations sont assurées par des opérations P et V sur sémaphores.

En ce qui concerne les entrées-sorties il existe trois types de contrôleurs gérant les disques (MSC), bandes magnétiques (MTC) et périphériques lents (URC). Chaque contrôleur est connecté par l'intermédiaire d'un canal physique à un contrôleur d'entrées-sorties central (IOC). L'IOC maintient une file d'attente (canal logique) pour chaque périphérique. Les contrôleurs ont la charge d'assurer le partage des canaux physiques entre les divers canaux logiques.

Dans la version étudiée, le système GCOS-64 n'effectue que du traitement par lots avec un degré de multiprogrammation faible (quatre, dans notre exemple).

III.2.2 - Mesures disponibles

Un certain nombre de campagnes de mesures sur GCOS-64 ont été réalisés par le service évaluation des performances de CII-HB (P. de Rivet). Les mesures dont nous avons disposé ont été réalisées par M. Cardaillac, J.P. Corré et J. Oliveira sur un ensemble de programmes caractéristique d'une charge type du système [Car77, Cor77, Oli77]. Ces mesures sont recueillies par un outil logiciel (ASTRE [Cor76]) et un outil matériel (noté HM) qui permettent d'obtenir, entre autres, les renseignements suivants :

i) ASTRE

- le nombre d'entrées-sorties (E/S),
- l'histogramme des temps de réponse des périphériques, et par la suite leur moyenne,

- l'histogramme des temps de calcul entre deux entrées-sorties,
- les transitions entre périphériques : pour un périphérique i on mesure le nombre d'E/S sur un périphérique j sachant que l'E/S précédente a eu lieu sur le périphérique i.

ii) HM

- la durée total d'exécution d'un programme, et le temps CPU correspondant. Ces données permettent de calculer le taux d'utilisation de l'unité centrale,
- le nombre d'E/S,
- le temps d'occupation du contrôleur de disque, ce qui fournit son taux d'utilisation.

Notons que les mesures réalisées conjointement par HM et par ASTRE coïncident de façon satisfaisante, ce qui nous conduit à négliger l'influence de l'outil logiciel sur les performances du système.

La charge mesurée est constituée de six chaînes programmes de gestion (compilations et éditions de liens COBOL, tris, traitements de fichiers, etc...) qui font intervenir de nombreux périphériques à l'exclusion des périphériques lents. Cette charge est mesurée en monoprogrammation puis en multiprogrammation. Les mesures en monoprogrammation permettent de constituer un jeu de données pour nos modèles comme nous l'indiquons au paragraphe suivant. Les mesures en multiprogrammation fournissent les données de comparaison avec les résultats de ces modèles.

III.2.3 - Problèmes posés pour la modélisation

Notre but est de construire puis de valider un modèle analytique simple de type BCMP capable de prédire les performances du système. Les caractéristiques de GCOS-64 et les conditions d'obtention des mesures laissent présager un certain nombre de difficultés :

- Dans le cadre de l'étude considérée, le système GCOS-64 effectue du traitement pas lots à degré de multiprogrammation faible. Notons que la version du système étudiée ici est relativement ancienne et qu'en conséquence les résultats obtenus ne sont pas nécessairement applicables à la version actuelle.

- En multiprogrammation, les programmes appartiennent à quatre classes, de priorités différentes. On conçoit bien que, suivant les caractéristiques de ces programmes l'influence de ces priorités va être grande. Par exemple, le débit global du système sera certainement accéléré si les programmes effectuant des E/S nombreuses sont prioritaires par rapport à ceux qui sont plutôt des consommateurs de temps CPU.

- Les mesures en monoprogrammation sont conduites avec une configuration mémoire de 1024 K tandis que celles réalisées en multiprogrammation le sont avec 160 K. En conséquence, nous pouvons prévoir une augmentation du nombre des E/S en multiprogrammation en raison de défauts de segment supplémentaires.

- Pour la deuxième série de mesures, le degré de multiprogrammation n'est pas en réalité constant. En effet les mesures débutent avec le premier programme entré dans le système, et s'achèvent avec le dernier programme terminé, et les durées d'exécution pour chaque voie de multiprogrammation sont très différentes.

- Enfin, les mesures disponibles en multiprogrammation ne concernent que les taux d'utilisation CPU et MSC principalement, ce qui limite les possibilités de validation.

III.3 - Les modèles étudiés

III.3.1 - Utilisation des données brutes

En monoprogrammation, les données dont nous disposons portent sur chacun des programmes (notés $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$) qui composent la charge mesurée. Il s'agit de modéliser le système en quadriprogrammation avec quatre niveaux de priorité (notés c_1, c_2, c_3, c_4). Les priorités des programmes sont les suivantes :

Programmes	Priorité
p_1, p_2	c_1
p_3, p_4	c_2
p_5	c_3
p_6	c_4

ordre des priorités :

$$c_3 < c_1 < c_2 < c_4$$

Les programmes p_1 et p_2 sont lancés séquentiellement, de même pour p_3 et p_4 .

Les données et les caractéristiques globales du système nous permettent d'élaborer initialement deux modèles à réseau de files d'attente de type serveur central.

i) Modèle A

Schématisé figure 3, ce modèle est constitué d'une unité centrale (CPU) et d'un ensemble de stations qui correspondent à chacun des périphériques utilisés (DSYS, DK1, DK2, DK3, TP1, TP2, TP3, TP4, TP5). Le réseau est parcouru par 4 clients appartenant à 4 classes différentes (c_1, c_2, c_3, c_4). Les paramètres du modèle sont déterminés pour chaque classe de la façon suivante :

- a) temps moyen de service à l'unité centrale pour une classe c_i (noté t_{CPU}^i) :

$$t_{CPU}^i = \frac{\text{temps de calcul total pour les programmes de priorité } c_i}{\text{nombre total d'E/S pour les clients de priorité } c_i}$$

- b) temps moyen de service pour un périphérique j et les programmes de priorités c_i (noté t_j^i) :

$$t_j^i = \text{temps de réponse du périphérique } j$$

En réalité ce temps de réponse représente la durée moyenne d'une E/S pour le sous-système canal-périphérique et ne comprend pas la durée d'attente au niveau canal logique. Cependant en monoprogrammation, et avec un seul tampon d'E/S, il n'y a pas d'attente au niveau canal logique.

- c) probabilité de transition de l'unité centrale vers le périphérique j pour des programmes de priorité c_i (p_j^i) :

$$p_j^i = \frac{\text{nombre d'E/S réalisées sur le périphérique } j \text{ par les programmes de priorité } c_i}{\text{nombre total d'E/S effectuées par les programmes de priorité } c_i}$$

ii) Modèle B

Ce deuxième modèle comporte une unité centrale (CPU) et les contrôleurs de disques et bandes (MSC, MTC) utilisés (figure 4). Les 4 clients appartiennent à quatre classes principales (C1, C2, C3, C4) subdivisées à la sortie de l'unité centrale en fonction du périphérique utilisé pour tenir compte des différents temps de réponse :

Classes	Périphériques
C1 → C11 C12	CPU → DSYS DK1
C2 → C21 C22 C23 C24 C25	CPU → DSYS DK2 TP1 TP2 TP3
C3 → C31 C32 C33 C34	CPU → DSYS DK3 TP4 TP5
C4 → C41 C42 C43	CPU → DSYS DK3 DK2

Paramètres du modèle :

- le temps moyen de service à l'unité centrale est défini comme pour le modèle A.
- les probabilités de transition p_{ij} de la classe c_i vers la classe c_{ij} sont tels que : $p_{ij} = p_j^i$.
- le temps moyen de service au contrôleur correspondant pour la classe c_{ij} , soit t_{ij} est défini par l'égalité : $t_{ij} = t_j^i$.

Les données du modèle A et du modèle B exprimées dans le langage de QNAP sont présentées en annexes III.3.1 et III.3.3.

Notons que ces modèles ne tiennent pas compte des transitions entre périphériques. En effet, s'il est très simple de modéliser ce processus en introduisant des classes supplémentaires comme pour l'exemple du paragraphe IV.1 Chapitre II, nous n'avons aucun renseignement sur les temps de réponse des périphériques concernés ou du temps de calcul à l'unité centrale après une telle transition. En conséquence, pour un modèle analytique de type BCMP, la modélisation de ces transitions n'apporte pas de résultats supplémentaires (pour s'en convaincre, le lecteur pourra comparer les résultats des modèles A et Abis en annexes III.3.1 et III.3.2).

Au niveau de la station CPU, des contrôleurs pour le modèle B, et de certains périphériques pour le modèle A, les temps de services pour chaque classe sont différents. En conséquence, pour une modélisation à l'aide d'un réseau vérifiant les hypothèses BCMP, la politique de rangement dans la file ne pourra pas être celle du système réel mais sera DAPS-PR (ou, ce qui revient au même du point de vue des résultats, la politique de service sera processeur partagé). Nous examinerons l'impact de ce choix à l'aide de modèles simulés, avec les mêmes paramètres que les modèles analytiques à l'exception des politiques de service :

- priorités et préemption pour CPU (SCHED = FIFO, CLASS, PREEMPT)
- PAPS pour les périphériques ou contrôleurs (SCHED = FIFO)

L'hypothèse de base du modèle A est qu'il n'existe pas de conflit d'accès au niveau des canaux physiques, ce qui est vrai en monoprogrammation, mais faux en multiprogrammation. A l'inverse le modèle B suppose que lorsque des E/S sont en cours, le canal physique est toujours occupé.

Les résultats complets sont présentés en annexes III.3.1 et III.3.3, et sont résumés ci-dessous.

	utilisation CPU	nb moyen de clients CPU	utilisation MSC	nb moyen de clients MSC	utilisation MTC	nb moyen de clients MTC
Modèle A			-	-	-	-
analytique	.962	2.676	-	-	-	-
simulé	.962	2.527	-	-	-	-
E	0 %	6 %	-	-	-	-
Modèle B						
analytique	.865	2.145	.755	1.553	.280	.302
simulé	.837	1.864	.865	1.932	.192	.204
E	3 %	15 %	13 %	20 %	46 %	48 %
Mesures	.752	-	.462	-	-	-

$$E = \frac{\text{Méthode analytique} - \text{Simulation}}{\text{Simulation}}$$

Conclusions :

- les écarts observés entre les modèles analytiques ou simulé et les mesures réelles sont très importantes pour les résultats que nous pouvons comparer :

	taux d'utilisation CPU	taux d'utilisation MSC
Modèle A analytique	- 28 %	-
Modèle B. analytique	- 15 %	- 60 %

(les écarts indiqués ci-dessus représentent la quantité :

$$\frac{\text{Mesures} - \text{Méthode analytique}}{\text{Mesures}} \text{)}$$

- les politiques de service ne semblent pas avoir une influence prépondérante sur les résultats en particulier en ce qui concerne les taux d'utilisation à l'unité centrale.

- pour le modèle B, le taux d'utilisation du canal disques est sur-évalué. Ce dernier point peut être interprété en remarquant que ce canal, ainsi que le canal bandes n'est pas occupé pendant la durée totale d'une entrée-sortie.

Schématiquement :

- le canal bandes est occupé pendant le transfert des informations,
- le canal disques est occupé pendant le temps de latence et le temps de transfert.

Pour tenir compte de ces considérations, nous pouvons, en fonction des données disponibles, construire un modèle où le sous-système canal-disques est mieux représenté.

iii) modèles C et D

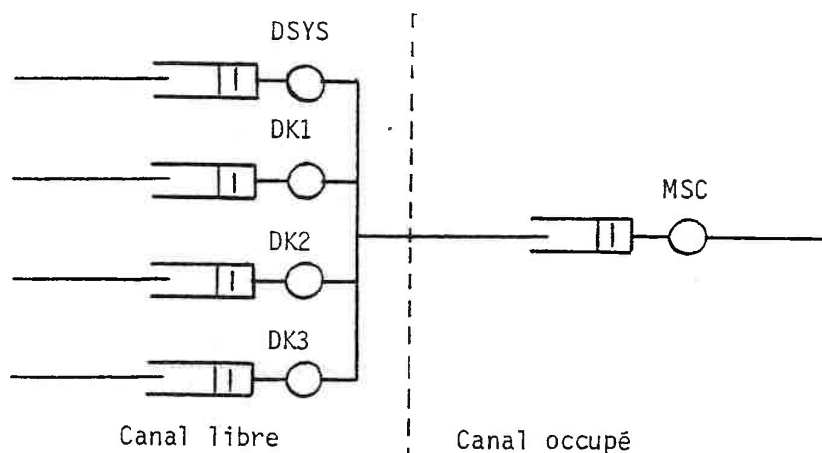
Soit T la durée moyenne d'une entrée-sortie, T_1 la durée moyenne canal libre, T_2 la durée moyenne canal occupé. Les mesures par HM des programmes en monoprogrammation nous permettent de disposer du temps d'occupation total du contrôleur de disques, et connaissant le nombre d'E/S sur disques nous pouvons calculer T_2 .

Priorités	Temps total d'occupation MSC	Nombre total d'E/S disques	Temps moyen MSC par E/S disques
C1	388s	26927	14.4 ms
C2	446s	39931	11.2 ms
C3	91.4s	5857	15.6 ms
C4	623s	42363	14.7 ms

En supposant d'autre part que pour les disques concernés, et relativement à chaque voie de multiprogrammation la durée d'occupation du canal est la même, nous en déduisons T_1 :

	DSYS	DK1	DK2	DK3
C1	5.6	17.0	-	-
C2	2.6	-	7.2	-
C3	8.9	-	-	5.4
C4	10.5	-	7.1	5.8

L'ensemble canal-disques sera représenté de la manière suivante :



Ne disposant pas d'information sur le taux d'utilisation du canal-bandes nous résolvons les modèles C et D pour lesquels le sous-système canal-bandes est modélisé comme pour les modèles A et B respectivement (cf. figures 5-6). De même que pour les modèles A et B nous comparerons avec les modèles simulés associés. Les résultats complets des modèles analytiques sont présentés en annexes III.3.4 et III.3.5, d'où nous tirons le tableau suivant :

	Taux d'utilisation CPU	Taux d'utilisation MSC	Taux d'utilisation MTC
Modèle C			
analytique	.930	.551	-
simulé	.940	.691	-
écart	1 %	20 %	-
Modèle D			
analytique	.928	.550	.276
simulé	.920	.677	.145
écart	1 %	18 %	90 %
Mesures	.752	.462	-

Conclusions :

- Les écarts sur les taux d'utilisation entre méthode analytique et simulation sont très faibles pour le CPU, acceptables pour le MSC, tout à fait prohibitifs pour le MTC tout en remarquant que pour ce dernier cas la valeur trouvée est, en simulation, peu élevée ce qui explique la valeur de l'écart relatif.

- En ce qui concerne les comparaisons entre modèle analytique et mesures réelles, nous observons bien une amélioration pour le taux d'utilisation du contrôleur disque, mais une dégradation pour le CPU :

	Taux d'utilisation CPU	Taux d'utilisation MSC
Modèle C	- 24 %	- 19 %
Modèle D	- 23 %	- 19 %

- Notons enfin que les résultats obtenus par les deux modèles analytiques sont à peu près identiques, l'avantage du modèle D étant de fournir directement un ordre de grandeur du taux d'utilisation du contrôleur bandes.

III.3.2 - Données corrigées

Comme nous l'avons indiqué, ces modèles ne tiennent pas compte des défauts de segments supplémentaires causés par la diminution de taille mémoire en quadriprogrammation. Nous disposons de mesures (par HM) sur le nombre de défauts de segments pour des tailles mémoires différentes :

programme taille	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	Total
1024 K mono	5490	1012	279	146	427	491	7855
96 K mono	7046	3490	998	725	983	1056	14298
160 K quadri	-	-	-	-	-	-	19800

En supposant en première approximation qu'en quadriprogrammation les programmes se partagent équitablement la mémoire (soit 40 K), nous ajustons le nombre de défauts de segments en utilisant pour chacun d'entre eux un modèle du type :

$$d = am^k \quad (\text{cf. [BeK69, BuJ77]})$$

où d est le nombre de défauts de segments, m la taille mémoire disponible, a et k deux coefficients à déterminer en fonction des mesures disponibles. Nous obtenons alors :

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	Total
Modèle 160 K quadri	7730	5520	1600	1280	1340	1400	18870

soit un total assez proche des mesures sur le système réel.

Ces entrées-sorties vont s'effectuer sur le disque système (DSYS). Si d'autre part, nous supposons que le temps CPU total n'est pas trop perturbé par l'augmentation du nombre d'E/S, le temps moyen de calcul entre deux E/S sera modifié de la manière suivante :

Priorités	C1	C2	C3	C4
Temps moyen de calcul par E/S	27.5	8.4	15.9	14.3

En fonction de ces nouvelles données nous obtenons :

	Taux d'utilisation CPU	Taux d'utilisation MSC	Taux d'utilisation MTC
Modèle C analytique	.913	.587	-
Modèle D analytique	.910	.586	.278
Mesures	.752	.462	-
Ecart	- 21 %	- 27 %	-

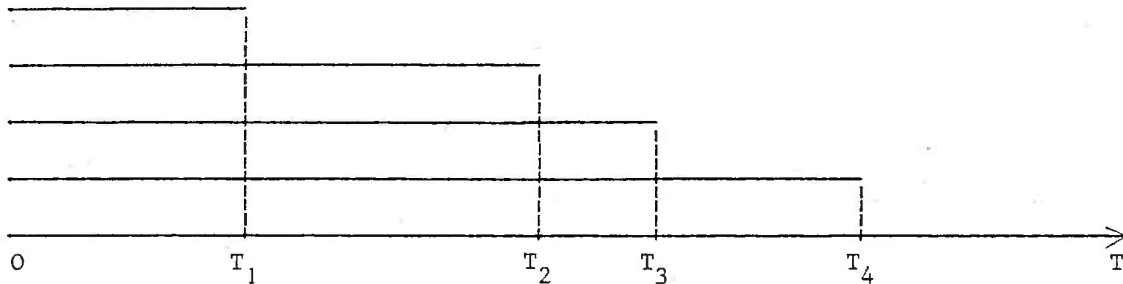
Conclusions :

- là encore l'écart entre les modèles C et D est négligeable,
- l'écart avec les mesures réelles n'est que peu modifié et la différence de taille mémoire n'explique pas, à l'évidence, la différence observée.

III.3.3 - Influence de la durée d'exécution des programmes en quadriprogrammation

La dernière cause apparente de surévaluation des taux d'utilisation des ressources est l'hypothèse selon laquelle le degré de multiprogrammation reste constant. En effet si l'on peut considérer que le processus de mesure débute avec les 4 niveaux de priorité actifs, ce n'est plus le cas même approximativement lorsque le processus est clos. Nous pouvons envisager une procédure d'ajustement des taux d'utilisation des ressources à condition de pouvoir prédire la durée d'exécution de chacun des programmes en multiprogrammation, ou tout au moins le

rapport de leur durée et de celle du plus long des programmes. Soient T_1, T_2, T_3, T_4 , la durée d'exécution totale des programmes de priorités $C1, C2, C3, C4$:



dans notre exemple la durée d'exécution total est T_4 . Nous avons :

Degré de multiprogrammation	Fraction du temps total d'exécution
4	$t_4 = \frac{T_1}{T_4}$
3	$t_3 = \frac{T_2 - T_1}{T_4}$
2	$t_2 = \frac{T_3 - T_2}{T_4}$
1	$t_1 = \frac{T_4 - T_3}{T_4}$

et si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les taux d'utilisation de la ressource considérée avec un degré de multiprogrammation de 1, 2, 3 et 4 respectivement et les programmes correspondants, nous prendrons comme taux d'utilisation global la quantité :

$$U = U_1 t_1 + U_2 t_2 + U_3 t_3 + U_4 t_4$$

les rapports de durée que nous avons cités dépendent du programme considéré, mais aussi des programmes avec lesquels il est en concurrence et en particulier de leurs priorités relatives.

Faute d'un modèle permettant de déterminer ces rapports, nous avons utilisé les résultats recueillis en multiprogrammation à l'aide de la comptabilité du système. Il ne s'agit donc pas d'une validation mais bien plus modestement d'une vérification de l'importance du point que nous considérons ici.

Programmes	Durée totale d'exécution
$P_1 + P_2$	2626.8 s
$P_3 + P_4$	2759.4 s
P_5	3643.2 s
P_6	1389.4 s

Modèle C

Programmes concurrents	utilisation CPU	utilisation MSC
$P_1 + P_2, P_3 + P_4, P_5, P_6$	.913	.587
$P_1 + P_2, P_3 + P_3, P_5$	.869	.470
$P_3 + P_4, P_5$	.687	.378
P_5	.490	.065

Modèle D

Programmes concurrents	utilisation CPU	utilisation MSC	utilisation MTC
$P_1 + P_2, P_3 + P_4, P_5, P_6$	.910	.586	.278
$P_1 + P_2, P_3 + P_4, P_5$	.863	.466	.329
$P_3 + P_4, P_5$	.666	.367	.414
P_5	.490	.065	.418

En fonction de la pondération proposée nous avons :

	Taux d'utilisation CPU	Taux d'utilisation MSC	Taux d'utilisation MTC
Mesures	.752	.462	-
Modèle C analytique	.787	.413	-
écart	- 4.7 %	10.6 %	-
Modèle D analytique	.783	.411	.332
écart	- 4.1 %	11.8 %	-

les résultats concordent alors avec une approximation très acceptable à la fois sur les taux d'utilisation CPU et MSC.

Les mêmes modèles traités en simulation donnent les résultats suivants :

	Taux d'utilisation CPU	Taux d'utilisation MSC	Taux d'utilisation MTC
Mesures	.752	.462	-
Modèle C simulé	.789	.477	-
écart	- 4.9 %	- 3.2 %	-
Modèle D simulé	.785	.469	.271
écart	- 4.4 %	- 1.4 %	-

Ces résultats sont satisfaisants globalement et en particulier en ce qui concerne les taux d'utilisation du contrôleur de disques, et restent proches de ceux obtenus à l'aide des modèles analytiques.

III.4 - Conclusion

L'étude qui précède, si elle n'a pas débouché sur une validation complète d'un modèle analytique du système concerné a tout au moins permis de relever quelques points importants pour une itération éventuelle du processus de modélisation :

i) L'influence des politiques de service est peu sensible en ce qui concerne le taux d'utilisation à l'unité centrale, et ne conduit pas à des différences excessives en ce qui concerne les contrôleurs.

ii) Les défauts de segments induits par la diminution de la taille mémoire perturbe très peu les résultats pour la charge considérée (ce qui ne préjuge pas des conséquences pour une charge plus importante).

iii) La validation du modèle est conditionnée par la mise au point d'un modèle permettant de déterminer les durées d'exécution des programmes en multiprogrammation.

Si une étude plus approfondie des deux premiers points pouvait contribuer à l'amélioration d'un modèle, seul le dernier point paraît prépondérant et pose a priori des difficultés importantes exigeant un travail considérable de recueil de mesures en raison du nombre de paramètres qui semblent régir les phénomènes (temps d'exécution en monoprogrammation, priorités relatives et caractéristiques des programmes concurrents, distribution des temps de calcul et des temps de réponse des périphériques, etc...). Un modèle statistique pourrait alors être construit.

Notons par ailleurs que la signification des mesures sur le système réel en multiprogrammation est discutable suivant le type d'enseignement que l'on compte en tirer. En particulier, ces mesures ne donnent pas un reflet exact de l'engorgement du système. En effet si, globalement, le taux d'utilisation CPU par exemple est égal à .752 ce qui correspond à un système modérément chargé, ce taux d'utilisation est élevé (de l'ordre de .90) lorsque quatre programmes sont en concurrence, et c'est ce dernier résultat qu'il faudrait retenir dans le cadre d'un problème de dimensionnement du système.

Tous les problèmes de modélisation étant supposés résolus, nous pouvons envisager une phase de prédiction des performances du système pour des configurations légèrement modifiées. Considérons à titre d'exemple les deux cas suivants :

i) adjonction d'un deuxième canal disques

On peut espérer améliorer les performances du système en doublant le canal disques dans le but de diminuer les blocages à ce niveau. Nous supposons que les entrées-sorties se répartissent également sur chacun des canaux et que les paramètres du modèle restent inchangés, en particulier les rapports de durée d'exécution des programmes.

Le modèle C est modifié de façon à représenter cette nouvelle configuration en remplaçant la station MSC par deux stations identiques MSC1 et MSC2 (cf. annexe III.3.6 et figure 7).

Les résultats calibrés par la méthode indiquée en III.3.3 font ressortir un taux d'utilisation pour la station CPU de .803 soit un gain mineur de 2.4 % par rapport au même modèle avec un seul canal. Pour justifier la remarque faite précédemment quant à la signification des résultats pour la chaîne prise dans son ensemble nous noterons que le programme p_5 s'exécute seul pendant 24 % du temps total d'exécution de la chaîne avec 6 % d'utilisation pour le canal disque.

En quadriprogrammation pure, le taux d'utilisation pour la station CPU est de .944 soit 3.3 % de mieux par rapport au modèle avec un canal. En conséquence, pour la charge considérée, l'adjonction d'un canal disques supplémentaire paraît inutile, ce qui était d'ailleurs prévisible à priori en considérant le taux d'utilisation très modéré de ce canal.

ii) augmentation de la vitesse de l'unité centrale

Nous supposons que l'augmentation de la vitesse de traitement d'un facteur x se traduit par une diminution égale de la consommation CPU moyenne par E/S des programmes, et que les autres paramètres du modèle restent inchangés.

Le critère de performance auquel nous nous intéressons ici est le débit du système en terme de nombre de programmes terminés par unité de temps. La fin d'exécution d'un programme est modélisé par un rebouclage sur la station CPU afin de conserver un degré de multiprogrammation constant dans le système. La probabilité de transition correspondante est donnée par :

$$P_{CPU,CPU}^i = \frac{1}{\text{nombre total d'E/S pour les programmes de priorité } C_i+1}$$

Le débit recherché est le débit dans la branche CPU-CPU (auquel nous avons accès en introduisant une station fictive à taux de service infini).

Nous obtenons les résultats suivants :

x	Taux d'utilisation CPU		Taux d'utilisation MSC		Débit (prog/100s)	
	calibré	quadri	calibré	quadri	calibré	quadri
1.	.787	.913	.413	.587	.1167	.1393
1.25	.730	.857	.472	.673	.1343	.1618
1.5	.676	.798	.518	.738	.1482	.1793
1.75	.625	.741	.553	.786	.1591	.1928
2.	.580	.687	.580	.822	.1679	.2032
2.25	.539	.638	.601	.849	.1749	.2114
2.5	.502	.594	.618	.870	.1806	.2179
2.75	.470	.555	.631	.886	.1853	.2223
3.	.441	.519	.642	.899	.1892	.2273

Comme prévu, le taux d'utilisation CPU diminue lorsque x augmente et c'est le canal disques qui devient le point de blocage. Le débit du système croît mais il est intéressant de noter que le gain marginal obtenu en augmentant x de .25 décroît lorsque x croît (ce gain est calculé par $\frac{\text{débit}(x + .25) - \text{débit}(x)}{\text{débit}(x + .25)}$).

Facteur d'accroissement vitesse U.C.	1.25	1.5	1.75	2.	2.25	2.5	2.75	3.
Gain sur le débit, : calibré	13.1	9.4	6.7	5.2	4.0	3.2	2.5	2.1
en quadriprogrammation	13.9	9.8	7.0	5.1	3.9	3.0	2.3	1.9

CONCLUSION

Nous avons présenté dans la première partie de ce mémoire un outil logiciel qui automatise la résolution des modèles de systèmes informatiques lorsque ces modèles sont mis sous la forme de réseaux de files d'attente généraux. Ces réseaux sont décrits et paramétrés à l'aide d'un langage de description spécifique qui, joint à la possibilité d'utiliser conjointement différentes techniques de résolution, permet de traiter des modèles très complexes.

Les prolongements éventuels de l'étude qui a conduit à la réalisation de QNAP sont d'une part d'améliorer la version actuelle en ce qui concerne les algorithmes qu'elle incorpore (rapidité d'exécution, contrôle de la précision des résultats de simulation, ajout de sorties graphiques, etc...) et d'autre part d'élaborer une méthodologie d'utilisation en particulier sous la forme d'un ensemble de cas typiques étudiés à l'aide de QNAP. Un domaine d'application très riche est dans doute celui des modèles hiérarchique où des sous-réseaux sont analysés de façon approfondie et les résultats injectés dans un modèle global (cf. [BrC75] par exemple). L'étude de méthodes de résolution approchées du type itératif, telles que celle introduite par Chandy et al. [ChH75], peuvent se rattacher à ce genre de préoccupations.

La seconde partie de ce mémoire décrit en détail les algorithmes de calcul relatifs à la méthode analytique BCMP. Cet ensemble constitue l'un des modules de résolution de QNAP. Ce module permet de traiter la presque totalité des réseaux vérifiant les hypothèses du théorème BCMP avec cependant quelques restrictions. Certaines des limitations introduites peuvent être éliminées à peu de frais, (C'est en particulier le cas pour les réseaux ouverts à processus d'arrivée unique dépendant du nombre de clients dans le réseau dont les algorithmes sont en cours d'implantation), tandis que tenter de s'affranchir d'autres semble conduire à des calculs inextricables hors de proportion en général avec l'intérêt que nous pouvons en attendre.

Comme nous pouvons le constater sur les exemples présentés en annexe II.2, les temps de calcul nécessaires pour cette méthode sont le plus souvent très faibles,

ce qui en constitue d'ailleurs l'avantage fondamental. Il paraît donc tout à fait raisonnable d'envisager la réalisation d'un outil interactif limité à la méthode analytique BCMP, dont le langage de description de réseaux serait dérivé de celui de QNAP et pour lequel serait adjoint un programme de modification des paramètres (un tel programme a d'ailleurs existé pour une première version de l'outil).

Enfin, nous avons présenté des exemples d'application qui illustrent la mise en oeuvre de QNAP dans les deux domaines d'activité que nous avons cités en conclusion du chapitre I :

- Recherche en modélisation,
- étude et évaluation des performances des systèmes informatiques.

Les résultats des deux études de robustesse que nous avons entreprises montrent que, pour une assez large plage de valeurs et dans les cas traités, un réseau vérifiant les hypothèses du théorème BCMP constitue une bonne approximation d'un réseau plus général, en particulier en ce qui concerne les taux d'utilisation. Cette approximation peut être utilisée, avec précaution néanmoins, dans le cadre d'applications n'exigeant pas une très grande précision dans les résultats. Nous avons d'autre part étudié un modèle du système d'exploitation GCOS-64, en essayant de bien distinguer les étapes qui mènent à sa validation et en examinant l'influence de différentes hypothèses simplificatrices permettant de traiter le modèle au moyen de la méthode analytique BCMP.

Ces deux dernières applications ainsi que les exemples traités tout au long de ce mémoire montrent bien l'intérêt et la souplesse d'emploi de QNAP. Il est cependant clair que cet outil ne résoud pas dans son intégralité, et n'en a d'ailleurs pas en l'état l'ambition, le problème de la modélisation et ne dispense pas de l'étude préalable du système concerné et de la conception du modèle. Le rôle principal de QNAP est de permettre à l'utilisateur de se consacrer à ces étapes fondamentales.

