UNIVERSITE DE NANCY I

U.E.R. SCIENCES MATHÉMATIQUES

# LANGAGES D'ARBRES

# LANGAGES DANS LES ALGÈBRES LIBRES

THÈSE

PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR



**PIERRE MARCHAND**

SOUTENUE LE 16 MAI 1981

DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

| | |
|---|---|
| RAPPORTEURS | C. PAIR , PRÉSIDENT |
| | B. COURCELLE |
| | J.P. JOUANNAUD |
| EXAMINATEURS | J.C. DERNIAME |
| | J.P. HATON |

PUBLICATION DU CENTRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE DE NANCY

(C.R.I.N.)

RÉFÉRENCE CRIN 81-T-030

Monsieur C. PAIR dirige mes recherches depuis mon arrivée à Nancy.

C'est un rare privilège de travailler avec une personne alliant une grande culture informatique à un esprit ouvert et rigoureux. Cette thèse a été menée à bien grâce à ses qualités intellectuelles, didactiques et sa disponibilité, qualités que j'ai l'avantage d'apprécier depuis de nombreuses années. Je tiens à lui exprimer ma profonde admiration et ma sincère gratitude.

B. COURCELLE, Professeur à Bordeaux I, a accepté de participer à ce jury.

J'ai pu apprécié, tant dans ses articles que dans ses conférences, ses grandes qualités de chercheur. Je suis sensible à sa présence parmi mes juges et le remercie de ses pertinents conseils.

J.P. JOUANNAUD, Professeur à Nancy II, m'a aidé dans la rédaction de cette thèse en me faisant découvrir certaines théories. En attendant une collaboration aussi fructueuse que cordiale, je lui adresse tous mes remerciements.

J.C. DERNIAME, Professeur à Nancy I, travaille à l'application des types abstraits, son jugement d'utilisateur sera utile à cette recherche théorique. Qu'il soit assuré de mes remerciements amicaux.

J.P. HATON, Professeur à Nancy I, dirige une équipe orientée vers d'autres recherches ; il s'est cependant intéressé à mon travail. Je remercie le collègue autant que l'ami de siéger à ce jury.

Je tiens à remercier tous mes collègues de mathématiques appliquées et en particulier J.P. FINANCE, M. GRANDBASTIEN, P. LESCANNE, R. MOHR, A. QUERE, J.L. REMY. Nos enrichissantes discussions au sein du groupe Castor m'ont permis de faire avancer ce travail.

Mes collègues de mathématiques pures m'ont montré un abord différent des problèmes. Je remercie particulièrement D. BARLET, L. BERARD BERGERY, J.P. DESCHASEAUX de s'être penchés avec patience sur ces mathématiques pas très pures.

M. TESOLIN a assuré avec son sourire et sa bonne humeur habituelle la réalisation matérielle de ce travail. Qu'elle soit remerciée de cette tâche ingrâte parfaitement accomplie.

# Table des Matières

Note au lecteur :

Dans une référence interne le numéro de chapitre est souligné, l'absence de ce numéro signifie que la référence est interne au chapitre en court.

# INTRODUCTION

La théorie des langages est un vaste domaine où de nombreux chercheurs ont déjà travaillé. Suivant les écoles, ceux-ci ont cherché à démontrer des théorèmes de plus en plus fins sur les langages classiques considérés comme des sous ensembles d'un monoïde libre, d'autres ont eu pour but de sortir du cadre des monoïdes pour généraliser les théories classiques. C'est plutôt dans cette deuxième catégorie que se place ce présent travail.

La première généralisation qui est apparue historiquement en théorie des langages est le passage aux langages d'arbres [ 40 ] [ 54 ] [ 12 ]. Nous n'échappons pas à cela et les trois premiers chapitres de cette thèse sont consacrés à l'étude de ces langages d'arbres. Cependant notre approche est assez différente de celle des auteurs classiques essentiellement à cause des toutes premières définitions qui permettent de formaliser la notion d'arbre. Cette formalisation due à Pair et Quéré [63] est particulièrement bien adaptée aux problèmes concernant les arbres syntaxiques et tous les problèmes touchant de près ou de loin la syntaxe. En revanche, elle semble moins performante pour l'étude de problèmes plus proches de la sémantique comme, par exemple, les théories sur les schémas récursifs. Cette approche différente conduit à utiliser une terminologie propre qui, nous l'espérons, ne gênera pas le lecteur.

Après avoir fait, dans un chapitre 0, quelques rappels succincts de théorie des langages, nous abordons au chapitre 1 la théorie des langages d'arbres nommés ici bilangages. On s'aperçoit très vite que ces bilangages sont une généralisation des langages parenthésés de Mac Naugthon [ 59 ] et des "tree regular systems" de Brainerd [ 12 ]. La généralisation que l'on obtient est comparable à celle qui ferait passer des langages finis aux langages réguliers en théorie classique des langages. Dans ce cadre on obtient un théorème intéressant de réduction des grammaires régulières d'arbres (appelées ici bigrammaires). Le théorème (1 5.3.1) est typiquement un résultat de la formalisation de la notion d'arbres utilisé dans ce travail. On obtient dans cette voie des résultats similaires mais plus puissants que ceux énoncés par les auteurs cités plus haut.
En particulier, on construit de manière effective des grammaires canoniques associés aux bilangages réguliers. Par rapport aux autres auteurs l'idée nouvelle est de donner une structure algébrique à l'ensemble des non terminaux des grammaires ainsi construites de façon à obtenir une généralisation exacte de la construction du monoïde syntaxique. D'autre part au cours du texte nous redémontrons par des méthodes plus élégantes des résultats prouvés par ailleurs (par exemple la décidabilité de l'équivalence structurale ou la décidabilité du problème de l'ambiguïté pour les grammaires parenthésées [67]).

La justification d'une nouvelle théorie peut être trouvée à l'intérieur d'elle même par ses résultats propres, mais il est mieux de montrer que cette théorie à des retombées sur les théories classiques antérieures. Le chapitre 2 a été écrit dans ce but. On y trouvera une suite d'applications diverses de la théorie des bilangages à la théorie des langages. Deux paragraphes (2.4 et 2.5) sont consacrés aux problèmes de l'ambiguïté inhérente. L'un deux (2.4) prouve que l'ambiguïté inhérente d'un langage algébrique est due à la structure des arbres syntaxiques mais pas à leur étiquetage. L'autre paragraphe (2.5) propose une nouvelle méthode de démonstration de l'ambiguïté inhérente d'un langage. (Cette méthode bien que fonctionnant sur un exemple ne peut être considérée comme opérationnelle dans son état actuel et devra être améliorée dans un travail ultérieur). Le paragraphe 2.2 donne des équivalences décidables sur les grammaires impliquant l'équivalence des grammaires. On retrouve là encore la décidabilité de l'équivalence structurale et on obtient un résultat strictement plus puissant que l'équivalence structurale pour les grammaires réduites sous forme de Greibach.

La deuxième généralisation de la théorie des langages a été d'étudier cette théorie dans le cadre des algèbres libres. Nous abordons ces problèmes aux chapitres 3 et 4. Au chapitre 3 nous étudions la construction de l'équivalent du monoïde syntaxique pour les sous ensembles des algèbres libres possédant un système d'axiomes égalitaires quelconques. Ces méthodes ne sont pas complètement originales, cependant les constructions des objets manipulés sont plus "syntaxiques" que celles d'autres auteurs et permettent plus facilement de faire des démonstrations à leurs propos. En particulier nous obtenons des résultats de décidabilité pour la construction des algèbres minimales indépendant de la décidabilité du problème des mots dans la structure d'algèbre considérée. Le dernier paragraphe de ce chapitre étudie la variation des algèbres minimales en fonction de la variation des systèmes d'axiomes.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude d'une transformation des structures d'algèbres qui conduit à des procédés automatiques de construction de hiérarchies pour les sous ensembles algébriques. L'idée première a été découverte en analysant deux exemples de hiérarchies :
celle de Chomsky (les langages réguliers sont une sous-classe stricte des langages algébriques)
et une hiérarchie analogue dans les langages d'arbres qui avait fait l'objet d'un précédent travail.
On découvre dans ces deux exemples des points communs qui sont susceptibles d'être généralisés dans le cas des algèbres libres.

Au cours de l'élaboration de ce chapitre, nous avons été amené à utiliser très largement les résultats obtenus par d'autres auteurs sur les systèmes de réécriture, et d'autre part des recherches bibliographiques ont montré la confluence de ces théories avec celles développées en particulier par TURNER [ 84 ] et DAMM [ 19 ].

Dans ce chapitre après avoir fait de larges rappels sur les systèmes de réécritures et avoir introduit à ce propos quelques notions originales, nous étudions une transformation sur les structures d'algèbres. Cette transformation a la particularité très intéressante de conserver les objets universels des structures d'algèbre (ceci indépendamment de toute hypothèse sur les axiomes de cette structure). De plus elle laisse stable les sous ensembles reconnaissables et sous quelques hypothèses raisonnables, elle fait croître strictement l'ensemble des sous ensembles algébriques. Comme de plus cette transformation peut être réitérée sur une même structure, on a là un moyen de construire des hierarchies. L'étude de ces hiérarchies nous a conduit à nous intéresser à l'évolution des sous ensembles reconnaissables quand la base d'une algèbre libre augmente. Ce problème est banal sur les structures d'algèbre sans axiome, mais il se complique dès que l'on introduit des axiomes et en particulier des axiomes effaçants. Les systèmes de réécriture sont alors un outil très utile pour étudier ces problèmes dans des cas particuliers.

Par ce présent travail, nous n'avons pas la prétention d'avoir amené les théories présentées ici à leur point ultime de perfectionnement. Dans les premiers chapitres, nous avons travaillé à la limite du connu en reformulant et en redémontrant de manière plus élégante des résultats connus et en ajoutant quelques contributions. Le dernier chapitre est plus novateur et s'éloigne des sentiers battus. En fait nous avons l'impression d'avoir ouvert plus de portes que d'en avoir fermées, mais est-ce un mal ?

Dans la conclusion, nous essayerons de montrer certains prolongements possibles de ce travail.



# CHAPITRE 0

## QUELQUES RAPPELS DE LA THÉORIE DES LANGAGES ET DE LA THÉORIE DES ARBRES

### 1.- MONOÏDE LIBRE SUR V :

Un vocabulaire est un ensemble fini V . On appelle mot sur V une suite finie d'éléments de V . On note $\alpha = a_1a_2\ldots a_n$ la suite finie de longueur $n$ dont le $i^{\text{ième}}$ élément est $a_i$ . Par définition $n$ est la longueur du mot $\alpha$ . Pour $n = 0$ on obtient le mot vide noté $\wedge$ . On note $V^*$ l'ensemble des mots sur V . On définit dans $V^*$ une loi de composition interne appelée concaténation définie par

$$\alpha = a_1a_2\ldots a_n \text{ et } \beta = b_1b_2\ldots b_p \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = c_1c_2\ldots c_k \text{ et } k = n+p \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow c_i = a_i \\ \text{et } n+1 < i < n+p \Rightarrow c_i = b_{i-n} \end{cases}$$

Cette loi est associative et admet $\wedge$ comme élément neutre .

**Définition 1.1.** :

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre.
L'ensemble $V^*$ muni de la concaténation est un monoïde.

**Définition 1.2.** :

Soit M et N deux monoïdes, un homomorphisme est une application $\varphi : M \to N$ telle que
$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$ et $\varphi(e) = e'$
(e et e' sont les éléments neutres respectifs de M et N).

**Proposition 1.3.** :

$V^*$ est le monoïde libre de base V c'est à dire que pour toute application $\varphi : V \to M$ où M est un monoïde, il existe un unique homomorphisme $\bar{\varphi} : V^* \to M$ tel que $\bar{\varphi}|V = \varphi$ .

**Définition 1.4.** :

On appelle langage sur V un sous-ensemble de $V^*$ .

**Définition 1.5.** :

Un langage L est dit reconnu par le triplet $(\varphi, M, M')$ où $\varphi : V^* \to M$ est un homomorphisme de monoïde et $M' \subset M$ si et seulement si $L = \varphi^{-1}(M')$ .

**Proposition 1.6.** :

Soit L un langage sur V , il existe un triplet $(\varphi_L, M_L, M'_L)$ reconnaissant L tel que pour tout triplet $(\varphi, M, M')$ reconnaissant L il existe un unique morphisme $\chi : \varphi(V^*) \to M_L$ surjectif tel que $\chi \circ \varphi = \varphi_L$ et $\chi^{-1}(M'_L) = M' \cap \varphi(V^*)$ .

**Démonstration** :

On définit classiquement l'application $C_L : V^* \to \mathfrak{P}(V^* \times V^*)$ en posant $C_L(\alpha) = \{(\beta,\gamma) ; \beta\alpha\gamma \in L\}$
On pose alors $M_L = \{C_L(\alpha) ; \alpha \in V^*\}$ , $\varphi_L(\alpha) = C_L(\alpha)$ et
$M'_L = \{C_L(\alpha) ; (\wedge, \wedge) \in C_L(\alpha)\}$ .

## 2.- AUTOMATE SUR V . LANGAGE REGULIER :

**Définition 2.1.** :

On appelle automate sur $V$ un quadruplet $\mathcal{A} = (S, s_0, ., S')$ tel que :

i) $S$ est un ensemble appelé ensemble des états de $\mathcal{A}$

ii) $s_0 \in S$

iii) . est une application de $S \times V$ dans $S$ (on note $s.a$ l'image de $(s, a)$ par . )

v) $S' \subset S$ .

A un automate sur $V$ on peut associer une application notée aussi . de $S \times V^*$ dans $S$ en posant

$s.\wedge = s$ et $s.(\alpha a) = (s.\alpha).a$ .

Par définition le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est $L(\mathcal{A}) = \{\alpha \,;\, s_0.\alpha \in S'\}$ .

Un langage $L \subset V^*$ est dit régulier si et seulement si $L = L(\mathcal{A})$ pour un automate $\mathcal{A}$ dont l'ensemble des états est fini (automate fini).

**Définition 2.2.** :

On appelle morphisme d'automate entre $\mathcal{A} = (S, s_0, ., S')$ et $\mathcal{A}' = (Q, q_0, ., Q')$ une application partielle $\varphi : S \to Q$ telle que

i) le domaine de définition de $\varphi$ est $S_1 = \{ s \,;\, (\exists \alpha \in V^*)\ (s = s_0.\alpha )\}$

ii) $\varphi$ est surjective

iii) $\varphi(s_0) = q_0$

iv) $\varphi^{-1}(Q') = S_1 \cap S'$ .

**Proposition 2.3.** :

Soit $L$ un langage sur $V$ , il existe un automate $\mathcal{A}_L$ canoniquement associé à $L$ reconnaissant $L$ et tel que pour tout autre automate $\mathcal{A}$ reconnaissant $L$ il existe un unique morphisme $\varphi$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}_L$ . Par définition $\mathcal{A}_L$ est l'automate minimal de $L$ .

**Démonstration** :

Classiquement on définit l'application $D_L : V^* \to \mathfrak{P}(V^*)$ appelée contexte à droite pour $L$ en posant $D_L(\alpha) = \{\beta \,;\, \alpha\beta \in L\}$ .

L'automate $\mathcal{A}_L$ est alors défini en posant $\mathcal{A}_L = (S, s_0, ., S')$ avec

$S = \{D_L(\alpha) \,;\, \alpha \in V^*\}$ , $s_0 = D_L(\wedge)$ , $D_L(\alpha).a = D_L(\alpha a)$ et $S' = \{D_L(\alpha) \,;\wedge \in D_L(\alpha)\}$

On note $Reg(V)$ l'ensemble des langages réguliers sur $V$ .

## 3.- LANGAGE ALGEBRIQUE. GRAMMAIRE ALGEBRIQUE :

**Définition 3.1.** :

On appelle grammaire algébrique sur $V$ un quadruplet $G = (N, V, \to, X)$ tel que

i) $N$ et $V$ sont deux vocabulaires finis.

ii) $X \in N$

iii) $\to$ est une relation entre $N$ et $(N \cup V)^*$ tel que pour chaque $A$ l'ensemble $K_A = \{\alpha \,;\, A \to \alpha\}$ est fini .

(on obtient les mêmes propriétés que ci-dessous si on suppose que les ensembles $K_A$ sont des langages réguliers sur $N \cup V$ et que $X$ est aussi un langage régulier sur $N \cup V$ . Dans ce cas on parlera de grammaires algébriques généralisées).

On définit la relation "se réécrit" notée $\underset{G}{\succ}$ en posant

$u \underset{G}{\succ} v \iff (\exists u', u'', A, \alpha)\ (u = u'Au''$ et $v = u'\alpha u''$ et $A \to \alpha$ )

La relation "dérive" est la fermeture réflexive transitive de $\underset{G}{\succ}$ et se note $\overset{*}{\underset{G}{\succ}}$ . Le langage engendré par $G$ est $L(G) = \{\alpha \,;\, \alpha \in T^*$ et $X \overset{*}{\underset{G}{\succ}} \alpha \}$ .



Un langage dit algébrique si et seulement si $L$ peut être engendré par une grammaire algébrique. On note $Alg(V)$ l'ensemble des langages algébriques sur $V$ .

**Définition 3.2.** :

Soit $V$ et $\bar{V}$ deux vocabulaires en bijection par l'application $a \to \bar{a}$ . On appelle langage de Dyck ou langage des parenthèses sur $V$ le langage engendré par la grammaire

$X \longrightarrow aX\bar{a}X \mid \wedge \quad (a \in V)$ .

on note $P(V)$ ce langage.

**Proposition 3.3.** :

$\alpha \in P(V)$ et $\alpha \neq \wedge \iff (\exists! a \in V)(\exists! \alpha' \in P V)(\exists! \alpha'' \in P(V))(\alpha = a\,\alpha'\,\bar{a}\,\alpha'')$

**Théorème 3.4.** :

Un langage $L$ sur $T$ est algébrique si et seulement s'il existe un vocabulaire $V$ , un langage régulier $K$ sur $V \cup \bar{V}$ et un homomorphisme $h : (V \cup \bar{V})^* \to T^*$ tels que $L = h(P(V) \cap K)$ .

## 4.- STRUCTURE DE BINOIDE. BINOIDE UNIVERSEL. [63] .

**Définition 4.1.** :

On appelle V-binoïde un ensemble $B$ muni d'une loi de monoïde notée + et d'une loi externe sur $V$ notée $\times$ . Si $B_1$ et $B_2$ sont deux V-binoïdes, on appelle homomorphisme de $B_1$ dans $B_2$ une application $\varphi : B_1 \to B_2$ telle que

i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

ii) $\varphi(e_1) = e_2$ ($e_1$ et $e_2$ sont les éléments neutres de $B_1$ et $B_2$ pour +)

iii) $\varphi(a \times x) = a \times \varphi(x)$ .

**Définition 4.2.** :

On appelle V-binoïde universel un binoïde $\hat{V}$ vérifiant les propriétés suivantes ($\wedge$ est l'élément neutre de + ) .

i) $(\forall r \in \hat{V})(r \neq \wedge \Rightarrow (\exists! a \in V)(\exists! r' \in \hat{V})(\exists! r'' \in \hat{V})(r = a \times r' + r''))$

ii) $\exists\, \nu : \hat{V} \to \mathbb{N}$ tel que $\nu(\wedge) = 0$

$(\forall a \in V)(\forall r' \in \hat{V})(\forall r'' \in \hat{V})(\nu(a \times r' + r'') > \sup(\nu(r')+1, \nu(r'')))$ .

**Proposition 4.3.** :

Dans un binoïde universel, on a le principe de raisonnement par récurrence suivant :

$(\forall r)(P(r)) \iff (P(\wedge)$ et $(\forall a \in V)(\forall r' \in \hat{V})(\forall r'' \in \hat{V})(P(r')$ et $P(r'') \Rightarrow P(a \times r' + r'')))$ .

De plus si $E$ est un ensemble quelconque et si $f : \hat{V}^n \longrightarrow E$ et $g : \hat{V}^n \times V \times \hat{V}^2 \times E^2 \to E$ sont deux applications, il existe une et une seule application $\varphi : \hat{V}^{n+1} \to E$ vérifiant

$\varphi(r_1, r_2, \ldots, r_n, \wedge) = f(x_1, \ldots, x_n)$

$\varphi(r_1, r_2, \ldots, r_n, a \times r' + r'') = g(r_1, \ldots, r_n, a, r', r'', \varphi(r_1, \ldots, r_n, r'), \varphi(r_1, \ldots, r_n, r''))$

La proposition ci-dessus permet de démontrer facilement la proposition suivante :

**Proposition 4.4.** :

Si $\hat{V}$ est un V-binoïde universel et si $B$ est un V-binoïde, il existe un et un seul morphisme $\psi : \hat{V} \to B$ . En particulier deux binoïdes universels sont isomorphes.

Intuitivement une réalisation du V-binoïde universel est une façon de représenter l'ensemble des arbres à zéro, une ou plusieurs racines dont les noeuds sont étiquetés par des éléments de $V$ et dont les racines et les successeurs d'un point sont ordonnés.

**Exemple** :

Le langage des parenthèses $P(V)$ sur $V$ peut être muni d'une structure de binoïde universel en posant :

$\alpha + \beta = \alpha\beta$

$a \times \alpha = a\alpha\bar{a}$

Cette représentation du binoïde universel correspond à la représentation parenthésée infixée des arbres. Ici les éléments de $\hat{V}$ seront nommés "ramification".

Fonction standard sur les ramifications :

Toutes ces fonctions sont définies par récurrence en utilisant la proposition 4.3.

- mot des racines

$\rho : \hat{V} \to V^*$ définie par

$\rho(\wedge) = \wedge$ et $\rho(a \times r + s) = a\rho(s)$

- mot des feuilles

$\varphi : \hat{V} \to V^*$ définie par

$\varphi(\wedge) = \wedge$ et $\varphi(a \times r + s) =$ si $r = \wedge$ alors $a\varphi(s)$ sinon $\varphi(r)\,\varphi(s)$

- famille de prédecesseur a

$F_a : \hat{V} \to \mathcal{P}(V^*)$ $(a \in V)$ définie par

$F_a(\wedge) = \emptyset$ et $F_a(b \times r + s) =$ si $b = a$ alors $\{\rho(r)\} \cup F_a(r) \cup F_a(s)$ sinon $F_a(r) \cup F_a(s)$

- Ensemble des chemins

$ch : \hat{V} \to \mathcal{P}(V^*)$ définie par

$ch(\wedge) = \{\wedge\}$ et $ch(a \times r + s) = a\, ch(r) \cup ch(s)$

- hauteur

$h : \hat{V} \to \mathbb{N}$ définie par

$h(\wedge) = 0$ et $h(a \times r + s) = \sup(h(r) + 1, h(1))$

- Transcription

$\tau : \hat{V} \to \hat{V'}$ définie par la donnée d'une application $\tau : V \to V'$ et $\tau(\wedge) = 0$ et

$\tau(a \times r + s) = \tau(a) \times \tau(r) + \tau(s)$ .

Définition 4.5. :

On appelle bilangage un sous-ensemble de $\hat{V}$ . Un bilangage $L$ est dit régulier si et seulement si il existe un binoïde fini $B$ et un sous ensemble $B'$ de $B$ tel que $L = \psi^{-1}(B^{-1})$ où $\psi$ est l'unique homomorphisme de $\hat{V}$ dans $B$ .

Définition 4.6. :

Soit $G = (N, V, \to, X)$ une grammaire algébrique (généralisée ou non), soit $\alpha \in (N \cup T)^*$ , on note $B(G, \alpha)$ le bilangage défini par

$r \in B(G, \alpha) \leftrightarrow \rho(r) = \alpha$ et $(\forall a \in V)(F_a(r) \subset \wedge)$ et $(\forall A \in N)\ (\forall \alpha \in F_A(r))\ (A \to \alpha))$

En particulier le bilangage engendré par $G$ noté $B(G)$ est $B(G, X)$ .

Intuitivement $B(G, \alpha)$ est l'ensemble des arbres symtaxiques associés aux dérivations de $G$ commençant par $\alpha$ .

Théorème 4.7. : [63]

Un bilangage est régulier si et seulement si il est l'image par une transcription d'un bilangage engendré par une grammaire algébrique généralisée.



# CHAPITRE I

## ETUDE DES PROPRIÉTÉS DES BILANGAGES. COMPARAISON AVEC LA NOTION DE GRAMMAIRE PARENTHÉSÉE.

### 1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous développons une théorie similaire à celle des langages réguliers et des langages algébriques. Les premiers résultats de ce chapitre ne sont pas nouveaux et étaient déjà énoncés dans [53] , [54]. Ces résultats serviront essentiellement d'exemples dans les chapitres ultérieurs.

D'autre part, on compare dans ce chapitre la notion de bigrammaire avec celle de la grammaire parenthésée (§ 5.4) [ 59], [ 26 ] et on obtient des résultats similaires mais plus puissants que ceux énoncés dans [59 ] , en particulier sur l'éxistence de grammaires canoniquement associées à une grammaire parenthésée.

### 2. Binoïde libre sur T . Polynôme.

Définition 2.1. :

Soient $V$ et $T$ deux ensembles disjoints. On appelle V-binoïde libre sur $T$ le V-binoïde $\hat{V}[T]$ tel que

i) $T \subset \hat{V}(T)$

ii) Pour tout V-binoïde $B$ et toute application $\varphi : T \longrightarrow B$ il existe un et un seul morphisme $\bar{\varphi} : \hat{V}(T) \longrightarrow B$ tel que $\varphi | T = \varphi$ .

Proposition 2.2. :

Pour chaque couple d'ensembles disjoints $V$ et $T$ , il existe un et un seul V-binoïde libre sur $T$ à un isomorphsime près. En particulier $\hat{V}(T) = \{ r \ ; r \in \widehat{V \cup T}$ et $\forall a \in T(F_a(r) \subseteq \{\wedge\})\}$ est un V-binoïde libre sur $T$ .

Démonstration :

Vu la propriété universelle ii) de la définition 2.1. l'unicité d'un V-binoïde libre sur $T$ est immédiate. Le fait que $\hat{V}(T) = \{r \ ; r \in \widehat{V \cup T}$ et $(\forall a \in T)(F_a(r) \subseteq \{\wedge\})\}$ est un V-binoïde libre sur $T$ est à peu près évident.

Proposition 2.3. :

Soient $V$ et $T$ deux ensembles disjoints, à chaque $r \in \hat{V}(T)$ on peut associer une application $r_B : B^T \to B$ en considérant $r$ comme l'écriture d'une composition des opérations associées à la structure de V-binoïde.

Démonstration :

Soit $\bar{b} \in B^T$ ($b$ est donc une application de $T$ dans $B$ )

Soit $h_{\bar{b}} : \hat{V}(T) \to B$ l'unique homomorphisme tel que $h_{\bar{b}} | T = \bar{b}$

On pose alors $r_B(\bar{b}) = h_{\bar{b}}(r)$ .

En particulier si $r = a+b$ $(a \in T , b \in T , a \neq b)$ alors $r_B$ est la loi $+$ de $B$ et si $r_B = A \times a$ $(A \in V , a \in T)$ alors $r_B(b) = A \times b$ ; donc quant $A$ varie dans $V$ , on retrouve la loi externe de $B$ .

Définition 2.4. :

Avec les notations de la proposition 2.3., si $B = \hat{V}$ , on notera $\tilde{r}$ l'application de $(\hat{V})^T$ dans $\hat{V}$ associée à $r$ et on dira que $\tilde{r}$ est un polynôme à variables dans $T$ .

Remarque :

Les opérations $\tilde{r}$ correspondent à des greffes d'arbres . Dans la suite on utilisera essentiellement des polynômes à variables dans $\mathbb{N}$ ou tout du moins dans un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$ . On notera $\hat{V}[1]$ et $\hat{V}[1,n]$ les ensembles $\hat{V}[\{1\}]$ et $\hat{V}[[1,n]]$ .

3. Bigrammaires.

Ce qui suit est une généralisation au cas du binoïde universel de la théorie des grammaires sur le monoïde libre.

Définition 3.1. :

On appelle bigrammaire un quadruplet $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ tel que $N$ et $T$ sont deux vocabulaires disjoints, $X$ est un sous ensemble de $\widehat{N \cup T}$ en général réduit à un élément de $N$ . (Dans ce cas on confondra cet élément est $X$ ) et $\twoheadrightarrow$ est une relation binaire dans $\widehat{N \cup T}[\mathbb{N}]$ telle qu'un nombre fini de couples soient en relation.

Définition 3.2. :

La relation dans $\widehat{N \cup T}$ "se réécrit" se note $\xrightarrow[G]{}$ et est définie par

$r \xrightarrow[G]{} s \leftrightarrow \exists r' \in \widehat{N \cup T}[1]$ $\exists u \in \widehat{N \cup T}[1,n]$ $\exists u_1, u_2 .., u_n \in \widehat{N \cup T}$ $\exists u' \in \widehat{N \cup T}[1,n]$

$(r = \tilde{r}'(\tilde{u}(u_1,..., u_n))$ et $s = \tilde{r}'(\tilde{u}'(u_1,..., u_n))$ et $u \twoheadrightarrow u')$ .

La relation "derive" se note $\xrightarrow[G]{*}$ et est définie comme la fermeture réflexive transitive de la relation "se réécrit". On notera $\xrightarrow[G]{p}$ la puissance pième de la relation $\xrightarrow[G]{}$ . En particulier

$$\xrightarrow[G]{*} = \bigcup_{p \geq 0} \xrightarrow[G]{p} .$$

Remarque :

Par rapport à une version antérieure [54 ] on doit remarquer que dans la définition l'élément $r'$ de $\widehat{N \cup T}[1]$ permettant de repérer une occurrence d'un premier membre de règle de $G$ peut avoir dans son mot des feuilles plusieurs occurrences de 1, donc on peut faire en parallèle plusieurs applications d'une même règle, cependant cela ne change rien à la suite. En effet le fait de pouvoir faire des réécritures en parallèle ne change pas la puissance d'une grammaire s'il est possible aussi de les faire une par une.

Proposition 3.3. :

Soit $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ une bigrammaire . Soit $r \in \widehat{N \cup T}[1, n]$ , $r_1, r_2,..., r_n \in \widehat{N \cup T}$, $r'_1, r'_2,..., r'_n \in N \cup T$ alors

$(\forall i \in [1,n])\ (r_i \xrightarrow[G]{*} r'_i) \Rightarrow \tilde{r}(r_1, r_2,..., r_n) \xrightarrow[G]{*} \tilde{r}(r'_1,..., r'_n)$ .

Définition 3.4. :

On appelle bilangage engendré par une bigrammaire $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ l'ensemble $B(G) = \{ r ; r \in \hat{T}$ et $(\exists x \in X)(x \xrightarrow[G]{*} r)\}$ .

Les langages engendrés par $G$ sont :

le langage des mots des feuilles $LF(G) = \{ \varphi(r) ; r \in B(G)\}$

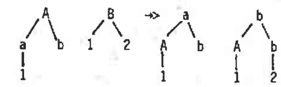
le langage des mots des racines $LR(G) = \{ \rho(r) ; r \in B(G)\}$

le langage des chemins $LC(G) = \bigcup_{r \in B(G)} ch(r)$ .

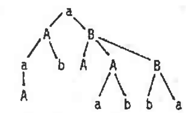


Exemples :

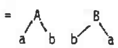
Considérons une règle de la forme suivante :



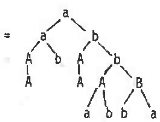
Considérons la ramification $r$ =



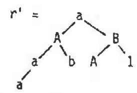
En employant les notations de la définition 3.2., on peut appliquer la règle en utilisant

$r' = \begin{array}{c} a \\ | \\ 1 \end{array}$ , $u_1 = A$ , $u_2$ = 

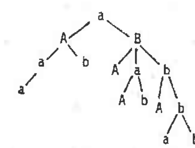
On obtient alors $r \xrightarrow[G]{} s$ =



On peut aussi appliquer cette même règle en utilisant

$r'$ =  $u_1 = \wedge$ , $u_2 = b\ a$

On obtient alors $r \xrightarrow[G]{} s'$ =



4. Grammaires parenthésées.

Soit $T, \bar{T}$ et $T'$ trois vocabulaires disjoints, $T$ et $\bar{T}$ étant en bijection par l'application $a \to \bar{a}$ , on définit les expressions parenthésées sur ces vocabulaires comme étant les mots engendrés par la grammaire

$G = ( \{X\} , T \cup \bar{T} \cup T', \to , X)$ avec $X \to a' X \mid aX\bar{a}X \mid \wedge$

où $a'$ est un élément quelconque de $T'$ et a un élément quelconque de $T$ .

Le langage de Dyck sur $T$ noté $P(T)$ (cf 1.3.2.) correspond au cas où $T'$ est vide. Remarquons que l'ensemble des expressions parenthésées sur $T$ , $\bar{T}$ et $T'$ peut se plonger injectivement dans le langage de Dyck $P(T \cup T')$ en utilisant l'homomorphisme $h : (T \cup \bar{T} \cup T')^* \to (T \cup \bar{T} \cup T' \cup \bar{T}')^*$ défini par

$a \in T \Rightarrow h(a) = a$ et $h(\bar{a}) = \bar{a}$

$a \in T' \Rightarrow h(a') = a'\bar{a}'$ .

Nous utiliserons ultérieurement cette remarque pour travailler uniquement dans des langages de Dyck.

Définition 4.1.[59] :

Une grammaire parenthésée est un sectuplet

$G = (N, T', \bar{T}, \bar{T}, \to , X)$ tel que

i) $N, T', T, \bar{T}$ sont quatre vocabulaires deux à deux disjoints $T$ et $\bar{T}$ étant une bijection pour $a \to \bar{a}$ .

ii) $G' = (N, T' \cup T \cup \bar{T}, \to , X)$ est une grammaire algébrique dont les règles sont de la forme $A \to a\alpha\bar{a}$ avec $A \in N, a \in T$ et $\alpha \in (N \cup T')^*$ .

Le langage $L(G)$ engendré par $G$ est le langage engendré par $G'$. Il est évident que $L(G)$ est formé d'expression bien parenthésée sur $T, \bar{T}$ et $T'$. Un langage parenthésé est un langage qui peut être engendré par une grammaire parenthésée.

Suivant les auteurs, $T$ est réduit à un élément (Parenthesis grammar [59][41]) ou bien à chaque règle de $G$ est associé un type de parenthèse (Bracheted context free langages [26 ]).

Bien que d'apparence différente, les grammaires parenthésées sont en fait un cas particulier de bigrammaire. En effet considérons l'application $\theta : \hat{T}[T'] \longrightarrow (T \cup \bar{T} \cup T')^*$ définie par

$\theta(\wedge) = \wedge$

$a \in T \Rightarrow \theta(a \times r + s) = a\, \theta(r)\, \bar{a}\, \theta(s)$

$a' \in T' \Rightarrow \theta(a' + s) = a'\, \theta(r)$ .

