



ITÉ DE NANCY

FACULTÉ DES SCIENCES

Sc. N. $\frac{70}{68}$ A

MISE AU POINT DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE
ET APPLICATION



THÈSE

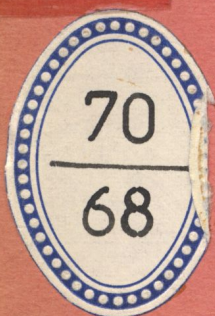
pour l'obtention du
DOCTORAT de SPECIALITE MATHÉMATIQUES (3ème CYCLE)

Soutenue devant le Jury le 28 Septembre 1970

par

Catherine MARQUIS

Jury : Mr LEGRAS Président
 Mr DEPAIX Examineurs
 Mr GILORMINI



UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

MISE AU POINT DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE
ET APPLICATION



par Catherine MARQUIS

ANNEE SCOLAIRE 1969 /1970

=====

DOYEN : M. AUBRY

ASSESEUR : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JOLY -

LAPORTE - EICHBORN - CAPELLE - GODEMENT - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE -
DE MALLEMAN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET -
OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHL - DUBREIL.

Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET - Mlle MATHIEU.

PROFESSEURS

MM. ROUBAULT	Géologie	GAYET	Physiologie
VEILLET	Biologie animale	HADNI	Physique
BARRIOL	Chimie théorique	*BASTICK	Chimie
BIZETTE	Physique	DUCHAUFOR	Pédologie
GUILLIEN	Electronique	GARNIER	Agronomie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	NEEL	Chimie organique industrielle
BOLFA	Minéralogie	BERNARD	Géologie appliquée
NICLAUSE	Chimie	*CHAMPIER	Physique
FAIVRE	Physique appliquée	*GAY	Chimie biologique
AUBRY	Chimie minérale	STEPHAN	Zoologie
COPPENS	Radiogéologie	*CONDE	Zoologie
DUVAL	Chimie	*WERNER	Botanique
FRUHLING	Physique	EYMARD	Calcul différentiel et intégral
HILLY	Géologie	LEVISALLES	Chimie organique
LE GOFF	Génie chimique	FELDEN	Physique
SUHNER	Physique expérimentale	*GOSSE	Mécanique physique
CHAPON	Chimie biologique	*DAVOINE	Physique (ENSMIN)
HEROLD	Chimie minérale industrielle	HORN	Physique (1 ^{er} cycle)
SCHWARTZ B.	Exploitation minière	*ROCCI	Géologie
MALAPRADE	Chimie	*Mme LUMER	Mathématiques
MANGENOT	Botanique	DELPUECH	Chimie physique
N...	Chimie biologique		
N...	Mécanique appliquée		
N...	Analyse supérieure		
N...	Méthodes mathématiques de la physique		
N...	Mécanique rationnelle		

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MMe BASTICK	Chimie P. C. Epinal	BALESDENT	Thermodynamique, Chimie appliquée (ENSIC)
MM GUDEFIN	Physique	BLAZY	Minéralogie Appliquée (ENSG)
VILLAUME	Psychophysiologie	JANOT	Physique PC Epinal
FRENTZ	Biologie Animale	CACHAN	Entomologie Appliquée (ENSA)
MARI	Chimie (ISIN)	JACQUIN	Pédologie et Chimie agricole
AUROUZE	Géologie	MAINARD	Physique M. P.
DEVIOT	Physique du solide	MARTIN	Chimie P. C.
FLECHON	Physique PC.	DEPAIX	Probabilités et Statistiques
Melle HUET	Mathématiques CBG	PROTAS	Minéralogie
VIGNES	Metallurgie		
PAIR	Mathématiques appliquées		
PAULMIER	Mécanique Expérimentale		
RIVAIL	Chimie Appliquée (Cuces)		

MAITRES DE CONFERENCES

MM JOZEFOWICZ	Physico-Chimie	GERL	Physique (ENSEM)
VILLERMAUX	Génie Chimique	ROQUES	Chimie Minérale
METCHE	Biochimie appliquée (Brasserie)	FERRIER	Mathématiques
BAUMANN	Physique 1er Cycle	GILORMINI	Mécanique (ISIN)
DURAND	Physique	N...	Mécanique des fluides (ISIN)
GRANGE	Physique (ISIN)	N...	Mathématiques
BAVEREZ	Chimie (ENSIC)	N...	Mathématiques P. C.
CHAMBON	Exploitation Minière (Mines)	N...	Mathématiques C. B. G.
HUSSON	Physique (ENSEM)	N...	Physiologie Animale
WEISSLINGER	Physique	N...	Mathématiques M. P.
		N...	Chimie Organique
		N...	Chimie (ENSIC)
		N...	Mathématiques

CHARGES D'ENSEIGNEMENTS

MM. AMARIGLIO - COEURE - DAVRAINVILLE - GIRARDEAU - HILY - SCHREIBER - NOVERRAZ - OVAERT - RUYER - WEBER.

Que Monsieur LEGRAS, Directeur de l'Institut
Universitaire de Calcul Automatique, veuille trouver ici
l'expression de ma gratitude pour l'enseignement que j'ai
reçu à l'Institut.

Ce travail a été effectué sous la direction de
Monsieur DEPAIX, à qui j'exprime toute ma reconnais-
sance.

Je remercie Monsieur GILORMINI, qui a accepté
de faire partie du Jury.

PLAN

Introduction

CHAPITRE I - LA TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE DANS UN CAS PARTICULIER

- I - Transformée de Fourier discrète
- II - Transformée de Fourier rapide dans le cas $N = 2^n$
 - II.1 Description de la méthode
 - II.2 Exemple : $N = 2^3$
 - Réarrangement des données
 - II.3 Remarques
 - 1. Occupation en mémoire
 - 2. Nombre d'opérations
- III - Conclusion

CHAPITRE II - LA TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE : CAS GENERAL

- I - Description de la transformée de Fourier rapide
- II - Exemple : $N = 2 \times 2 \times 3$
- III - Coût de la méthode
 - 1. Occupation en mémoire
 - 2. Nombre d'opérations
- IV - Organigramme de la méthode
 - Réarrangement des données
- V - Conclusion.

CHAPITRE III - RESULTATS NUMERIQUES

Problèmes posés par la méthode au niveau de l'application numérique
Premier exemple et vérification des avantages de la transformée de Fourier rapide
Deuxième exemple
Troisième exemple et étude d'une amélioration des résultats
Remarque et conclusion.

CHAPITRE IV - APPLICATION : RESOLUTION D'UN PROBLEME DE
DECONVOLUTION

- I - Position du problème
 - II - Résolution
 - II.1 Détermination des points de probabilité non nulle
 - II.2 Détermination des probabilités de ces points
 - III - Applications numériques
 - Premier exemple
 - Deuxième exemple
 - IV - Conclusion
-

INTRODUCTION

La transformée de Fourier constitue un puissant instrument d'analyse. En calcul numérique, elle est utilisée sous une forme discrète qui présente l'avantage de posséder des propriétés analogues à celles de la transformée intégrale. Malheureusement, la méthode est coûteuse en raison du nombre élevé d'opérations nécessaires, ce qui en limite les applications. Depuis longtemps des recherches ont été entreprises pour remédier à cet inconvénient. Un algorithme, non le premier, fut présenté en 1965 par Cooley et Tukey [1], algorithme qui suscita aussitôt un grand intérêt : il réduisait notablement le nombre des opérations dans le calcul de sommes semblables à celles utilisées pour la transformée de Fourier discrète, et par là diminuait le temps de calcul et l'influence des erreurs de chute, et cela, sans nécessiter, en calcul automatique, plus de place en mémoire. La méthode est, depuis, largement connue sous le nom de "fast Fourier transform" ou FFT, c'est-à-dire "transformée de Fourier rapide".

Nous nous proposons ici d'exposer la méthode d'abord dans un cas simple. Puis nous généraliserons. Et après avoir apprécié les avantages de cette technique au moyen d'exemples, nous l'utiliserons au cours de la résolution d'un problème de déconvolution particulier.

CHAPITRE I

LA TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE DANS
UN CAS PARTICULIER.

La transformée de Fourier rapide calcule la transformée de Fourier discrète par itérations et plus rapidement qu'une méthode directe. Aussi convient-il de définir la transformée discrète avant toute étude de la transformée rapide.

I - TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE

Soit $X(t)$ une fonction à valeurs réelles, ou complexes de la variable réelle t . Considérons la transformée de Fourier, lorsqu'elle existe, de la fonction $X(t)$ sous la forme

$$T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-2i\pi ft} dt$$

$T(f)$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle f . Si $X(t) \in L_1$ (espace des fonctions sommables), $T(f)$ est définie.

Dans un problème numérique, $X(t)$ n'est connue que sur un intervalle fini $[A, B]$. Alors on ne peut obtenir qu'une valeur approchée de $T(f)$:

$$S(f) = \int_A^B X(t) e^{-2i\pi ft} dt.$$

En dehors de l'intervalle $[A, B]$, où la fonction $X(t)$ est nulle ou on peut admettre qu'elle est nulle. Un tel intervalle existe car une fonction admettant une transformée de Fourier tend vers zéro à l'infini.

En partageant l'intervalle $[A, B]$ en N intervalles de longueur Δt , on a encore :

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\Delta t - C\Delta t}^{(k+1)\Delta t - C\Delta t} X(t) e^{-2i\pi ft} dt, \quad (1)$$

C étant une constante entière quelconque.

En outre $X(t)$ n'est connue sur $[A, B]$ ou $[-C\Delta t, (N-C)\Delta t]$ qu'en des points t_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, en général équidistants. Soient donc $X(t_k)$ ou $X(k)$, avec $t_k = \Delta t (k-C)$, les valeurs connues de la fonction numérique $X(t)$.

En supposant que le produit $X(t) e^{-2i\pi f t}$ varie peu sur chacun des intervalles $[k\Delta t - C\Delta t, (k+1)\Delta t - C\Delta t]$, $k = 0$ à $N-1$, et qu'on puisse le remplacer par sa valeur au début de l'intervalle, il vient :

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-2i\pi f t_k} \Delta t$$

soit :

$$S(f) = \Delta t e^{2i\pi f C\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} X(t_k) e^{-2i\pi f k\Delta t}$$

Ceci montre que $S(f + \frac{1}{N\Delta t}) = S(f)$. $S(f)$ pourra donc être calculée pour $f = \frac{j}{N\Delta t}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Finalement, en posant $W = e^{-2i\pi/N}$, (1) devient :

$$S(\frac{j}{N\Delta t}) = \Delta t e^{2i\pi j C/N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{jk}$$

$S(\frac{j}{N\Delta t})$, noté plus brièvement $S(j)$, est le j -ième "coefficient" de la transformée de Fourier discrète de $X(t)$.

Il est toujours possible de se ramener au cas $\Delta t = 1$ et $C = 0$, c'est-à-dire

$$S(j) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{jk}, \quad (2)$$

expression dont la forme générale de $S(j)$ ne diffère que par un coefficient. En conséquence nous ne considérerons désormais que cette écriture sans que cela nuise à la généralité de ce qui suit.

Le calcul direct des N coefficients $S(j)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, au moyen des N égalités du type (2) requiert N^2 opérations, une opération comportant une multiplication complexe et une addition complexe. Dans le cas particulier où $N = 2^n$, la méthode de la transformée de Fourier rapide réduit sensiblement le nombre de ces opérations, sans nécessiter, en calcul automatique, plus de place en mémoire.

II - TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE DANS LE CAS $N = 2^n$

Nous adopterons pour cet exposé la présentation de la transformée de Fourier rapide donnée dans [2], présentation plus adaptée à la programmation.

II.1 Description de la méthode

Comme $N = 2^n$, il est possible de considérer dans la suite des N valeurs connues de la fonction X , d'une part les 2^{n-1} valeurs de rang pair et d'autre part les 2^{n-1} valeurs de rang impair. Alors $S(j)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} S(j) &= \sum_{k=0}^{N/2-1} X(2k) e^{-4i\pi jk/N} + \sum_{k=0}^{N/2-1} X(2k+1) e^{-2i\pi j(2k+1)/N} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} X(2k) e^{-4i\pi jk/N} + e^{-2i\pi j/N} \sum_{k=0}^{N/2-1} X(2k+1) e^{-4i\pi jk/N} \end{aligned}$$

pour $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Or la première somme est le j -ième "coefficient" B_j^0 de la transformée de Fourier discrète des $N/2$ points de rang pair $X(2k)$, $k=0, 1, \dots, N/2-1$; la deuxième est le j -ième "coefficient" B_j^1 de la transformée discrète des $N/2$ points de rang impair $X(2k+1)$, $k=0, 1, \dots, N/2-1$.

$$\text{Donc } S(j) = B_j^0 + W^j B_j^1 \text{ pour } j = 0, 1, \dots, N/2-1.$$

Comme

$$B_j^0 = B_{j+N/2}^0 \quad \text{et} \quad B_j^1 = B_{j+N/2}^1,$$

nous avons :

$$S(j + N/2) = B_j^0 + W^{j+N/2} B_j^1 = B_j^0 - W^j B_j^1$$

Nous nous sommes donc ramenés au calcul des transformées discrètes de 2 suites de $N/2$ points, ce qui ne nécessite que $2 \times (\frac{N}{2})^2$ opérations.

Si nous considérons maintenant, dans la suite des $N/2$ points $X(2k)$, les $N/4$ points de rang pair et les $N/4$ points de rang impair, B_j^0 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$B_j^0 = \sum_{k=0}^{N/4-1} \left\{ X(4k) e^{-8i\pi jk/N} + X[2(2k+1)] e^{-4i\pi j(2k+1)/N} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{N/4-1} X(4k) e^{-8i\pi jk/N} + e^{-4i\pi j/N} \sum_{k=0}^{N/4-1} X(4k+2) e^{-8i\pi jk/N}$$

pour $j = 0, 1, \dots, N/2-1$.

La première somme n'est autre que le coefficient d'ordre j , C_j^0 , de la transformée discrète des $N/4$ points $X(4k)$; et la deuxième est le coefficient d'ordre j , C_j^1 , de la transformée discrète des $N/4$ points $X(4k+2)$.

Nous avons donc :

$$B_j^0 = C_j^0 + W^{2j} C_j^1$$

et de même :

$$B_j^1 = C_j^2 + W^{2j} C_j^3$$

pour $j = 0$ à $N/4-1$,

C_j^2 étant le j -ième coefficient de la transformée discrète de la fonction composée des $N/4$ valeurs $X(4k+1)$; et C_j^3 , le j -ième coefficient de la transformée discrète de la suite des $N/4$ valeurs $X(4k+3)$.

Les relations

$$C_j^0 = C_{j+N/4}^0 \quad \text{et} \quad C_j^1 = C_{j+N/4}^1$$

et des relations analogues pour C_j^2 et C_j^3 entraînent :

$$B_{j+N/4}^0 = C_j^0 + W^{2j+2N/4} C_j^1 = C_j^0 - W^{2j} C_j^1$$

et

$$B_{j+N/4}^1 = C_j^2 - W^{2j} C_j^3$$

A l'étape suivante, les C_j^0 , C_j^1 , C_j^2 , C_j^3 , seront exprimés en fonction des j -ièmes coefficients des transformées discrètes des 8 suites de $N/8$ valeurs. Comme $N = 2^n$ le procédé peut être répété n fois. A la dernière étape on utilise les transformées discrètes des valeurs initiales groupées deux par deux; et la décomposition s'arrête là, puisque les valeurs initiales sont à elles-mêmes leur

transformée de Fourier discrète.

Les avantages de ce procédé apparaîtront mieux au moyen d'un exemple.

II. 2. Exemple : $N = 2^3 = 8$

Soient $S(0), S(1), \dots, S(7)$, les coefficients de la transformée de Fourier discrète de la fonction dont sont connues 8 valeurs $X(0), X(1), \dots, X(7)$; ils peuvent être exprimés en fonction de

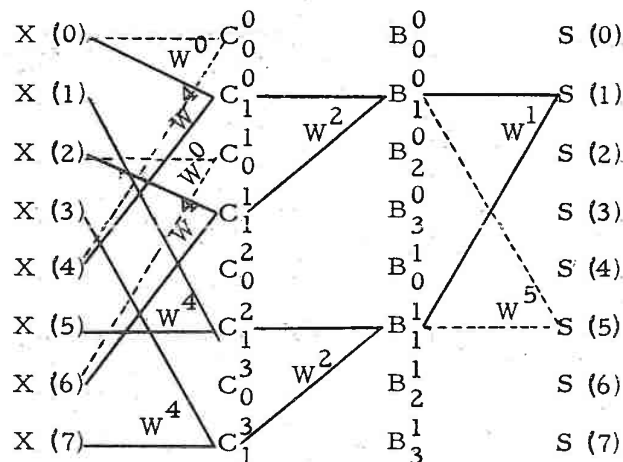
- $B_0^0, B_1^0, B_2^0, B_3^0$, coefficients de la transformée discrète de la suite des 4 valeurs d'indice pair,

- $B_0^1, B_1^1, B_2^1, B_3^1$, coefficients calculés à partir des 4 valeurs d'indice impair.

Les B_j^0 ($j = 0, 1, 2, 3$) sont exprimés au moyen des $C_0^0, C_1^0, C_0^1, C_1^1$, coefficients de la transformée discrète de 2 points, et les B_j^1 au moyen des $C_0^2, C_1^2, C_0^3, C_1^3$.