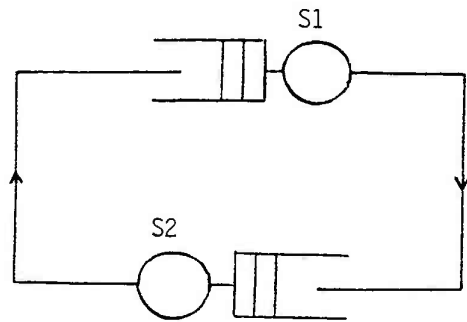


Figure 1

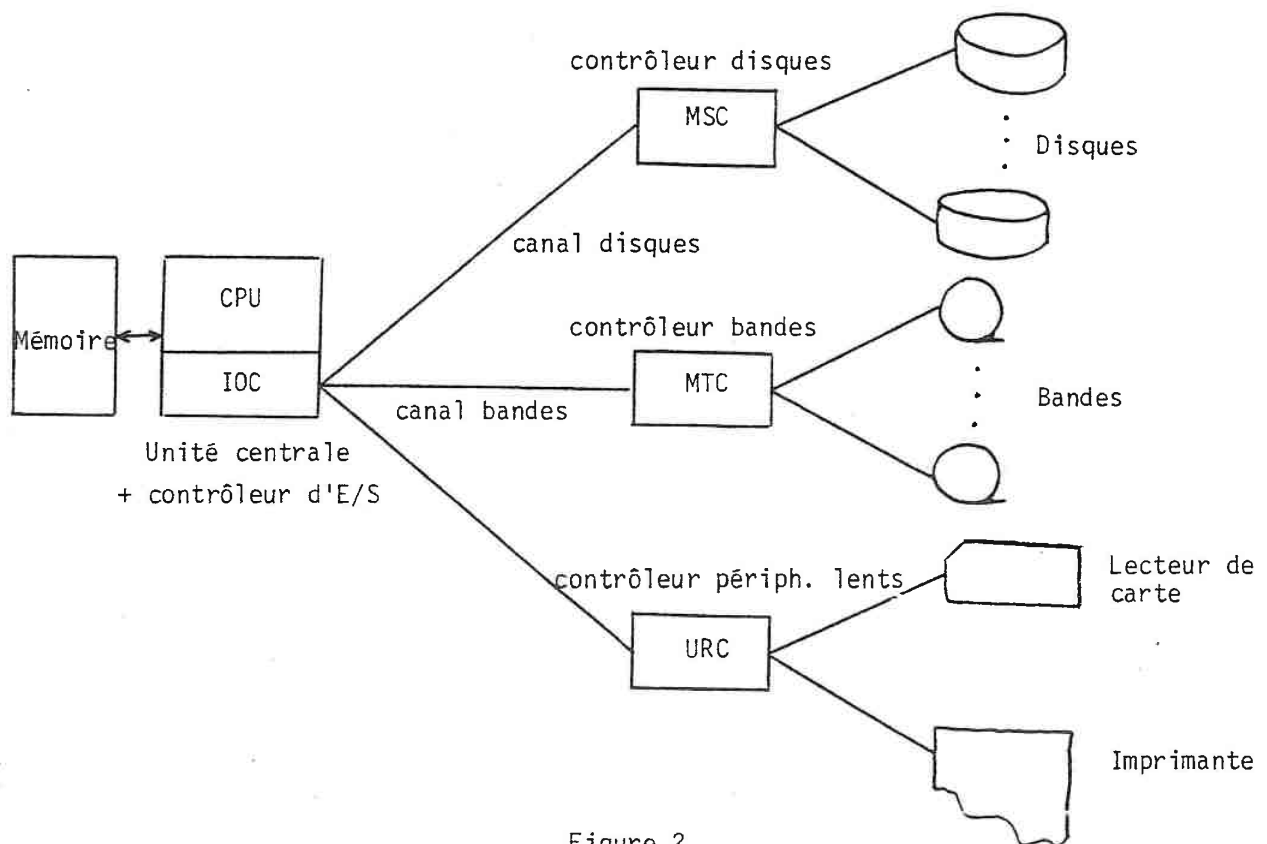


Figure 2

MODELE A

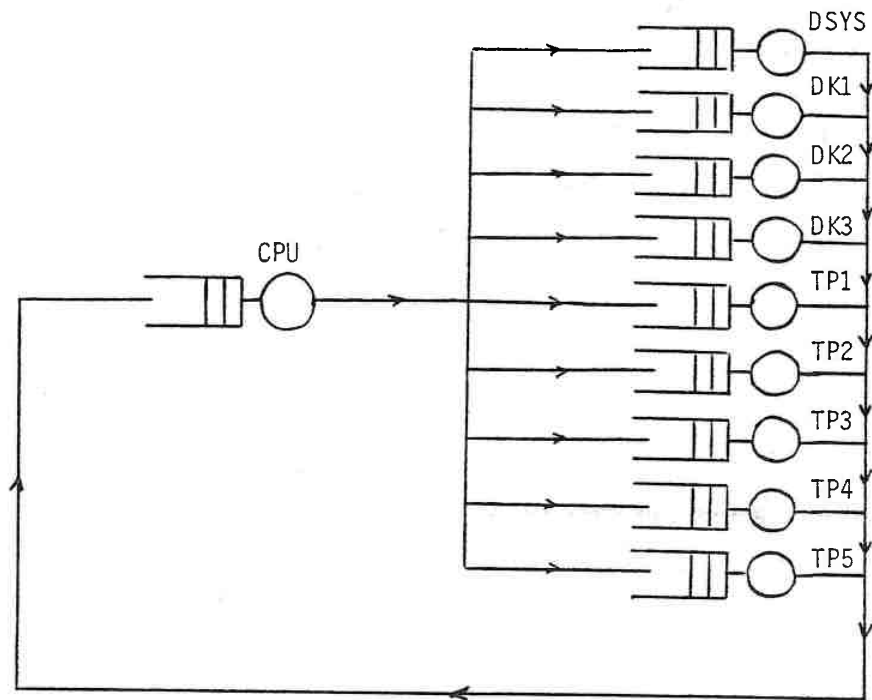


Figure 3

MODELE B

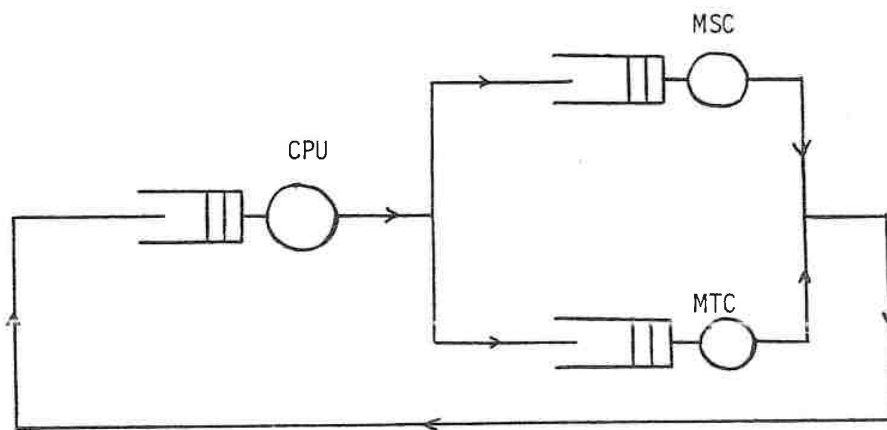


Figure 4

MODELE C

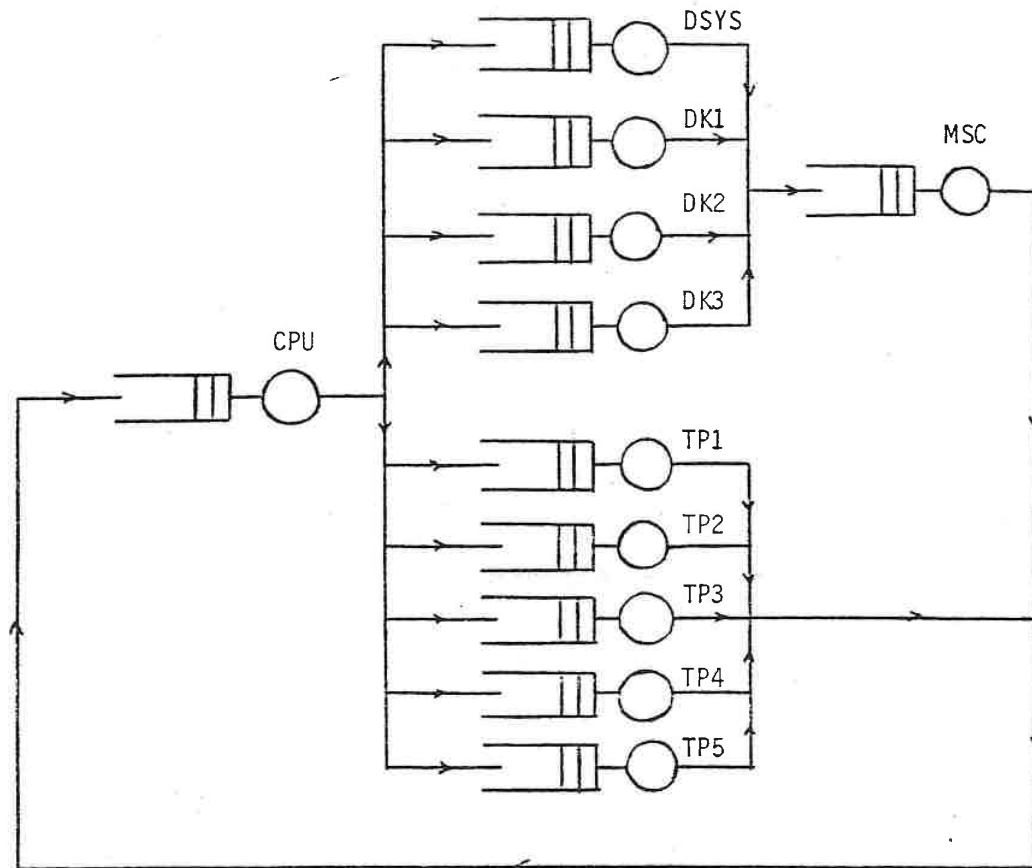


Figure 5

MODELE D

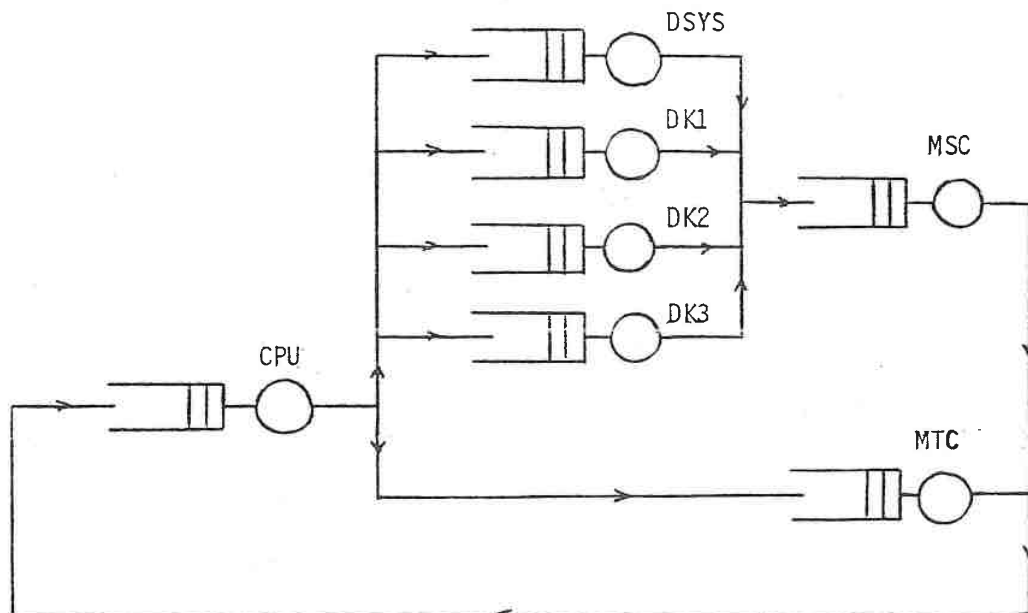


Figure 6

MODELE C (deux canaux disques)

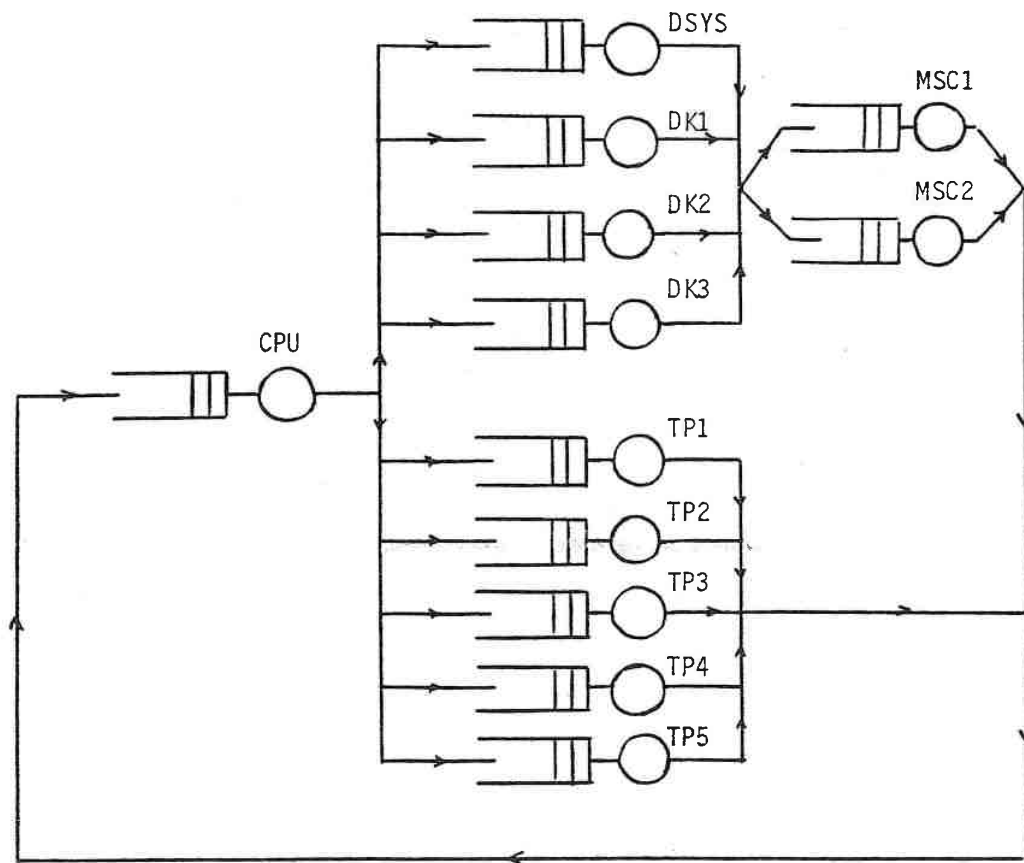


Figure 7

ANNEXE III.1

Station PAPS avec 2 classes de clients

 * R1= .100 R2= .500 *

PROBABILITE DE TRANSITION = .1

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	MARCA	BCMP			INB	MARCA	BCMP		
1	1	.315	.315	.000	1	.315	.315	.000	.000
1	2	.400	.402	.002	1	.531	.528	.002	.452
1	3	.433	.435	.002	1	.671	.664	.007	.984
1	4	.447	.449	.001	1	.758	.747	.012	1.530
1	5	.454	.455	.001	1	.811	.794	.016	1.974
1	6	.457	.458	.001	1	.841	.821	.020	2.343
1	7	.459	.459	.000	1	.858	.836	.022	2.587

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	MARCA	BCMP			INB	MARCA	BCMP		
1	1	.685	.685	.000	1	.685	.685	.000	.000
1	2	.859	.873	.004	1	.469	1.472	.003	.204
1	3	.921	.945	.004	2	.329	.336	.007	.301
1	4	.972	.975	.003	3	.242	.253	.011	.339
1	5	.987	.989	.002	4	.189	.206	.017	.406
1	6	.994	.995	.001	5	.159	.179	.020	.388
1	7	.997	.998	.001	6	.142	.164	.022	.358

PROBABILITE DE TRANSITION = .3

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	MARCA	BCMP			INB	MARCA	BCMP		
1	1	.275	.275	.000	1	.275	.275	.000	.000
1	2	.346	.344	.004	1	.446	.439	.007	1.659
1	3	.363	.367	.004	1	.528	.528	.018	3.387
1	4	.372	.379	.002	1	.603	.573	.030	4.959
1	5	.379	.379	.001	1	.634	.595	.039	6.168
1	6	.379	.379	.000	1	.650	.605	.045	6.981
1	7	.379	.380	.000	1	.659	.609	.049	7.484

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	MARCA	BCMP			INB	MARCA	BCMP		
1	1	.725	.725	.000	1	.725	.725	.000	.000
1	2	.905	.905	.000	1	.561	.554	.007	.450
1	3	.955	.955	.000	2	.479	.479	.016	.733
1	4	.982	.982	.000	3	.427	.427	.030	.883
1	5	.992	.992	.000	4	.400	.400	.039	.893
1	6	.998	.998	.001	5	.399	.399	.045	.841
1	7	.998	.999	.001	6	.391	.391	.050	.789

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.231	.231	.000	1	.231	.231	.000	1
2	1	.276	.005	-1.000	2	.357	.345	.011	3
3	1	.291	.004	-1.000	3	.422	.396	.026	6
4	1	.296	.002	-1.000	4	.455	.416	.038	8
5	1	.299	.001	-1.000	5	.471	.434	.037	9
6	1	.299	.000	-1.000	6	.479	.457	.022	10
7	1	.300	.000	-1.000	7	.483	.428	.055	11

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.769	.769	.000	1	.769	.769	.000	1
2	1	.919	.016	-1.000	2	.643	.555	.012	3
3	1	.989	.012	-1.000	3	.578	.444	.023	4
4	1	.998	.007	-1.000	4	.545	.399	.035	5
5	1	.998	.003	-1.000	5	.539	.366	.047	6
6	1	.998	.001	-1.000	6	.531	.352	.052	7
7	1	.999	.001	-1.000	7	.517	.272	.055	8

PROBABILITE DE TRANSITION = .7

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.180	.180	.000	1	.180	.180	.000	1
2	1	.208	.003	-1.000	2	.262	.250	.012	4
3	1	.216	.002	-1.000	3	.297	.273	.024	6
4	1	.219	.001	-1.000	4	.313	.280	.033	10
5	1	.219	.000	-1.000	5	.320	.281	.038	12
6	1	.220	.000	-1.000	6	.323	.282	.041	12
7	1	.220	.000	-1.000	7	.324	.282	.042	12

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.820	.820	.000	1	.820	.820	.000	1
2	1	.947	.015	-1.000	2	.738	.750	.012	3
3	1	.981	.010	-1.000	3	.703	.727	.024	6
4	1	.993	.005	-1.000	4	.687	.721	.034	9
5	1	.998	.002	-1.000	5	.680	.719	.039	10
6	1	.999	.001	-1.000	6	.677	.718	.041	11
7	1	1.000	.000	-1.000	7	.676	.718	.042	11

PROBABILITE DE TRANSITION = .9

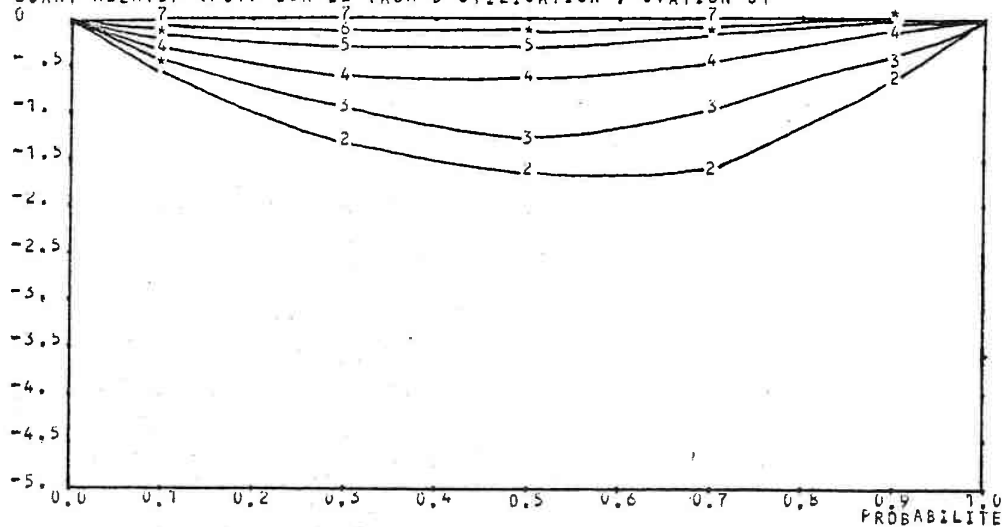
STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.123	.123	.000	1	.123	.123	.000	1
2	1	.137	.001	-1.000	2	.161	.155	.006	3
3	1	.139	.001	-1.000	3	.173	.161	.011	6
4	1	.140	.000	-1.000	4	.177	.163	.014	8
5	1	.140	.000	-1.000	5	.178	.163	.016	8
6	1	.140	.000	-1.000	6	.179	.163	.016	9
7	1	.140	.000	-1.000	7	.180	.163	.017	9

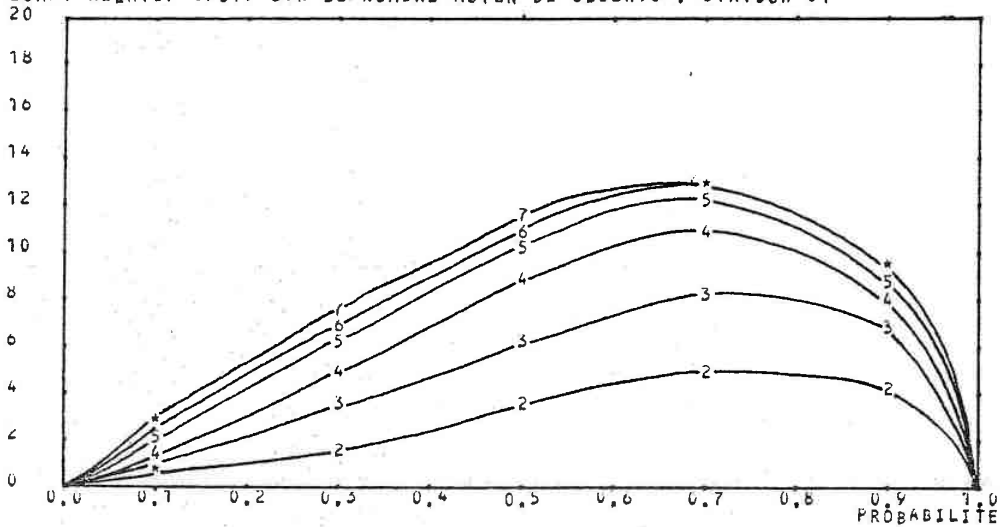
STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.877	.877	.000	1	.877	.877	.000	1
2	1	.976	.007	-1.000	2	.839	.845	.006	3
3	1	.993	.004	-1.000	3	.827	.850	.012	6
4	1	.998	.002	-1.000	4	.823	.854	.016	8
5	1	.999	.001	-1.000	5	.821	.854	.016	8
6	1	1.000	.000	-1.000	6	.820	.854	.017	9
7	1	1.000	.000	-1.000	7	.820	.854	.017	9

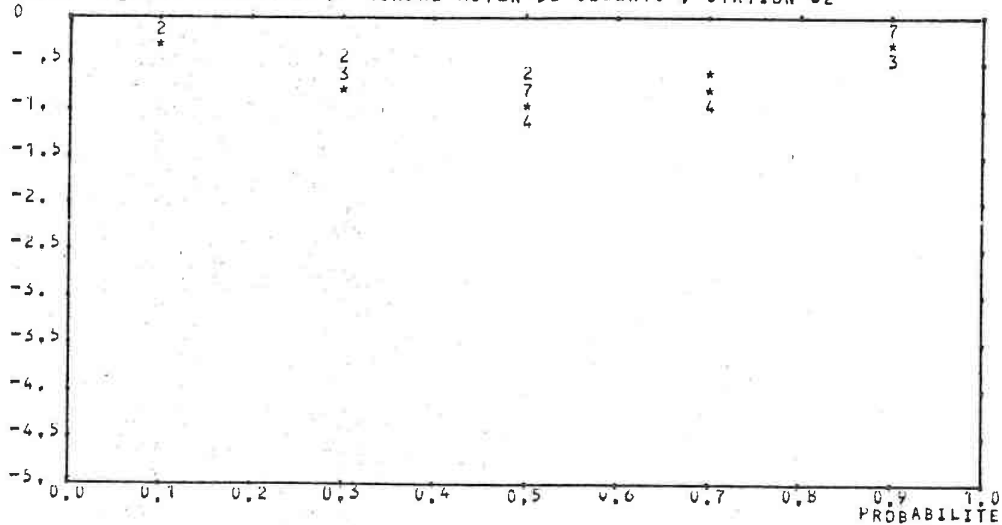
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION, STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS, STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS, STATION S2



 * R1= .100 R2= 1.00 *

PROBABILITE DE TRANSITION = .1

STATION S1

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.476	.476	.000	.000	1	1	.476	.476	.000	.000	1
1	2	.625	.625	.000	.000	1	2	.937	.937	.000	.000	1
1	3	.700	.700	.000	.000	1	3	1.382	1.382	.000	.000	1
1	4	.761	.761	.000	.000	1	4	1.812	1.812	.000	.000	1
1	5	.792	.792	.000	.000	1	5	2.226	2.226	.000	.000	1
1	6	.814	.814	.000	.000	1	6	2.626	2.626	.000	.000	1
1	7	.830	.830	.000	.000	1	7	3.010	3.010	.000	.000	1

STATION S2

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.524	.524	.000	.000	1	1	.524	.524	.000	.000	1
1	2	.689	.689	.000	.000	1	2	1.063	1.063	.000	.000	1
1	3	.784	.784	.010	.010	1	3	1.644	1.644	.000	.000	1
1	4	.826	.826	.010	.010	1	4	1.888	1.888	.000	.000	1
1	5	.861	.861	.009	.009	1	5	2.226	2.226	.000	.000	1
1	6	.888	.888	.008	.008	1	6	2.626	2.626	.000	.000	1
1	7	.905	.905	.008	.008	1	7	3.010	3.010	.000	.000	1

PROBABILITE DE TRANSITION = .3

STATION S1

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.422	.422	.000	.000	1	1	.422	.422	.000	.000	1
1	2	.558	.558	.000	.000	1	2	.792	.792	.000	.000	1
1	3	.625	.625	.000	.000	1	3	1.117	1.117	.000	.000	1
1	4	.659	.659	.000	.000	1	4	1.396	1.396	.000	.000	1
1	5	.682	.682	.000	.000	1	5	1.634	1.634	.000	.000	1
1	6	.697	.697	.000	.000	1	6	1.834	1.834	.000	.000	1
1	7	.706	.706	.014	.014	1	7	2.147	2.147	.000	.000	1

STATION S2

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.578	.578	.000	.000	1	1	.578	.578	.000	.000	1
1	2	.739	.739	.000	.000	1	2	1.206	1.206	.000	.000	1
1	3	.853	.853	.000	.000	1	3	1.883	1.883	.000	.000	1
1	4	.903	.903	.000	.000	1	4	2.604	2.604	.000	.000	1
1	5	.934	.934	.000	.000	1	5	3.366	3.366	.000	.000	1
1	6	.954	.954	.000	.000	1	6	4.166	4.166	.000	.000	1
1	7	.968	.968	.019	.019	1	7	4.998	4.998	.000	.000	1

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB1	MARCA	BCMP			NB1	MARCA	BCMP		NB1
1	1	.355	.355	.000	1	.355	.355	.000	1
2	1	.438	.460	.022	2	.641	.623	.018	2
3	1	.480	.505	.025	3	.869	.849	.050	3
4	1	.505	.536	.021	4	.053	.057	.096	4
5	1	.520	.537	.017	5	.199	.051	.148	5
6	1	.530	.543	.013	6	.311	.114	.197	6
7	1	.536	.546	.010	7	.400	.155	.245	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB1	MARCA	BCMP			NB1	MARCA	BCMP		NB1
1	1	.645	.645	.000	1	.645	.645	.000	1
2	1	.797	.837	.040	2	.359	.377	.018	2
3	1	.873	.918	.045	3	.131	.181	.050	3
4	1	.918	.977	.039	4	.947	.000	.096	4
5	1	.946	.977	.031	5	.801	.949	.148	5
6	1	.964	.987	.023	6	.689	.886	.197	6
7	1	.976	.993	.017	7	.600	.845	.245	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .7

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB1	MARCA	BCMP			NB1	MARCA	BCMP		NB1
1	1	.270	.270	.000	1	.270	.270	.000	1
2	1	.320	.356	.016	2	.455	.427	.028	2
3	1	.353	.388	.016	3	.581	.511	.070	3
4	1	.353	.388	.012	4	.669	.557	.117	4
5	1	.360	.388	.008	5	.729	.577	.157	5
6	1	.364	.389	.006	6	.772	.581	.191	6
7	1	.367	.370	.003	7	.802	.585	.217	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB1	MARCA	BCMP			NB1	MARCA	BCMP		NB1
1	1	.730	.730	.000	1	.730	.730	.000	1
2	1	.805	.809	.044	2	.545	.573	.028	2
3	1	.923	.907	.044	3	.419	.489	.070	3
4	1	.955	.988	.033	4	.331	.448	.117	4
5	1	.974	.966	.022	5	.271	.428	.157	5
6	1	.984	.998	.014	6	.228	.419	.191	6
7	1	.991	.999	.009	7	.198	.416	.218	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .9

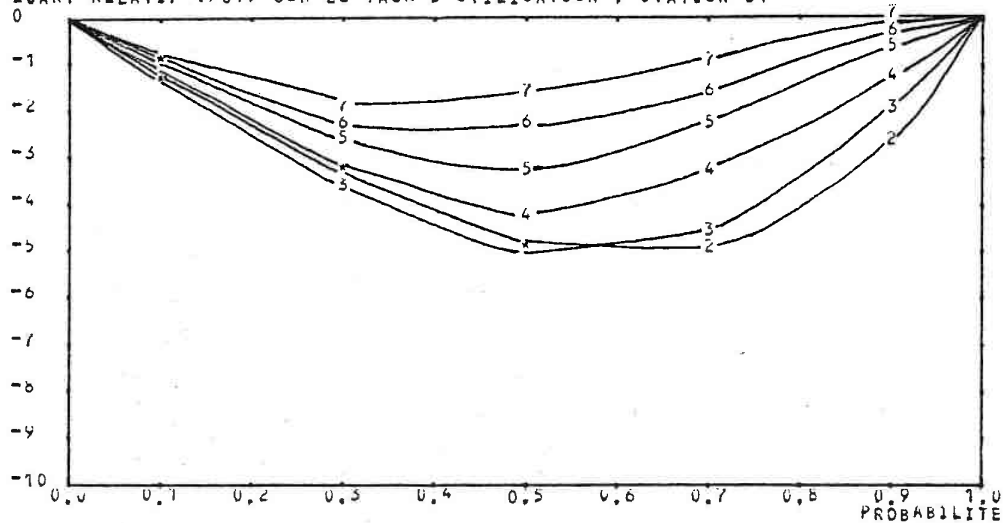
STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB1	MARCA	BCMP			NB1	MARCA	BCMP		NB1
1	1	.160	.160	.000	1	.160	.160	.000	1
2	1	.180	.189	.005	2	.236	.229	.021	2
3	1	.180	.190	.006	3	.270	.263	.023	3
4	1	.180	.190	.006	4	.270	.263	.021	4
5	1	.180	.190	.006	5	.270	.263	.021	5
6	1	.180	.190	.006	6	.270	.263	.021	6
7	1	.180	.190	.006	7	.270	.263	.021	7

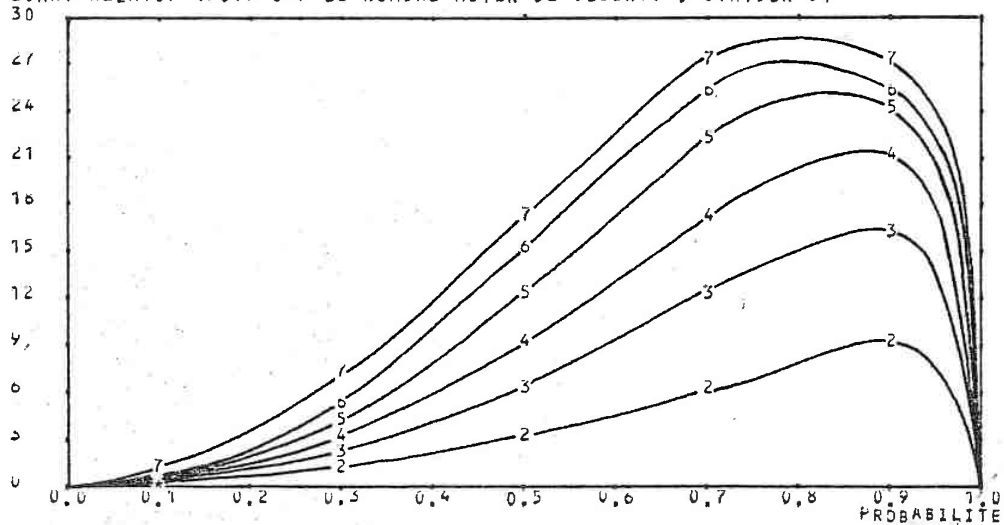
STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB1	MARCA	BCMP			NB1	MARCA	BCMP		NB1
1	1	.840	.840	.000	1	.840	.840	.000	1
2	1	.945	.971	.026	2	.765	.786	.021	2
3	1	.974	.994	.021	3	.728	.771	.043	3
4	1	.986	.999	.012	4	.706	.767	.061	4
5	1	.993	1	.007	5	.693	.766	.073	5
6	1	.996	1	.004	6	.686	.766	.080	6
7	1	.998	1	.002	7	.678	.765	.087	7

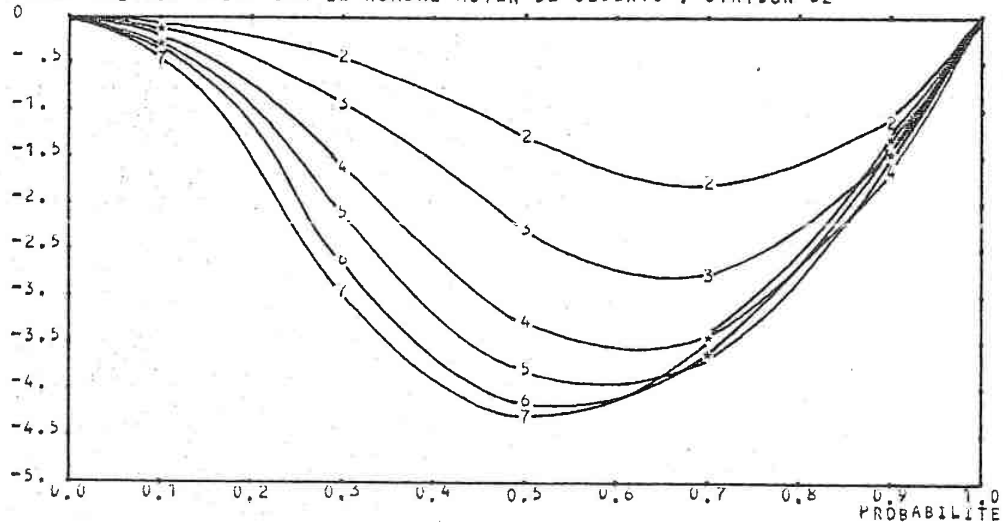
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S2



 * R1= .100 R2= 5.00 *

PROBABILITE DE TRANSITION = .1

STATION S1

I	1	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.818	.000	0.00	1	.818	.818	.000	0.00
2	1	.949	.012	-1.00	2	.739	.748	.009	.518
3	1	.984	.008	-1.00	3	.695	.725	.030	.113
4	1	.996	.002	-1.00	4	.695	.718	.023	.222
5	1	.999	.001	-1.00	5	.689	.716	.027	.376
6	1	.999	.000	-1.00	6	.681	.715	.034	.598
7	1	.999	.000	-1.00	7	.691	.715	.024	.359

STATION S2

I	1	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.182	.000	0.00	1	.182	.182	.000	0.00
2	1	.211	.003	-1.00	2	.261	.252	.009	.399
3	1	.223	.004	-1.00	3	.304	.275	.029	.222
4	1	.220	.001	-1.00	4	.305	.282	.023	.336
5	1	.221	.000	-1.00	5	.311	.284	.026	.500
6	1	.224	.002	-1.00	6	.319	.285	.034	.752
7	1	.220	.001	-1.00	7	.309	.285	.024	.529

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1

I	1	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.779	.000	0.00	1	.779	.779	.000	0.00
2	1	.901	.040	-4.00	2	.646	.675	.029	.755
3	1	.933	.031	-3.22	3	.561	.611	.050	.585
4	1	.978	.017	-1.77	4	.516	.614	.098	.449
5	1	.988	.009	-1.97	5	.468	.608	.140	.369
6	1	.995	.005	-1.99	6	.472	.606	.134	.317
7	1	.995	.002	-1.99	7	.465	.605	.142	.317

STATION S2

I	1	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.221	.000	0.00	1	.221	.221	.000	0.00
2	1	.255	.012	-4.50	2	.354	.336	.029	.481
3	1	.271	.008	-2.88	3	.438	.369	.069	.781
4	1	.277	.005	-1.55	4	.484	.386	.098	.222
5	1	.280	.003	-1.27	5	.512	.392	.119	.389
6	1	.283	.001	-0.34	6	.528	.392	.134	.577
7	1	.283	.000	-0.00	7	.537	.395	.142	.652

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.718	.718	.000	1	.718	.000	.000	1
2	1	.825	.900	-.075	2	.502	1.547	-.045	2
3	1	.887	.962	-.075	3	.329	2.452	-.123	3
4	1	.925	.985	-.060	4	.195	3.402	-.207	4
5	1	.951	.994	-.044	5	.092	4.377	-.285	5
6	1	.967	.998	-.031	6	.015	5.365	-.350	6
7	1	.976	.999	-.021	7	.956	6.359	-.403	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.282	.282	.000	1	.282	.000	.000	1
2	1	.324	.353	-.029	2	.498	.453	.045	2
3	1	.446	.377	.069	3	.671	.558	.113	3
4	1	.363	.388	-.024	4	.805	.593	.207	4
5	1	.373	.390	-.017	5	.906	.633	.273	5
6	1	.379	.391	-.012	6	.985	.635	.350	6
7	1	.383	.392	-.008	7	.644	.641	.403	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .7

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.611	.611	.000	1	.611	.000	.000	1
2	1	.696	.801	-.105	2	.253	1.691	-.038	2
3	1	.750	.888	-.137	3	.000	2.400	-.125	3
4	1	.790	.933	-.141	4	.587	3.411	-.207	4
5	1	.822	.959	-.134	5	.286	4.675	-.285	5
6	1	.850	.975	-.123	6	.007	5.557	-.350	6
7	1	.874	.984	-.110	7	.750	6.468	-.403	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.389	.389	.000	1	.389	.000	.000	1
2	1	.443	.510	-.067	2	.747	.709	.038	2
3	1	.478	.565	-.088	3	.091	.966	.113	3
4	1	.504	.594	-.090	4	.413	1.169	.207	4
5	1	.526	.611	-.085	5	.714	1.325	.273	5
6	1	.543	.621	-.078	6	.933	1.443	.350	6
7	1	.557	.627	-.070	7	.250	1.532	.403	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .9

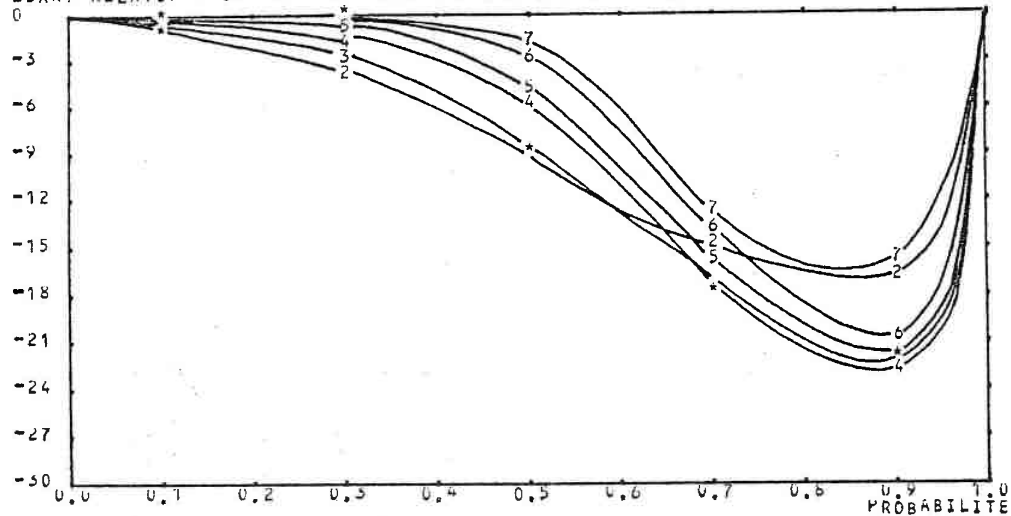
STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.371	.371	.000	1	.371	.000	.000	1
2	1	.414	.484	-.070	2	.712	.664	.049	2
3	1	.436	.534	-.098	3	.021	.887	.133	3
4	1	.450	.566	-.116	4	.217	1.055	.207	4
5	1	.460	.572	-.112	5	.394	1.175	.273	5
6	1	.472	.584	-.112	6	.530	1.260	.350	6
7	1	.485	.595	-.110	7	.250	1.320	.403	7