On obtient ainsi une bijection entre $\hat{T}[T']$ et les expressions parenthésées sur $T, \bar{T}$ et $T'$. Si on considère maintenant les bigrammaires $G$ de la forme $G = (N, T \cup T', \twoheadrightarrow, X)$ avec

$$u \twoheadrightarrow u' \Rightarrow u \in N \quad \text{et} \quad u' \in T \times \Big( \bigcup_{i=0}^{\infty} \big( \underbrace{(T' \cup N)+(T' \cup N)+\ldots+(T' \cup N)}_{i \text{ fois}} \big) \Big)$$

il est tout à fait évident que modulo la bijection $\theta$ la bigrammaire $G$ est équivalente à la grammaire parenthésée $G' = (N, T', T, T', \rightarrow, X)$ telle que $A \rightarrow a\alpha\bar{a} \Leftrightarrow A \twoheadrightarrow u'$ et $\theta(u') = a\alpha\bar{a}$

Nous expliciterons plus complètement cette équivalence quand nous aurons défini une classe particulière de bigrammaires qui généralisent la notion de grammaires parenthésées.

## 5. Bigrammaire régulière et grammaire parenthésée.

### 5.1.- Définitions

Définition 5.1.1. :

On appelle $C_0$-bigrammaire une bigrammaire $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ telle que

- $X \in N$
- $u \twoheadrightarrow v \Rightarrow u \in N$ et $v \in \hat{T}[N]$

C'est à dire que les seconds membres des règles d'une $C_0$-bigrammaire sont des polynômes sans variable sur $N \cup T$ (d'où l'indice o) et de plus les non-terminaux n'apparaissent qu'aux feuilles.

Les $C_0$-bigrammaires sont la généralisation naturelle des grammaires algébriques dans le cadre de la théorie des binoïdes. Nous reviendrons ultérieurement sur les propriétés et l'intérêt de ces bigrammaires, pour l'instant nous allons étudier longuement un cas particulier appelé bigrammaire régulière.

Définition 5.1.2. :

On appelle bigrammaire régulière une $C_0$-bigrammaire $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ telle que

$A \twoheadrightarrow r \Rightarrow \rho(r) \in T^*(N \cup \{\wedge\})$ .

Donc dansune bigrammaire régulière la racine est constituée d'un mot sur le vocabulaire terminal suivi éventuellement d'un non terminal. Remarquons qu'en dessous de ce non-terminal figure seulement la ramification vide.

C'est facile de voir que le langage des mots des racines engendrés par une bigrammaire régulière est régulier de même que les langages obtenu en "coupant" à un niveau donné fixe les ramifications engendrées. C'est seulement si on examine les mots figurant à une profondeur arbitrairement grande et en particulier aux feuilles que l'on obtient des langages algébriques. C'est grâce à cela que l'on va obtenir de nombreuses propriétés de décidabilité.

Remarque :

La terminologie invite à penser que les bigrammaires régulières engendrent les bilangages réguliers ; c'est effectivement le cas comme on le verra au paragraphe 5.5. proposition 5.5.13.



### 5.2. Grammaires parenthésées et bigrammaires régulières.

Définition 5.2.1. :

Soit $T, \bar{T}$ et $T'$ trois vocabulaires disjoints deux à deux, $T$ et $\bar{T}$ étant un bijection par l'application $a \rightarrow \bar{a}$ . On note $R(T', T)$ le langage sur $T \cup \bar{T} \cup T'$ engendré par la grammaire algébrique $G_R = (\{X, Y, Z\}, T \cup \bar{T} \cup T', \rightarrow, X)$ telle que

$X \rightarrow Ya' \mid Y$ (pour tout $a'$ dans $T'$ )

$Y \rightarrow a Z \bar{a} Y \mid \wedge$ (pour tout $a$ de $T$ )

$Z \rightarrow Y a' Z \mid \wedge$ (pour tout $a'$ de $T'$ )

Comme le montre la proposition 5.2.2. suivante $G_R$ engendre de manière non ambigüe les représentations parenthésées infixées des seconds membres des règles des bigrammaires.

On montre facilement que $G_R$ n'est pas ambigüe.

Proposition 5.2.2. :

Soit $\theta : \hat{T}[T'] \rightarrow (T \cup \bar{T} \cup T')^*$ défini par

$\theta(\wedge) = \wedge$

$\theta(a \times r + r') = a\, \theta(r)\, \bar{a}\, \theta(r')$ (pour tout $a$ de $T$ )

$\theta(a' + r') = a'\, \theta(r')$ (pour tout $a'$ de $T'$ )

L'image de $\theta$ est exactement les expressions parenthésées sur les vocabulaires $T, \bar{T}$ et $T'$, de plus $\theta$ est une injection et enfin on obtient l'équivalence suivante

$\alpha \in R(T', T) \Leftrightarrow (\exists!\, r \in \hat{T}[T'])(\, \theta(r) = \alpha$ et $\rho(r) \in T^*(N \cup \{\wedge\}))$

La démonstration de cette proposition est une suite de récurrence triviale.

Définition 5.2.3. :

On appelle grammaire parenthésée un sextuplet

$G = (N, T', T, \bar{T}, \rightarrow, X)$ tel que

- $N, T', T, \bar{T}$ sont des vocabulaires deux à deux disjoints
- $T$ et $\bar{T}$ sont en bijection par l'application $a \mapsto \bar{a}$
- Le quadruplet $G' = (N, T' \cup T \cup \bar{T}, \rightarrow, X)$ est une grammaire algébrique telle que si $A \rightarrow \alpha$ alors $\alpha$ appartient à $R(N \cup T', T)$ . Le langage engendré par $G$ est le langage engendré par la grammaire $G'$ . Un langage est dit parenthésé s'il peut être engendré par une grammaire parenthésée.

Remarque 1 :

La définition 5.2.3. est évidemment beaucoup plus générale que celle donnée en 4.1.. Nous appellerons grammaires parenthésées classiques les grammaires définies en 4.1..

Remarque 2 :

Soit $G = (N, T', T, \bar{T}, \rightarrow, X)$ une grammaire parenthésée, on peut construire une grammaire parenthésée $G'' = (N, \phi, T_1, \bar{T}_1, \hookrightarrow, X)$ équivalente à $G$ en un certain sens, il suffit pour cela de choisir un vocabulaire $\bar{T}'$ en bijection avec $T'$, de poser $T_1 = T \cup T'$ et $\bar{T}_1 = \bar{T} \cup \bar{T}'$ et de définir

$$A \hookrightarrow \alpha \Leftrightarrow (\exists\, \alpha')\ (A \rightarrow \alpha' \ \text{ et } \ \alpha' = h(\alpha))$$

où $h$ est l'homomorphisme de $(N \cup T' \cup T \cup \bar{T})^* \rightarrow (N \cup T' \cup \bar{T}' \cup T \cup \bar{T})^*$ défini par

$A \in N \Rightarrow h(A) = A$

$a \in T \Rightarrow h(a) = a$

$\bar{a} \in \bar{T} \Rightarrow h(\bar{a}) = a$

$a' \in T' \Rightarrow h(\bar{a}') = a'\, \bar{a}'$ .

L'homomorphisme $h$ remplace donc chaque élément de $T'$ par un couple de parenthèses successives. Il est trivial de démontrer que

$h(L(G)) = L(G'')$

et que de plus $h$ est une bijection de $L(G)$ sur $L(G'')$ .

Dans toute la suite nous supposerons donc $T' = \phi$ et une grammaire parenthésée, sera donc un quintuplet $G = (N, T, \overline{T}, \rightarrow, X)$. Remarquons que dans ce cas $L(G)$ est contenu dans la langage de Dyck construit sur $T$.

Théorème 5.2.4. :

Soit $N, T, \overline{T}$ trois vocabulaires, il existe une bijection entre les bigrammaires régulières ayant comme vocabulaires $N$ et $T$ et les grammaires parenthésées ayant comme vocabulaires $N, T$ et $\overline{T}$ telle que si $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ et $G' = (N, T, \overline{T}, \rightarrow, X')$ sont associées alors $G$ et $G'$ ont le même axiome et $A \underset{G}{\overset{*}{\twoheadrightarrow}} r \Leftrightarrow A \underset{G'}{\overset{*}{\longrightarrow}} \theta(r)$.

Démonstration :

Soit $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ une bigrammaire régulière et $G' = (N, T, \overline{T}, \rightarrow, X')$ une grammaire parenthésée. On dira que $G$ et $G'$ sont associées si et seulement si elles ont le même axiome et

$$(\forall A \in N)\ (\forall r \in \widehat{N \cup T})\ (A \underset{G}{\twoheadrightarrow} r \Leftrightarrow A \underset{G'}{\longrightarrow} \theta(r)) .$$

Cette association est évidemment bijective. Il est facile de démontrer par récurrence que si $G$ et $G'$ sont associés alors

$$(\forall A \in N)\ (\forall r \in \widehat{N \cup T})\ (A \underset{G}{\overset{*}{\twoheadrightarrow}} r \Leftrightarrow A \underset{G'}{\overset{*}{\longrightarrow}} \theta(r)) .$$

On en déduit que $L(G")$ et $BL(G)$ sont liés par la relation

$$\theta(BL(G)) = L(G) .$$

(L'application $\theta$ sur $BL(G)$ est d'ailleurs dans ce cas la représentation infixée des ramifications de $BL(G)$).

On peut donc passer de façon biunivoque des grammaires parenthésées aux bigrammaires régulières.

Dans la suite nous ferons les démonstrations en termes de bigrammaires régulières et nous nous contenterons de traduire les résultats en termes de grammaires parenthésées sous forme de corollaires.

## 5.3. Réduction des bigrammaires régulières.

Deux bigrammaires sont équivalentes si et seulement si elles engendrent le même bilangage.

Théorème 5.3.1. :

Soit $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ une bigrammaire régulière, il existe une bigrammaire régulière $G' = (N', T, \mapsto, X)$ équivalente à $G$ et dont les règles sont de la forme

$$A \longmapsto \wedge \quad \text{ou} \quad A \mapsto a \times B + C \qquad (A, B, C \in N', a \in T) .$$

Démonstration :

Nous donnerons seulement le schéma de la réduction, la démonstration complète se trouve dans [53]. Tout au cours de la réduction si on rencontre des règles de la forme $A \twoheadrightarrow B$ on les supprime en employant la méthode utilisée pour les grammaires.

1er pas : On peut trouver une bigrammaire équivalente à $G$ où toutes les règles sont de la forme $A \twoheadrightarrow r + B$ ou $A \twoheadrightarrow \wedge$ avec $\rho(r) \in T^*$.

Il suffit de remplacer les règles $A \twoheadrightarrow r$ par $A \twoheadrightarrow r + A'$ et $A' \twoheadrightarrow \wedge$ où $A'$ est un nouveau non terminal. Supposons cette condition réalisée.

2ème pas : On peut trouver une bigrammaire équivalente à $G$ où toutes les règles sont de la forme $A \twoheadrightarrow a \times r + B$. Il suffit pour cela de remplacer chaque règle de la forme

$$A \twoheadrightarrow a_1 \times r_1 + a_2 \times r_2 + \ldots + a_k \times r_k + B \quad \text{par}$$

$$A \twoheadrightarrow a_1 \times r_1 + A_1,\ A_1 \twoheadrightarrow a_2 \times r_2 + A_2, \ldots, A_{k-1} \twoheadrightarrow a_k \times r_k + B \quad \text{où } A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$$

sont de nouveaux non terminaux.

Supposons cette condition réalisée.

3ème pas : On peut trouver une bigrammaire équivalente à $G$ où toutes les règles sont de la forme $A \twoheadrightarrow a \times (A_1 + A_2 + \ldots + A_k) + B$. Il suffit pour montrer cela de trouver un procédé permettant d'abaisser la hauteur d'une ramification qui est dans le second membre d'une règle. Or si



$A \twoheadrightarrow a \times (r_1 + r_2 + \ldots + r_k) + B$ est une règle de $G$, on obtient une grammaire équivalente en remplaçant cette règle par $A \twoheadrightarrow a \times (A_1 + A_2 + \ldots + A_k) + B$, $A_1 \twoheadrightarrow r_1, \ldots, A_k \twoheadrightarrow r_k$ où $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont de nouveaux non-terminaux. En réitérant ce procédé on obtient la condition annoncée que l'on suppose réalisée.

4ème pas : Les trois premiers pas étaient triviaux, celui-ci l'est moins.

Pour arriver au résultat annoncé dans le théorème il suffit maintenant de trouver un procédé permettant de diminuer le nombre $k_G$ défini par

$$k_G = \mathrm{Sup}(|\rho(r)| \ ; (\exists A)\ (\exists B)(\exists a)(A \twoheadrightarrow a \times r + B)) .$$

Si $k_G = 1$ la réduction est terminée.

Supposons $k_G \geqslant 2$. Soit $P_1$ l'ensemble des règles de $G$ de la forme $A \twoheadrightarrow a \times r + B$ avec $|\rho(r)| = k_G$ que l'on numérote de 1 à $r$, soit $P_2$ l'ensemble des autres règles de $G$, pour les $i$ compris entre 1 et $p$ on considère des vocabulaires $N_i$ disjoints de $N$, disjoints entre eux et en bijection avec $N$ par les applications $\tau_i : N_i \rightarrow N$. On définit alors une bigrammaire

$$G' = (N \cup (\bigcup_{i=1}^{p} N_i), T, \twoheadrightarrow, X) \quad \text{équivalente à } G \text{, en posant}$$

$$(A \twoheadrightarrow r) \in P_2 \Rightarrow A \twoheadrightarrow r$$

$$(A_i \twoheadrightarrow a_i \times (A_i^1 + A_i^2 + r_i) + B_i) \in P_1 \Rightarrow A_i \mapsto a_i \times (\tau_i^{-1}(A_i^1) + r_i) + B_i$$

$$\text{et} \quad \tau_i^{-1}(A_i) \mapsto a_i \times (\tau_i^{-1}(A_i^1) + r_i) + \tau_i^{-1}(B_i)$$

$$(A \twoheadrightarrow r + B) \in P_2 \Rightarrow \tau_i^{-1}(A) \mapsto r + \tau_i^{-1}(B)$$

$$A \longrightarrow \wedge \Rightarrow \tau_i^{-1}(A) \twoheadrightarrow A_i^2 .$$

On obtient alors une grammaire $G'$ telle que $k_{G'} = k_G - 1$ et pour laquelle il n'est pas très difficile de montrer qu'elle est équivalente à $G$.

Corollaire 5.3.2. :

Pour toute grammaire parenthésée il existe une grammaire équivalente dont les règles sont de la forme

$$A \rightarrow a\, B\, \overline{a}\, C \quad \text{ou} \quad A \rightarrow \wedge$$

## 5.4. Lien entre les deux définitions des grammaires parenthésées.

Dans ce paragraphe on caractérise de manière effective les grammaires parenthésées définies en 5.2.3. qui sont équivalentes aux grammaires parenthésées classiques définies en 4.1.

Définition 5.4.1. :

Soit $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ une bigrammaire régulière. On associe à cette bigrammaire la grammaire régulière $G\rho = (N, T, \rightarrow, X)$ telle que

$$A \rightarrow \alpha \Leftrightarrow (\exists r)(A \twoheadrightarrow r \quad \text{et} \quad \rho(r) = \alpha) .$$

On dit que $G$ est non récursive à l'horizontale (en abrégé NRH) si et seulement si tous les langages $L(G\rho, A) = \{\alpha \ ; A \underset{G\rho}{\overset{*}{\longrightarrow}} \alpha \text{ et } \alpha \in T^*\}$ sont finis.

Remarque :

1°) On montre facilement que $L(G\rho, A) = \rho(B(G, A))$

2°) Le fait que $G$ soit NRH est décidable car cela signifie simplement que $G\rho$ n'est pas récursive à droite.

Théorème 5.4.2. :

Les langages engendrés par les grammaires parenthésées au sens classique sont les représentations parenthétiques des bilangages engendrées par les bigrammaires régulières NRH et dont les règles ayant l'axiome en premier membre sont de la forme $X \rightarrow a \times r$ avec $a \in T$.

Démonstration :

Si $G$ est une grammaire parenthésée au sens classique, alors pour chaque $A$ de $N$ on a $L(G_\rho, A)$ réduit à des mots d'une lettre dans la bigrammaire régulière correspondante.

Réciproquement, soit $G$ une bigrammaire régulière vérifiant les conditions du théorème, on peut remarquer que la construction de la réduite de $G$ ne change pas son caractère NRH. Donc supposons $G$ réduite (pour la suite de la démonstration il suffit d'ailleurs d'aller jusqu'au 3ième pas de la réduction). Soit $A \to r$ une règle de $G$ . Soit $r_1, r_2, \dots, r_k$ les ramifications qui dérivent de $r$ en appliquant des réécritures uniquement sur la racine et tels que $\rho(r_i) \in T^*$ ; l'hypothèse "$G$ est NRH" est nécessaire et suffisante pour que ces ramifications soient en nombre fini. On obtient alors une bigrammaire équivalente en remplaçant chaque règle $A \to r$ par les règles $A \to r_1 | r_2 | \dots | r_k$ . Numérotons ces nouvelles règles sauf celles de premier membre $X$ et celles de second membre $\wedge$ . Soit $A_i \to r_i$ la règle de numéro $i$ avec $r_i = a_1^i \times r_1^i + \dots + a_{k_i}^i \times r_{k_i}^i$ . On introduit, pour chaque $i$, $k_i$ nouveaux terminaux $A_1^i \dots A_{k_i}^i$ et on remplace $G$ par la bigrammaire $G' = (\{X\} \cup \bigcup_i \{A_1^i, \dots, A_{k_i}^i\}, T, \rightsquigarrow, X)$ telle que $X \rightsquigarrow r' \iff (\exists r)(X \to r \text{ et } r' \in h(r))$

$$A_j^i \rightsquigarrow r' \iff r' \in a_j^i \times h(r_j^i)$$

où $h$ est la fonction de $\widehat{N \cup T}$ dans $\mathfrak{S}(\widehat{\{X\} \cup (\bigcup_i \{A_1^i \dots A_{k_i}^i\}) \cup T})$ définie par

$$h(\wedge) = \wedge$$

$$h(x \times r' + r'') = \text{si } x \in T \text{ alors } x \times h(r') + h(r'')$$

$$\text{sinon si } x \to \wedge \text{ alors } h(r'') \cup \bigcup_{\substack{i \text{ tel que} \\ A_i = x}} A_1^i + \dots + A_{k_i}^i + h(r'')$$

$$\text{sinon } \bigcup_{\substack{i \text{ tel que} \\ A_i = x}} A_1^i + \dots + A_{k_i}^i + h(r'')$$

avec la convention $\bigcup_{\substack{i \text{ tel que} \\ A_i = X}} A_1^i + \dots + A_{k_i}^i = X$ .

On obtient alors une bigrammaire régulière équivalente à $G$ et qui correspond à une grammaire parenthésée au sens classique.

Exemple : $G = (\{X, A, B\}, \{a, b, c\}, \to, X)$ avec

$X \to a \times (A + B) | b \times B | a \times X$

$A \to a \times A + B | \wedge$

$B \to c \times A | \wedge$

On a $G_\rho = (\{X, A, B\}, \{a, b, c\}, \to, X)$ avec

$X \to a | b \quad A \to a\, B | \wedge \quad B \to c | \wedge$ .

Donc $G_\rho$ n'est pas récursive à droite et donc $G$ est NRH.

On obtient une bigrammaire équivalente à $G$ en remplaçant les règles de $G$ par

$X \to a \times (A + B) | b \times B | a \times X$

$A \to a \times A + c \times A \mid 1 \mid a \times A \mid 2 \mid \wedge$

$B \to c \times A \mid 3 \mid \wedge$

la grammaire $G'$ est alors

$X \to a | a \times B_1^3 | a \times (A_1^1 + A_2^1) | a \times (A_1^1 + A_2^1 + B_1^3) | a \times A_2^2 | a \times A_2^2 + B_1^3 | b | b \times B_1^3 | a \times X$

$A_1^1 \to a | a \times (A_1^1 + A_2^1) | a \times A_2^2$

$A_2^1 \to c | c \times (A_1^1 + A_2^1) | c \times A_2^2$

$A_2^2 \to a | a \times (A_1^1 + A_2^1) | a \times A_2^2$

$B_1^3 \to c | c \times (A_1^1 + A_2^1) | c \times A_2^2$ .



En quelque sorte on peut dire que la généralisation que nous présentons ici des grammaires parenthésées et du même type que celle qui fait passer de l'étude des langages finis à l'étude des langages réguliers.

5.5. Bigrammaire régulière inversible.

Mc Naughton [59] introduit la notion grammaire parenthésée inversible (backwards - deterministic parenthesis grammar). Une grammaire parenthésée est dite inversible si deux règles distinctes ont des seconds membres distincts. Dans la théorie classique, on déduit de cette définition qu'une grammaire inversible est non ambigüe. De plus, pour ce type de grammaire on peut commencer l'analyse syntaxique d'un mot par celle d'un facteur quelconque limité par deux parenthèses associées. Ces résultats ne se généralisent pas immédiatement à la forme générale des grammaires parenthésées. En effet, la non-ambiguité d'une grammaire inversible est due en particulier au fait qu'il est impossible, vu la forme particulière des règles dans la cas classique de reconstruire un second membre de règle en utilisant d'autres règles. Ce n'est pas le cas avec les définitions données ici et même si on impose à une grammaire parenthésée générale de vérifier que des règles distinctes ont des seconds membres distincts, cette grammaire peut être ambigüe. Pour obtenir des résultats comparables à ceux de Mc Naughton il est donc nécessaire d'imposer une forme particulière au second membre des règles d'une grammaire parenthésée. Nous choisirons ici de prendre comme forme particulière $a\, A\, \bar{a}\, B$ ou $\wedge$ ; cette forme semble particulièrement adaptée vu le théorème 5.3.1.. On peut alors définir dans ce cadre une nouvelle notion de grammaire parethésée inversible et obtenir des résultats comparables à ceux de Mc Naughton [59] mais plus puissants et plus généraux. Au paragraphe 5.7. on donne des définitions plus générales de la notion de grammaire inversible qui recouvre le cas particulier traité par Mc Naughton et le cas traité ici.

Définition 5.5.1. :

Soit $G = (N, T \twoheadrightarrow, X)$ une bigrammaire régulière, on dit que $G$ est inversible si elle vérifie les conditions suivantes :

i) l'axiome $X$ n'apparaît pas en partie droite des règles

ii) $(\forall A \in N)(\forall B \in N)(\forall \alpha \in \widehat{N \cup T})(A \twoheadrightarrow \alpha \text{ et } B \twoheadrightarrow \alpha \Rightarrow A = X \text{ ou } B = X \text{ ou } A = B)$

iii) $G$ est réduite au sens du théorème 5.3.1.

Les conditions i) et ii) sont légèrement différente de celles introduites par Mc Naughton [ 59 ] ceci est dû au fait que pour cet auteur une grammaire peut avoir plusieurs axiomes.

Proposition 5.5.2. :

Soit $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ une bigrammaire régulière inversible alors $G$ n'est pas ambigüe (c'est à dire que la grammaire parenthésée $G' = (N, T, \bar{T}, \to, X)$ n'est pas ambigüe).

Démonstration :

Soit $P$ le langage de Dyck sur $T$ et soit $g : P \to \mathfrak{S}(N)$ défini par $g(\alpha) = \{A ; A \overset{*}{\underset{G'}{\rightarrowtail}} \alpha\}$.

Pour démontrer que $G'$ est non ambigüe il suffit de montrer que

(I) $(\forall \alpha \in P)(\exists A \in N)(g(\alpha) = \phi \text{ ou } g(\alpha) = \{A\} \text{ ou } g(\alpha) = \{A, X\})$ .

Démontrons (I) par récurrence sur $\alpha$ .

Si $\alpha = \wedge$ ; $g(\alpha) = \{A ; A \in N \text{ et } A \to \wedge\}$ . D'après la condition ii) de la définition 5.5.1., un seul non terminal différent de $X$ et éventuellement $X$ vérifient $A \to \wedge$ . Donc (I) est vérifié pour $\alpha = \wedge$ . Supposons (I) vérifié pour $\alpha' \in P$ et $\alpha'' \in P$ et démontrons (I) pour $\alpha = a\, \alpha'\, \bar{a}\, \alpha''$ . Si $g(\alpha) \neq \phi$ , il existe une dérivation de la forme $A \underset{G}{\rightarrowtail} a\, B\, \bar{a}\, C \overset{*}{\underset{G}{\rightarrowtail}} \alpha$ ; donc $B \in g(\alpha')$ et $C \in g(\alpha'')$ . D'après la condition i) on a $B \neq X$ et $C \neq X$ , donc $B$ et $C$ sont déterminés de manière unique grâce à l'hypothèse de récurrence et donc $A$ est égal à $X$ ou $A$ est déterminé de manière unique par $a$, $B$ et $C$, d'où le résultat pour $\alpha$ .

Remarque :

Soit $\alpha \in P$ de la forme $\alpha = \alpha' \ a \ \alpha'' \bar{a} \alpha'''$ où $a$ et $\bar{a}$ sont un couple de parenthèse associée, si $\alpha$ est engendré par $G'$ alors il existe certainement une règle de $G$ de la forme $A \to a B \bar{a} C$ telle que $B \xrightarrow[G']{*} \alpha''$ . De plus on a $B \in g(\alpha'')$ . Ceci signifie que pour faire l'analyse de $\alpha$ on peut commercer par celle de $\alpha''$ qui nous donnera un non terminal $B \neq X$ et faire ensuite l'analyse de $\alpha' \ a \ B \ a \ \alpha''$ . Dans le cadre des définitions de Mc Naughton [4] , on peut aller un cran plus haut en trouvant $B'$ tel que $B' \to a B \bar{a}$ .

La suite du paragraphe va être consacrée à la construction de grammaires inversibles équivalentes à une grammaire donnée, les grammaires obtenues étant de plus en plus structurées jusqu'à obtenir une grammaire canoniquement associée au langage parenthésé considéré. Au passage nous démontrerons des résultats sur l'équivalence des bigrammaires régulières et sur le problème de l'ambiguité des bigrammaires régulières.

Définition 5.5.3. :

On appelle T-algèbre diadique un couple $(E, (f_a)_{a \in T})$ formé d'un ensemble $E$ et de card(T) opérations binaires sur $E$ en bijection avec $T$ .

Exemple :

le T-binoïde universel $\hat{T}$ peut être muni d'une structure de T-algèbre diadique en posant
$f_a(r, r') = a \times r + r'$

quand on parlera de la T-algèbre diadique $\hat{T}$ c'est à cette structure que l'on fera référence.

Définition 5.5.4. :

Si $E$ et $E'$ sont deux T-algèbre diadiques , un homomorphisme de $E$ dans $E'$ est une application $h : E \longrightarrow E'$ telle que
$h(f_a(x, y)) = f'_a(h(x), h(y))$ pour tout $a$ de $T$ et tout $x$ et $y$ de $E$ .

Proposition 5.5.5. :

La T-algèbre diadique $\hat{T}$ est libre de base $\{\wedge\}$ c'est à dire que si $E$ est une T-algèbre diadique et si $e$ est un élément quelconque de $E$ alors il existe un et un seul homomorphisme $h$ de $\hat{T}$ dans $E$ tel que $h(\wedge) = e$ .

Démonstration :

Cela est une trivialité en effet $h$ doit vérifier
$h(\wedge) = e$ et $h(a \times r + r') = f_a(h(r), h(r'))$

et il existe une et une seule application de $\hat{T}$ dans $E$ vérifiant ces conditions.

Définition 5.5.6. :

Soit $G = (N \cup \{X\} , T, \twoheadrightarrow, X)$ une bigrammaire, on dit que $G$ est associée à une T-algèbre diadique si et seulement si c'est une bigrammaire régulière vérifiant les conditions suivantes :

- $X \notin N$
- $X$ n'intervient pas en partie droite d'une règle
- $G$ est réduite
- $N$ a une structure de T-algèbre diadique pour une famille de loi $(f_a)_{a \in T}$
- $(\forall A \in N)(\forall a \in T)(\forall B \in N)(\forall C \in N)(A \twoheadrightarrow a \times B + C \iff A = f_a(B, C))$
- $(\exists! A \in N)(A \to \wedge)$ .



On peut remarquer qu'une telle bigrammaire est en particulier inversible.

Proposition 5.5.7. :

Pour toute bigrammaire $G = (N', T, \twoheadrightarrow, X')$ il existe une bigrammaire $G' = (N \cup \{X\}, T \twoheadrightarrow, X)$ équivalente à $G$ et associée à une T-algèbre diadique.

Démonstration :

On peut supposer $G$ réduite, prenons alors $N = \mathfrak{P}(N')$ et posons
$f_a(E, E') = \{A \ ; A \in N'$ et $(\exists B \in E)(\exists C \in E') (A \twoheadrightarrow a \times B + C)\}$ .

On munit ainsi $N$ d'une structure de T-algèbre diadique.

Soit $E_0 = \{A \ ; A \in N'$ et $A \twoheadrightarrow \wedge \}$

$\xi = \{E \ ; E \in N$ et $X' \in E \}$

Prenons pour $G'$ la grammaire définie pour

$$X \to a \times E + E' \iff f_a(E, E') \in \xi$$

$$E \to a \times E' + E'' \iff f_a(E', E'') = E$$

$$E \to \wedge \iff E = E_0 \ .$$

De façon évidente $G'$ est associée à une T-algèbre diadique et il faut montrer maintenant que $G'$ est équivalente à $G$ . Pour cela il suffit de remarquer que

$$(\forall r \in \hat{T}) \ [ \ E \overset{*}{\underset{G'}{\twoheadrightarrow}} r \iff E = \{ A \ ; A \in N \text{ et } A \overset{*}{\underset{G}{\twoheadrightarrow}} r \} \ ]$$

équivalente qui se démontre trivialement par récurrence sur $r$ .

Commentaire :

Cette démonstration est très proche de celle donnée par Mc Naughton [59] de l'existence d'une grammaire parenthésée inversible équivalente à une grammaire parenthésée donnée, l'idée nouvelle et d'introduire la notion de structure algébrique qui va nous conduire à des recherches de structure algébrique minimale. On trouve dans [63 ] une démonstration tout à fait similaire mais avec des définitions légèrement différentes. Cette notion de T-algèbre diadique n'est pas très loin non plus de la notions d'automate d'arbre travaillant des feuilles vers la racine étudiée par Thatcher [80].

Corollaire 5.5.8. :

Un bilangage $L$ sur $T$ est engendré par une bigrammaire régulière si et seulement s'il existe une T-algèbre diadique finie $N$ , une partie $N_1$ de $N$ et un homomorphisme de T-algèbre diadique $h : \hat{T} \to N$ tel que $h^{-1}(N_1) = L$ .

Démonstration :

Si $L = h^{-1}(N_1)$ alors $L$ est engendré par la bigrammaire régulière
$G' = (N \cup \{X\} , T, \to , X)$ définie pour

$$X \twoheadrightarrow a \times A + B \iff f_a(A, B) \in N_1$$

$$A \twoheadrightarrow a \times B + C \iff f_a(B, C) = A$$

$$A \twoheadrightarrow \wedge \iff h(\wedge) = A$$

Il est en effet facile de démontrer par récurrence que

$$(\forall r \in \hat{T}), (A \overset{*}{\twoheadrightarrow} r) \iff (h(r) = A) \ .$$

Réciproquement si $L$ est engendré par une bigrammaire régulière alors il existe une bigrammaire régulière $G' = (N \cup \{X\}, T, \twoheadrightarrow, X)$ engendrant $L$ et associé à une T-algèbre diadique. Soit $h : \hat{T} \to N$ l'homomorphisme de T-algèbre diadique tel que $h(\wedge) = A$ où $A$ est l'unique élément de $N$ tel que $A \twoheadrightarrow \wedge$ . Il est alors facile de montrer que $L = h^{-1}(N_1)$ où $N_1 = \{A \ ; (\exists a, B, C)(X \to a \times B + C)$ et $A = f_a(B, C) \}$.

Corollaire 5.5.9. : [ 63]

La classe des bilanges engendrées par les bigrammaires régulières est stable par les opérations booléennes et les homomorphismes inverses. D'autre part si $L$ et $L'$ sont des bilangages engendrés par des bigrammaires régulières, $a \times L$ et $L + L'$ le sont aussi.

Démonstration :

Il suffit pour la première partie de calquer la démonstration faite pour les langages réguliers considérés comme image inverse de parties de monoïdes finis. Pour la deuxième affirmation il est trivial de xonstruire des bigrammaires régulières engendrant $a \times L$ et $L + L'$ à partir de celles engendrant $L$ et $L'$. Remarquons que ces constructions sont effectives.

Corollaire 5.5.10 : [ 63]

L'égalité , l'inclusion sont des problèmes décidables pour les bilangages engendrés par les bigrammaires régulières.

Démonstration :

Si $L$ et $L'$ sont des bilangages engendrés par des bigrammaires régulières, on sait construire de manière effective une bigrammaire engendrant la différence symétrique $L \Delta L'$ et une autre engendrant $L' \cap \complement_{\hat{T}} L$ .

Or

$$L = L' \iff L \Delta L' = \phi$$

$$L' \subseteq L \iff L' \cap \complement_{\hat{T}} L = \phi \quad .$$

Donc ces deux problèmes sont décidables.

Ce corollaire a été démontré dans un cas particulier par Mc Naughton [ 59 ] et dans un cas plus général par Paull et Unger [ 67 ], ce problème a été repris dans toute sa généralité et en terme de bilangage par Pair [64][65 ] . Dans [65]on trouve une autre application astucieuse des bilangages aux morphismes de grammaire. Remarquons que cette façon d'aborder le problème de l'égalité de deux bilangages de ce type est beaucoup plus efficace que celle rencontrée dans la littérature. En effet, en général on traite ce problème en construisant une grammaire canonique associée à un langage parenthésé donné qui n'est pas nécessaire pour ce problème. Par exemple, pour comparer deux langages réguliers il n'est pas nécessaire de calculer les automates minimaux de ces deux langages.

Corollaire 5.5.11 :

Le problème de l'ambiguité est décidable pour les bigrammaires régulières.