Enfin, les $C_j^0, C_j^1, C_j^2, C_j^3$ ($j = 0, 1$) sont calculés à partir de 2 des valeurs données. Par exemple, C_1^0 , comme C_0^0 , s'exprime en fonction des termes de rang pair dans la sous-suite des termes de rang pair de la suite des données, c'est-à-dire $X(0)$ et $X(4)$.

Nous pouvons schématiser le calcul d'un coefficient, $S(1)$ par exemple, comme suit :



Le calcul comporte 3 étapes :

$$- S(1) = B_1^0 + W^1 B_1^1$$

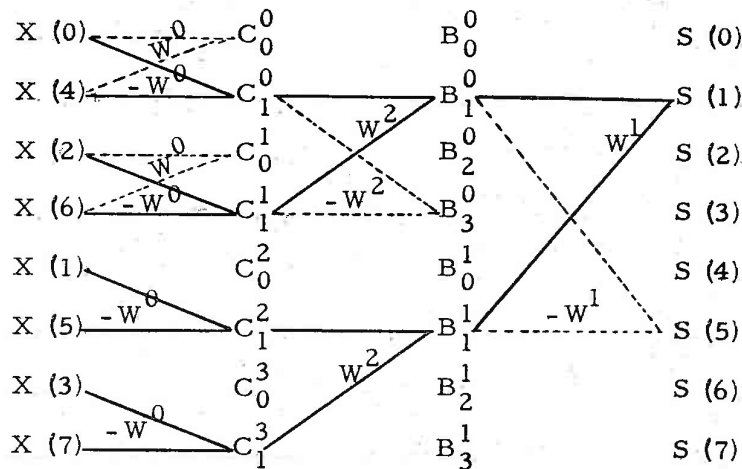
Remarquons que $S(5) = B_1^0 + W^5 B_1^1 = B_1^0 - W^1 B_1^1$ et peut donc être calculé en même temps que $S(1)$.

$$- B_1^0 = C_1^0 + W^2 C_1^1 \quad \text{et} \quad B_1^1 = C_1^2 + W^2 C_1^3$$

$$- C_1^0 = C_{0+1}^0 = X(0) - W^0 X(4), \text{ puisque } C_0^0 = X(0) + W^0 X(4).$$

$$C_1^1 = C_{0+1}^1 = X(2) - W^0 X(6), \text{ puisque } C_0^1 = X(2) + W^0 X(6), \text{ etc...}$$

Mais pour faire apparaître le processus itératif, qui sera la base de la programmation de la méthode, il est nécessaire de procéder à un réarrangement des données, ainsi que le montre le nouveau schéma ci-dessous :



Réarrangement des données.

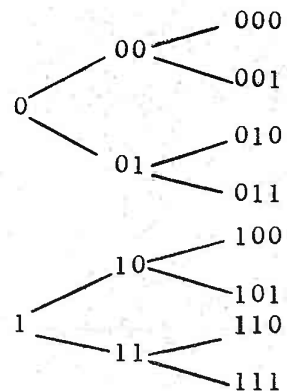
Ce réarrangement est dû au fait de la décomposition, à chaque étape, de chaque suite en deux sous-suites. Pour l'exemple considéré, au cours du processus nous avons opéré les transformations suivantes sur l'ensemble des indices des données :

0		0		0
1		2		4
2		4		2
3		6		6
4	→	1	→	1
5		3		5
6		5		3
7		7		7

Numérotons à chaque étape les différentes suites :

- à la première étape les données de rang pair seront dans l'ensemble 0 et les données de rang impair dans l'ensemble 1 ;
 - à la deuxième étape, l'ensemble 0 se subdivisera en 00 et 01 et l'ensemble 1 en 10 et 11 ;
- et ainsi de suite.

Ce qui se schématise par :



Ecrivons l'indice d'une donnée sur 3 chiffres binaires (n dans le cas général), soit $\overline{abc}$.

Si $\overline{abc}$ est de la forme $\overline{ab0}$, il est pair et se place dans la suite 0 ;

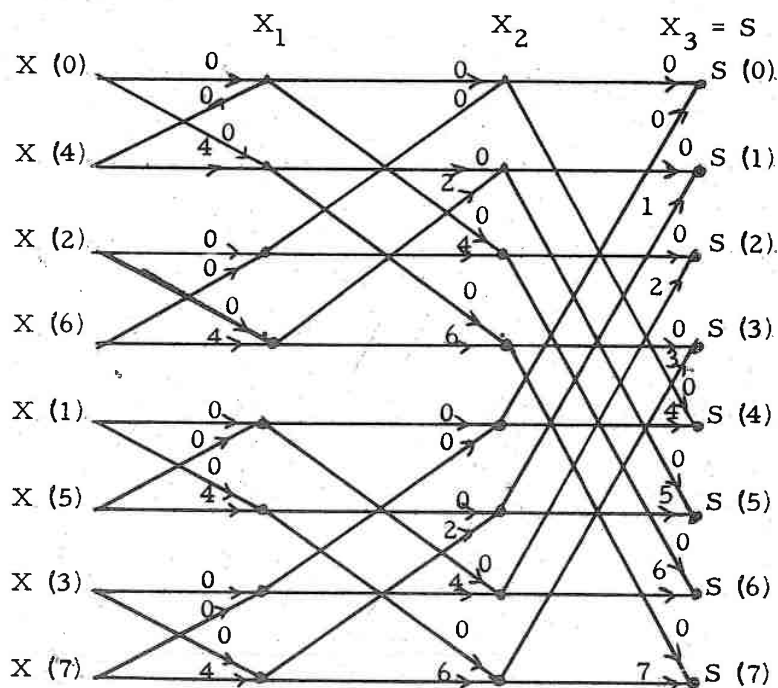
S'il est de la forme $\overline{a10}$, il est de rang impair dans la suite 0 et se place dans la suite 01 ;

S'il est enfin 110, il se place en 011. C'est-à-dire qu'il y a inversion de l'ordre des 3 chiffres binaires.

Dans le cas général où $N = 2^n$, le réarrangement des données consistera à placer $X(i)$, si l'écriture binaire de i est $i_{n-1} i_{n-2} \dots i_1 i_0$, à la position $j = i_0 i_1 \dots i_{n-2} i_{n-1}$.

Remarque. Il serait possible de ne pas réarranger les données. Mais en conservant le processus itératif, il serait alors nécessaire de réarranger les valeurs finales.

Le calcul de tous les coefficients de la transformée de Fourier discrète par la méthode rapide est représenté ainsi :



Le vecteur X_1 est calculé en fonction du vecteur X , puis X_2 en fonction de X_1 , et enfin $X_3 = S$ en fonction de X_2 .

Pour le calcul d'un terme placé au nœud d'une colonne, les quantités apportées par chacune des deux flèches sont multipliées par W^i , i étant le nombre situé sur la flèche, puis additionnées l'une à l'autre.

Nous avons par exemple :

$$\begin{aligned} X_1(1) &= X(0) W^0 + X(4) W^4 = X(0) - W^0 X(4) = X(0) - X(4) \\ X_3(2) &= S(2) = X_2(2) + W^2 X_2(6). \end{aligned}$$

A partir de ce graphe précis, nous allons faire des remarques générales sur la méthode.

II. 3. Remarques

1. Occupation en mémoire

Tous les résultats intermédiaires et les résultats finaux peuvent être écrits successivement en mémoire à la place des données originales ; en effet, à chaque étape, deux quantités sont calculées au moyen de deux quantités évaluées à l'étape précédente et qui ne servent pas au calcul d'autres termes. Par conséquent, à l'étape i , les résultats seront calculés deux par deux et rangés à la place des deux résultats de l'étape $i-1$ qui auront été utilisés pour le calcul. Donc en dehors du tableau des N valeurs initiales, il suffit d'avoir en mémoire deux places auxiliaires.

De plus, lors du réarrangement des données, deux valeurs sont échangées entre elles. Ce qui ne nécessite pas plus de place en mémoire. Au point de vue occupation de mémoire la méthode étudiée est donc identique à une méthode directe de calcul de la transformée de Fourier discrète.

2. Nombre d'opérations

A chaque étape, le calcul d'un terme ne nécessite qu'une multiplication complexe puisque $W^0 = 1$; le calcul de tous les termes demande N multiplications complexes, nombre qui se réduit à $\frac{N}{2}$ par le fait que $W^1 = -W^{i+N/2}$, et N additions complexes.

Il y a n étapes, donc $n \frac{N}{2} = \frac{1}{2} N \log_2 N$ multiplications au lieu de N^2 pour la méthode directe, et $Nn = N \log_2 N$ additions au lieu de N^2 . Par conséquent le temps de calcul est réduit dans un rapport qui peut être considérable lorsque N est grand.

III - CONCLUSION

La transformée de Fourier rapide présente un intérêt certain puisqu'elle est moins coûteuse qu'une méthode directe de calcul de la transformée de Fourier discrète. Mais le fait que N soit de la forme 2^n ne permet pas d'atteindre beaucoup de nombres et restreint les applications de la méthode.

La technique peut aussi être employée pour un nombre N égal à une puissance n d'un entier quelconque, tout en conservant les mêmes avantages. Cependant, les cas d'utilisation seraient encore limités. C'est pourquoi dans le chapitre suivant nous généraliserons cette étude en considérant le cas où N peut être mis sous la forme d'un produit quelconque d'entiers.

CHAPITRE II

LA TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE

CAS GENERAL

Nous nous intéressons à présent au cas plus général où N se met sous la forme d'un produit de n facteurs :

$$N = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n.$$

Nous verrons que les A_i doivent être les plus petits possible. Aussi nous considérerons en fait la décomposition de N en facteurs premiers.

I - DESCRIPTION DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE

Nous nous proposons d'établir une méthode de calcul rapide des

$$S(j) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(-2i\pi jk/N)$$

pour $j = 0, 1, \dots, N-1$, quand $N = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Les $S(j)$ sont les "coefficients" de la transformée de Fourier discrète de la fonction dont on connaît N valeurs $X(k)$ en des points équidistants.

● Considérons la suite des N valeurs $X(k)$ comme A_n suites de $N/A_n = A_1 \dots A_{n-1}$ valeurs : la suite d'ordre r_n est composée des éléments $X(k A_n + r_n)$ où $r_n = 0, 1, \dots, A_n - 1$ et $k = 0, 1, \dots, N/A_n - 1$

$S(j)$ peut s'écrire :

$$S(j) = \sum_{k=0}^{N/A_n-1} \left\{ X(k A_n) \exp(-2i\pi j k A_n/N) + \dots \right. \\ \left. + X(k A_n + r_n) \exp(-2i\pi j (k A_n + r_n)/N) + \dots \right. \\ \left. + X(k A_n + A_n - 1) \exp(-2i\pi j (k A_n + A_n - 1)/N) \right\}$$

ou en posant $W = \exp(-2i\pi/N)$

$$S(j) = \sum_{k=0}^{N/A_n-1} \left[\sum_{r_n=0}^{A_n-1} X(k A_n + r_n) W^{j(k A_n + r_n)} \right]$$

En intervertissant les sommations, il vient :

$$S(j) = \sum_{r_n=0}^{A_n-1} \left[\sum_{k=0}^{N/A_n-1} X(k A_n + r_n) W^{jk A_n} \right] W^{jr_n}$$

La somme "entre crochets" est le j-ième coefficient de la transformée de Fourier discrète de la fonction composée des N/A_n points $X(k A_n + r_n)$, soit $B_j^{(r_n)}$.

Nous avons :

$$S(j) = \sum_{r_n=0}^{A_n-1} B_j^{(r_n)} W^{jr_n} \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, \frac{N}{A_n} - 1,$$

et comme $B_{j+u_n \frac{N}{A_n}}^{(r_n)} = B_j^{(r_n)}$ avec $u_n = 0, 1, \dots, A_n - 1$

$$S(j + u_n \frac{N}{A_n}) = \sum_{r_n=0}^{A_n-1} B_j^{(r_n)} W^{(j + u_n \frac{N}{A_n}) r_n} \quad (1)$$

● Chaque suite $X(k A_n + r_n)$, $k = 0$ à $N/A_n - 1$, peut être partagée en A_{n-1} suites de $N/A_n A_{n-1}$ points : la suite d'ordre r_{n-1} , dans la suite d'ordre r_n obtenue lors de la décomposition précédente, comprend les points $X(A_n(k A_{n-1} + r_{n-1}) + r_n)$ où $r_{n-1} = 0$ à $A_{n-1} - 1$ et $k = 0$ à $\frac{N}{A_n A_{n-1}} - 1$

$B_j^{(r_n)}$ s'écrit alors :

$$B_j^{(r_n)} = \sum_{k=0}^{N/A_n A_{n-1}-1} \left\{ X(A_n(k A_{n-1}) + r_n) W^{jk A_{n-1} A_n} + \dots \right. \\ \left. + X(A_n(k A_{n-1} + r_{n-1}) + r_n) W^{j A_n (k A_{n-1} + r_{n-1})} + \dots \right. \\ \left. + X(A_n(k A_{n-1} + A_{n-1}-1) + r_n) W^{j A_n (k A_{n-1} + A_{n-1}-1)} \right\}$$

soit encore :

$$B_j^{(r_n)} = \sum_{r_{n-1}=0}^{A_{n-1}-1} \left[\sum_{k=0}^{A_1 \dots A_{n-2}-1} X(k A_n A_{n-1} + A_n r_{n-1} + r_n) W^{jk A_n A_{n-1}} \right] W^{j A_n r_{n-1}}$$

pour $j = 0, 1, \dots, N/A_n - 1$.

La somme "entre crochets" que nous noterons $C_j^{(r_{n-1})}$, est le coefficient d'ordre j de la transformée discrète des $N/A_n A_{n-1}$ valeurs $X(k A_n A_{n-1} + A_n r_{n-1} + r_n)$. Par conséquent :

$$B_j^{(r_n)} = \sum_{r_{n-1}=0}^{A_{n-1}-1} C_j^{(r_{n-1})} W^{j A_n r_{n-1}}$$

pour $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{A_n A_{n-1}} - 1$,

et puisque $C_j^{(r_{n-1})} = C_{j + u_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}}}^{(r_{n-1})}$ où $u_{n-1} = 0, 1, \dots, A_{n-1} - 1$

$$B_{j + u_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}}}^{(r_n)} = \sum_{r_{n-1}=0}^{A_{n-1}-1} C_j^{(r_{n-1})} W^{(j + u_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}}) A_n r_{n-1}} \quad (2)$$

En remplaçant $B_j^{(r_n)}$ par son expression en fonction de $C_j^{(r_{n-1})}$ dans (1), nous obtenons :

$$S(j + u_n \frac{N}{A_n} + u_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}}) = \sum_{r_n=0}^{A_n-1} W^{(j + u_n \frac{N}{A_n} + u_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}}) r_n} \quad (3)$$

$$\sum_{r_{n-1}=0}^{A_{n-1}-1} C_j^{(r_{n-1})} W^{(j A_n + u_{n-1} \frac{N}{A_{n-1}}) r_{n-1}}$$

pour $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{A_n A_{n-1}} - 1$

● En partageant chacune des $A_n A_{n-1}$ suites du type $X(k A_n A_{n-1} + A_n r_{n-1} + r_n)$ en A_{n-2} suites de $N/A_n A_{n-1} A_{n-2}$ éléments $X(A_n A_{n-1} (k A_{n-2} + r_{n-2}) + A_n r_{n-1} + r_n)$, il vient :

$$C_j^{(r_{n-1})} = \sum_{r_{n-2}=0}^{A_{n-2}-1} \left[\sum_{k=0}^{A_1 \dots A_{n-3}-1} X(k A_n A_{n-1} A_{n-2} + A_n A_{n-1} r_{n-2} + A_n r_{n-1} + r_n) \times W^{jk A_n A_{n-1} A_{n-2}} \right] W^{j A_n A_{n-1} r_{n-2}}$$

pour $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}} - 1$

Soit $D_j^{(r_{n-2})}$ la somme "entre crochets". C'est le j -ième coefficient de la transformée de Fourier de la suite $X(k A_n A_{n-1} A_{n-2} + A_n A_{n-1} r_{n-2} + A_n r_{n-1} + r_n)$. Nous avons donc :

$$C_j^{(r_{n-1})} = \sum_{r_{n-2}=0}^{A_{n-2}-1} D_j^{(r_{n-2})} W^{j A_n A_{n-1} r_{n-2}}$$

pour $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}} - 1$.