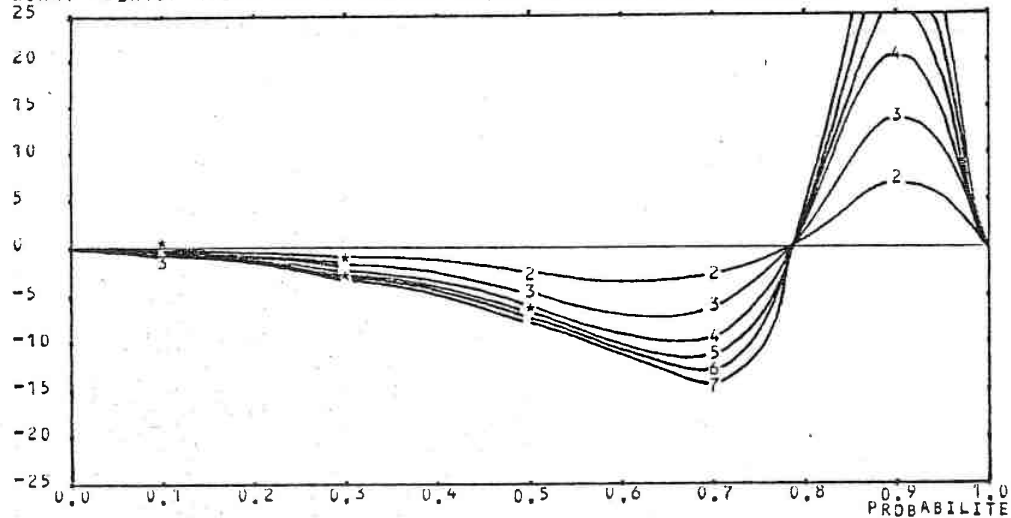
STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.629	.629	.000	1	.629	.000	.000	1
2	1	.702	.820	-.119	2	.288	1.336	-.048	2
3	1	.738	.904	-.166	3	.979	2.113	-.134	3
4	1	.767	.947	-.180	4	.883	2.946	-.263	4
5	1	.792	.969	-.177	5	.406	3.825	-.349	5
6	1	.816	.982	-.167	6	.149	4.740	-.391	6
7	1	.817	.990	-.173	7	.764	5.680	-.416	7

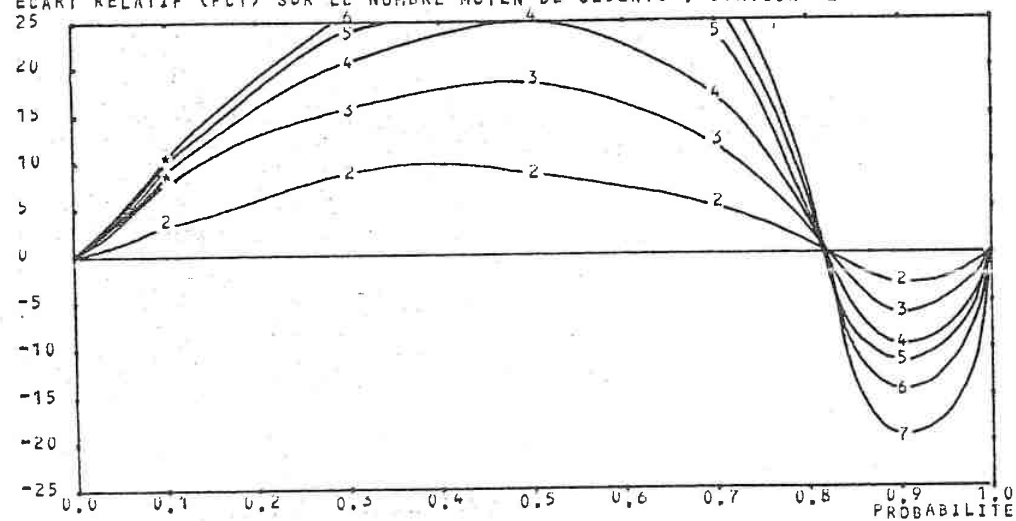
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S2



 * R1= .100 R2= 10.0

PROBABILITE DE TRANSITION = .1

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		INBI
1	1	.900	.900	.000	1	.900	.900	.000	1
2	2	.981	.981	.000	2	.981	.981	.000	2
3	3	.996	.996	.000	3	.996	.996	.000	3
4	4	.999	.999	.000	4	.999	.999	.000	4
5	5	1.000	1.000	.000	5	1.000	1.000	.000	5
6	6	1.000	1.000	.000	6	1.000	1.000	.000	6
7	7	1.000	1.000	.000	7	1.000	1.000	.000	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		INBI
1	1	.100	.100	.000	1	.100	.100	.000	1
2	2	.109	.109	.000	2	.109	.109	.000	2
3	3	.110	.110	.000	3	.110	.110	.000	3
4	4	.111	.111	.000	4	.111	.111	.000	4
5	5	.111	.111	.000	5	.111	.111	.000	5
6	6	.113	.113	.002	6	.113	.113	.002	6
7	7	.115	.115	.004	7	.115	.115	.004	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .3

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		INBI
1	1	.876	.876	.000	1	.876	.876	.000	1
2	2	.984	.984	.000	2	.984	.984	.000	2
3	3	.998	.998	.000	3	.998	.998	.000	3
4	4	.999	.999	.000	4	.999	.999	.000	4
5	5	1.000	1.000	.000	5	1.000	1.000	.000	5
6	6	1.000	1.000	.000	6	1.000	1.000	.000	6
7	7	1.000	1.000	.000	7	1.000	1.000	.000	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		INBI
1	1	.124	.124	.000	1	.124	.124	.000	1
2	2	.136	.136	.000	2	.136	.136	.000	2
3	3	.140	.140	.000	3	.140	.140	.000	3
4	4	.141	.141	.000	4	.141	.141	.000	4
5	5	.142	.142	.000	5	.142	.142	.000	5
6	6	.143	.143	.001	6	.143	.143	.001	6
7	7	.143	.143	.001	7	.143	.143	.001	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.835	.835	.000	.000	1	1	.835	.835	.000	.000	1
2	1	.946	.946	.000	.000	1	2	.946	.946	.000	.000	1
3	1	.971	.971	.000	.000	1	3	.971	.971	.000	.000	1
4	1	.983	.983	.000	.000	1	4	.983	.983	.000	.000	1
5	1	.990	.990	.000	.000	1	5	.990	.990	.000	.000	1
6	1	.994	.994	.000	.000	1	6	.994	.994	.000	.000	1
7	1	.999	.999	.000	.000	1	7	.999	.999	.000	.000	1

STATION S2

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.165	.165	.000	.000	1	1	.165	.165	.000	.000	1
2	1	.180	.180	.000	.000	1	2	.180	.180	.000	.000	1
3	1	.192	.192	.000	.000	1	3	.192	.192	.000	.000	1
4	1	.198	.198	.000	.000	1	4	.198	.198	.000	.000	1
5	1	.198	.198	.000	.000	1	5	.198	.198	.000	.000	1
6	1	.198	.198	.000	.000	1	6	.198	.198	.000	.000	1
7	1	.198	.198	.000	.000	1	7	.198	.198	.000	.000	1

PROBABILITE DE TRANSITION = .7

STATION S1

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.754	.754	.000	.000	1	1	.754	.754	.000	.000	1
2	1	.926	.926	.000	.000	1	2	.926	.926	.000	.000	1
3	1	.960	.960	.000	.000	1	3	.960	.960	.000	.000	1
4	1	.980	.980	.000	.000	1	4	.980	.980	.000	.000	1
5	1	.990	.990	.000	.000	1	5	.990	.990	.000	.000	1
6	1	.995	.995	.000	.000	1	6	.995	.995	.000	.000	1
7	1	.999	.999	.000	.000	1	7	.999	.999	.000	.000	1

STATION S2

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.246	.246	.000	.000	1	1	.246	.246	.000	.000	1
2	1	.302	.302	.000	.000	1	2	.302	.302	.000	.000	1
3	1	.333	.333	.000	.000	1	3	.333	.333	.000	.000	1
4	1	.350	.350	.000	.000	1	4	.350	.350	.000	.000	1
5	1	.356	.356	.000	.000	1	5	.356	.356	.000	.000	1
6	1	.358	.358	.000	.000	1	6	.358	.358	.000	.000	1
7	1	.359	.359	.000	.000	1	7	.359	.359	.000	.000	1

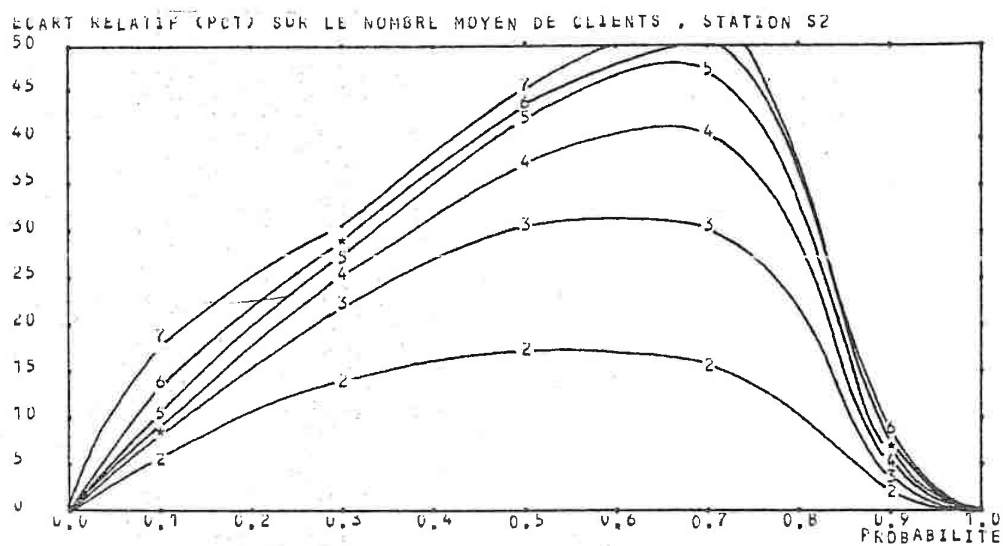
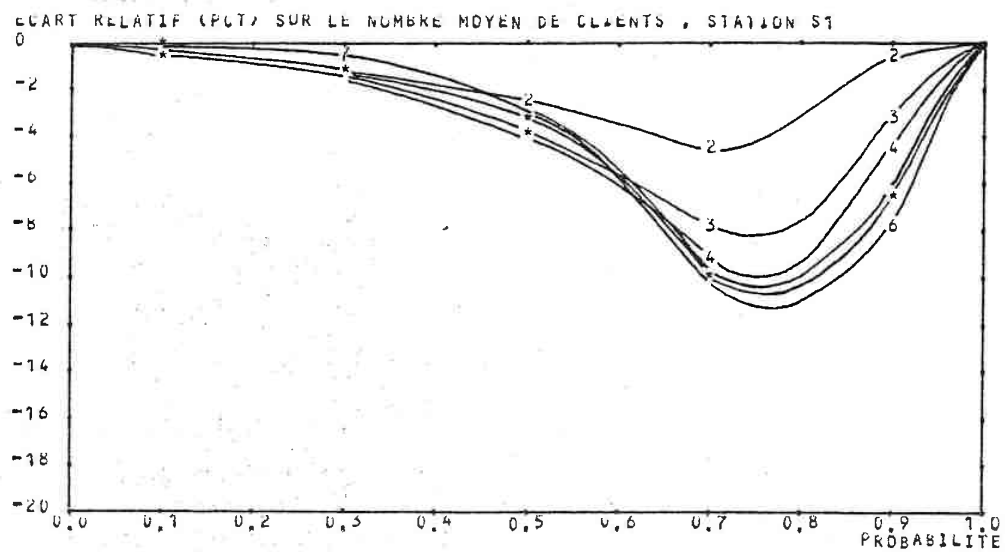
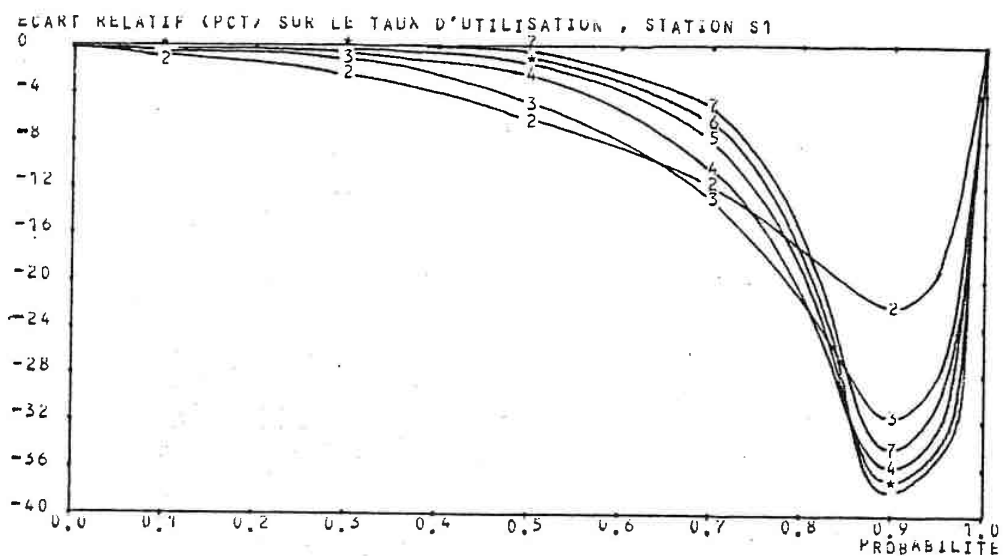
PROBABILITE DE TRANSITION = .9

STATION S1

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.521	.521	.000	.000	1	1	.521	.521	.000	.000	1
2	1	.695	.695	.000	.000	1	2	.695	.695	.000	.000	1
3	1	.781	.781	.000	.000	1	3	.781	.781	.000	.000	1
4	1	.833	.833	.000	.000	1	4	.833	.833	.000	.000	1
5	1	.867	.867	.000	.000	1	5	.867	.867	.000	.000	1
6	1	.891	.891	.000	.000	1	6	.891	.891	.000	.000	1
7	1	.909	.909	.000	.000	1	7	.909	.909	.000	.000	1

STATION S2

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		MARCA	BCMP					MARCA	BCMP			
1	1	.479	.479	.000	.000	1	1	.479	.479	.000	.000	1
2	1	.638	.638	.000	.000	1	2	.638	.638	.000	.000	1
3	1	.717	.717	.000	.000	1	3	.717	.717	.000	.000	1
4	1	.764	.764	.000	.000	1	4	.764	.764	.000	.000	1
5	1	.795	.795	.000	.000	1	5	.795	.795	.000	.000	1
6	1	.818	.818	.000	.000	1	6	.818	.818	.000	.000	1
7	1	.834	.834	.000	.000	1	7	.834	.834	.000	.000	1



 * R1= .500 R2= 1.00 *

PROBABILITE DE TRANSITION = .1

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA BCMP			1	MARCA BCMP			1
1	1	.487	.487	.000	1	.487	.487	.000	1
2	1	.648	.648	.000	1	.648	.648	.000	1
3	1	.727	.727	.000	1	.727	.727	.000	1
4	1	.809	.809	.000	1	.809	.809	.000	1
5	1	.834	.834	.000	1	.834	.834	.000	1
6	1	.851	.851	.000	1	.851	.851	.000	1
7	1	.851	.851	.000	1	.851	.851	.000	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA BCMP			1	MARCA BCMP			1
1	1	.513	.513	.000	1	.513	.513	.000	1
2	1	.682	.682	.000	1	.682	.682	.000	1
3	1	.766	.766	.000	1	.766	.766	.000	1
4	1	.817	.817	.000	1	.817	.817	.000	1
5	1	.851	.851	.000	1	.851	.851	.000	1
6	1	.876	.876	.000	1	.876	.876	.000	1
7	1	.896	.896	.000	1	.896	.896	.000	1

PROBABILITE DE TRANSITION = .3

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA BCMP			1	MARCA BCMP			1
1	1	.460	.460	.000	1	.460	.460	.000	1
2	1	.607	.607	.000	1	.607	.607	.000	1
3	1	.681	.681	.000	1	.681	.681	.000	1
4	1	.733	.733	.000	1	.733	.733	.000	1
5	1	.752	.752	.000	1	.752	.752	.000	1
6	1	.774	.774	.000	1	.774	.774	.000	1
7	1	.789	.789	.000	1	.789	.789	.000	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA BCMP			1	MARCA BCMP			1
1	1	.540	.540	.000	1	.540	.540	.000	1
2	1	.714	.714	.000	1	.714	.714	.000	1
3	1	.801	.801	.000	1	.801	.801	.000	1
4	1	.859	.859	.000	1	.859	.859	.000	1
5	1	.887	.887	.000	1	.887	.887	.000	1
6	1	.910	.910	.000	1	.910	.910	.000	1
7	1	.928	.928	.000	1	.928	.928	.000	1

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1

I	NBI	UTILISATION MARCA	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS MARCA	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.429	.429	.000	.000	1	.429	.429	.000	.000	1
2	1	.509	.509	.005	.007	1	.813	.811	.002	.000	1
3	1	.627	.627	.007	.010	1	1.152	1.149	.003	.000	1
4	1	.669	.669	.007	.010	1	1.452	1.444	.008	.001	1
5	1	.669	.669	.007	.010	1	1.716	1.701	.015	.001	1
6	1	.709	.711	.006	.008	1	1.948	1.922	.026	.013	1
7	1	.717	.722	.005	.007	1	2.150	2.110	.040	.018	1

STATION S2

I	NBI	UTILISATION MARCA	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS MARCA	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.571	.571	.000	.000	1	.571	.571	.000	.000	1
2	1	.799	.797	.007	.007	1	1.188	1.189	.001	.000	1
3	1	.888	.884	.009	.010	1	1.848	1.851	.003	.001	1
4	1	.888	.896	.010	.011	1	2.546	2.556	.006	.002	1
5	1	.921	.922	.009	.010	1	3.299	3.299	.015	.005	1
6	1	.921	.922	.009	.010	1	4.078	4.078	.026	.006	1
7	1	.956	.963	.007	.007	1	4.890	4.890	.040	.008	1

PROBABILITE DE TRANSITION = .7

STATION S1

I	NBI	UTILISATION MARCA	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS MARCA	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.394	.394	.000	.000	1	.394	.394	.000	.000	1
2	1	.513	.517	.004	.004	1	.724	.721	.002	.000	1
3	1	.568	.574	.006	.006	1	.994	.988	.006	.001	1
4	1	.598	.604	.006	.006	1	1.213	1.201	.012	.001	1
5	1	.616	.622	.005	.005	1	1.390	1.368	.022	.001	1
6	1	.627	.633	.005	.005	1	1.531	1.496	.035	.002	1
7	1	.635	.638	.004	.004	1	1.643	1.594	.049	.003	1

STATION S2

I	NBI	UTILISATION MARCA	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS MARCA	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.606	.606	.000	.000	1	.606	.606	.000	.000	1
2	1	.789	.789	.007	.007	1	1.276	1.279	.003	.000	1
3	1	.874	.880	.009	.010	1	2.006	2.012	.006	.001	1
4	1	.920	.920	.008	.008	1	2.787	2.799	.012	.001	1
5	1	.944	.945	.007	.007	1	3.610	3.632	.022	.002	1
6	1	.944	.945	.007	.007	1	4.469	4.504	.035	.003	1
7	1	.977	.982	.006	.006	1	5.357	5.406	.049	.005	1

PROBABILITE DE TRANSITION = .9

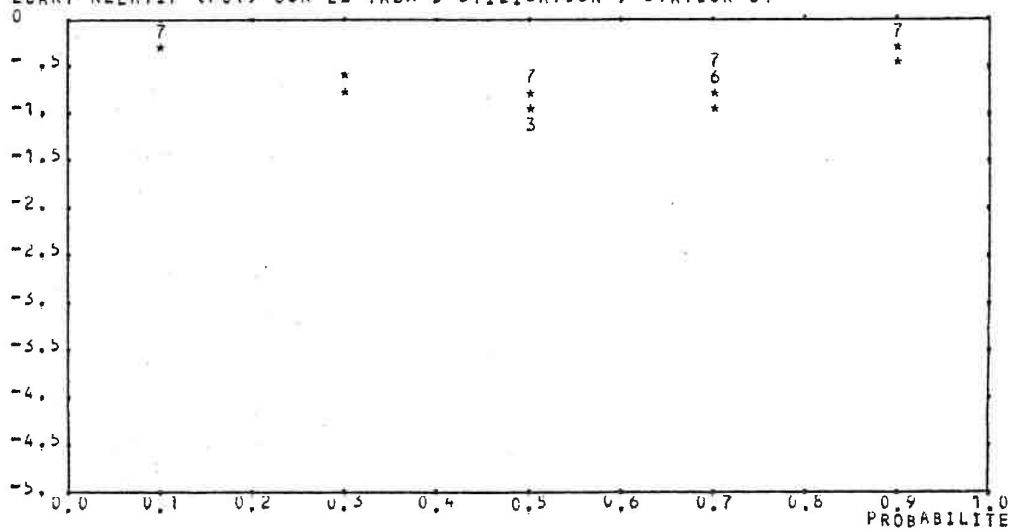
STATION S1

I	NBI	UTILISATION MARCA	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS MARCA	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.355	.355	.000	.000	1	.355	.355	.000	.000	1
2	1	.460	.460	.000	.000	1	.625	.625	.000	.000	1
3	1	.502	.505	.002	.002	1	.825	.825	.004	.000	1
4	1	.524	.526	.002	.002	1	.925	.925	.008	.000	1
5	1	.535	.537	.002	.002	1	1.065	1.065	.014	.001	1
6	1	.541	.543	.002	.002	1	1.134	1.134	.020	.001	1
7	1	.545	.546	.001	.001	1	1.183	1.153	.026	.001	1

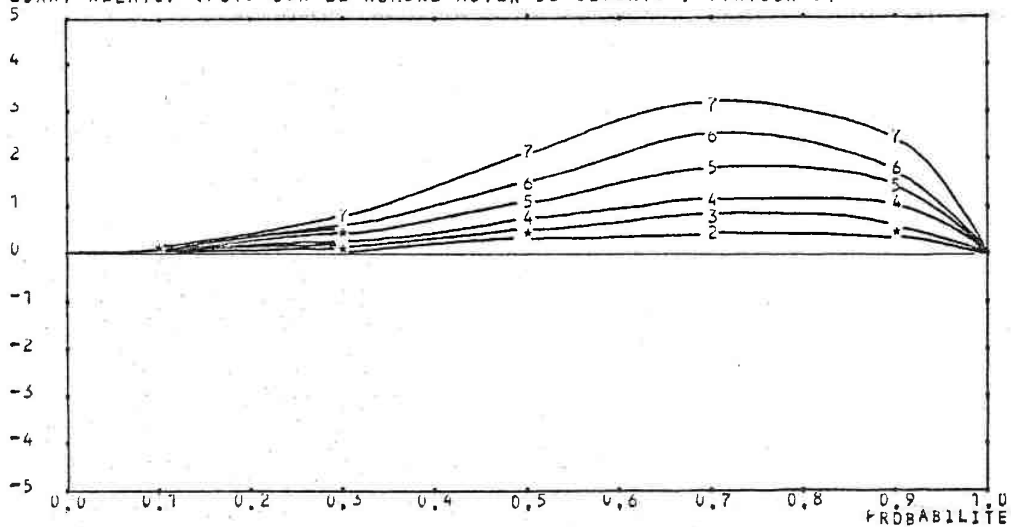
STATION S2

I	NBI	UTILISATION MARCA	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS MARCA	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.645	.645	.000	.000	1	.645	.645	.000	.000	1
2	1	.833	.837	.003	.003	1	1.375	1.377	.002	.000	1
3	1	.913	.918	.004	.004	1	2.177	2.181	.004	.000	1
4	1	.952	.957	.004	.004	1	3.035	3.043	.008	.000	1
5	1	.973	.977	.004	.004	1	3.935	3.949	.014	.001	1
6	1	.984	.987	.003	.003	1	4.866	4.886	.020	.001	1
7	1	.990	.993	.003	.003	1	5.817	5.845	.028	.001	1

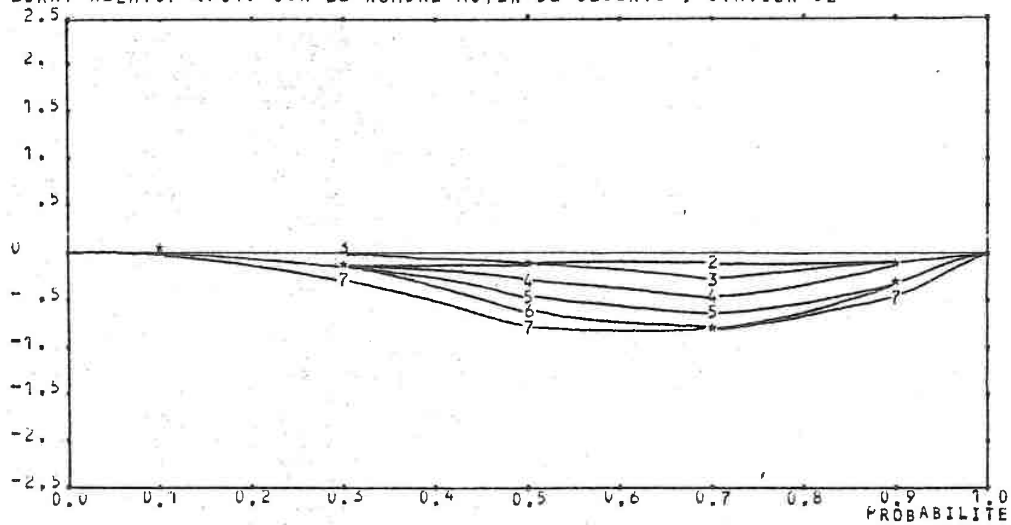
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S2



 * R1= .500 R2= 5.00

PROBABILITE DE TRANSITION = ,1

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	NBI	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.820	.820	.000	1	.820	.820	.000	1
2	2	.955	.862	.007	2	1.745	1.750	.005	2
3	3	.988	.992	.004	3	2.716	2.728	.012	3
4	4	.997	.998	.001	4	3.706	3.721	.015	4
5	5	.999	1.000	.000	5	4.702	4.719	.017	5
6	6	1.000	1.000	.000	6	5.701	5.718	.017	6
7	7	1.000	1.000	.000	7	6.701	6.718	.017	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	NBI	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.180	.180	.000	1	.180	.180	.000	1
2	2	.210	.211	.002	2	.255	.249	.006	2
3	3	.217	.218	.001	3	.284	.272	.012	3
4	4	.219	.219	.000	4	.294	.279	.015	4
5	5	.220	.220	.000	5	.298	.281	.017	5
6	6	.220	.220	.000	6	.299	.281	.017	6
7	7	.220	.220	.000	7	.299	.282	.017	7

PROBABILITE DE TRANSITION = ,3

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	NBI	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.785	.785	.000	1	.785	.785	.000	1
2	2	.920	.844	.024	2	1.668	1.866	.018	2
3	3	.966	.885	.017	3	2.602	2.645	.043	3
4	4	.987	.899	.009	4	3.569	3.630	.061	4
5	5	.999	.999	.004	5	4.552	4.625	.073	5
6	6	.999	1.000	.002	6	5.544	5.623	.079	6
7	7	.999	1.000	.001	7	6.540	6.623	.083	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	NBI	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.215	.215	.000	1	.215	.215	.000	1
2	2	.255	.270	.007	2	.255	.270	.011	2
3	3	.260	.273	.009	3	.260	.273	.011	3
4	4	.270	.274	.006	4	.270	.274	.011	4
5	5	.273	.274	.006	5	.273	.274	.011	5
6	6	.274	.274	.000	6	.274	.274	.000	6
7	7	.274	.274	.000	7	.274	.274	.000	7

PROBABILITE DE TRANSITION = ,5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.733	.733	.000	1	.733	.733	.000	1
1	2	.868	.912	-.4.975	1	.553	.580	.027	1
1	3	.228	.969	-.4.351	2	.419	.500	.081	1
1	4	.360	.989	-.3.600	3	.326	.461	.135	1
1	5	.777	.996	-.1.600	4	.264	.422	.178	1
1	6	.887	.998	-.1.145	5	.224	.434	.210	1
1	7	.993	.999	-.1.007	6	.198	.431	.233	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.267	.267	.000	1	.267	.267	.000	1
1	2	.316	.336	-.4.016	1	.447	.460	.013	1
1	3	.336	.336	-.4.016	2	.581	.600	.019	1
1	4	.336	.336	-.4.016	3	.674	.699	.025	1
1	5	.336	.336	-.4.016	4	.776	.798	.022	1
1	6	.336	.336	-.4.016	5	.802	.806	.004	1
1	7	.336	.336	-.4.016	6	.802	.806	.004	1

PROBABILITE DE TRANSITION = ,7

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.649	.649	.000	1	.649	.649	.000	1
1	2	.782	.814	-.7.059	1	.386	.402	.016	1
1	3	.846	.869	-.7.059	2	.197	.203	.006	1
1	4	.839	.869	-.7.059	3	.065	.065	.000	1
1	5	.918	.934	-.7.059	4	.977	.991	.014	1
1	6	.934	.934	-.7.059	5	.919	.943	.023	1
1	7	.954	.954	-.7.059	6	.882	.927	.045	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.351	.351	.000	1	.351	.351	.000	1
1	2	.423	.454	-.7.059	1	.641	.614	.027	1
1	3	.558	.498	-.8.039	2	.905	.803	.102	1
1	4	.581	.518	-.7.059	3	.138	.035	.203	1
1	5	.796	.524	-.6.039	4	.337	.223	.314	1
1	6	.508	.534	-.5.039	5	.504	.481	.023	1
1	7	.516	.537	-.4.149	6	.645	.618	.027	1

PROBABILITE DE TRANSITION = ,9

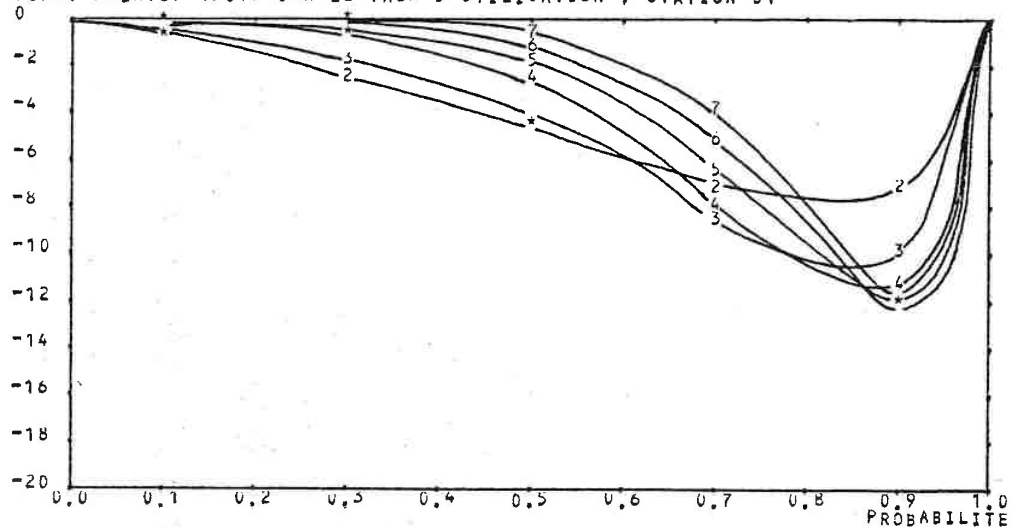
STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.487	.487	.000	1	.487	.487	.000	1
1	2	.606	.649	-.7.059	1	.966	.966	.000	1
1	3	.663	.733	-.10.668	1	.419	.366	.053	1
1	4	.696	.733	-.11.668	1	.699	.699	.000	1
1	5	.723	.811	-.12.668	1	.551	.551	.000	1
1	6	.743	.834	-.12.668	1	.686	.686	.000	1
1	7	.760	.851	-.11.668	1	.102	.231	.129	1

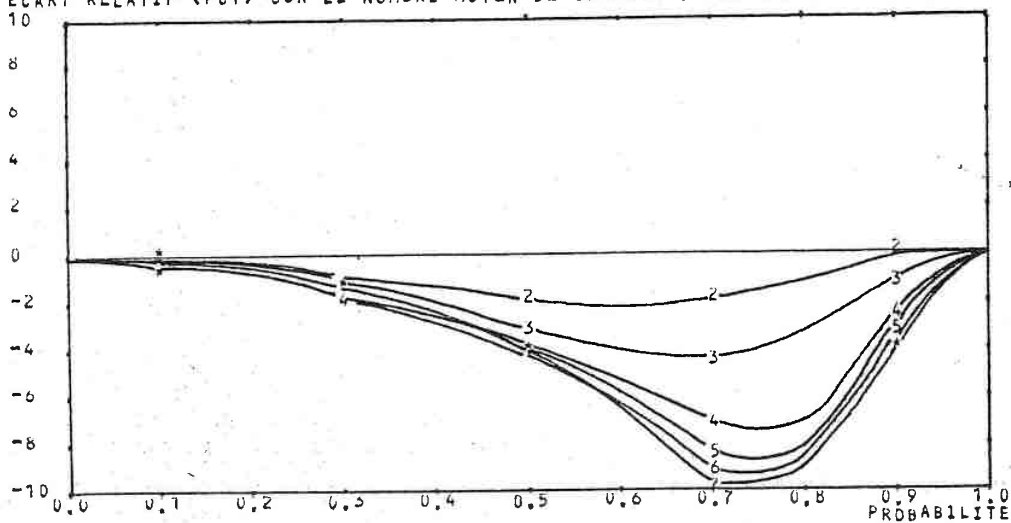
STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	MARCA	BCMP		1	MARCA	BCMP		1
1	1	.513	.513	.000	1	.513	.513	.000	1
1	2	.528	.684	-.7.059	1	.033	.034	.002	1
1	3	.534	.769	-.10.537	1	.553	.664	.048	1
1	4	.534	.820	-.11.537	2	.152	.102	.050	1
1	5	.761	.854	-.12.537	2	.731	.649	.082	1
1	6	.783	.878	-.12.537	3	.314	.205	.109	1
1	7	.800	.896	-.11.537	3	.898	.769	.129	1

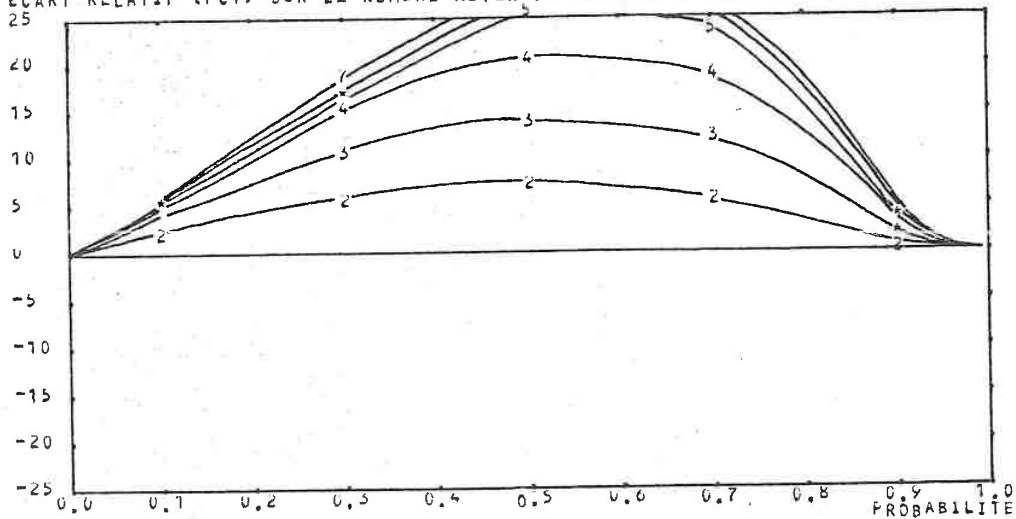
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION, STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS, STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS, STATION S2



 * R1= .500 R2= 10.0

PROBABILITE DE TRANSITION = .1

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.900	.900	.000	1	.900	.900	.000	1
2	1	.984	.984	.005	2	.875	.880	.005	2
3	1	.997	.999	.001	3	.869	.876	.007	3
4	1	1.000	1.000	.000	4	.868	.876	.008	4
5	1	1.000	1.000	.000	5	.867	.876	.009	5
6	1	1.000	1.000	.000	6	.867	.876	.009	6
7	1	1.000	1.000	.000	7	.868	.876	.008	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.100	.100	.000	1	.100	.100	.000	1
2	1	.109	.109	.001	2	.125	.120	.005	2
3	1	.110	.110	.000	3	.131	.124	.007	3
4	1	.110	.110	.000	4	.132	.124	.008	4
5	1	.110	.110	.000	5	.133	.124	.008	5
6	1	.111	.110	.000	6	.133	.124	.009	6
7	1	.110	.110	.000	7	.132	.124	.008	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .3

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.877	.877	.000	1	.877	.877	.000	1
2	1	.864	.883	.019	2	.830	.846	.016	2
3	1	.889	.908	.009	3	.809	.839	.030	3
4	1	.997	1.000	.003	4	.801	.836	.037	4
5	1	.999	1.000	.001	5	.798	.837	.039	5
6	1	1.000	1.000	.000	6	.797	.837	.040	6
7	1	1.000	1.000	.000	7	.797	.837	.040	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.123	.123	.000	1	.123	.123	.000	1
2	1	.135	.137	.003	2	.170	.154	.016	2
3	1	.138	.140	.001	3	.191	.161	.030	3
4	1	.139	.140	.000	4	.199	.162	.037	4
5	1	.140	.140	.000	5	.202	.163	.039	5
6	1	.140	.140	.000	6	.203	.163	.040	6
7	1	.140	.140	.000	7	.203	.163	.041	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1									
I	I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
INBI	MARCA	BCMP				INBI	MARCA	BCMP	
1	1	.840	.840	.000	.000	1	.840	.840	.000
2	1	.933	.933	.000	.000	2	.933	.933	.000
3	1	.969	.969	.000	.000	3	.969	.969	.000
4	1	.985	.985	.000	.000	4	.985	.985	.000
5	1	.993	.993	.000	.000	5	.993	.993	.000
6	1	.997	.997	.000	.000	6	.997	.997	.000
7	1	.998	.998	.000	.000	7	.998	.998	.000