Démonstration :

Les réductions conduisant à la forme réduite énoncée au théorème 3.1.1. ne changent pas le caractère amgigü ou non d'une bigrammaire sauf peut être la toute première réduction qui consiste à supprimer les règles de la forme $A \succ\!\!- B$ et qui peut supprimer l'ambiguité d'une grammaire. Mais si l'ambiguité provient de cette réduction elle est facile à tester directement. Donc on peut se contenter de traiter le cas où $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ est sous forme réduite. Pour chaque $A \in N$ notons $\mathfrak{B}(A) = \{r \; ; \; A \underset{G}{\overset{*}{\twoheadrightarrow}} r \text{ et } r \in \hat{T}\}$ . Pour que $G$ soit ambigüe il faut et il suffit que $G$ vérifie :

$$(\exists a \in T)(\exists A)(\exists B)(\exists B')(\exists C)(\exists C')(A \twoheadrightarrow a \times B + C \text{ et } A \twoheadrightarrow a \times B' + C' \text{ et } a \times B + C \neq a \times B' + C'$$
$$\text{et } (a \times \mathfrak{B}(B) + \mathfrak{B}(C)) \cap (a \times \mathfrak{B}(B') + \mathfrak{B}(C)) \neq \phi \;) \quad .$$

Or la vérification de cette condition peut se faire de manière effective car elle revient à tester si des bilangages réguliers sont vides ou non, et d'après le corollaire 5.5.9. la construction de ces bilangages est effective.

Ce corollaire a été énoncé et démontré dans [67 ] à propos des grammaires parenthésées classiques à un seul type de parenthèse. La technique de démonstration proposée dans [67 ] est beaucoup plus lourde que celle mise en évidence ici.



Nous allons voir maintenant que l'on peut enrichir la structure algébrique associée à une bigrammaire régulière en montrant que ce qui a été fait plus haut en utilisant des T-algèbres diadiques peut être recommencer en utilisant des structures de T-binoïdes (§ 0.4).

Définition 5.5.12 :

Soit $G = (N \cup \{X\}, T, \twoheadrightarrow X)$ une bigrammaire régulière, on dit que $G$ est associée à un T-binoïde si et seulement si $G$ vérifie les conditions suivantes :

- $X \notin N$ et $X$ n'intervient pas en partie droite d'une règle
- $G$ est réduite
- $N$ a une structure de T-binoïde, l'élément neutre de + étant $E$
- $(\forall A \in N)(\forall a \in T)(\forall B \in N)\ (\forall C \in N)(A \twoheadrightarrow a \times B + C \iff A = a \times B + C\,)$
- $A \to \wedge \iff A = E$ .

Proposition 5.5.13 :

Un bilangage $L$ sur $T$ est engendré par une bigrammaire régulière si et seulement si il existe un T-binoïde fini $B$ et une partie $B'$ de $B$ telle que pour l'homomorphisme $\psi : \hat{T} \to B$ on ait

$$L = \psi^{-1}(B') \quad .$$

Démonstration :

Si $L = \psi^{-1}(B')$ , on peut définir sur $B$ une structure de T-algèbre diadique en posant $f_a(b, b') = a \times b + b'$ . Soit $h : \hat{T} \to B$ l'homomorphisme de T-algèbre diadique défini par $h(\wedge) = e$ ($e$ est l'élément neutre de $B$ pour $+$ ) , alors il est facile de montrer par récurrence que $h = \psi$ . Donc

$$L = h^{-1}(B') \quad .$$

Réciproquement, si $L$ est engendré par une bigrammaire régulière d'après le corollaire 5.5.8., il existe un T-algèbre diadique $B$ , $h : \hat{T} \to B$ et $B' \subset B$ tel que $L = h^{-1}(B')$ . Soit $B_1 = B^B$ l'ensemble des applications de $B$ dans $B$ , soit $e = h(\wedge)$ , on définit dans $B_1$ la structure de T-binoïde suivante

$$F + G = F \circ G \text{ (composition des applications)}$$
$$(a \times F)(b) = f_a(F(e), b) \quad .$$

Il existe alors un unique homomorphisme de T-binoïde $\psi : \hat{T} \to B_1$ . Montrons que $\psi(r)(e) = h(r)$ en faisant une récurrence sur $r$ .

$$\psi(\wedge)(e) = e = h(\wedge)$$
$$\begin{aligned}\psi(a \times r + r')(e) &= (a \times \psi(r) + \psi(r'))(e) = (a \times \psi(r)) \circ \psi(r')(e) \\ &= (a \times \psi(r))(h(r')) = f_a(\psi(r)(e), h(r')) \\ &= f_a\,(h(r), h(r')) = h(a \times r + r') \quad .\end{aligned}$$

Soit $B_1' = \{F, F(e) \in B'\}$ , on obtient alors $L = \psi^{-1}(B_1')$ .

Cette proposition peut aussi s'énoncer : "Un langage est régulier si et seulement s'il peut être engendré par une bigrammaire régulière" et donc la terminologie est cohérente comme il l'avait été annoncé au paragraphe 5.1.

Corollaire 5.5.14 :

Pour toute bigrammaire $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ il existe une bigrammaire $G(N \cup \{X\}, T, \twoheadrightarrow, X)$ équivalente à $G'$ et associée à un T-binoïde.

Démonstration :

Soit $L$ le bilangage engendré par $G'$. Soit $B$ un $T$ binoïde tel que $L = \psi^{-1}(B')$ avec $B' \subset B$ et $\psi : \hat{T} \to B$, alors $L$ est engendré par la bigrammaire $G = (B \cup \{X\}, T, \twoheadrightarrow, X)$ avec

$X \to a \times s + s' \Longleftrightarrow s \in B$ et $s' \in B$ et $a \times s + s' \in B'$

$s \to a \times s' + s'' \Longleftrightarrow s \in B$ et $s' \in B$ et $s'' \in B$ et $a \times s' + s'' = s$

$s \to \wedge \Longleftrightarrow s = e =$ l'élément neutre de $B$ pour $+$.

5.6.- Construction de bigrammaires inversibles minimales :

Nous allons montrer que parmi les bigrammaires inversibles associées à une T-algèbre diadique (respectivement à un T-binoïde) et engendrant un bilangage régulier donné, il en existe une canoniquement associée à ce bilangage régulier et associée à une T-algèbre diadique (respectivement à un T-binoïde). Ces constructions sont des généralisations de la construction de l'automate minimum de reconnaissance d'un langage et de la construction du monoïde syntaxique d'un langage. D'ailleurs ces constructions sont effectuées en utilisant le même type d'idées que dans le cas des langages, en particulier on introduit des notions comparables à celles de contextes qui servent à faire les constructions dans le cas des langages. Cependant les définitions que nous allons donner vont paraître, pour certaines d'entre elles, pas très naturelles ; d'ailleurs, dans un travail précédent [57 ], l'auteur, bien que présentant l'existence d'un tel objet, était passé à côté de sa définition dans le cas des T-algèbres diadiques. On retrouve la même impression dans les divers articles où sont présenté des résultats similaires [59][13 ]. Comme on le verra au chapitre suivant, ces constructions peuvent se faire dans un cadre beaucoup plus général et celles qui vont suivre dans le présent paragraphe ne seront plus alors que des exemples parmi d'autres .

Commençons par examiner le cas des T-algèbres diadiques.

Définition 5.6.1. :

Soit 1 un objet qui n'apparaît pas sauf mention du contraire dans aucun des vocabulaires manipulés dans le suite . On pose

$\hat{T}\{1\} = \{ r ; r \in \hat{T}[1]$ et $\rho(r) \in T^*(\{1, \wedge\})$ et $(\forall a \in T)(\forall \alpha \in F_a(r))(\alpha \in T^*(\{1, \wedge\}))$ .

Proposition 5.6.2. :

$\hat{T}\{1\}$ muni des lois $f_a(r, s) = a \times r + s$ est une T-algèbre libre de base $\{\wedge, 1\}$ .

Démonstration :

Il faut déjà démontrer que les lois définies sur $\hat{T}\{1\}$ sont internes ce qui se fait sans difficulté. Ensuite si $E$ est une T-algèbre diadique quelconque et si $e_1$ et $e_2$ sont deux éléments distincts ou confondus de $E$ il faut montrer qu'il existe un unique homomorphisme $h : \hat{T}\{1\} \to E$ tel que $h(\wedge) = e_1$ et $h(1) = e_2$ . Là encore la vérification est presque immédiate.

Proposition 5.6.3. :

Soit $h : \hat{T} \to E$ un homomorphisme et soit $r \in \hat{T}\{1\}$ , on peut associer à $r$ une application $r_h : E \to E$ en utilisant le procédé suivant : soit $e \in E$ , soit $h_e$ l'unique homomorphisme de $T\{1\}$ dans $E$ tel que $h_e(\wedge) = h(\wedge)$ et $h_e(1) = e$ , on pose alors $r_h(e) = h_e(r)$ .

On utilisera souvent dans la suite le cas particulier où $h$ est soit l'identité de $\hat{T}$ soit l'injection canonique de $\hat{T}$ dans $\hat{T}\{1\}$ . Dans ces deux cas on notera $\bar{r}$ l'application associée à $r$ obtenue.



Lemme 5.6.4. :

Soit $h : \hat{T} \to E$ et $k : E \to E'$ deux homomorphismes et soit $r \in \hat{T}\{1\}$ alors $r_{k \circ h} \circ k = k \circ r_h$ .

Démonstration :

On a $r_{k \circ h}(k(e)) = (k \circ h)_{k(e)}(r)$ et $k \circ r_h(e) = k \circ (h_e)(r)$ . Il suffit donc de comparer les deux homomorphismes $(k \circ h)_{k(e)}$ et $k \circ (h_e)$ sur la base $\{\wedge, 1\}$ ce qui est immédiat.

Définition 5.6.5. :

Soit $L$ un bilangage, on appelle contexte à droite pour $L$ l'application :

$D_L : \hat{T} \to \mathfrak{P}(\hat{T}\{1\})$ définie par

$D_L(s) = \{r ; r \in \hat{T}\{1\}$ et $\bar{r}(s) \in L \}$ .

Proposition 5.6.6. :

L'ensemble $\mathfrak{D}_L = \{D_L(s) ; s \in \hat{T} \}$ peut être muni d'une structure de T-algèbre diadique de façon que $D_L = \hat{T} \to \mathfrak{D}_L$ soit un homomorphisme surjectif.

Démonstration :

La surjectivité de $D_L$ est évidente par définition. Pour démontrer le reste de la proposition, il suffit de démontre que

(I) $(\forall a \in T)(\forall r, s, r', s' \in \hat{T})(D_L(r) = D_L(r')$ et $D_L(s) = D_L(s') \Rightarrow D_L(a \times r + s) = D_L(a \times r' + s')$ .

Une fois (I) démontré, il suffira de poser $f_a(D_L(r), D_L(s)) = D_L(a \times r + s)$ pour réaliser les résultats de la proposition 5.6.5.. Démontrons (I). On suppose donc que $D_L(r) = D_L(r')$ et $D_L(s) = D_L(s')$ , on obtient alors la suite d'équivalence suivante :

$t \in D_L(a \times r + s) \Longleftrightarrow \bar{t}(a \times r + s) \in L \Longleftrightarrow \bar{t}(a \times 1 + s)(r) \in L \Longleftrightarrow \bar{t}(a \times 1 + s) \in D_L(r) \Longleftrightarrow$

$\bar{t}(a \times 1 + s) \in D_L(r') \Longleftrightarrow \bar{t}(a \times r' + s) \in L \Longleftrightarrow \bar{t}(a \times r' + 1) \in D_L(s) \Longleftrightarrow$

$\bar{t}(a \times r' + 1) \in D_L(s') \Longleftrightarrow \bar{t}(a \times r' + s') \in L \Longleftrightarrow t \in D_L(a \times r' + s')$ CQFD

Proposition 5.6.7. :

Considérons le triplet $(D_L, \mathfrak{D}_L, \mathfrak{D}'_L)$ avec $D_L$ et $\mathfrak{D}_L$ définis comme ci-dessus et $\mathfrak{D}'_L = \{ D_L(s) ; s \in \hat{T}$ et $1 \in D_L(s)\}$ , alors $L = D_L^{-1}(\mathfrak{D}'_L)$ .

Démonstration :

On obtient immédiatement

$s \in D_L^{-1}(\mathfrak{D}'_L) \Longleftrightarrow D_L(s) \in \mathfrak{D}'_L \Longleftrightarrow 1 \in D_L(s) \Longleftrightarrow \bar{1}(s) \in L \Longleftrightarrow s \in L$ .

Théorème 5.6.8.:

Le triplet $(D_L, \mathfrak{D}_L, \mathfrak{D}'_L)$ jouit de la propriété universelle suivante : si $(h, E, E')$ est un triplet formé d'un homomorphisme surjectif $h$ entre les deux T-algèbres diadiques $\hat{T}$ et $E$ et si $L = h^{-1}(E')$ alors il existe un unique homomorphisme $\chi : E \to \mathfrak{D}_L$ tel que

i) $D_L = \chi \circ h$

ii) $\mathfrak{D}'_L = \chi(E')$ .

Démonstration :

Pour démontrer i) il suffit de montrer que

$$(\forall s, s' \in \hat{T})(h(s) = h(s') \Rightarrow D_L(s) = D_L(s'))$$

On posera alors $\chi(h(s)) = D_L(s)$ .

Supposons que $h(s) = h(s')$ . On obtient alors la suite d'équivalence suivante

$$r \in D_L(s) \Leftrightarrow \bar{r}(s) \in L \Leftrightarrow h(\bar{r}(s)) \in E' \xleftrightarrow{\text{lemme 5.6.4}} r_h(h(s)) \in E' \Leftrightarrow r_h(h(s') \in E'$$
$$\Leftrightarrow h(\bar{r}(s')) \in E' \Leftrightarrow \bar{r}(s') \in L \Leftrightarrow r \in D_L(s')$$

La démonstration de ii) est évidente.

Commentaire :

Le théorème 5.6.8. affirme donc l'existence d'une T-algèbre diadique minimale associée à un bilangage. On a donc réaliser dans ce cas l'analogue de la construction du monoïde syntaxique pour les langages. On obtient en particulier le corollaire suivant qui est une conséquence immédiate du théorème 5.6.8 et du corollaire 5.5.8.

Corollaire 5.6.9. :

Un bilangage $L$ est régulier si et seulement si $\mathcal{D}_L$ est un ensemble fini.

D'autre part, si $L$ est un bilangage régulier, en suivant la même démarche que pour la démonstration du corollaire 5.5.8 et en utilisant le théorème 5.6.8, on obtient une bigrammaire régulière associée à la T-algèbre diadique $\mathcal{D}_L$ et qui est donc canoniquement associée à $L$ .

Passons maintenant au cas des bigrammaires régulières associées à des T-binoïdes. Les contructions vont être tout à fait similaires ainsi que les résultats obtenus.

Définition 5.6.10. :

Soit $L$ un bilangage sur $T$ . On appelle contexte pour $L$ l'application $C_L : \hat{T} \to \mathcal{P}(T[1])$ définie par $C_L(s) = \{r \; ; \; r \in \hat{T}[1]$ et $\tilde{r}(s) \in L\}$ .

Cette notion a été introduite dans [59] sous un aspect légèrement différent et a été réintroduite indépendamment sous cette forme dans [53] .

Proposition 5.6.11 :

L'ensemble $\mathcal{C}_L = \{C_L(s) \; ; \; s \in \hat{T}\}$ peut être muni d'une structure de T-binoïde telle que $C_L$ soit l'homomorphisme de $\hat{T}$ dans $\mathcal{C}_L$ . De plus on a $L = C_L^{-1}(\mathcal{C}'_L)$ avec $\mathcal{C}'_L = \{C_L(r) \; ; \; 1 \in C_L(r)\}$ .

Démonstration :

Pour la première partie de la démonstration, il suffit de montrer que

i) $C_L(r) = C_L(r')$ et $C_L(s) = C_L(s') \Rightarrow C_L(r + s) = C_L(r' + s')$

ii) $C_L(s) = C_L(s') \Rightarrow C_L(a \times s) = C_L(a \times s')$

Montrons i) $t \in C_L(r + s) \Leftrightarrow \tilde{t}(r + s) \in L \Leftrightarrow \widetilde{t(1 + s)}(r) \in L \Leftrightarrow \tilde{t}(1 + s) \in C_L(r)$

$\Leftrightarrow \tilde{t}(1 + s) \in C_L(r') \Leftrightarrow \tilde{t}(r' + s) \in L \Leftrightarrow t(r' + 1) \in C_L(s)$

$\Leftrightarrow \tilde{t}(r' + 1) \in C_L(s') \Leftrightarrow t \in C_L(r' + s')$

Même type de démonstration pour ii).

La deuxième partie est triviale.

On obtient alors l'analogue du théorème 5.6.8 dans le cas de T-binoïde.



Théorème 5.6.12. :

Le triplet $(C_L, \mathcal{C}_L, \mathcal{C}'_L)$ jouit de la propriété universelle suivante : si $(h, B, B')$ est un triplet formé d'un homomorphisme surjectif entre les deux T-binoïdes $\hat{T}$ et $B$ et si $L = h^{-1}(B')$ alors il existe un unique homomorphisme $\chi : B \to \mathcal{C}_L$ tel que

i) $C_L = \chi \circ h$

ii) $\mathcal{C}'_L = \chi(B')$

La démonstration est la même mutatis mutandis que celle du théorème 5.6.8.

Corollaire 5.6.13 :

Un bilangage $L$ est régulier si et seulement si $\mathcal{C}_L$ est fini.

On peut dans ce cas aussi expliciter une bigrammaire régulière canoniquement associée au bilangage régulier $L$ en posant

Définition 5.6.14 :

Si $L$ est régulier, $\mathcal{C}_L$ est le T-binoïde minimal associé à $L$ ; de plus la grammaire $G = (\mathcal{C}_L \cup \{X\}, T, \Rightarrow, X)$

avec

$$\begin{array}{lll} X \to a \times C + C' & \Leftrightarrow & a \times C + C' \in \mathcal{C}'_L \\ C \to a \times C' + C'' & \Leftrightarrow & a \times C' + C'' = C \\ C \to \wedge & \Leftrightarrow & C = C_L(\wedge) \end{array}$$

est appelée grammaire minimale de $L$ associé à un T-binoïde.

Il se pose le problème de savoir si la construction de ces objets minimaux est effective à partir de la donnée d'un bilangage régulier $L$ par une bigrammaire régulière quelconque. C'est effectivement le cas, Nous ferons la démonstration uniquement pour la structure de T-binoïde à titre d'exemple, en effet au chapitre suivant nous montrerons que ce type de problème est toujours décidable.

Proposition 5.6.15 :

Le T-binoïde minimal associé à $L$ peut être construit de manière effective à partir d'une bigrammaire régulière engendrant $L$ .

Démonstration :

Tout au long des démonstartions les constructions ont été faites de manière effective sauf la construction de $\mathcal{C}_L$ . Donc à partir d'une bigrammaire régulière engendrant $L$ , il est possible de construire de manière effective un T-binoïde $B$ et une partie $B'$ de $B$ tel que $L = h^{-1}(B')$ avec $h : \hat{T} \to B$ .

Commençons par construire $h(\hat{T})$ . Or $h(\hat{T})$ est le sous-ensemble de $B$ formé des éléments que l'on peut obtenir à partir de $e$ en appliquant la loi externe.

Posons

$$B_o = \{e\}$$
$$B_{n+1} = (a \times B_n + B_n) \cup B_n$$

On obtient immédiatement $h(\hat{T}) = \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$

Mais comme $B$ est fini, on a, pour le premier $n_o$ tel que $B_{n_o} = B_{n_o+1}$, $h(\hat{T}) = B_{n_o}$ .

On ne change rien au problème en supposant que $B$ est égal à $B_{n_o}$ et que $B'$ est égal à $B' \cap B_{n_o}$ .

C'est à dire que l'on est ramené au cas où $h$ est surjectif. Il faut maintenant construire dans $B$ la relation d'équivalence

$$b \sim b' \leftrightarrow \chi(b) = \chi(b')$$

où $\chi : B \to \mathscr{C}_L$ est l'homomorphisme tel que $\chi \circ \psi = C_L$ . L'ensemble quotient $B/\sim$ est alors isomorphe au binoïde minimal de $L$ . On obtient

$$\begin{aligned} b \sim b' &\leftrightarrow (\exists r \in \hat{T})(\exists s \in \hat{T})(h(r) = b \text{ et } h(s) = b' \text{ et } \chi o h(r) = \chi o h(s)) \\ &\leftrightarrow (\exists r \in \hat{T})(\exists s \in \hat{T})(h(r) = b \text{ et } h(s) = b' \text{ et } C_L(r) = C_L(s)) \\ &\leftrightarrow (\exists r \in \hat{T})(\exists s \in \hat{T})(h(r) = b \text{ et } h(s) = b' \text{ et } (\forall t \in \hat{T}[1])(\tilde{t}(r) \in L \leftrightarrow \tilde{t}(s) \in L)) \\ &\leftrightarrow (\exists r \in \hat{T})(\exists s \in \hat{T})(h(r) = b \text{ et } h(s) = b' \text{ et } (\forall t \in \hat{T}[1])(h(t(r) \in B' \leftrightarrow h(\tilde{t}(s)) \in B')) \end{aligned}$$

Or si on appelle $t_h$ l'application de $B$ dans $B$ associée au polynome $t$ on a

$$(\forall r \in \hat{T})(\forall t \in \hat{T}[1])(h(\tilde{t}(r)) = t_h(h(r))) \quad .$$

On en déduit donc que $b \sim b' \leftrightarrow (\forall t \in \hat{T}[1])(t_h(b) \in B' \leftrightarrow t_h(b') \in B')$ .

Notons $L_b$ le bilangage sur $T \cup \{1\}$ défini par

$$L_b = \{t \; ; \; t \in \hat{T}[1] \text{ et } t_h(b) \in B'\} \quad .$$

On a donc $b \sim b' \leftrightarrow L_b = L_{b'}$ . Pour montrer que cette relation d'équivalence peut se calculer de manière effective, il suffit donc maintenant de montrer que $L_b$ est un bilangage régulier. Or $t_h(b) = h_b(t)$ , d'où $L_b = h_b^{-1}(B')$ et donc $L_b$ est un bilangage régulier

## 5.7.- Généralisation de la notion de grammaire parenthésée inversible.

Dans ce paragraphe on pose quelques définitions qui permettent de définir des grammaires parenthésées inversibles plus générales que celles étudiées au paragraphe 4. On montre en particulier que ces grammaires inversibles sont non-ambigües.

Définition 5.7.1. :

Soit $r$ une ramification de $\hat{T}[N]$ . Soit $n$ le nombre d'occurrences d'éléments de $N$ dans $r$ . On numérote entre 1 et $n$ ces occurrences. On note $f_r$ la fonction de $(\hat{T})^n \to \hat{T}$ telle que $f_r(r_1, r_2, \dots, r_n)$ est la ramification de $\hat{T}$ obtenu en remplaçant pour chaque $i$ la ième occurrence d'un élément de $N$ par $r_i$ . On dit que $r$ est injectif sur $X$ si la restriction de $f_r$ sur $X^n$ est une fonction injective.

Exemple :

- Si $r = a \times A + B$ , $r$ est injectif sur $\hat{T}$
- Si $r = a \times (A_1 + A_2 + \dots + A_n)$ , $r$ est injectif sur $X = \{r \; ; \; |\rho(r)| = 1\}$ .

Proposition 5.7.2. :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $r$ soit injectif sur $\hat{T}$ est que $\rho(r)$ contienne au plus un élément de $N$ et que deux éléments de $N$ n'ait pas le même prédecesseur. Formellement on obtient :

$$\begin{aligned} r \text{ injectif} \leftrightarrow \; & (\forall a \in T)(\forall \alpha \in F_a(r))(\alpha \in T^* (N \cup \{\wedge\})T^*) \\ & \text{et } \rho(r) \in T^* (N \cup \{\wedge\}) T^* \quad . \end{aligned}$$



Démonstration :

Supposons que $r$ ne vérifie pas cette condition. Soit $i$ et $j$ le numéro de deux occurrences d'élément de $N$ dans $r$ apparaissant toutes les deux dans la racine ou toutes les deux dans une même famille de prédécesseur $a$ . Soit $r'$ la ramification qui est entre ces deux occurrences dans $r$ et $r''$ la ramification obtenue en remplaçant dans $r'$ tout élément de $N$ par $\wedge$ .

Si $r''$ est non vide on obtient :

$$r(\wedge, \wedge, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ième place}}}{r''}, \wedge, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{jième place}}}{\wedge}, \dots \wedge) = r(\wedge, \dots \wedge, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ième place}}}{\wedge}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{jième place}}}{r''}, \dots \wedge)$$

donc $r$ est non injectif.

Si $r''$ est vide alors on obtiendra le même résultat que ci-dessus mais en utilisant une ramification $s$ quelconque à la place de $r''$ .

Réciproquement si la condition est vérifiée par $r$ on montre que $r$ est injectif en raisonnant par récurrence sur $r$ .

Définition 5.7.3. :

Soit $\mathfrak{R}$ un ensemble de ramifications de $\hat{T}[N]$ , on dit que $\mathfrak{R}$ est indécomposable sur $X$ si et seulement si

$$(\forall r \in \mathfrak{R})(\forall r' \in \mathfrak{R})(f_r \neq f'_r \Rightarrow \forall r_1, \dots, r_n \in X \forall r'_1, \dots, r'_p \in X f_r(r_1, \dots, r_n) \neq f_{r'}(r'_1, \dots, r'_p))$$

($n$ et $p$ sont respectivement le nombre d'occurrence d'élément de $N$ dans $r$ et $r'$ , cf définition 5.7.1.)

Exemple :

- Si $r \in \mathfrak{R} \Rightarrow r = \wedge$ ou $r = a \times A + B$ , alors $\mathfrak{R}$ est indécomposable sur $T$ .
- Si $r \in \mathfrak{R} \Rightarrow r = a \times (A_1 + A_2 + \dots + A_n)$ alors $\mathfrak{R}$ est indécomposable sur $X = \{r \; ; \; |\rho(r)| = 1\}$ .

Définition 5.7.4. :

Soit $G = (N, T, \to, X)$ une bigrammaire régulière (ou une $C_o$-bigrammaire) posons

$X_G = \bigcup_{A \in N} \{r \; ; \; A \overset{*}{\succ\!\!-} r \text{ et } r \in T\}$ . $G$ est dite inversible si et seulement si

i) $X$ n'apparaît pas en partie droite des règles
ii) $A \to r$ et $B \to r \Rightarrow A = X$ ou $B = X$ ou $A = B$
iii) Pour chaque $A$ de $N$ l'ensemble $\mathfrak{R}_A = \{r \; ; \; A \to r\}$ est indécomposable sur $X_G$ et chaque second membre de règle est injectif sur $X_G$ .
iv) Il existe au plus un non terminal différent de $X$ dont dérive $\wedge$ .

Théorème 5.7.5. :

Une bigrammaire inversible est non ambigüe.

Soit $g : \hat{T} \longrightarrow \mathfrak{P}(N)$ défini par

$$g(r) = \{A \; ; \; A \overset{*}{\succ\!\!-} r \text{ et } r \in \hat{T}\} \quad .$$

Montrons que

$$(\forall r \in \hat{T})(\exists A \in N)\ (g(r) \subseteq \{A, X\})$$

Pour cela faisons une récurrence sur le nombre de point $n(r)$ de $r$ . Si $n(r) = 0$ alors $r = \wedge$ et l'hypothèse (iv) donne le résultat. Supposons (I) démontrer pour $n(r) \leqslant k$ et supposons que $n(r) = k + 1$.

Soit $A \in g(r)$ . On a $A \succ\!\!- s \overset{*}{\succ\!\!-} r$ .

Donc $r = f_s(r_1, r_2, \dots, r_k)$ et comme $\mathfrak{R}_A$ est indécomposable et $f_s$ injectif $f_s$ , $r_1, r_2, \dots, r_k$ sont déterminés de manière unique donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à $r_1, r_2, \dots, r_k$ et en utilisant l'hypothèse i). On obtient que $s$ est déterminé de manière unique et donc grâce i) et ii) on en déduit (I) pour $r$ .

Pour démontrer que $G$ est non ambigüe, il suffit de montrer que :

$$A \overset{*}{\rightarrowtail} r \text{ et } r \in \hat{T} \Rightarrow (\exists! s)(\exists! r_1, \dots, r_k)(A \to s \text{ et } f_s(r_1, \dots, r_k) = r)$$

Cela se fait aisément par récurrence sur la longueur de la dérivation en employant le même type de raisonnement que pour démontrer (I).

Exemple :

Les grammaires inversibles de Mc Naughton [59] et celles définies au paragraphe 5.5 sont des cas particuliers de la définition 5.7.4..

## 6.- $C_0$-bigrammaire et $C_0$-bilangage.

Rappelons la définition déjà donnée au paragraphe 5.1 des $C_0$-bigrammaires.

Définition 6.1. :

On appelle $C_0$-bigrammaire une bigrammaire $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ telle que

i) $X \in N$

ii) $u \twoheadrightarrow v \Rightarrow u \in N$ et $v \in \hat{T}[N]$

Un bilangage $L$ est un $C_0$-bilangage si et seulement si $L$ peut être engendré par une $C_0$-bigrammaire

Ces bigrammaires on été introduites dans [ 54] et y sont longuement étudiées. Rappelons simplement quelques propriétés immédiates de ces bigrammaires et des bilangages associés.

Proposition 6.1. :

Soit $G = (N, T, \mapsto\!\!\!> , X)$ un $C_0$-bigrammaire, il existe une $C_0$-bigrammaire $G' = (N', T, \twoheadrightarrow , X)$ équivalente à $G$ dont les règles sont de la forme

$A \mapsto\!\!\!> B + C$ ou $A \to a \times B$ $(A, B, C \in N$ et $a \in T)$

Si $L$ est un $C_0$-bilangage alors

i) $\rho(L) = \{ \rho(r) \; ; \; r \in L\}$ est un langage algébrique quelconque

ii) $\varphi(L) = \{ \varphi(r) \; ; \; r \in L\}$ est un langage algébrique quelconque

iii) $ch(L) = \bigcup_{r \in L} ch(r)$ est un langage régulier quelconque

En particulier la classe des $C_0$-bilangages contient strictement celle des bilangages réguliers sur tout vocabulaire à au moins deux lettres.

Les $C_0$-bigrammaires correspondent exactement aux "Balanced Grammars" introduites par Knuth [ 41] . Dans cet article Knuth se pose le problème de savoir si un langage engendré par une "balanced grammar" est un langage parenthésé (au sens classique) ou non. On démontre effectivement que ce problème est décidable. On peut se poser la même question à propos des $C_0$-bigrammaires et des bilangages réguliers mais là le résultat obtenu est différent. En effet :

Proposition 6.2. :

Le problème de savoir si une $C_0$-bigrammaire engendre ou non un bilangage régulier est indécidable.

Démonstration :

Le problème contient en effet le problème de savoir si une grammaire algébrique engendre ou non un langage régulier et ce problème est connu comme indécidable. Comme nous l'avons déjà dit la généralisation qui consiste à passer des grammaires parenthésées aux bigrammaires régulières est du même type que celle qui permet de passer des langages finis aux langages réguliers. Chaque médaille a son revers !



## 7.-Conclusion

Le but de ce chapitre était de généraliser dans le cas des bilangages réguliers les théories connues pour les langages réguliers. On obtient des résultats comparables en plus forts que ceux de Mac Naugthon. De plus, les théories obtenues ont des retombées en théorie des langages classiques comme va le prouver le chapitre 2. Enfin les résultats de ce chapitre fournissent des exemples aux théories développées aux chapitres 3 et 4.

# CHAPITRE II

## QUELQUES APPLICATIONS DIVERSES DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

1.- Application aux réduites de Greibach [31] :

Nous allons appliquer le théorème 5.3.1. de réduction des bigrammaires régulières pour donner une nouvelle démonstration simple d'un résultat connu sur les réduites de Greibach.

On démontre que toute grammaire algébrique est équivalente à une grammaire $G = (N, T, \rightarrow\ , X)$ où les règles sont de la forme $A \rightarrow a\ \alpha | \wedge$ avec $a \in T$ et $\alpha \in N^*$. Cette forme réduite est appelée réduite de Greibach. Il est bien connu que l'on peut améliorer cette réduite en imposant en plus que $A \rightarrow a\alpha \Rightarrow |\alpha| = 2$
On va donner une démonstration utilisant le théorème 5.3.1 du passage de la forme générale à la forme améliorée. des réduites de Greibach.

Démonstration :

Soit $G = (N, T, \rightarrow , X)$ une grammaire sous forme réduite de Greibach. Associons à $G$ la grammaire parenthésée $G' = (N, T, \bar{T}, \mapsto , X)$ avec $\longrightarrow$ défini par

$$A \rightarrow a\ \alpha\ \bar{a} \Longleftrightarrow A \rightarrow a\ \alpha$$
$$A \rightarrow \wedge \qquad \Longleftrightarrow A \rightarrow \wedge\ .$$

Il est évident que $L(G) = h(L(G'))$ avec $h : (T \cup \bar{T})^* \rightarrow T^*$ défini par $h(a) = a$ et $h(\bar{a}) = \wedge$ .
D'après le théorème 5.3.1, $G'$ est équivalente à une grammaire $G'' = (N', T, \bar{T}, \rightsquigarrow , X)$ dont les règles sont de la forme $A \rightsquigarrow a\ B\ \bar{a}\ C \mid \wedge$ on en déduit donc que $L(G) = h(L(G''))$ est engendré par la grammaire $G''' = (N', T, \hookrightarrow, X)$ où $\hookrightarrow$ est défini par

$$A \hookrightarrow a\ B\ C \Longleftrightarrow A \rightsquigarrow a\ B\ \bar{a}\ C$$
$$A \hookrightarrow \wedge \qquad \Longleftrightarrow A \rightsquigarrow$$

D'où l'existence de la réduite de Greibach améliorée.

2.- Application au problème de l'équivalence des grammaires algébriques :

Il est bien connu que le problème général de l'équivalence de deux grammaires algébriques est indécidable. En revanche on sait que l'équivalence structurale des grammaires algébriques est décidable ([67], [64] et corollaire 5.5.10). On connaît d'autre part des classes de grammaires algébriques pour lesquelles le problème de l'équivalence est décidable, par exemple pour la classe des grammaires simples déterministes [15 ]. Le but de ce paragraphe est de donner des moyens algorithmiques pour tester dans des cas particuliers l'équivalence de deux grammaires algébriques. Ces outils permettent de résoudre ce problème quand les deux grammaires ne sont pas très éloignées de l'équivalence structurale.

Le principe commun des méthodes exposées ci-dessous est le suivant :
étant donné une grammaire algébrique $G = (N, T, \rightarrow, X)$ on lui associe de manière algorithmique une bigrammaire régulière $\tau(G)$ de façon que

$$\tau(G) \sim \tau(G') \Rightarrow G \sim G'$$

(le signe $\sim$ entre deux grammaires ou bigrammaires signifie que ces deux grammaires ou bigrammaires engendrent le même langage ou bilangage).