Puisque $D_j^{(r_{n-2})} = D_{j+u_{n-2}}^{(r_{n-2})} \frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}}$ pour $u_{n-2} = 0, 1, \dots, A_{n-2}-1$

et $j = 0$ à $\frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}} - 1$,

nous avons :

$$C_{j+u_{n-2}}^{(r_{n-1})} \frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}} = \sum_{r_{n-2}=0}^{A_{n-2}-1} D_j^{(r_{n-2})} W^{(j+u_{n-2} \frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}}) A_n A_{n-1} r_{n-2}}$$

D'après (3), en remplaçant j par $j + u_{n-2} \frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}}$, $S(j)$ peut s'exprimer ainsi en fonction de $D_j^{(r_{n-2})}$ pour $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}} - 1$:

$$\begin{aligned}
 S \left(j + u_n \frac{N}{A_n} + u_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}} + u_{n-2} \frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}} \right) = \\
 \sum_{r_n=0}^{A_n-1} W \left(j + u_n \frac{N}{A_n} + u_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}} + u_{n-2} \frac{N}{A_n A_{n-1} A_{n-2}} \right) r_n \\
 \sum_{r_{n-1}=0}^{A_{n-1}-1} W \left(j A_n + u_{n-1} \frac{N}{A_{n-1}} + u_{n-2} \frac{N}{A_{n-1} A_{n-2}} \right) r_{n-1} \\
 \sum_{r_{n-2}=0}^{A_{n-2}-1} D_j^{(r_{n-2})} W \left(j A_n A_{n-1} + u_{n-2} \frac{N}{A_{n-2}} \right) r_{n-2}
 \end{aligned}$$

● Comme $N = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, le procédé peut être répété jusqu'à l'obtention de $A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ suites de A_1 points. A la $(n-1)$ -ième étape les coefficients, du type $P_j^{(r_3)}$, de la transformée de Fourier discrète de suites de A_1 termes, s'expriment par :

$$P_j^{(r_3)} = \sum_{r_2=0}^{A_2-1} \left[\sum_{k=0}^{A_1-1} X \left(k A_n \dots A_2 + A_n \dots A_3 r_2 + \dots + A_n r_{n-1} + r_n \right) W^{jk A_n \dots A_2} \right] \times W^{jk A_n \dots A_3 r_2}$$

où $j = 0, 1, \dots, N/A_n A_{n-1} \dots A_3 - 1$, soit $j = 0, 1, \dots, A_2 A_1 - 1$

A l'étape suivante les suites de A_1 valeurs sont considérées comme A_1 suites de une valeur, qui sont donc à elles-mêmes leur transformée de Fourier discrète. C'est-à-dire que la quantité "entre crochets" dans l'expression de $P_j^{(r_3)}$ s'écrit :

$$\sum_{r_1=0}^{A_1-1} \left[X \left(A_n \dots A_2 r_1 + A_n \dots A_3 r_2 + \dots + A_n r_{n-1} + r_n \right) \right] W^{j A_n \dots A_2 r_1}$$

avec $j = 0, 1, \dots, A_1 - 1$.

Et l'on obtient comme expression finale de S en fonction de toutes les données initiales (en remplaçant j par u_1 par souci d'homogénéité des notations) :

$$\begin{aligned}
 S(u_n \frac{N}{A_n} + u_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}} + \dots + u_3 \frac{N}{A_n \dots A_3} + u_2 A_1 + u_1) = \\
 \sum_{r_n=0}^{A_n-1} W^{(u_n A_{n-1} \dots A_n + u_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 + \dots + u_2 A_1 + u_1) r_n} \\
 \sum_{r_{n-1}=0}^{A_{n-1}-1} W^{(u_{n-1} A_{n-2} \dots A_1 + u_{n-2} A_{n-3} \dots A_1 + \dots + u_2 A_1 + u_1) A_n r_{n-1}} \\
 \sum_{r_{n-2}=0}^{A_{n-2}-1} W^{(u_{n-2} A_{n-3} \dots A_1 + \dots + u_2 A_1 + u_1) A_n A_{n-1} r_{n-2}} \\
 \dots \sum_{r_1=0}^{A_1-1} W^{u_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 r_1} \\
 \times X(r_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 + r_2 A_n A_{n-1} \dots A_3 + \dots + r_{n-1} A_n + r_n)
 \end{aligned}$$

avec $u_i = 0, 1, \dots, A_i-1$ pour $i = 1$ à n .

Pour préciser le procédé de calcul et ses conséquences nous allons considérer un exemple.

II - EXEMPLE : $N = 2 \times 2 \times 3 = 12$

Nous noterons $S(0), S(1), \dots, S(11)$, les "coefficients" de la transformée de Fourier discrète de la fonction dont on connaît douze valeurs $X(0), X(1), \dots, X(11)$ en des points équidistants.

Nous nous proposons de dégager de la méthode exposée ci-dessus le schéma du calcul de $S(1)$ par exemple.

$S(1)$ s'exprime en fonction de $B_1^{(0)}, B_1^{(1)}$ et $B_1^{(2)}$, qui sont les coefficients d'ordre 1 de la transformée de Fourier discrète des $A_3 = 3$ suites de $A_1 \times A_2 = 4$ éléments, ces suites étant numérotées 0, 1, 2. En vertu de l'égalité (1), $S(5)$

et S (9) s'expriment en fonction de ces mêmes coefficients.

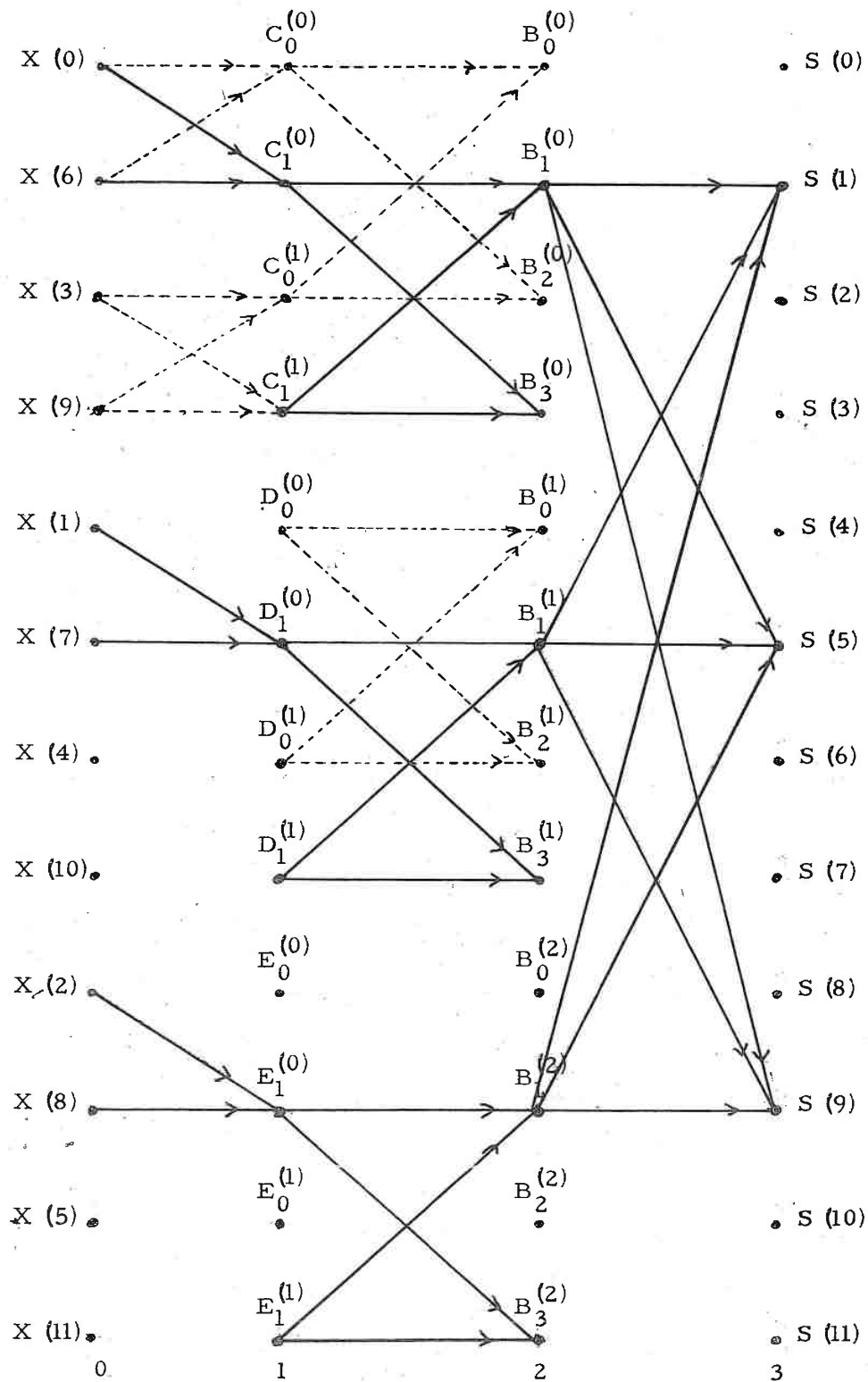
Lorsque chacune de ces trois suites est partagée en $A_2 = 2$ sous-suites de N/A_3 $A_2 = 2$ points, $B_1^{(0)}$ peut être calculé au moyen de $C_1^{(0)}$, $C_1^{(1)}$, qui sont les coefficients d'ordre 1 des transformées des deux sous-suites de la suite notée 0 à l'étape précédente. De même $B_1^{(1)}$ est fonction de $D_1^{(0)}$ et $D_1^{(1)}$, coefficients des transformées des deux suites résultant de la suite 1 ; et $B_1^{(2)}$ est fonction de $E_1^{(0)}$ et $E_1^{(1)}$, coefficients des transformées des deux sous-suites de la suite 2. Notons qu'il résulte de (2) que

$$\begin{array}{llllll} B_3^{(0)} & \text{s'exprime au moyen de} & C_1^{(0)} & \text{et} & C_1^{(1)} & \text{comme} & B_1^{(0)} \\ B_3^{(1)} & & & & D_1^{(0)} & \text{et} & D_1^{(1)} & & B_1^{(1)} \\ B_3^{(2)} & & & & E_1^{(0)} & \text{et} & E_1^{(1)} & & B_1^{(2)} \end{array}$$

Enfin les coefficients $C_j^{(i)}$, $D_j^{(i)}$, $E_j^{(i)}$ sont fonction des valeurs données $X(0), \dots, X(11)$. Dans le calcul de chaque coefficient n'entrent en compte que $A_1 = 2$ de ces valeurs. Mais comme dans le cas $N = 2^n$, par suite du procédé de calcul, il faudra, pour faire apparaître le processus itératif, procéder à un réarrangement de ces données.

Nous obtiendrons le schéma suivant où $a \rightarrow x$ signifie que x peut être exprimé en fonction de a :

$$N = 2 \times 2 \times 3$$



Les N coefficients $S(j)$, $j = 0$ à $N-1$, sont donc obtenus en n phases ; à chaque phase, N quantités sont calculées au moyen des N résultats de la phase précédente. Les abscisses auxquelles est calculée la transformée de Fourier d'une fonction sont fixées par le nombre N de valeurs connues de la fonction et la longueur Δt de l'intervalle entre deux valeurs consécutives ; en général, cela ne constitue pas un inconvénient.

A partir de cet exemple, nous pouvons faire les remarques suivantes relatives au coût de la méthode.

III - COUT DE LA METHODE

1. Occupation en mémoire

Numérotons $0, 1, 2, 3$ (plus généralement $0, 1, 2, \dots, n$) les colonnes successives du schéma ci-dessus.

A la première étape, $A_1 = 2$ quantités de la colonne 1 sont calculées au moyen de 2 quantités de la colonne 0 qui n'entrent pas en compte pour le calcul des autres quantités de la colonne 1. Donc les 2 quantités de la colonne 1, une fois calculées, peuvent être rangées en mémoire à la place des 2 quantités de la colonne 0 qui ont été utilisées pour le calcul.

D'une manière générale, à la i -ème étape, A_i éléments de la colonne $i-1$ servent au calcul de A_i éléments correspondants de la colonne i ; ceux-ci seront donc rangés en mémoire à la même place que ceux-là. A chaque étape nous aurons seulement besoin, en plus du tableau à N termes où seront rangés successivement les données, les résultats intermédiaires et les résultats finaux, d'un tableau auxiliaire de A_i termes pour le calcul.

2. Nombre d'opérations

A chaque étape, il faut A_i "opérations", telles que nous les avons définies, pour le calcul d'une quantité. Comme il y a N valeurs à calculer, chaque phase nécessite $N \times A_i$ opérations.

Pour arriver aux résultats finaux, il y a n phases ; nous effectuerons par conséquent $N \times \sum_{i=1}^n A_i$ opérations. Or une méthode directe de calcul de la

transformée de Fourier discrète requiert $N \times N$ opérations. Par la méthode de calcul rapide nous avons donc un gain de $\sum_{i=1}^n A_i/N$. Cette réduction du nombre des opérations se traduit par un gain de temps dans le même rapport et par une diminution des erreurs de chute.

Il est alors évident que $\sum_{i=1}^n A_i$ doit être minimum, c'est-à-dire que N doit être décomposé le plus possible. D'une part, ceci est obtenu par la décomposition de N en facteurs premiers. D'autre part, les nombres N "hautement décomposables" offrent un intérêt certain.

Après cette étude, il est possible d'établir un organigramme destiné à la programmation de la transformée de Fourier rapide.

IV - ORGANIGRAMME DE LA METHODE

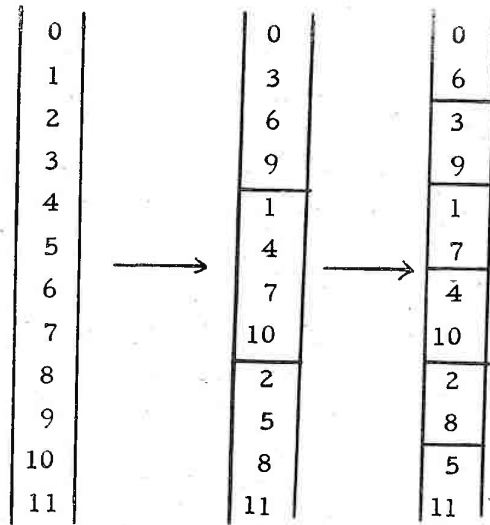
Quelques remarques concernant l'organigramme :

1. En général les valeurs connues de la fonction dont on calcule la transformée de Fourier sont réelles. Mais les résultats des différentes étapes sont complexes. Aussi les données et les résultats successifs seront rangés dans un tableau X de N éléments réels pour la partie réelle et dans un tableau Y de même dimension pour la partie imaginaire.

2. Réarrangement des données

Les données sont notées $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$. Nous avons vu plus haut qu'il est nécessaire de les réordonner.

Pour $N = 2 \times 2 \times 3$, voici quels sont les changements de position des données au cours des décompositions successives:



1 suite de 2x2x3 termes 3 suites de 2x2 termes 3x2 suites de 2 termes

puis 3 x 2 x 2 suites de 1 terme.

Plus généralement, une donnée à la position $k A_n + r_n$, où $k = 0, 1, \dots, N/A_n - 1$ et $r_n = 0, 1, \dots, A_n - 1$, se placera en $r_n \frac{N}{A_n} + k$ après la décomposition de la suite initiale en A_n sous-suites de N/A_n points. En effet les premiers termes de ces sous-suites se placent en $r_n \frac{N}{A_n}$, r_n caractérisant l'ordre de la sous-suite dans l'ensemble des sous-suites ; k indique la position de la donnée dans la sous-suite considérée.

A l'étape suivante, c'est-à-dire lors de la décomposition de chacune des A_n suites de N/A_n points en A_{n-1} sous-suites de $N/A_n A_{n-1}$ points, le terme de position $k A_n A_{n-1} + A_n r_{n-1} + r_n$, où $k = 0, 1, \dots, N/A_n A_{n-1} - 1$ et $r_{n-1} = 0, 1, \dots, A_{n-1} - 1$, ira en $r_n \frac{N}{A_n} + r_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}} + k$:

- $r_n \frac{N}{A_n}$ caractérise la suite de N/A_n éléments à laquelle appartient la donnée considérée ;

- $r_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}}$ caractérise l'ordre de la sous-suite de $N/A_n A_{n-1}$ termes dans la suite précédente.

- k indique la position de la donnée dans cette sous-suite.

En fin de processus le terme de position

$$r_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 + r_2 A_n \dots A_3 + \dots + r_{n-1} A_n + r_n$$

où $r_i = 0, 1, \dots, A_i - 1$ pour $i = 1$ à n , sera en position

$$r_n \frac{N}{A_n} + r_{n-1} \frac{N}{A_n A_{n-1}} + \dots + r_2 \frac{N}{A_n \dots A_2} + r_1$$

r_n est le reste de la division de $r_1 A_n A_{n-1} \dots A_2 + \dots + r_{n-1} A_n + r_n$ par A_n

r_{n-1} est le reste de la division de ce même nombre par $A_n A_{n-1}$, etc...

Pour obtenir les $r_n, r_{n-1}, \dots, r_1$, il suffit d'effectuer n divisions sur ce nombre.

3. - Un indice I (qui correspond à i de la théorie), variant de 1 à M (correspondant à n) décrira les étapes du processus.