STATION S2									
I	I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
INBI	MARCA	BCMP				INBI	MARCA	BCMP	
1	1	.160	.160	.000	.000	1	.160	.160	.000
2	1	.178	.178	.000	.000	2	.178	.178	.000
3	1	.184	.184	.000	.000	3	.184	.184	.000
4	1	.189	.189	.000	.000	4	.189	.189	.000
5	1	.190	.190	.000	.000	5	.190	.190	.000
6	1	.191	.191	.000	.000	6	.191	.191	.000
7	1	.191	.191	.000	.000	7	.191	.191	.000

PROBABILITE DE TRANSITION = .7

STATION S1									
I	I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
INBI	MARCA	BCMP				INBI	MARCA	BCMP	
1	1	.770	.770	.000	.000	1	.770	.770	.000
2	1	.988	.988	.000	.000	2	.988	.988	.000
3	1	.992	.992	.000	.000	3	.992	.992	.000
4	1	.994	.994	.000	.000	4	.994	.994	.000
5	1	.995	.995	.000	.000	5	.995	.995	.000
6	1	.996	.996	.000	.000	6	.996	.996	.000
7	1	.997	.997	.000	.000	7	.997	.997	.000

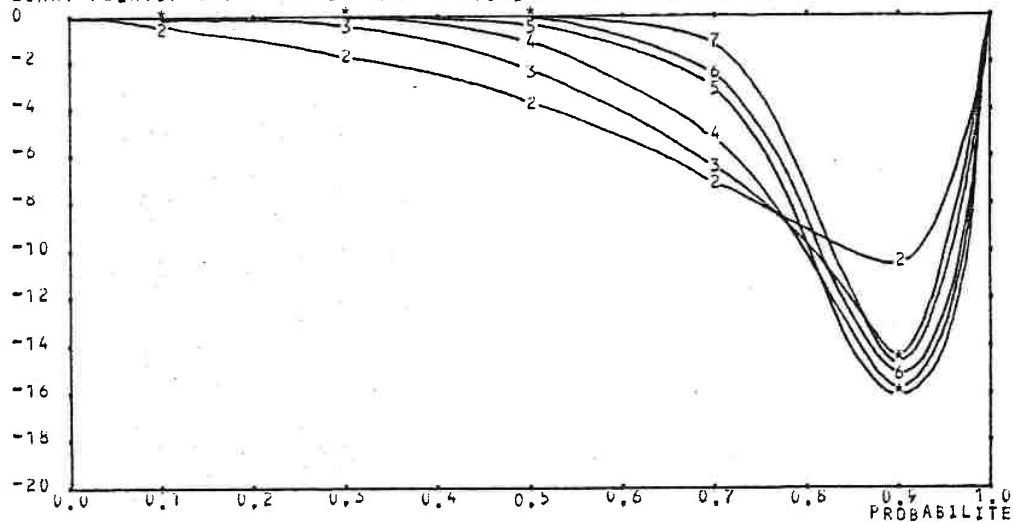
STATION S2									
I	I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
INBI	MARCA	BCMP				INBI	MARCA	BCMP	
1	1	.230	.230	.000	.000	1	.230	.230	.000
2	1	.389	.389	.000	.000	2	.389	.389	.000
3	1	.521	.521	.000	.000	3	.521	.521	.000
4	1	.625	.625	.000	.000	4	.625	.625	.000
5	1	.703	.703	.000	.000	5	.703	.703	.000
6	1	.760	.760	.000	.000	6	.760	.760	.000
7	1	.802	.802	.000	.000	7	.802	.802	.000

PROBABILITE DE TRANSITION = .9

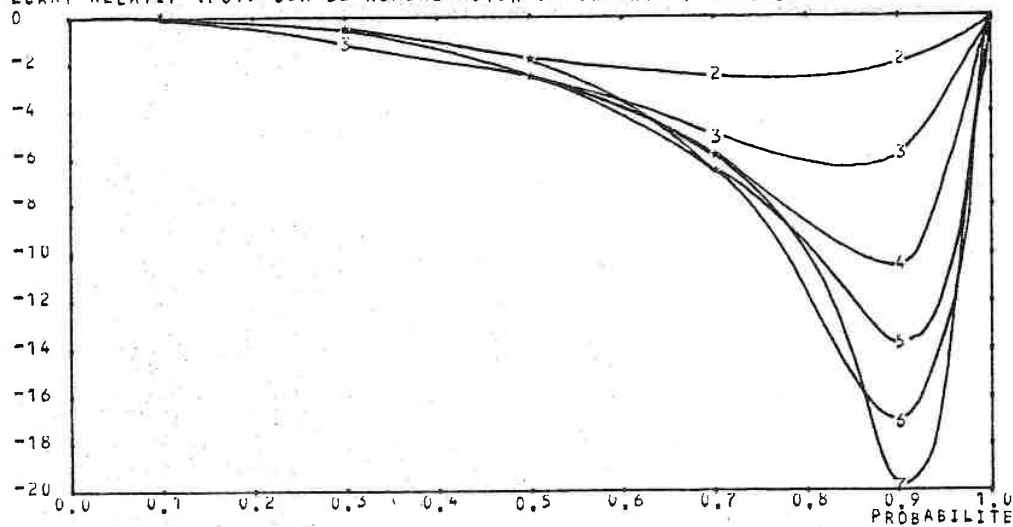
STATION S1									
I	I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
INBI	MARCA	BCMP				INBI	MARCA	BCMP	
1	1	.592	.592	.000	.000	1	.592	.592	.000
2	1	.704	.704	.000	.000	2	.704	.704	.000
3	1	.756	.756	.000	.000	3	.756	.756	.000
4	1	.789	.789	.000	.000	4	.789	.789	.000
5	1	.813	.813	.000	.000	5	.813	.813	.000
6	1	.834	.834	.000	.000	6	.834	.834	.000
7	1	.851	.851	.000	.000	7	.851	.851	.000

STATION S2									
I	I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
INBI	MARCA	BCMP				INBI	MARCA	BCMP	
1	1	.408	.408	.000	.000	1	.408	.408	.000
2	1	.436	.436	.000	.000	2	.436	.436	.000
3	1	.452	.452	.000	.000	3	.452	.452	.000
4	1	.464	.464	.000	.000	4	.464	.464	.000
5	1	.473	.473	.000	.000	5	.473	.473	.000
6	1	.480	.480	.000	.000	6	.480	.480	.000
7	1	.485	.485	.000	.000	7	.485	.485	.000

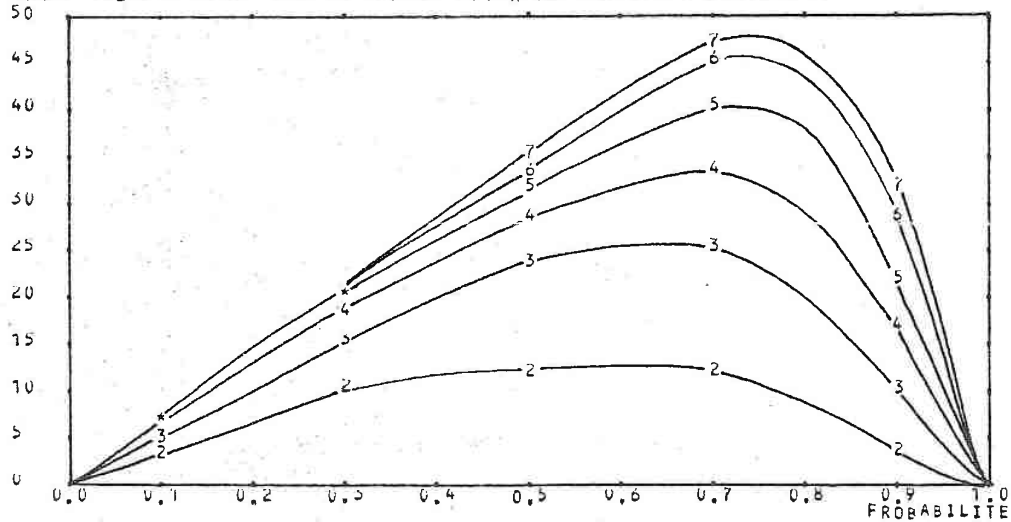
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S2



 * R1= 1.00 R2= 5.00 *

PROBABILITE DE TRANSITION = .1

STATION S1

I	NB	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
			BCMP						BCMP			
	MARCA						MARCA					
1	1	1	.821	.000	.000	1	1	1	.821	.000	.000	1
2	1	2	.000	.000	.000	2	1	2	.000	.000	.000	2
3	1	3	.000	.000	.000	3	1	3	.000	.000	.000	3
4	1	4	.000	.000	.000	4	1	4	.000	.000	.000	4
5	1	5	.000	.000	.000	5	1	5	.000	.000	.000	5
6	1	6	.000	.000	.000	6	1	6	.000	.000	.000	6
7	1	7	.000	.000	.000	7	1	7	.000	.000	.000	7

STATION S2

I	NB	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
			BCMP						BCMP			
	MARCA						MARCA					
1	1	1	.179	.000	.000	1	1	1	.179	.000	.000	1
2	1	2	.209	.000	.000	2	1	2	.209	.000	.000	2
3	1	3	.167	.000	.000	3	1	3	.167	.000	.000	3
4	1	4	.177	.000	.000	4	1	4	.177	.000	.000	4
5	1	5	.177	.000	.000	5	1	5	.177	.000	.000	5
6	1	6	.177	.000	.000	6	1	6	.177	.000	.000	6
7	1	7	.177	.000	.000	7	1	7	.177	.000	.000	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .3

STATION S1

I	NB	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
			BCMP						BCMP			
	MARCA						MARCA					
1	1	1	.792	.000	.000	1	1	1	.792	.000	.000	1
2	1	2	.000	.000	.000	2	1	2	.000	.000	.000	2
3	1	3	.000	.000	.000	3	1	3	.000	.000	.000	3
4	1	4	.000	.000	.000	4	1	4	.000	.000	.000	4
5	1	5	.000	.000	.000	5	1	5	.000	.000	.000	5
6	1	6	.000	.000	.000	6	1	6	.000	.000	.000	6
7	1	7	.000	.000	.000	7	1	7	.000	.000	.000	7

STATION S2

I	NB	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
			BCMP						BCMP			
	MARCA						MARCA					
1	1	1	.208	.000	.000	1	1	1	.208	.000	.000	1
2	1	2	.000	.000	.000	2	1	2	.000	.000	.000	2
3	1	3	.000	.000	.000	3	1	3	.000	.000	.000	3
4	1	4	.000	.000	.000	4	1	4	.000	.000	.000	4
5	1	5	.000	.000	.000	5	1	5	.000	.000	.000	5
6	1	6	.000	.000	.000	6	1	6	.000	.000	.000	6
7	1	7	.000	.000	.000	7	1	7	.000	.000	.000	7

PROBABILITE DE TRANSITION = ,5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	MARCA	BCMP			NBI	MARCA	BCMP		
1	1	.750	.000	-2.000	1	.750	.000	.000	1
2	1	.900	.000	-1.000	2	.600	.015	.015	2
3	1	.950	.000	-1.000	3	.500	.045	.045	3
4	1	.980	.000	-1.000	4	.450	.071	.071	4
5	1	.991	.000	-1.000	5	.418	.090	.090	5
6	1	.996	.000	-1.000	6	.401	.102	.102	6
7	1	.998	1.000	.000	7	.392	.109	.109	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	MARCA	BCMP			NBI	MARCA	BCMP		
1	1	.250	.000	-2.000	1	.250	.000	.000	1
2	1	.300	.008	-1.977	2	.400	.385	.015	2
3	1	.310	.006	-1.967	3	.494	.450	.044	3
4	1	.327	.004	-1.194	4	.550	.479	.071	4
5	1	.332	.002	-1.336	5	.582	.492	.090	5
6	1	.333	.001	-1.331	6	.599	.497	.102	6
7	1	.335	.000	-1.150	7	.608	.499	.109	7

PROBABILITE DE TRANSITION = ,7

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	MARCA	BCMP			NBI	MARCA	BCMP		
1	1	.688	.000	-3.000	1	.688	.000	.000	1
2	1	.846	.000	-3.444	2	.462	.018	.018	2
3	1	.915	.000	-3.555	3	.288	.033	.033	3
4	1	.951	.000	-3.666	4	.196	.050	.050	4
5	1	.971	.000	-3.666	5	.063	.157	.157	5
6	1	.983	.000	-3.666	6	.000	.908	.908	6
7	1	.990	.000	-3.666	7	.952	.229	.229	7

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	MARCA	BCMP			NBI	MARCA	BCMP		
1	1	.313	.000	-3.000	1	.313	.000	.000	1
2	1	.389	.019	-3.444	2	.539	.016	.016	2
3	1	.416	.014	-3.555	3	.713	.058	.058	3
4	1	.432	.011	-3.666	4	.847	.099	.099	4
5	1	.446	.008	-3.666	5	.937	.157	.157	5
6	1	.450	.006	-3.666	6	.000	.908	.908	6
7	1	.450	.004	-3.666	7	.048	.229	.229	7

PROBABILITE DE TRANSITION = ,9

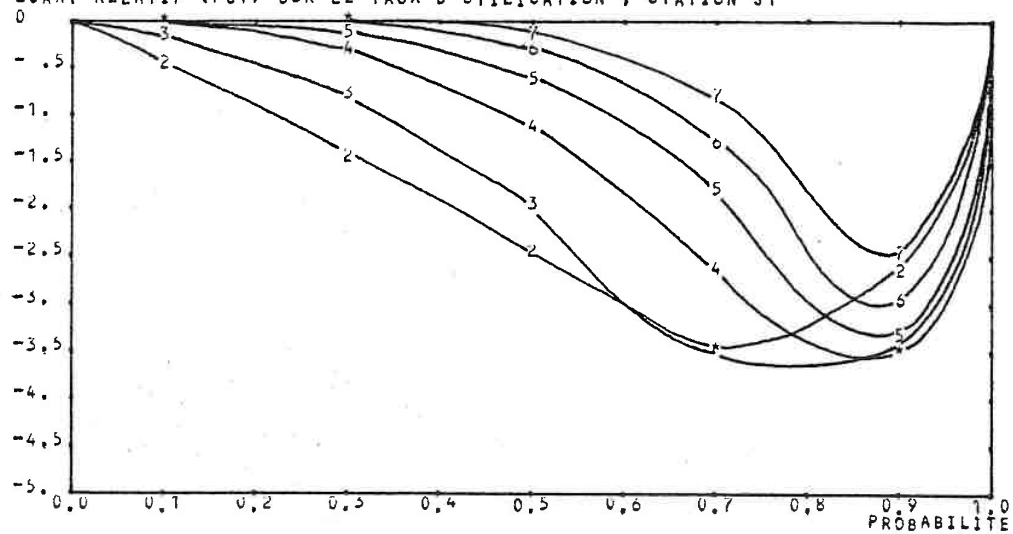
STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	MARCA	BCMP			NBI	MARCA	BCMP		
1	1	.583	.000	-3.000	1	.583	.000	.000	1
2	1	.771	.000	-3.747	2	.214	.022	.022	2
3	1	.859	.000	-3.747	3	.814	.090	.090	3
4	1	.904	.000	-3.747	4	.222	.080	.080	4
5	1	.939	.000	-3.747	5	.500	.419	.419	5
6	1	.958	.000	-3.747	6	.000	.234	.234	6
7	1	.971	.000	-3.747	7	.806	.508	.508	7

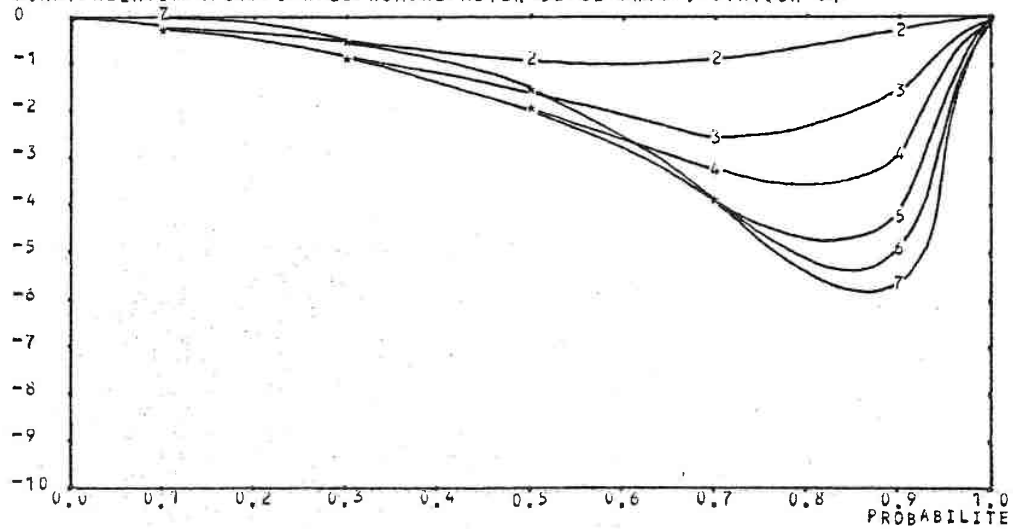
STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	MARCA	BCMP			NBI	MARCA	BCMP		
1	1	.417	.000	-3.000	1	.417	.000	.000	1
2	1	.536	.015	-3.763	2	.780	.006	.006	2
3	1	.614	.022	-3.773	3	.126	.092	.092	3
4	1	.649	.022	-3.773	4	.435	.358	.080	4
5	1	.670	.022	-3.773	5	.720	.581	.139	5
6	1	.684	.018	-3.773	6	.000	.766	.206	6
7	1	.693	.017	-3.773	7	.196	.919	.277	7

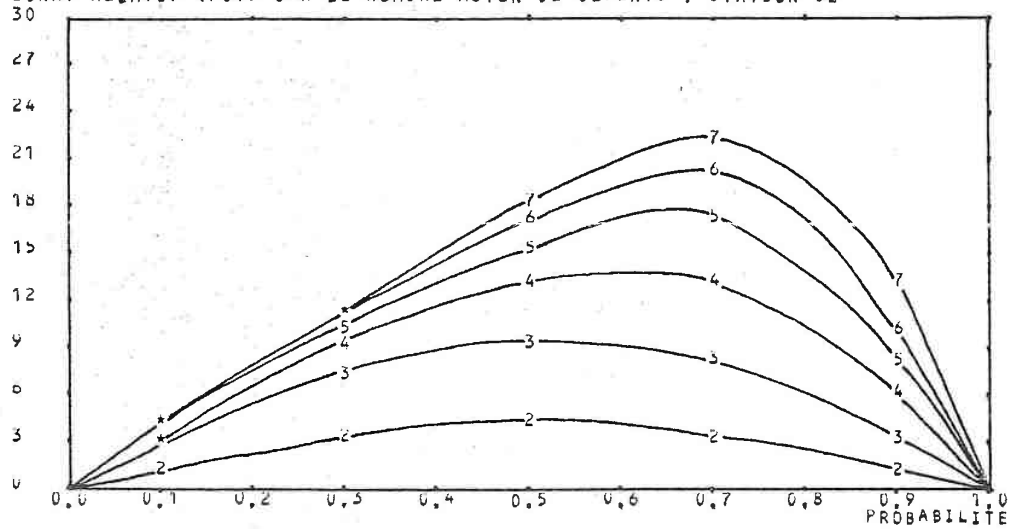
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S2



 * R1= 1.00 R2= 10.0

PROBABILITE DE TRANSITION = ,1

STATION S1

I	NB	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
			MARCA	BCMP			MARCA	BCMP			
1	1	1	.901	.901	.000	1	.901	.901	.000	.000	1
2	1	1	.909	.909	.000	2	.877	.881	.000	.000	2
3	1	1	.909	.909	.000	3	.877	.877	.000	.000	3
4	1	1	.909	.909	.000	4	.877	.877	.000	.000	4
5	1	1	.909	.909	.000	5	.877	.877	.000	.000	5
6	1	1	.909	.909	.000	6	.877	.877	.000	.000	6
7	1	1	.909	.909	.000	7	.877	.877	.000	.000	7

STATION S2

I	NB	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
			MARCA	BCMP			MARCA	BCMP			
1	1	1	.099	.099	.000	1	.099	.099	.000	.000	1
2	1	1	.108	.108	.000	2	.123	.119	.000	.000	2
3	1	1	.110	.110	.000	3	.123	.123	.000	.000	3
4	1	1	.110	.110	.000	4	.123	.123	.000	.000	4
5	1	1	.110	.110	.000	5	.123	.123	.000	.000	5
6	1	1	.110	.110	.000	6	.123	.123	.000	.000	6
7	1	1	.110	.110	.000	7	.123	.123	.000	.000	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1

I	NB	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
			MARCA	BCMP			MARCA	BCMP			
1	1	1	.879	.879	.000	1	.879	.879	.000	.000	1
2	1	1	.879	.879	.000	2	.879	.879	.000	.000	2
3	1	1	.879	.879	.000	3	.879	.879	.000	.000	3
4	1	1	.879	.879	.000	4	.879	.879	.000	.000	4
5	1	1	.879	.879	.000	5	.879	.879	.000	.000	5
6	1	1	.879	.879	.000	6	.879	.879	.000	.000	6
7	1	1	.879	.879	.000	7	.879	.879	.000	.000	7

STATION S2

I	NB	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
			MARCA	BCMP			MARCA	BCMP			
1	1	1	.121	.121	.000	1	.121	.121	.000	.000	1
2	1	1	.133	.133	.000	2	.161	.151	.010	.000	2
3	1	1	.137	.137	.000	3	.177	.157	.019	.000	3
4	1	1	.137	.137	.000	4	.182	.159	.023	.000	4
5	1	1	.137	.137	.000	5	.183	.159	.025	.000	5
6	1	1	.137	.137	.000	6	.184	.159	.025	.000	6
7	1	1	.137	.137	.000	7	.184	.159	.025	.000	7

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.846	.846	.000	1	.846	.846	.000	.000
2	1	.949	.973	.024	2	.776	.796	.020	.126
3	1	.981	.995	.014	3	.740	.782	.042	.533
4	1	.993	.999	.006	4	.722	.779	.057	.931
5	1	.997	1.000	.002	5	.714	.778	.064	.981
6	1	.999	1.000	.000	6	.710	.778	.068	.991
7	1	1.000	1.000	.000	7	.709	.778	.069	.998

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.154	.154	.000	1	.154	.154	.000	.000
2	1	.173	.177	.004	2	.224	.204	.019	.080
3	1	.178	.181	.003	3	.260	.218	.042	.327
4	1	.180	.182	.002	4	.278	.221	.057	.460
5	1	.183	.185	.002	5	.286	.222	.064	.574
6	1	.185	.186	.001	6	.289	.222	.067	.643
7	1	.187	.187	.000	7	.291	.222	.069	.693

PROBABILITE DE TRANSITION = .7

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.787	.787	.000	1	.787	.787	.000	.000
2	1	.908	.946	.038	2	.652	.690	.038	.060
3	1	.954	.985	.031	3	.575	.651	.076	.111
4	1	.976	.996	.020	4	.517	.637	.120	.233
5	1	.988	.999	.011	5	.480	.632	.152	.333
6	1	.993	1.000	.006	6	.450	.630	.172	.411
7	1	.997	1.000	.003	7	.445	.630	.185	.470

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.213	.213	.000	1	.213	.213	.000	.000
2	1	.245	.256	.011	2	.338	.300	.038	.080
3	1	.268	.266	.002	3	.449	.349	.099	.222
4	1	.274	.269	.005	4	.500	.390	.110	.277
5	1	.277	.270	.007	5	.540	.400	.140	.333
6	1	.278	.270	.008	6	.570	.400	.170	.399
7	1	.279	.270	.009	7	.590	.400	.190	.444

PROBABILITE DE TRANSITION = .4

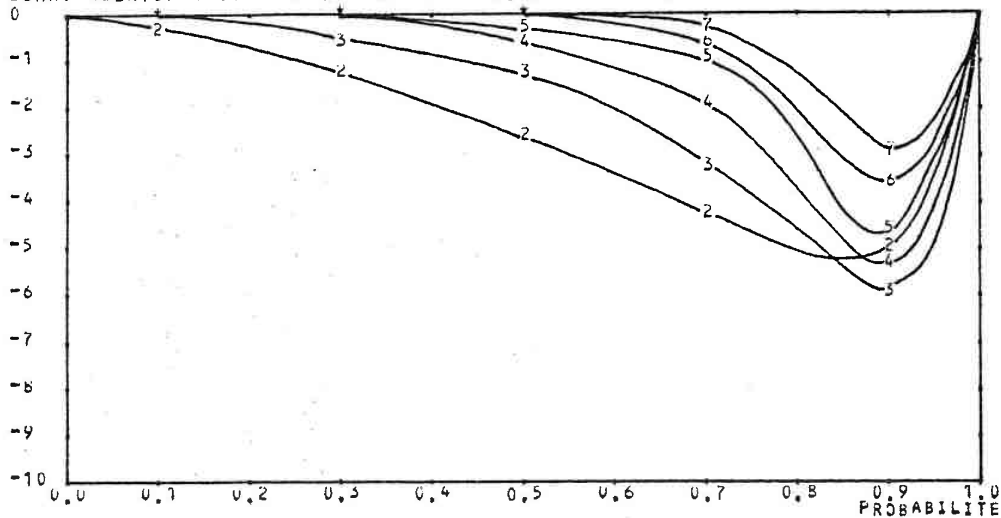
STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.655	.655	.000	1	.655	.655	.000	.000
2	1	.805	.846	.041	2	.382	.401	.019	.037
3	1	.874	.925	.051	3	.221	.221	.000	.000
4	1	.913	.962	.049	4	.099	.099	.000	.000
5	1	.938	.980	.042	5	.019	.019	.000	.000
6	1	.955	.990	.035	6	.068	.068	.000	.000
7	1	.967	.995	.028	7	.055	.055	.000	.000

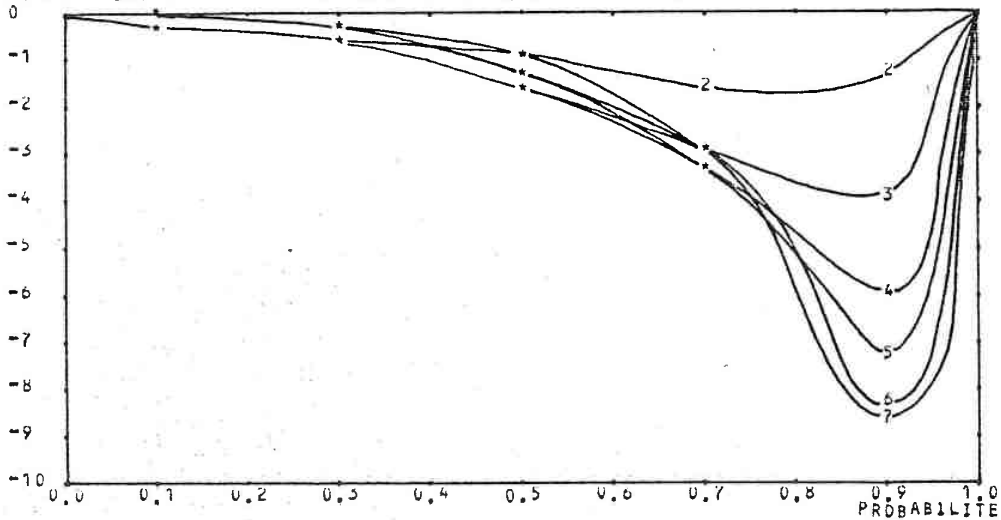
STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	1	.345	.345	.000	1	.345	.345	.000	.000
2	1	.424	.446	.022	2	.599	.599	.000	.000
3	1	.460	.487	.027	3	.779	.779	.000	.000
4	1	.480	.506	.026	4	.901	.901	.000	.000
5	1	.494	.516	.022	5	.981	.981	.000	.000
6	1	.503	.524	.021	6	.992	.992	.000	.000
7	1	.509	.524	.015	7	.995	.995	.000	.000

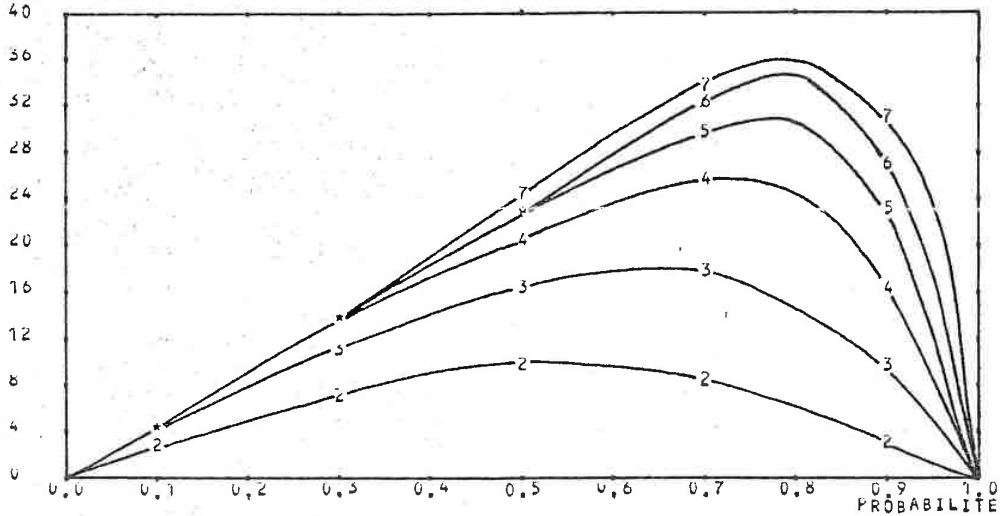
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S2



 * R1= 5.00 R2= 10.0

PROBABILITE DE TRANSITION = ,1

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.905	.905	.000	1	.905	.905	.000	.000
2	1	.990	.990	.000	2	.882	.882	.000	.000
3	1	.999	.999	.000	3	.882	.882	.001	.035
4	1	1.000	1.000	.000	4	.882	.882	.000	.000
5	1	1.000	1.000	.000	5	.882	.882	.000	.000
6	1	1.000	1.000	.000	6	.882	.882	.000	.000
7	1	1.000	1.000	.000	7	.882	.882	.000	.000

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.095	.095	.000	1	.095	.095	.000	.000
2	1	.104	.104	.000	2	.114	.114	.000	.260
3	1	.105	.105	.000	3	.118	.117	.000	.342
4	1	.105	.105	.000	4	.118	.118	.000	.423
5	1	.105	.105	.000	5	.118	.118	.000	.423
6	1	.105	.105	.000	6	.118	.118	.000	.423
7	1	.105	.105	.000	7	.118	.118	.001	.506

PROBABILITE DE TRANSITION = ,5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.895	.895	.000	1	.895	.895	.000	.000
2	1	.987	.987	.001	2	.871	.871	.001	.053
3	1	.998	.998	.000	3	.866	.866	.001	.055
4	1	1.000	1.000	.000	4	.866	.866	.002	.052
5	1	1.000	1.000	.000	5	.866	.866	.002	.041
6	1	1.000	1.000	.000	6	.866	.866	.002	.034
7	1	1.000	1.000	.000	7	.866	.866	.002	.029

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INBI	MARCA	BCMP			INBI	MARCA	BCMP		
1	1	.105	.105	.000	1	.105	.105	.000	.000
2	1	.116	.116	.000	2	.129	.129	.000	.696
3	1	.117	.117	.000	3	.144	.143	.000	.187
4	1	.118	.118	.000	4	.155	.153	.000	.186
5	1	.118	.118	.000	5	.155	.153	.000	.186
6	1	.118	.118	.000	6	.155	.153	.000	.186
7	1	.118	.118	.000	7	.155	.153	.000	.186

PROBABILITE DE TRANSITION = .5

STATION S1									
I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	
NBI	MARCA	BCMP			NBI	MARCA	BCMP		
1	.882	.882	.000	.000	1	.882	.000	.000	.000
2	.933	.933	.000	.153	2	.844	.001	.054	
3	.998	.998	.000	.040	3	.844	.002	.076	
4	1.000	1.000	.000	.010	4	.844	.002	.041	
5	1.000	1.000	.000	.000	5	.844	.002	.034	
6	1.000	1.000	.000	.000	6	.844	.002	.029	
7	1.000	1.000	.000	.000					

STATION S2										
I	NB	UTILISATION	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
		MARCA						MARCA	BCMP	
I	1	.118	.118	.000	.000	I	1	.118	.000	.000
I	2	.131	.131	.000	.153	I	2	.147	.001	.878
I	3	.133	.133	.000	.079	I	3	.153	.002	.357
I	4	.133	.133	.000	.000	I	4	.154	.002	.602
I	5	.133	.133	.000	.000	I	5	.154	.003	.599
I	6	.133	.133	.000	.000	I	6	.154	.003	.662
I	7	.133	.133	.000	.000	I	7	.154	.003	.662

PROBABILITE DE TRANSITION = .7

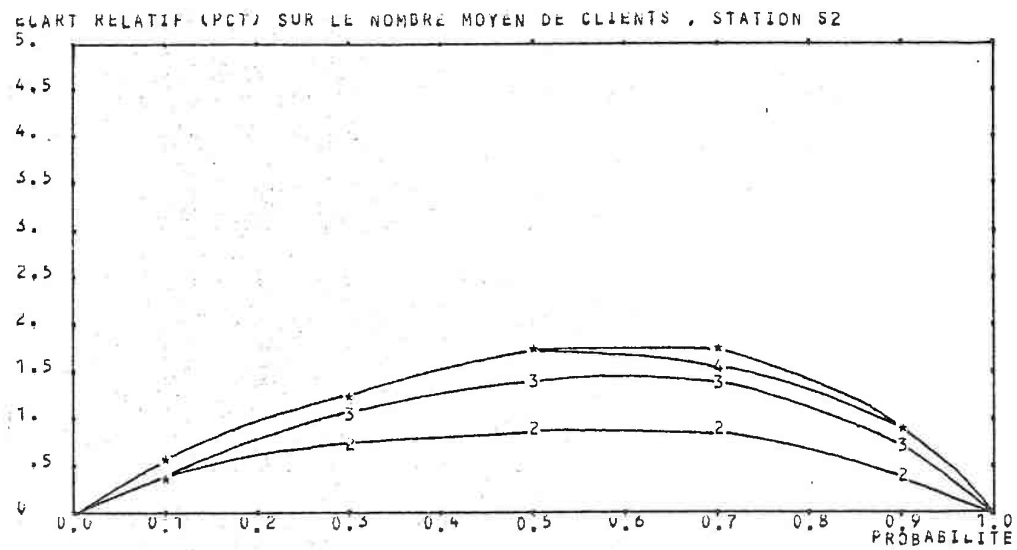
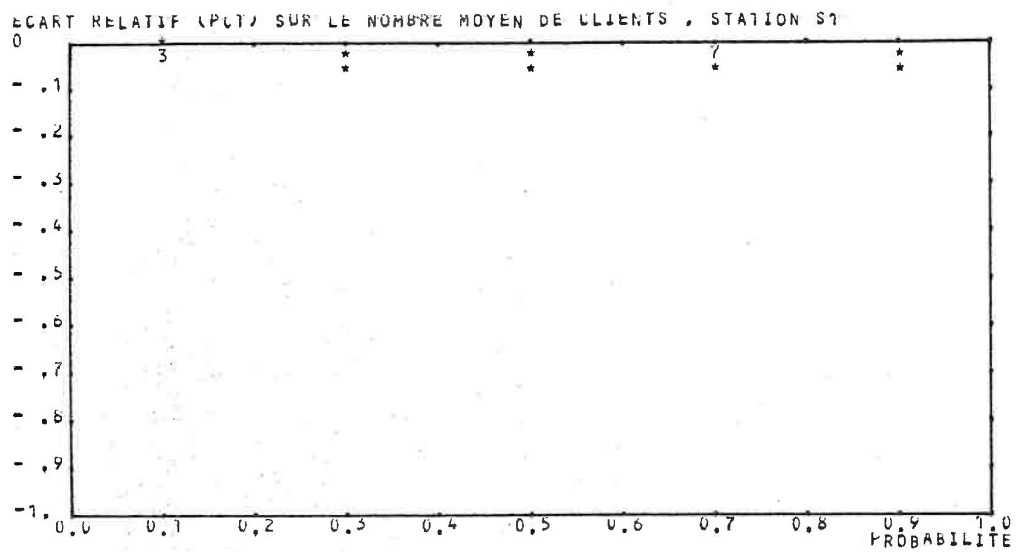
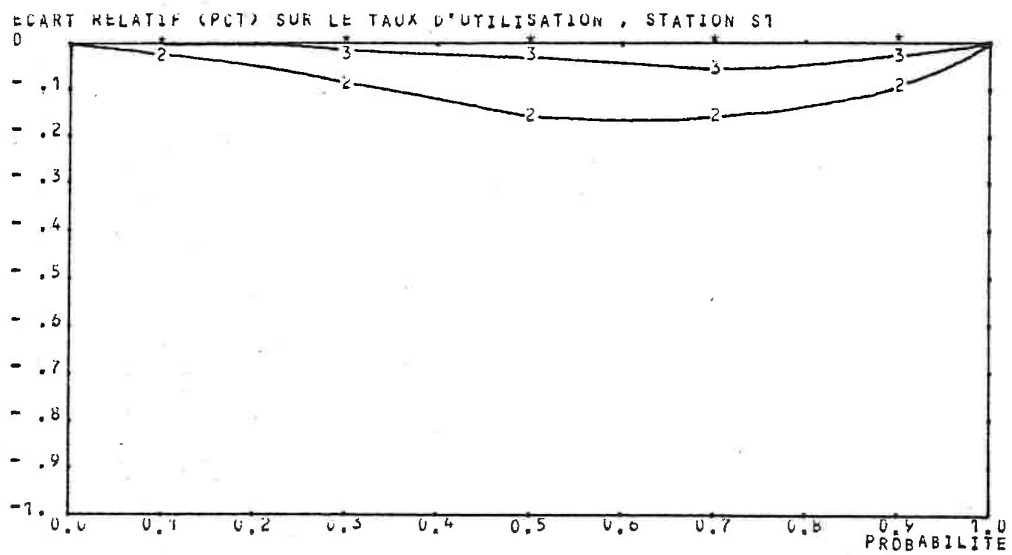
STATION S1									
I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	
NBI	MARCA	BCMP			NBI	MARCA	BCMP		
1	.867	.867	.000	.000	1	.867	.867	.000	.000
2	.975	.980	.002	.164	2	.828	.829	.001	.055
3	.996	.997	.001	.050	3	.818	.822	.002	.071
4	.999	.999	.000	.010	4	.816	.809	.003	.079
5	1.000	1.000	.000	.000	5	.815	.811	.003	.063
6	1.000	1.000	.000	.000	6	.815	.811	.003	.044
7	1.000	1.000	.000	.000	7	.815	.811	.003	.044