On écrira alors $G \sim G'\ [\tau]$ .

1ère méthode : (équivalence structurale).

Définition 2.1. :

Soit $G = (N, T, \to, X)$ une grammaire algébrique $\tau_{struc}(G)$ est par définition la bigrammaire régulière telle que $\tau_{struc}(G) = (N, T \cup \{\#\}, \twoheadrightarrow, X)$ avec

$$A \to A_1A_2 \dots A_k \iff A \twoheadrightarrow \# \times (A_1 + A_2 + \dots + A_k)$$

De façon évidente $\tau_{struc}(G)$ engendre le bilangage régulier formé de l'ensemble des structures de $G$, c'est à dire l'ensemble de tous les arbres syntaxiques de $G$ où toutes les étiquettes non terminales ont été confondues en une seule notée $\#$.

Il est immédiat que $\tau_{struc}(G) \sim \tau_{struc}(G') \Rightarrow G \sim G'$

En effet on a $L(G) = \varphi(B(\tau_{struc}(G)) = LF(\tau_{struc}(G))$ (définition 2.3.4).

On retrouve la décidabilité du problème de l'équivalence structurale déjà étudié dans [67], [64]

2ème méthode : (équivalence structurale)

Définition 2.2. :

Soit $G = (N, T, \to, X)$ une grammaire algébrique mise sous forme réduite de Greibach, $\tau'_{struc}(G)$ est par définition la bigrammaire régulière telle que $\tau'_{struc}(G) = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ avec

$$A \to a\, A_1A_2 \dots A_k \iff A \twoheadrightarrow a \times (A_1 + A_2 + \dots + A_k)$$

$$A \to \wedge \iff A \twoheadrightarrow \wedge$$

(Cette transformation nous a déjà servi au paragraphe 1 en terme de grammaire parenthésée).

On obtient alors facilement la proposition :

Proposition 2.3. :

On a $L(G) = h(B(\tau'_{struc}(G))$ où $h : \hat{T} \to T^*$ est défini par $h(\wedge) = \wedge$ et $h(a \times r + s) = a\, h(r)\, h(s)$. En particulier $\tau'_{struc}(G) \sim \tau'_{struc}(G') \Rightarrow G \sim G'$

En fait cette deuxième méthode n'améliore pas la première, en effet il est facile de démontrer que pour deux grammaires réduites sous forme de Greibach on a

$$G \sim G' \;[\tau_{struc}] \iff G \sim G' \;[\tau'_{struc}]$$

3ème méthode :

Définition 2.4. :

Soit $G = (N, T, \to, X)$ une grammaire algébrique mise sous forme réduite de Greibach, $\tau_0(G)$ est par définition la bigrammaire régulière telle que $\tau_0(G) = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ avec

$$A \to a\, A_1A_2 \dots A_k \iff A \twoheadrightarrow a \times (A_1 + A_2 + \dots + A_{k-1}) + A_k$$

$$A \to \wedge \iff A \twoheadrightarrow \wedge$$

Avec cette définition on démontre trivialement que

Proposition 2.5. :

$L(G) = h(B(\tau_0(G))$ avec $h$ défini comme en 2.3. En particulier $\tau_0(G) \sim \tau_0(G') \Rightarrow G \sim G'$

Théorème 2.6. :

Si $G$ et $G'$ sont deux grammaires algébriques sous forme réduite de Greibach alors

$$G \sim G' \;[\tau'_{struc}] \Rightarrow G \sim G' \;[\tau_0]$$

La réciproque est fausse.

Ce théorème signifie donc que l'équivalence modulo $\tau_0$ est meilleure que l'équivalence structurale.



Démonstration :

Soit $G = (N, T, \to, X)$ une grammaire algébrique réduite sous forme de Greibach.

Considérons l'application $k : \hat{T}[N] \to \hat{T}[N]$ défini par

$k(\wedge) = \wedge$

$x \in T \cup N$, $a \in T$, $r, s, s' \in \hat{T}[N] \Rightarrow k(r+x) = k(r)+x$ et $k(r+a\,(s+x \times s')) = k(r)+a \times k(s)+k(x \times s')$

Remarquons que $k(r+a \times s) = k(r) + k(a \times s)$

et que plus généralement $k(r+s) = k(r) + k(s)$.

Soit $r_1$ et $r_2$ deux ramifications de $\hat{T}[N]$ telles que $r_2 = k(r_1)$, soit d'autre part $A \to \alpha$ une règle de $G$ qui donne la règle $A \twoheadrightarrow \alpha_1$ (respectivement $A \twoheadrightarrow \alpha_2$) dans $\tau_{struc}(G) = G_1$ (respectivement dans $\tau_0(G) = G_2$). Appliquons ces deux règles $A \to \alpha_1$ et $A \to \alpha_2$ respectivement dans $r_1$ et $r_2$ et ceci à la même place. (Cette locution "à la même place" signifie qu'avant d'appliquer $k$ à $r_1$ pour obtenir $r_2$, on a marqué une occurrence de $A$ dans $r_1$, puisque l'on a effectué la transformation $k$ et que c'est sur l'occurrence de $A$ marquée dans $r_2$ que l'on a appliqué la règle $A \to \alpha_2$). On obtient ainsi deux ramifications $r'_1$ et $r'_2$ et on va montrer que $r'_2 = k(r'_1)$. C'est à dire que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} r_1 \arrow[r, ">>"', "G"'] \arrow[d, "k"'] & r'_1 \arrow[d, "k"] \\ r_2 \arrow[r, "G_2"'] & r'_2 \end{tikzcd}$$

Remarquons déjà que $k(\alpha_1) = \alpha_2$ d'après les définitions de $G_1 = \tau'_{struc}(G)$ et $G_2 = \tau_0(G)$.

D'autre part soit $a$ un élément quelconque de $T$, appliquons toujours à la même place la règle $A \succ\!\!\succ\!- \alpha_2$ dans $k(a \times r_1)$, on obtient une ramification $r''_2$. Démontrons par récurrence sur $r_1$ que

$$r'_2 = k(r'_1) \text{ et } k(a \times r'_1) = r''_2 \qquad (I)$$

(1°) $r_1 = \wedge \Rightarrow r_2 = r'_1 = r'_2 = \wedge$ et $r''_2 = a = k(a \times \wedge)$

(2°) $r_1 = r + x$

1er cas : $x \neq A$ ou ce n'est pas cette occurrence de $A$ qui est sélectionnée

On a $r'_1 = r' + x$, $k(a \times r'_1) = k(a \times (r' + x))$

$= a \times k(r') + x$

$k(a \times r_1) = k(a \times (r + x)) = a \times k(r) + x$

On obtient alors le résultat en appliquant l'hypothèse de récurrence à $r$

2ème cas : $x = A$ et c'est cette occurrence de $A$ qui est sélectionnée.

On a $r'_1 = r + \alpha_1$, $r'_2 = r + \alpha_2$ et en tenant compte de $k(\alpha_1) = \alpha_2$ on en déduit $k(r'_1) = r'_2$. D'autre part $a \times r_1 = a \times (r + A)$, donc $k(a \times (r+A)) = a \times k(r) + A$, d'où

$r''_2 = a \times k(r) + \alpha_2 = k(a \times (r + \alpha_1)) = k(a \times r'_1)$

(3°) $r_1 = r + b\;(s + x \times s') = r + b \times r'$ dans ce cas $r_2 = k(r) + b \times k(s) + k(x \times s') = k(r) + k(b \times r')$

Commençons par comparer $k(a \times r'_1)$ et $r''_2$

$k(a \times r_1) = k(a \times (r + b \times r')) = a \times k(r) + k(b \times r')$

En appliquant l'hypothèse de récurrence soit à $r$ soit à $r'$ suivant la place de l'occurrence de $A$ sélectionnée, on en déduit que $k(a \times r_1') = r_2''$ .

Pour comparer $r_2'$ et $k(r_1')$ , suivant la place de l'occurrence de $A$ sélectionnée, on applique l'hypothèse de récurrence soit à $r$ , soit à $s$ , soit à $s'$ et on traite directement le cas $x = a$ .

CQFD

De cette longue récurrence , on déduit immédiatement que

$$B(\tau_0(G)) = k(B(\tau'_{struc}(G))) \quad .$$

D'où le premier résultat du théorème.

La réciproque est évidemment fausse , en effet, considérons une bigrammaire régulière $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ dont toutes les règles sont de la forme $A \twoheadrightarrow a \times (B + C) + D$ ou $A \twoheadrightarrow \wedge$ . On sait que $G$ est équivalente à une bigrammaire régulière $G'$ dont toutes les règles sont de la forme $A' \rightarrow a \times B' + C'$ ou $A' \rightarrow \wedge$ (Théorème 5.3.1).

Si on considère les deux grammaires $G_1$ et $G_1'$ telles que

| | | | |
|---|---|---|---|
| dans $G_1$ | $A \rightarrow a\,BCD$ | $\Longleftrightarrow A \twoheadrightarrow a \times (B+C)+D$ | dans $G$ |
| | $A \rightarrow \wedge$ | $\Longleftrightarrow A \twoheadrightarrow \wedge$ | dans $G$ |
| et dans $G_1'$ | $A \rightarrow aB'C'$ | $\Longleftrightarrow A \twoheadrightarrow a \times B'+C'$ | dans $G'$ |
| | $A \rightarrow \wedge$ | $\Longleftrightarrow A \twoheadrightarrow \wedge$ | dans $G'$ |

On a évidemment $\tau_0(G_1) = G$ et $\tau_0(G_1') = G'$ et donc $G_1 \sim G_1'(\tau_0)$ . D'autre part $G_1$ et $G_1'$ ne sont pas équivalentes structurellement en effet, les arbres syntaxiques de $G_1$ sont quaternaires alors que ceux de $G_1'$ sont ternaires.

Quand les méthodes précédentes ont échoué pour montrer l'équivalence de deux grammaires, on peut essayer des variantes de la méthode dérivée de la transformation $\tau_0$ . Par exemple, on peut remarquer que, pour les deux transformations $\tau'_{struc}$ et $\tau_0$ , si $A \twoheadrightarrow r$ est une règle de la bigrammaire obtenue par ces transformations alors il existe une règle $A \rightarrow \alpha$ de la grammaire initiale $G$ telle que $\alpha = h(r)$ . On peut alors remplacer la règle $A \twoheadrightarrow r$ par une autre règle $A \twoheadrightarrow r'$ avec $h(r') = h(r) = \alpha$ et $r' \in \hat{T}[N]$ et $\rho(r') \in T^*(N \cup \{\wedge\})$ . On obtient une nouvelle bigrammaire régulière $G'$ vérifiant toujours $L(G) = h(B(G'))$ . En procédant de cette façon sur deux grammaires algébriques $G_1$ et $G_2$ si on arrive à trouver deux bigrammaires $G_1'$ et $G_2'$ équivalentes alors $G_1$ et $G_2$ sont équivalentes. Ce procédé devient hautement combinatoire et risque d'être inapplicable dans la pratique. Cependant ce type de transformations peut être intéressant sur le plan théorique et il n'est pas impossible qu'en affinant ces méthodes, on arrive à des résultats comparables à ceux de Courcelle [15] sur les grammaires simples déterministes. L'étude complète de ces idées fera l'objet d'un travail ultérieur.

Traitons un exemple d'utilisation de l'équivalence $\tau_0$ .

Considérons les deux grammaires $G_1$ et $G_2$ définit par

$G_1 = (\{X, Y, Z\} , \{a, b\} , \rightarrow , X)$

$X \rightarrow aYbX \mid bZaX \mid \wedge$

$Y \rightarrow aYbY \mid \wedge$

$Z \rightarrow bZaZ \mid \wedge$

$G_2 = (\{X', Y', Z', T', U', V'\} , \{a, b\} , \rightarrow , X')$

$X' \rightarrow aY'Z'X' \mid bT'U'X' \mid \wedge$

$Y' \rightarrow aY'Z'V' \mid \wedge$

$Z' \rightarrow aY'Z'b \mid b$

$T' \rightarrow bT'U'V' \mid \wedge$

$U' \rightarrow bT'U'a \mid a$

$V' \rightarrow \wedge$



Remarquons que si on cherche les grammaires engendrant $L(G_1)-\{\wedge\}$ et $L(G_2)-\{\wedge\}$ on n'obtient pas des grammaires simples déterministes et donc la méthode de Courcelle [15] n'est pas applicable directement. D'autre part ces deux grammaires ne sont évidemment pas structurellement équivalente.

Les deux bigrammaires $\tau_0(G_1)$ et $\tau_0(G_2)$ sont

$G_1' = \tau_0(G_1) = (\{X, Y, Z\} , \{a, b\} , \twoheadrightarrow, X)$

$$X \twoheadrightarrow \begin{array}{c} a \\ Y\ \ b \end{array} X \;\Big|\; \begin{array}{c} b \\ Z\ \ a \end{array} X \mid \wedge \qquad Y \rightarrow \begin{array}{c} a \\ Y\ \ b \end{array} Y \mid \wedge \qquad Z \rightarrow \begin{array}{c} b \\ Z\ \ a \end{array} Z \mid \wedge$$

$G_2' = \tau_0(G_2) = (\{X', Y', Z', T', U', V'\} , \{a, b\} , \twoheadrightarrow, X')$

$$X' \twoheadrightarrow \begin{array}{c} a \\ Y'\ \ Z' \end{array} X' \;\Big|\; \begin{array}{c} b \\ T'\ \ U' \end{array} X' \mid \wedge \qquad Y' \twoheadrightarrow \begin{array}{c} a \\ Y'\ \ Z' \end{array} V' \mid \wedge \qquad Z' \twoheadrightarrow \begin{array}{c} a \\ Y'\ \ Z' \end{array} b \mid b$$

$$T' \twoheadrightarrow \begin{array}{c} b \\ T'\ \ U' \end{array} V' \mid \wedge \qquad U' \twoheadrightarrow \begin{array}{c} b \\ T'\ \ U' \end{array} a \mid a \qquad V' \rightarrow \wedge$$

Il faut maintenant montrer que les deux bigrammaires régulières $G_1'$ et $G_2'$ sont équivalentes. Pour cela on peut utiliser la suite d'algorithmes qui a conduit à l'énoncé du corollaire 5.5.10. C'est à dire on utilise le théorème 5.3.1. ou plutôt sa démonstration pour réduire $G_1'$ et $G_2'$ puis la démonstration de la proposition 5.5.7 pour trouver les bigrammaires inversibles associées à des $\{a, b\}$ -algèbres diadiques et équivalentes respectivement à $G_1'$ et $G_2'$ . On en déduit facilement une bigrammaire inversible associée à une $\{a, b\}$ -algèbre diadique engendrant $BL(G_1') \,\Delta\, BL(G_2')$ et on vérifie que ce bilangage est vide par une technique classique de réduction inférieure et supérieure de grammaire. Cette démarche va être très pénible à effectuer à la main. Pour montrer que cet exemple est correct, contentons-nous de dévoiler la façon dont il a été construit.

De façon évidente le bilangage $L_1$ engendré par $G_1$ est de la forme $L_1 = (L_Y \cup L_Z)^*$ où $L_Y$ et $L_Z$ sont les bilangages dérivant de $\begin{array}{c} a \\ Y\ \ b \end{array}$ et $\begin{array}{c} b \\ Z\ \ a \end{array}$ respectivement et où l'opération $*$ est l'itéré de l'opération de monoïde de $\widehat{\{a, b\}}$ . De même $L_2$ engendré par $G_2$ est de la forme $L_2 = (L_{Y'Z'} \cup L_{T'U'})^*$ où $L_{Y'Z'}$ et $L_{T'U'}$ sont des bilangages dérivant de $\begin{array}{c} a \\ Y'\ \ Z' \end{array}$ et $\begin{array}{c} b \\ T'\ \ U' \end{array}$ respectivement. On s'aperçoit que $L_Y$ et $L_Z$ sont en bijection par la transcription échangeant $a$ et $b$ . D'autre part, il n'est pas difficile de démontrer que

$$r \in L_Y \Longleftrightarrow \rho(r) = a \quad \text{et} \quad F_b(r) = \{\wedge\} \quad \text{et} \quad F_a(r) \subset a^*b \quad .$$

De même $L_{Y'Z'}$ et $L_{T'U'}$ possèdent les mêmes propriétés, d'où $L_1$ et $L_2$ sont égaux. En fait l'exemple a été construit en décrivant dans $G_2'$ la ramification en-dessous de $a$ dans $L_Y$ par des règles récursives allant de gauche à droite alors que l'on va dans l'autre sens dans $G_1'$ .

Remarquons que dans $G_2$ figure une règle $V' \rightarrow \wedge$ qui peut facilement être supprimée, mais alors on aura par exemple la règle $Y' \rightarrow aY'Z'$ qui donnera dans la transformation $\tau_0$ la règle $Y' \rightarrow \begin{array}{c} a\ Z' \\ Z' \end{array}$ et la méthode échouera. Dans ce cas pour prouver l'équivalence des deux grammaires, il faudra suivant les règles de $G_2$ appliquer la transformation $\tau_0$ ou $\tau'_{struc}$ , c'est à ce genre de situations auxquelles nous faisions allusion ci-dessus.

## 3.- Caractérisation effective des langages parenthésés qui sont des intersections de langages de Dyck avec des langages réguliers.

On rappelle que tout bilangage régulier est l'image par une transcription de l'ensemble des arbres syntaxiques engendrés par une grammaire algébrique généralisée (théorème 0.4.7). D'autre part, on obtient facilement la proposition suivante :

Proposition 3.1. : [63 ]

Soit $L$ un bilangage régulier sur $T$, parmi les grammaires algébriques $G = (N, T, \rightarrow, X)$ telles que $\tau(B(G)) = L$, il existe des grammaires telles que, si $P(G)$ est la représentation parenthétique de $B(G)$, alors $P(G)$ est l'intersection du langage de Dyck sur $N \cup T$ et d'un langage régulier sur $N \cup T \cup \bar{N} \cup \bar{T}$.

On peut se demander si en fait les bilangages réguliers sont aussi de la forme $P \cap K$. Cette opinion semble confirmée par la forme réduite des bigrammaires régulières énoncées au théorème 5.3.1.

Malgrè cela, cette première impression est fausse comme le montre l'exemple suivant :

Exemple :

Le langage $L = \{a^n a^n a^p a^p \; ; \; n \geqslant 0 \; , \; p \geqslant 0\}$ est un langage parenthésé qui n'est pas de la forme $P \cap K$. La démonstration de ce fait sera donnée après le théorème 3.2 à titre d'exemple d'utilisation de ce théorème. Le lecteur pourra facilement faire une démonstration directe de ce fait.

Théorème 3.2. :

Soit $L$ un bilangage régulier. Une représentation parenthésée de $L$ est de la forme $P \cap K$ si et seulement si le T-binoïde minimal $\mathcal{C}_L$ de $L$ vérifie

$$(\exists\theta : T \rightarrow \mathcal{C}_L)(\exists\bar{\theta} : T \rightarrow \mathcal{C}_L)(\forall a \in T)(\forall C \in \mathcal{C}_L)(a \times C = \theta(a) + C + \bar{\theta}(a)) \quad .$$

En particulier il est décidable de savoir si un langage parenthésé est de la forme $P \cap K$.

Démonstration :

La deuxième affirmation est évidemment une conséquence de la première.

Soit $L$ un bilangage régulier et $L'$ le langage parenthésé associé, supposons $L'$ de la forme $P \cap K$. Soit $M$ un monoïde fini, $\Psi : (T \cup \bar{T})^* \rightarrow M$ et $M' \subset M$ tel que $K = \Psi^{-1}(M')$.

$L'$ est engendré par la grammaire parenthésée $G = (X \cup M, T, \bar{T}, \rightarrow, X)$ telle que

$$X \rightarrow a\, s'\, \bar{a}\, s'' \iff \Psi(a) + s' + \Psi(\bar{a}) + s'' \in M'$$
$$s \rightarrow a\, s'\, \bar{a}\, s'' \iff \Psi(a) + s' + \Psi(\bar{a}) + s'' = s$$
$$s \rightarrow \wedge \iff s = e \quad (e \text{ est l'élément neutre de } M) .$$

Donc si on munit $M$ de la structure de T-binoïde définie par

$$a \times s = \Psi(a) + s + \Psi(a)$$

la loi $+$ étant la même que dans $M$, on démontre facilement que $L = \Psi_1^{-1}(B)$ où $\Psi_1 : \hat{T} \rightarrow B$ **est** l'homomorphisme de T-binoïde de $\hat{T}$ dans $B$ et comme le T-binoïde minimal de $L$ est homomorphe à tout T-binoïde permettant de reconnaître $L$, on en déduit le théorème dans ce sens.

Réciproquement si le T-binoïde minimal $\mathcal{C}_L$ de $L$ vérifie la condition du théorème, soit

$\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}_L$ et $\Psi_o : \hat{T} \longrightarrow \mathcal{C}_L$ tel que $L = \Psi_o^{-1}(\mathcal{C}')$, considérons la structure de monoïde de $\mathcal{C}_L$, soit $\Psi : (T \cup \bar{T})^* \rightarrow \mathcal{C}_L$ l'homomorphisme de monoïde tel que $\Psi(a) = \theta(a)$ et $\Psi(\bar{a}) = \bar{\theta}(a)$. Il est facile de montrer que $L' = P \cap \Psi^{-1}(B')$.



Exemple :

Reprenons le bilangage $L$ associé au langage parentéhsé $L' = \{a^n a^n a^p a^p\}$. Dans $\hat{T}$, on note $a^n$ la ramification $r = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a \times}_{n \text{ fois}} \wedge$.

On a donc $L = \{a^n + a^p \; ; \; n \geqslant 0 \; , \; p \geqslant 0\}$. On en déduit facilement que

$C_L(\wedge) = \{r \; ; \; c(r) \in L\} = C_o$ avec $c : T[1] \rightarrow T$ défini par $c(1) = \wedge$

$(\exists k > 0)(r = a^k) \Rightarrow C_L(r) = \{a^n \times 1 + a^p \; ; \; n \geqslant 0 \; , \; p \geqslant 0\} \cup \{a^n + a^p \times 1 \; ; \; n \geqslant 0 \; , \; p \geqslant 0\}$
$\cup \{a^n \times 1 + a^p \times 1 \; ; \; n \geqslant 0 \; , \; p \geqslant 0\} = C_1$

$(\exists k > 0)(\exists k' > 0)(r = a^k + a^{k'}) \Rightarrow C_L(r) = \{1\} = C_L$

Si $r$ est d'une autre forme que ci-dessus alors $C_L(r) = \emptyset = C_3$

Donc $\mathcal{C}_L$ admet la structure de binoïde décrite par les deux tableaux ci-dessous

| + | $C_o$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $C_o$ | $C_o$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
| $C_1$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_3$ |
| $C_2$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_3$ |
| $C_3$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_3$ |

| X | a |
|---|---|
| $C_o$ | $C_1$ |
| $C_1$ | $C_1$ |
| $C_2$ | $C_3$ |
| $C_3$ | $C_3$ |

Si $L$ était de la forme $P \cap K$ on devrait avoir

$$(\exists i \in [0,3])(\exists j \in [0,3])(\forall k \in [0,3]) \; (C_i + C_k + C_j = a \times C_k)$$

En prenant $k = 0$ on en déduit que nécessairement $i = j = 1$ et en prenant $k = 1$ on en déduit une contradiction. Donc $L$ n'est pas de la forme $P \cap K$.

Remarque :

Les langages de la forme $P \cap K$ sont évidemment des langages déterministes. Ce qui précède permet de tester l'égalité de deux langages de ce type. On obtient de ce point de vue des résultats moins puissants que ceux démontrés par L. Valiant [82], [83] mais la démonstration est beaucoup plus simple. D'autre part, il serait intéressant de caractériser parmi les bilangages réguliers ceux dont la représentation parenthésée sont des langages algébriques déterministes, on obtiendrait ainsi une classe de langages algébriques deterministes pour laquelle le problème de l'équivalence serait résolu de manière élégante.

## 4.- Application aux langages algébriques ayant une ambiguité inhérente.

Classiquement on dit qu'un langage algébrique présente une ambiguité inhérente si et seulement si toute grammaire algébrique qui l'engendre est ambigüe. Nous allons montrer en particulier qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage algébrique $L$ présente une ambiguité inhérente est que pour tout bilangage régulier $L'$ tel que $\varphi(L') = L$ alors la fonction $\varphi : L' \to L$ n'est pas injective. Cette propriété montre que le phénomène de l'ambiguité inhérente est lié aux structures des marqueurs de phrase et non à leur étiquetage (cf. en particulier le corollaire 4.6). En effet, la classe des bilangages réguliers est stable par transcription. Ce résultat n'est pas surprenant, car le principal outil dont on dispose pour démontrer sur des exemples l'ambiguité inhérente de langage algébrique est le lemme d'Ogden [62] qui précisément permet de construire pour un mot du langage plusieurs arbres syntaxiques associés à ce mot et de structures différentes.

Nous montrerons d'autre part que les degrés d'ambiguité des langages algébriques sont conservés en prenant comme ensembles de marqueur de phrases les bilangages réguliers.

Ces résultats peuvent se déduire des résultats de [59] en généralisant les théorèmes de cet article à des grammaires algébriques généralisées.

Le lemme qui suit servira dans la démonstration du théorème 4.3.

Lemme 4.1. :

Soit $L$ un bilangage régulier sur $T$. Il existe un $T$-binoïde $B$ tel que $L = \Psi^{-1}(B')$ avec $\Psi : \hat{V} \to B$ et $B' \subset B$ vérifiant la condition suivante :

$$(\forall a \in V)(\forall s \in B)(\forall s' \in B) e \neq a \times s + s')$$

ou $e$ désigne l'élément neutre de $B$.

Démonstration :

Soit $B$ un $T$-binoïde et soit $\bar{B} = B \cup \{\bar{e}\}$ où $\bar{e}$ est symbole qui n'est pas dans $B$. Donnons à $\bar{B}$ une structure de $T$-binoïde en prolongeant les lois de $B$ par

$$(\forall s \in \bar{B})(\bar{e} + s = s + \bar{e} = s)$$

$$(\forall a \in T)(a \times \bar{e} = a \times e) \text{ où } e \text{ est l'élément neutre de } B.$$

Il est évident que $\bar{B}$ vérifie la condition du lemme 4.1.

On montre facilement par récurrence sur $r$ que si $\bar{\Psi}$ est l'unique homomorphisme de $\hat{T}$ dans $\bar{B}$ on a

$$\bar{\Psi}(\wedge) = \bar{e}$$

$$r \neq \wedge \Rightarrow \bar{\Psi}(r) = \Psi(r) \quad (\Psi : \hat{T} \to B).$$

Donc si $B'$ est contenu dans $B$ on a

$$e \notin B' \Rightarrow \bar{\Psi}^{-1}(B') = \Psi^{-1}(B')$$

$$e \in B' \Rightarrow \bar{\Psi}^{-1}(B' \cup \{\bar{e}\}) = \Psi^{-1}(B').$$

On en déduit alors de façon immédiate le lemme annoncé.

Définition 4.2. :

Soit $L$ un bilangage régulier et $L' = \varphi(L)$ l'ensemble des mots des feuilles des ramifications de $L$. Le degré d'ambiguité $A_L(\alpha)$ d'un mot de $L'$ par rapport à $L$ est le nombre de ramification de $L$ ayant $\alpha$ comme mot des feuilles. Si $G$ est une grammaire algébrique engendrant $L'$ on définit $A_G(\alpha)$ par

$$A_G(\alpha) = A_{B(G)}(\alpha) \quad (B(G) \text{ est le bilangage régulier engendré par } G).$$



Remarque :

Si $L$ est un bilangage régulier sur $T$, si $G = (N, T', \to, x)$ est une grammaire algébrique et si $\tau : N \cup T' \longrightarrow T$ est une application conservant les éléments de $T'$ et telle que $L = \tau(B(G))$ alors $\varphi(L)$ et $L(G)$ sont égaux et pour tout $\alpha$ de $L(G)$ on a $A_G(\alpha) > A_L(\alpha)$.

Théorème 4.3. :

Soit $L$ un bilangage régulier de $\hat{T}$ et $L' = \varphi(L)$. Il existe une grammaire algébrique $G$ engendrant $L'$ telle que

$$(\forall \alpha \in L')(A_G(\alpha) \leqslant A_L(\alpha)).$$

Ce théorème signifie que pour tout bilangage régulier $L$ il existe une grammaire engendrant le langage $\varphi(L)$ et diminuant ou conservant le degré d'ambiguïté de chaque mot de $\varphi(L)$.

Démonstration :

Comme $L$ est un bilangage régulier il existe un $T$-binoïde fini $B$ et une partie $B'$ de $B$ tel que pour l'unique homomorphisme $\Psi : \hat{V} \to B$ on ait $L = \Psi^{-1}(B')$. On peut de plus imposer à $B$ de vérifier la condition du lemme 5.3.1. Considérons la grammaire

$$G = (B, T, \to, B')$$

où la relation $\to$ est définie par

$$s \longrightarrow s's'' \Longleftrightarrow (\exists a \in T)\ (s = a \times s' + s'' \text{ et } s' \neq e)$$

($e$ est l'élément neutre de $B$ et le calcul $a \times s' + s''$ est effectué dans $B$)

$$s \to a\, s'' \Longleftrightarrow s = a \times e + s''$$

$$e \to \wedge.$$

Il est facile de montrer par récurrence que

$$s \overset{*}{\underset{G}{\succ\!\!-\!\!-}} \alpha \text{ et } \alpha \in T^* \Longleftrightarrow (\exists r \in \hat{V})\ (\varphi(r) = \alpha \text{ et } \Psi(r) = s).$$

(on fait une récurrence sur $|\alpha|$ pour démontrer la proposition dans le sens direct et une récurrence sur $r$ pour démontrer la réciproque).

D'où on en déduit que $G$ engendre $L'$. Montrons que $G$ vérifie les conditions du théorème 5.3.3. Considérons l'application $g : \hat{T} \to \widehat{B \cup T}$ définie par

$$g(\wedge) = e$$

$$g(a \times r' + r'') = \text{si } r' \neq \wedge \text{ alors } \Psi(a \times r' + r'') \times (g(r') + g(r''))$$

$$\text{sinon } \Psi(a + r'') \times (a + g(r'')).$$

On remarque que $g(r) = r'$ et $r \neq \wedge \Rightarrow \varphi(r) = \varphi(r')$ et $\rho(r') = \Psi(r)$.

Soit $G'$ la grammaire $(B, T, \to, B)$ avec $\to$ défini comme dans $G$ on montre facilement par récurrence sur $r$ dans le premier cas et sur $r'$ dans le deuxième que

$$g(r) = r' \Rightarrow r' \in B(G')$$

$$r' \in B(G) \Rightarrow (\exists r \in L)(g(r) = r').$$

D'où on en déduit que $B(G) = g(L)$.

Comme $g$ conserve le mot des feuilles, il est alors immédiat que le nombre de ramification de $B(G)$ ayant $\alpha$ comme mot des feuilles est inférieur ou égal au nombre de ramification de $L$ ayant $\alpha$ comme mot des feuilles.

Corollaire 4.4. :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage algébrique $L'$ présente une ambiguité inhérente est pour que tout bilangage régulier $L$ tel que $L' = \varphi(L)$ l'application $\varphi : L \longrightarrow L'$ ne soit pas injective.

Démonstration :

Ceci est une conséquence immédiate du théorème 4.3.

Définition 4.5. :

Soit $G = (N, T, ::=, X)$ une grammaire algébrique généralisée, on appelle ensemble des structures de $G$ le bilangage régulier sur $T \cup \{\#\}$ , où $\#$ est un symbole qui n'est pas dans $T$ , qui est obtenu par transcription à partir de $B(G)$ par la transcription $\tau : N \cup T \to T \cup \{\#\}$ définie par
$\tau \mid T = Id_T$ et $(\forall A \in N)(\tau(A) = \#)$ .

Le terme de structure est justifié par le fait que cette transcription élimine complètement l'étiquetage des arbres syntaxiques engendrés par $G$ en ne gardant que leurs structures.

Corollaire 4.6. :

Soit $L'$ un langage algébrique présentant une ambiguïté inhérente et $G$ une grammaire engendrant $L'$ alors pour au moins un mot $\alpha$ de $L'$ deux éléments au moins de l'ensemble des structures de $G$ ont $\alpha$ comme mot des feuilles.

Démonstration :

Comme l'ensemble des structures d'une grammaire est un bilangage régulier le corollaire 4.6. est un cas particulier du corollaire 4.4.

A propos de ce corollaire montrons comment on peut le déduire des théorèmes de Mc Naughton [59](Démonst. due à Perr

Soit $G$ une grammaire engendrant $L'$ , soit $L$ l'ensemble des structures de $G$ , $L$ est un langage parenthésé et donc il existe une grammaire inversible, $G' = (N, \{\#, \bar{\#}\} \cup T \cup T, \to, X)$ au sens de [59] engendrant $L$ . La fonction $\varphi : L \to L'$ est l'homomorphisme défini par $\varphi(\#) = \varphi(\bar{\#}) = \varphi(\bar{a}) = \Lambda$ et $\varphi(a) = a$ . Donc si $\varphi$ est injective alors la grammaire $G'' = (N, T, \to, X)$ définie par

$$A \to \alpha \iff (\exists \beta)\ (A \to \beta \text{ et } \varphi(\beta) = \alpha)$$

engendre $L'$ et est non ambiguë. Donc $L'$ n'a pas d'ambiguïté inhérente. Remarquons que cette démonstration n'est valable que si $G$ n'est pas une grammaire généralisée, et que pour obtenir le résultat général du corollair 4.6, il est nécessaire de démontrer indépendamment que si $L'$ est engendré par une grammaire généralisée non ambiguë alors $L'$ l'est aussi par une grammaire non généralisée non ambiguë.

Le théorème 4.3 peut aussi se déduire des résultats de Mc Naughton en employant un raisonnement similaire à celui qui précède, mais là pour obtenir le résultat dans toute sa généralité il est nécessaire de généraliser les résultats de [59] au grammaires généralisées. Cela ne pose pas de gros problèmes, mais il faut remarquer que si on conserve la forme des règles des grammaires parenthésées de Mc Naughton, on introduira des grammaires parenthésées avec une infinité de règles pour lesquelles il sera impossible de trouver une grammaire parenthésée équivalente de la même forme avec un nombre fini de règles.

Définition 4.7. :

On appelle degré d'ambiguïté d'un langage algébrique $L'$ l'entier $A(L')$, éventuellement infini, défini par

$$A(L') = \operatorname*{Inf}_{G} \left( \sup_{\alpha \in L'} (A_G(\alpha)) \right)$$

où $G$ parcourt la classe des grammaires algébriques engendrant $L'$ et $A_G(\alpha)$ désigne le degré d'ambiguïté de $\alpha$ par rapport à $G$ .