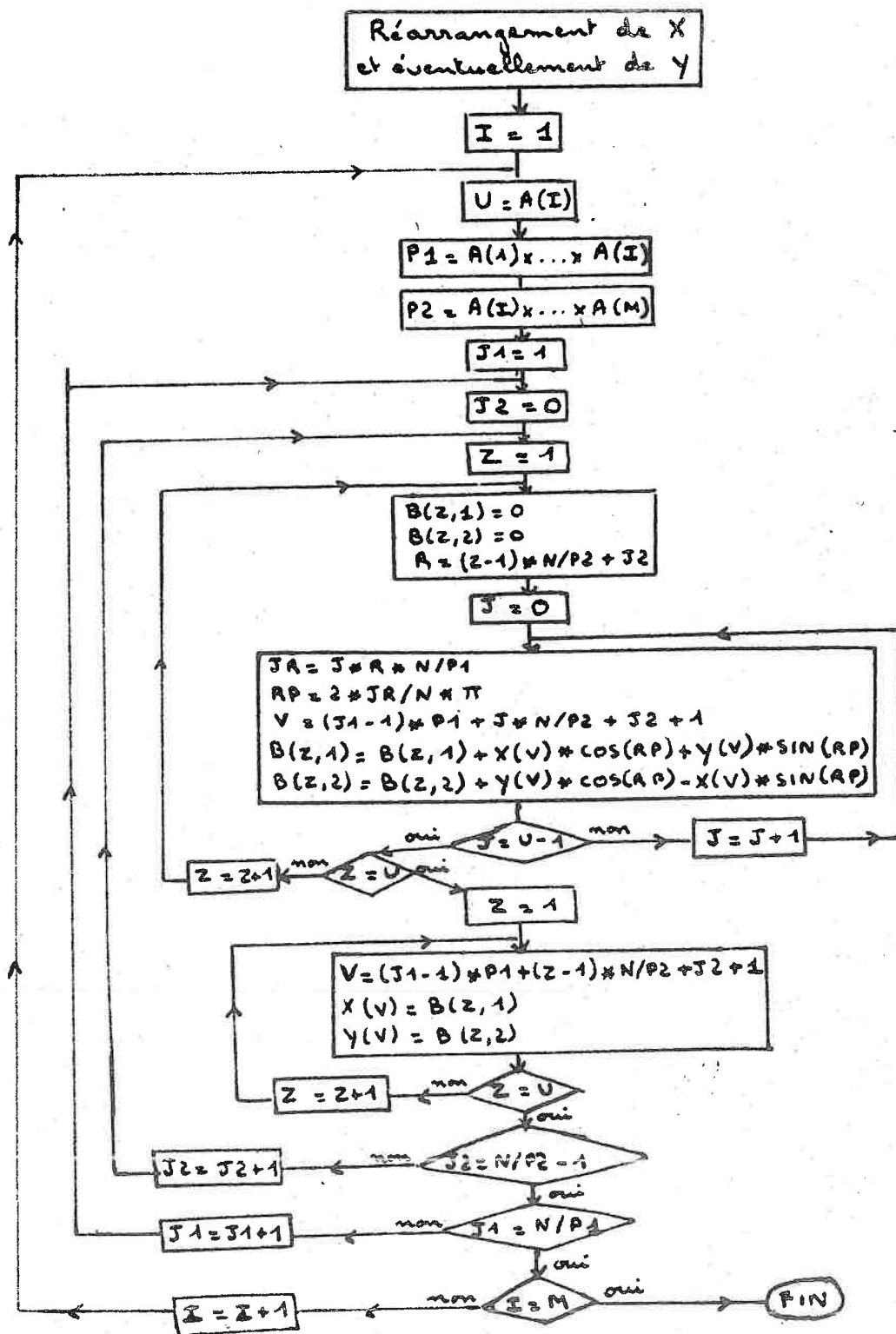
- L'indice $J1$ variant de 1 à $N/A(I) \dots A(1)$ correspond au nombre de suites à chaque étape.

- Dans chaque suite les termes sont calculés $A(I)$ par $A(I)$ (première boucle de l'organigramme indexée par Z) à l'aide de $A(I)$ termes de l'étape précédente (boucle indexée par J), puis rangés à la même place (deuxième boucle indexée par Z). Or dans chaque suite il y a

$\frac{N}{A(M) \dots A(I+1)}$ termes ; par conséquent $\frac{N}{A(M) \dots A(I+1) A(I)}$ phases seront nécessaires pour le calcul de tous les termes d'une suite (boucle indexée par $J2$)

4. Nous avons vu qu'à l'étape i , nous avons besoin d'un tableau auxiliaire de A_i termes complexes. Pour l'ensemble du calcul nous utiliserons un seul tableau auxiliaire B de u éléments, avec $u = \sup_{i=1, \dots, n} A_i$:

Organigramme du sous-programme FET (x, y, A, M, N)



V - CONCLUSION

L'étude théorique de la transformée de Fourier rapide nous a montré qu'elle présente - par rapport à une méthode directe - un gain de temps qui peut être considérable et un gain de précision, sans nécessiter plus de place en mémoire. Nous pourrions mieux apprécier ces avantages par l'application à quelques exemples.

CHAPITRE III

RESULTATS

Dans ce chapitre, nous allons étudier les résultats numériques obtenus par la transformée de Fourier rapide. Pour cela, nous appliquerons la méthode à des fonctions dont la transformée de Fourier est connue mathématiquement. Si les résultats sont satisfaisants, les avantages théoriques observés dans le chapitre précédent prendront alors toute leur importance.

Problèmes posés par la méthode au niveau de l'application numérique.

Ce sont en fait les problèmes posés par la définition de la transformée de Fourier discrète, à partir de laquelle est construite la théorie de la transformée de Fourier rapide.

1. Au premier chapitre, nous avons vu que nous ne pouvons calculer numériquement qu'une valeur approchée,

$\int_A^B X(t) e^{-2i\pi ft} dt$, de la transformée de Fourier de la fonction $X(t)$. En partageant l'intervalle $[A, B]$ en N intervalles de longueur Δt , nous avons écrit cette valeur approchée :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\Delta t - C\Delta t}^{(k+1)\Delta t - C\Delta t} X(t) e^{-2i\pi ft} dt = \int_{-C\Delta t}^{N\Delta t - C\Delta t} X(t) e^{-2i\pi ft} dt$$

où C est une constante quelconque.

L'intervalle $[-C\Delta t, N\Delta t - C\Delta t]$ devra être tel que l'on puisse admettre sans erreur notable que la fonction $X(t)$ est nulle en dehors de cet intervalle.

2. Nous avons ensuite approché, pour chaque valeur de f , la fonction $X(t) e^{-2i\pi ft}$ par une fonction en escalier en la considérant comme constante sur chaque intervalle de longueur Δt . Après avoir fixé la longueur $L = N\Delta t$ de l'intervalle sur lequel sera calculé l'intégrale définissant la transformée de Fourier, il faudra choisir N et Δt tels que l'approximation de la fonction $X(t) e^{-2i\pi ft}$ soit la meilleure possible.

3. D'autre part, si la fonction $X(t)$ est connue en N points équidistants de Δt , sa transformée de Fourier discrète sera périodique, de période $\frac{1}{\Delta t}$, et pourra être calculée en N points équidistants de $\frac{1}{N\Delta t}$.

Par conséquent, le choix de N et de Δt détermine à la fois la "définition" de la fonction et la "définition" de sa transformée. Ce choix dépendra de la fonction considérée. Comme la transformée ne sera définie que sur un intervalle de longueur $\frac{1}{\Delta t}$, il faudra pouvoir admettre qu'elle est nulle en dehors de cet intervalle.

Premier exemple.

Nous avons considéré tout d'abord la fonction

$$X(t) = e^{-\pi t^2}, \quad t \in]-\infty, +\infty[.$$

C'est une fonction paire. Sa transformée de Fourier l'est donc aussi, et elle nous est connue :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi t f} dt = e^{-\pi f^2}$$

Nous avons défini de la même manière la fonction et sa transformée sur l'intervalle $[-5, +5]$ en prenant $\Delta t = 10^{-1}$ et $N = 100$.

Le choix de l'intervalle $[-5, +5]$ est convenable puisque $e^{-\pi(5)^2} \approx 0,77 \times 10^{-34}$. L'erreur systématique due au fait que l'intervalle d'intégration $]-\infty, +\infty[$ est remplacé par $[-5, +5]$ est négligeable car

$$\left| \int_5^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi t f} dt \right| \leq \int_5^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$$

intégrale dont la valeur est très faible. Ce n'est qu'au moyen des résultats que nous verrons si la valeur de Δt est suffisante.

Sur les pages 29 et 30 figurent les résultats en simple précision sur l'intervalle $[0, 5]$; les résultats sur $[-5, 0]$ sont obtenus par symétrie. Pour chaque abscisse sont données :

- dans une colonne, la valeur de la transformée calculée par la méthode de la transformée de Fourier rapide : partie réelle et au-dessous partie imaginaire ;

- dans la colonne suivante, la valeur de la partie réelle calculée à partir de l'expression mathématique de la transformée de Fourier, la partie imaginaire étant nulle ;

- dans la dernière colonne, la différence : valeur FFT - valeur exacte.

Compte-tenu des erreurs de chute, les résultats obtenus sont bons. La partie imaginaire est inférieure à 8×10^{-7} et peut donc être considérée comme nulle. L'erreur sur la partie réelle est du même ordre de grandeur. Il est à noter que dès que la valeur exacte atteint 10^{-6} , 10^{-7} , c'est-à-dire est de l'ordre de l'erreur, les résultats n'ont aucun sens : ceci se produit vers le point d'abscisse 2. En fait on ne perd pas d'information sur la définition de la transformée car $e^{-\pi(2)^2} \approx 3,5 \times 10^{-6}$ et on peut donc admettre que la fonction $e^{-\pi f^2}$ est nulle pour $f \geq 2$.

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
•000	•99999946E 00 •00000000E 00	•10000000E 01	-•53644180E-06
•100	•96907181E 00 •21457674E-06	•96907258E 00	-•77486038E-06
•200	•88191032E 00 •89406967E-07	•88191175E 00	-•14305115E-05
•300	•75371283E 00 •44703489E-06	•75371289E 00	-•59604645E-07
•400	•60492146E 00 •76890007E-06	•60492265E 00	-•11920929E-05
•500	•45593786E 00 •35762795E-07	•45593822E 00	-•35762787E-06
•600	•32271898E 00 •38743028E-07	•32271928E 00	-•29802322E-06
•700	•21451408E 00 •16093259E-06	•21451408E 00	•00000000E 00
•800	•13390553E 00 •16950071E-06	•13390577E 00	-•23841858E-06
•900	•78496933E-01 •11846424E-06	•78497350E-01	-•41723251E-06
1•000	•43214042E-01 •47683727E-07	•43213923E-01	•11920929E-06
1•100	•22341058E-01 •10132794E-06	•22341236E-01	-•17881393E-06
1•200	•10846853E-01 •71525562E-07	•10846753E-01	•10058284E-06
1•300	•49451478E-02 •77486106E-07	•49454644E-02	-•31664968E-06
1•400	•21171991E-02 •11324886E-06	•21175067E-02	-•30756928E-06
1•500	•85129752E-03 •47683727E-07	•85143861E-03	-•14109537E-06
1•600	•32114377E-03 •19073491E-06	•32151397E-03	-•37020072E-06
1•700	•11392834E-03 •28610236E-06	•11401305E-03	-•84706699E-07
1•800	•37658217E-04 •95367454E-07	•37968610E-04	-•31039235E-06
1•900	•11193754E-04 •95367454E-07	•11874194E-04	-•68043937E-06
2•000	•28669838E-05 •47683727E-06	•34873383E-05	-•62035451E-06
2•100	•53644192E-06 •00000000E 00	•96184249E-06	-•42540057E-06
2•200	•36358847E-06 •28610236E-06	•24912663E-06	-•61271510E-06
2•300	•75101872E-06 •19073491E-06	•60597984E-07	-•81161670E-06
2•400	•75101872E-06 •19073491E-06	•13841902E-07	-•76486060E-06

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
2.500	-.14901167E-06 .29802329E-07	.29692719E-08	-.15198088E-06
2.600	-.10132794E-06 -.15497216E-06	.59816663E-09	-.10192610E-06
2.700	.59604659E-08 -.59604659E-08	.11316137E-09	.58473013E-08
2.800	-.19669540E-06 -.65565132E-07	.20104737E-10	-.19671546E-06
2.900	-.20265588E-06 -.95367454E-07	.33543064E-11	-.20265924E-06
3.000	-.11324886E-06 .11920932E-07	.52555432E-12	-.11324937E-06
3.100	-.17285356E-06 -.17881398E-07	.77330449E-13	-.17285362E-06
3.200	-.13113026E-06 .83446480E-07	.10685463E-13	-.13113026E-06
3.300	-.19669540E-06 -.77486106E-07	.13865889E-14	-.19669540E-06
3.400	-.29206285E-06 -.11324886E-06	.16897116E-15	-.29206285E-06
3.500	-.17881399E-06 .47683727E-07	.19336981E-16	-.17881399E-06
3.600	-.40531171E-06 .17285350E-06	.20782053E-17	-.40531171E-06
3.700	-.95367454E-07 .17881398E-07	.20974545E-18	-.95367454E-07
3.800	-.85830709E-06 .28610236E-06	.19879884E-19	-.85830709E-06
3.900	-.57220473E-06 .00000000E-00	.17694550E-20	-.57220473E-06
4.000	-.85830709E-06 .28610236E-06	.14790271E-21	-.85830709E-06
4.100	-.57220473E-06 -.19073491E-06	.11610650E-22	-.57220473E-06
4.200	-.66757218E-06 .28610236E-06	.85589594E-24	-.66757218E-06
4.300	-.19073491E-06 -.33974658E-06	.59251096E-25	-.19073491E-06
4.400	-.64373035E-06 -.25630004E-06	.38520848E-26	-.64373035E-06
4.500	-.23841864E-06 -.53644193E-07	.23516876E-27	-.23841864E-06
4.600	-.95367454E-07 -.89407024E-07	.13483857E-28	-.95367454E-07
4.700	.29802329E-07 -.23841864E-07	.72599434E-30	.29802329E-07
4.800	.59604659E-08 -.83446537E-07	.36710935E-31	.59604659E-08
4.900	.53644193E-07 -.13709075E-06	.17431281E-32	.53644193E-07
5.000	.13113021E-06 .18883721E-07	.77730907E-34	.13113021E-06

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
.000	.99999994D 00 .00000000D 00	.10000000D 01	-.55132892D-07
.100	.96907237D 00 -.33569656D-06	.96907242D 00	-.53427824D-07
.200	.88191144D 00 -.27086210D-06	.88191137D 00	.78168455D-07
.300	.75371332D 00 -.48754695D-06	.75371319D 00	.13011545D-06
.400	.60492269D 00 -.17491037D-06	.60492253D 00	.16571773D-06
.500	.45593810D 00 -.12431276D-06	.45593809D 00	.13859283D-07
.600	.32271915D 00 -.32235365D-07	.32271894D 00	.20765939D-06
.700	.21451411D 00 -.11501023D-06	.21451394D 00	.17800640D-06
.800	.13390586D 00 -.14040339D-07	.13390569D 00	.16528131D-06
.900	.78497507D-01 -.22102816D-07	.78497356D-01	.15004768D-06
1.000	.43214000D-01 .35104715D-07	.43213903D-01	.96911126D-07
1.100	.22341178D-01 .17079590D-07	.22341094D-01	.84271317D-07
1.200	.10846783D-01 .13329762D-07	.10846705D-01	.77473096D-07
1.300	.49455008D-02 .28516609D-08	.49454260D-02	.74783614D-07
1.400	.21176581D-02 .65440453D-07	.21174933D-02	.16479657D-06
1.500	.85151171D-03 .24167086D-08	.85143768D-03	.74035078D-07
1.600	.32158726D-03 .77887619D-08	.32151123D-03	.76031263D-07
1.700	.11409069D-03 .16394112D-07	.11401235D-03	.78340871D-07
1.800	.38106075D-04 .61553868D-07	.37968210D-04	.13786458D-06
1.900	.12006733D-04 .71963506D-07	.11874103D-04	.13262957D-06
2.000	.35827056D-05 .69281280D-07	.34873375D-05	.95368104D-07
2.100	.10542453D-05 .67139471D-07	.96183287D-06	.92412381D-07
2.200	.37691565D-06 .95744031D-07	.24912523D-06	.12779042D-06
2.300	.17333165D-06 .86867539D-07	.60596605D-07	.11273504D-06
2.400	.10978244D-06 .76573497D-07	.13841761D-07	.95940675D-07
2.500	-.24368354D-07 .66525422D-07	.29692506D-08	-.27337605D-07

Nous présentons aussi les résultats en double précision sur l'intervalle $[0, 2.5]$. Nous pouvons remarquer une amélioration.

Nous avons ensuite défini la fonction $X(t)$ sur l'intervalle $[-2.5, +2.5]$ avec $\Delta t = 10^{-1}$ et $N = 50$, ce qui est suffisant puisque $X(2.5) \approx 3 \times 10^{-9}$. Effectivement, les résultats obtenus sont satisfaisants (page suivante) ; le fait de prendre $N = 100$ ne peut que contribuer à augmenter la part des erreurs de chute. A la suite de ces résultats, figurent les valeurs de la transformée de Fourier de la fonction $X(t)$ obtenues avec $\Delta t = 0,25$; nous constatons que les résultats sont encore très valables.

Sur cet exemple particulièrement favorable, nous allons confirmer numériquement les avantages qui étaient apparus lors de l'étude théorique de la transformée de Fourier rapide.

Vérification des avantages de la transformée de Fourier rapide

1. Le fait que la méthode n'exige pas plus de place en mémoire qu'une méthode directe de calcul de la transformée de Fourier discrète a été mis en valeur au moment de l'établissement de l'organigramme.

2. Nous avons vu dans le chapitre précédent que si $N = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, les temps de calcul par les deux méthodes (rapide et directe) sont dans le rapport $\sum_{i=1}^n A_i / N$.