STATION S2									
I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	.133	.133	.000	.000	1	.133	.133	.000	.000
2	.133	.151	.000	.199	2	.172	.171	.001	.755
3	.133	.153	.000	.065	3	.182	.180	.002	.319
4	.133	.154	.000	.000	4	.184	.181	.003	.574
5	.133	.154	.000	.000	5	.185	.182	.003	.678
6	.133	.154	.000	.000	6	.185	.182	.003	.623
7	.133	.154	.000	.000	7	.185	.182	.003	.577

PROBABILITE DE TRANSITION = .9

STATION S1									
I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	
NBI	MARCA	BCMP			NBI	MARCA	BCMP		
1	1	.846	.846	.000	1	.846	.846	.000	.000
2	1	.972	.973	.001	2	.795	.796	.001	.056
3	1	.995	.995	.000	3	.781	.782	.001	.036
4	1	.999	.999	.000	4	.777	.779	.002	.053
5	1	1.000	1.000	.000	5	.776	.778	.002	.042
6	1	1.000	1.000	.000	6	.776	.778	.002	.035
7	1	1.000	1.000	.000	7	.776	.778	.002	.030

STATION S2									
I	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1
NB	MARCA	BCMP			NB	MARCA	BCMP		
1	.154	.154	.000	.000	1	.154	.154	.000	.000
2	.177	.177	.000	.113	2	.205	.204	.001	.342
3	.181	.181	.000	.000	3	.219	.218	.001	.684
4	.182	.182	.000	.055	4	.223	.221	.002	.800
5	.182	.182	.000	.000	5	.224	.222	.002	.899
6	.182	.182	.000	.000	6	.224	.222	.002	.899
7	.182	.182	.000	.000	7	.224	.222	.002	.899



ANNEXE III.2

Station PAPS avec temps de service corrélés

 SERVICE= .100

COEFFICIENT DE CORRELATION = .1

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.090	.091	.001	1	.090	.091	.001	1
1	2	.099	.099	.001	1	.107	.108	.001	1
1	3	.099	.100	.001	1	.111	.111	.001	1
1	4	.099	.100	.001	1	.111	.111	.001	1
1	5	.099	.100	.001	1	.110	.111	.001	1
1	6	.099	.100	.001	1	.110	.111	.001	1
1	7	.099	.100	.001	1	.110	.111	.001	1
1	8	.099	.100	.001	1	.110	.111	.001	1
1	9	.099	.100	.001	1	.111	.111	.000	1
1	10	.099	.100	.001	1	.111	.111	.000	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.910	.909	.001	1	.910	.909	.001	1
1	2	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	3	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	4	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	5	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	6	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	7	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	8	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	9	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	10	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1

COEFFICIENT DE CORRELATION = .5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.091	.091	.001	1	.091	.091	.001	1
1	2	.099	.099	.000	1	.108	.108	.000	1
1	3	.101	.100	.001	1	.113	.111	.002	1
1	4	.101	.100	.001	1	.113	.111	.002	1
1	5	.101	.100	.001	1	.113	.111	.002	1
1	6	.101	.100	.001	1	.114	.111	.003	1
1	7	.101	.100	.001	1	.114	.111	.003	1
1	8	.101	.100	.001	1	.114	.111	.003	1
1	9	.101	.100	.001	1	.114	.111	.003	1
1	10	.101	.100	.001	1	.114	.111	.003	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.908	.909	.001	1	.909	.909	.001	1
1	2	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	3	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	4	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	5	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	6	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	7	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	8	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	9	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1
1	10	.999	.999	.000	1	.890	.890	.000	1

COEFFICIENT DE CORRELATION = .5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.091	.091	.001	1	.091	.001	.001	1
2	1	.101	.099	.002	1	.110	.002	.001	1
3	1	.100	.100	.000	1	.111	.001	.000	1
4	1	.100	.100	.000	1	.113	.002	.001	1
5	1	.100	.100	.000	1	.113	.001	.000	1
6	1	.100	.100	.000	1	.113	.002	.001	1
7	1	.100	.100	.000	1	.114	.003	.002	1
8	1	.100	.100	.000	1	.114	.003	.002	1
9	1	.100	.100	.000	1	.114	.003	.002	1
10	1	.100	.100	.000	1	.114	.003	.002	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.008	.009	.001	1	.008	.001	.110	1
2	1	.000	.000	.000	1	.000	.000	.000	1
3	1	.000	.000	.000	1	.000	.000	.000	1
4	1	.000	.000	.000	1	.000	.000	.000	1
5	1	.000	.000	.000	1	.000	.000	.000	1
6	1	.000	.000	.000	1	.000	.000	.000	1
7	1	.000	.000	.000	1	.000	.000	.000	1
8	1	.000	.000	.000	1	.000	.000	.000	1
9	1	.000	.000	.000	1	.000	.000	.000	1
10	1	.000	.000	.000	1	.000	.000	.000	1

COEFFICIENT DE CORRELATION = .7

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.089	.091	.002	1	.089	.002	.001	1
2	1	.000	.000	.000	1	.108	.001	.000	1
3	1	.000	.000	.000	1	.109	.001	.000	1
4	1	.000	.000	.000	1	.111	.001	.000	1
5	1	.000	.000	.000	1	.111	.001	.000	1
6	1	.000	.000	.000	1	.111	.001	.000	1
7	1	.000	.000	.000	1	.111	.001	.000	1
8	1	.000	.000	.000	1	.111	.001	.000	1
9	1	.000	.000	.000	1	.111	.001	.000	1
10	1	.000	.000	.000	1	.111	.001	.000	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.911	.909	.002	1	.911	.002	.220	1
2	1	.911	.991	.000	1	.890	.000	.000	1
3	1	.911	.999	.000	1	.890	.000	.000	1
4	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
5	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
6	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
7	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
8	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
9	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
10	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1

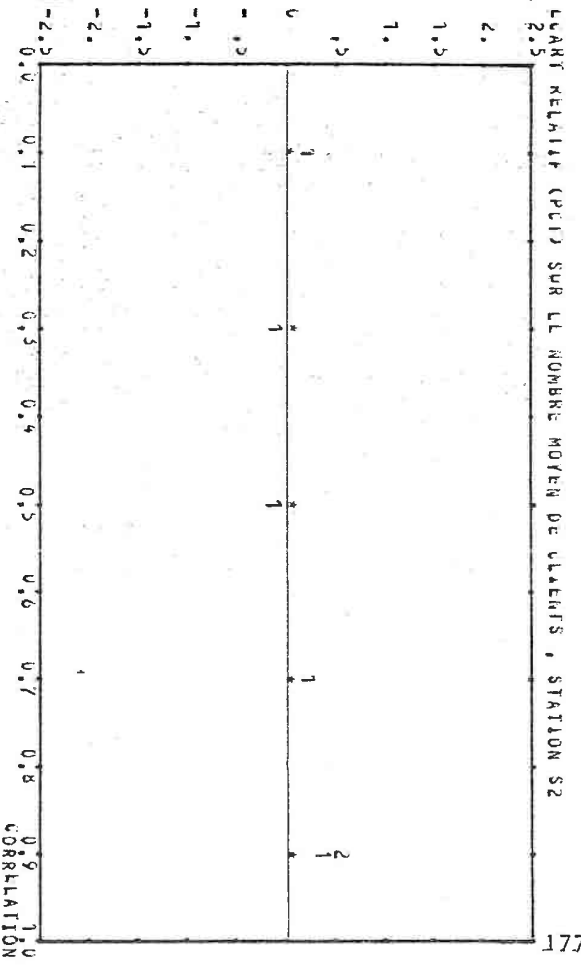
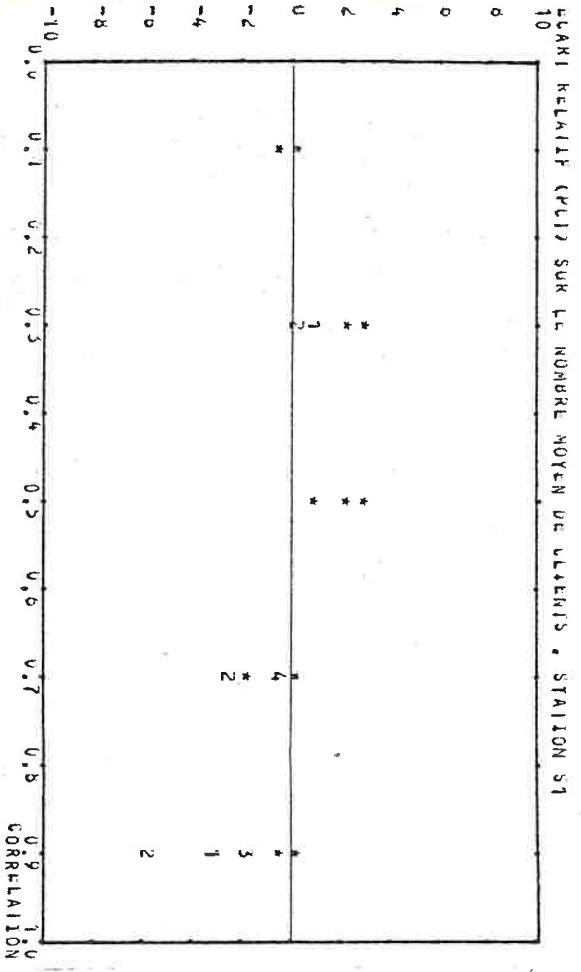
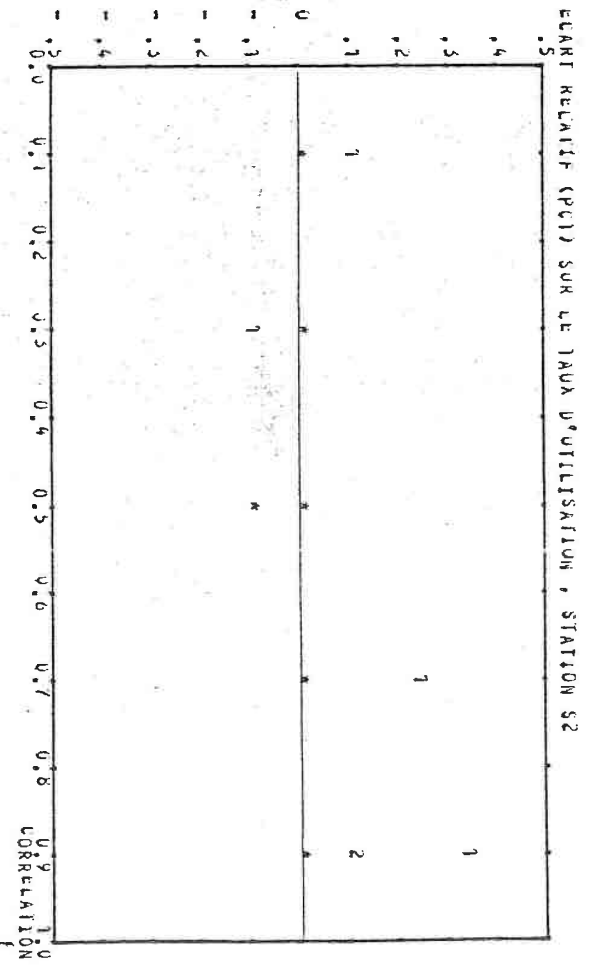
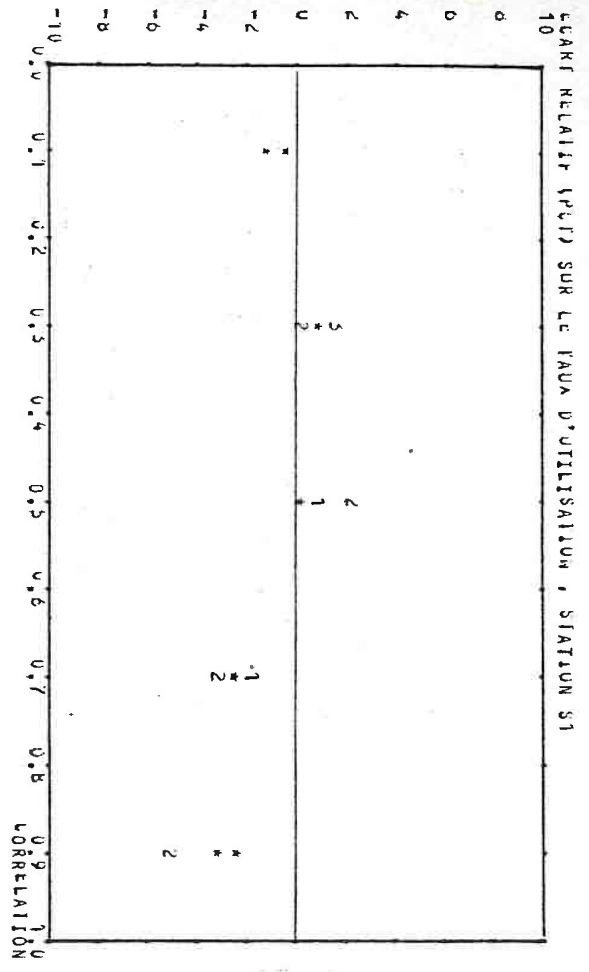
COEFFICIENT DE CORRELATION = .9

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.088	.091	.003	1	.088	.003	.413	1
2	1	.044	.099	.000	1	.108	.000	.000	1
3	1	.000	.000	.000	1	.109	.000	.000	1
4	1	.000	.000	.000	1	.111	.000	.000	1
5	1	.000	.000	.000	1	.111	.000	.000	1
6	1	.000	.000	.000	1	.111	.000	.000	1
7	1	.000	.000	.000	1	.110	.001	.000	1
8	1	.000	.000	.000	1	.111	.000	.000	1
9	1	.000	.000	.000	1	.111	.000	.000	1
10	1	.000	.000	.000	1	.111	.000	.000	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NB	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.912	.909	.003	1	.912	.003	.329	1
2	1	.999	.991	.000	1	.890	.000	.000	1
3	1	.999	.999	.000	1	.890	.000	.000	1
4	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
5	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
6	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
7	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
8	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
9	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1
10	1	.000	.000	.000	1	.890	.000	.000	1



 * SERVICE= .500 *

COEFFICIENT DE CORRELATION = .1

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	I	SIMUL	BCMP		I	SIMUL	BCMP		I
1	1				1				1
1	1	.331	.333	-.002	1	.331	.333	-.002	1
1	2	.426	.429	-.003	1	.426	.429	-.003	1
1	3	.466	.467	-.001	1	.466	.467	-.001	1
1	4	.484	.484	-.000	1	.484	.484	-.000	1
1	5	.492	.492	-.000	1	.492	.492	-.000	1
1	6	.496	.496	-.000	1	.496	.496	-.000	1
1	7	.498	.498	-.000	1	.498	.498	-.000	1
1	8	.499	.499	-.000	1	.499	.499	-.000	1
1	9	.500	.500	-.000	1	.500	.500	-.000	1
1	10	.500	.500	-.000	1	.500	.500	-.000	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	I	SIMUL	BCMP		I	SIMUL	BCMP		I
1	1				1				1
1	1	.669	.667	-.002	1	.669	.667	-.002	1
1	2	.880	.880	-.000	1	.880	.880	-.000	1
1	3	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	4	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	5	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	6	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	7	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	8	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	9	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	10	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1

COEFFICIENT DE CORRELATION = .3

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	I	SIMUL	BCMP		I	SIMUL	BCMP		I
1	1				1				1
1	1	.334	.333	-.001	1	.334	.333	-.001	1
1	2	.423	.429	-.006	1	.423	.429	-.006	1
1	3	.466	.467	-.001	1	.466	.467	-.001	1
1	4	.482	.484	-.002	1	.482	.484	-.002	1
1	5	.488	.492	-.004	1	.488	.492	-.004	1
1	6	.491	.496	-.005	1	.491	.496	-.005	1
1	7	.493	.498	-.005	1	.493	.498	-.005	1
1	8	.493	.499	-.006	1	.493	.499	-.006	1
1	9	.493	.500	-.007	1	.493	.500	-.007	1
1	10	.492	.500	-.008	1	.492	.500	-.008	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
INB	I	SIMUL	BCMP		I	SIMUL	BCMP		I
1	1				1				1
1	1	.666	.667	-.001	1	.666	.667	-.001	1
1	2	.880	.880	-.000	1	.880	.880	-.000	1
1	3	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	4	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	5	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	6	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	7	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	8	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	9	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1
1	10	.999	.999	-.000	1	.999	.999	-.000	1

STATION S1				STATION S2				STATION S3				STATION S4			
UTILISATION		U1-U2		U1-U2/U1		NB DE CLIENTS		L1-L2		L1-L2/L1		L1-L2/L1			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
1	1	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		
2	2	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		
3	3	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		
4	4	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		
5	5	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		
6	6	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		
7	7	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		
8	8	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		
9	9	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		
10	10	333	333	001	001	1	333	333	001	001	1	333	333		

[illegible]

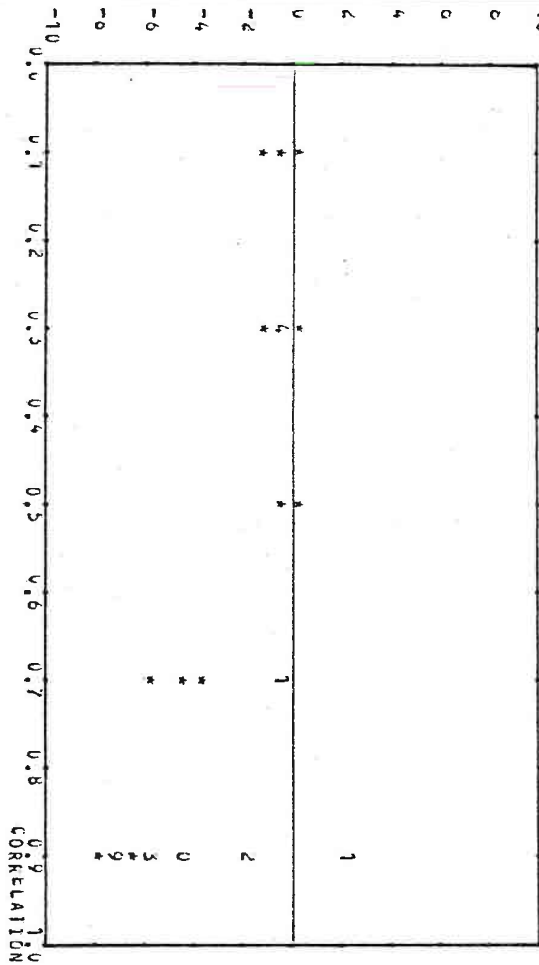
STATION S1									
I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
NB1	S1	BCMP				S1	BCMP		
1	1				1	3330	3333	0003	9097
2	1	3330	0003	4099	1	3330	3333	0003	9097
3	1	3330	0003	4099	1	3330	3333	0003	9097
4	1	3330	0003	4099	1	3330	3333	0003	9097
5	1	3330	0003	4099	1	3330	3333	0003	9097
6	1	3330	0003	4099	1	3330	3333	0003	9097
7	1	3330	0003	4099	1	3330	3333	0003	9097
8	1	3330	0003	4099	1	3330	3333	0003	9097
9	1	3330	0003	4099	1	3330	3333	0003	9097
10	1	3330	0003	4099	1	3330	3333	0003	9097

STATION S2		UTILISATION		U1-U2		U1-U2/U1		NB DE CLIENTS		L1-L2		L1-L2/L1	
I	NBI	SIMUL	BCMP					SIMUL	BCMP				
1	1	.670	.667	.003	.648	1	.670	.667	.003	.648	1	.670	.667
1	2	.864	.864	.000	.810	1	.864	.864	.000	.810	1	.864	.864
1	3	.917	.917	.000	.855	1	.917	.917	.000	.855	1	.917	.917
1	4	.948	.948	.000	.875	1	.948	.948	.000	.875	1	.948	.948
1	5	.964	.964	.000	.880	1	.964	.964	.000	.880	1	.964	.964
1	6	.974	.974	.000	.882	1	.974	.974	.000	.882	1	.974	.974
1	7	.984	.984	.000	.882	1	.984	.984	.000	.882	1	.984	.984
1	8	.986	.986	.000	.882	1	.986	.986	.000	.882	1	.986	.986
1	9	.991	.991	.000	.882	1	.991	.991	.000	.882	1	.991	.991
1	10	.999	.999	.000	.882	1	.999	.999	.000	.882	1	.999	.999

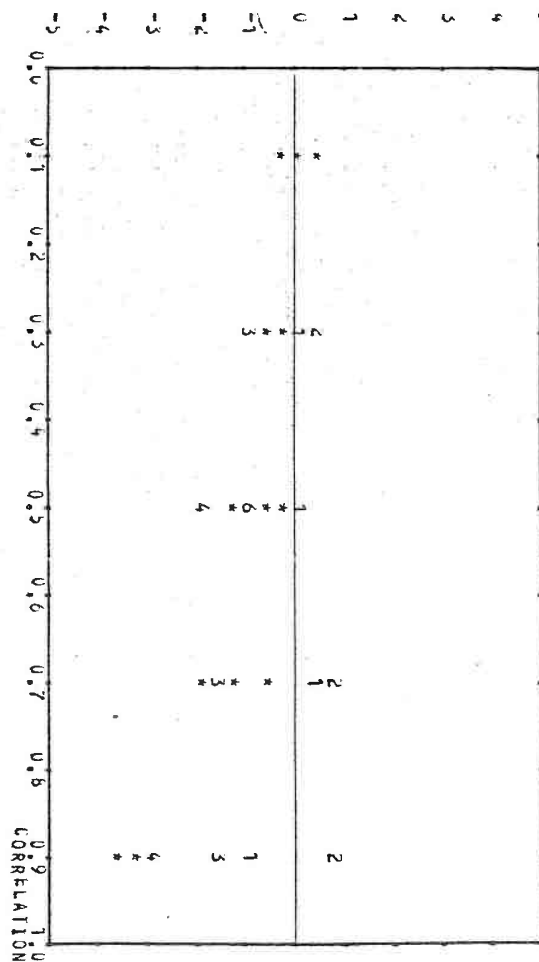
[illegible]

STATION 52		UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	NB DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1
I	Y	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP		
1	1	.660	.667	.007	-1.051	1.660	1.667	.007	-1.051
2	1	.853	.857	.004	-1.000	2.440	2.430	.010	0.041
3	1	.183	.183	.000	0.000	1.160	1.160	.000	0.000
4	1	.000	.658	.658	-1.000	1.000	1.000	.000	0.000
5	1	.999	.994	.005	-1.000	1.999	1.990	.009	-0.005
6	1	.999	.992	.007	-1.000	1.999	1.977	.022	-0.011
7	1	.999	.992	.007	-1.000	1.999	1.977	.022	-0.011
8	1	.999	.996	.003	-1.000	1.999	1.990	.009	-0.005
9	1	.999	.996	.003	-1.000	1.999	1.990	.009	-0.005
10	1	.999	.999	.000	0.000	1.999	1.999	.000	0.000

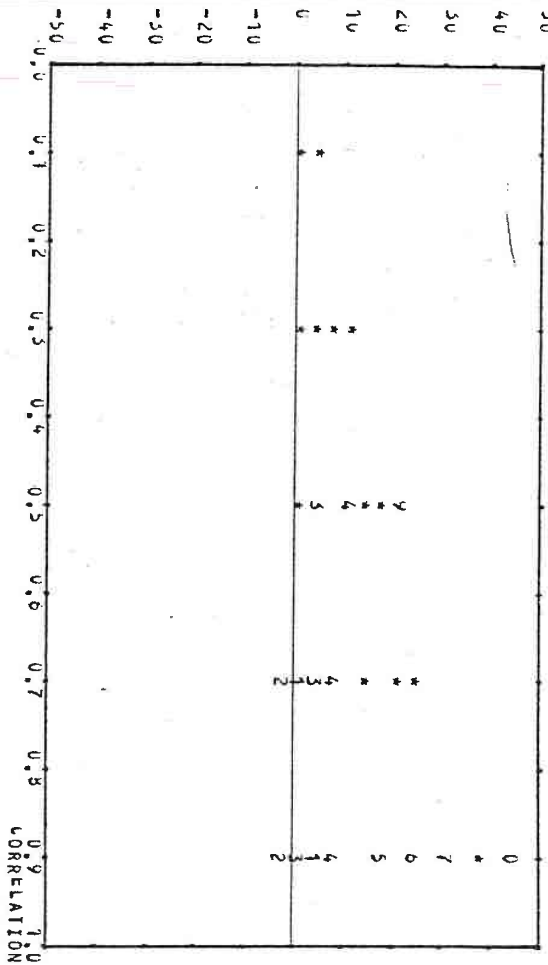
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION, STATION S1



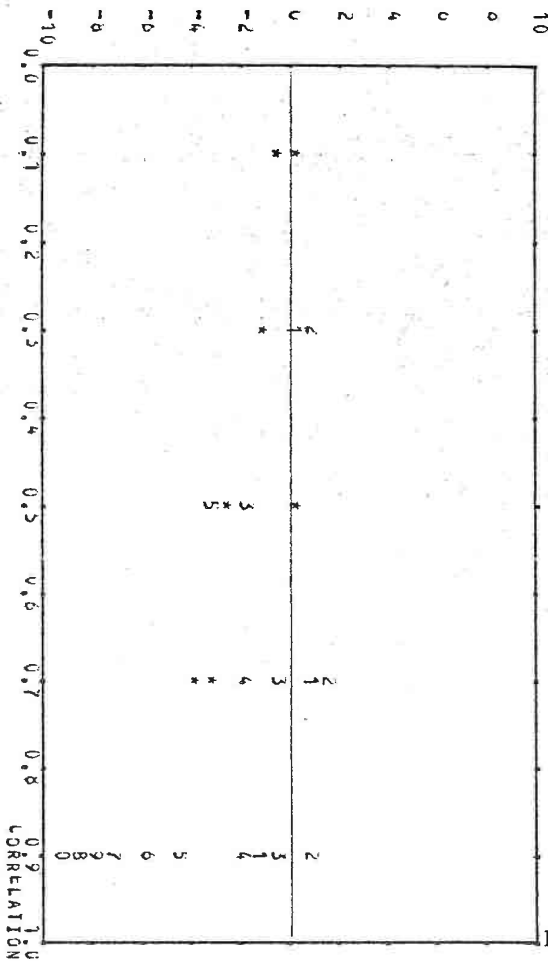
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION, STATION S2



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS, STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS, STATION S2



 * SERVICE = 1.000

COEFFICIENT DE CORRELATION = .1

STATION S1

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		SIMUL	BCMP					SIMUL	BCMP			
1	1	.657	.500	.000	.000	1	1	.497	.500	.000	.000	1
1	2	.667	.667	.000	.000	1	2	.500	.500	.000	.000	1
1	3	.733	.750	.000	.000	1	3	.500	.500	.000	.000	1
1	4	.778	.800	.000	.000	1	4	.500	.500	.000	.000	1
1	5	.833	.833	.000	.000	1	5	.500	.500	.000	.000	1
1	6	.889	.833	.000	.000	1	6	.500	.500	.000	.000	1
1	7	.944	.833	.000	.000	1	7	.500	.500	.000	.000	1
1	8	.944	.833	.000	.000	1	8	.500	.500	.000	.000	1
1	9	.944	.833	.000	.000	1	9	.500	.500	.000	.000	1
1	10	.944	.833	.000	.000	1	10	.500	.500	.000	.000	1

STATION S2

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		SIMUL	BCMP					SIMUL	BCMP			
1	1	.500	.500	.000	.000	1	1	.500	.500	.000	.000	1
1	2	.667	.667	.000	.000	1	2	.500	.500	.000	.000	1
1	3	.778	.750	.000	.000	1	3	.500	.500	.000	.000	1
1	4	.833	.800	.000	.000	1	4	.500	.500	.000	.000	1
1	5	.889	.833	.000	.000	1	5	.500	.500	.000	.000	1
1	6	.944	.833	.000	.000	1	6	.500	.500	.000	.000	1
1	7	.944	.833	.000	.000	1	7	.500	.500	.000	.000	1
1	8	.944	.833	.000	.000	1	8	.500	.500	.000	.000	1
1	9	.944	.833	.000	.000	1	9	.500	.500	.000	.000	1
1	10	.944	.833	.000	.000	1	10	.500	.500	.000	.000	1

COEFFICIENT DE CORRELATION = .3

STATION S1

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		SIMUL	BCMP					SIMUL	BCMP			
1	1	.501	.500	.000	.000	1	1	.501	.500	.000	.000	1
1	2	.667	.667	.000	.000	1	2	.500	.500	.000	.000	1
1	3	.778	.750	.000	.000	1	3	.500	.500	.000	.000	1
1	4	.833	.800	.000	.000	1	4	.500	.500	.000	.000	1
1	5	.889	.833	.000	.000	1	5	.500	.500	.000	.000	1
1	6	.944	.833	.000	.000	1	6	.500	.500	.000	.000	1
1	7	.944	.833	.000	.000	1	7	.500	.500	.000	.000	1
1	8	.944	.833	.000	.000	1	8	.500	.500	.000	.000	1
1	9	.944	.833	.000	.000	1	9	.500	.500	.000	.000	1
1	10	.944	.833	.000	.000	1	10	.500	.500	.000	.000	1

STATION S2

I	NB	UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1	I
		SIMUL	BCMP					SIMUL	BCMP			
1	1	.500	.500	.000	.000	1	1	.500	.500	.000	.000	1
1	2	.667	.667	.000	.000	1	2	.500	.500	.000	.000	1
1	3	.778	.750	.000	.000	1	3	.500	.500	.000	.000	1
1	4	.833	.800	.000	.000	1	4	.500	.500	.000	.000	1
1	5	.889	.833	.000	.000	1	5	.500	.500	.000	.000	1
1	6	.944	.833	.000	.000	1	6	.500	.500	.000	.000	1
1	7	.944	.833	.000	.000	1	7	.500	.500	.000	.000	1
1	8	.944	.833	.000	.000	1	8	.500	.500	.000	.000	1
1	9	.944	.833	.000	.000	1	9	.500	.500	.000	.000	1
1	10	.944	.833	.000	.000	1	10	.500	.500	.000	.000	1

COEFFICIENT DE CORRELATION = .5

[illegible]

STATION S2											
UTILISATION		U1-U2		U1-U2/U1		NB DE CLIENTS		L1-L2		L1-L2/L1	
NB	SIMUL	BCMP				SIMUL	BCMP				
1	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1
2	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1
3	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1
4	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1
5	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1
6	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1
7	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1
8	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1
9	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1
10	1	5	0	1	1	1	5	0	1	1	1

COEFFICIENT DE CORRELATION = .7

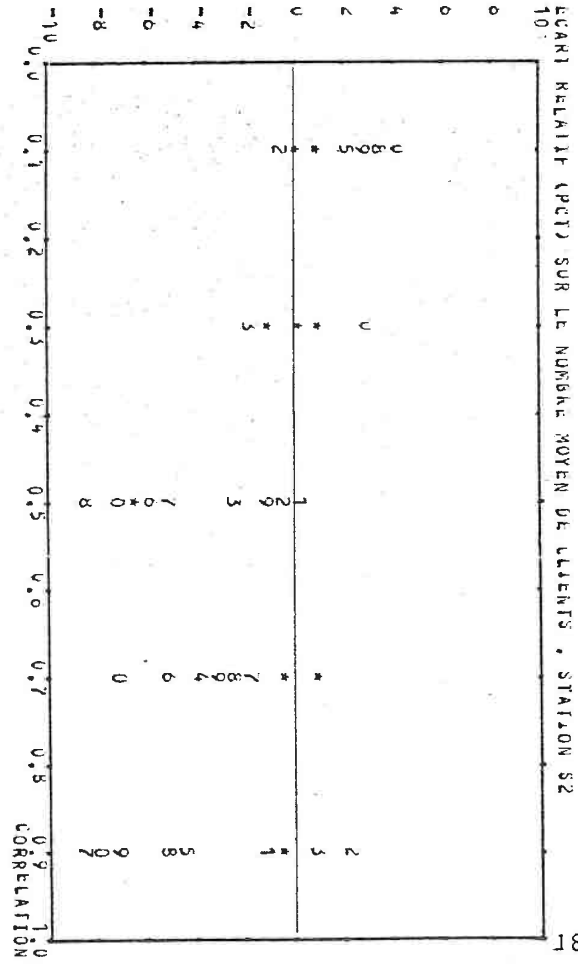
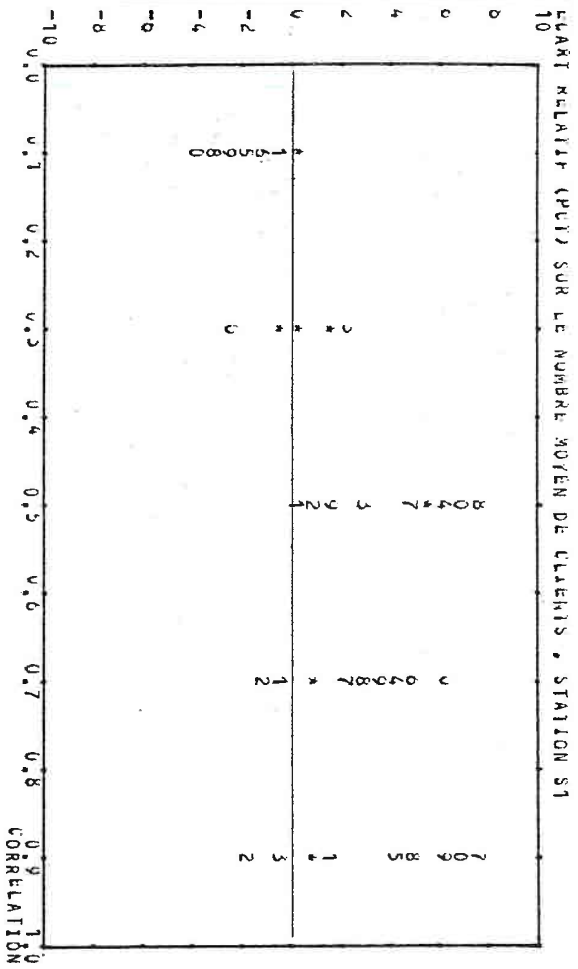
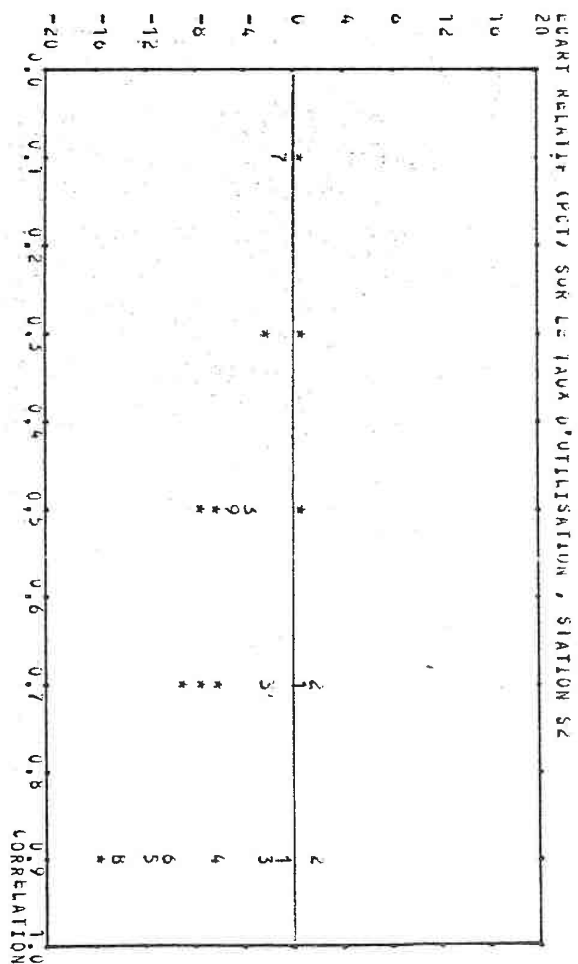
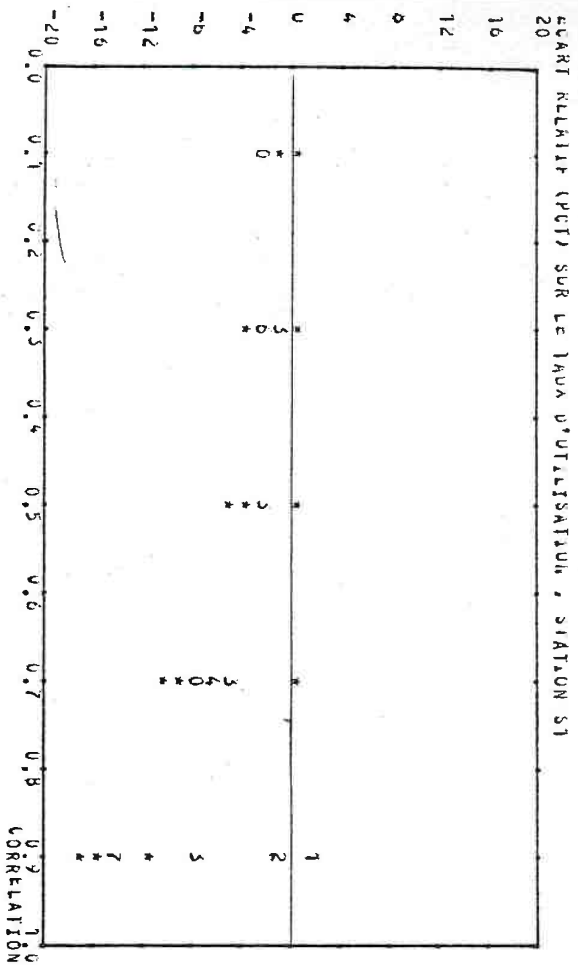
[illegible]