On peut définir de même un entier $A'(L')$ en posant

$$A'(L') = \operatorname*{Inf}_{L} \left( \sup_{\alpha \in L'} (A_L(\alpha)) \right)$$

où $L$ parcourt la classe des bilangages réguliers tels que $\varphi(L') = L$ . On obtient alors la conséquence immédiate suivante du théorème 4.3.



Corollaire 4.8. :

Pour tout langage algébrique $L'$ les deux entiers $A(L')$ et $A'(L')$ sont égaux.

5.- Une autre application au problème de l'ambiguïté inhérente : notion de bon sous langage .

Si on examine dans la littérature consacrée à ce sujet et en particulier dans les articles les plus anciens, les exemples de langages algébriques ayant une ambiguïté inhérente, on constante qu'ils sont presque toujours construits de la façon suivante :

On considère deux langages algébriques $L$ et $L'$ tels que $L \cap L'$ n'est pas algébrique et on démontre que $L \cup L'$ possède une ambiguïté inhérente.

Ce phénomène paraît général et amène naturellement à proposer la conjecture suivante :

Conjecture :

Si $L$ et $L'$ sont deux langages algébriques n'ayant pas d'ambiguïté inhérente tels que $L \cap L'$ ne soit pas algébrique alors le langage algébrique $L \cup L'$ possède une ambiguïté inhérente.

Cette conjecture d'apparence banale se révèle à l'examen très difficile à aborder en particulier parce que l'hypothèse "$L \cap L'$ n'est pas un langage algébrique" est particulièrement difficile à utiliser. Ce qui va suivre ne permet pas de résoudre cette conjecture et il semble à l'auteur que les différentes notions introduites dans cette thèse sont encore bien insuffisantes pour aborder le problème de front.

Dans ce paragraphe, nous avons l'intention de poser quelques définitions qui permettent de démontrer cette conjecture dans un cas particulier et de fournir une nouvelle méthode de démonstration de l'ambiguïté inhérente de langages algébriques sur des exemples.

Définition 5.1. :

Soit $L$ un langage algébrique, soit $L'$ un langage algébrique tel que $L'$ est contenu dans $L$ , on dit que $L'$ est un bon sous langage de $L$ si et seulement si pour tout bilangage régulier $L_1$ tel que $\varphi(L_1) = L$ , il existe un bilangage régulier $L_1'$ tel que $L_1'$ est contenu dans $L_1$ et $\varphi(L_1') = L'$ .

Théorème 5.2. :

Si $L$ et $L'$ sont deux bons sous langages de $L \cup L'$ et si $L \cap L'$ n'est pas algébrique alors $L \cup L'$ admet une ambiguïté inhérente.

Démonstration :

Supposons que $L \cup L'$ n'ait pas d'ambiguïté inhérente il existe donc un bilangage régulier $L''$ tel que $\varphi(L'') = L \cup L'$ et $\varphi : L'' \to L \cup L'$ est une application injective. Comme $L$ et $L'$ sont de bons sous langages de $L \cup L'$ , il existe deux sous bilangages réguliers $L_1$ et $L_2$ de $L''$ tels que $\varphi(L_1) = L$ et $\varphi(L_2) = L'$ . Grâce à l'injectivité de $\varphi$ sur $L''$ on en déduit que $L \cap L' = \varphi(L_1 \cap L_2)$ et donc que $L \cap L'$ est algébrique. D'où le théorème.

Il serait évidemment très intéressant que tout sous langage algébrique d'un langage algébrique soit un bon sous langage ou que l'on ait un procédé général de démonstration du fait qu'un sous langage algébrique soit un bon sous langage d'un langage algébrique. Comme on doit s'y attendre, ces deux assertions sont fausses comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 5.3. :

Le fait qu'un sous langage algébrique d'un langage soit un bon sous langage est une propriété indécidable.

Avant de démontrer cette proposition établissons d'abord deux lemmes :

Lemme 5.4. :

Soit $K$ un langage régulier, soit $L$ un langage algébrique alors $L \cap K$ est un bon sous langage de $L$.

Démonstration :

Soit $L_1$ un bilangage régulier tel que $L = \varphi(L_1)$. Il existe un T-binoïde fini $B$, une partie $B'$ de $B$ et $\psi : \hat{T} \to B$ tels que $L_1 = \psi^{-1}(B')$. On peut supposer de plus que l'élément neutre $e$ de $B$ vérifie la condition :

$(\forall a \in T)\ (\forall b, b' \in B)\ (e \neq a \times b + b')$ (lemme 4.1).

Soit d'autre part un monoïde fini $M$, une partie $M'$ de $M$ et un homomorphisme $k : T^* \to M$ tels que $K = k^{-1}(M)$. Considérons sur $B \times M$ la structure de T-binoïde défini par

$(b, m) + (b', m') = (b + b', mm')$

$a \times (b, m) =$ si $b \neq e$ alors $(a \times b, m)$ sinon $(a \times e, k(a))$ fsi

Soit $\psi' : \hat{T} \to E \times M$ l'homomorphisme de T-binoïde, il est alors facile de démontrer que $\psi'(r) = (\psi(r), k(\varphi(r)))$. Posons $L_1' = \psi'^{-1}(B' \times M')$, $L_1'$ est un bilangage régulier comme image réciproque d'une partie d'un T-binoïde fini. On obtient $L_1' \subset L_1$ et $\varphi(L_1') = L \cap K$.

Lemme 5.5. :

Soit $K$ un langage régulier et $L$ un sous langage algébrique de $K$. $L$ est un bon sous langage de $K$ si et seulement si $L$ est régulier.

Démonstration :

Si $L$ est régulier et $L \subset K$, en écrivant $L = L \cap K$ et en appliquant le lemme 5.4., on obtient que $L$ est un bon sous langage de $K$.

Réciproquement, si $L$ est un bon sous langage de $K$, comme $K$ est régulier, on peut considérer $K$ comme un bilangage régulier formé de ramifications réduites à leurs mots des racines. En appliquant la définition 5.1 à $L$ et à ce bilangage régulier, on en déduit immédiatement que $L$ est régulier.

Démonstration de la proposition 5.3. :

Appliquons le lemme 5.5. au cas particulier où $K = T^*$. On en déduit que $L \subset T^*$ est un bon sous langage de $T^*$ si et seulement si $L$ est régulier. Or cette propriété est connue comme indécidable.

Il nous faut maintenant mettre en évidence des procédés pratiques pour démontrer dans des cas particuliers que tel langage est un bon sous langage d'un autre. Le lemme 5.4 donne un procédé général pour engendrer des bons sous langages, mais malheureusement le cas traité par le lemme n'a pas d'intérêt en vue de l'application du théorème 5.2.

Commençons par généraliser légèrement la définition 5.1. de façon à obtenir des hypothèses plus simples à vérifier pour le théorème 5.2.

Définition 5.6. :

Soit $\mathcal{L}$ une classe de bilangage régulier tel que

i) Pour tout langage algébrique $L'$ il existe $L \in \mathcal{L}$ tel que $\varphi(L) = L'$

ii) Pour tout langage algébrique $L'$ non ambigü il existe $L \in \mathcal{L}$ tel que $\varphi(L) = L'$ et $\varphi : L \to L'$ est injective.

On dira que $\mathcal{L}$ est un générateur de la classe des langages algébriques.



Exemples :

On pourra prendre pour $\mathcal{L}$ une des classes de bilangage suivant

- $\mathcal{G}$ = la classe des bilangages grammaticaux
- $\mathcal{G}\mathcal{G}$ = la classe des bilangages grammaticaux engendrés par des grammaires réduites sous forme de Greibach
- $\mathcal{G}\mathcal{C}$ = la classe des bilangages grammaticaux engendrés par des grammaires réduites sous forme de Chomsky
- $\mathcal{G}$Inf = la classe des bilangages grammaticaux engendrés par des grammaires telles que de tout non terminal autre que l'axiome dérive un langage infini.

Définition 5.7. :

Soit $\mathcal{L}$ un générateur de la classe des langages algébriques. Soit $L$ et $L'$ deux langages algébriques tels que $L' \subseteq L$. On dit que $L'$ est un bon sous langage de $L$ modulo $\mathcal{L}$ et on écrit $L' \underset{\mathcal{L}}{\subseteq} L$ si et seulement si pour tout bilangage $L_1$ de $\mathcal{L}$ tel que $\varphi(L_1) = L$ il existe un bilangage régulier $L_1'$ tel que $L_1' \subseteq L_1$ et $\varphi(L_1') = L'$. (Remarquons que cette définition n'impose pas que $L_1'$ soit dans $\mathcal{L}$ ).

La même démonstration que pour le théorème 5.2. permet alors d'énoncer :

Théorème 5.8. :

Soit $\mathcal{L}$ un générateur de la classe des langages algébriques. Soit $L$ et $L'$ deux langages algébriques tels que

i) $L$ et $L'$ sont des bons sous langages de $L \cup L'$ modulo $\mathcal{L}$

ii) $L \cap L'$ n'est pas algébrique

Alors $L \cup L'$ a une ambiguïté inhérente

Remarque :

La définition 5.7. et le théorème 5.8 ne sont en fait que des généralisations artificielles de la définition 5.1 et du théorème 5.2 en effet, il semble bien que dans la plupart des cas les notions de bon sous langage modulo $\mathcal{L}$ et de bon sous langage tout court coïncident. La démonstration dans le cas où $\mathcal{L} = \mathcal{G}$ est à peu près évidente et dans les autres cas cités en exemple, cette démonstration ne doit pas être très difficile.

Démontrons maintenant quelques lemmes techniques :

Lemme 5.9. :

Le bilangage $\mathbb{L}_n = \{r \ ; \ |\varphi(r)| \leq n\}$ est régulier.

Démonstration :

Soit $[\![n]\!] = \{0, 1, \ldots, n, \bot\}$ le V-binoïde dont les lois sont définies par

$x \oplus y =$ si $x \neq \bot$ et $y \neq \bot$ et $x + y \leq n$ alors $x + y$ sinon $\bot$ fsi

$a \times x =$ si $x \neq \bot$ alors si $x \neq 0$ alors $x$ sinon $1$ fsi sinon $\bot$ fsi

Soit $\psi : \hat{V} \to [\![n]\!]$ l'homomorphisme de binoïde, on obtient alors immédiatement par récurrence sur $r$ que

$\psi(r) =$ si $|\varphi(r)| \leq n$ alors $|\varphi(r)|$ sinon $\bot$ fsi

Donc $\mathbb{L}_n = \psi^{-1}(\{0, 1, \ldots, n\})$ est un bilangage régulier

<u>Définition 5.10.</u> :

La fonction $deb : \hat{V} \to \mathfrak{P}(\hat{V})$ est définie par

$$deb(\wedge) = \{\wedge\}$$
$$deb(a \times r + s) = (a + deb(s)) \cup (a \times deb(r) + deb(s))$$

Si $L$ est un bilangage on pose $deb(L) = \bigcup_{r \in L} deb(r)$

<u>Lemme 5.11.</u> :

Si $L$ est un bilangage régulier, $L' = deb(L)$ est aussi régulier.

<u>Démonstration</u> :

Supposons $L$ engendré par la bigrammaire $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ que l'on peut supposer sous forme réduite. Soit $G' = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$ définie par

$A \twoheadrightarrow a \times B + C \iff A \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow a + C \mid a \times B + C$

$A \twoheadrightarrow \wedge \iff A \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \wedge$

Montrons que $G'$ engendre $deb(L)$. Posons $L' = BL(G')$, il faut donc démontrer que

i) $r \in L \Rightarrow deb(r) \subseteq L'$

ii) $r' \in L' \Rightarrow (\exists r \in L)(r' \in deb(r))$

Pour prouver i) il suffit de montrer plus généralement que

iii) $(\forall A \in N)\ (A \underset{G}{\overset{*}{\gg}} r \Rightarrow (\forall r' \in deb(r))(A \underset{G'}{\overset{*}{\gg}} r'))$

Or la propriété iii) résulte trivialement d'une récurrence sur $r$.

Pour prouver ii) il suffit de montrer plus généralement que

iv) $(\forall A \in N)(A \underset{G'}{\overset{*}{\gg}} r' \Rightarrow (\exists r)(A \underset{G}{\overset{*}{\gg}} r$ et $r' \in deb(r))$.

Là aussi la démonstration de iv) est immédiate par récurrence sur $r'$.

<u>Lemme 5.12.</u> :

Soit $L$ un bilangage régulier alors $L' = \{r ; deb(r) \cap L \neq \emptyset\}$ est régulier.

<u>Démonstration</u> :

Supposons $L$ engendré par la bigrammaire $G = (N, T, \twoheadrightarrow, X)$. On peut supposer que $\wedge \notin L$ (dans le cas contraire, on fait la démonstration pour $L-\{\wedge\}$ ce qui démontre que $L'-\{\wedge\}$ et donc $L'$ sont réguliers). De même on peut supposer que $G$ est sous forme réduite. Soit $N_1 = \{A ; A \in N$ et $A \twoheadrightarrow \wedge\}$ et soit $N_1'$ un vocabulaire en bijection avec $N_1$ par la bijection $A \rightleftarrows A'$. Modifions légèrement $G$ en remblaçant les règles $A \twoheadrightarrow a \times B + C$ telles que $B \in N_1$ par $A \twoheadrightarrow a \times B' + C$ et en rajoutant les règles $B' \twoheadrightarrow \wedge$. On obtient une nouvelle bigrammaire $G_1 = (N \cup N_1', T, \twoheadrightarrow, X)$ qui engendre encore $L$. Soit maintenant une bigrammaire engendrant $\hat{T}$, par exemple $G_0 = (\{X'\}, T, \twoheadrightarrow, X')$ avec $X' \twoheadrightarrow a \times X' + X' \mid \wedge$. On suppose que $X' \notin N \cup N_1'$. Considérons maintenant la bigrammaire $G' = (N \cup N_1' \cup \{X'\}, T, \twoheadrightarrow, X)$ telle que $G'$ contient toutes les règles de $G_1$ et de $G_0$ ainsi que toutes les règles

$B' \twoheadrightarrow a \times X' + X'$ $\quad B'$ quelconque dans $N_1$.

Une démonstration un peu longue mais triviale de bout en bout montre que $G'$ engendre $L'$.



<u>Théorème 5.13.</u> :

Soit $L_1$ et $L_2$ deux langages algébriques tels $L_1 \subseteq L_2$. Si pour tout bilangage régulier $L_2'$ tel que $\varphi(L_2') = L_2$, on peut trouver deux entiers $n$ et $k$ et un sous bilangage régulier $L_n''$ de $\mathbb{L}_n = \{r ; |\varphi(r)| \leqslant n\}$ tels que

i) $\alpha \in L_1$ et $|\alpha| \geqslant k \Rightarrow (\exists r \in L_2')\ (deb(r) \cap L_n'' \neq \emptyset$ et $\varphi(r) = \alpha)$

ii) $(\forall r \in L_2')\ (deb(r) \cap L_n'' \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(r) \in L_1)$

alors $L_1$ est un bon sous langage de $L_2$

Dans le cas où l'on veut prouver $L_1 \underset{\mathcal{L}}{\subseteq} L_2$ il suffit de démontrer i) et ii) pour tout $L_2'$ de $\mathcal{L}$.

<u>Démonstration</u> :

Soit $L_1' = \{r ; deb(r) \cap L_n'' \neq \emptyset$ et $r \in L_2'\} \cup L_0' = L_1'' \cup L_0'$ où $L_0'$ est un bilangage fini contenu dans $L_2'$ et vérifiant $\varphi(L_0') = \{\alpha ; \alpha \in L_1$ et $|\alpha| < k\}$. On a évidemment $L_1 = \varphi(L_1')$ et $L_1' \subseteq L_2'$ il suffit donc de démontrer que $L_1'$ est un bilangage régulier et comme $L_0'$ est fini et donc régulier, il suffit de démontrer que $L_1''$ est régulier. Or $L_1'' = L_2' \cap \{r ; deb(r) \cap L_n'' \neq \emptyset\}$ et le lemme 6.5.12 donne alors immédiatement le résultat cherché.

<u>Remarque</u> :

Le théorème 5.13 n'est pas surprenant, il signifie simplement que si on considère un bilangage régulier $L_2'$ ayant $L_2$ comme langage aux feuilles et si on peut tester simplement en regardant un début "pas trop large" d'une ramification de $L_2'$ l'appartenance du mot des feuilles à $L_1$ et ceci pour tout $L_2'$ alors $L_1$ est un bon sous langage de $L_2$.

On peut améliorer le théorème 5.13 en remarquant que dans la démonstration seul le fait que $L_n''$ soit un bilangage régulier est intervenu. En faisant la même démonstration on obtient alors le théorème suivant

<u>Théorème 5.14</u> :

Soit $L_1$ et $L_2$ deux langages algébriques tels que $L_1 \subseteq L_2$. Si pour tout bilangage régulier $L_2'$ tel que $\varphi(L_2') = L_2$, on peut trouver un entier $k$ et un bilangage régulier $L_1''$ tels que

i) $\alpha \in L_1$ et $|\alpha| \geqslant k \Rightarrow (\exists r \in L_2')\ (deb(r) \cap L_1'' \neq \emptyset$ et $\varphi(r) = \alpha)$

ii) $(\forall r \in L_2')\ (deb(r) \cap L_1'' \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(r) \in L_2)$

alors $L_1$ est un bon sous langage de $L_2$.

Dans le cas où l'on veut prouver $L_1 \underset{\mathcal{L}}{\subseteq} L_2$ il suffit de prouver i) et ii) pour tout $L_2'$ de $\mathcal{L}$

<u>Remarque</u> :

On pourrait énoncer un théorème analogue où n'intervient pas une constante $k$ en remplaçant la condition i) par la condition

$(\forall \alpha \in L_1)(\exists r \in L_2')(deb(r) \cap L_1'' \neq \emptyset$ et $\varphi(r) = \alpha)$.

Le théorème obtenu serait équivalent à 5.14 mais d'usage moins facile.

Pour prouver que les notions introduites dans ce paragraphe ne sont pas purement gratuites, appliquons les pour démontrer l'ambiguïté inhérente d'un langage bien connu.

Soit $L_1 = \{a^n b^p c^p \; ; \; n > 0 \; , \; p > 0\}$ , $L_2 = \{a^n b^n c^p \; ; \; n > 0, \; p > 0\}$ et $L = L_1 \cup L_2$ il est bien connu que $L$ possède une ambiguïté inhérente. Nous allons le redémontrer en prouvant que $L_1$ et $L_2$ sont des bons sous-langages de $L$ modulo $\mathcal{G}$ inf. Soit $G = (N, T, \to, X)$ une grammaire algébrique engendrant $L$ . On suppose que $G$ est sans $\wedge$ et que pour tout $A$ de $N$, $L_A = \{\alpha \; ; \; A \xrightarrow[G]{*} \alpha\}$ est un langage infini. Soit $L'$ le bilangage des arbres syntaxiques de $G$ .

Considérons le langage $L_{12}$ défini par

$$\alpha \in L_{12} \iff \alpha \in (N \cup T)^* \text{ et } X \xrightarrow[G]{*} \alpha$$

$$\text{et } (\exists \beta_1, \beta_2)(\beta_1 \in L_1 - L_2 \text{ et } \beta_2 \in L_2 - L_1 \text{ et } \alpha \xrightarrow[G]{*} \beta_1 \text{ et } \alpha \xrightarrow[G]{*} \beta_2)$$

Pour $\alpha \in (N \cup T)^*$ , $|\alpha|_N$ est par définition le nombre d'occurrences d'éléments de $N$ dans $\alpha$ .

Montrons le lemme suivant :

Lemme 1 :

$$\alpha \in L_{12} \Rightarrow |\alpha|_N = 1$$

Démonstration :

Supposons que $|\alpha|_N \geq 3$ et $\alpha \in L_{12}$ , on a donc $\alpha = \alpha_1 A_1 \alpha_2 A_2 \dots \alpha_n A_n \, _{n+1}$ avec $\alpha_i \in T^*$ , $A_i \in N$ et $n \geq 3$ . Vu la forme des éléments de $L$ nécessairement un des langages $L_{A_i}$ est contenu dans $a^* - \{\wedge\}$ ou $b^* - \{\wedge\}$ où $c^* - \{\wedge\}$ . Soit $A_{i_0}$ ce non-terminal. Donc dans une dérivation dans $G$ de $\alpha$ à $\beta$ avec $\beta \in T^*$ on peut en modifiant les réécritures sur $A_{i_0}$ changer le nombre d'occurrences d'une des lettres sans changer le nombre d'occurences des deux autres. Ceci est immédiatement contradictoire avec le fait que $\alpha \in L_{12}$ et que $G$ engendre $L$ .

Supposons maintenant que $|\alpha|_N = 2$ et $\alpha \in L_{12}$ , donc $\alpha = \alpha_1 A_1 \alpha_2 A_2 \alpha_3$ et pour la même raison que ci-dessus on a nécessairement $L_{A_1} \subset a^*b^* - a^*$ et $L_{A_2} \subset b^*c^* - b^*$ . Soit $\beta$ un mot quelconque de $T^*$ dérivant de $\alpha$ , on a $\beta = \alpha_1 \alpha'_1 \alpha_2 \alpha'_2 \alpha_3$ et $\beta \in L$ . Si $n_a$, $n_b$ et $n_c$ sont les fonctions donnant pour un mot quelconque de $T^*$ les nombres d'occurrences de a, b et c respectivement, on obtient alors

$$n_a(\beta) = n_b(\beta) \quad \text{ou} \quad n_b(\beta) = n_c(\beta)$$

c'est à dire

$$n_a(\alpha_1) + n_a(\alpha'_1) = n_b(\alpha'_1) + n_b(\alpha_2) + n_b(\alpha'_2)$$

ou

$$n_b(\alpha'_1) + n_b(\alpha_2) + n_b(\alpha'_2) = n_c(\alpha'_2) + n_c(\alpha_3)$$

c'est à dire que pour tout couple $\alpha'_1$ , $\alpha'_2$ dérivant respectivement de $A_1$ et $A_2$ , on obtient des équations qui peuvent s'écrire

$$n_a(\alpha'_1) - n_b(\alpha'_1) = n_b(\alpha'_2) + K \qquad (K = n_b(\alpha_2) - n_a(\alpha_1))$$

ou

$$n_b(\alpha'_1) = n_c(\alpha'_2) - n_b(\alpha'_2) + K' \qquad (K' = n_c(\alpha_3) - n_b(\alpha_2))$$



On voit apparaître des ensembles semi-linéaires utilisés par exemple par Ginsbourg [ ], mais nous n'utiliserons pas les résultats de cette théorie.

Supposons que $n_b(\alpha'_2)$ puisse prendre deux valeurs distintes $n_1$ et $n_2$ correspondant à des valeurs $m_1$ et $m_2$ de $n_c(\alpha'_2)$ on en déduit immédiatement que pour tout $\alpha'_1$ dérivant de $A_1$ on a

$$\begin{array}{lcl} n_a(\alpha'_1) - n_b(\alpha'_1) = n_1 + K & & n_a(\alpha'_1) - n_b(\alpha'_1) = n_2 + K \\ \text{et} & \text{où} & \text{et} \\ m_b(\alpha'_1) = m_2 - n_2 + K' & & n_b(\alpha'_1) = m_1 - n_1 + K \end{array}$$

Donc le langage $L_{A_1}$ serait fini ce qui est contraire aux hypothèses.

Donc $n_b(\alpha'_2)$ est une constante pour tous les mots dérivant de $A_2$ . De même on démontre que $n_b(\alpha'_1)$ est constant pour tous les mots dérivant de $A_1$ ce qui démontre que $n_b(\alpha'_1)$ et $n_c(\alpha'_2)$ sont aussi constants. D'où $L_{A_1}$ et $L_{A_2}$ sont finis, on obtient donc une contradiction et le résultat annoncé par le lemme, en effet $|\alpha|_N = 0$ est incompatible évidemment avec $\alpha \in L_{12}$ .

Lemme 2 :

$$\alpha \in L_{12} \text{ et } (\forall \beta) \, (X \xrightarrow{*} \beta \xrightarrow{*} \alpha \Rightarrow |\beta|_N = 1) \Rightarrow \quad |\alpha| \leq k$$

où $k$ est une constante ne dépendant que de $G$ .

Ce lemme signifie que si un mot $\alpha$ de $L_{12}$ a été obtenu en utilisant seulement des règles linéaires de $G$ alors sa longueur est majorée par une constante ne dépendant que de la grammaire $G$ .

Démonstration :

Comme $\alpha \in L_{12}$ ; on a donc

$$X \xrightarrow[G]{*} \alpha = \alpha_1 A_1 \alpha_2 \begin{array}{l} \xrightarrow{*} \beta_1 = \alpha_1 \, \beta'_1 \, \alpha_2 \in L_1 - L_2 \\ \xrightarrow{*} \beta_2 = \alpha_1 \, \beta'_2 \, \alpha_2 \in L_2 - L_1 \end{array}$$

Remarquons que cela implique que $\alpha_1 \in a^*b^*$ et $\alpha_2 \in b^*c^*$

Choisissons $k$ tel que

$$|\alpha| > k \Rightarrow \exists u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in T^* \quad \exists B \in N$$

$$X \xrightarrow{*} u_1 B u_2 \xrightarrow{*} u_1 v_1 B v_2 u_2 \xrightarrow{*} u_1 v_1 w_1 A_1 w_2 v_2 u_2 = \alpha \quad \text{et} \quad v_1 v_2 \neq \wedge$$

(ceci est un lemme de paires itérantes particulièrement simple).

On en déduit que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(t_n = u_1 v_1^n w_1 \beta'_1 w_2 v_2^n u_2 \in L = L_1 \cup L_2 \text{ et } t'_n = u_1 v_1^n w_1 \beta'_2 w_2 v_2^n u_2 \in L = L_1 \cup L_2)$$

D'autre part d'après la forme de langage $L$ on a nécessairement $v_1$ et $v_2$ dans $a^* \cup b^* \cup c^*$ . Si $v_1$ ou $v_2$ est le mot vide on obtient immédiatement que $t_2$ ou $t'_2$ n'est pas dans $L$ , donc $v_1$ et $v_2$ sont non vides. D'autre part $v_1$ et $v_2$ étant des facteurs de $\alpha_1$ et $\alpha_2$ respectivement, on en déduit

$$v_1 \in (a^* \cup b^*) - \{\wedge\} \quad \text{et} \quad v_2 \in (b^* \cup c^*) - \{\wedge\}$$

Examinons tous les cas possibles.

| $a^*-\{\wedge\}$ | $b^*-\{\wedge\}$ | $c^*-\{\wedge\}$ | |
|---|---|---|---|
| $v_1$ | $v_2$ | | $t'_2 \in L \Rightarrow t'_3 \notin L$ d'où une contradiction |
| | $v_1$ | $v_2$ | $t_2 \in L \Rightarrow t_3 \notin L$ d'où une contradiction |
| $v_1$ | | $v_2$ | $t_2 \notin L$ d'où une contradiction |
| | $v_1$ $v_2$ | | $t_n$ pour $n$ assez grand n'est plus dans $L$ d'où une contradiction |

Le lemme L est donc démontré.

Proposition :

$L_1$ et $L_2$ sont de bons sous langages de $L_1 \cup L_2$ modulo $\mathcal{G}$ Ing .

Démonstration :

D'après les lemmes 1 et 2 si $r$ est une ramification engendrée par $G$ on peut savoir si $\varphi(r) \in L_1$ ou $\varphi(r) \in L_2$ en connaissant un début de $r$ suffisamment large. Donc le théorème 6.5.13 donne le résultat :

Corollaire :

L possède une ambiguïté inhérente.

L'auteur est conscient que dans l'état actuel de ce paragraphe celui-ci n'est pas très performant vis à vis des méthodes classiques du type Lemme d'Ogden. Les théorèmes 5.13 et 5.14 ne sont pas suffisamment algorithmiques pour guider une démonstration d'ambiguïté inhérente utilisant la méthode décrite ici. Cependant, il n'est pas illusoire de penser que cette notion de bon sous langage peut être utile à la théorie de l'ambiguïté inhérente à la condition de trouver de nouveaux critères plus performants. Ceci fera l'objet d'un travail ultérieur.

Une notion comparable à celle de bon sous-langage a déjà été introduite dans la littérature. Dans l'article de Nivat [61 ], on dit qu'un langage algébrique $L'$ est la restriction modulo $G$ d'un langage $L$ engendré par $G$ s'il existe un morphisme non terminal (conservant les terminaux) d'une grammaire $G'$ engendrant $L'$ dans $G$ .

Il n'est pas bien difficile de voir que ces deux notions sont reliées par la proposition suivante :

Proposition :

$L'$ est un bon sous-langage de $L$ modulo $\mathcal{G}$ si et seulement si pour toute grammaire $G$ engendrant $L$ , $L'$ est une restriction de $L$ modulo $G$ .

6.- CONCLUSION.

La théorie des bilangages et en particulier des bilangages réguliers est intéressante en elle-même. Cependant, l'auteur pense qu'une nouvelle théorie n'est vraiment justifiée que si elle se rattache aux théories classiques et permet d'y montrer de nouveaux résultats. Ce chapitre, avec ses limitations, veut être la preuve que la théorie des bilangages est un bon outil pour l'étude des langages algébriques.



# CHAPITRE III :

## ENSEMBLES RECONNAISSABLES ET ALGÉBRIQUES DANS LES ALGÈBRES LIBRES. CONSTRUCTION D'ALGÈBRE MINIMALE.

I. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre nous allons étudier quelques propriétés des ensembles reconnaissables dans les algèbres libres. Les ensembles reconnaissables sont la généralisation naturelle des langages réguliers quand on travaille sur une autre structure que la structure de monoïde. Ils sont définis comme images réciproques par des homomorphismes de parties d'objets finis de cette structure.

Nous commencerons par introduire ces notions en utilisant des congruences et en montrant comme dans le cas du monoïde, qu'une congruence est canoniquement associée à un sous ensemble d'une algèbre. Ensuite nous donnerons une méthode pour construire cette congruence, cette méthode pouvant être qualifiée de syntaxique. En particulier on montrera que la construction est effective même dans le cas où le problème des mots est indécidable pour la structure d'algèbre considérée.

Ensuite nous étudierons les propriétés des ensembles reconnaissables quand on fait varier la structure sur laquelle on travaille.
Nous commencerons cette étude dans le cadre des algèbres à un seul type d'objet et ensuite nous étendrons les résultats au cas des algèbres hétérogènes ayant un nombre quelconque de types d'objets.
Ce chapitre se termine par l'étude rapide des sous ensembles algébriques d'une algèbre libre, notion qui nous servira au chapitre 4.

2.- DEFINITIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES.

2.1.- $\mathcal{F}$-algèbre. $\mathcal{F}$-algèbre libre .

Définition 2.1.1. :

Soit $\mathcal{F} = (F_o, F_1, \ldots, F_n)$ une suite finie d'ensembles deux à deux disjoints. On appelle $\mathcal{F}$-algèbre un $n+2$ - uplet $(A, F_o^A, F_1^A, \ldots, F_n^A)$ tel que

- $A$ est un ensemble
- $F_o^A, F_1^A, \ldots, F_n$ sont des ensembles de lois de composition sur $A$ respectivement 0-aires, unaires, ..., n-aires et il existe une application $f \to f^A$ surjective de chaque $F_i$ sur $F_i^A$ .

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté on confondra une $\mathcal{F}$-algèbre $(A, F_o^A, \ldots, F_n^A)$ et $A$ .

Définition 2.1.2. :

Soit $(A, F_o^A, \ldots, F_n^A)$ et $(B, F_o^A, \ldots, F_n^A)$ deux $\mathcal{F}$-algèbres on appelle $\mathcal{F}$-morphisme une application $\psi : A \to B$ telle que

$$\forall i \in [0, n] \quad \forall (a_1, \ldots, a_i) \in A^i \quad \forall f \in F_i \quad \varphi(f_i^A(a_1, \ldots, a_i)) = f_i^B(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) .$$

Il est trivial de montrer que les $\mathcal{F}$-algèbres forment une catégorie.

Définition 2.1.3. :

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie (c'est-à-dire une catégorie qui est une sous-catégorie de la catégorie des ensembles). On dit qu'un objet $A$ est libre de base $X$ si et seulement si $X \subset A$ et pour toute application $\varphi : X \to B$ où $B$ est un objet quelconque de $\mathcal{C}$, il existe un et un seul morphisme $\varphi : A \to B$ tel que $\varphi|X = \varphi$.

Proposition 2.1.4 :

Dans la catégorie des $\mathcal{F}$-algèbres, il existe pour chaque ensemble $X$ un objet libre $\mathcal{F}(X)$ de base $X$ défini à un isomorphisme près.

Démonstration :

Cette proposition n'est pas nouvelle. On trouvera en particulier dans [60] des définitions équivalentes en terme de $\mathcal{F}$-magma et de $\mathcal{F}$-magma libre. Contentons nous de donner une construction de $\mathcal{F}(X)$ en utilisant les bilangages. Considérons le bilangage engendré par la bigrammaire régulière

$$A \longrightarrow\!\!> x \mid f \times (\underbrace{A + A + \ldots + A}_{i \text{ fois}})$$

avec $x$ quelconque dans $X$ et $f_i$ quelconque dans $F_i$. Ce bilangage muni des lois évidentes est alors une réalisation de $\mathcal{F}(X)$.

2.2.- $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre. $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre libre

Définition 2.2.1. :

Soit $Y$ un ensemble disjoint de $F_o, F_1, \ldots, F_n$, on appelle $\mathcal{F}$-axiomes, un élément de $\mathcal{F}(Y) \times \mathcal{F}(Y)$.

Soit $r \in \mathcal{F}(Y)$ et $A$ une $\mathcal{F}$-algèbre, on peut associer à $r$ une fonction $r_A : A^Y \to A$ par le procédé suivant :

Soit $\alpha \in A^Y$ (donc $\alpha$ est une fonction de $Y$ dans $A$), soit $\varphi_\alpha$ l'unique $\mathcal{F}$-morphisme de $\mathcal{F}(Y)$ dans $A$ tel que $\varphi_\alpha|Y = \alpha$. On pose alors $r_A(\alpha) = \varphi_\alpha(r)$.

On notera $\bar{r}$ l'application obtenue par ce procédé quand $A = \mathcal{F}(X)$.

Définition 2.2.2. :

Soit $A$ une $\mathcal{F}$-algèbre, on dit que $A$ est une $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre si et seulement si $\mathcal{A}$ est un ensemble de $\mathcal{F}$-axiomes et

$$(\forall (r, s) \in \mathcal{A}) \quad (r_A = s_A)$$

Un $\mathcal{F}\mathcal{A}$-morphisme est par définition un $\mathcal{F}$ morphisme entre $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre. De façon évidente pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{A}$ fixés les $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbres forment une catégorie.