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
•000	•99999946E 00 •00000000E 00	•10000000E 01	-•53644180E-06
•200	•88191068E 00 •11920932E-07	•88191175E 00	-•10728836E-05
•400	•60492146E 00 •76890007E-06	•60492265E 00	-•11920929E-05
•600	•32271874E 00 •10691588E-06	•32271928E 00	-•53644180E-06
•800	•13390553E 00 •16950071E-06	•13390577E 00	-•23841858E-06
1.000	•43213941E-01 •11920932E-07	•43213923E-01	•18626451E-07
1.200	•10846853E-01 •71525562E-07	•10846753E-01	•10058284E-06
1.400	•21171335E-02 •14305118E-06	•21175067E-02	-•37322752E-06
1.600	•32114377E-03 •19073491E-06	•32151397E-03	-•37020072E-06
1.800	•37950274E-04 •95367454E-07	•37968610E-04	-•18335413E-07
2.000	•28669838E-05 •47683727E-06	•34873383E-05	-•62035451E-06
2.200	•16689307E-06 •00000000E 00	•24912663E-06	-•41601970E-06
2.400	•75101872E-06 •19073491E-06	•13841902E-07	-•76486060E-06
2.600	•95367454E-07 •18477448E-06	•59816663E-09	-•95965618E-07
2.800	•19669540E-06 •65565132E-07	•20104737E-10	-•19671546E-06
3.000	•12889512E-06 •29802329E-07	•52555432E-12	-•12889564E-06
3.200	•13113026E-06 •83446480E-07	•10685463E-13	-•13113026E-06
3.400	•28014193E-06 •13709075E-06	•16897116E-15	-•28014193E-06
3.600	•40531171E-06 •17285350E-06	•20782053E-17	-•40531171E-06
3.800	•57220473E-06 •00000000E 00	•19879884E-19	-•57220473E-06
4.000	•35830709E-06 •28610236E-06	•14790271E-21	-•85830709E-06
4.200	•47683727E-06 •95367454E-07	•85589594E-24	-•47683727E-06
4.400	•64373035E-06 •25630004E-06	•38520848E-26	-•64373035E-06
4.600	•47683727E-07 •11920935E-06	•13483857E-28	-•47683727E-07
4.800	•59604659E-08 •83446537E-07	•36710935E-31	•59604659E-08
5.000	•13113021E-06 •92043280E-08	•77730907E-34	•13113021E-06

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
.000	.99999952E 00 .00000000E 00	.10000000E 01	-.47683716E-06
.100	.96907187E 00 -.89406967E-07	.96907258E 00	-.71525574E-06
.200	.88191080E 00 .74505806E-07	.88191175E 00	-.95367432E-06
.300	.75371289E 00 -.17881393E-06	.75371289E 00	.00000000E 00
.400	.60492206E 00 -.44703484E-07	.60492265E 00	-.59604645E-06
.500	.45593739E 00 -.17881393E-06	.45593822E 00	-.83446503E-06
.600	.32271838E 00 .26822090E-06	.32271928E 00	-.89406967E-06
.700	.21451342E 00 -.19371510E-06	.21451408E 00	-.65565109E-06
.800	.13390493E 00 .14901161E-06	.13390577E 00	-.83446503E-06
.900	.78496397E-01 .44703484E-07	.78497350E-01	-.95367432E-06
1.000	.43213829E-01 .59604645E-07	.43213923E-01	-.93132257E-07
1.100	.22341251E-01 -.29802322E-06	.22341236E-01	.14901161E-07
1.200	.10846913E-01 -.11920929E-06	.10846753E-01	.16018748E-06
1.300	.49453676E-02 -.22351742E-06	.49454644E-02	-.96857548E-07
1.400	.21176487E-02 .10430813E-06	.21175067E-02	.14202669E-06
1.500	.85143745E-03 .13411045E-06	.85143861E-03	-.11641532E-08
1.600	.32101572E-03 .74505806E-07	.32151397E-03	-.49825758E-06
1.700	.11380017E-03 .14901161E-07	.11401305E-03	-.21287997E-06
1.800	.37334048E-04 -.10430813E-06	.37968610E-04	-.13456156E-06
1.900	.12755394E-04 -.25331974E-06	.11874194E-04	.88120032E-06
2.000	.70035458E-05 .70218050E-07	.34873383E-05	.35162075E-05

Nous donnons dans le tableau ci-dessous les temps d'exécution sur ordinateur CII 10 070 pour différentes valeurs de N :

N	$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$	temps FFT en minutes	temps m-directe	temps FFT/ " m-direc.	$\sum A_i/N$
100	$2 \times 2 \times 5 \times 5$	0,016	0,098	0,163	0,140
150	$2 \times 3 \times 5 \times 5$	0,025	} 0,214	0,116	0,100
150	$2 \times 3 \times 2 \times 5$	0,048		0,224	0,200
200	$2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$	0,035	0,374	0,093	0,080
800	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$	0,155	5,932	0,026	0,025

Nous constatons que le rapport $\frac{\text{temps FFT}}{\text{temps méthode directe}}$ est supérieur au rapport $\sum A_i/N$. Cette différence s'explique ainsi :

- d'une part, la phase de réarrangement des données dans le cas de la méthode rapide est comptée dans le temps d'exécution ;

- d'autre part, nous indiquons en fait, dans les deux cas, le temps total d'exécution du programme qui fait appel au sous-programme de calcul de la transformée de Fourier, et de ce sous-programme. Quand le temps de calcul est plus important, c'est-à-dire quand N devient grand, le temps d'exécution du programme est négligeable devant celui du sous-programme.

Remarque. Dans la décomposition de N, on peut remplacer 2×2 par 4 : la valeur de $\sum_{i=1}^n A_i$ reste inchangée. Nous avons d'ailleurs vérifié que les temps d'exécution sont identiques.

3. Une autre conséquence du nombre moindre des opérations dans le méthode de calcul rapide est la réduction des erreurs de chute. Les résultats obtenus sont de ce fait plus précis. Mais ceci ne peut apparaître nettement qu'après un nombre élevé d'opérations, c'est-à-dire avec N grand.

A la page suivante figurent quelques résultats obtenus avec $N = 3000$ et $\Delta t = 10^{-2}$, toujours pour le calcul de la transformée de Fourier de la fonction $e^{-\pi t^2}$. La valeur obtenue par la méthode rapide est notée VR ; celle donnée par la méthode directe est notée VD ; enfin la valeur VE est calculée à partir de l'expression mathématique de la transformée de Fourier.

ASCISE

VR-VE

VD-VE

.000	--.65565109E-06	--.18000603E-04
.033	--.53644180E-06	--.17940998E-04
.067	--.16093254E-05	--.18119812E-04
.100	--.77486038E-06	--.16987324E-04
.133	--.20861626E-05	--.16272068E-04
.167	--.11920929E-05	--.18119812E-04
.200	--.16689301E-05	--.18477440E-04
.233	--.13709068E-05	--.18417835E-04
.267	--.11324883E-05	--.19490719E-04
.300	--.35762787E-06	--.16033649E-04
.333	--.14901161E-05	--.16748905E-04
.367	--.12516975E-05	--.16331673E-04
.400	--.83446503E-06	--.14603138E-04
.433	--.12516975E-05	--.14245510E-04
.467	--.83446503E-06	--.15974045E-04
.500	--.83446503E-06	--.14543533E-04
.533	--.12516975E-05	--.15735626E-04
.567	--.65565109E-06	--.14662743E-04
.600	--.89406967E-06	--.14781952E-04
.633	--.10728836E-05	--.11861324E-04
.667	--.47683716E-06	--.15377998E-04
.700	--.11324883E-05	--.15318394E-04
.733	--.11920929E-05	--.14722347E-04
.767	--.89406967E-06	--.56028366E-05
.800	--.53644180E-06	--.47087669E-05
.833	--.65565109E-06	--.33974648E-05
.867	--.71525574E-06	--.36358833E-05
.900	--.65565109E-06	--.19669533E-05
.933	--.71525574E-06	--.29206276E-05
.967	--.77486038E-06	--.17583370E-05
1.000	.10303342E-06	--.19408762E-05
1.033	--.64074993E-06	--.10803342E-05
1.067	--.39488077E-06	--.13895333E-05
1.100	--.22351742E-06	--.56624413E-06
1.133	--.36880374E-06	--.13597310E-05
1.167	--.14156103E-06	--.42840838E-06
1.200	--.52154064E-07	--.11883676E-05
1.233	--.37997961E-06	--.26822090E-06
1.267	.37252903E-08	--.47311187E-06
1.300	--.63329935E-07	.31664968E-06
1.333	--.23795292E-06	--.54552220E-06
1.367	--.16693957E-06	.43143518E-06
1.400	.97556040E-07	--.54435804E-06
1.433	--.18673018E-06	.32945536E-06
1.467	--.82422048E-07	--.41490421E-06
1.500	--.79860911E-07	.43329763E-06
1.533	--.23073517E-06	--.39581209E-06
1.567	--.12316741E-06	.41746534E-06
1.600	--.11478551E-06	--.47124922E-06
1.633	--.71522663E-07	.47143840E-06

La diminution des erreurs de chute doit se traduire par :

$$|VR - VE| < |VD - VE|.$$

C'est ce que nous constatons en général.

Deuxième exemple

Nous avons choisi comme deuxième exemple d'application la fonction

$$X(t) = t e^{-t} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Nous connaissons mathématiquement sa transformée de Fourier :

$$\int_0^{+\infty} t e^{-t} e^{-2i\pi f t} dt = \frac{1 - 4\pi^2 f^2 - 4i\pi f}{(1 + 4\pi^2 f^2)^2}$$

Pour la calculer numériquement, nous avons d'abord essayé les valeurs $N = 400$ et $\Delta t = 10^{-1}$. L'intervalle de définition de la fonction $X(t)$ était convenable ; mais les résultats obtenus ne nous ont pas semblé acceptables au moins pour la partie réelle, l'erreur observée étant alors de l'ordre de 10^{-3} .

Nous avons ensuite pris $N = 4000$ et $\Delta t = 10^{-2}$. Une partie des résultats est présentée sur les deux pages suivantes : l'erreur obtenue est de l'ordre de 10^{-5} pour la partie réelle, plus faible pour la partie imaginaire, ce qui est satisfaisant.

Troisième exemple.

Nous envisageons maintenant le cas d'une fonction moins "régulière" que celles considérées précédemment et dont la "définition" sera plus délicate :

$$X(t) = e^{-t} \quad \text{pour } t \geq 0$$

Sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-2i\pi f t} dt = \frac{1 - 2i\pi f}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

Nous avons appliqué la méthode de la transformée de Fourier rapide à la fonction $X(t)$ avec $N = 4000$ et $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$. L'intervalle sur lequel est définie la fonction est alors $[0, 20]$, ce qui est suffisant puisque $e^{-20} \approx 2 \times 10^{-9}$.

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
•000	•99999022E 00	•10000000E 01	••07751617E-05
	•00000000E 00	•00000000E 00	•00000000E 00
•100	•31108826E 00	•31109744E 00	••91791153E-05
	••64594436E 00	••64594543E 00	•10728836E-05
•200	••87070823E-01	••87062597E-01	••82254410E-05
	••37782496E 00	••37782580E 00	•83446503E-06
•300	••12316388E 00	••12315565E 00	••82254410E-05
	••18185461E 00	••18185508E 00	•47683716E-06
•400	••99323809E-01	••99315584E-01	••82254410E-05
	••93898118E-01	••93898356E-01	•23841858E-06
•500	••75080216E-01	••75071812E-01	••34042549E-05
	••53180266E-01	••53180579E-01	•31292439E-06
•600	••57102311E-01	••57094015E-01	••82962215E-05
	••32581698E-01	••32581851E-01	•15273690E-06
•700	••44329796E-01	••44321422E-01	••83744526E-05
	••21253180E-01	••21252878E-01	••30174851E-06
•800	••35181426E-01	••35172887E-01	••85383654E-05
	••14571089E-01	••14571581E-01	•49173832E-06
•900	••28492905E-01	••28484646E-01	••82589686E-05
	••10399088E-01	••10399602E-01	•51409006E-06
1•000	••23492150E-01	••23483902E-01	••82477927E-05
	••76694861E-02	••76694265E-02	••59604645E-07
1•100	••19672312E-01	••19663978E-01	••83334744E-05
	••58117919E-02	••58118850E-02	•93132257E-07
1•200	••16697060E-01	••16688768E-01	••82924962E-05
	••45060292E-02	••45060962E-02	•67055225E-07
1•300	••14339268E-01	••14330890E-01	••83781779E-05
	••35623075E-02	••35623659E-02	•58440492E-07
1•400	••12441542E-01	••12433164E-01	••83781779E-05
	••28637743E-02	••28638681E-02	•93830749E-07
1•500	••10893110E-01	••10884717E-01	••83930790E-05
	••23359733E-02	••23361084E-02	•13504177E-06
1•600	••96140578E-02	••96057169E-02	••83409250E-05
	••19296794E-02	••19300943E-02	•41490421E-06
1•700	••85458271E-02	••85376687E-02	••81583858E-05
	••16125152E-02	••16127373E-02	•22212043E-06
1•800	••76450817E-02	••76369904E-02	••80913305E-05
	••13610558E-02	••13611577E-02	•10197982E-06
1•900	••68788640E-02	••68707094E-02	••81546605E-05
	••11591455E-02	••11591942E-02	•48661605E-07
2•000	••62218197E-02	••62135272E-02	••82924962E-05
	••99521549E-03	••99521573E-03	•23283064E-09
2•100	••56541897E-02	••56457967E-02	••83930790E-05
	••86068711E-03	••86071179E-03	•24680048E-07
2•200	••51604919E-02	••51520728E-02	••84191561E-05
	••74931537E-03	••74935635E-03	•40978193E-07
2•300	••47285967E-02	••47200955E-02	••85011125E-05
	••65631769E-03	••65638358E-03	•65891072E-07
2•400	••43482631E-02	••43400265E-02	••82366168E-05
	••57792873E-03	••57815644E-03	•22770837E-06
2•500	••40122569E-02	••40039010E-02	••83558261E-05
	••51178038E-03	••51186699E-03	•86612999E-07

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
2.600	..37134285E-02 ..45525678E-03	..37092917E-02 ..45532640E-03	..21998028E-05 ..53616362E-07
2.700	..34468242E-02 ..40674186E-03	..34386597E-02 ..40680612E-03	..81644394E-05 ..64261258E-07
2.800	..32078540E-02 ..36502117E-03	..31997671E-02 ..36493596E-03	..80869067E-05 ..85216016E-07
2.900	..29931813E-02 ..32881717E-03	..29848542E-02 ..32861391E-03	..83271880E-05 ..20326115E-06
3.000	..27992975E-02 ..29701018E-03	..27908334E-02 ..29695290E-03	..84640924E-05 ..57276338E-07
3.100	..26235175E-02 ..26912056E-03	..26150772E-02 ..26922743E-03	..84403437E-05 ..10686927E-06
3.200	..24636625E-02 ..24476135E-03	..24553835E-02 ..24484727E-03	..82789920E-05 ..85914508E-07
3.300	..23181592E-02 ..22329886E-03	..23098504E-02 ..22332220E-03	..83087943E-05 ..23341272E-07
3.400	..21851656E-02 ..20423360E-03	..21768527E-02 ..20424581E-03	..83129853E-05 ..12209057E-07
3.500	..20633172E-02 ..18726874E-03	..20549996E-02 ..18728076E-03	..83176419E-05 ..12019882E-07
3.600	..19514309E-02 ..17215766E-03	..19430767E-02 ..17214226E-03	..83541963E-05 ..15395926E-07
3.700	..18483459E-02 ..15863925E-03	..18400408E-02 ..15859175E-03	..83050691E-05 ..47497451E-07
3.800	..17535184E-02 ..14660708E-03	..17449751E-02 ..14642620E-03	..85432548E-05 ..18088031E-06
3.900	..16658173E-02 ..13593979E-03	..16570757E-02 ..13547277E-03	..87416265E-05 ..46701462E-06
4.000	..15843401E-02 ..12522399E-03	..15756472E-02 ..12558495E-03	..86929649E-05 ..36096026E-06
4.100	..15086220E-02 ..11619031E-03	..15000675E-02 ..11663599E-03	..85544307E-05 ..44568151E-06
4.200	..14321723E-02 ..10831094E-03	..14297874E-02 ..10851669E-03	..83849300E-05 ..20574953E-06
4.300	..13726412E-02 ..10105844E-03	..13643298E-02 ..10113389E-03	..83113555E-05 ..75451680E-07
4.400	..13115171E-02 ..94309507E-04	..13032593E-02 ..94405448E-04	..82578044E-05 ..95940777E-07
4.500	..12544964E-02 ..88215747E-04	..12461955E-02 ..88260756E-04	..83008781E-05 ..45009074E-07
4.600	..12011293E-02 ..82606435E-04	..11927953E-02 ..82637809E-04	..83339401E-05 ..31373929E-07
4.700	..11510935E-02 ..77524091E-04	..11427500E-02 ..77482211E-04	..83434861E-05 ..41880412E-07
4.800	..11041674E-02 ..72708266E-04	..10957872E-02 ..72746669E-04	..83802734E-05 ..38402504E-07
4.900	..10600116E-02 ..68309630E-04	..10516571E-02 ..68389098E-04	..83544292E-05 ..79468009E-07
5.000	..10184911E-02 ..64397216E-04	..10101383E-02 ..64372682E-04	..83527993E-05 ..24534529E-07
5.100	..97942748E-03 ..60630380E-04	..97102905E-03 ..60664635E-04	..83984341E-05 ..34255208E-07