STATION S2		UTILISATION		U1-U2		U1-U2/U1		NB DE CLIENTS		L1-L2		L1-L2/L1	
I	NB I	SIMUL	BCMP					SIMUL	BCMP				
1	1	.50	.50	.00	.00	.59	.59	1	500	.00	.00	.00	.59
2	2	.50	.50	.00	.00	.59	.59	1	500	.00	.00	.00	.59
3	3	.72	.72	.11	.11	.66	.66	1	500	.01	.01	.01	.72
4	4	.72	.72	.11	.11	.66	.66	1	500	.01	.01	.01	.72
5	5	.78	.78	.11	.11	.66	.66	1	500	.01	.01	.01	.78
6	6	.78	.78	.11	.11	.66	.66	1	500	.01	.01	.01	.78
7	7	.88	.88	.11	.11	.66	.66	1	500	.01	.01	.01	.88
8	8	.88	.88	.11	.11	.66	.66	1	500	.01	.01	.01	.88
9	9	.88	.88	.11	.11	.66	.66	1	500	.01	.01	.01	.88
10	10	.88	.88	.11	.11	.66	.66	1	500	.01	.01	.01	.88

COEFFICIENT DE CORRELATION = .9

[illegible]

STATION S2											
UTILISATION		U1-U2		U1-U2/U1		NB DE CLIENTS		L1-L2		L1-L2/L1	
NB	SIMUL	BCMP				NB	DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	
1	493	500	007	1	493	1	493	500	007	1.420	
2	673	677	008	1	673	1	673	677	008	1.420	
3	743	743	009	1	743	1	743	743	009	1.420	
4	743	743	009	1	743	1	743	743	009	1.420	
5	743	743	009	1	743	1	743	743	009	1.420	
6	743	743	009	1	743	1	743	743	009	1.420	
7	743	743	009	1	743	1	743	743	009	1.420	
8	743	743	009	1	743	1	743	743	009	1.420	
9	743	743	009	1	743	1	743	743	009	1.420	
10	743	743	009	1	743	1	743	743	009	1.420	



 * SERVICE= 2.500

COEFFICIENT DE CORRELATION = .1

STATION S1

I	NB	UTILISATION	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
I	1	SIMUL	BCMP			I	1	SIMUL	BCMP		
1	1	.712	.714	-.002	-.281	1	1	.712	.714	-.002	-.281
1	2	.901	.897	-.004	-.444	1	2	.901	.897	-.004	-.444
1	3	.958	.961	.003	.313	1	3	.958	.961	.003	.313
1	4	.978	.984	.006	.614	1	4	.978	.984	.006	.614
1	5	.992	.994	.002	.303	1	5	.992	.994	.002	.303
1	6	.999	.998	-.001	-.101	1	6	.999	.998	-.001	-.101
1	7	.999	.999	.000	.000	1	7	.999	.999	.000	.000
1	8	.999	1.000	.001	.100	1	8	.999	1.000	.001	.100
1	9	1.000	1.000	.000	.000	1	9	1.000	1.000	.000	.000
1	10	1.000	1.000	.000	.000	1	10	1.000	1.000	.000	.000

STATION S2

I	NB	UTILISATION	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
I	1	SIMUL	BCMP			I	1	SIMUL	BCMP		
1	1	.288	.286	-.002	-.694	1	1	.288	.286	-.002	-.694
1	2	.355	.359	.004	.111	1	2	.355	.359	.004	.111
1	3	.385	.384	-.001	-.250	1	3	.385	.384	-.001	-.250
1	4	.401	.399	-.002	-.500	1	4	.401	.399	-.002	-.500
1	5	.397	.398	.001	.250	1	5	.397	.398	.001	.250
1	6	.393	.399	.006	.152	1	6	.393	.399	.006	.152
1	7	.393	.400	.007	.175	1	7	.393	.400	.007	.175
1	8	.394	.400	.006	.152	1	8	.394	.400	.006	.152
1	9	.394	.400	.006	.152	1	9	.394	.400	.006	.152
1	10	.396	.400	.004	.101	1	10	.396	.400	.004	.101

COEFFICIENT DE CORRELATION = .5

STATION S1

I	NB	UTILISATION	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
I	1	SIMUL	BCMP			I	1	SIMUL	BCMP		
1	1	.719	.714	-.005	-.695	1	1	.719	.714	-.005	-.695
1	2	.958	.961	.003	.313	1	2	.958	.961	.003	.313
1	3	.999	.998	-.001	-.101	1	3	.999	.998	-.001	-.101
1	4	.999	.999	.000	.000	1	4	.999	.999	.000	.000
1	5	.999	.999	.000	.000	1	5	.999	.999	.000	.000
1	6	.999	.999	.000	.000	1	6	.999	.999	.000	.000
1	7	.999	.999	.000	.000	1	7	.999	.999	.000	.000
1	8	.999	1.000	.001	.100	1	8	.999	1.000	.001	.100
1	9	.999	1.000	.001	.100	1	9	.999	1.000	.001	.100
1	10	.999	1.000	.001	.100	1	10	.999	1.000	.001	.100

STATION S2

I	NB	UTILISATION	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE	CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
I	1	SIMUL	BCMP			I	1	SIMUL	BCMP		
1	1	.281	.286	-.005	-.779	1	1	.281	.286	-.005	-.779
1	2	.356	.359	.003	.278	1	2	.356	.359	.003	.278
1	3	.353	.364	.011	.311	1	3	.353	.364	.011	.311
1	4	.353	.364	.011	.311	1	4	.353	.364	.011	.311
1	5	.353	.364	.011	.311	1	5	.353	.364	.011	.311
1	6	.353	.364	.011	.311	1	6	.353	.364	.011	.311
1	7	.353	.364	.011	.311	1	7	.353	.364	.011	.311
1	8	.353	.364	.011	.311	1	8	.353	.364	.011	.311
1	9	.353	.364	.011	.311	1	9	.353	.364	.011	.311
1	10	.353	.364	.011	.311	1	10	.353	.364	.011	.311

COEFFICIENT DE CORRELATION = .5

STATION S1								
I	NB I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
	SIMUL	BCMP				SIMUL		
1	1	719	714	.005	1	719	714	.005
2	1	848	847	.001	2	848	847	.001
3	1	942	941	.001	3	942	941	.001
4	1	966	964	.002	4	966	964	.002
5	1	973	971	.002	5	973	971	.002
6	1	982	980	.002	6	982	980	.002
7	1	989	987	.002	7	989	987	.002
8	1	994	992	.002	8	994	992	.002
9	1	995	993	.002	9	995	993	.002
10	1	997	995	.002	10	997	995	.002

STATION S2								
I	NB I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
	SIMUL	BCMP				SIMUL		
1	1	281	286	.005	1	281	286	.005
2	1	361	359	.002	2	361	359	.002
3	1	371	369	.002	3	371	369	.002
4	1	373	371	.002	4	373	371	.002
5	1	387	385	.002	5	387	385	.002
6	1	390	388	.002	6	390	388	.002
7	1	390	388	.002	7	390	388	.002
8	1	393	391	.002	8	393	391	.002
9	1	394	392	.002	9	394	392	.002
10	1	397	395	.002	10	397	395	.002

COEFFICIENT DE CORRELATION = .7

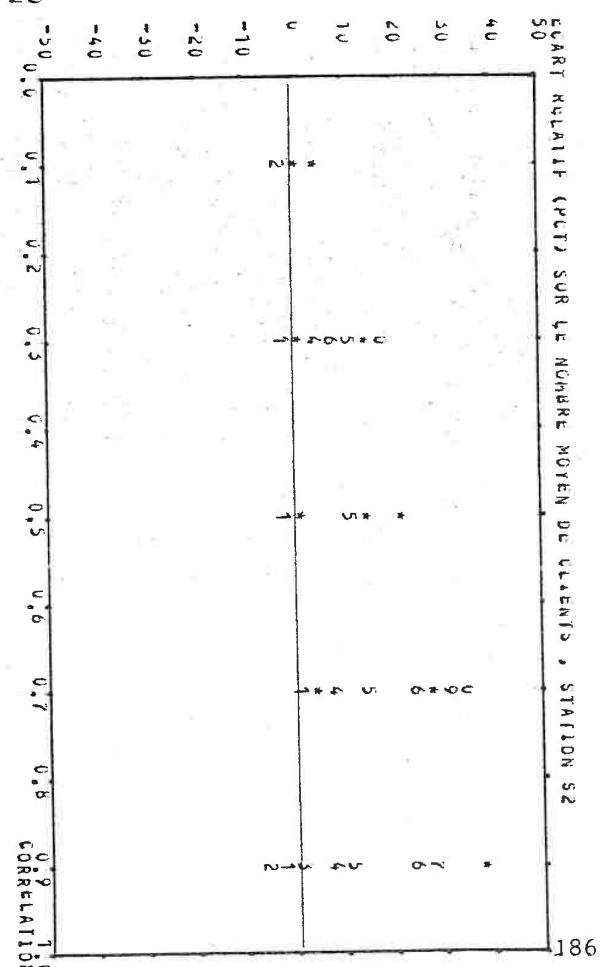
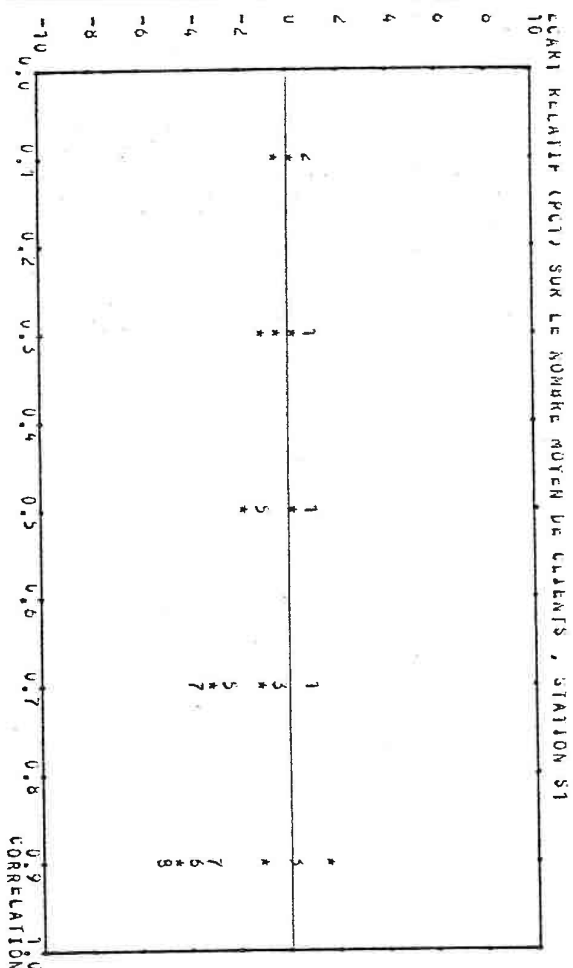
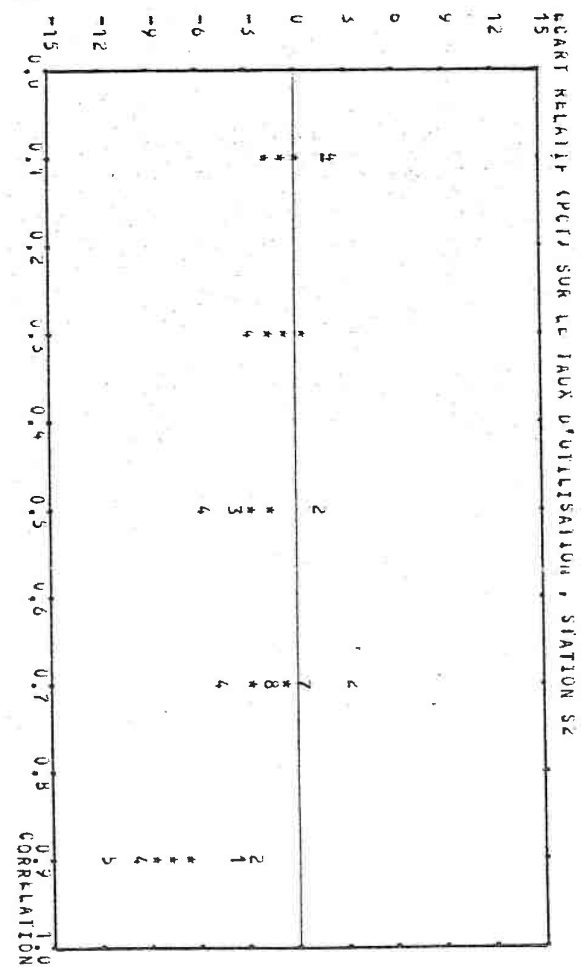
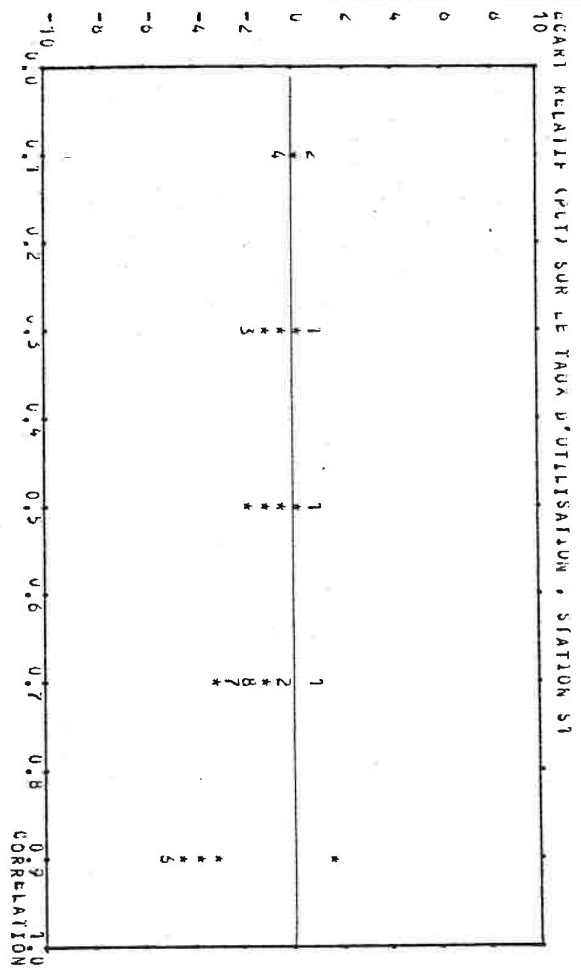
STATION S1								
I	NB I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
	SIMUL	BCMP				SIMUL		
1	1	717	714	.003	1	717	714	.003
2	1	800	797	.003	2	800	797	.003
3	1	890	887	.003	3	890	887	.003
4	1	900	897	.003	4	900	897	.003
5	1	906	903	.003	5	906	903	.003
6	1	911	908	.003	6	911	908	.003
7	1	913	910	.003	7	913	910	.003
8	1	917	914	.003	8	917	914	.003
9	1	920	917	.003	9	920	917	.003
10	1	922	919	.003	10	922	919	.003

STATION S2								
I	NB I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
	SIMUL	BCMP				SIMUL		
1	1	283	286	.003	1	283	286	.003
2	1	370	369	.001	2	370	369	.001
3	1	374	373	.001	3	374	373	.001
4	1	377	376	.001	4	377	376	.001
5	1	388	387	.001	5	388	387	.001
6	1	388	387	.001	6	388	387	.001
7	1	399	398	.001	7	399	398	.001
8	1	399	398	.001	8	399	398	.001
9	1	397	396	.001	9	397	396	.001
10	1	395	394	.001	10	395	394	.001

COEFFICIENT DE CORRELATION = .9

STATION S1								
I	NB I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
	SIMUL	BCMP				SIMUL		
1	1	725	714	.011	1	725	714	.011
2	1	908	897	.011	2	908	897	.011
3	1	931	920	.011	3	931	920	.011
4	1	939	928	.011	4	939	928	.011
5	1	951	940	.011	5	951	940	.011
6	1	958	947	.011	6	958	947	.011
7	1	961	950	.011	7	961	950	.011
8	1	965	954	.011	8	965	954	.011
9	1	963	952	.011	9	963	952	.011
10	1	967	956	.011	10	967	956	.011

STATION S2								
I	NB I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1
	SIMUL	BCMP				SIMUL		
1	1	275	286	.011	1	275	286	.011
2	1	344	355	.023	2	344	355	.023
3	1	360	371	.023	3	360	371	.023
4	1	363	374	.023	4	363	374	.023
5	1	363	374	.023	5	363	374	.023
6	1	363	374	.023	6	363	374	.023
7	1	363	374	.023	7	363	374	.023
8	1	363	374	.023	8	363	374	.023
9	1	363	374	.023	9	363	374	.023
10	1	363	374	.023	10	363	374	.023



 * SERVICE = 5.000 *

COEFFICIENT DE CORRELATION = .1

STATION S1

I	NB	UTILISATION SIMUL	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS SIMUL	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.834	.833	.001	.120	1	1	.834	.833	.001	.120	1
2	1	.999	.999	.000	.000	2	1	.999	.999	.000	.000	2
3	1	.999	.999	.000	.000	3	1	.999	.999	.000	.000	3
4	1	.999	.999	.000	.000	4	1	.999	.999	.000	.000	4
5	1	.999	.999	.000	.000	5	1	.999	.999	.000	.000	5
6	1	.999	.999	.000	.000	6	1	.999	.999	.000	.000	6
7	1	.999	.999	.000	.000	7	1	.999	.999	.000	.000	7
8	1	.999	.999	.000	.000	8	1	.999	.999	.000	.000	8
9	1	.999	.999	.000	.000	9	1	.999	.999	.000	.000	9
10	1	.999	.999	.000	.000	10	1	.999	.999	.000	.000	10

STATION S2

I	NB	UTILISATION SIMUL	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS SIMUL	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.166	.167	.001	.602	1	1	.166	.167	.001	.602	1
2	1	.166	.167	.001	.602	2	1	.166	.167	.001	.602	2
3	1	.166	.167	.001	.602	3	1	.166	.167	.001	.602	3
4	1	.166	.167	.001	.602	4	1	.166	.167	.001	.602	4
5	1	.166	.167	.001	.602	5	1	.166	.167	.001	.602	5
6	1	.166	.167	.001	.602	6	1	.166	.167	.001	.602	6
7	1	.166	.167	.001	.602	7	1	.166	.167	.001	.602	7
8	1	.166	.167	.001	.602	8	1	.166	.167	.001	.602	8
9	1	.166	.167	.001	.602	9	1	.166	.167	.001	.602	9
10	1	.166	.167	.001	.602	10	1	.166	.167	.001	.602	10

COEFFICIENT DE CORRELATION = .3

STATION S1

I	NB	UTILISATION SIMUL	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS SIMUL	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.833	.833	.000	.000	1	1	.833	.833	.000	.000	1
2	1	.999	.999	.000	.000	2	1	.999	.999	.000	.000	2
3	1	.999	.999	.000	.000	3	1	.999	.999	.000	.000	3
4	1	.999	.999	.000	.000	4	1	.999	.999	.000	.000	4
5	1	.999	.999	.000	.000	5	1	.999	.999	.000	.000	5
6	1	.999	.999	.000	.000	6	1	.999	.999	.000	.000	6
7	1	.999	.999	.000	.000	7	1	.999	.999	.000	.000	7
8	1	.999	.999	.000	.000	8	1	.999	.999	.000	.000	8
9	1	.999	.999	.000	.000	9	1	.999	.999	.000	.000	9
10	1	.999	.999	.000	.000	10	1	.999	.999	.000	.000	10

STATION S2

I	NB	UTILISATION SIMUL	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB	DE CLIENTS SIMUL	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	.167	.167	.000	.000	1	1	.167	.167	.000	.000	1
2	1	.167	.167	.000	.000	2	1	.167	.167	.000	.000	2
3	1	.167	.167	.000	.000	3	1	.167	.167	.000	.000	3
4	1	.167	.167	.000	.000	4	1	.167	.167	.000	.000	4
5	1	.167	.167	.000	.000	5	1	.167	.167	.000	.000	5
6	1	.167	.167	.000	.000	6	1	.167	.167	.000	.000	6
7	1	.167	.167	.000	.000	7	1	.167	.167	.000	.000	7
8	1	.167	.167	.000	.000	8	1	.167	.167	.000	.000	8
9	1	.167	.167	.000	.000	9	1	.167	.167	.000	.000	9
10	1	.167	.167	.000	.000	10	1	.167	.167	.000	.000	10

COEFFICIENT DE CORRELATION = .5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.833	.005	.27	1	.833	.005	.597	1
2	1	.968	.002	.07	2	.770	.000	.000	1
3	1	.999	.000	.00	3	.770	.000	.000	1
4	1	.999	.000	.00	4	.770	.000	.000	1
5	1	.999	.000	.00	5	.770	.000	.000	1
6	1	.999	.000	.00	6	.770	.000	.000	1
7	1	.999	.000	.00	7	.770	.000	.000	1
8	1	.999	.000	.00	8	.770	.000	.000	1
9	1	.999	.000	.00	9	.770	.000	.000	1
10	1	.999	.000	.00	10	.770	.000	.000	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.167	.005	.3	1	.167	.005	.3	1
2	1	.194	.000	.00	2	.226	.000	.00	1
3	1	.194	.000	.00	3	.226	.000	.00	1
4	1	.194	.000	.00	4	.226	.000	.00	1
5	1	.194	.000	.00	5	.226	.000	.00	1
6	1	.194	.000	.00	6	.226	.000	.00	1
7	1	.194	.000	.00	7	.226	.000	.00	1
8	1	.194	.000	.00	8	.226	.000	.00	1
9	1	.194	.000	.00	9	.226	.000	.00	1
10	1	.194	.000	.00	10	.226	.000	.00	1

COEFFICIENT DE CORRELATION = .7

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.833	.001	.120	1	.833	.001	.120	1
2	1	.999	.000	.00	2	.770	.000	.00	1
3	1	.999	.000	.00	3	.770	.000	.00	1
4	1	.999	.000	.00	4	.770	.000	.00	1
5	1	.999	.000	.00	5	.770	.000	.00	1
6	1	.999	.000	.00	6	.770	.000	.00	1
7	1	.999	.000	.00	7	.770	.000	.00	1
8	1	.999	.000	.00	8	.770	.000	.00	1
9	1	.999	.000	.00	9	.770	.000	.00	1
10	1	.999	.000	.00	10	.770	.000	.00	1

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.167	.001	.5	1	.167	.001	.5	1
2	1	.194	.000	.00	2	.226	.000	.00	1
3	1	.194	.000	.00	3	.226	.000	.00	1
4	1	.194	.000	.00	4	.226	.000	.00	1
5	1	.194	.000	.00	5	.226	.000	.00	1
6	1	.194	.000	.00	6	.226	.000	.00	1
7	1	.194	.000	.00	7	.226	.000	.00	1
8	1	.194	.000	.00	8	.226	.000	.00	1
9	1	.194	.000	.00	9	.226	.000	.00	1
10	1	.194	.000	.00	10	.226	.000	.00	1

COEFFICIENT DE CORRELATION = .9

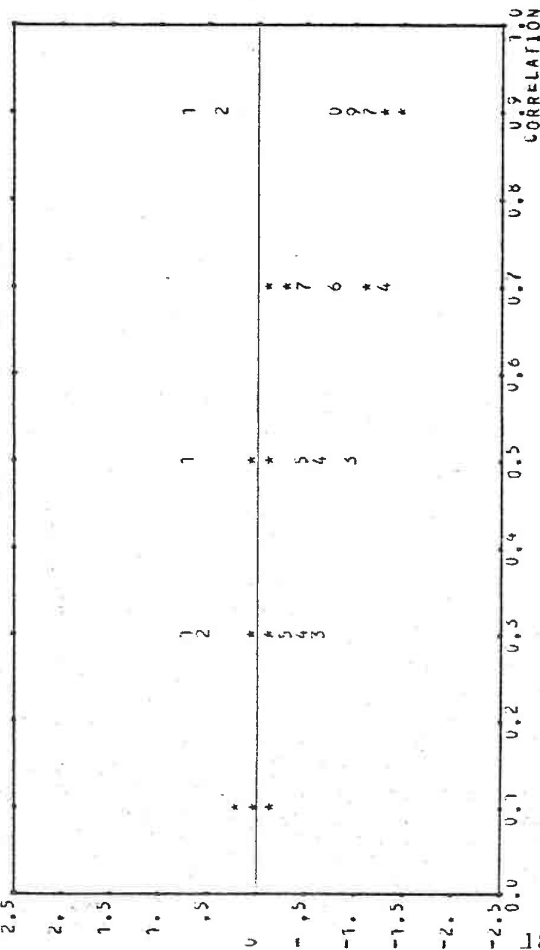
STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.833	.006	.715	1	.833	.006	.715	1
2	1	.968	.003	.3	2	.770	.003	.3	1
3	1	.999	.000	.00	3	.770	.000	.00	1
4	1	.999	.000	.00	4	.770	.000	.00	1
5	1	.999	.000	.00	5	.770	.000	.00	1
6	1	.999	.000	.00	6	.770	.000	.00	1
7	1	.999	.000	.00	7	.770	.000	.00	1
8	1	.999	.000	.00	8	.770	.000	.00	1
9	1	.999	.000	.00	9	.770	.000	.00	1
10	1	.999	.000	.00	10	.770	.000	.00	1

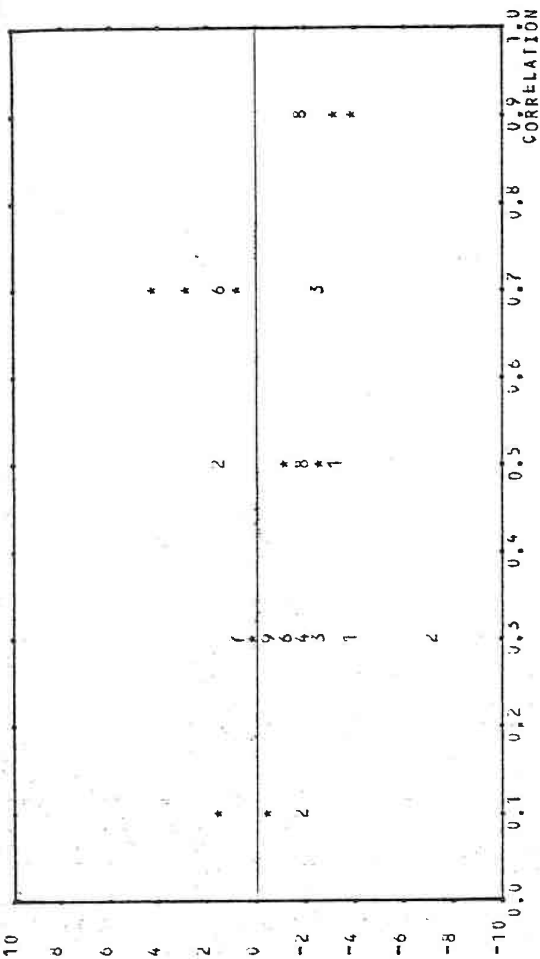
STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
NBI	SIMUL	BCMP			SIMUL	BCMP			
1	1	.167	.006	.727	1	.167	.006	.727	1
2	1	.194	.003	.3	2	.226	.003	.3	1
3	1	.194	.000	.00	3	.226	.000	.00	1
4	1	.194	.000	.00	4	.226	.000	.00	1
5	1	.194	.000	.00	5	.226	.000	.00	1
6	1	.194	.000	.00	6	.226	.000	.00	1
7	1	.194	.000	.00	7	.226	.000	.00	1
8	1	.194	.000	.00	8	.226	.000	.00	1
9	1	.194	.000	.00	9	.226	.000	.00	1
10	1	.194	.000	.00	10	.226	.000	.00	1

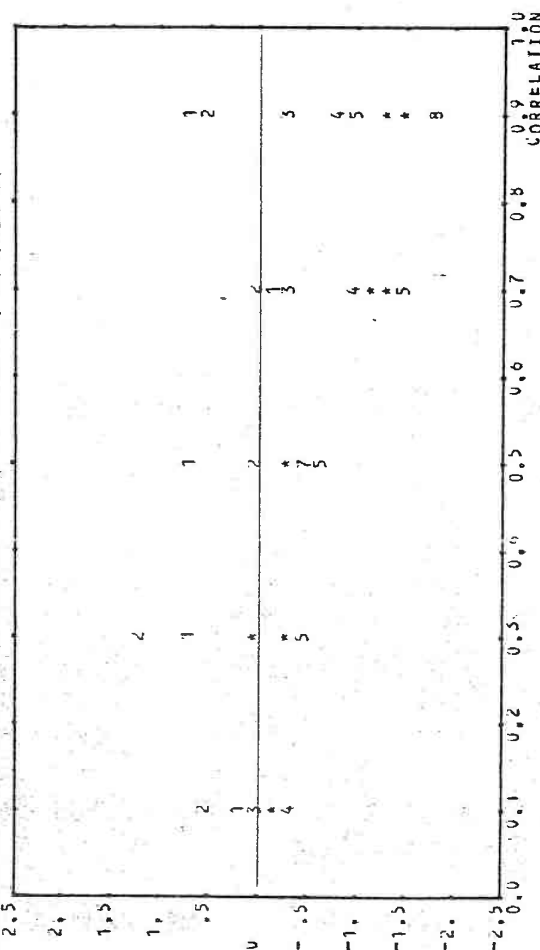
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION, STATION S1



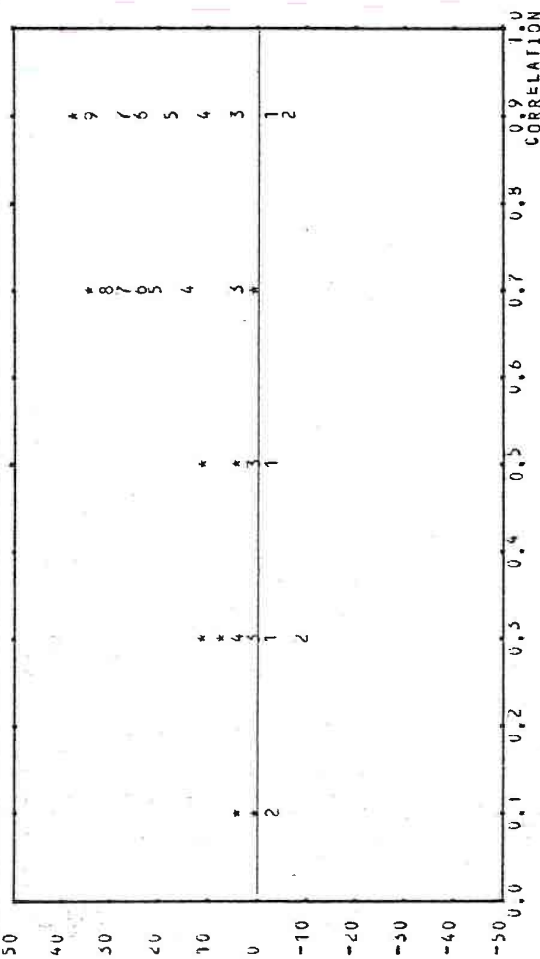
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION, STATION S2



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS, STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS, STATION S2



 * SERVICE = 10.000

COEFFICIENT DE CORRELATION = .1

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	SIMUL	BCMP		1	SIMUL	BCMP		1
1	1	.908	.759	-.001	1	.908	.909	-.001	1
2	1	.999	.991	.000	2	.999	.990	.000	2
3	1	.999	.999	.000	3	.999	.990	.000	3
4	1	1.000	1.000	.000	4	1.000	1.000	.000	4
5	1	1.000	1.000	.000	5	1.000	1.000	.000	5
6	1	1.000	1.000	.000	6	1.000	1.000	.000	6
7	1	1.000	1.000	.000	7	1.000	1.000	.000	7
8	1	1.000	1.000	.000	8	1.000	1.000	.000	8
9	1	1.000	1.000	.000	9	1.000	1.000	.000	9
10	1	1.000	1.000	.000	10	1.000	1.000	.000	10

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	SIMUL	BCMP		1	SIMUL	BCMP		1
1	1	.092	.091	-.001	1	.092	.091	-.001	1
2	1	.099	.099	.000	2	.099	.098	-.001	2
3	1	.101	.100	-.001	3	.101	.101	.000	3
4	1	.104	.100	-.004	4	.106	.111	.005	4
5	1	.104	.100	-.004	5	.116	.111	-.005	5
6	1	.103	.100	-.003	6	.115	.111	-.004	6
7	1	.104	.100	-.004	7	.116	.111	-.005	7
8	1	.104	.100	-.004	8	.116	.111	-.005	8
9	1	.103	.100	-.003	9	.115	.111	-.004	9
10	1	.104	.100	-.004	10	.116	.111	-.005	10

COEFFICIENT DE CORRELATION = .5

STATION S1

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	SIMUL	BCMP		1	SIMUL	BCMP		1
1	1	.910	.909	-.001	1	.910	.909	-.001	1
2	1	.992	.991	-.001	2	.999	.990	.000	2
3	1	.997	.999	.002	3	.999	.990	.000	3
4	1	.999	1.000	.001	4	.999	.990	.000	4
5	1	1.000	1.000	.000	5	1.000	1.000	.000	5
6	1	1.000	1.000	.000	6	1.000	1.000	.000	6
7	1	1.000	1.000	.000	7	1.000	1.000	.000	7
8	1	1.000	1.000	.000	8	1.000	1.000	.000	8
9	1	1.000	1.000	.000	9	1.000	1.000	.000	9
10	1	1.000	1.000	.000	10	1.000	1.000	.000	10

STATION S2

I	I	UTILISATION	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB DE CLIENTS	L1-L2	L1-L2/L1	I
1	1	SIMUL	BCMP		1	SIMUL	BCMP		1
1	1	.090	.091	.001	1	.090	.091	.001	1
2	1	.088	.099	.001	2	.106	.108	.002	2
3	1	.066	.066	.000	3	.107	.111	.004	3
4	1	.077	.100	.003	4	.100	.111	.001	4
5	1	.099	.099	.000	5	.109	.111	.002	5
6	1	.077	.100	.003	6	.111	.111	.000	6
7	1	.077	.100	.003	7	.110	.111	.001	7
8	1	.077	.100	.003	8	.111	.111	.000	8
9	1	.077	.100	.003	9	.111	.111	.000	9
10	1	.077	.100	.003	10	.111	.111	.000	10