Remarque :

Dans les $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbres, on peut imposer par un axiome que deux termes soient égaux, mais on ne peut pas imposer qu'ils soient différents. Donc, au sens strict de la logique, la théorie des $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbres est toujours consistante, cependant si un axiome est du type $(y_1, y_2)$ où $y_1$ et $y_2$ sont deux variables distinctes ou si on peut déduire des axiomes une telle égalité, alors toutes les $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbres de ce type seront réduites à un point. Dans ce cas, on dit que les $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbres de ce type sont inconsistante. Dans la suite, nous supposons que nous ne sommes jamais dans ce cas.



Théorème 2.2.3 : [7]

Pour tout ensemble $X$ il existe dans la catégorie des $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbres un objet libre de base $X$ unique à un isomorphisme près. Cet objet est noté $\mathcal{F}\mathcal{A}(X)$.

Démonstration :

Ce genre de théorème est bien connu. Redonnons le schéma de la construction d'une telle algèbre $X$. On considère la $\mathcal{F}$-algèbre $\mathcal{F}(X)$ libre de base $X$. On considère ensuite sur $\mathcal{F}(X)$ la plus petite relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{F}(X)$ qui soit compatible avec les lois de $\mathcal{F}$ et telle que

$$(\forall (r, r') \in \mathcal{A}) \quad (\forall \alpha \in (\mathcal{F}(X))^Y) \quad (r(\alpha) \sim r'(\alpha))$$

L'ensemble quotient $\mathcal{F}(X)/_\sim$ muni des lois que l'on obtient en passant au quotient est l'algèbre libre cherchée. Ce modèle d'une algèbre libre est en général désignée sous le nom de modèle de Herbrand.

Explicitons un peu plus cette démonstration pour introduire des notations dont nous aurons besoin plus loin.

Définition 2.2.4 :

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de $\mathcal{F}$-axiomes. On associe à $\mathcal{A}$ une bigrammaire $G_{\mathcal{A}} = (\emptyset, \bigcup_{i=0}^{n} F_i \cup X, \rightarrow\!\!>)$ en posant

$$r \rightarrow\!\!> s \iff (r, s) \in \mathcal{A} \quad \text{ou} \quad (r, s) \in \mathcal{A}.$$

On définit alors une relation $\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}$ sur $\mathcal{F}(X)$ en posant

$$\alpha \underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow} \beta \iff \alpha \underset{G_{\mathcal{A}}}{>\!\!\longrightarrow} \beta$$

Proposition 2.2.5 :

La relation $\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}$ est symétrique et la relation itérée de $\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}$ notée $\underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}$ est la plus petite relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(X)$ qui soit compatible avec les lois définies sur $\mathcal{F}(X)$ et vérifiant

$$(\forall (r, s) \in \mathcal{A}) \; (\forall \alpha \in \mathcal{F}(X)^Y)(r(\alpha) \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} s(\alpha))$$

La démonstration de cette proposition n'est pas bien difficile, en particulier la compatibilité de $\underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}$ vis à vis des lois définies sur $\mathcal{F}(X)$ résulte de la proposition 1.3.3. Cette proposition signifie que la relation d'équivalence $\sim$ utilisée ci-dessus est la relation $\underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}$.

Remarques :

- le fait que $X \subset \mathcal{F}\mathcal{A}(X)$ provient du fait que nous ne considérons que nous ne considérons que des $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbres consistantes. Il est facile de voir que si $X \subset X'$ alors à un isomorphisme près, on a $\mathcal{F}\mathcal{A}(X) \subset \mathcal{F}\mathcal{A}(X')$.
- quand $X = \emptyset$ on parle d'objet universel plutôt que d'objet libre de base $\emptyset$.

2.3.- Exemples et contre-exemples.

On rencontre de multiples exemples de $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre dans les études sur les langages de mots et les langages d'arbres ainsi que dans l'étude des structures algébriques. En particulier toutes les structures algébriques où tous les axiomes utilisés sont du type

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \quad (t(x_1, \ldots, x_n) = t'(x_1, \ldots, x_n))$$

où $t$ et $t'$ sont des termes construits à partir des opérations de base de la structure considérée, entrent immédiatement dans le cadre des $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbres.

En revanche dans les $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbres on ne peut pas tenir compte d'axiome du type

$$p(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow [t(x_1, \ldots, x_n) = t'(x_1, \ldots, x_n)]$$

où $p$ est un prédicat.

De même des axiomes s'écrivant

$$t(x_1,\dots, x_n) \neq t'(x_1,\dots, x_n)$$

ne peuvent pas se traduire en terme de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre.

Par exemple la structure de corps n'est pas une structure du même type que celle des $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbres car l'un des axiomes s'écrit $x \neq 0 \Rightarrow x\, x^{-1} = x^{-1}x = 1$ .

Donnons maintenant quelques exemples de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre et d'objet libre.

a) On appelle V-algèbre monadique une $\mathfrak{F}$-algèbre telle que

$$\mathfrak{F} = (F_0, F_1) \quad \text{et} \quad card(F_0) = 1 \quad \text{et} \quad F_1 = V \quad .$$

L'ensemble $V^*$ des mots sur $V$ est la V-algèbre monadique universelle quand on munit $V^*$ du point distingué $\wedge$ et de la loi externe $a(\alpha) = \alpha a$ .

De même $(V^*) \cup (X\, V^*)$ est l'objet libre de base $X$ .

Une V-algèbre monadique finie est ordinairement appelée un automate fini sur $V$ .

b) Les monoïdes sont des $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbres si on pose

$$\mathfrak{F} = (F_0, F_1, F_2) \quad F_0 = \{e\} \quad , \quad F_1 = \emptyset \quad , \quad F_2 = \{+\}$$

$$\mathfrak{A} = \{(+(e, y_1), +(y_1, e)), (+(e, y_1), y_1) , (+(y_1, +(y_2, y_3)), +(+(y_1, y_2), y_3))\} \quad .$$

L'ensemble $V^*$ des mots sur $V$ est le monoïde libre de base $V$ quand on muni $V^*$ du point distingué $\wedge$ et de la loi binaire

$$+(\alpha, \beta) = \alpha\beta \ .$$

c) On appelle V-binoïde une $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre telle que

$$\mathfrak{F} = (F_0, F_1, F_2) \quad \text{et} \quad F_0 = \{e\} \quad \text{et} \quad F_1 = V \quad \text{et} \quad F_2 = +$$

$$\mathfrak{A} = \{(+(e, y_1), +(y_1, e)), (+(e, y_1), y_1) , (+(y_1, +(y_2, y_3)) + (+(y_1, y_2), y_3))\} \ .$$

L'objet universel de cette catégorie est $\hat{V}$ , tandis que l'objet libre de base $X$ est $\hat{V}[X]$ les lois étant la concaténation $(+)$ et l'enracinement $(ax)$ .

d) On appelle V-algèbre diadique une $\mathfrak{F}$-algèbre telle que

$$\mathfrak{F} = (F_0, F_1, F_2) \quad \text{et} \quad card(F_0) = 1 \quad \text{et} \quad F_1 = \emptyset \quad \text{et} \quad F_2 = V \quad .$$

Les arbres binaires étiquetés par des éléments de $V$ , y compris l'arbre vide est un modèle de la V-algèbre diadique universelle.

Remarquons que $\hat{V}$ muni du point distingué $\wedge$ et des lois $a(r, r') = (a \times r) + r'$ est un autre modèle de la V-algèbre diadique universelle. L'isomorphisme entre ces deux modèles est la façon classique de coder un arbre quelconque par un arbre binaire.



## 3.- Congruence dans les $\mathfrak{F}$-algèbres :

**Définition 3.1 :**

Soit $A$ une $\mathfrak{F}$-algèbre (ou une $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre), on dit qu'une relation d'équivalence sur $A$ est une $\mathfrak{F}$-congruence si et seulement si cette relation est compatible avec les lois définies sur $A$ .

Par exemple la relation $\overset{*}{\longleftrightarrow}$ utilisée à la proposition 2.2.5 est une $\mathfrak{F}$-congruence sur $\mathfrak{F}(X)$ .

On obtient alors immédiatement la proposition suivante :

**Proposition 3.2 :**

Soit $A$ une $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre , soit une $\mathfrak{F}$-congruence notée $\equiv$ , alors l'ensemble quotient $A/_\equiv$ peut être muni d'une structure de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre en faisant passer au quotient les lois définies sur $A$ .

C'est à dire que si $\bar{a}$ est la classe d'équivalence de $a$ pour $\equiv$ on pose pour $f \in F_k$

$$f^{A/\equiv}(\bar{a}_1,\dots, \bar{a}_k) = \overline{f^A(a_1,\dots, a_k)} \quad .$$

De plus l'application $\pi_\equiv : A \longrightarrow A/_\equiv$ telle que $\pi_\equiv(a) = \bar{a}$ est un $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-morphisme appelé projection canonique de $A$ sur $A/_\equiv$ .

Réciproquement si $\psi : A \to B$ est un $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-morphisme surjectif, la relation $\equiv$ définie par $a \equiv a' \Longleftrightarrow \psi(a) = \psi(a')$ est une $\mathfrak{F}$-congruence et il existe un unique $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-isomorphisme $\chi : A/_\equiv \longrightarrow B$

$$\psi = \chi \circ \pi_\equiv \quad .$$

**Définition 3.3 :**

On dit qu'une $\mathfrak{F}$-congruence $\equiv$ sur $A$ est plus grossière (ou plus petite) qu'une autre $\mathfrak{F}$-congruence $\simeq$ si et seulement si

$$\forall a, a' \in A \quad a \simeq a' \Rightarrow a \equiv a' \quad .$$

On notera $\equiv \leqslant \simeq$ cette propriété.

Cette relation qui est évidemment une relation d'ordre sur les $\mathfrak{F}$-congruences sur $A$ peut trivialement se traduire de diverses manières données par la proposition suivante :

**Proposition 3.4 :**

Soit $\sim$ et $\simeq$ deux $\mathfrak{F}$-congruences sur la $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre $A$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\equiv \leqslant \simeq$

ii) Pour tout $a$ de $A$ , $\pi_\simeq(a)$ est une union de classe d'équivalence d'éléments de $A$ pour $\equiv$ . (un tel ensemble est dit saturé pour $\equiv$ ).

iii) Il existe un $\mathfrak{F}$-morphisme $\chi$ tel que $\pi_\equiv = \chi \circ \pi_\simeq$ .

**Théorème 3.5 :**

Les $\mathfrak{F}$-congruences sur une algèbre $A$ forme un treillis complet pour la relation d'ordre $\leqslant$ .

**Démonstration :**

Soit $(\equiv_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathfrak{F}$-congruence sur $A$ , il faut montrer que cette famille admet une borne supérieure et une borne inférieure pour la relation d'ordre $\leqslant$ .

Soit $\hat{\equiv}$ la relation définie par

$$x \mathrel{\hat{\equiv}} y \Longleftrightarrow (\forall i \in I)\ (x \equiv_i y) \quad .$$

De façon évidente la relation $\hat{\equiv}$ possède les propriétés suivantes :

i) $\hat{\equiv}$ est une $\mathfrak{F}$-congruence

ii) $\forall i \in I \quad \equiv_i \leqslant \hat{\equiv}$

iii) pour toute $\mathfrak{F}$-congruence $\equiv$ on obtient

$$(\forall i \in I)\ (\equiv_i \leqslant \equiv) \Rightarrow \hat{\equiv} \leqslant \equiv \quad .$$

Donc $\hat{\equiv}$ est la borne supérieure de la famille $(\equiv_i)_{i \in I}$ .

Cherchons maintenant la borne inférieure de la famille $(\equiv_i)_{i \in I}$

Soit $I^*$ le monoïde libre engendré par $I$ , soit $\alpha = i_1 i_2 \dots i_k$ un élément de $I^*$ on notera $\equiv_\alpha$ la relation produit $\equiv_{i_1} \circ \equiv_{i_2} \circ \equiv_{i_3} \dots \circ \equiv_{i_k}$ . Soit $\underline{\underline{\vee}}$ la relation définie par

$$\underline{\underline{\vee}} = \bigcup_{\alpha \in I^*} \equiv_\alpha \quad .$$

Il n'est pas difficile de démontrer que $\underline{\underline{\vee}}$ possède les propriétés suivantes :

i) $\underline{\underline{\vee}}$ est une $\mathfrak{F}$-congruence

ii) $(\forall i \in I)(\underline{\underline{\vee}} \leqslant \equiv_i)$

iii) pour toute $\mathfrak{F}$-congruence $\equiv$ on obtient

$$(\forall i \in I)\ (\equiv \leqslant \equiv_i) \Rightarrow \equiv \leqslant \underline{\underline{\vee}} \quad .$$

Donc $\underline{\underline{\vee}}$ est la borne inférieure des $\mathfrak{F}$-congruences $\equiv_i$ pour la relation d'ordre $\leqslant$ .

En particulier la plus grande congruence sur $A$ est l'égalité et la plus petite est celle où $A$ tout entier forme une classe d'équivalence.

Définition 3.6 :

Soit $A$ une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre, soit $A'$ un sous-ensemble de $A$ , on dit qu'une $\mathfrak{F}$-congruence $\equiv$ reconnaît $A'$ si et seulement si $A'$ est un ensemble saturé pour la $\mathfrak{F}$-congruence $\equiv$ .

Cette définition peut se traduire de diverses façons résumées par la proposition évidente suivante :

Proposition 3.7 :

Soit $A$ une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre, soit $A'$ un sous-ensemble de $A$ et soit $\equiv$ une $\mathfrak{F}$-congruence , les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) la $\mathfrak{F}$-congruence $\equiv$ reconnaît $A'$

ii) $A'$ est saturé pour $\equiv$

iii) $(\forall a' \in A')\ (\forall a'' \in A)\ (a' \equiv a'' \Rightarrow a'' \in A')$

iv) $A'$ est une union de classe d'équivalence pour $\equiv$

v) il existe une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre $B$ , un morphisme surjectif $\psi : A \to B$ un sous-ensemble $B'$ de $B$ tel que

$$a \equiv a' \Leftrightarrow \psi(a) = \psi(a')$$
$$A' = \psi^{-1}(B') \quad .$$

Dans ce dernier cas on dira que le triplet $(B, B', \psi)$ reconnaît $A'$ .

Remarque :

L'égalité étant une $\mathfrak{F}$-congruence, celle-ci reconnaît [illegible] ensemble quelconque de $A$ et donc l'ensemble des $\mathfrak{F}$-congruences reconnaissant un sous-ensemble de $A$ n'est jamais vide.



Théorème 3.8 :

Soient $A$ une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre et $A'$ un sous-ensemble de $A$ . L'ensemble $R(A')$ des $\mathfrak{F}$-congruences reconnaissant $A'$ est un sous treillis complet de l'ensemble des $\mathfrak{F}$-congruences sur $A$ .

Démonstration :

Il suffit de démontrer que si $(\equiv_i)_{i \in I}$ est une famille de $\mathfrak{F}$-congruence reconnaissant $A'$ alors la borne supérieure $\hat{\equiv}$ et la borne inférieure $\underline{\underline{\vee}}$ de cette famille reconnaissant $A'$ . Remarquons que si $\equiv$ et $\equiv'$ sont deux $\mathfrak{F}$-congruences alors

$$\equiv \in R(A') \text{ et } \equiv \leqslant \equiv' \Rightarrow \equiv' \in R(A') \quad .$$

Donc la propriété est immédiate pour la borne supérieure $\hat{\equiv}$ . D'autre part, en utilisant les notations introduites dans la démonstration du théorème 3.5, on obtient immédiatement

$$(\forall \alpha \in I^*)\ (\forall a' \in A')\ (\forall a'' \in A)\ (a' \equiv_\alpha a'' \Rightarrow a'' \in A') \quad .$$

D'où, en utilisant la caractérisation iii) de la proposition 3.7, il découle que la $\mathfrak{F}$ congruence $\underline{\underline{\vee}}$ est dans $R(A')$ .

Corollaire 3.9 :

Soient $A$ une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre et $A'$ un sous-ensemble de $A$ , parmi les $\mathfrak{F}$-congruences reconnaissant $A'$ il en existe une plus petite que toutes les autres . Cette $\mathfrak{F}$-congruence canoniquement associée à $A'$ sera notée $\equiv_{A'}$ .

Démonstration :

Comme l'ensemble $R(A')$ des $\mathfrak{F}$-congruences reconnaissants $A'$ est un treillis complet, cet ensemble admet un plus petit élément qui est la congruence $\equiv_{A'}$ cherchée.

Là aussi ce corollaire peut se traduire de diverses façons, suivant que l'on utilise des congruences ou des morphismes d'algèbres. En particulier, on peut énoncer ce même résultat sous la forme suivante :

Théorème 3.10 :

Soient $A$ une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre, et $A'$ un sous-ensemble de $A$ , parmi les triplets $(B, B', \psi)$ reconnaissant $A'$ (c'est à dire formés d'un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphisme surjectif $\psi$ , d'une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre $B$ et d'un sous-ensemble $B'$ de $B$ tel que $A' = \psi^{-1}(B')$ ) il existe un triplet $(B_{A'}, B'_{A'}, \psi_{A'})$ défini à un isomorphisme près et reconnaissant $A'$ jouissant de la propriété universelle suivante :

Pour tout triplet $(B, B', \psi)$ reconnaissant $A'$ , il existe un unique $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphisme $\chi : B \to B_{A'}$ tel que

$$\psi_A = \chi \circ \psi \qquad \text{et} \qquad \chi^{-1}(B'_{A'}) = B' \quad .$$

En particulier $B_{A'}$ s'appelle l'algèbre minimale de $A'$ et $B_{A'}$ est isomorphe à $A/_{\equiv_{A'}}$ .

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons montrer une méthode de construction de ce triplet minimal associée à un sous-ensemble $A'$ d'un algèbre $A$ dans le cas des algèbre libres. L'originalité de cette méthode par rapport à celles déjà utilisées par d'autres auteurs (par exemple Steinby [78]) est d'être "syntaxique" en ce sens que l'on fait une construction formelle des objets que l'on manipule et que l'on montre l'effectivité des constructions.

Remarque :

La théorie des $\mathfrak{F}$-congruences peut servir aussi à démontrer l'existence d'objets libres dans la catégorie des $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbres. Pour cela on considère sur $\mathfrak{F}(X)$ les congruences qui vérifient les axiomes c'est à dire les congruences $\equiv$ vérifiant

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}, \ (\forall a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n) \ (a_i \equiv a'_i \Rightarrow \alpha_A(a_1, \ldots, a_n) \equiv \beta_A(a'_1, \ldots, a'_n)) \quad .$$

La congruence, où tous les éléments de $\mathfrak{F}(X)$ sont équivalents, vérifie cette condition. Il suffit de démontrer que l'ensemble de ces congruences forment un sous treillis complet de l'ensemble des congruences sur $\mathfrak{F}(X)$ et le plus grand élément permet, en passant au quotient, de construire l'algèbre libre cherchée.

## 4.- Construction de la $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre minimale d'un sous-ensemble de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$.

Dans ce paragraphe $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{A}$ sont fixés une fois pour toute, on parlera d'algèbre au lieu de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre et on notera $\mathcal{L}(X)$ au lieu de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ la $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre libre de base $X$.

Le but de ce paragraphe est de construire un triplet $(A, A', \psi)$ reconnaissant un sous-ensemble $L$ de l'algèbre libre $\mathcal{L}(X)$ et qui soit minimal.

Soit $\mathcal{L}(X \cup \{1\})$ l'algèbre libre sur $X \cup \{1\}$ où $1$ est un objet qui n'est pas dans $X$.

Proposition 4.1 :

Soit $r \in \mathcal{L}(X \cup \{1\})$, soit $\psi : \mathcal{L}(X) \to A$ un morphisme, on peut associer à $r$ une application $r_A : A \to A$ en interprétant $r$ comme un schéma de calcul à une variable $1$.

Démonstration :

Soit $a \in A$, soit $\psi_a : \mathcal{L}(X \cup \{1\}) \to A$ l'unique morphisme tel que $\psi_a(1) = a$ et $\psi_a|X = \psi|X$. On pose alors $r_A(a) = \psi_a(r)$.

Dans le cas où $\psi$ est l'injection canonique de $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathcal{L}(X \cup \{1\})$ on notera $\tilde{r}$ l'application obtenue. Notons que $\tilde{r}$ laisse $\mathcal{L}(X)$ stable.

Remarque :

Ce type d'opérations a déjà été introduit par exemple dans l'article de Goguen [30] sous le nom d'opérateur dérivé.

Lemme 4.2 :

$$\tilde{r} \circ \tilde{r}' = \widetilde{\tilde{r}(r')} \quad .$$

Démonstration :

$$\tilde{r} \circ \tilde{r}'(s) = \psi_{\tilde{r}'(s)}(r) \ , \ \widetilde{\tilde{r}(r')}(s) = \psi_s(\tilde{r}(r')) = \psi_s \circ \psi_{r'}(r) \quad .$$

Donc il suffit de prouver que pour tout $r'$ et $s$ les deux morphismes $\psi_{\tilde{r}'(s)}$ et $\psi_s \circ \psi_{r'}$ sont égaux. Pour cela, il suffit de les comparer su[illegible] base $X \cup \{1\}$ ce qui est trivial.

Lemme 4.3 :

Soit $\psi : \mathcal{L}(X) \to A$ et $r \in \mathcal{L}(X \cup \{1\})$ alors

$$\psi \circ \tilde{r} = r_A \circ \psi \quad .$$



Démonstration :

Du même type que pour le lemme précédent.

Définition 4.4 :

On appelle contexte pour la partie $L$ de $\mathcal{L}(X)$ l'application

$$C_L : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{P}(\mathcal{L}(X \cup \{1\}))$$

définie par

$$C_L(s) = \{r \ ; \ \tilde{r}(s) \in L\} \quad .$$

Lemme 4.5 :

Soit $r' \in \mathcal{L}(X \cup \{1\})$ alors

$$C_L(s) = C_L(s') \Rightarrow C_L(\tilde{r}'(s)) = C_L(\tilde{r}'(s')) \quad .$$

Démonstration :

$$r \in C_L(\tilde{r}'(s)) \Leftrightarrow \tilde{r} \circ \tilde{r}'(s) \in L \Leftrightarrow \widetilde{\tilde{r}(r')}(s) \in L \Leftrightarrow \widetilde{\tilde{r}(r')} \in C_L(s) \Leftrightarrow$$
$$\widetilde{\tilde{r}(r')} \in C_L(s') \Leftrightarrow \widetilde{\tilde{r}(r')}(s') \in L \Leftrightarrow \tilde{r} \circ \tilde{r}'(s') \in L \Leftrightarrow r \in C_L(s') \quad .$$

Proposition 4.6 :

Soit $A_L : \{ C_L(s) \ ; \ s \in \mathcal{L}(X) \}$. $A_L$ peut être muni d'une structure d'algèbre en posant pour $f \in F_k$

$$f(C_L(s_1), C_L(s_2), \ldots, C_L(s_k)) = C_L(f(s_1, s_2, \ldots, s_k)) \quad .$$

Pour cette structure de $A_L$, l'application $C_L$ est un morphisme de $\mathcal{L}(X)$ dans $A_L$.

Démonstration :

Il suffit de montrer que l'application $C_L$ est compatible avec les lois de l'algèbre c'est à dire que :

$$\left.\begin{array}{l} f \in F_k, s_1, s'_1, \ldots, s_k, s'_k \in \mathcal{L}(X) \\ C_L(s_1) = C_L(s'_1) \ \text{ et } \ldots \text{ et } \ C_L(s_k) = C_L(s'_k) \end{array}\right\} \Rightarrow C_L(f(s_1, \ldots, s_k)) = C_L(f(s'_1, \ldots, s'_k))$$

Pour démontrer cette implication, il suffit d'utiliser $k$ fois le lemme 4.5 en prenant successivement avec les notations de ce lemme :

$$r' = f(1, s_2, \ldots, s_k) \ , \quad s = s_1 \quad \text{et} \quad s' = s'_1$$
$$r' = f(s'_1, 1, \ldots, s_k) \ , \quad s = s_2 \quad \text{et} \quad s' = s'_2$$
$$\vdots$$
$$r' = f(s'_1, \ldots, s'_{k-1}, 1) \ s = s_k \quad \text{et} \quad s' = s'_k \quad .$$

Il est alors trivial de démontrer la proposition suivante :

Proposition 4.7 :

Le triplet $(A_L, A'_L, C_L)$ où $A'_L = \{C_L(s) \ ; \ s \in \mathcal{L}(X) \text{ et } 1 \in C_L(s)\}$ reconnaît $L$.

Lemme 4.8 :

Soit $(A, A', \psi)$ un triplet reconnaissant $L$,

$$\psi(s) = \psi(s') \Rightarrow C_L(s) = C_L(s') \quad .$$

Démonstration :

Supposons que $\psi(s) = \psi(s')$ . On obtient

$$r \in C_L(s) \Longleftrightarrow \tilde{r}(s) \in L \Longleftrightarrow \psi(\tilde{r}(s)) \in A' \Longleftrightarrow r_A(\psi(s)) \in A' \Longleftrightarrow r_A(\psi(s')) \in A' \Longleftrightarrow$$

$$\psi(\tilde{r}(s')) \in A' \Longleftrightarrow \tilde{r}(s') \in L \Longleftrightarrow r \in C_L(s')$$

D'où l'égalité de $C_L(s)$ et de $C_L s')$ .

Théorème 4.9 :

Soit $L \subset \mathcal{L}(X)$ . Le triplet $(A_L, A'_L, C_L)$ , qui reconnaît $L$ , est minimal en ce sens que si $(A, A', \psi)$ est un autre triplet reconnaissant $L$ alors il existe un morphisme $\chi : A \cap \psi(\mathcal{L}(X)) \to A_L$ surjectif tel que $\chi \circ \psi = C_L$ . De plus, un tel morphisme est unique et $\chi(A' \cap \psi(\mathcal{L}(X))) = A'_L$ . Enfin, le triplet $(A_L, A'_L, C_L)$ est à un isomorphisme près le seul vérifiant cette propriété.

Démonstration :

L'unicité de $\chi$ est évidente, en effet $\chi$ doit vérifier

$$\chi(a) = C_L(s) \quad \text{avec} \quad \psi(s) = a \quad .$$

De même, $\chi(A' \cap \psi(\mathcal{L}(X))) = A'_L$ est une trivialité. Il reste donc à montre que la définition de $\chi$ donnée par $\chi(a) = C_L(s)$ avec $\psi(s) = a$ a un sens.

Pour cela il suffit de montrer que

$$\psi(s) = \psi(s') \Longrightarrow C_L(s) = C_L(s') \quad .$$

Cette implication a été démontrée au lemme 4.8.

L'unicité du triplet $(A_L, A'_L, C_L)$ à un isomorphisme près résulte immédiatement de sa propriété universelle.

Définition 4.10 :

L'algèbre $A_L$ est par définition l'algèbre minimale de $L$ .

Exemple :

1°) Dans le cas des V-algèbres monadiques, un triplet reconnaissant $L \subset V^*$ est un automate fini le théorème 4.9 prouve l'existence d'un automate minimal reconnaissant $L$ .

2°) Dans le cas de monoïde, l'algèbre minimale de $L \subset V^* = \mathcal{L}(V)$ est le monoïde syntaxique de $L$ .

Le théorème 3.9 résulte d'une idée très simple qui, une fois émise, conduit à la solution sans problème. Il s'agit en fait, de savoir comment généraliser la notion de contexte d'un mot. Si on examine ce qui est fait ici, on remarque qu'une bonne généralisation consiste à faire des greffes d'arbres en utilisant un marqueur (noté 1 ici), mais de plus, on ne met pas le marqueur n'importe où, en effet, il faut tenir compte des opérations dont on dispose. La deuxième idée est de définir les greffes en termes d'hornomorphisme ce qui permet de faire des démonstrations propres.
Cette notion d'algèbre minimale d'une partie $L$ de $\mathcal{L}(X)$ a été aussi introduite de façon indépendante dans d'autres travaux. Par exemple dans l'article de Steinby [ 78] la définition de $Alg_1$ correspond exactement aux fonctions $\tilde{r}$ définies à la proposition 3.1 et les définitions qui suivent dans ce même article donnent des résultats comparables à ceux présentés ici. Il est à remarquer cependant que la présentation de Steinby est moins "syntaxique" que la notre et se prête moins bien à des démonstrations comme celles qui vont suivre.



5.- EFFECTIVITE DES CONSTRUCTIONS DANS LE CAS DES PARTIES RECONNAISSABLES.

On emploie les mêmes notations qu'au paragraphe 4.

Définition 5.1 :

Soit $L \subset \mathcal{L}(X)$ , un triplet $(A, A', \psi)$ reconnaissant $L$ est dit fini si et seulement si $A$ est un ensemble fini. On dit que $L \subset \mathcal{L}(X)$ est reconnaissable si et seulement si $L$ peut être reconnu par un triplet fini.

Le but de ce paragraphe est de démontrer que, si $L$ est reconnaissable on peut construire de manière effective le triplet $(A_L, A'_L, C_L)$ à partir d'un triplet $(A, A', \psi)$ fini reconnaissant $L$ .

Lemme 5.2 :

Soit $\psi : \mathcal{L}(X) \to A$ un morphisme. La construction de $\psi(\mathcal{L}(X)) \cap A$ est effective à partir de $\psi$ si $A$ est fini.

Démonstration :

Soit $A_o, A_1, \ldots, A_i, \ldots$ la suite de sous-ensembles de $A$ construite par la récurrence suivante

$$A_o = \psi(F_o \cup X)$$

$$A_{i+1} = A_i \cup \left( \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{f \in F_k} f(A_i, \ldots, A_i) \right) \quad .$$

De façon évidente on a

$$A_{i+1} \supseteq A_i \quad \text{et} \quad (A_i = A_{i+1} \Longrightarrow (k \in \mathbb{N})(A_{i+k} = A_i)) \quad .$$

De plus, $\psi(\mathcal{L}(X)) \cap A = \bigcup_{i \geqslant 0} A_i$ . Comme $A$ est fini, on obtiendra effectivement l'ensemble $\psi(\mathcal{L}(X)) \cap A$ en calculant la suite $A_i$ et en s'arrêtant au premier rang $i$ tel que $A_i = A_{i+1}$ .

Lemme 5.3 :

Soit $L_1$ et $L_2$ reconnus respectivement par les triplets finis $(A_1, A'_1, \psi_1)$ et $(A_2, A'_2, \psi_2)$ La différence symétrique $L_1 \Delta L_2$ de $L_1$ et de $L_2$ est reconnue par un triplet fini $(A_3, A'_3, \psi_3)$ que l'on peut effectivement construire à partir de $(A_1, A'_1, \psi_1)$ et $(A_2, A'_2, \psi_2)$ .

Démonstration :

Vu la forme des axiomes imposés aux algèbres, il est trivial de vérifier que si $A_1$ et $A_2$ sont deux algèbres alors $A_1 \times A_2$ muni des lois produits est aussi une algèbre. De plus si $\psi_1 : \mathcal{L}(X) \to A_1$ et $\psi_2 : \mathcal{L}(X) \to A_2$ sont des morphismes alors $\psi_1 \times \psi_2 : \mathcal{L}(X) \to A_1 \times A_2$ défini par $(\psi_1 \times \psi_2)(s) = (\psi_1(s) \ , \psi_2(s))$ est aussi un morphisme.

Pour reconnaître $L_1 \Delta L_2$ il suffit alors de prendre le triplet $(A_3, A'_3, \psi_3)$ avec

$$A_3 = A_1 \times A_2 \ , \quad \psi_3 = \psi_1 \times \psi_2 \quad \text{et} \quad A'_3 = (A'_1 \times \complement_{A_2} A'_2) \cup (\complement_{A_1} A'_1 \times A'_2) \quad .$$

Lemme 5.4 :

Soit $L$ reconnu par le triplet fini $(A, A', \psi)$ . Le problème de savoir si $L$ est vide ou non se traite de manière effective.

Démonstration :

On a $L = \emptyset \Longleftrightarrow A' \cap \psi(\mathcal{L}(X)) = \emptyset$ d'où l'effectivité du problème d'après le lemme 5.2.

Proposition 5.5 :

Soient $L_1$ et $L_2$ reconnus respectivement par les triplets finis $(A_1, A_1', \psi_1)$ et $(A_2, A_2', \psi_2)$
Le problème de savoir si $L_1 = L_2$ se traite de manière effective.

Démonstration :

On a $L_1 = L_2 \Longleftrightarrow L_1 \Delta L_2 = \emptyset$ . Donc les lemmes 5.3 et 5.4 montrent l'effectivité de la solution de ce problème.

Théorème 5.6 :

Soit $L \subset \mathcal{L}(X)$ une partie reconnaissable de $\mathcal{L}(X)$ reconnue par le triplet fini $(A, A', \psi)$ la construction du triplet minimal $(A_L, A_L', C_L)$ est effective à partir de $(A, A', \psi)$ .

Démonstration :

D'après le lemme 5.2 on peut supposer $\psi$ surjectif. Pour construire $A_L$ ou plutôt un objet isomorphe à $A_L$ , il suffit de construire dans $A$ la congruence $\sim$ définie par

$$a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow a_1 = \psi(s_1) \text{ et } a_2 = \psi(s_2) \text{ et } C_L(s_1) = C_L(s_2) \quad .$$

Soient $a \in A$ et $s$ tel que $\psi(s) = a$ . On obtient

$$r \in C_L(s) \Longleftrightarrow \tilde{r}(s) \in L \Longleftrightarrow \psi(\tilde{r}(s)) \in A' \Longleftrightarrow r_A(\psi(s)) \in A' \Longleftrightarrow r_A(a) \in A' \Longleftrightarrow \psi_a(r) \in A'$$

($\psi_a$ est l'unique morphisme de $\mathcal{L}(X \cup \{1\}) \longrightarrow A$ tel que $\psi_a|X = \psi$ et $\psi_a(1) = a$ , cf proposition 4.1).

Pour $a \in A$ posons $L_a = \{r \; ; \; \psi_a(r) \in A'\}$ , $L_a$ est reconnu par le triplet fini $(A, A', \psi_a)$ .
Or, la relation $\sim$ définie ci-dessus est aussi définie par

$$a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow L_{a_1} = L_{a_2} \quad .$$

Donc d'après la proposition 4.5 la vérification de cette relation est effective.
Comme il est facile de le voir un objet isomorphe à $A_L'$ est $A'/\sim$ .