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
•000	•10025005E 01	•10000000E 01	•25005341E-02
	•00000000E 00	•00000000E 00	•00000000E 00
•050	•91267008E 00	•91017002E 00	•25000572E-02
	••28593725E 00	••28593820E 00	•95367432E-06
•100	•71945697E 00	•71695685E 00	•25001168E-02
	••45047534E 00	••45047718E 00	•18477440E-05
•150	•53208792E 00	•52958703E 00	•25008917E-02
	••49912119E 00	••49912399E 00	•28014183E-05
•200	•39022809E 00	•38772684E 00	•25012493E-02
	••48722845E 00	••48723179E 00	•33378601E-05
•250	•29090196E 00	•28840077E 00	•25011897E-02
	••45301455E 00	••45301855E 00	•39935112E-05
•300	•22213441E 00	•21963280E 00	•25016069E-02
	••41399330E 00	••41399789E 00	•45895576E-05
•350	•17384863E 00	•17134738E 00	•25012493E-02
	••37680691E 00	••37681222E 00	•53048134E-05
•400	•13917810E 00	•13667655E 00	•25015473E-02
	••34349984E 00	••34350562E 00	•57816505E-05
•450	•11368221E 00	•11118048E 00	•25017262E-02
	••31434923E 00	••31435555E 00	•63180923E-05
•500	•94501376E-01	•91999710E-01	•25016665E-02
	••28901839E 00	••28902560E 00	•72121620E-05
•550	•79768419E-01	•77266455E-01	•25019646E-02
	••26700622E 00	••26701385E 00	•76293945E-05
•600	•68238497E-01	•65736592E-01	•25019050E-02
	••24781269E 00	••24782109E 00	•84042549E-05
•650	•59064273E-01	•56562278E-01	•25019944E-02
	••23099542E 00	••23100430E 00	•88810921E-05
•700	•51655509E-01	•49153559E-01	•25019497E-02
	••21617877E 00	••21618855E 00	•97751617E-05
•750	•45593064E-01	•43091208E-01	•25018565E-02
	••20305210E 00	••20306247E 00	•10371208E-04
•800	•40573653E-01	•38071800E-01	•25018528E-02
	••19135863E 00	••19136965E 00	•11026859E-04
•850	•36373615E-01	•33871725E-01	•25018901E-02
	••18088746E 00	••18089896E 00	•11503696E-04
•900	•32825515E-01	•30323695E-01	•25018193E-02
	••17146415E 00	••17147642E 00	•12278557E-04
•950	•29802550E-01	•27300589E-01	•25019608E-02
	••16294503E 00	••16295791E 00	•12874603E-04
1•000	•27206436E-01	•24704527E-01	•25019087E-02
	••15520966E 00	••15522307E 00	•13411045E-04
1•050	•24961211E-01	•22459324E-01	•25018863E-02
	••14815813E 00	••14817184E 00	•13709068E-04
1•100	•23004734E-01	•20504881E-01	•25018528E-02
	••14170492E 00	••14171952E 00	•14603138E-04
1•150	•21295212E-01	•18793397E-01	•25018156E-02
	••13577950E 00	••13579470E 00	•15199184E-04
1•200	•19788217E-01	•17286409E-01	•25018081E-02
	••13032049E 00	••13033640E 00	•15914440E-04

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
1.250	.18454567E-01	.15952770E-01	.25017969E-02
	-.12527621E 00	-.12529278E 00	.16570091E-04
1.300	.17268829E-01	.14767010E-01	.25018193E-02
	-.12060183E 00	-.12061900E 00	.17166138E-04
1.350	.16209923E-01	.13708126E-01	.25017969E-02
	-.11625868E 00	-.11627644E 00	.17762184E-04
1.400	.15260495E-01	.12758736E-01	.25017597E-02
	-.11221331E 00	-.11223167E 00	.18358231E-04
1.450	.14406279E-01	.11904284E-01	.25019944E-02
	-.10843599E 00	-.10845536E 00	.19371510E-04
1.500	.13634607E-01	.11132579E-01	.25020279E-02
	-.10490197E 00	-.10492206E 00	.20086765E-04
1.550	.12934614E-01	.10433305E-01	.25013089E-02
	-.10158843E 00	-.10160929E 00	.20861626E-04
1.600	.12299549E-01	.97977035E-02	.25018454E-02
	-.98475575E-01	-.98497212E-01	.21636486E-04
1.650	.11720013E-01	.92182904E-02	.25017224E-02
	-.95546246E-01	-.95568359E-01	.22113323E-04
1.700	.11190716E-01	.86886510E-02	.25020652E-02
	-.92784286E-01	-.92807114E-01	.22828579E-04
1.750	.10705538E-01	.82032681E-02	.25022700E-02
	-.90176463E-01	-.90199590E-01	.23126602E-04
1.800	.10259502E-01	.77573434E-02	.25021583E-02
	-.87709367E-01	-.87733507E-01	.24139881E-04
1.850	.98489039E-02	.73467344E-02	.25021695E-02
	-.85373223E-01	-.85397661E-01	.24437904E-04
1.900	.94699822E-02	.69678091E-02	.25021732E-02
	-.83156884E-01	-.83182096E-01	.25212765E-04
1.950	.91194622E-02	.66174008E-02	.25020614E-02
	-.81052125E-01	-.81077814E-01	.25689602E-04
2.000	.87948665E-02	.62927231E-02	.25021434E-02
	-.79050481E-01	-.79076707E-01	.26226044E-04
2.050	.84933005E-02	.59913211E-02	.25019795E-02
	-.77144563E-01	-.77171385E-01	.26822090E-04
2.100	.82129911E-02	.57110265E-02	.25019646E-02
	-.75327694E-01	-.75355232E-01	.27537346E-04
2.150	.79520158E-02	.54499172E-02	.25020987E-02
	-.73593915E-01	-.73622108E-01	.28192997E-04
2.200	.77083260E-02	.52062832E-02	.25020428E-02
	-.71937621E-01	-.71966469E-01	.28848648E-04
2.250	.74806623E-02	.49786009E-02	.25020614E-02
	-.70353866E-01	-.70383310E-01	.29444695E-04
2.300	.72675496E-02	.47655143E-02	.25020353E-02
	-.68837702E-01	-.68868041E-01	.30338764E-04
2.350	.70678219E-02	.45658015E-02	.25020204E-02
	-.67385495E-01	-.67416251E-01	.30755997E-04
2.400	.68805292E-02	.43783635E-02	.25021657E-02
	-.65992653E-01	-.66024184E-01	.31530857E-04
2.450	.67042597E-02	.4202243E-02	.25020353E-02
	-.64656079E-01	-.64688206E-01	.32126904E-04

Mais nous avons obtenu des résultats médiocres (pages 40 et 41).

Nous avons alors cherché à améliorer l'approximation de la fonction $X(t) e^{-2i\pi ft}$, non pas en jouant sur la valeur de Δt , mais en changeant la nature de la fonction d'approche.

Or nous avons écrit (chapitre I, paragraphe I) :

$$\int_{k\Delta t - C\Delta t}^{(k+1)\Delta t - C\Delta t} X(t) e^{-2i\pi ft} dt = \Delta t X(t_k) e^{-2i\pi ft_k} \quad \text{où } t_k = \Delta t (k-C),$$

ce qui revient, lorsqu'on calcule la transformée de Fourier de $X(t)$ sous la forme

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\Delta t - C\Delta t}^{(k+1)\Delta t - C\Delta t} X(t) e^{-2i\pi ft} dt$$

à approcher $X(t) e^{-2i\pi ft}$ par une fonction en escalier.

Nous avons donc considéré d'autres méthodes d'intégration numérique pour le calcul des intégrales partielles du type

$$\int_{k\Delta t - C\Delta t}^{(k+1)\Delta t - C\Delta t} X(t) e^{-2i\pi ft} dt.$$

Nous avons d'abord utilisé la méthode des trapèzes qui consiste à remplacer chacune des intégrales partielles par :

$$\Delta t (X(t_k) e^{-2i\pi ft_k} + X(t_{k+1}) e^{-2i\pi ft_{k+1}}) / 2.$$

Nous avons pu noter une nette amélioration des résultats (pages 43 et 44).

Nous avons encore affiné l'approximation par une méthode composite, c'est-à-dire que pour calculer chaque intégrale partielle nous avons interpolé $X(t) e^{-2i\pi ft}$ par un polynôme de degré p sur un intervalle de longueur $p\Delta t$ s'appuyant sur l'intervalle $[k\Delta t - C\Delta t, (k+1)\Delta t - C\Delta t]$.

Remarque. La méthode des trapèzes, comme une méthode composite, revient à pondérer les termes $X(t_k) e^{-2i\pi ft_k}$ dans l'expression de la transformée de Fourier discrète :

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
•000	•10000010E 01 •00000000E 00	•10000000E 01 •00000000E 00	•99999999E-06 •00000000E 00
•050	•91017008E 00 •28593695E 00	•91017002E 00 •28593820E 00	•59604645E-07 •12516975E-05
•100	•71695709E 00 •45047474E 00	•71695685E 00 •45047718E 00	•23841858E-06 •24437904E-05
•150	•52958792E 00 •49912083E 00	•52958703E 00 •49912399E 00	•89406967E-06 •31590462E-05
•200	•38772815E 00 •48722798E 00	•38772684E 00 •48723179E 00	•13113022E-05 •38146973E-05
•250	•28840196E 00 •45301402E 00	•28840077E 00 •45301855E 00	•11920929E-05 •45299530E-05
•300	•21963441E 00 •41399288E 00	•21963280E 00 •41399789E 00	•16093254E-05 •50067902E-05
•350	•17134863E 00 •37680668E 00	•17134738E 00 •37681222E 00	•12516975E-05 •55432320E-05
•400	•13667816E 00 •34349960E 00	•13667655E 00 •34350562E 00	•16093254E-05 •60200691E-05
•450	•11118221E 00 •31434917E 00	•11118048E 00 •31435555E 00	•17285347E-05 •63776970E-05
•500	•92001379E-01 •28901833E 00	•91999710E-01 •28902560E 00	•16689301E-05 •72717667E-05
•550	•77268422E-01 •26700616E 00	•77266455E-01 •26701385E 00	•19669533E-05 •76889992E-05
•600	•65738559E-01 •24781251E 00	•65736592E-01 •24782109E 00	•19669533E-05 •85830688E-05
•650	•56564324E-01 •23099524E 00	•56562278E-01 •23100430E 00	•20451844E-05 •90599060E-05
•700	•49155582E-01 •21617866E 00	•49153559E-01 •21618855E 00	•20228326E-05 •98943710E-05
•750	•43093123E-01 •20305198E 00	•43091208E-01 •20306247E 00	•19147992E-05 •10490417E-04
•800	•38073696E-01 •19135851E 00	•38071800E-01 •19136965E 00	•18961728E-05 •11146069E-04
•850	•33873640E-01 •18088728E 00	•33871725E-01 •18089896E 00	•19147992E-05 •11682510E-04
•900	•30325532E-01 •17146403E 00	•30323695E-01 •17147642E 00	•18365681E-05 •12397766E-04
•950	•27302567E-01 •16294485E 00	•27300589E-01 •16295791E 00	•19781291E-05 •13053417E-04
1•000	•24706446E-01 •15520954E 00	•24704527E-01 •15522307E 00	•19185245E-05 •13530254E-04
1•050	•22461228E-01 •14815795E 00	•22459324E-01 •14817184E 00	•19036233E-05 •13887882E-04
1•100	•20506751E-01 •14170484E 00	•20504881E-01 •14171952E 00	•18700957E-05 •14662743E-04
1•150	•18795270E-01 •13577944E 00	•18793397E-01 •13579470E 00	•18738210E-05 •15258789E-04
1•200	•17288290E-01 •13032043E 00	•17286409E-01 •13033640E 00	•18812716E-05 •15974045E-04

ABSCISSE	VALEUR FFT	VALEUR EXACTE	DIFFERENCE
1.250	.15954603E-01 -.12527615E 00	.15952770E-01 -.12529278E 00	.18328428E-05 .16629696E-04
1.300	.14768887E-01 -.12060183E 00	.14767010E-01 -.12061900E 00	.18775463E-05 .17166138E-04
1.350	.13709955E-01 -.11625862E 00	.13708126E-01 -.11627644E 00	.18291175E-05 .17821789E-04
1.400	.12760568E-01 -.11221325E 00	.12758736E-01 -.11223167E 00	.18328428E-05 .18417835E-04
1.450	.11906333E-01 -.10843599E 00	.11904284E-01 -.10845536E 00	.20489097E-05 .19371510E-04
1.500	.11134714E-01 -.10490191E 00	.11132579E-01 -.10492206E 00	.21345913E-05 .20146370E-04
1.550	.10434780E-01 -.10158855E 00	.10433305E-01 -.10160929E 00	.14752150E-05 .20742416E-04
1.600	.97996779E-02 -.98475754E-01	.97977035E-02 -.98497212E-01	.19744039E-05 .21457672E-04
1.650	.92201158E-02 -.95546305E-01	.92182904E-02 -.95568359E-01	.18253922E-05 .22053719E-04
1.700	.86908489E-02 -.92784286E-01	.86886510E-02 -.92807114E-01	.21979213E-05 .22828579E-04
1.750	.82055852E-02 -.90176404E-01	.82032681E-02 -.90199590E-01	.23171306E-05 .23186207E-04
1.800	.77595264E-02 -.87709308E-01	.77573434E-02 -.87733507E-01	.21830201E-05 .24199486E-04
1.850	.73489249E-02 -.85373163E-01	.73467344E-02 -.85397661E-01	.21904707E-05 .24497509E-04
1.900	.69700256E-02 -.83156824E-01	.69678091E-02 -.83182096E-01	.22165477E-05 .25272369E-04
1.950	.66194981E-02 -.81052065E-01	.66174008E-02 -.81077814E-01	.20973384E-05 .25749207E-04
2.000	.62948801E-02 -.79050362E-01	.62927231E-02 -.79076707E-01	.21569431E-05 .26345253E-04
2.050	.59933290E-02 -.77144504E-01	.59913211E-02 -.77171385E-01	.20079315E-05 .26881695E-04
2.100	.57130009E-02 -.75327635E-01	.57110265E-02 -.75355232E-01	.19744039E-05 .27596951E-04
2.150	.54520369E-02 -.73593855E-01	.54499172E-02 -.73622108E-01	.21196902E-05 .28252602E-04
2.200	.52083507E-02 -.71937561E-01	.52062832E-02 -.71966469E-01	.20675361E-05 .28908253E-04
2.250	.49807020E-02 -.70353806E-01	.49786009E-02 -.70383310E-01	.21010637E-05 .29504299E-04
2.300	.47675893E-02 -.68837702E-01	.47655143E-02 -.68868041E-01	.20749867E-05 .30338764E-04
2.350	.45678318E-02 -.67385435E-01	.45658015E-02 -.67416251E-01	.20302832E-05 .30815601E-04
2.400	.43805577E-02 -.65992594E-01	.43783635E-02 -.66024184E-01	.21941960E-05 .31590462E-04
2.450	.42042695E-02 -.64656019E-01	.42022243E-02 -.64688206E-01	.20451844E-05 .32186508E-04

$$\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} X(t_k) e^{-2i\pi f t_k}$$

est remplacée par

$$\Delta t \sum_{k=0}^{N-1} a_k X(t_k) e^{-2i\pi f t_k}.$$

Il suffit de substituer $a_k X(t_k)$ à $X(t_k)$ avant de calculer la transformée.

En fait, seuls les termes extrêmes sont concernés.

Les premières valeurs de la transformée sont améliorées par une méthode composite. Le tableau suivant permet la comparaison entre les erreurs, sur la partie réelle et sur la partie imaginaire, obtenues par la méthode des trapèzes et par la méthode composite avec $p = 3$ et $p = 5$.