COEFFICIENT DE CORRELATION = .5

STATION S1		UTILISATION		U1-U2		U1-U2/U1		NB DE CLIENTS		L1-L2		L1-L2/L1	
I	I	SIMUL	BCMP					SIMUL	BCMP				
1	1	.9	.9	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00
2	2	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00
3	3	.999	.999	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00
4	4	.9999	.9999	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00
5	5	.99999	.99999	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00
6	6	.999999	.999999	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00
7	7	.9999999	.9999999	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00
8	8	.99999999	.99999999	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00
9	9	.999999999	.999999999	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00
10	10	.9999999999	.9999999999	.00	.00	.00	.00	1	1	.00	.00	.00	.00

STATION S2		UTILISATION		U1-U2		U1-U2/U1		NB DE CLIENTS		L1-L2		L1-L2/L1	
I	INBI	SIMUL	BCMP					SIMUL	BCMP				
1	1	.089	.091	.002	2	.000	0	.089	.091	.002	-2	.020	
2	1	.099	.108	.000	1	.000	0	.099	.108	.000		.917	003
3	1	.099	.111	.000	2	.000	0	.099	.111	.000		.909	322
4	1	.099	.111	.000	2	.000	0	.099	.111	.000		.647	788
5	1	.099	.111	.000	2	.000	0	.099	.111	.000		.647	788
6	1	.099	.111	.000	2	.000	0	.099	.111	.000		.647	788
7	1	.099	.111	.000	2	.000	0	.099	.111	.000		.647	788
8	1	.099	.111	.000	2	.000	0	.099	.111	.000		.647	788
9	1	.099	.111	.000	2	.000	0	.099	.111	.000		.647	788
10	1	.099	.111	.000	2	.000	0	.099	.111	.000		.647	788

COEFFICIENT OF CORRELATION = .7

STATION S1		UTILISATION		U1-U2		U1-U2/U1		NB DE CLIENTS		L1-L2		L1-L2/L1	
I	I	SIMUL	BCMP					SIMUL	BCMP				
1	1	.90	.99	.00	.00	.00	.00	1	.07	.00	.00	.00	.00
2	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
3	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
4	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
5	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
6	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
7	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
8	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
9	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
10	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
11	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
12	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
13	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
14	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
15	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
16	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
17	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
18	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
19	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
20	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
21	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
22	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
23	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
24	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
25	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
26	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
27	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
28	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
29	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
30	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
31	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
32	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
33	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00
34	1	.99	.99	.00	.00	.00	.00	1	.08	.00	.00	.00	.00

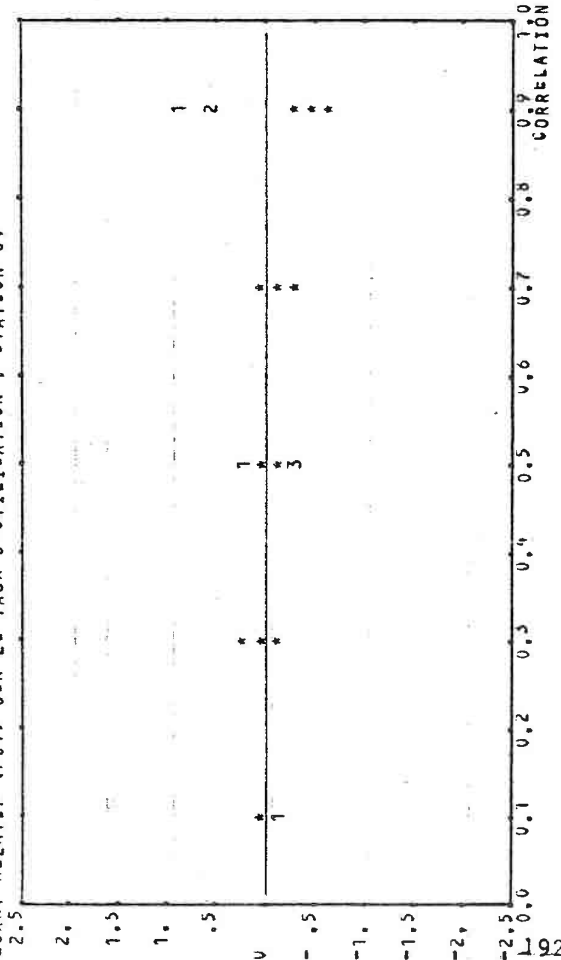
STATION S2		UTILISATION		U1-U2	U1-U2/U1	NB DE CLIENTS		L1-L2	L1-L2/L1
I	SI	MUL	BCMP			SIMUL	BCMP		
1	1	.093	.091	.002	2	.093	.091	.002	2
2	1	.106	.099	.007	2	.106	.098	.008	2
3	1	.105	.100	.005	2	.105	.100	.005	2
4	1	.107	.100	.007	2	.107	.100	.007	2
5	1	.106	.100	.006	2	.106	.100	.006	2
6	1	.109	.100	.009	2	.109	.100	.009	2
7	1	.107	.100	.007	2	.107	.100	.007	2
8	1	.106	.100	.006	2	.106	.100	.006	2
9	1	.106	.100	.006	2	.106	.100	.006	2
10	1	.106	.100	.006	2	.106	.100	.006	2

COEFFICIENT DE CORRELATION = .9

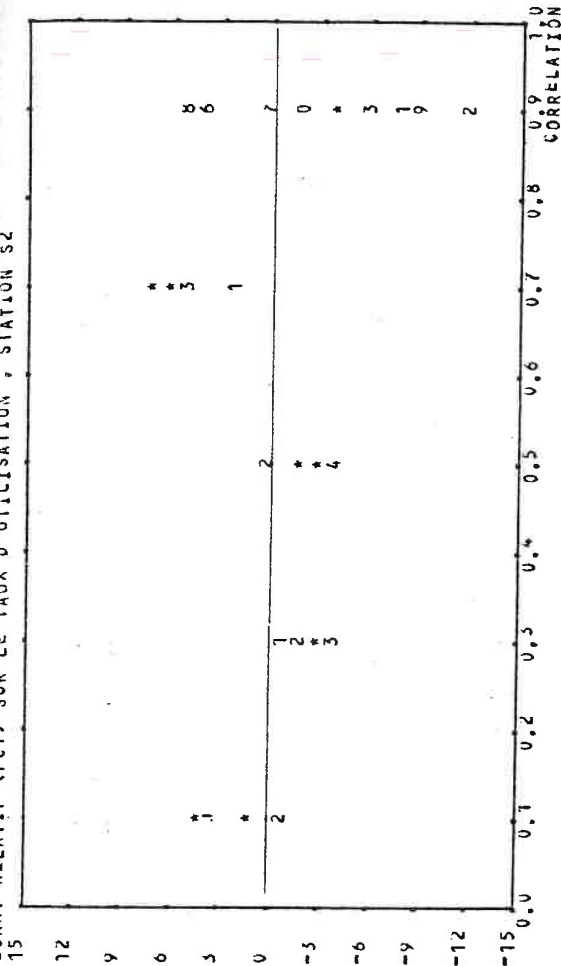
STATION S1		UTILISATION		U1-U2		U1-U2/U1		NB DE CLIENTS		L1-L2		L1-L2/L1	
I	NB1	UTILISATION	BCMP	U1-U2	U1-U2/U1	I	NB1	DE	BCMP	L1-L2	L1-L2/L1	I	NB1
1	1	9	909			1	9	9	9			1	9
2	1	9	909			2	9	9	9			2	9
3	1	9	909			3	9	9	9			3	9
4	1	9	909			4	9	9	9			4	9
5	1	9	909			5	9	9	9			5	9
6	1	9	909			6	9	9	9			6	9
7	1	9	909			7	9	9	9			7	9
8	1	9	909			8	9	9	9			8	9
9	1	9	909			9	9	9	9			9	9
0	1	9	909			0	9	9	9			0	9

[illegible]

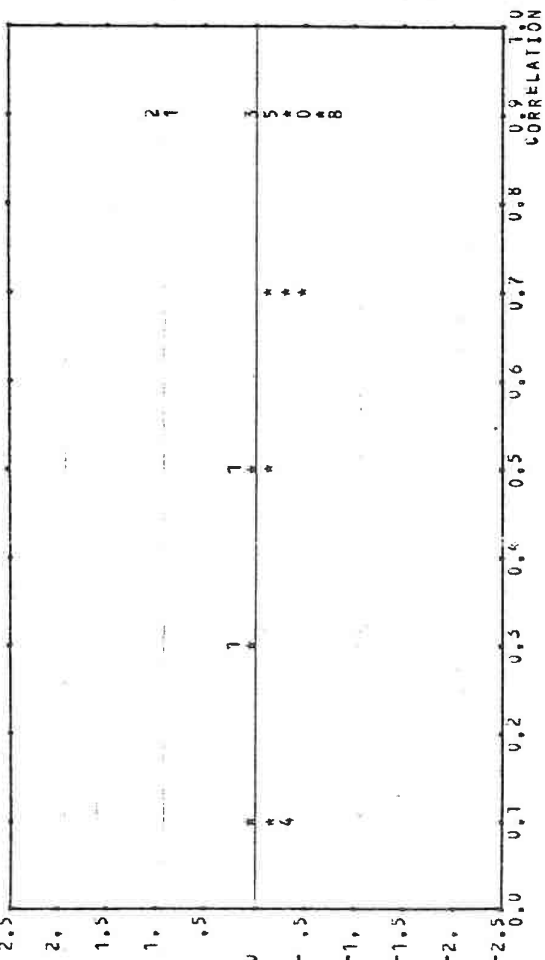
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION , STATION S1



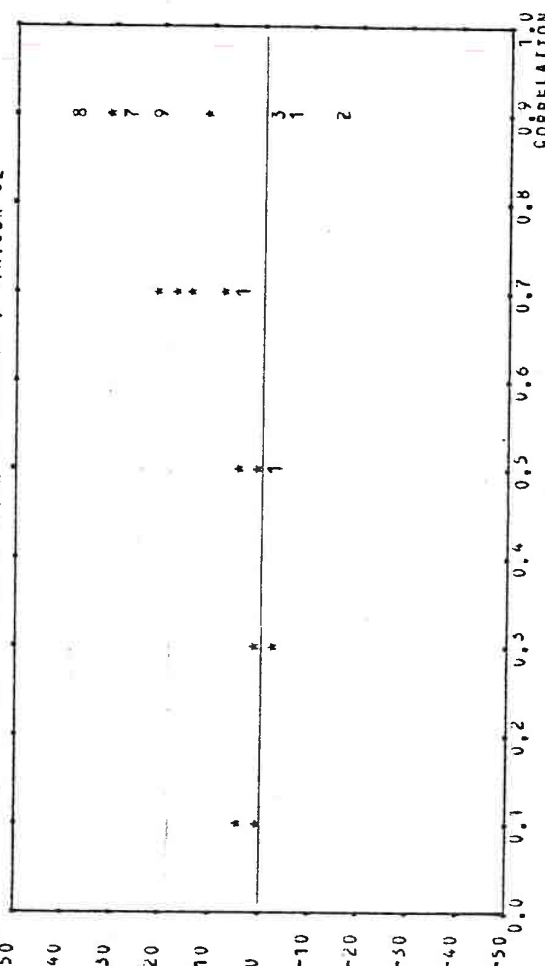
ECART RELATIF (PCT) SUR LE TAUX D'UTILISATION , STATION S2



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S1



ECART RELATIF (PCT) SUR LE NOMBRE MOYEN DE CLIENTS , STATION S2



ANNEXE III.3

Modèles du système GCOS-64

III.3.1 - Modèle A

```

&
&      MODELE A ....
&
& UNE FILE PAR PERIPHERIQUE ,
& DONNEES BRUTES ,
& RESOLUTION PAR CALCUL ANALYTIQUE BCMP .
&
/DECLAR/QUEUE CPU,DSYS,DK1,DK2,DK3,TP1,TP2,TP3,TP4,TP5;
      CLASS C3,C1,C2,C4;
      INTEGER N1,N2,N3,N4;
&
& UNITE CENTRALE ...
&
/STATION/NAME=CPU;
      SCHED=LIFO,PREEMPT;
      SERVICE(C1)=EXP(34.4);SERVICE(C2)=EXP(18.8);
      SERVICE(C3)=EXP(16.2);SERVICE(C4)=EXP(14.6);
      TRANSIT(C1)=DSYS,16930,DK1,9997;
      TRANSIT(C2)=DSYS,7735,DK2,32196,TP1,109,TP2,4987,TP3,159;
      TRANSIT(C3)=DSYS,1320,DK3,4537,TP4,21807,TP5,21830;
      TRANSIT(C4)=DSYS,1665,DK2,24462,DK3,16236;
      INIT(C1)=N1;INIT(C2)=N2;INIT(C3)=N3;INIT(C4)=N4;
&
& DISQUES ...
&
/STATION/NAME=DSYS;
      SCHED=LIFO,PREEMPT;
      SERVICE(C1)=EXP(20.0);SERVICE(C2)=EXP(13.8);
      SERVICE(C3)=EXP(24.5);SERVICE(C4)=EXP(25.2);
      TRANSIT=CPU;
/STATION/NAME=DK1;
      SERVICE=EXP(37.4);TRANSIT(C1)=CPU;
/STATION/NAME=DK2;
      SCHED=LIFO,PREEMPT;
      SERVICE(C2)=EXP(18.4);SERVICE(C4)=EXP(21.8);
      TRANSIT(C2)=CPU;TRANSIT(C4)=CPU;
/STATION/NAME=DK3;
      SCHED=LIFO,PREEMPT;
      SERVICE(C3)=EXP(21.0);SERVICE(C4)=EXP(20.5);
      TRANSIT(C3)=CPU;TRANSIT(C4)=CPU;
&
& BANDES ...
&
/STATION/NAME=TP1;
      SERVICE=EXP(87.4);TRANSIT(C2)=CPU;
/STATION/NAME=TP2;
      SERVICE=EXP(18.7);TRANSIT(C2)=CPU;
/STATION/NAME=TP3;
      SERVICE=EXP(22.6);TRANSIT(C2)=CPU;
/STATION/NAME=TP4;
      SERVICE=EXP(15.0);TRANSIT(C3)=CPU;
/STATION/NAME=TP5;
      SERVICE=EXP(15.8);TRANSIT(C3)=CPU;
&
/EXEC,BEGIN N1:=1;N2:=1;N3:=1;N4:=1;
      COMPUTE;

```

END;

```

***SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
***SUBCHAIN 2 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
***SUBCHAIN 3 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
***SUBCHAIN 4 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
*****
*QUEUE CPU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C3 16.20 .2673 .7220 43.77 .1650E-01 16.85 *
*CLASS C1 34.40 .2991 .7787 89.55 .8696E-02 25.45 *
*CLASS C2 8.600 .1641 .5562 26.59 .2092E-01 21.22 *
*CLASS C4 14.60 .2118 .6189 42.67 .1451E-01 26.27 *
*GLOBAL 15.87 .9622 2.676 44.15 .6062E-01 21.84 *
*
*QUEUE DSYS SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C3 24.50 .1078E-01 .1348E-01 30.64 .4400E-03 2242. *
*CLASS C1 20.00 .1093 .1199 21.93 .5467E-02 101.0 *
*CLASS C2 13.80 .4941E-01 .5793E-01 16.18 .3581E-02 263.1 *
*CLASS C4 25.20 .1437E-01 .1776E-01 31.16 .5701E-03 172.3 *
*GLOBAL 18.28 .1839 .2091 20.79 .1006E-01 316.9 *
*
*QUEUE DK1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C1 31.40 .1014 .1014 31.40 .3228E-02 278.3 *
*GLOBAL 31.40 .1014 .1014 31.40 .3228E-02 278.3 *
*
*QUEUE DK2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C2 18.40 .2742 .3366 22.58 .1490E-01 44.51 *
*CLASS C4 21.80 .1826 .2450 29.25 .8376E-02 90.14 *
*GLOBAL 19.62 .4568 .5815 24.98 .2328E-01 60.93 *
*
*QUEUE DK3 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C3 21.00 .3176E-01 .3612E-01 23.89 .1512E-02 637.4 *
*CLASS C4 20.50 .1140 .1183 21.29 .5559E-02 158.6 *
*GLOBAL 20.61 .1457 .1545 21.84 .7072E-02 261.0 *
*
*QUEUE IP1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C2 87.40 .4410E-02 .4410E-02 87.40 .5046E-04 .1973E+05 *
*GLOBAL 87.40 .4410E-02 .4410E-02 87.40 .5046E-04 .1973E+05 *
*
*QUEUE IP2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C2 18.70 .4317E-01 .4317E-01 18.70 .2309E-02 414.5 *
*GLOBAL 18.70 .4317E-01 .4317E-01 18.70 .2309E-02 414.5 *
*
*QUEUE IP3 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C2 22.60 .1663E-02 .1663E-02 22.60 .7360E-04 .1356E+05 *
*GLOBAL 22.60 .1663E-02 .1663E-02 22.60 .7360E-04 .1356E+05 *
*
*QUEUE IP4 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C3 15.60 .1134 .1134 15.60 .7269E-02 122.0 *
*GLOBAL 15.60 .1134 .1134 15.60 .7269E-02 122.0 *
*
*QUEUE IP5 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE *
*CLASS C3 15.80 .1150 .1150 15.80 .7276E-02 121.6 *
*GLOBAL 15.80 .1150 .1150 15.80 .7276E-02 121.6 *
*****

```

III.3.2 - Modèle 1, avec transitions entre périphériques

```

&
& MODELE A-BIS ...
& PERIPHERIQUES ,
& TRANSITIONS PRISES EN COMPTE ,
& DONNEES BRUTES ,
& RESOLUTION PAR ANALYSE BCMP .
&
/DECLAR/QUEUE CPU,DSYS,DK1,DK2,DK3,TP1,TP2,TP3,TP4,TP5;
CLASS C11,C12,C21,C22,C23,C24,C25,C31,C32,C33,C34,C41,C42,C43;
INTEGER N;
&
/STATION/NAME=CPU;SCHED=PS;
SERVICE(C11)=EXP(34.4);SERVICE(C12)=EXP(34.4);
SERVICE(C21)=EXP(8.3);SERVICE(C22)=EXP(8.6);
SERVICE(C23)=EXP(8.8);SERVICE(C24)=EXP(8.6);
SERVICE(C25)=EXP(8.3);
SERVICE(C31)=EXP(10.2);SERVICE(C32)=EXP(10.2);
SERVICE(C33)=EXP(16.2);SERVICE(C34)=EXP(10.2);
SERVICE(C41)=EXP(14.6);
TRANSIT(C11)=DSYS,15223,DK1,1707;
TRANSIT(C12)=DSYS,1707,DK1,8290;
TRANSIT(C21)=DSYS,3669,DK2,2073,TP1,14,TP2,1975,TP3,4;
TRANSIT(C22)=DSYS,2072,DK2,27422,TP1,80,TP2,2470,TP3,150;
TRANSIT(C23)=DSYS,11,DK2,82,TP1,15,TP2,1;
TRANSIT(C24)=DSYS,1979,DK2,2469,TP2,541;
TRANSIT(C25)=DSYS,4,DK2,150,TP3,5;
TRANSIT(C31)=DSYS,1231,DK3,83,TP4,3,TP5,3;
TRANSIT(C32)=DSYS,81,DK3,3440,TP4,467,TP5,549;
TRANSIT(C33)=DSYS,5,DK3,529,TP4,5,TP5,21267;
TRANSIT(C34)=DSYS,3,DK3,485,TP4,21332,TP5,11;
TRANSIT(C41)=DSYS,1622,DK2,28,DK3,15;
TRANSIT(C42)=DSYS,30,DK2,16136,DK3,8296;
TRANSIT(C43)=DSYS,13,DK2,8298,DK3,7925;
&
/STATION/NAME=DSYS;SCHED=PS;
SERVICE(C11)=EXP(20.0);SERVICE(C12)=EXP(20.0);
SERVICE(C21)=EXP(13.8);SERVICE(C22)=EXP(13.8);
SERVICE(C23)=EXP(13.8);SERVICE(C24)=EXP(13.8);
SERVICE(C25)=EXP(13.8);
SERVICE(C31)=EXP(24.5);SERVICE(C32)=EXP(24.5);
SERVICE(C33)=EXP(24.5);SERVICE(C34)=EXP(24.5);
SERVICE(C41)=EXP(25.2);SERVICE(C42)=EXP(25.2);
SERVICE(C43)=EXP(25.2);
TRANSIT(C12)=CPU(C11);
TRANSIT(C22)=CPU(C21);TRANSIT(C23)=CPU(C21);
TRANSIT(C24)=CPU(C21);TRANSIT(C25)=CPU(C21);
TRANSIT(C34)=CPU(C31);TRANSIT(C32)=CPU(C31);
TRANSIT(C33)=CPU(C31);
TRANSIT(C42)=CPU(C41);TRANSIT(C43)=CPU(C41);
TRANSIT(C11)=CPU;TRANSIT(C21)=CPU;
TRANSIT(C31)=CPU;TRANSIT(C41)=CPU;
&
/STATION/NAME=DK1;SCHED=PS;
SERVICE(C11)=EXP(31.4);SERVICE(C12)=EXP(31.4);
TRANSIT(C11)=CPU(C12);

```

```

TRANSIT(C12)=CPU;
&
/STATION/NAME=DK2;SCHED=PS;
SERVICE(C21)=EXP(18.4);SERVICE(C22)=EXP(18.4);
SERVICE(C23)=EXP(18.4);SERVICE(C24)=EXP(18.4);
SERVICE(C25)=EXP(18.4);
SERVICE(C41)=EXP(21.8);SERVICE(C42)=EXP(21.8);
SERVICE(C43)=EXP(21.8);
TRANSIT(C21)=CPU(C22);TRANSIT(C23)=CPU(C22);
TRANSIT(C24)=CPU(C22);TRANSIT(C25)=CPU(C22);
TRANSIT(C41)=CPU(C42);TRANSIT(C43)=CPU(C42);
TRANSIT(C22)=CPU;TRANSIT(C42)=CPU;
&
/STATION/NAME=DK3;SCHED=PS;
SERVICE(C31)=EXP(21.);SERVICE(C32)=EXP(21.);
SERVICE(C33)=EXP(21.);SERVICE(C34)=EXP(21.);
SERVICE(C41)=EXP(20.5);SERVICE(C42)=EXP(20.5);
SERVICE(C43)=EXP(20.5);
TRANSIT(C31)=CPU(C32);TRANSIT(C33)=CPU(C32);
TRANSIT(C34)=CPU(C32);
TRANSIT(C41)=CPU(C43);TRANSIT(C42)=CPU(C43);
TRANSIT(C32)=CPU;TRANSIT(C43)=CPU;
&
/STATION/NAME=TP1;SERVICE=EXP(87.4);
TRANSIT(C21)=CPU(C23);TRANSIT(C22)=CPU(C23);
TRANSIT(C23)=CPU;
&
/STATION/NAME=TP2;SERVICE=EXP(18.7);
TRANSIT(C21)=CPU(C24);TRANSIT(C22)=CPU(C24);
TRANSIT(C23)=CPU(C24);
TRANSIT(C24)=CPU;
&
/STATION/NAME=TP3;SERVICE=EXP(22.0);
TRANSIT(C21)=CPU(C25);TRANSIT(C22)=CPU(C25);
TRANSIT(C25)=CPU;
&
/STATION/NAME=TP4;SERVICE=EXP(15.0);
TRANSIT(C31)=CPU(C33);TRANSIT(C32)=CPU(C33);
TRANSIT(C34)=CPU(C33);TRANSIT(C33)=CPU;
&
/STATION/NAME=TP5;SERVICE=EXP(15.8);
TRANSIT(C31)=CPU(C34);TRANSIT(C32)=CPU(C34);
TRANSIT(C33)=CPU(C34);TRANSIT(C34)=CPU;
&
/COMPUTE/INIT(C11)=N;INIT(C21)=N;INIT(C31)=N;INIT(C41)=N;
&
/EXEC/BEGIN
N:=1;
COMPUTE
END;

```

***SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
 ***SUBCHAIN 2 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
 ***SUBCHAIN 3 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
 ***SUBCHAIN 4 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1

QUEUE	CPU	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRU PUT	CYCLE
CLASS	C11	34.40	.1881	.4890	289.55	.546677E-02	21.84
CLASS	C12	34.40	.1111	.2889	289.55	.322288E-02	3.35
CLASS	C21	34.8000	.3150E-01	.95520E-01	266.59	.358800E-02	230.7
CLASS	C22	34.8000	.1344E-01	.33644E-01	266.59	.149800E-02	40.50
CLASS	C23	34.8000	.4444E-01	.1344E-01	266.59	.504000E-02	19.50
CLASS	C24	34.8000	.2033E-01	.61339E-01	266.59	.230800E-02	40.66
CLASS	C31	34.8000	.6477E-01	.19266E-01	266.59	.443000E-02	23.56
CLASS	C32	34.8000	.7128E-01	.19266E-01	266.59	.443000E-02	23.56
CLASS	C33	34.8000	.2450E-01	.66119E-01	266.59	.155000E-02	66.55
CLASS	C34	34.8000	.1179E-01	.33181E-01	266.59	.7777E-02	93.5
CLASS	C41	34.600	.8422E-02	.25603E-01	422.67	.57771E-02	16.90
CLASS	C42	34.600	.1222E-01	.35722E-01	422.67	.83771E-02	76.78
CLASS	C43	34.600	.8111E-01	.23371E-01	422.67	.55556E-02	13.33
GLOBAL		15.87	.9622	2.676	44.15	.6062E-01	21.84

QUEUE	DISKS	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRU PUT	CYCLE
CLASS	C11	20.00	.9832E-01	.1079E-01	21.94	.49116E-02	181.5
CLASS	C12	20.00	.1102E-01	.27209E-01	21.94	.55112E-02	179.2
CLASS	C21	13.800	.2343E-01	.12743E-01	16.18	.11698E-02	572.7
CLASS	C22	13.800	.1322E-01	.15532E-01	16.18	.95933E-02	102.6
CLASS	C23	13.800	.7028E-01	.18442E-01	16.18	.50920E-02	196.4
CLASS	C24	13.800	.1255E-01	.1255E-01	16.18	.91577E-02	100.76
CLASS	C31	13.800	.2556E-01	.29999E-01	16.18	.18557E-02	400.0
CLASS	C32	13.800	.1000E-01	.15255E-01	16.18	.41033E-02	240.6
CLASS	C33	24.500	.6615E-01	.18225E-01	16.18	.27000E-02	370.1
CLASS	C34	24.500	.4083E-01	.11080E-01	16.18	.16667E-02	600.0
CLASS	C41	24.500	.2445E-01	.34706E-01	16.18	.99999E-02	100.0
CLASS	C42	24.500	.1441E-01	.19999E-01	16.18	.56222E-02	174.8
CLASS	C43	24.500	.2587E-01	.13139E-01	16.18	.10227E-02	977.3
CLASS	C44	24.500	.1122E-01	.38669E-01	16.18	.44449E-02	224.7
GLOBAL		18.99	.1841	2.093	20.80	.1006E-01	376.5

QUEUE	DISK1	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRU PUT	CYCLE
CLASS	C11	31.40	.1731E-01	.1731E-01	31.40	.5512E-02	1783.
CLASS	C12	31.40	.8406E-01	.8406E-01	31.40	.2677E-02	342.1
GLOBAL		31.40	.1014	.1014	31.40	.3228E-02	278.4

QUEUE	DISK2	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRU PUT	CYCLE
CLASS	C21	18.40	.1765E-01	.2167E-01	22.58	.9595E-02	1020.
CLASS	C22	18.40	.2336E-01	.28867E-01	22.58	.1270E-02	56.19
CLASS	C23	18.40	.6939E-01	.35973E-01	22.58	.3796E-02	82.32
CLASS	C24	18.40	.2102E-01	.2580E-01	22.58	.1144E-02	143.8
CLASS	C31	18.40	.1278E-01	.1553E-01	22.58	.6945E-02	140.30
CLASS	C32	21.800	.2116E-01	.2833E-01	22.58	.9703E-02	151.9
CLASS	C33	21.800	.1204E-01	.1615E-01	22.58	.5522E-02	322.9
CLASS	C41	21.800	.6199E-01	.8309E-01	24.48	.2844E-02	60.95
GLOBAL		19.62	.4567	.5314	24.48	.2328E-01	

QUEUE	DISK3	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRU PUT	CYCLE
CLASS	C31	21.00	.5810E-01	.6608E-01	23.89	.2767E-02	3612E+03
CLASS	C32	21.00	.2408E-01	.2739E-01	23.89	.1147E-02	848.2
CLASS	C33	21.00	.3703E-02	.4212E-02	23.89	.1763E-02	647.

CLASS C34	21.00	.3595E-02	.3861E-02	23.89	.1617E-03	6162.	*
CLASS C41	20.50	.1066E-03	.1107E-03	21.29	.5199E-05	.1923E+06	*
CLASS C42	20.50	.5320E-01	.6043E-01	21.29	.2839E-02	330.9	*
CLASS C43	20.50	.5500E-01	.5773E-01	21.29	.2712E-02	347.4	*
GLOBAL	20.61	.1457	.1544	21.84	.7069E-02	261.1	*
QUEUE TP1	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRUPTUT	CYCLE	*
CLASS C21	87.40	.3063E-05	.5663E-05	87.40	.6480E-05	.1542E+06	*
CLASS C22	87.40	.3237E-02	.3237E-02	87.40	.3704E-04	.2691E+05	*
CLASS C23	87.40	.6059E-03	.6059E-03	87.40	.6944E-05	.1439E+05	*
GLOBAL	87.40	.4410E-02	.4410E-02	87.40	.5046E-04	.1973E+05	*
QUEUE TP2	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRUPTUT	CYCLE	*
CLASS C21	18.70	.1709E-01	.1709E-01	18.70	.9141E-05	1075.	*
CLASS C22	18.70	.2138E-01	.2138E-01	18.70	.1144E-02	855.8	*
CLASS C23	18.70	.8657E-05	.8657E-05	18.70	.4630E-06	.2160E+07	*
CLASS C24	18.70	.4681E-02	.4681E-02	18.70	.2503E-03	3976	*
GLOBAL	18.70	.4317E-01	.4317E-01	18.70	.2308E-02	414.5	*
QUEUE TP3	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRUPTUT	CYCLE	*
CLASS C21	22.60	.4185E-04	.4185E-04	22.60	.1852E-05	.5401E+06	*
CLASS C22	22.60	.1570E-02	.1570E-02	22.60	.6945E-04	.1438E+05	*
CLASS C23	22.60	.5232E-04	.5232E-04	22.60	.2315E-05	.4320E+06	*
GLOBAL	22.60	.1684E-02	.1684E-02	22.60	.7361E-04	.1356E+05	*
QUEUE TP4	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRUPTUT	CYCLE	*
CLASS C31	15.60	.1550E-04	.1560E-04	15.60	.1000E-05	.1000E+07	*
CLASS C32	15.60	.2428E-02	.2428E-02	15.60	.1557E-03	6409.	*
CLASS C33	15.60	.2600E-04	.2600E-04	15.60	.1667E-05	.6000E+06	*
CLASS C34	15.60	.1109	.1109	15.60	.7110E-02	125.0	*
GLOBAL	15.60	.1134	.1134	15.60	.7269E-02	122.0	*
QUEUE TP5	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRUPTUT	CYCLE	*
CLASS C31	15.80	.1580E-04	.1580E-04	15.80	.1000E-05	.1000E+07	*
CLASS C32	15.80	.2891E-02	.2891E-02	15.80	.1830E-03	5449.	*
CLASS C33	15.80	.1120	.1120	15.80	.7089E-02	125.3	*
CLASS C34	15.80	.5793E-04	.5793E-04	15.80	.3667E-05	.2727E+05	*
GLOBAL	15.80	.1150	.1150	15.80	.7277E-02	121.6	*

III.3.3 - Modèle B

```

&          MODELE B ...
&
& CONTROLEURS DISQUES ET BANDES
& DONNEES BRUTES
& RESOLUTION PAR METHODE ANALYTIQUE BCMP .
&
/DECLAR/QUEUE CPU, MSC, MTC,
      CLASS C1, C11, C12,
            C2, C21, C22, C23, C24, C25,
            C3, C31, C32, C33, C34,
            C4, C41, C42, C43;
      REAL T1, T2, T3, T4;

&
& UNITE CENTRALE ...
&
/STATION/NAME=CPU; SCHED=PS;
      SERVICE(C1)=EXP(T1);
      SERVICE(C2)=EXP(T2);
      SERVICE(C3)=EXP(T3);
      SERVICE(C4)=EXP(T4);
      TRANSIT(C1)=MSC(C11), 16930, MSC(C12), 9997;
      TRANSIT(C2)=MSC(C21), 7735, MSC(C22), 32196,
                  MTC(C23), 109, MTC(C24), 4987, MTC(C25), 159;
      TRANSIT(C3)=MSC(C31), 1320, MSC(C32), 4537,
                  MTC(C33), 21807, MTC(C34), 21830;
      TRANSIT(C4)=MSC(C41), 1665, MSC(C42), 16236, MSC(C43), 24462;

&
& CONTROLEUR DISQUES ...
&
/STATION/NAME=MSC; SCHED=PS;
      SERVICE(C11)=EXP(20.0); TRANSIT(C11)=CPU(C1);
      SERVICE(C12)=EXP(31.4); TRANSIT(C12)=CPU(C1);
      SERVICE(C21)=EXP(13.8); TRANSIT(C21)=CPU(C2);
      SERVICE(C22)=EXP(18.4); TRANSIT(C22)=CPU(C2);
      SERVICE(C31)=EXP(24.5); TRANSIT(C31)=CPU(C3);
      SERVICE(C32)=EXP(21.0); TRANSIT(C32)=CPU(C3);
      SERVICE(C41)=EXP(25.2); TRANSIT(C41)=CPU(C4);
      SERVICE(C42)=EXP(20.5); TRANSIT(C42)=CPU(C4);
      SERVICE(C43)=EXP(21.8); TRANSIT(C43)=CPU(C4);

&
& CONTROLEUR BANDES ...
&
/STATION/NAME=MTC; SCHED=PS;
      SERVICE(C23)=EXP(87.4); TRANSIT(C23)=CPU(C2);
      SERVICE(C24)=EXP(18.7); TRANSIT(C24)=CPU(C2);
      SERVICE(C25)=EXP(22.6); TRANSIT(C25)=CPU(C2);
      SERVICE(C33)=EXP(15.6); TRANSIT(C33)=CPU(C3);
      SERVICE(C34)=EXP(15.8); TRANSIT(C34)=CPU(C3);

&
/COMPUTE/INIT(C1)=1; INIT(C2)=1; INIT(C3)=1; INIT(C4)=1;
/EXEC/BEGIN
      T1:=34.4; T2:=8.8; T3:=16.2; T4:=14.6;
      COMPUTE;
      END;

```

*** SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS = 1
 *** SUBCHAIN 2 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS = 1
 *** SUBCHAIN 3 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS = 1
 *** SUBCHAIN 4 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS = 1

QUEUE	CPU	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRU PUT	CYCLE
*CLASS C1	34.40	.2519	.6071	82.91	.7323E-02	53.65	
*CLASS C2	8.800	.1529	.4268	24.56	.1738E-01	32.99	
*CLASS C3	16.20	.2800	.6297	36.40	.1723E-01	21.46	
*CLASS C4	14.60	.1798	.4821	39.14	.1232E-01	42.04	
*GLOBAL	15.92	.8646	2.145	39.51	.5430E-01	34.16	
*QUEUE MSC	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRU PUT	CYCLE	
*CLASS C11	20.00	.9208E-01	.2039	44.28	.4604E-02	172.9	
*CLASS C12	31.40	.8537E-01	.1890	69.51	.2719E-02	298.3	
*CLASS C21	13.80	.4105E-01	.7959E-01	26.76	.2974E-02	309.4	
*CLASS C22	18.40	.2278E-01	.4417	35.08	.1238E-01	45.09	
*CLASS C31	24.50	.1129E-01	.3057E-01	66.31	.4600E-03	2103.	
*CLASS C32	21.00	.3327E-01	.9005E-01	56.84	.1584E-02	574.4	
*CLASS C41	25.20	.1220E-01	.2393E-01	49.43	.4842E-03	2016.	
*CLASS C42	20.30	.9678E-01	.1898	40.21	.4721E-02	171.6	
*CLASS C43	21.80	.1551	.3041	42.76	.7113E-02	97.83	
*GLOBAL	20.38	.7549	1.553	41.92	.3704E-01	66.07	
*QUEUE MTC	SERVICE	BUSY PCT	CUST NB	RESPONSE	THRU PUT	CYCLE	
*CLASS C23	37.40	.3663E-02	.4653E-02	111.0	.4191E-04	.2375E+05	
*CLASS C24	18.70	.3586E-01	.4555E-01	23.75	.1918E-02	497.7	
*CLASS C25	22.60	.1382E-02	.1755E-02	28.70	.6114E-04	.1633E+05	
*CLASS C33	15.60	.1188	.1243	16.32	.7614E-02	115.0	
*CLASS C34	15.80	.1204	.1260	16.53	.7622E-02	114.7	
*GLOBAL	16.23	.2801	.3022	17.51	.1725E-01	96.38	