Remarque :

Dans l'introduction, nous avons affirmé que le problème de la construction effective de l'algèbre minimale d'une partie reconnaissable de $\mathcal{L}(X)$ était indépendant du caractère décidable ou non du problème des mots dans cette structure d'algèbre. Cela peut paraître paradoxal, en effet on peut poser le problème ainsi en reprenant les notations générales des paragraphes précédents :

$$\mathfrak{F}(X) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathfrak{F}\mathcal{A}(X) \xrightarrow{\ \psi\ } A$$

$\varphi$ = projection canonique
$\psi$ = morphisme de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre
$A$ = $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre fini
$L$ = $\psi^{-1}(A')$ avec $A' \subseteq A$ .



Alors il faut construire $(A_L, A_L', \psi_L)$ de manière effective. Ceci est évidemment impossible si la $\mathfrak{F}$-congruence $t \equiv t' \Longleftrightarrow \varphi(t) = \varphi(t')$ n'est pas décidable.

Posons nous le problème d'une autre façon. On se donne une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre finie, une partie $A'$ de $A$ et une application $\psi : X \rightarrow A$ .

Soit $\overline{\psi} : \mathfrak{F}\mathcal{A}(X) \rightarrow A$ le prolongement de $\psi$ et $L = \overline{\psi}^{-1}(A')$ . Le calcul de $\overline{\psi}$ peut ne pas être effectif mais ce n'est pas cela qui est en cause dans le théorème 5.6. Celui-ci affirme qu'avec les données ci-dessus on peut construire effectivement la $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre $A_1 = \psi(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X))$ (lemme 5.2), puis une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre $A_0$ isomorphe à $A_L$ , une partie $A_0'$ de $A_0$ , une application $\psi_0 : X \longrightarrow A_0$ et un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ morphisme $\chi : A \rightarrow A_0$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & & A \arrow[dl, "\chi"] \\ & A_0 & \end{tikzcd}$$

De plus si $\psi_0 : \mathfrak{F}\mathcal{A}(X) \rightarrow A_0$ est le prolongement de $\psi_0$ , alors $(A_0, A_0', \psi_0)$ reconnaît $L$ et cet objet est à un isomorphisme près l'objet minimal $(A_L, A_L', \psi_L)$ .

Il est d'ailleurs assez facile d'adapter l'algorithme proposé par exemple par AHO, HOPCROFT, ULLMANN [ 1 ] pour les automates finis de terministes, pour traiter le problème posé ici. Mettons en place cet algorithme.
On calcule déjà $A_1$ grâce au lemme 4.2 ce qui ne pose pas de difficulté.
Dans la suite on suppose que $A = A_1$ .

Pour chaque $a \in A$ soit $\psi_a : \mathfrak{F}\mathcal{A}(X \cup \{1\}) \longrightarrow A$ défini par $\psi_a(x) = \psi(x)$ et $\psi_a(1) = a$ ,
Soit

$\varphi : \mathfrak{F}(X \cup \{1\}) \longrightarrow \mathfrak{F}\mathcal{A}(X \cup \{1\})$ la projection canonique et soit

$\psi_a' : \mathfrak{F}(X \cup \{1\}) \longrightarrow A$ le $\mathfrak{F}$ morphisme $\psi_a \circ \varphi$ . D'après la démonstration du théorème 5.6 on obtient

$$a \sim a' \Longleftrightarrow (\forall r \in \mathfrak{F}\mathcal{A}(X \cup \{1\}))\ (\psi_a(r) \in A' \Longleftrightarrow \psi_{a'}(r) \in A')$$
$$\Longleftrightarrow (\forall s \in \mathfrak{F}(X \cup \{1\})\ (\psi_a'(s) \in A' \Longleftrightarrow \psi_{a'}'(s) \in A') \quad .$$

Commençons par montrer qu'il n'est pas nécessaire de vérifier ceci pour tout $s$ de $\mathfrak{F}(X \cup \{1\})$ mais seulement pour tous $s$ de $\mathfrak{F}(X \cup \{1\})$ contenant une et une seule occurrence de $1$ . Soit $\mathfrak{I}_1(\mathfrak{F}, X \cup \{1\})$ les éléments de $\mathfrak{F}(X \cup \{1\})$ contenant une et une seule occurrence de $1$ et supposons que

$$(\forall s \in \mathfrak{I}_1(\mathfrak{F}, X \cup \{1\}))\ (\psi_a'(s) \in A' \Longleftrightarrow \psi_{a'}'(s) \in A') \qquad (I) \quad .$$

Soit $s$ un élément quelconque de $\mathfrak{F}(X \cup \{1\})$ , on peut trouver un entier $n$ et un élément de $t$ de $\mathfrak{F}(X \cup [1, n])$ contenant exactement une occurrence de chaque entier $i$ de $[1, n]$ tel que $s = \tilde{t}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ fois}})$

Soient d'autre part un élément $t_a \in \mathfrak{F}(X)$ et un élément $t_{a'} \in \mathfrak{F}(X)$ tels que $\psi_a(t_a) = a$ et $\psi_{a'}(t_{a'}) = a'$ . En utilisant (I) on obtient la suite d'équivalence suivante :

$$\psi_a'(s) \in A' \Longleftrightarrow \psi_a'(\tilde{t}(1, 1, \ldots, 1)) \in A' \Longleftrightarrow \psi_a'(\tilde{t}(1, t_a, \ldots, t_a)) \in A' \overset{I}{\Longleftrightarrow}$$
$$\psi_{a'}'(\tilde{t}(1, t_a, \ldots, t_a)) \in A' \Longleftrightarrow \psi_a'(\tilde{t}(t_{a'}, t_a, \ldots, t_a) \in A' \Longleftrightarrow$$
$$\psi_a'(\tilde{t}(t_a', t_a, \ldots, t_a) \in A' \Longleftrightarrow \psi_a'(\tilde{t}(t_{a'}, 1, t_a, \ldots, t_a) \in A' \overset{I}{\Longleftrightarrow}$$
$$\psi_{a'}'(\tilde{t}(t_{a'}, 1, t_a, \ldots, t_a)) \in A' \Longleftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Longleftrightarrow$$
$$\psi_{a'}'(\tilde{t}(t_{a'}, t_{a'}, \ldots, t_{a'})) \in A' \Longleftrightarrow \psi_{a'}'(\tilde{t}(1, \ldots, 1)) \in A' \Longleftrightarrow$$
$$\psi_{a'}'(s) \in A' \quad .$$

Remarque :

Ce que l'on vient de démontrer prouve que l'on aurait pu utiliser les éléments de $\mathcal{T}_1(\mathfrak{F}, X \cup \{1\})$ pour définir la fonction contexte.
Dans une toute première version de ce chapitre, nous étions parti sur cette voie, mais, on s'aperçoit que $\mathcal{T}_1(\mathfrak{F}, X \cup \{1\})$ est d'un usage mal commode car cet ensemble n'est pas stable par composition et son utilisation pour définir les contextes demande de nombreuses manipulations techniques sans intérêt.

Nous allons maintenant calculer la relation d'équivalence $\sim$ par approximation successive. Pour cela, commençons par définir une suite croissante de sous ensembles de $\mathcal{T}_1(\mathfrak{F}, X \cup \{1\})$ . On pose

$$\mathfrak{F}_0 = \{1\} \cup \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{j \in F_j} \{f(t_1,\dots, t_k) \; ; \; t_\ell \in \mathfrak{F}(X) \cup \{1\} \quad \text{et} \quad (\exists!\ell)(t_\ell = 1)\}$$

$$\mathfrak{F}_{i+1} = \bigcup_{r \in \mathfrak{F}_i} (\tilde{r}(s) \; ; \; s \in \mathfrak{F}_0) \quad .$$

Il est facile de voir que $t \in \mathfrak{F}_i \iff t \in \mathcal{T}_1(\mathfrak{F}, X \cup \{1\})$ et la longueur du chemin de $t$ d'extrêmité 1 est $i+1$ au plus.

On en déduit donc $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_{i+1}$ et $\bigcup_{i \geq 0} \mathfrak{F}_i = \mathcal{T}_1(\mathfrak{F}, X \cup \{1\})$ .

Posons $a \overset{i}{\sim} a' \iff (\forall s \in \mathfrak{F}_i)\ (\psi_a(s) \in A' \iff \psi_{a'}(s) \in A')$ .

On obtient immédiatement

$$a \sim a' \iff (\forall i)(a \overset{i}{\sim} a')$$

$$a \overset{i+1}{\sim} a' \iff a \overset{i}{\sim} a' \quad \text{et} \quad (\forall s \in \mathfrak{F}_0)\ \ (\psi_a(s) \overset{i}{\sim} \psi_{a'}(s)) \ .$$

D'où on en déduit que $\overset{i-1}{\sim} = \overset{i}{\sim} \ \Rightarrow\ \overset{i}{\sim} = \overset{i+1}{\sim}$ et donc la suite $\overset{i}{\sim}$ est stationnaire dès que deux termes consécutifs de cette suite sont égaux. Donc en raisonnant sur $\mathrm{card}(A/\overset{i}{\sim})$ on en déduit que cette suite est stationnaire avant le rang $n-2$ où $n$ est le cardinal de $A$ . Si on particularise cet algorithme en prenant toutes les fonctions $f$ d'arité 1 on obtient l'algorithme de réduction des automates finis deterministes décrit dans [ 1 ]. On peut remarquer que dans le cas où les fonctions $f$ ont une arité plus grande que 1, l'algorithme proposé ici est très combinatoire puisqu'à chaque étape connaissant $\overset{i}{\sim}$ pour calculer $\overset{i+1}{\sim}$ on doit vérifier la propriété suivante

$$a \overset{i+1}{\sim} a' \iff a \overset{i}{\sim} a' \quad \text{et} \quad (\forall f\ \forall i\ \forall a_1,\dots, a_{i-1}, a_{i+1},\dots, a_k \in A)(f(a_1,\dots, a_{i-1}, a, a_{i+1},\dots, a_k) \in A' \iff f(a_1,\dots, a_{i-1}, a', a_{i+1},\dots, a_k) \in A') \ .$$

Il ne semble pas que, de manière triviale, on puisse dans le cas général améliorer cet algorithme. Cependant dans des cas particuliers en tenant compte des propriétés des fonctions $f$ modulo les axiomes, on peut améliorer très fortement cet algorithme. En effet si on trouve un sous-ensemble $P$ de $\mathcal{T}_1(\mathfrak{F}, X \cup \{1\})$ vérifiant $\mathcal{T}_1(\mathfrak{F}, X \cup \{1\}) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(P))$ avec

$$\varphi : \ \mathfrak{F}(X \cup \{1\}) \to \mathcal{C}\mathcal{A}(X \cup \{1\}) \qquad \text{alors on aura}$$

$$a \sim a' \iff (\forall s \in P)\ (\psi_a(s) \in A' \iff \psi_{a'}(s) \in A') \quad .$$

Si $P$ peut être engendré par une suite de sous-ensemble $P_i$ possédant de bonnes propriétés de récurrence l'algorithme sera fortement amélioré.
Prenons par exemple la construction du monoïde syntaxique. On a donc comme structure

$$\mathfrak{F} = (\{\wedge\},\ \phi,\ \{\cdot\}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = \{\ \wedge \cdot x = x.\wedge = x \ ,\ x.(y.z) = (x.y).z\ \} \ .$$



Donnons un algorithme de construire un monoïde syntaxique d'un langage régulier $L$ sur $V$ reconnu par le triplet $(M, M', \psi)$ ($M$ est un monoïde fini).
Soit $P_i$ la suite croissante de sous ensemble de $\mathfrak{F}(V \cup \{1\})$ défini par

$$P_0 = \{1\}$$

$$P_1 = \{1\} \cup \{\underset{1\quad a}{\overset{\bullet}{\wedge}} \; ; \; a \in V\} \cup \{\underset{a\quad 1}{\overset{\bullet}{\wedge}} \; ; \; a \in V\}$$

$$P_{i+1} = \{\tilde{r}(s) \; ; \; r \in P_i \quad \text{et} \quad s \in P_1\} \quad .$$

Comme la loi . est associative et que $\wedge$ est un élément neutre de . on en déduit que $P = \bigcup_{i \geq 0} P_i$ vérifie la condition énoncée ci-dessus, on obtient alors la construction suivante de $\sim$ en posant

$$m \overset{i}{\sim} m' \iff (\forall s \in P_i)\ (\psi_m(s) \in A' \iff \psi_{m'}(s) \in A'))$$

$$m \overset{0}{\sim} m' \iff (\forall s \in P_0)\ (\psi_m(s) \in M' \iff \psi_{m'}(s) \in M')$$

$$\iff (m \in M' \quad \text{et} \quad m' \in M') \quad \text{ou} \quad (m \notin M' \quad \text{et} \quad m' \notin M')$$

$$\text{et donc} \qquad M/\overset{0}{\sim} = \{M', \complement_M M'\}$$

$$m \overset{i+1}{\sim} m' \iff m \overset{i}{\sim} m' \quad \text{et} \quad (\forall s \in P_1)\ (\psi_m(s) \overset{i}{\sim} \psi_{m'}(s))$$

$$\iff m \overset{i}{\sim} m' \quad \text{et} \quad (\forall a \in V)\ (\psi(a).m \overset{i}{\sim} \psi(a).m' \quad \text{et} \quad m.\psi(a) \overset{i}{\sim} m'.\psi(a)) \quad .$$

On obtient alors l'algorithme classique de calcul du monoïde syntaxique de $L$ .

Remarque :

Si les axiomes de la structure sont orientés (voir chapitre 4 systèmes de réécriture), on pourra chercher $P$ en tenant compte des formes normales des termes de $\mathfrak{F}(X)$ si elles existent.

## 6.- APPLICATION DES RESULTATS A DES CAS DEJA CONNUS PAR AILLEURS.

Dans ce paragraphe, on applique les théorèmes 4.9 et 5.6 au cas des automates et des monoïdes de façon à montrer que l'on obtient les mêmes résultats que dans les démonstrations classiques. Le cas de monoïde réserve une petite surprise.

### 6.1.- Cas des V-algèbres monadiques.

Classiquement, on travaille sur l'objet universel $V^*$ de cette catégorie (exemple à §.2.3).
Pour $L \subset V^*$ on construit l'automate minimal de $L$ en introduisant la notion de contexte à droite défini par

$$D_L(\alpha) = \{\beta \; ; \; \beta \in V^* \quad \text{et} \quad \alpha\beta \in L\} \quad .$$

On montre ensuite que

$$D_L(\alpha) = D_L(\alpha') \Rightarrow D_L(\alpha\beta) = D_L(\alpha'\beta)$$

et on construit l'automate minimal de $L$ qui avec les notations employées ici est un triplet $(D, D', \psi)$ avec $D = \{D_L(\alpha) \; ; \; \alpha \in V^*\}$ , $D' = \{D_L(\alpha) \; ; \; \alpha \in V^* \text{ et } \wedge \in D_L(\alpha)\}$ et $\psi$ est l'unique morphisme de V-algèbre monadique, de $V^*$ dans $D$ .

Si on applique les théories développées ici, on construit déjà l'objet libre $\mathcal{L}(\{1\})$ de cette catégorie, on obtient $\mathcal{L}(\{1\}) = V^* \cup \{1\}\ V^*$ .
Ensuite, on construit l'application $C_L$ et on démontre facilement que

$$C_L(\alpha) = \{\beta \; ; \; \beta \in V^* \cup \{1\}\ V^* \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}(\alpha) \in L\} = L \cup \{1\}\ D_L(\alpha) \ .$$

Donc on retrouve pratiquement les mêmes objets que dans la théorie classique. Le fait que $L \subseteq C_L(\alpha)$ est dû à la définition de $C_L$, on peut l'éviter en posant en général

$$C_L(s) = \{r \; ; \; r \in \mathcal{L}(X \cup \{1\}) \text{ et } r \notin \mathcal{L}(X) \text{ et } \tilde{r}(s) \in L\} \quad .$$

Cette nouvelle définition plus complexe n'apporte rien.

6.2.- Cas des monoïdes.

On travaille en général sur l'objet libre de base $V$ qui est $V^*$ muni du point distingué $\wedge$ et de la concaténation. Classiquement, pour construire le monoïde syntaxique de $L \in V^*$, on construit les classes de contexte des mots de $L$ en posant

$$C'_L(\alpha) = \{(\beta, \gamma) \; ; \; \beta\alpha\gamma \in L\} \quad .$$

L'ensemble des $C'_L(\alpha)$ est alors muni d'une structure de monoïde en posant

$$C'_L(\alpha) \cdot C'_L(\beta) = C'_L(\alpha\beta) \quad .$$

Si on applique ce qui est fait ici, on construit le monoïde libre de base $V \cup \{1\}$ c'est à dire $(V \cup \{1\})^*$ et on obtient

$$C_L(\alpha) = \{\beta \; ; \; \beta \in (V \cup \{1\})^* \text{ et } \tilde{\beta}(\alpha) \in L\}$$
$$= \{\beta_1 1 \beta_2 1 \beta_3 \dots \beta_{k-1} 1 \beta_k \; ; \; k \geq 0 \text{ et } \beta_1 \alpha \beta_2 \alpha \dots \beta_{k-1} \alpha \beta_k \in L\}$$

On obtient donc des objets syntaxiquement assez différents ; mais puisque l'on a là deux constructions du monoïde syntaxique d'un langage, on en déduit que

$$C'_L(\alpha) = C'_L(\beta) \longleftrightarrow C_L(\alpha) = C_L(\beta) \quad .$$

La démonstration directe de ce fait est d'ailleurs facile par récurrence.

On peut chercher quelle est la structure que l'on doit mettre sur $V^*$ pour que l'application contexte définie dans cet article, corresponde littéralement à $C'_L$. On est alors amené à poser la définition suivante :

Définition 6.2.1 :

On appelle bi-algèbre monadique sur $V$ une $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre telle que

i) $\mathcal{F} = \{F_0, F_1\}$, $F_0 = \{e\}$, $F_1 = V \cup \bar{V}$ où $\bar{V}$ est en bijection avec $V$ par $a \rightleftarrows \bar{a}$.

ii) $\mathcal{A} = \{(a(\bar{b}(y)) \; , \; \bar{b}(a(y))) \; , \; (a(e) \; , \; \bar{a}(e))\}$.

Il est facile de montrer que l'objet universel de cette structure d'algèbre est $V^*$ muni du point distingué $\wedge$ et des lois

$$a(\alpha) = a\alpha \quad \text{et} \quad \bar{a}(\alpha) = \alpha a \quad .$$

De même l'objet libre sur $X$ est $V^*(X \cup \{\wedge\})V^*$ muni du point distingué $\wedge$ et des lois comme ci-dessus.

Pour cette structure on obtient pour $L \subset V^*$

$$C_L(\alpha) = \{\beta \; ; \; \beta \in V^* \cup V^*\{1\}V^* \text{ et } \tilde{\beta}(\alpha) \in L\}$$
$$= L \cup \{\beta 1 \gamma \; ; \; \alpha\beta\gamma \in L\} \quad .$$

On retrouve donc l'analogue de $C'_L$ dans cette structure.

Remarque :

En modifiant légèrement les définitions ci-dessus, on peut voir apparaître des objets étudiés par ailleurs sous le nom d'automates à deux bandes.



Définition 6.2.2. :

Soient $V$ et $W$ deux ensembles finis disjoints. On appelle $(V, W)$ algèbre monadique la structure d'algèbre suivante

$$\mathcal{F} = (\{e\} \; , \; V \cup W), \quad \mathcal{A} = \{v(w(x)) = w(v(x)) \; ; \; v \in V \text{ et } w \in W\} \; .$$

Avec cette définition on obtient facilement la proposition suivante :

Proposition 6.2.3 :

L'objet universel de la structure de $(V, W)$-algèbre monadique est à un isomorphe près $V^* \times W^*$ muni des lois suivantes :

$$e = (\wedge, \wedge)$$
$$(\forall v \in V) \; v(\alpha, \beta) = (\alpha v, \beta)$$
$$(\forall w \in W) \; w(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta w)$$

Si on n'y prend pas garde, il est tentant de penser que les objets reconnaissables pour cette structure sont les sous-ensembles de $V^* \times W^*$ reconnus par les diagrammes clos introduits par Bird [ 6 ]. En effet si on reprend la définition de cet auteur on obtient :

Définition 6.2.4 :

On appelle diagramme clos sur $(V, W)$ un quadruplet $(S, s_0, P, s_f)$ tel que

$S$ est un ensemble d'état

$s_0$ est l'état initial

$s_f$ est l'état final

$P \subseteq S \times (V \cup W) \times S$ et $P$ vérifie les deux conditions

i) $(\forall s \in S - \{s_f\}) \; (\forall x \in V \cup W) \; (!s') \; ((s, x, s') \in P)$

(c'est à dire que $P$ est le graphe d'une relation ternaire fonctionnelle en sa dernière variable)

ii) $(\forall s \in S) \; (\forall v \in V) \; (\forall w \in W) \; (\forall s_1 \in S) \; (\forall s_2 \in S) \; ((s, v, s_1) \in P$ et $(s, w, s_2) \in P \Rightarrow$

$$(\exists s_3 \in S)((s_1, w, s_3) \in P \text{ et } (s_2, v, s_3) \in P))$$

(Il y a donc commutation des lois définies sur $S$ par les éléments de $V$ et $W$) .

A première vue les diagrammes clos, mis à part l'état final, semblent être les algèbres finies de la structure de $(V, W)$-algèbre monadique. Mais là on commet une erreur, car nul part dans sa définition, Bird n'impose que les fonctions $x$ définies dans $S$ en posant $x(s) = s' \longleftrightarrow (s, x, s') \in P$ soient partout définies, ce qui est fondamental pour appliquer les résultats présentés ici.

La définition suivante de Bird montre bien d'ailleurs ce phénomène puisque pour cet auteur un schéma est un diagramme clos vérifiant

$$(\forall s \in S) \; (\forall v \in V) \; (\forall w \in W) \; (v(s) \text{ est défini} \longleftrightarrow w(s) \text{ n'est pas défini}) \quad .$$

Il existe d'ailleurs une preuve détournée de l'impossibilité de formaliser exactement la théorie des diagrammes, schémas et autres automates à deux bandes dans le cadre des structures d'algèbres et de leurs sous-ensembles reconnaissables. En effet, Bird démontre une équivalence entre la théorie des schémas et celle des automates à deux bandes et d'autre part, dans Rabin et Scott [ 71 ] est énoncé un théorème d'indécidabilité pour le problème de savoir si l'intersection de deux ensembles reconnus par des automates à deux bandes est vide ou non. Or ce phénomène ne se produirait pas si on pouvait transcrire ce problème dans la théorie des sous-ensembles reconnaissables d'une structure algébrique (cf lemme 5.4).

Si on revient aux $(V, W)$-algèbres monadiques, et si on considère les algèbres finies de cette structure, on obtient donc des diagrammes clos particuliers vérifiant à la place de la condition i) de la définition 6.2.4, la condition i') suivante :

i') $(\forall s \in S) \; (\forall x \in V \cup W) \; (\exists ! s') \; ((s, x, s') \in P)$ .

De plus, on ne particularise pas un état final $s_f$ mais un sous-ensemble $S'$ de $S$. De tels diagrammes pourraient être nommés "diagrammes clos complets".
Pour les diagrammes clos complets, la théorie développée ici s'applique immédiatement et en particulier il est possible de trouver algorithmiquement un diagramme clos complet minimal associé à un diagramme clos complet donné (cf §.5).
Toutefois ces diagrammes clos complets ont perdu beaucoup de la puissance des diagrammes clos généraux, en effet, on peut démontrer qu'un sous-ensemble $L$ de $V^* \times W^*$ est reconnaissable pour la structure de $(V, W)$ algèbre monadique universelle de $V^* \times W^*$ si et seulement s'il existe un langage régulier $L'$ tel que

$$L' \subseteq V^* W^* \quad \text{et} \quad L = \{ (\alpha, \beta) \ ; \alpha \in V^* \quad \text{et } \beta \in W^* \quad \text{et} \quad \alpha\beta \in L' \} .$$

(Indication sur la démonstration : le sens direct est évident. Pour démontrer la réciproque, on considère un $L' \subseteq V^* W^*$ et on le transforme en $L'' \subseteq (V \cup W)^*$ en posant

$$\alpha \in L'' \iff \alpha = \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \ldots \alpha_k \beta_k \quad \text{et} \quad \alpha_i \in V^*, \quad \text{et} \quad \beta_i \in W^* \quad \text{et} \quad \alpha_1 \ldots \alpha_k \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \in L' .$$

On montrer facilement que $L''$ est régulier si $L'$ l'est. On montre que l'automate minimum de $L''$ a une structure de $(V, W)$ algèbre monadique qui reconnaît $L$. (Pour ce dernier résultat on peut en particulier utiliser le théorème 7.2.6)).

### 6.3.- Cas des langages d'arbres :

Si on considère les structures de T-algèbre diadique ou de T-binoïde, on obtient des objets universels qui ont même ensemble sous-jacent $\hat{T}$ et qui ne sont différents que par leurs lois de composition.
Le paragraphe 1.5.5 montre que les ensembles reconnaissables pour ces deux structures coïncident et sont les bilangages réguliers. Le paragraphe 1.5.6 donne pour ces deux structures la construction de l'algèbre minimale dans le cas des parties reconnaissables des objets universels. Le lecteur pourra constater que les définitions de $D_L$ (définition 1.5.6.5) et de $C_L$ (définition 1.5.6.10) sont exactement des cas particuliers de la définition 4.4.

## 7.- PROPRIETE D'UNE PARTIE $L$ DE $\mathfrak{F}\mathfrak{A}(X)$ EN FONCTION DES PROPRIETES DE $A_L$ .

### 7.1.- Introduction :

Le but de ce paragraphe est d'étudier la liaison existante entre les propriétés d'un langage $L$ et celles de son algèbre minimale $A_L$.
Par exemple, supposons que $L \subset V^*$ et que le monoïde syntaxique de $L$ soit commutatif ou bien soit un groupe, que peut-on dire de $L$ ? Réciproquement, que faudra-t-il vérifier sur $L$ pour être sûr que $A_L$ soit un monoïde commutatif ? Nous commencerons par étudier le cas général puis nous appliquerons les résultats obtenus pour donner une caractérisation des langages algébriques qui sont réguliers.

### 7.2.- Etude du cas général :

Dans ce paragraphe $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{A}$ ne sont pas fixés, nous serons donc obligés d'utiliser les notations générales.



**Théorème 7.2.1** :

Soient $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$, soit $L \subset \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X)$, si $A_L$ peut être muni d'une structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre prolongeant sa structure de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre, alors $L = \psi^{-1}(\psi(L))$ où $\psi$ est l'unique $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-morphisme de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}(X)$ dans $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ tel que $\psi | X = Id_X$.

**Démonstration** :

Soit $(A_L, A'_L, C_L)$ le triplet minimal reconnaissant $L$. Par hypothèse $A_L$ a une structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre, il existe un $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-morphisme $\varphi$ de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ dans $A_L$ tel que $\varphi | X = C_L | X$.
De façon évidente, on a $\varphi \circ \psi = C_L$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "C_L"'] & & \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & A_L & \end{tikzcd}$$

Dans tous les cas on a évidemment $L \subset \psi^{-1}(\psi(L))$. Montrons la réciproque.
On a $L = C_L^{-1}(A'_L) = (\varphi \circ \psi)^{-1}(A'_L) = \psi^{-1}(\varphi^{-1}(A'_L))$. Il suffit donc de montrer que

$$\varphi^{-1}(A'_L) \supseteq \psi(L) \quad . \text{ Or}$$

$$s' \in \psi(L) \Rightarrow s' = \psi(s) \quad \text{et} \quad s \in L \Rightarrow \varphi(s') = \varphi \circ \psi(s) \quad \text{et} \quad s \in L \Rightarrow \varphi(s') = C_L(s)$$

$$\text{et} \quad s \in L \Rightarrow \varphi(s') \in A'_L \Rightarrow s' \in \varphi^{-1}(A'_L) \quad .$$

**Théorème 7.2.2** :

Soient $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$, soient $L \subset \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X)$ et $\psi : \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X) \to \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ l'unique morphisme de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}(X)$ dans $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ tel que $\psi | X = Id_X$. Si $A_L$ peut être muni d'une structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre prolongeant sa structure de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre et si $\psi$ est surjectif alors $A_L = A_{\psi(L)}$ à un isomorphisme près.

**Démonstration** :

Le théorème 7.2.1 prouve que $L = \psi^{-1}(\psi(L))$, donc le triplet $(A_{\psi(L)}, A'_{\psi(L)}, C_{\psi(L)} \circ \psi)$ reconnaît $L$, de plus, $C_{\psi(L)}$ et $\psi$ sont surjectif, donc (théorème 4.9) il existe un unique morphisme $\chi$ de $A_{\psi(L)}$ dans $A_L$ rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "C_L"] & \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X) \arrow[d, "C_{\psi(L)}"] \\ A_L & A_{\psi(L)} \arrow[l, "\chi"'] \end{tikzcd}$$

Prouvons que $(A_L, A'_L, \chi \circ C_{\psi(L)})$ reconnaît $\psi(L)$.
On obtient :

$$s' \in (\chi \circ C_{\psi(L)})^{-1}(A'_L) \iff \chi \circ C_{\psi(L)}(s') \in A'_L \iff (\exists s)(s' = \psi(s) \quad \text{et}$$

$$\chi \circ C_{\psi(L)} \circ \psi(s) \in A'_L) \iff (\exists s)(s' = \psi(s) \quad \text{et} \quad C_L(s) \in A'_L) \iff$$

$$(\exists s)(s' = \psi(s) \quad \text{et} \quad s \in L) \iff s' \in \psi(L) \quad .$$

Donc, il existe $\chi'$ unique rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "C_L"] & \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X) \arrow[d, "C_{\psi(L)}"] \\ A_L \arrow[r, shift left, "\chi'"] & A_{\psi(L)} \arrow[l, shift left, "\chi"] \end{tikzcd}$$

On a donc $\chi \circ \chi' \circ C_L = C_L$ et $\chi' \circ \chi \circ C_{\psi(L)} = C_{\psi(L)}$ car toutes ces applications sont surjectives.

Donc $\chi \circ \chi' = Id_{C_L}$ et $\chi' \circ \chi = Id_{C_{\psi(L)}}$ et donc à un isomorphisme près $A_L = A_{\psi(L)}$ .

Le théorème 6.2 montre que le fait que $\psi : \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X) \to \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ soit surjectif semble important. Etudions ce que l'on peut déduire de $\psi$ surjectif et quelles hypothèses il faut supposer sur $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{A}'$ pour que $\psi$ soit surjective.

Lemme 7.2.3 :

Soient $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ et $\psi : \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X) \to \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ . On suppose $\psi$ surjectif. Soit $f' \in \mathfrak{F}' - \mathfrak{F}$ tel que l'arité de $f'$ soit au plus $card(X)$ , alors dans $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ on peut exprimer $f'$ en utilisant uniquement les opérations de $\mathfrak{F}$ .

Démonstration :

Le lemme est évident, en effet soit $n$ l'arité de $f'$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments distincts de $X$ , alors $f'(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ et donc il existe un $s \in \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X)$ tel que $f'(x_1, \ldots, x_n) = \psi(s)$ et de façon évidente $\psi(s)$ s'exprime uniquement par des compositions d'éléments de $\mathfrak{F}$ .

Remarque :

Si l'hypothèse sur l'arité de $f'$ et $card(X)$ n'est pas vérifiée, on ne peut pas dire grand chose sur $f'$ . En particulier, on ne pourra pas affirmer que $f'$ s'exprime dans tous les cas par une même composition d'éléments de $\mathfrak{F}$ . Par exemple, prenons la $\mathfrak{F}$-algèbre telle que $\mathfrak{F} = \{F_o\}$ et $F_o = \{a, b\}$ et la $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre telle que $\mathfrak{F}' = \{F_o, F_1\}$ , $F_1 = \{f'\}$ et $\mathfrak{A}' = \{(f'(a), b) , (f(b), a)\}$ , dans ce cas $\psi : \mathfrak{F}(\emptyset) \to \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(\emptyset)$ est évidemment surjective et évidemment $f'$ n'a pas d'expression en fonction des éléments de $\mathfrak{F}$ . Remarquons que dans ce cas pour $card(X) \geq 1$ le morphisme $\psi : \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ n'est pas surjectif.

Définition 7.2.4 :

On dit que la structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre est une image surjective de la structure de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre si et seulement si pour tout $X$ le morphisme $\psi : \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X) \to \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ est surjective.

Proposition 7.2.5 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre soit une image surjective de la structure de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre est que tout élément $f'$ de $\mathfrak{F}'-\mathfrak{F}$ s'exprime par des compositions d'éléments de $\mathfrak{F}$ .

Démonstration :

La condition est évidemment suffisante et le lemme 7.3 prouve qu'elle est nécessaire.
Grâce à ces définitions on peut donner une réciproque partielle au théorèmes 7.1 et 7.2.



Théorème 7.2.6. :

Soit une structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre qui soit une image surjective de la structure de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre. Soit $\psi : \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X) \to \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ tel que $\psi|X = Id_X$ et $L \subset \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X)$ . Si $L = \psi^{-1}(\psi(L))$ alors $A_L$ a une structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre isomorphe à celle de $A_{\psi(L)}$ .

Démonstration :

Comme dans la démonstration de 6.2, on obtient l'existence d'un $\chi : A_{\psi(L)} \to A_L$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "C_L"] & \mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X) \arrow[d, "C_{\psi(L)}"] \\ A_L \arrow[r, "\chi"] & A_{\psi(L)} \end{tikzcd}$$

De plus, grâce aux hypothèses toutes ces applications sont surjectives. L'hypothèse sur la structure $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre implique que, pour $f' \in \mathfrak{F}' - \mathfrak{F}'$ . $f'$ s'exprime uniquement à l'aide d'élément de $\mathfrak{F}$ . Donc, comme $\psi_o C\psi_{(L)}$ est surjectif, on peut définir sur $A_L$ une structure $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre prolongeant la structure de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre simplement en transportant par $\psi_o C_{\psi(L)}$ la structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'(X)$ . Le théorème 7.2.2 prouve alors que $A_L$ et $A_{\psi(L)}$ sont isomorphes.

Corollaire 7.2.7 :

Soit une structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre qui soit une image surjective de la structure de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre, soit $L \subset \mathfrak{F}\mathfrak{A}(X)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $L = \psi^{-1}(\psi(L))$

ii) $A_L$ et $A_{\psi(L)}$ sont isomorphes

iii) $A_L$ a une structure de $\mathfrak{F}'\mathfrak{A}'$-algèbre prolongeant sa structure de $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$-algèbre.

Voici un autre exemple prouvant que la condition $\psi$ surjective est importante si on veut pouvoir déduire quelque chose de l'hypothèse $L = \psi^{-1}(\psi(L))$ . Si on considère les deux structures de monoïde et de groupe, $\psi$ dans ce cas n'est pas surjective mais au contraire est une injection, donc pour toute partie $L$ du monoïde libre $V^*$ on a $L = \psi^{-1}(\psi(L))$ bien que le monoïde minimal de $L$ ne soit pas toujours un groupe.