ABSCISSE	METHODE DES TRAPPEZES	METHODE COMPOSITE P=3	METHODE COMPOSITE P=5
0.0	.95367432E-06 .00000000E 00	-.11324883E-05 .00000000E 00	-.10728836E-05 .00000000E 00
0.5	.16689301E-05 .72717667E-05	-.47683716E-06 .65565109E-06	-.47683716E-06 .71525574E-06
1.0	.19185245E-05 .13530254E-04	-.18253922E-06 .41723251E-06	-.18626451E-06 .41723251E-06
1.5	.21345913E-05 .20146370E-04	.18626451E-07 .53644180E-06	.18626451E-07 .53644180E-06
2.0	.21569431E-05 .26345253E-04	.63329935E-07 .17881393E-06	.63329935E-07 .11920929E-06
2.5	.20787120E-05 .32782555E-04	-.14901161E-07 .11920929E-06	-.37252903E-07 .59604645E-07
3.0	.19564759E-05 .39462000E-04	-.11618249E-06 .24959445E-06	-.14272518E-06 .18998981E-06
3.5	.20151492E-05 .45891851E-04	-.61467290E-07 .16763806E-06	-.10104850E-06 .70780516E-07
4.0	.20510051E-05 .52552670E-04	.28172508E-07 .31664968E-06	-.26309863E-07 .17881393E-06
4.5	.20617153E-05 .59053302E-04	.44703484E-07 .33155084E-06	-.36321580E-07 .13411045E-06
5.0	.20083971E-05 .65650791E-04	.59138983E-07 .43213367E-06	-.57742000E-07 .17136335E-06
5.5	.20992011E-05 .72073191E-04	.21047890E-06 .39115548E-06	.47730282E-07 .37252903E-07
6.0	.20416919E-05 .78652054E-04	.23213215E-06 .50663948E-06	.97788870E-08 .55879354E-07
6.5	.20742882E-05 .85245818E-04	.35925768E-06 .65937638E-06	.60768798E-07 .96857548E-07
7.0	.20863954E-05 .91731548E-04	.49010850E-06 .70407987E-06	.10337681E-06 .74505806E-08
7.5	.20759180E-05 .98340213E-04	.62538311E-06 .88289380E-06	.12759119E-06 .44703484E-07
8.0	.18312130E-05 .10511279E-03	.58487058E-06 .12256205E-05	-.50058588E-07 .23096800E-06
8.5	.21362212E-05 .11152029E-03	.10880176E-05 .12293458E-05	.30058436E-06 .59604645E-07
9.0	.21334272E-05 .11807680E-03	.13397075E-05 .13895333E-05	.36647543E-06 .26077032E-07
9.5	.21003652E-05 .12464821E-03	.16090926E-05 .15683472E-05	.42375177E-06 -.37252903E-08
10.0	.21150336E-05 .13113022E-03	.19713771E-05 .16577542E-05	.54016709E-06 -.13038516E-06

Mais pour des abscisses élevées, les résultats sont erronés. En effet pour f assez grand, $e^{-2i\pi ft}$, donc en général $X(t) e^{-2i\pi ft}$, peut varier beaucoup sur chacun des intervalles de longueur Δt . L'approximation de la fonction $X(t) e^{-2i\pi ft}$ par un polynôme, même de degré élevé, est alors défectueuse, car la fonction est insuffisamment définie.

Il faut donc que pour de telles valeurs de f , la transformée de Fourier soit à peu près nulle et ainsi l'allure de la courbe transformée sera conservée. Il suffit pour cela de choisir une valeur de Δt convenable.

Finalement, les erreurs observées sont constituées par :

- les erreurs de chute qui sont amoindries par la transformée de Fourier rapide.
- l'erreur due au fait que nous ne définissons pas la fonction $X(t)$ sur $]-\infty, +\infty[$, mais sur un intervalle borné. Il est possible de réduire cette erreur au moyen d'un intervalle convenable.
- l'erreur due à l'approximation plus ou moins correcte de $X(t) e^{-2i\pi ft}$.

Remarque

L'emploi d'une méthode composite généralisée donnerait de meilleurs résultats. En effet une étude antérieure [3] a montré que dans une méthode composite ordinaire, telle que nous venons de l'utiliser, l'erreur est fortement majorée par rapport à une méthode composite généralisée, qui consiste à interpoler seulement $X(t)$ et à conserver à $e^{-2i\pi ft}$ son écriture mathématique. Il n'y a dans ce cas aucune perte d'information sur $e^{-2i\pi ft}$. De plus, si la fonction $X(t)$ est suffisamment "régulière", la méthode nécessite moins de points, car il suffit de définir seulement cette fonction. Mais la technique de calcul rapide étudiée ici ne peut s'appliquer à une telle méthode.

Cependant, sur le matériel dont nous disposons (CII 10070) nous avons pu atteindre le nombre de points nécessaire pour obtenir des résultats satisfaisants, sans que cela constitue un handicap au point de vue du temps (pour $N = 4500$, le temps d'exécution est d'une minute environ), ni au point de vue de la précision.

En définitive la méthode nous semble avantageuse. C'est pourquoi nous envisageons de l'employer au cours de la résolution de problèmes nécessitant un calcul de transformée de Fourier.

CHAPITRE IV

APPLICATION : RESOLUTION D'UN
PROBLEME DE DECONVOLUTION

I - POSITION DU PROBLEME

Le problème que nous proposons de résoudre est le suivant : connaissant les lois de probabilité de deux variables aléatoires Z et Y , il s'agit de déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X telle que $Z = X + Y$.

Dans l'hypothèse où X et Y sont indépendantes, si nous désignons par

$F(x)$ la fonction de répartition de X ,

$G(y)$ la fonction de répartition de Y ,

$H(z)$ la fonction de répartition de Z ,

$F(x)$ est solution de l'équation de convolution :

$$H(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z-y) dG(y) = \int_{\mathbb{R}} G(z-x) dF(x)$$

Nous sommes ainsi conduits à résoudre un problème de déconvolution particulier.

Nous nous plaçons ici dans le cas où on ne connaît que la loi de probabilité empirique de la variable aléatoire Z et où Y suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type connu. Ceci se présente généralement en pratique lorsque la méthode expérimentale permettant d'obtenir un échantillon de valeurs extraites de la loi de X comporte une erreur Y : on obtient en fait un échantillon de valeurs extraites de la loi de Z .

II - RESOLUTION

Soient :

$\varphi_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itz} dH(z)$ la fonction caractéristique de Z ,

$\varphi_X(t)$ la fonction caractéristique de X ,

$\varphi_Y(t)$ la fonction caractéristique de Y .

L'équation de convolution considérée précédemment est équivalente à

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

La variable aléatoire X est alors définie par sa fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = \varphi_Z(t) / \varphi_Y(t),$$

et sa fonction de répartition est obtenue par inversion de la fonction caractéristique.

Ceci est valable quelle que soit la variable aléatoire X indépendante de Y . Cependant nous ne pouvons pas espérer obtenir ainsi des résultats satisfaisants la fonction $\varphi_Z(t)$ n'est pas connue exactement mais elle est calculée au moyen de réalisations de la variable aléatoire Z , et il s'introduit en outre des erreurs à chaque étape : calcul de $\varphi_Z(t)$, puis calcul de $\varphi_X(t)$ et enfin inversion de $\varphi_X(t)$.

Dans le cas où X est une variable aléatoire absolument continue, une étude de résolution numérique du problème a été faite encore récemment [4].

Maintenant nous supposons que X est une variable aléatoire discrète. Nous allons essayer de donner une solution au problème posé en deux phases :

- nous déterminerons d'abord les x_j tels que $P(X = x_j) \neq 0$
- puis nous préciserons les valeurs $P(X = x_j)$.

Remarque : Z est une variable aléatoire absolument continue.

Soit $g(y)$ la densité de probabilité de Y . C'est une fonction positive ou nulle telle que $\int_R g(y) dy = 1$.

D'autre part, $F(x)$ est une fonction non décroissante telle que $\int_R dF(x) = 1$

Par conséquent le produit de convolution $\int_R g(z-x) dF(x)$ est défini. Or ce n'est autre que la dérivée par rapport à z de $\int_R G(z-x) dF(x)$, et nous savons que

$$H(z) = \int_R G(z-x) dF(x).$$

Donc la dérivée de $H(z)$ existe et la variable aléatoire Z admet une densité de probabilité.

II.1 Détermination des points de probabilité non nulle

En pratique on connaît n valeurs indépendantes z_j extraites de la loi de probabilité de Z . La fonction caractéristique de Z est alors approchée par

$$\varphi_Z^{(n)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j e^{it z_j}$$

et on sait que $\varphi_Z^{(n)} \rightarrow \varphi_Z$ quand $n \rightarrow \infty$.

Y est une variable aléatoire normale, centrée, d'écart-type σ connu, donc de fonction caractéristique

$$\varphi_Y(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

La fonction caractéristique de X est donnée par

$$\varphi_X(t) = \varphi_Z(t) / \varphi_Y(t)$$

Considérons $\varphi_X(t)$ sous la forme

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^k P_j e^{it x_j}$$

où les x_j sont les valeurs de X pour lesquelles $P(X = x_j) = P_j \neq 0$.

L'inverse de $\varphi_X(t)$ s'écrit :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi_X(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \sum_j P_j e^{it(x_j - x)} dt.$$

Comme la série $\sum_j \frac{1}{2T} P_j \int_{-T}^{+T} e^{it(x_j - x)} dt$ est absolument convergente

quel que soit T, donc uniformément convergente, on peut intervertir les signes $\int$ et $\sum$ dans l'égalité précédente et on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi_X(t) e^{-itx} dt &= \frac{1}{2T} \sum_j P_j \int_{-T}^{+T} e^{it(x_j - x)} dt \\ &= \sum_j P_j \frac{e^{iT(x_j - x)} - e^{-iT(x_j - x)}}{2T i (x_j - x)} \\ &= \sum_j P_j \frac{\sin T(x_j - x)}{T(x_j - x)} \end{aligned}$$

Si x est différent de x_j pour $j = 1, \dots, k$, $\sum_j P_j \frac{\sin T (x_j - x)}{T (x_j - x)}$ tend vers 0 quand T tend vers l'infini.

D'où : $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi_X(t) e^{-itx} dt = 0$ si x est différent de tous les x_j .

Si x est égal à un des x_j soit x_{j_0} , alors :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi_X(t) e^{-itx_{j_0}} dt = \frac{1}{2T} P_{j_0} \int_{-T}^{+T} e^{it(x_{j_0} - x_{j_0})} dt + \sum_{j \neq j_0} P_j \frac{\sin T (x_j - x_{j_0})}{T (x_j - x_{j_0})}$$

La première quantité du second membre égale P_{j_0} et la seconde tend vers 0 quand T tend vers l'infini. On a donc, si $x = x_{j_0}$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi_X(t) e^{-itx} dt = P_{j_0}.$$

Comme nous l'avons remarqué auparavant, les valeurs des P_j ainsi calculées seront certainement erronées. Mais l'allure de la courbe obtenue par inversion de φ_X sera identique à celle de la courbe stricte : elle présentera des pics aux points d'abscisses x_j , et entre deux points x_j et x_{j+1} on observera des oscillations dont la hauteur diminuera quand la valeur de T deviendra de plus en plus élevée.

Pour obtenir la position des pics avec précision, il sera nécessaire de prendre T assez grand. Comme le calcul de

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi_X(t) e^{-itx} dt$$
 est semblable au calcul d'une transformée de Fourier,

nous utiliserons la transformée de Fourier rapide.

II. 2 Détermination des probabilités de ces points

Nous cherchons donc à résoudre l'équation

$$H(z) = \int_R G(z-x) dF(x).$$

X étant une variable aléatoire discrète, cette équation s'écrit plus précisément, avec les notations du paragraphe II.1 :

$$H(z) = \sum_{j=1}^k P_j G(z - x_j)$$

$G(y)$ fonction de répartition d'une variable aléatoire normale, centrée, d'écart-type σ , est donnée par :

$$G(y) = \int_{-\infty}^y g(t) dt = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-t^2/2\sigma^2} dt,$$

et $H(z) = \frac{r}{n}$ où r est le nombre d'éléments z_i de l'échantillon inférieurs à z .

Nous connaissons les x_j par la phase précédente et nous voulons déterminer les P_j qui satisfont "au mieux" à l'équation :

$$H(z) = \sum_{j=1}^k P_j G(z - x_j)$$

Pour cela nous utiliserons la méthode des moindres carrés qui consiste à écrire que

$$I = \int_a^b \xi^2(z) dz$$

est minimum, avec $\xi(z) = H(z) - \sum_{j=1}^k P_j G(z - x_j)$

$$a = \inf_i z_i \quad \text{et} \quad b = \sup_i z_i.$$

Le minimum de I peut être déterminé par les k conditions :

$$\frac{\partial I}{\partial P_\ell} = 0 \quad \ell = 1, 2, \dots, k.$$

$$\text{Or} \quad \frac{\partial I}{\partial P_\ell} = -2 \int_a^b [H(z) - \sum_{j=1}^k P_j G(z - x_j)] G(z - x_\ell) dz$$

Par conséquent les P_j sont définis par le système linéaire de k équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b \left[H(z) - \sum_{j=1}^k P_j G(z-x_j) \right] G(z-x_1) dz = 0 \\ \hline \int_a^b \left[H(z) - \sum_{j=1}^k P_j G(z-x_j) \right] G(z-x_k) dz = 0 \end{array} \right.$$

Remarque. Les conditions $\frac{\partial I}{\partial P_\ell} = 0$, $\ell = 1$ à k , déterminent effectivement un minimum si la matrice M dont les termes sont les $\frac{\partial^2 I}{\partial P_\ell \partial P_m}$, $m = 1$ à k , est définie positive.

$$\text{Comme } \frac{\partial^2 I}{\partial P_\ell \partial P_m} = 2 \int_a^b G(z-x_m) G(z-x_\ell) dz,$$

la matrice M est réelle, symétrique. Elle est définie positive si la forme quadratique $A^t M A$ qui lui est associée est positive pour tout vecteur A non nul. Soient a_i , $i=1$ à k , les composantes de A .

$$\begin{aligned} \text{On a : } A^t M A &= \sum_{\ell, m} a_\ell a_m \frac{\partial^2 I}{\partial P_\ell \partial P_m} \\ &= 2 \int_a^b \left[\sum_{\ell, m} a_\ell a_m G(z-x_\ell) G(z-x_m) \right] dz \\ &= 2 \int_a^b \left[\sum_{\ell=1}^k a_\ell G(z-x_\ell) \right] \left[\sum_{m=1}^k a_m G(z-x_m) \right] dz \\ &= 2 \int_a^b \left[\sum_{\ell} a_\ell G(z-x_\ell) \right]^2 dz \end{aligned}$$

Par suite la forme quadratique $A^t M A$ est positive ou nulle, et n'est nulle que si

$$\sum_{\ell=1}^k a_\ell G(z-x_\ell) = 0.$$

Or $\sum_{\ell} a_\ell G(z-x_\ell)$ est une forme linéaire sur un espace à k dimensions et n'est nulle que si tous les a_ℓ sont nuls.

Par conséquent $A^t M A$ est positive pour tout vecteur A non nul.

III - APPLICATIONS NUMERIQUES

Rappelons qu'en pratique on connaît des réalisations de la variable aléatoire Z et l'écart-type σ de la variable aléatoire normale Y .

Pour tester la méthode proposée, nous avons simulé un échantillon de n valeurs indépendantes extraites d'une certaine loi discrète : nous avons ainsi obtenu n réalisations $x_1, x_2, \dots, x_n$ de la variable aléatoire X .

Puis de la même manière nous avons obtenu un échantillon de n valeurs indépendantes $y_1, y_2, \dots, y_n$ extraites d'une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type σ donné.

Nous avons pu ainsi exhiber un échantillon de n valeurs indépendantes $z_i = x_i + y_i$, $i = 1$ à n , réalisations de la variable aléatoire Z .

Nous avons alors tenté de retrouver la loi de X à partir de la loi de Y et de cet échantillon extrait de la loi de Z .

Premier exemple

Nous avons tout d'abord appliqué la méthode au cas suivant :

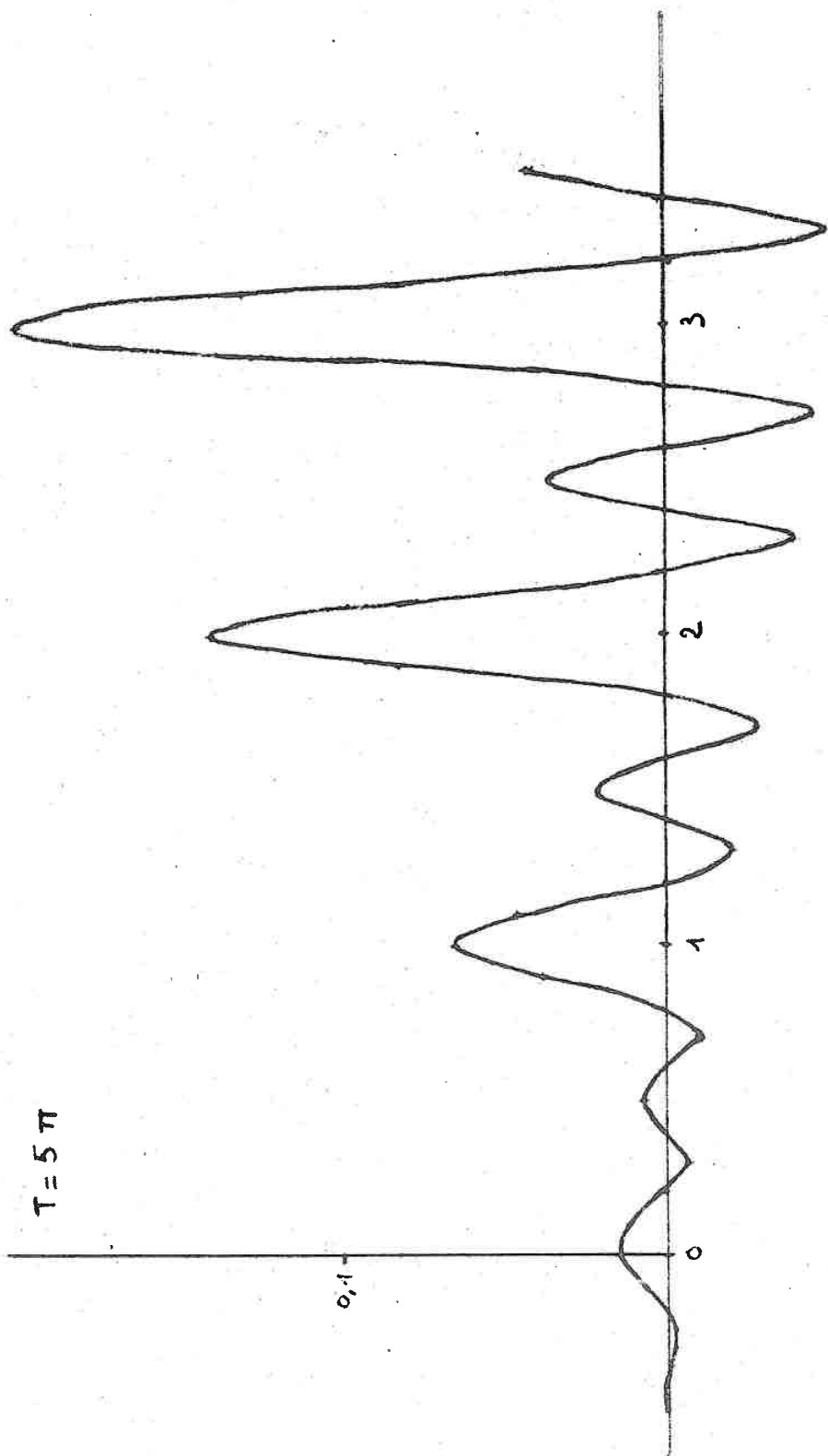
- la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma = 0,01$
- la variable aléatoire X suit une loi binômiale.