III.3.4 - Modèle C

*** QUEUING NETWORK ANALYSER (01-04-78) ***

```

&          MODELE C ....
& SCUS-SYSTEME CANAL-DISQUES, CANAUX LOGIQUES BANDES .
& DONNEES BRUTES
& TRAITE EN METHODE ANALYTIQUE BUMP .
&
/DECLAR/QUEUE CPU,DSYS,DK1,DK2,DK3,TP1,TP2,TP3,TP4,TP5,MSC,
      CLASS C3,C1,C2,C4;
      INTEGER N1,N2,N3,N4;
&
/STATION/NAME=CPU;
      SCHED=LIFO,PREEMPT;
      SERVICE(C1)=EXP(34.4);SERVICE(C2)=EXP(8.8);
      SERVICE(C3)=EXP(16.2);SERVICE(C4)=EXP(14.6);
      TRANSIT(C1)=DSYS,16930,DK1,9997;
      TRANSIT(C2)=DSYS,7735,DK2,32196,TP1,109,TP2,4987,TP3,154;
      TRANSIT(C3)=DSYS,1320,DK3,4537,TP4,21807,TP5,21830;
      TRANSIT(C4)=DSYS,1665,DK2,24462,DK3,16236;
      INIT(C1)=N1;INIT(C2)=N2;INIT(C3)=N3;INIT(C4)=N4;
&
/STATION/NAME=DSYS;
      SCHED=LIFO,PREEMPT;
      SERVICE(C1)=EXP(5.6);SERVICE(C2)=EXP(2.6);
      SERVICE(C3)=EXP(8.9);SERVICE(C4)=EXP(10.5);
      TRANSIT=MSC;
/STATION/NAME=DK1;
      SERVICE=EXP(17.0);TRANSIT(C1)=MSC;
/STATION/NAME=DK2;
      SCHED=LIFO,PREEMPT;
      SERVICE(C2)=EXP(7.2);SERVICE(C4)=EXP(7.7);
      TRANSIT(C2)=MSC;TRANSIT(C4)=MSC;
/STATION/NAME=DK3;
      SCHED=LIFO,PREEMPT;
      SERVICE(C3)=EXP(5.4);SERVICE(C4)=EXP(5.8);
      TRANSIT(C3)=MSC;TRANSIT(C4)=MSC;
&
/STATION/NAME=MSC;
      SCHED=LIFO,PREEMPT;
      SERVICE(C1)=EXP(14.4);SERVICE(C2)=EXP(11.2);
      SERVICE(C3)=EXP(15.6);SERVICE(C4)=EXP(14.7);
      TRANSIT=CPU;
&
/STATION/NAME=TP1;
      SERVICE=EXP(87.4);TRANSIT(C2)=CPU;
/STATION/NAME=TP2;
      SERVICE=EXP(18.7);TRANSIT(C2)=CPU;
/STATION/NAME=TP3;
      SERVICE=EXP(22.6);TRANSIT(C2)=CPU;
/STATION/NAME=TP4;
      SERVICE=EXP(15.6);TRANSIT(C3)=CPU;
/STATION/NAME=TP5;
      SERVICE=EXP(15.8);TRANSIT(C3)=CPU;
&
/EXEC/BEGIN N1:=1;N2:=1;N3:=1;N4:=1;
      COMPUTE;

```

END;

```

****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
****SUBCHAIN 2 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
****SUBCHAIN 3 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
****SUBCHAIN 4 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
*****
*QUEUE CPU SERVICE BUSY FLT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C3 16.20 .2722 .6913 41.15 .1680E-01 18.37
*CLASS C1 34.40 .2776 .7132 88.38 .8070E-02 35.54
*CLASS C2 8.800 .1772 .5188 25.77 .2013E-01 23.90
*CLASS C4 14.60 .2032 .5764 41.46 .1392E-01 30.41
*GLOBAL 15.79 .9301 2.500 42.43 .5892E-01 25.46
*
*QUEUE DSYS SERVICE BUSY FLT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C3 8.900 .3988E-02 .4208E-02 9.391 .4480E-03 2223.
*CLASS C1 5.600 .2841E-01 .2909E-01 5.733 .5074E-02 191.4
*CLASS C2 2.600 .8961E-02 .9387E-02 2.724 .3447E-02 287.4
*CLASS C4 10.50 .5743E-02 .6049E-02 11.06 .5469E-03 1817.
*GLOBAL 4.950 .4710E-01 .4873E-01 5.121 .9515E-02 415.3
*
*QUEUE DK1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C1 17.00 .5093E-01 .5093E-01 17.00 .2996E-02 316.8
*GLOBAL 17.00 .5093E-01 .5093E-01 17.00 .2996E-02 316.8
*
*QUEUE DK2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C2 7.200 .1033 .1105 7.705 .1435E-01 62.00
*CLASS C4 7.100 .5705E-01 .6430E-01 8.002 .8035E-02 118.5
*GLOBAL 7.164 .1603 .1748 7.812 .2238E-01 81.55
*
*QUEUE DK3 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C3 5.400 .8316E-02 .8621E-02 5.598 .1540E-02 643.8
*CLASS C4 5.800 .3093E-01 .3124E-01 5.857 .5333E-02 181.7
*GLOBAL 5.710 .3925E-01 .3986E-01 5.799 .6873E-02 285.2
*
*QUEUE TP1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C2 87.40 .4245E-02 .4245E-02 87.40 .4857E-04 .2050E+05
*GLOBAL 87.40 .4245E-02 .4245E-02 87.40 .4857E-04 .2050E+05
*
*QUEUE TP2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C2 18.70 .4155E-01 .4155E-01 18.70 .2222E-02 431.3
*GLOBAL 18.70 .4155E-01 .4155E-01 18.70 .2222E-02 431.3
*
*QUEUE TP3 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C2 22.60 .1601E-02 .1601E-02 22.60 .7085E-04 .1409E+05
*GLOBAL 22.60 .1601E-02 .1601E-02 22.60 .7085E-04 .1409E+05
*
*QUEUE TP4 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C3 15.60 .1155 .1155 15.60 .7402E-02 119.5
*GLOBAL 15.60 .1155 .1155 15.60 .7402E-02 119.5
*
*QUEUE TP5 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C3 15.80 .1171 .1171 15.80 .7410E-02 119.2
*GLOBAL 15.80 .1171 .1171 15.80 .7410E-02 119.2
*
*QUEUE MSL SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPT CYCLE
*CLASS C3 15.60 .3101E-01 .6330E-01 31.64 .1988E-02 471.2
*CLASS C1 14.40 .1162 .2068 25.62 .8070E-02 98.30
*CLASS C2 11.20 .1993 .3139 17.64 .1779E-01 38.56
*CLASS C4 14.70 .2046 .3216 23.11 .1392E-01 48.76
*GLOBAL 13.19 .5510 .9055 21.68 .4177E-01 74.09
*****

```

III.3.5 - Modèle D

```

*** QUEUEING NETWORK ANALISER ( 01-04-78 , ***

&
&      MODELE D .....
&
& SOUS-SYSTEME CANAL-DISQUES, CONTROLEUR DE BANDES .
& DONNEES BRUTES
& TRAITE PAR METHODE ANALYTIQUE BCMP
&
/DECLAR/QUEUE CPU,DSYS,DK1,DK2,DK3,MSC,NTC;
        CLASS C3,C1,C2,C4,C21,C22,C23,C31,C32;
        INTEGER N1,N2,N3,N4;

&
/STATION/NAME=CPU;
        SCHED=LIFO,PREEMPT;
        SERVICE(C1)=EXP(34.4);SERVICE(C2)=EXP(6.8);
        SERVICE(C3)=EXP(16.2);SERVICE(C4)=EXP(14.6);
        TRANSIT(C1)=DSYS,16930,DK1,9997;
        TRANSIT(C2)=DSYS,7735,DK2,32196;
        TRANSIT(C3)=DSYS,1320,DK3,4537;
        TRANSIT(C4)=DSYS,1665,DK2,24462,DK3,16236;
        MTC(C21),109,MTC(C22),4967,MTC(C23),159;
        MTC(C31),21807,MTC(C32),21830;
        INIT(C1)=N1;INIT(C2)=N2;INIT(C3)=N3;INIT(C4)=N4;

&
/STATION/NAME=DSYS;
        SCHED=LIFO,PREEMPT;
        SERVICE(C1)=EXP(5.6);SERVICE(C2)=EXP(2.6);
        SERVICE(C3)=EXP(8.9);SERVICE(C4)=EXP(10.5);
        TRANSIT(C1)=MSC;
        TRANSIT(C2)=MSC;
        TRANSIT(C3)=MSC;
        TRANSIT(C4)=MSC;

/STATION/NAME=DK1;
        SERVICE=EXP(17.0);TRANSIT(C1)=MSC;

/STATION/NAME=DK2;
        SCHED=LIFO,PREEMPT;
        SERVICE(C2)=EXP(7.2);SERVICE(C4)=EXP(7.1);
        TRANSIT(C2)=MSC;TRANSIT(C4)=MSC;

/STATION/NAME=DK3;
        SCHED=LIFO,PREEMPT;
        SERVICE(C3)=EXP(5.4);SERVICE(C4)=EXP(5.8);
        TRANSIT(C3)=MSC;TRANSIT(C4)=MSC;

&
/STATION/NAME=MSC;
        SCHED=LIFO,PREEMPT;
        SERVICE(C1)=EXP(14.4);SERVICE(C2)=EXP(11.2);
        SERVICE(C3)=EXP(15.6);SERVICE(C4)=EXP(14.7);
        TRANSIT(C1)=CPU;TRANSIT(C2)=CPU;
        TRANSIT(C3)=CPU;TRANSIT(C4)=CPU;

&
/STATION/NAME=NTC;
        SCHED=LIFO,PREEMPT;
        SERVICE(C21)=EXP(87.4);TRANSIT(C21)=CPU(C2);
        SERVICE(C22)=EXP(18.7);TRANSIT(C22)=CPU(C2);
        SERVICE(C23)=EXP(22.6);TRANSIT(C23)=CPU(C2);
        SERVICE(C31)=EXP(15.6);TRANSIT(C31)=CPU(C3);
        SERVICE(C32)=EXP(15.8);TRANSIT(C32)=CPU(C3);

&
/EXEC/BEGIN N1:=1;N2:=1;N3:=1;N4:=1;
        COMPUTE;
END;

```

```

*****SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
*****SUBCHAIN 2 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
*****SUBCHAIN 3 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
*****SUBCHAIN 4 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
*****
*
*QUEUE CPU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 16.20 .2687 .6826 41.15 .1659E-01 19.13
*CLASS C1 34.40 .2796 .7120 87.59 .8128E-02 35.43
*CLASS C2 8.800 .1750 .5123 25.77 .1988E-01 24.53
*CLASS C4 14.60 .2044 .5756 41.12 .1400E-01 30.31
*GLOBAL 15.83 .9277 2.483 42.37 .5860E-01 25.90
*
*QUEUE DSYS SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 6.900 .3938E-02 .4155E-02 9.391 .4424E-03 2251.9
*CLASS C1 5.600 .2862E-01 .2929E-01 5.732 .5111E-02 189.9
*CLASS C2 2.600 .8849E-02 .9270E-02 2.724 .3403E-02 291.1
*CLASS C4 10.50 .5778E-02 .6087E-02 11.06 .5503E-03 1806.6
*GLOBAL 4.963 .4718E-01 .4880E-01 5.134 .9507E-02 415.6
*
*QUEUE DK1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C1 17.00 .5130E-01 .5130E-01 17.00 .3018E-02 314.4
*GLOBAL 17.00 .5130E-01 .5130E-01 17.00 .3018E-02 314.4
*
*QUEUE DK2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C2 7.200 .1020 .1092 7.705 .1417E-01 62.89
*CLASS C4 7.100 .5740E-01 .6456E-01 7.985 .8085E-02 115.7
*GLOBAL 7.164 .1594 .1737 7.807 .2225E-01 82.08
*
*QUEUE DK3 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 5.400 .8211E-02 .8513E-02 5.598 .1521E-02 652.0
*CLASS C4 5.800 .3112E-01 .3142E-01 5.856 .5366E-02 180.5
*GLOBAL 5.712 .3933E-01 .3994E-01 5.799 .6887E-02 284.6
*
*QUEUE MSC SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 15.60 .3062E-01 .6251E-01 31.84 .1963E-02 477.6
*CLASS C1 14.40 .1170 .2074 25.52 .8128E-02 97.51
*CLASS C2 11.20 .1968 .3100 17.64 .1757E-01 39.28
*CLASS C4 14.70 .2058 .3223 23.02 .1400E-01 46.41
*GLOBAL 13.21 .5503 .9022 21.65 .4166E-01 74.36
*
*QUEUE MTC SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C21 87.40 .4192E-02 .5316E-02 110.8 .4796E-04 2074E+05
*CLASS C22 18.70 .4103E-01 .5204E-01 23.72 .2194E-02 452.0
*CLASS C23 22.60 .1581E-02 .2005E-02 28.66 .6996E-04 1426E+05
*CLASS C31 15.60 .1140 .1203 16.45 .7309E-02 120.4
*CLASS C32 15.80 .1156 .1219 16.66 .7317E-02 120.0
*GLOBAL 16.32 .2764 .3015 17.80 .1694E-01 100.3
*
*****

```

III.3.6 - Modèle C, modélisation d'un second canal-disques

```

&
&      MODELE C ....
&
& SOUS-SYSTEME CANAL-DISQUES, CANAUX LOGIQUES BANDES
& DONNEES CORRIGÉES
& TRAITE PAR LA METHODE ANALYTIQUE BCMP.
& MODELISATION D'UN CANAL DISQUE SUPPLEMENTAIRE .
&
/DECLAR/QUEUE CPU,DSYS,DK1,DK2,DK3,TP1,TP2,TP3,TP4,TP5,MSC1,MSC2;
      CLASS C3,C1,C2,C4;
      INTEGER N1,N2,N3,N4;
&
/STATION/NAME=CPU;
      SCHED=LIFO,PREEPT;
      SERVICE(C1)=EXP(27.5);SERVICE(C2)=EXP(8.4);
      SERVICE(C3)=EXP(15.9);SERVICE(C4)=EXP(14.3);
      TRANSIT(C1)=DSYS,23670,DK1,9997;
      TRANSIT(C2)=DSYS,10175,DK2,32196,TP1,109,TP2,4987,TP3,159;
      TRANSIT(C3)=DSYS,2230,DK3,4537,TP4,21807,TP5,21830;
      TRANSIT(C4)=DSYS,2575,DK2,24462,DK3,16236;
      INIT(C1)=N1;INIT(C2)=N2;INIT(C3)=N3;INIT(C4)=N4;
&
/STATION/NAME=DSYS;
      SCHED=LIFO,PREEPT;
      SERVICE(C1)=EXP(5.6);SERVICE(C2)=EXP(2.6);
      SERVICE(C3)=EXP(8.9);SERVICE(C4)=EXP(10.5);
      TRANSIT=MSC1,1,MSC2,1;
/STATION/NAME=DK1;
      SERVICE=EXP(17.0);TRANSIT(C1)=MSC1,1,MSC2,1;
/STATION/NAME=DK2;
      SCHED=LIFO,PREEPT;
      SERVICE(C2)=EXP(7.2);SERVICE(C4)=EXP(7.1);
      TRANSIT(C2)=MSC1,1,MSC2,1;TRANSIT(C4)=MSC1,1,MSC2,1;
/STATION/NAME=DK3;
      SCHED=LIFO,PREEPT;
      SERVICE(C3)=EXP(5.4);SERVICE(C4)=EXP(5.8);
      TRANSIT(C3)=MSC1,1,MSC2,1;TRANSIT(C4)=MSC1,1,MSC2,1;
&
/STATION/NAME=MSC1;
      SCHED=LIFO,PREEPT;
      SERVICE(C1)=EXP(14.4);SERVICE(C2)=EXP(11.2);
      SERVICE(C3)=EXP(15.6);SERVICE(C4)=EXP(14.7);
      TRANSIT=CPU;
&
/STATION/NAME=MSC2;COPY=MSC1;
&
/STATION/NAME=TP1;
      SERVICE=EXP(87.4);TRANSIT(C2)=CPU;
/STATION/NAME=TP2;
      SERVICE=EXP(18.7);TRANSIT(C2)=CPU;
/STATION/NAME=TP3;
      SERVICE=EXP(22.6);TRANSIT(C2)=CPU;
/STATION/NAME=TP4;
      SERVICE=EXP(15.6);TRANSIT(C3)=CPU;
/STATION/NAME=TP5;
      SERVICE=EXP(15.8);TRANSIT(C3)=CPU;

&
/EXEC/BEGIN N1:=1;N2:=1;N3:=1;N4:=1;
      COMPUTE;
      N4:=0;COMPUTE;
      N1:=0;COMPUTE;
      N2:=0;COMPUTE;
      END;

```

```

***SUBCHAIN 1 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
***SUBCHAIN 2 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
***SUBCHAIN 3 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
***SUBCHAIN 4 TOTAL NUMBER OF CUSTOMERS= 1
*****
*QUEUE CPU SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 15.90 .2701 .7009 41.25 .1699E-01 17.61
*CLASS C1 27.50 .2737 .7145 71.79 .9953E-02 28.68
*CLASS C2 8.400 .1855 .5399 24.45 .2208E-01 20.84
*CLASS C4 14.30 .2149 .6045 40.22 .1503E-01 26.31
*GLOBAL 14.74 .9443 2.560 39.96 .6405E-01 22.48
*
*QUEUE DSYS SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 8.900 .6690E-02 .7222E-02 9.607 .7517E-03 132.1
*CLASS C1 5.600 .3919E-01 .4060E-01 5.802 .6997E-02 137.1
*CLASS C2 2.600 .1227E-01 .1311E-01 2.780 .4718E-02 209.2
*CLASS C4 10.50 .9391E-02 .1009E-01 11.29 .8943E-03 110.7
*GLOBAL 5.054 .6753E-01 .7103E-01 5.316 .1336E-01 294.1
*
*QUEUE DK1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C1 17.00 .5024E-01 .5024E-01 17.00 .2955E-02 321.4
*GLOBAL 17.00 .5024E-01 .5024E-01 17.00 .2955E-02 321.4
*
*QUEUE DK2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C2 7.200 .1075 .1153 7.721 .1493E-01 59.27
*CLASS C4 7.100 .6032E-01 .6810E-01 8.015 .8496E-02 109.7
*GLOBAL 7.164 .1678 .1834 7.828 .2342E-01 77.55
*
*QUEUE DK3 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 5.400 .8258E-02 .8584E-02 5.613 .1529E-02 648.3
*CLASS C4 5.800 .3271E-01 .3303E-01 5.858 .5639E-02 171.5
*GLOBAL 5.715 .4096E-01 .4162E-01 5.806 .7168E-02 273.2
*
*QUEUE TP1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C2 87.40 .4417E-02 .4417E-02 87.40 .5054E-04 .1970E+05
*GLOBAL 87.40 .4417E-02 .4417E-02 87.40 .5054E-04 .1970E+05
*
*QUEUE TP2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C2 18.70 .4324E-01 .4324E-01 18.70 .2312E-02 413.8
*GLOBAL 18.70 .4324E-01 .4324E-01 18.70 .2312E-02 413.8
*
*QUEUE TP3 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C2 22.60 .1666E-02 .1666E-02 22.60 .7372E-04 .1354E+05
*GLOBAL 22.60 .1666E-02 .1666E-02 22.60 .7372E-04 .1354E+05
*
*QUEUE TP4 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 15.60 .1147 .1147 15.60 .7351E-02 120.4
*GLOBAL 15.60 .1147 .1147 15.60 .7351E-02 120.4
*
*QUEUE TP5 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 15.80 .1163 .1163 15.80 .7358E-02 120.1
*GLOBAL 15.80 .1163 .1163 15.80 .7358E-02 120.1
*
*QUEUE MSC1 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 15.60 .1779E-01 .2619E-01 22.96 .1140E-02 853.9
*CLASS C1 14.40 .7166E-01 .9732E-01 19.56 .4976E-02 181.4
*CLASS C2 11.20 .1100 .1412 14.38 .9823E-02 87.43
*CLASS C4 14.70 .1105 .1421 18.91 .7515E-02 114.2
*GLOBAL 13.21 .3099 .4068 17.35 .2345E-01 153.2
*
*QUEUE MSC2 SERVICE BUSY PCT CUST NB RESPONSE THRUPUT CYCLE
*CLASS C3 15.60 .1779E-01 .2619E-01 22.96 .1140E-02 853.9
*CLASS C1 14.40 .7166E-01 .9732E-01 19.56 .4976E-02 181.4
*CLASS C2 11.20 .1100 .1412 14.38 .9823E-02 87.43
*CLASS C4 14.70 .1105 .1421 18.91 .7515E-02 114.2
*GLOBAL 13.21 .3099 .4068 17.35 .2345E-01 153.2
*****

```


BIBLIOGRAPHIE

- [BaB77] BALBO G.F.
BRULL S.C.
SCHWETMAN H.D. "CUSTOMER CLASSES AND CLOSED NETWORK MODELS:
A SOLUTION TECHNIQUE" ,
COMMUNICATION PRESENTEE A IFIP 77.
- [BaC75] BASKETT F.
CHANDY K.M.
MUNTZ R.R.
PALACIOS F.G. "OPEN , CLOSED AND MIXED NETWORKS OF QUEUES
WITH DIFFERENT CLASSES OF CUSTOMERS" ,
J.ACM , VOL 22 , N 2 , APRIL 75.
- [BaD77] BADEL M. "GENERATION DE NOMBRES ALEATOIRES AUTOCORRELES" ,
IRIA/LABORIA , RAPPORT DE RECHERCHE N 265 ,
NOVEMBRE 77.
- [BaE76] BARBOUR A.D. "NETWORK OF QUEUES AND THE METHOD OF STAGE"
ADV.APPL.PROB. , VOL 8 , 1976.
- [BaV76] BADEL M.
VERAN M. "FORTSIM:UN SYSTEME D'AIDE A L'ECRITURE
DE SIMULATEURS EN FORTRAN" ,
IRIA/LABORIA , RAPPORT DE RECHERCHE N 201 ,
DECEMBRE 76.
- [BeK69] BELADY L.
KUHNER C.J. "DYNAMIC SPACE SHARING IN COMPUTER SYSTEMS" ,
C.ACM , VOL 12 , N 5 ,MAY 69.
- [BeM75] BEUTLER F.J.
MELAMED B. "DECOMPOSITION AND CUSTOMER STREAMS OF FEEDBACK
QUEUEING NETWORKS IN EQUILIBRIUM" ,
TR 75.5 ,UNIVERSITY OF MICHIGAN ,ANN ARBOUR ,
SEPTEMBER 75.
- [Ber70] BERGE C. "GRAPHES ET HYPERGRAPHES"
DUNOD ED. , PARIS 1970.
- [Bra74] BRANDWAIN A. "A MODEL OF A TIME SHARING VIRTUAL MEMORY SYSTEM
SOLVED USING EQUIVALENCE AND DECOMPOSITION
METHODS" ,
ACTA INFORMATICA , VOL 4 , 1974.
- [BrC75] BROWNE J.C.
CHANDY K.M.
BROWN R.M.
KELLER T.W.
TOWSLEY D.F.
DISSLEY C.W. "HIERARCICAL TECHNIQUES FOR THE DEVELOPMENT
OF REALISTIC MODELS OF COMPLEX COMPUTER
SYSTEMS" ,
PROCEEDINGS OF THE IEEE SPECIAL ISSUE ON
INTERACTIVE COMPUTER SYSTEMS ,VOL 63 ,N 6 ,
JUNE 75.
- [BuI77] BURGEVIN P.
INGELS P.
LEROUUDIER J. "ANALYSIS OF PROGRAM BEHAVIOUR" ,
IRIA/LABORIA ,RAPPORT DE RECHERCHE N 237 ,
JUN 77.
- [Buz73] BUZEN J.P. "COMPUTATIONAL ALGORITHMS FOR CLOSED QUEUEING
NETWORKS WITH EXPONENTIAL SERVERS" ,
C.ACM , VOL 16 , N 9 , SEPTEMBER 73.
- [Car77] CARDAILLAC M. "CHAINE SPW:MEASURE DES TEMPS DE REPONSE" ,
COMMUNICATION PERSONNELLE , 1977.
- [CHH75] CHANDY K.M.
HERZOG U.
WOO L. "APPROXIMATE ANALYSIS OF GENERAL QUEUEING
NETWORKS" ,
IBM JOURNAL OF RES. AND DEV. , JANUARY 75.

- [CHH77] CHANDY K.M. "PRODUCT FORM AND LOCAL BALANCE IN QUEUEING NETWORKS" ,
HOWARD J.H. J.ACM , VOL 24 , N 2 , APRIL 77.
TOWSLEY D.F.
- [CHL72] CHANG A. "WORKING-RATES IN CLOSED QUEUEING NETWORKS WITH GENERAL INDEPENDANT SERVERS" ,
LAVENBERG S.S. IBM RESEARCH REPORT RJ 989 , 1972.
- [CII76] "GUIDE TECHNIQUE SERIE 60 NIVEAU 64" ,
COMPAGNIE INTERNATIONALE POUR L'INFORMATIQUE -
HONEYWELL-BULL , FEVRIER 76.
- [Con63] CONWAY R.W. "SOME TACTICAL PROBLEMS IN DIGITAL SIMULATION" ,
MANAGEMENT SCIENCES , VOL 10 , N 1 , OCTOBER 63
- [Cor76] CORRE J.P. "ASTRE: ANALYSE STATISTIQUE DES TEMPS DE REPONSE
ENTRE EVENEMENTS" ,
COMMUNICATION PERSONNELLE , 1976.
- [Cor77] CORRE J.P. "MODELISATION DES CHARGE INSPIREE DE SPW" ,
COMMUNICATION PERSONNELLE , 1977.
- [Cou75] COURTOIS P.J. "DECOMPOSABILITY, INSTABILITIES AND SATURATION
IN MULTIPROGRAMMING SYSTEMS" ,
C.ACM , VOL 18 , N 7 , JULY 75.
- [CoV65] CORBATO F.J. "INTRODUCTION AND OVERVIEW OF THE MULTICS SYSTEM" ,
VYSSOTSKY V.A. PROC. OF AFIPS CONF. , WASHINGTON D.C. ,
SPARTAN BOOK , 1965.
- [Cox55] COX D.R. "A USE OF COMPLEX PROBABILITIES IN THE THEORY
OF STOCHASTIC PROCESSES" ,
PROC. OF THE CAMBRIDGE PHIL. SOCIETY , VOL 52 , 1955.
- [CrI74] CRANE M.A. "SIMULATING STABLE STOCHASTIC SYSTEMS" ,
IGLEHART D.L. J.ACM , VOL 21 , N 1 , JANUARY 1974.
- [DeB77] DENNING P.J. "OPERATIONNAL ANALYSIS OF QUEUEING NETWORKS" ,
BUZEN J.P. CSD-TR 225 , COMPUTER SCIENCE DEPT. , PURDUE
UNIVERSITY , WEST LAFAYETTE , INDIANA , MARCH 77.
- [DeP71] DERNIAME J.P. "PROBLEMES DE CHEMINEMENT DANS LES GRAPHS" ,
PAIR C. MONOGRAPHIE D'INFORMATIQUE , AFCET-DUNOD , 1971.
- [Gel75] GELENBE E. "ON APPROXIMATE COMPUTER SYSTEM MODELS" ,
J.ACM , VOL 22 , N 2 , 1975.
- [GeP77] GELENBE E. "A DIFFUSION MODEL FOR MULTIPLE CLASS QUEUEING
PUJOLLE G. NETWORKS" ,
IRIA/LABORIA , RAPPORT DE RECHERCHE N 142 , AOUT 77.
- [GoN67] GORDON W.J. "CLOSED QUEUEING SYSTEMS WITH EXPONENTIAL SERVERS"
NEWELL G.F. OPERATION RESEARCH , VOL 15 , 1967.
- [Jac63] JACKSON J.R. "JOB-SHOP LIKE QUEUEING SYSTEMS" ,
MANAGEMENT SCIENCE , VOL 10 , N 1 , OCTOBER 63.
- [JaL76] JACOBS P.A. "A MIXED AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE EXPONENTIAL
LEWIS P.A.W. SEQUENCE AND POINT PROCESS (EARNA 1,1)" ,
1976.

[Kah58] KAHAN W. "GAUSS SEIDEL METHODS OF SOLVING LARGE SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS" ,
PH.D THESIS ,UNIVERSITY OF TORONTO ,1958.

[Kel74] KELLER T.W. "ASQ USER'S MANUAL" ,
TR-27 ,DEPT. OF COMPUTER SCIENCES ,UNIVERSITY OF TEXAS AT AUSTIN ,1974.

[Kel75] KELLY F.P. "NETWORKS OF QUEUES WITH CUSTOMERS OF DIFFERENT CLASSES" ,
J. APPL. PROB. ,VOL 12 ,1975.

[Kob74] KOBAYASHI H. "APPLICATION OF THE DIFFUSION APPROXIMATION TO QUEUEING NETWORKS" ,
J.ACM ,VOL 21 ,1974.

[Krg77] KRZESINSKI A. "A MULTICLASS NETWORK MODEL OF A MULTIPROGRAMMING TIME-SHARING COMPUTER SYSTEM" ,
GERBER S. IFIP CONGRESS ,1977.
TEUNISSEN P.

[Krt77A] KRZESINSKI A. "EFFICIENT COMPUTATIONAL FORMS FOR THE NORMALIZING CONSTANT AND THE STATISTICAL MEASURES OF MIXED MULTICLASS QUEUEING NETWORKS" ,
TEUNISSEN P. REPORT RW77-04 ,UNIVERSITY OF STELLENBOSCH (RSA) DEPT. OF COMP. SCIENCE ,JUNE 77.

[Krt77B] KRZESINSKI A. "STOCHASTIC NETWORK ANALYSIS PROGRAM - USER'S MANUAL" ,
TEUNISSEN P. REPORT RW76-02 ,DEPT. OF COMP. SCIENCE ,UNIVERSITY OF STELLENBOSCH (RSA) ,MARCH 77.

[Lam77] LAM S.S. "QUEUEING NETWORKS WITH POPULATION SIZE CONSTRAINTS" ,
IBM JOURNAL OF RES. AND DEV. ,JULY 77.

[LeP76] LEROUUDIER J. "DISCRETE EVENT SIMULATION MODELLING OF COMPUTER SYSTEM FOR PERFORMANCE EVALUATION" ,
PARENT M. IRIA/LABORIA ,RAPPORT DE RECHERCHE N 177 ,JUN 76.

[Mar77] MARIE R. "UNE METHODE ANALYTIQUE APPROCHEE POUR RESEAU DE FILES D'ATTENTE GENERAUX" ,
IRISA ,RAPPORT N 85 ,1977.

[Mar78] MARIE R. "METHODES ITERATIVES DE RESOLUTION DE MODELES MATHEMATIQUES DE SYSTEMES INFORMATIQUES" ,
RAIRO REVUE BLEU ,VOL 2 ,1978.

[MeP78] MERLE D. "A TOOL FOR COMPUTER PERFORMANCE ANALYSIS" ,
POTIER D. PROC. ICPCI 78 ,JUNE 78.
VERAN M.

[Moo72] MOORE F.R. "COMPUTATIONAL MODEL OF A CLOSED QUEUEING NETWORK WITH EXPONENTIAL SERVERS" ,
IBM JOURNAL OF RES. AND DEV. ,NOVEMBER 72.

[Mun72] MUNTZ R.R. "POISSON DEPARTURE PROCESSES AND QUEUEING NETWORKS" ,
IBM RES. REP. RC4115 ,DECEMBER 72.

[Neu68] NEUTS M.F. "TWO QUEUES IN SERIES WITH A FINITE INTERMEDIATE WAITING ROOM" ,
J. APPL. PROB. ,VOL 5 ,1968.

- [Oli77] OLIVEIRA J. "MODELISATION DE LA CHARGE SPW ET RESULTATS DE SIMULATION SUR ORACLE" , COMMUNICATION PERSONNELLE ,1977.
- [Pit76] PITTEL B. "CLOSED EXPONENTIAL NETWORKS OF QUEUES WITH BLOCKING THE JACKSON-TYPE STATIONARY DISTRIBUTION AND ITS ASYMPTOTIC ANALYSIS" , IBM RES. REP. RC6174 ,AUGUST 76.
- [Pol76] POTIER D.
LEROUQUIER J.
BADEL M. "UN MODELE D'ANALYSE DES PERFORMANCES D'ORDINATEUR MULTIPROGRAMMES A MEMOIRE VIRTUELLE" , IRIA/LABORIA ,RAPPORT DE RECHERCHE N 152 ,JANVIER 76.
- [Pou74] POUZIN L. "CIGALE,THE PACKET SWITCHING MACHINE OF THE CYCLADE COMPUTER NETWORK" , PROC. IFIP CONGRESS 74 ,STOCKOLM ,NORTH-HOLLAND ED. , AUGUST 74.
- [Pup77] PUJOLLE G.
POTIER D. "RESEAUX DE FILES D'ATTENTE A CAPACITE LIMITEE AVEC DES APPLICATIONS AUX SYSTEMES INFORMATIQUES" , IRIA/LABORIA ,RAPPORT N 219 ,FEVRIER 77.
- [Rei75] REISER M. "QNET4 USER'S GUIDE" , IBM RES. REP. RA-71 ,1975.
- [Rei76] REISER M. "NUMERICAL METHODS IN SEPERABLE QUEUEING NETWORKS" , IBM RES. REP. RC-5842 ,MAY 76.
- [ReK75] REISER M.
KOBAYASHI H. "QUEUEING NETWORKS WITH MULTIPLE CLOSED CHAINS: THEORY AND COMPUTATIONAL ALGORITHMS" , IBM JOURNAL OF RES. AND DEV. ,VOL 19 ,MAY 75.
- [ReK76] REISER M.
KOBAYASHI H. "ON THE CONVOLUTION ALGORITHM FOR SEPARABLE QUEUEING NETWORKS" , IBM RES. REP. RC-5914 ,JANUARY 76.
- [Rod72] RODRIGUEZ-ROSSEL J. "THE EVALUATION OF A TIME SHARING PAGE DEMAND SYSTEM" , PROC. SPRING JOINT COMPUTER CONF. ,1972.
- [Ros76] ROSE C. "VALIDATION OF A QUEUEING MODEL WITH CLASSES OF CUSTOMERS" , PROC. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER PERFORMANCE,MEASUREMNT AND EVALUATION , ACM-SYGNOMETRICS ,IFIP WG 7.3 ,MARCH 76.
- [Sam77] SAUER C.H.
MAC NAIR E.A. "APPLICATION OF RESQ: COMMUNICATION SYSTEM EVALUATION" , IBM RES. REP. RC-6633 ,JULY 77.
- [Sau75] SAUER C.H. "SIMULATION ANALYSIS OF GENERALIZED QUEUEING NETWORKS" , PROC. 1975 SUMMER COMPUTER SIMULATION CONFERENCE .
- [Sch78] SCHROEDER A. "MULTIDIMENSIONAL DATA ANALYSIS AS A TOOL FOR THE STUDY OF COMPUTER SYSTEMS" , A PARAITRE ,1978.
- [Ste76] STEWART W.J. "MARCA: MARKOV CHAIN ANALYSER" , IRISA ,RAPPORT N 45 ,JUIN 1976.
- [Ste78] STEWART W.J. "A COMPARISON OF NUMERICAL TECHNIQUES IN MARKOV MODELLING" , C.ACM ,VOL 21 ,N 2 ,FEBRUARY 78.

[Sto77] STOYAN D.

"QUEUEING NETWORKS INSENSITIVITY AND A HEURISTIC
APPROXIMATION" ,
BERGAKADEMIE FREIBERG ,SEKTION MATHEMATIK ,
DDR 92 ,FREIBERG ,1977.

[Ver77] VERAN M.

"QNAP: MANUEL D'UTILISATION" ,
RAPPORT TECHNIQUE CENTRE SCIENTIFIQUE CII-HB ,
GRENOBLE ,NOVEMBRE 77.

[WiB74] WILLIAMS A.C.
BHANDIWAD K.A.

"QUEUEING NETWORKS MODELS OF COMPUTER SYSTEMS" ,
PROC. OF THE 3RD TEXAS CONF. ON COMPUTER SYSTEMS ,
NOVEMBER 74.

[ZaL77] ZAHORJAN J.
LEVI A.I.

"AN OVERVIEW OF THE QSOLVE SYSTEM" ,
TR CSRG-83 ,COMP. SYST. RESEARCH GROUP ,
UNIVERSITY OF TORONTO ,JULY 77.