Par la première phase de la méthode, nous avons déterminé les valeurs de X à probabilité non nulle, soient :

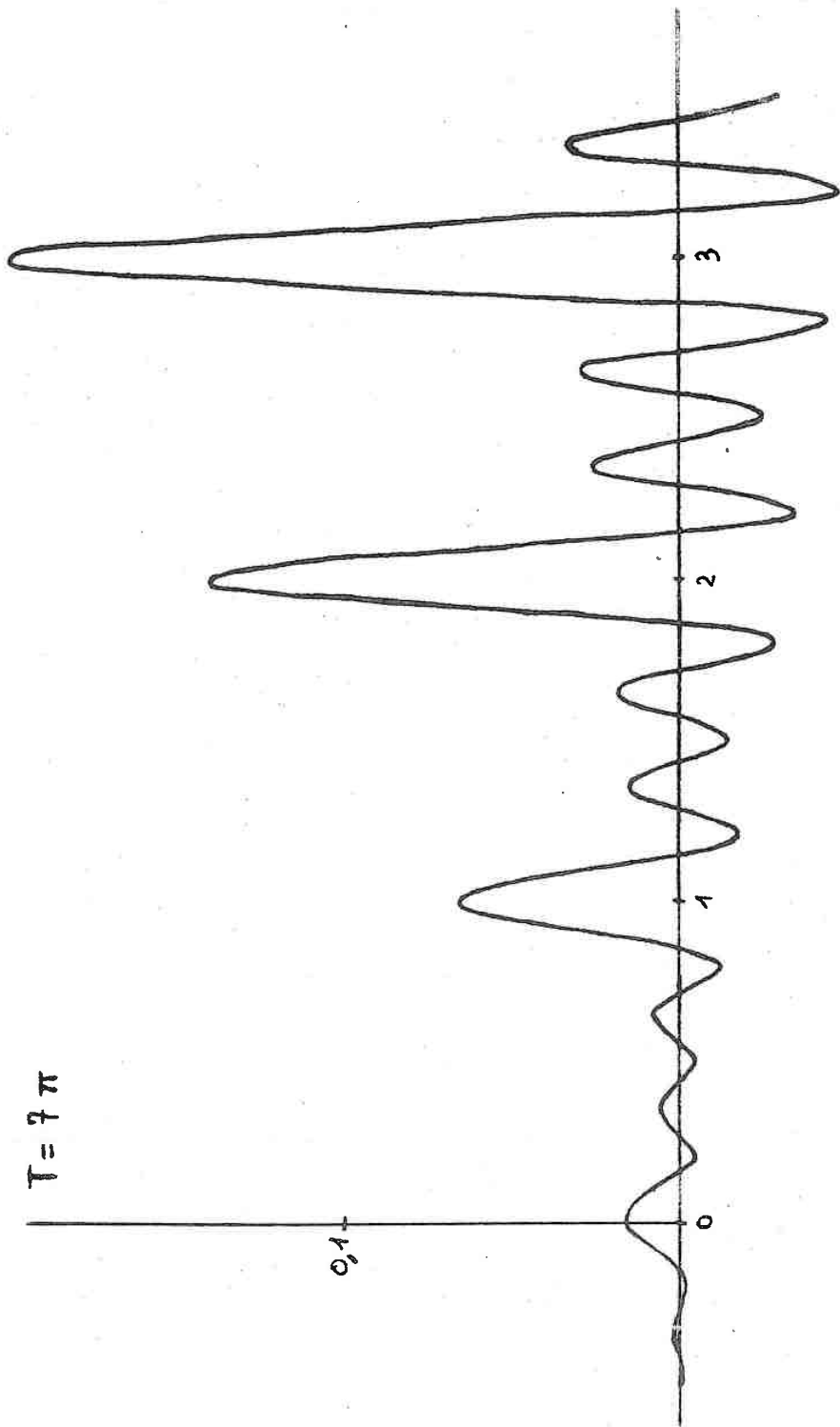
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

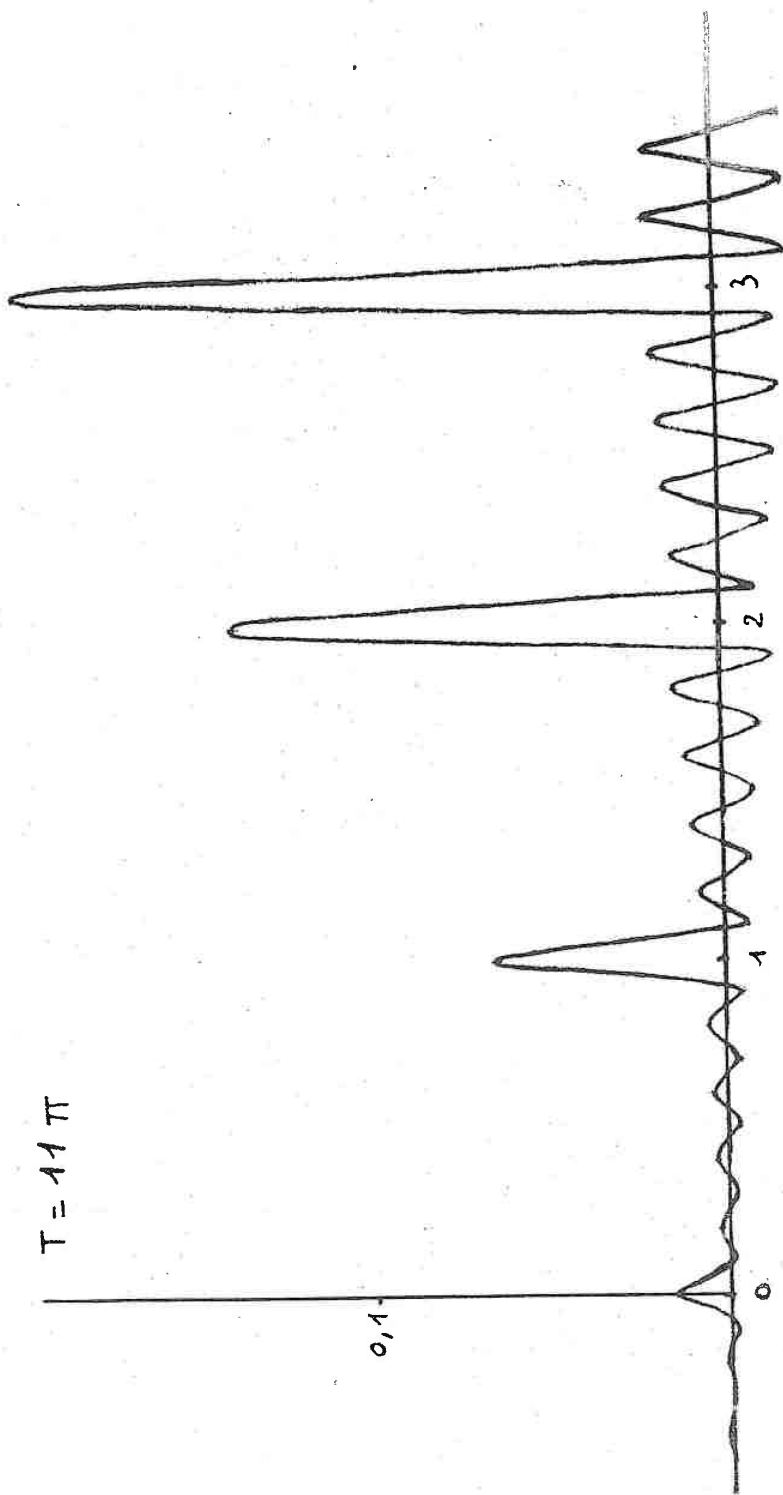
Pour des valeurs de T de plus en plus élevées nous avons obtenu une précision de plus en plus grande comme le montrent les résultats partiels suivants pour $T = 5\pi, 7\pi, 9\pi, 11\pi$ et les courbes correspondantes pour $T = 5\pi, 7\pi, 11\pi$.

Abscisse	$T = 5\pi$	$T = 7\pi$	$T = 9\pi$	$T = 11\pi$
-0.5	.0008	-.0005	.0004	-.0003
-0.4	.0003	.0002	-.0005	.0006
-0.3	-.0018	.0008	.0006	-.0009
-0.2	-.0005	-.0023	-.0006	.0013
-0.1	.0074	.0037	.0004	-.0020
0.0	.0151	.0152	.0153	.0153
0.1	.0123	.0074	.0025	-.0014
0.2	.0001	-.0052	-.0026	.0020
0.3	-.0065	.0015	.0030	-.0025
0.4	.0001	.0027	-.0035	.0029
0.5	.0072	-.0051	.0040	-.0034
0.6	-.0001	.0038	.0047	.0038
0.7	-.0115	.0024	.0054	-.0043
0.8	.0002	-.0122	-.0060	.0048
0.9	.0378	.0220	.0066	-.0055
1.0	.0646	.0648	.0650	.0653
1.1	..0463	.0268	.0079	-.0068
1.2	.0003	-.0183	-.0091	.0072
1.3	-.0213	.0043	.0100	-.0077
1.4	-.0005	.0088	-.0107	.0085
1.5	.0202	-.0144	.0112	-.0094
1.6	.0010	.0089	-.0119	.0102
1.7	-.0285	.0076	.0122	-.0113
1.8	-.0021	-.0290	-.0119	.0130
1.9	.0826	.0453	.0101	-.0158
2.0	.1393	.1396	.1396	.1397
2.1	.0977	.0590	.0208	-.0098
2.2	.0021	-.0355	-.0190	.0126
2.3	-.0401	.0075	.0190	-.0138
2.4	-.0010	.0158	-.0191	.0150
2.5	.0350	-.0249	.0193	-.0160
2.6	.0007	.0155	-.0199	.0166
2.7	-.0460	.0106	.0206	-.0171
2.8	-.0001	-.0443	-.0211	.0176
2.9	.1272	.0740	.0225	-.0173
3.0	.2000	.2002	.2002	.2003
3.1	.1302	.0739	.0200	-.0207
3.2	-.0016	-.0480	-.0214	.0202
3.3	-.0514	.0127	.0225	-.0197
3.4	.0014	.0176	-.0231	.0196
3.5	.0425	-.0303	.0235	-.0195



ALL INFORMATION
NANCY





Nous avons ensuite déterminé plus exactement les probabilités non nulles au moyen de la deuxième phase de la méthode. Nous présentons dans le tableau suivant pour chaque valeur x_j telle que $P(X = x_j) \neq 0$ la probabilité obtenue par calcul, la probabilité donnée par l'échantillon et la probabilité exacte.

Abscisse	Probabilité calculée	Probabilité échantillon	Probabilité exacte
0	0.0148	0.0150	0.0148
1	0.0647	0.0650	0.0657
2	0.1402	0.1400	0.1423
3	0.2007	0.2000	0.2003
4	0.2098	0.2100	0.2059
5	0.1648	0.1650	0.1647
6	0.1051	0.1050	0.1068
7	0.0600	0.0600	0.0576
8	0.0248	0.0250	0.0264
9	0.0100	0.0100	0.0104
10	0.0051	0.0050	0.0036

La comparaison entre les deux dernières colonnes donne une évaluation de l'erreur d'échantillonnage qui est ici assez faible.

L'erreur due à la méthode de calcul est représentée par l'écart entre la probabilité calculée et la probabilité dans l'échantillon : les résultats obtenus sont satisfaisants.

Au vu de cet exemple, la méthode utilisée semble donner une bonne approximation de la loi de la variable aléatoire X .

Deuxième exemple

Comme deuxième exemple nous avons choisi

- pour la loi de la variable aléatoire X une loi de Poisson
- pour l'écart-type de Y , la valeur 0,05 plus grande que celle de l'exemple précédent.

Dans une première étape nous avons précisé les valeurs x_j de X telles que $P(X = x_j) \neq 0$:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14.

Nous avons ensuite obtenu les résultats suivants :

Abscisse	Probabilité calculée	Probabilité échantillon	Probabilité exacte
0	0	0	0.0025
1	0.0144	0.0150	0.0149
2	0.0504	0.0500	0.0446
3	0.0948	0.0950	0.0892
4	0.1258	0.1250	0.1339
5	0.1648	0.1650	0.1606
6	0.1564	0.1550	0.1606
7	0.1438	0.1450	0.1377
8	0.0937	0.0950	0.1033
9	0.0756	0.0750	0.0688
10	0.0402	0.0400	0.0413
11	0.0152	0.0150	0.0225
12	0.0149	0.0150	0.0113
13	0.0049	0.0050	0.0052
14	0.0051	0.0050	0.0022

IV - CONCLUSION

Compte-tenu de l'erreur d'échantillonnage et avec un écart-type d'erreur assez faible, les résultats observés sont satisfaisants. Ce qui permet d'espérer que la méthode présentée sera efficace dans le cas d'un problème concret.

Listing du
sous-programme FFT

```
1:      SUBROUTINE FFT(X,Y,A,M,N)
2:      INTEGER A
3:      DIMENSION X(N),Y(N),A(M)
4:      DIMENSION D(3000),B(10,2),K(10)
5:      INTEGER V,Z,U,P1,P2,R
6:      PI=3.141593
7:      NN=N-1
8:      DO 10 L=0,NN
9:      U=L
10:     V=0
11:     R=1
12:     DO 11 J=1,M
13:     I=M-J+1
14:     Z=U/A(I)
15:     K(J)=U-Z*A(I)
16:     U=Z
17:     R=R*A(I)
18:     NR=N/R
19:     11 V=V+K(J)*NR
20:     10 D(V+1)=X(L+1)
21:     DO 12 L=1,N
22:     12 X(L)=D(L)
23:     DO 1 I=1,M
24:     U=A(I)
25:     P1=1
26:     P2=1
27:     DO 2 I1=1,I
28:     2 P1=P1*A(I1)
29:     DO 3 I2=1,M
30:     3 P2=P2*A(I2)
31:     NP1=N/P1
32:     NP2=N/P2-1
33:     DO 1 J1=1,NP1
34:     DO 1 J2=0,NP2
35:     DO 6 Z=1,U
36:     B(Z,1)=0.
37:     B(Z,2)=0.
38:     R=(Z-1)*N/P2+J2
39:     NU=U-1
40:     DO 6 J=0,NU
41:     JR=J*R*NP1
42:     IF(JR.GE.N)JR=JR-JR/N*N
43:     V=(J1-1)*P1+J*(NP2+1)+J2+1
44:     RP=2.*FLBAT(JR)/FLBAT(N)*PI
45:     B(Z,1)=B(Z,1)+X(V)*COS(RP)+Y(V)*SIN(RP)
46:     B(Z,2)=B(Z,2)+Y(V)*COS(RP)-X(V)*SIN(RP)
47:     6 CONTINUE
48:     DO 5 Z=1,U
49:     V=(J1-1)*P1+(Z-1)*(NP2+1)+J2+1
50:     X(V)=B(Z,1)
51:     5 Y(V)=B(Z,2)
52:     1 CONTINUE
53:     RETURN
54:     END
```

REFERENCES

- [1] J. W. COOLEY - J. W. TUKEY
"An algorithm for the machine calculation of complex
Fourier series"
Math. of Comput. Vol. 19 - pp. 297-301 - April 1965
- [2] W. T. COCHRAN - J. W. COOLEY - D. L. FAVIN - H. D. HELMS -
R. A. KOENEL - W. W. LANG - G. C. MALING - D. E. NELSON -
C. M. RADER - P. D. WELCH.
"What is the fast Fourier transform ?"
Proceedings of the IEEE - Vol. 55 n° 10 pp. 1664-1677
October 1967
- [3] M. C. VALENTIN
"Application d'une nouvelle méthode numérique de quadrature
au calcul des intégrales de Fourier"
Thèse de 3ième Cycle - Nancy 1962
- [4] M. DEPAIX
"Résolution numérique d'un problème de filtrage"
Revue du CETHEDDEC n° 16 - 4° trimestre 1968.



NOM DE L'ETUDIANT : Mademoiselle MARQUIS Catherine

Nature de la thèse : Docteur de Spécialité en Mathématiques Appliquées



Vu, Approuvé

et Permis d'imprimer

NANCY, le 17.9.70

Le Doyen,



J. AUBRY