### 7.3.- Etude d'un exemple : caractérisation des langages algébriques qui sont réguliers.

Nous allons utiliser dans ce paragraphe une idée comparable à celle déjà émise au paragraphe 2.3 pour tester des équivalences de grammaires.

Dans ce paragraphe nous avons utiliser l'application $\psi : \hat{V} \to V^*$ définie par

$$\psi(\wedge) = \wedge$$
$$\psi(a \times r' + r'') = a\,\psi(r')\,\psi(r'') \quad .$$

Nous allons considérer deux structures d'algèbres telles que la seconde soit une image surjective de la première, qu'elle admet respectivement comme algèbre universelle $\hat{V}$ et $V^*$ et que $\psi$ soit le morphisme défini au théorème 7.2.1.

La première structure est celle de $V$-binoïde ; l'algèbre universelle est $\hat{V}$ .

La deuxième structure est celle de monoïde légèrement modifiée, plus exactement on pose $\mathfrak{F}' = (\{\wedge\} \cup \bar{V}, V, \{\cdot\})$ où $\bar{V}$ et $V$ sont deux ensembles en bijection par la bijection $a \rightleftarrows \bar{a}$ et on considère comme ensemble d'axiomes $\mathcal{A}'$ les axiomes suivants

$$x.(y.z) = (x.y).z$$
$$\wedge.x = x.\wedge = x$$
$$a(x) = \bar{a}.x$$

en particulier on a $\bar{a} = a(\wedge)$ et donc les lois 0-aires de la deuxième structure qui n'existent pas dans la première s'expriment avec les lois de la première structure. De façon évidente $V^*$ est l'algèbre universelle de cette structure quand on munit $V^*$ des lois suivantes

i) la loi $.$ est la concaténation
ii) $\wedge$ est le mot vide
iii) $\bar{a}$ est le mot $a$ de longueur un
iv) $a(x)$ est l'adjonction en tête de la lettre $a$ .

De façon toute aussi évidente, l'application $\psi : \hat{V} \to V^*$ est l'unique morphisme de binoïde entre ces deux structures.

D'autre part il est facile de montrer que les objets reconnaissables pour cette structure de $V^*$ ne sont autres que les langages réguliers.

On obtient alors la proposition suivante qui donne une caractérisation des langages algébriques qui sont réguliers.

Proposition 7.3.1 :

Un langage $L$ sur $V$ est algébrique si et seulement si $L = \psi(L')$ pour un certain bilangage régulier $L'$ . De plus une conditions nécessaire et suffisante pour qu'un langage $L$ algébrique sur $V$ soit en fait régulier et que parmi les bilangages réguliers $L'$ vérifiant $\psi(L') = L$ l'un d'entre eux ait un binoïde syntaxique $B_L$, ayant une structure de $\mathfrak{F}'\mathcal{A}'$-algèbre.

Démonstration :

La première partie de la proposition a déjà été vue et résulte par exemple du paragraphe 2.1. La deuxième partie se déduit immédiatement du corollaire 7.2.7.

Cette proposition ne donne évidemment pas un procédé effectif pour tester la régularité d'un langage algébrique, ce problème étant connu comme indécidable. Dans certains cas très particuliers et peu fréquents on pourra cependant l'utiliser pour démontrer effectivement la régularité d'un langage algébrique, en effet à partir d'une grammaire $G$ engendrant $L$ on sait construire des bigrammaires régulières $G'$ engendrant $L'$ telles que $\psi(L') = L$ .
Si $L'$ répond aux conditions imposées par la proposition 7.3.1, cela démontrera que $L$ est régulier. En fait les conditions imposées par la proposition 7.3.1 sont très fortes, ce qui fait que ce procédé est inefficace.

On peut espérer obtenir d'autres résultats dans cette voie en utilisant une autre méthode. On part d'un bilangage $L'$ tel que $\psi(L') = L$ , on calculer le binoïde syntaxique de $L'$ et on modifie la structure de ce binoïde de façon à essayer de réaliser l'axiome $a(x) = a(\wedge).x$ . On obtient alors un bilangage $L''$ tel que $\psi(L'')$ est régulier et il suffit de vérifier que $L = \psi(L'')$ . Quelques essais ont donné des résultats encourageants mais encore trop fragmentaires. Ceci fera l'objet de recherches ultérieures.



## 8.- GENERALISATION DES RESULTATS AU CAS DES ALGEBRES HETEROGENES.

Jusqu'à présent, on a travaillé sur des algèbres n'ayant qu'un seul type d'objet. En informatique, on travaille essentiellement sur des structures ayant plusieurs types d'objets (exemple : structure de pile, de table, de liste, d'arbre, ect...).

Pour rendre compte de ce type de structure on peut poser les définitions suivantes :

Définition 8.1. :

Soit $(n, P, \mathfrak{F})$ un triplet tel que

i) $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
ii) $P \subseteq [1, n]^* \times [1, n]$ (en général $P$ sera fini dans la suite)
iii) $\mathfrak{F} = \{F_p \,;\, p \in P\}$ les ensembles $F_p$ étant deux à deux disjoints.

On appelle $\mathfrak{F}$-algèbre un couple $(A, \mathfrak{F}^A)$ tel que

a) $A$ est un $n$-uplet d'ensembles $(A_1, \ldots, A_n)$ appelés respectivement sortes $1, 2, \ldots, n$

b) $\mathfrak{F}^A = \{F_p^A \,;\, p \in P\}$ et pour chaque $p \in P$ il existe une application $f \to f^A$ surjective de $F_p$ sur $F_p^A$

c) Si $f^A \in F_p^A$ et si $p = (i_1, i_2, \ldots, i_k, j)$ alors $f^A$ est une application de $A_{i_1} \times \ldots A_{i_k}$ dans $A_j$ .

Commentaire :

L'entier $n$ est le nombre de sortes de l'algèbre hétérogène. L'ensemble $P$ est l'ensemble des profils. L'ensemble $\mathfrak{F}$ est un ensemble d'ensembles chacun d'eux étant un ensemble de symboles de lois hétérogènes (ici, nous parlerons plutôt de fonctions d'accès). Une $\mathfrak{F}$-algèbre hétérogène est une réalisation.

D'autre part, quand dans la littérature on utilise les algèbres hétérogènes dans un but pratique (type abstrait, sémantique des langages de programmation...) on a intérêt à ce que les sortes de l'algèbre hétérogène aient des noms qui ne soient pas des entiers comme ci-dessus et qui en particulier aient un contenu mnémonique non nul.

Définition 8.2 :

Soient $(A, \mathfrak{F}^A)$ et $(B, \mathfrak{F}^B)$ deux $\mathfrak{F}$-algèbres hétérogènes. On appelle $\mathfrak{F}$ morphisme, un $n$-uplet d'application $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ tel que pour tout profil $p = (i_1, i_2, \ldots, i_k, j)$ et tout $f$ de $F_p$ on ait

$$\psi_j \circ f^A = f^B(\psi_{i_1}, \psi_{i_2}, \ldots, \psi_{i_k}) \quad .$$

Il est maintenant facile de généraliser aux cas des algèbres hétérogènes la notion d'algèbre libre de base $X = (X_1, \ldots, X_n)$ , puis de définir des axiomes égalitaires de sorte $i$ , ensuite de définir des $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbres hétérogènes et enfin de construire les objets libres de cette catégorie.

En introduisant la notion de congruence, on obtient les mêmes résultats qu'au paragraphe 4 et en suivant pas à pas les définitions des paragraphes 5 et 6 on obtient exactement les mêmes résultats. La seule difficulté est d'introduire des notations pour désigner de manière synthétique des n-uplets. Cette généralisation a été entièrement rédigée à titre d'exercice d'école dans [ 56]. Contentons nous de donner un exemple très simple.

Exemple de la pile :

On appelle algèbre hétérogène "pile" l'algèbre hétérogène définie ainsi :
- il y a deux sortes : 1 = état de pile, 2 = sommet
- les fonctions d'accès sont

$\perp$ : $\longrightarrow$ état de pile (état de pile indéfini )

$\wedge$ : $\longrightarrow$ état de pile (état de pile vide)

$\underline{\perp}$ : $\longrightarrow$ sommet (sommet indéfini)

empile : état de pile $\times$ sommet $\to$ état de pile

depile : état de pile $\to$ état de pile

sommet : état de pile $\to$ sommet

- Les axiomes sont classiquement

$$\text{axiome de la sorte 1} \begin{cases} \text{depile}\ (\perp) = \perp \\ \text{depile}\ (\wedge) = \perp \\ \text{empile}\ (\perp,\ y_2) = \perp \\ \text{depile}\ (\text{empile}(y_1,\ y_2)) = y_1 \end{cases}$$

$$\text{axiome de la sorte 2} \begin{cases} \text{sommet}(\perp) = \perp \\ \text{sommet}(\wedge) = \perp \\ \text{sommet}(\text{empile}(y_1,\ y_2)) = y_2 \end{cases}$$

On appelle pile sur $X$ , l'algèbre hétérogène libre de base $(\emptyset,\ X)$ et on appelle compteur la pile sur $\{1\}$ . On notera $(E(X),\ S(X))$ la pile sur $X$ . De façon évidente $E(X) = \{\perp\} \cup E'(X)$ où $E'(X)$ est l'ensemble des états de pile différents de $\perp$ modulo les axiomes. De même $S(X) = \{\underline{\perp}\} \cup S'(X)$ . Les ensembles $E'(X)$ et $S'(X)$ constituent ce que l'on pourrait appeler les ensembles de "termes permis" pour la structure de pile. On peut reconnaître $(E'(X),\ S'(X))$ , en utilisant

$$h : (E(X),\ S(X)) \to (E(1),\ S(1)) \quad \text{tel que} \quad (\forall x \in X)\ (h_2(x) = 1) \ ,$$

en effet $E'(X) = h_1^{-1}\ (E'(1))$ et $S'(X) = h_2^{-1}(S'(1))$ .

Intuitivement, il est évident que l'on a construit l'algèbre hétérogène minimale de $(E'(X),\ S'(X))$ .

Les théories développées ci-dessus peuvent avoir des applications par exemple en théorie des types abstraits où l'on a souvent à définir des ensembles de terms (Ensemble de termes permis, ensemble de termes interdits, ensemble de terme ayant une forme normale...). En utilisant ce qui précède on peut les définir par leurs algèbres minimales.

## 9.- SOUS ENSEMBLE ALGEBRIQUE D'UNE $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-ALGEBRE :

Les définitions qui vont suivre généralisent dans le cas des $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbres la notion de langage algébrique défini sur la structure de monoïde. Nous ne ferons dans le présent paragraphe qu'un survol rapide de cette théorie en introduisant seulement les définitions et propriétés dont nous aurons besoin au chapitre 4

**Définition 9.1** :

Soit une structure de $\mathfrak{F}$-algèbre $\mathfrak{F} = (F_0,\ F_1, \dots,\ F_n)$ , soit $G = (N, (\bigcup_{i=0}^{n} F_i) \cup X,\ \to\ ,\ \propto)$

une grammaire algébrique, on dit que $G$ est une $\mathfrak{F}$-grammaire si et seulement si

$$(\forall A \in N)\ (A \to \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathfrak{F}(X \cup N)) \ .$$

Il est alors trivial de démontrer la proposition suivante :

**Proposition 9.2** :

Soit $G$ une $\mathfrak{F}$-grammaire

$$(\forall A \in N)\ (A \overset{*}{\underset{G}{\succ}} \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathfrak{F}(X \cup N))$$

et en particulier le langage engendré par $G$ est contenu dans $\mathfrak{F}(X)$ .

**Définition 9.3** :

Un sous ensemble $L$ de $\mathfrak{F}(X)$ est un sous ensemble algébrique de $\mathfrak{F}(X)$ si et seulement si $L$ est engendré par une $\mathfrak{F}$-grammaire.

En fait dans le cas de $\mathfrak{F}(X)$ , les sous-ensembles algébriques sont très simples comme le prouve le théorème suivant.



**Théorème 9.4. (Eilenberg [25 ])** :

Un sous ensemble de $\mathfrak{F}(X)$ est algébrique si et seulement s'il est reconnaissable.

Passons maintenant au cas des $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbres.

**Définition 9.5** :

Considérons une structure de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre et soit $\varphi : \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ le $\mathfrak{F}$-morphisme tel que $\varphi | X = Id_X$ , un sous ensemble $L$ de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ est dit algébrique si et seulement si $L = \varphi(L')$ où $L'$ est une partie algébrique de $\mathfrak{F}(X)$ .

En général le théorème d'Eilenberg n'est plus vérifié dans le cas des $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbres (cf [43 ]) ; d'autre part dans le cas de la structure de monoïde les sous ensembles algébriques (i.e. les langages algébriques) peuvent se définir comme les composantes de la plus petite solution d'un système à point fixe, en revanche dans le cas général cette définition ne subsiste pas. Cette définition par système à point fixe est correcte si et seulement si pour toute $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre $A$ , l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(A)$ peut être muni d'une structure de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre (cf Lescanne [ 45 ]) .

Le théorème 9.4 joint à la définition 9.5, donne la caractérisation triviale suivante des sous ensembles algébriques de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ .

**Proposition 9.6** :

Un sous ensemble $L$ de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ est algébrique si et seulement si $L = \varphi(L')$ où $L'$ est un sous ensemble reconnaissable de $\mathfrak{F}(X)$ et $\varphi : \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ est l'unique $\mathfrak{F}$-morphisme tel que $\varphi | X = Id_X$ .

**Remarque** :

Cette notion de sous ensemble algébrique n'est pas toujours celle qui est adoptée dans la littérature. En particulier les auteurs traitant des langages d'arbres [42 ][79] définissent les forêts algébriques en utilisant des grammaires d'arbres beaucoup plus puissantes utilisant en particulier des greffes d'arbres. Il nous semble que la définition donner ici est la bonne, d'abord parce que si on l'applique à la structure classique de monoïde, on retrouve bien la notion de langage algébrique et ensuite parce que la définition donnée ici permet de retrouver les définitions données par les autres auteurs à la condition de changer de structure d'algèbre. Voir à ce propos le paragraphe 4.2.2.

**Proposition 9.7** :

Soient $L$ et $R$ deux sous ensemble de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ qui sont respectivement algébrique et reconnaissable alors $L \cap R$ est un sous ensemble algébrique de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ .

**Démonstration** :

Par définition $L = \varphi(L')$ avec $L'$ algébrique (et donc reconnaissable) dans $\mathfrak{F}(X)$ . D'autre part $R' = \varphi^{-1}(R)$ est un sous ensemble reconnaissable de $\mathfrak{F}(X)$ . On démontre aisément que $L \cap R = \varphi(L' \cap \varphi^{-1}(R))$ et $L' \cap \varphi^{-1}(R)$ est reconnaissable dans $\mathfrak{F}(X)$ donc $L \cap R$ est algébrique dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ .

A titre d'exercice d'école utilisons cette proposition pour redémontrer de manière originale le théorème disant que l'intersection d'un langage algébrique et d'un langage reconnaissable est algébrique.

Si on utilise les définitions ci-dessus, on obtient la définition suivante des langages algébriques.

$$L \text{ est algébrique sur } V \overset{\text{définition}}{\Longleftrightarrow} L \text{ est un sous ensemble algébrique de } \mathfrak{F}\mathcal{A}(V) \ .$$

Avec

$$\mathfrak{F} = (\ \{\wedge\}\ ,\ \emptyset\ ,\ \{.\})\ \text{ et }\ \mathcal{A} = \{\ x.(y.z) = (x.y).z\ ,\ \ \wedge.x = x.\wedge\ = x\ \}\ .$$

C'est à dire $L = \varphi(L')$ où $L'$ est un sous ensemble reconnaissable de $\mathfrak{F}(V)$ et $\mathfrak{F}(V)$ est l'ensemble des arbres binaires dont les noeuds internes sont étiquetés par . et les feuilles par des éléments de $V \cup \{\wedge\}$
Tout cela revient à dire que l'on engendre les langages algébriques sur $V$ par des grammaires réduites sous forme de Chamsky, les règles de ces grammaires étant de la forme $A \to BC \mid a \mid \wedge$.

Si on considère un sous ensemble reconnaissable $R$ de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(V)$, alors $\varphi^{-1}(R)$ est un sous-ensemble reconnaissable de $\mathfrak{F}(V)$. D'autre part $L \cap R = \varphi(L' \cap \varphi^{-1}(R))$ et donc on ramène le problème de l'intersection d'un algébrique et d'un reconnaissable à la démonstration du caractère reconnaissable de l'intersection de deux sous ensembles reconnaissables dans une autre structure algébrique.

Remarquons que si on explicite cette dernière démonstration, on va reconstruire la grammaire algébrique que l'on utilise classiquement pour démontrer ce théorème et qui consiste à "décorer" les arbres syntaxiques de la grammaire engendrant $L$ à l'aide des calculs dans le monoïde reconnaissant $R$.

## 10.- CONCLUSION :

Ce chapitre prouve que la notion de monoïde syntaxique peut se généraliser très facilement dans le cadre des algèbres libres. Les théories introduites ici doivent pouvoir déboucher sur de nombreux thèmes de recherches en particulier en se posant des problèmes comparables à ceux déjà étudiés pour les monoïdes syntaxiques.

Exemples :

- A quelles conditions une algèbre peut-elle être l'algèbre syntaxique d'un sous ensemble ?
- Y-a-t-il comme dans le cas du monoïde des algèbres qui sont à la fois des algèbres syntaxiques de sous ensembles algébriques et de sous ensembles non algébriques.

D'autre part le paragraphe 7 esquisse la façon suivant laquelle varie une algèbre syntaxique quand on change de structure d'algèbre. Il n'est pas impossible que des problèmes difficiles dans une certaine structure se simplifient dans une autre. Par exemple, il serait intéressant d'aborder les problèmes d'ambiguïté inhérente de langages algébriques en les considérant comme des images de bilangages réguliers par un homomophisme et de regarder si les théories développées par Perrot [68] et Sakarovitch [75] ne se simplifient pas avec ce point de vue.



# CHAPITRE 4 :

## CONSTRUCTION AUTOMATIQUE DE HIERARCHIE DANS LES ALGÈBRES LIBRES.

## I. INTRODUCTION :

Le but de ce chapitre est de donner un méthode de construction automatique de hiérarchie dans les algèbres libres. L'idée de cette méthode a été découverte en analysant finement deux exemples l'un très classique sur les langages et l'autre correspondant à certaines des constructions effectuées au chapitre 1. En particularisant ces constructions on retrouve celles utilisées par Daumm [19][20].
Ce chapitre commence par l'étude de deux exemples qui ont modivé cette étude. Ensuite après avoir fait des rappels sur les systèmes de réécriture qui nous servirons d'outil dans la suite, nous définissons une transformation sur les structures d'algèbre. Cette transformation a comme caractéristique de conserver les objets universels, de conserver les sous-ensembles reconnaissables et de faire croître strictement l'ensemble des sous ensembles algébriques. L'itération de cette transformation conduit donc à la construction de hiérarchies pour les sous ensembles algébriques.

## 2.- Etude de deux exemples :

### 2.1.- Exemples des langages :

En théorie des langages, on travaille essentiellement sur deux structures d'algèbre

- la structure de $V$-algèbre monadique (ou mémoire sur $V$)(3.2.3 exemple a)).
- la structure de monoïde (3.2.3 exemple b)).

Examinons les analogies et les différences entres ces deux structures du point de vue des objets libres, des ensembles reconnaissables et des ensembles algébriques.
Pour la structure de $V$-algèbre monadique on obtient

i) Un modèle de l'objet universel est $V^*$ muni du point distingué $\wedge$ et des lois $a(\alpha) = \alpha a$

ii) Les ensembles reconnaissables de $V^*$ sont les langages réguliers

iii) Les ensembles algébriques de $V^*$ sont les langages engendrés par les grammaires linéaires gauches, ce sont donc encore les langages réguliers (cas très particulier du théorème d'Eilenberg 3.9.4)

Pour la structure de monoïde, on obtient :

i) Un modèle de l'objet libre de base $V$ est $V^*$ muni de la concaténation, $\wedge$ étant l'élément neutre.

ii) Les ensembles reconnaissables sont encore les langages réguliers.

iii) Les ensembles algébriques sont les langages engendrés par les grammaires algébriques, ce sont donc les langages algébriques dont l'ensemble contient strictement l'ensemble des langages réguliers.

On remarque alors les phénomènes suivants :

i) Les éléments de $V$ dans la structure de $V$-algèbre monoïdique sont des opérations unaires alors que pour la structure de monoïde l'objet libre ayant même ensemble sous-jacent que l'objet universel de la structure de $V$-algèbre monadique, ces éléments de $V$ sont devenus 0-aires.

ii) Il y a dans la structure de monoïde une nouvelle loi binaire associative et ayant un élément neutre qui est dans la structure de V-algèbre monadique un élément 0-aire sur lequel ne porte pas d'axiomes.

iii) Il y a identité des ensembles reconnaissables (langages réguliers) dans les deux structures.

iv) En revanche l'ensemble des ensembles algébriques pour la structure de V-algèbre monadique est strictement incluse dans l'ensemble des ensembles algébriques pour la structure de monoïdes.

2.2.- Exemples des langages d'arbres (bilangages).

Au chapitre 1 où nous avons longuement étudié les bilangages réguliers, nous avons utilisé principalement deux structures d'algèbres :

- Les V-algèbres diadiques (définition 1.5.5.3 et 3.2.3 exemple d))
- Les V-binoïdes (définition 0.4.1 et 3.2.3 exemple c))

Pour la structure de V-algèbre diadique on obtient

i) un modèle de l'objet universel est $\hat{V}$ muni du point distingué $\wedge$ et des lois binaires $a(r, s) = a \times r + s$ .

ii) les ensembles reconnaissables de $\hat{V}$ pour cette structure sont les bilangages réguliers (corollaire 1.5.5.8).

iii) les ensembles algébriques de V pour cette structure sont les bilangages engendrés par les bigrammaires régulières, ce sont donc exactement les bilangages réguliers (cas particulier du théorème d'Eilenberg 3.9.4)

Pour la structure de V-binoïde on obtient :

i) un modèle de l'objet universel est $\hat{V}$ avec la loi de concaténation admettant $\wedge$ comme élément neutre et l'enracinement.

ii) les ensembles reconnaissables de $\hat{V}$ pour cette structure sont les bilangages réguliers (définition 0.4.5 et proposition 1.5.5.13)

iii) les ensembles algébriques de $\hat{V}$ pour cette structure sont les bilangages engendrés par les $C_o$-bigrammaires dont l'ensemble contient strictement l'ensemble des bilangages réguliers (proposition 1.6.9).

On remarque alors des phénomènes tout à fait similaires à ceux de l'exemple 2.1.

i) Les opérations de $\hat{V}$ dans la structure de V-algèbre diadique sont binaires alors qu'elles sont unaires dans la structure de V-binoïde

ii) Il y a dans la structure de V-binoïde une nouvelle loi binaire associative et possédant pour l'élément neutre $\wedge$ qui est l'élément 0-aire de la structure de V-algèbre diadique.

iii) Il y a, dans le passage de la structure de V-algèbre diadique à la structure de V-binoïde, conservation exacte des ensembles reconnaissables (bilangages réguliers) et augmentation stricte de l'ensemble des ensemble algébriques.

Nous allons poursuivre cet exemple en introduisant une nouvelle structure algébrique où se produisent les mêmes phénomènes avec suffisamment de généralités pour que l'on puisse en déduire naturellement la méthode de construction qui sera mise en évidence dans la suite de ce chapitre.



Définition 2.2.1 :

On appelle structure de dioïde, la structure algébrique définie par

$$\mathfrak{F} = (F_o, F_1, F_2) \qquad F_o = \{\wedge , 1\} \quad , F_1 = \emptyset \quad , F_2 = (+, \odot)$$

$$\mathfrak{A} = \{\wedge + r = r + \wedge = r \ ; \ (r + s) + t = r + (s + t), 1 \odot r = r \odot 1 = r$$
$$r \odot (s \odot t) = (r \odot s) \odot t \ , \quad \wedge \odot r = \wedge \quad , (r + t) \odot s = r \odot s + t \odot s\}$$

Proposition 2.2.2 :

Une réalisation du dioïde libre de base V est $\hat{V}[1]$ muni des lois suivantes :

- $+$ est la concaténation habituelle
- $r \odot s = \tilde{r}(s)$ ($\tilde{r} : V[1] \to V[1]$ est la fonction polynôme définie dans la proposition 1.2.3)

(ne pas oublier que dans $\hat{V}[1]$ les éléments de V sont en fait $a \times \wedge$ ) .

Démonstration :

Il faut déjà vérifier que $\hat{V}[1]$ muni de ces lois possède une structure de dioïde ce qui se fait sans difficulté. Ensuite il faut montrer que si D est un dioïde et $h : V \to D$ une application alors il existe un unique prolongement de h à $V[1]$ tel que

$$h(\wedge) = \wedge_D \ , \quad h(1) = 1_D \ , \ h(r + s) = h(r) + h(s) \quad \text{et} \quad h(r \odot s) = h(r) \odot h(s)$$

h doit donc en particulier vérifier :

$h(\wedge) = \wedge_D$ (I)

$h(a \times r + s) = h(a) \odot h(r) + h(s)$ (II)

$h(1 + s) = 1_D + h(s)$ (III)

On en déduit donc que, si h existe, h est unique et doit vérifier les trois relations I, II et III. Vérifions maintenant que h ainsi défini, convient.

On a $h(\wedge) = \wedge_D$ grâce à (I)

$h(1) = 1_D$ grâce à (I) et (III) .

Pour démontrer que $h(r + s) = h(r) + h(s)$ faisons une récurrence sur r

- pour $r = \wedge$ c'est évident
- supposons le résultat pour r et r' et démontrons le pour $a \times r + r'$ et $1 + r'$

On obtient :

$$h(a \times r + r' + s) = h(a) \odot h(r) + h(r' + s) = h(a) \odot h(r) + h(r') + h(s) =$$
$$h(a \times r + r') + h(s)$$

$$h(1 + r' + s) = 1_D + h(r' + s) = 1_D + h(r') + h(s) = h(1 + r') + h(s) \quad .$$

Pour démontrer que $h(r \odot s) = h(r) \odot h(s)$ procédons aussi par récurrence sur r .

- pour $r = \wedge$ c'est évident
- supposons le résultat pour r et r' et démontrons le pour $a \times r + r'$ et $1 + r'$

On obtient :

$$h((a \times r + r') \odot s) = h(a \times (r \odot s) + r' \odot s)$$
$$= h(a) \odot h(r \odot s) + h(r' \odot s) = h(a) \odot h(r) \odot h(s) + h(r') h(s)$$
$$= (h(a) \odot h(r) + h(r')) \odot h(s) = h(a \times r + r') \odot h(s)$$

$$h((1 + r') \odot s) = h(s + r' \odot s) = h(s) + h(r') \odot h(s) =$$
$$= (1_D + h(r')) \odot h(s) = h(1 + r') \odot h(s) \quad .$$

CQFD.

Proposition 2.2.3 :

Un bilangage L contenu dans $\hat{V}[1]$ est régulier si et seulement s'il existe un triplet $(D, D', \psi)$ tel que D est un dioïde fini, D' est une partie de D , $\psi : \hat{V}[1] \to D$ est un homomorphisme de dioïde et $L = \psi^{-1}(D')$ .

Démonstration :

Si L est reconnu par $(D, D', \psi)$ , on peut mettre sur D une structure V-binoïde en posant

$$a \times d = a \oplus d \quad .$$

De façon évident $\psi : \hat{V}[1] \to D$ est l'homomorphisme de V-binoïde tel que $\psi(1) = 1_D$ et donc L reconnu par $(D, D', \psi)$ dans la structure de V-binoïde.

Réciproquement, supposons $L \subset \hat{V}[1]$ est reconnu par $(B, B', \psi)$ où B est un V-binoïde et $\psi : \hat{V}[1] \to B$ est un homomorphisme de V-binoïde. Posons $D = B^B$ (ensemble des applications de B dans B ) et définissons dans D la structure suivante :

- $\wedge_D$ est l'application constante $\psi(\wedge)$
- $1_D$ est l'application identité de D dans D
- $d \in D$ et $d' \in D \Rightarrow (d + d')(b) = d(b) + d'(b)$
- $d \in D$ et $d' \in D \Rightarrow d \oplus d' = dod'$ .

Il n'est pas difficile de montrer que l'on obtient ainsi une structure de dioïde sur D .
Vérifions par exemple le dernier axiome qui est le moins évident

$$\begin{aligned}(d + d') \oplus d''(b) = (d + d')(d''(b)) &= d(d''(b)) + d'(d''(b)) \\ &= d \oplus d''(b) + d' \oplus d''(b) \\ &= (d \oplus d'' + d' \oplus d'')(b) \quad .\end{aligned}$$

Il existe alors un unique morphisme de dioïde $\psi' : \hat{V}[1] \to D$ tel que $\psi'(a)(b) = a \times b$

Montrons alors que $(\forall r \in \hat{V}[1])(\psi'(r)\ (\psi(1)) = \psi(r))$ .

Pour cela il suffit de faire une récurrence sur r

- $r = \wedge \qquad \psi'(r)\ (\psi(1)) = \psi'(\wedge)\ (\psi(1)) = \wedge_D(\psi(1)) = \psi(\wedge)$
- $\begin{aligned}\psi'(a \times r + s)(\psi(1)) &= (\psi'(a) \oplus \psi'(r) + \psi'(s))\ (\psi(1)) \\ &= (\psi'(a) \oplus \psi'(r))\ (\psi(1)) + \psi'(s)(\psi(1)) \\ &= \psi'(a)\ (\psi'(r)\ (\psi(1))) + \psi'(s)\ (\psi(1)) \\ &= a \times \psi(r) + \psi(s) = \psi(a \times r + s)\end{aligned}$
- $\psi'(1 + s)\ (\psi(1)) = 1_D(\psi(1)) + \psi'(s)\ (\psi(1)) = \psi(1) + \psi(s) = \psi(1 + s)$ .

On en déduit donc que

$$r \in L \Leftrightarrow \psi'(r)\ (\psi(1)) = \psi(r) \in B'$$

et donc L est reconnu par le triplet $(D, D', \psi')$ avec

$$D' = \{ d \ ;\ d(\psi(1)) \in B' \} \quad .$$

Proposition 2.2.4 :

Il existe des bilangages contenus dans $\hat{V}[1]$ algébriques pour la structure de dioïde et qui ne le sont pas pour la structure de binoïde.



Démonstration :

Il suffit de construire un contre exemple. Considérons tout simplement la grammaire algébrique G suivante

$$X \longrightarrow a \oplus X \oplus b \mid 1 \quad .$$

De manière évidente, cette grammaire engendre des ramifications à un seul chemin, ces chemins formant le langage $L = \{a^n b^n \ ;\ n \geq 0\}$ . Comme L n'est pas régulier, le bilangage engendré par G ne peut pas être engendré par une $C_o$-bigrammaire (proposition 1.6.2).

Si on examine maintenant la définition 2.2.1 et les trois propositions qui suivent, il est impossible de ne pas remarquer les analogies avec les constatations faites au paragraphe 2.1 et au début du paragraphe 2.2. On retrouve en particulier les points suivants

i) baisse de l'arité de certains opérateurs

ii) introduction d'un nouvel opérateur du monoïde (ici $\oplus$ )

iii) conservation ensembliste de l'objet universel

iv) conservation des ensembles reconnaissables.

v) augmentation stricte de la classe des ensembles algébriques.

Les paragraphes qui suivent vont montrer que la transformation sur les structures d'algèbres faites ici sur deux exemples sont en fait très générales.

Remarque :

Si on examine les ensembles algébriques pour la structure de dioïde on remarque que l'on obtient des objets tout à fait comparables aux forêts algébriques étudiées par exemple dans [42] [79]
A notre avis ce n'est donc pas dans une structure de magma que l'on peut définir ces objets algébriques mais dans une structure plus compliquée où existe déjà un opérateur correspondant à la greffe d'arbres. Remarquons que dans la théorie des magmoïdes introduite par Arnold [ 2 ] et Dauchet [21] existe cet opérateur de greffe et là, à notre avis la définition donnée par ces auteurs des forêts algébriques coïncident avec notre point de vue.

3.- RAPPELS DE PROPRIETES CONNUES SUR LES SYSTEMES DE REECRITURE.

Jusqu'à présent quand on travaillait sur une structure de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre, nous n'avions introduit que la relation $\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}$ et son itéré $\underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}$ . Il est souvent plus facile de considérer une relation non symétrique $\underset{\mathcal{A}}{\rightarrow}$ telle que $\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow} = \underset{\mathcal{A}}{\longrightarrow} \cup \underset{\mathcal{A}}{\longleftarrow}$ et que l'on obtient en orientant les axiomes.

3.1.- Rappels sur les relations :

Commençons par rappeler quelques définitions sur les relations [ 36 ] [ 37 ]

Définition 3.1.1. :

Soient E un ensemble quelconque et $\rightarrow$ une relation binaire dans E

i) On appelle forme irréductible un élément x de E tel que

$$\{y \ ;\ x \rightarrow y\} = \emptyset \quad .$$

Dans la suite on notera N(E) l'ensemble des formes irréductibles de E pour la relation $\rightarrow$

ii) La relation $\rightarrow$ est noetherienne si et seulement si il n'existe pas de suite infinie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$x_o \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow x_n \rightarrow x_{n+1} \rightarrow \ldots\ldots \quad .$$

iii) La relation $\rightarrow$ est confluente si et seulement si

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \xrightarrow{*} y \text{ et } x \xrightarrow{*} z \Rightarrow (\exists t)\ (y \xrightarrow{*} t \text{ et } z \xrightarrow{*} t)) \quad .$$

iv) la relation $\longrightarrow$ est localement confluente si et seulement si et seulement si

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \rightarrow y \text{ et } x \rightarrow z \Rightarrow (\exists t)(y \xrightarrow{*} t \text{ et } z \xrightarrow{*} t)) \quad .$$

La définition 3.1 a quelques conséquences immédiates qui sont :

Lemme 3.1.2 :

i) Si la relation $\rightarrow$ est noetherienne, pour tout $x$ il existe un $y$ irréductible tel que $x \xrightarrow{*} y$

ii) Si la relation $\rightarrow$ est confluente, pour tout $x$ il existe au plus un $y$ irréductible tel que $x \xrightarrow{*} y$

iii) Si la relation $\rightarrow$ est noetherienne et confluente, pour tout $x$ il existe un et un seul $y$ irréductible tel que $x \xrightarrow{*} y$ . Dans ce cas on dira que $y$ est la forme normale de $x$ .

On obtient aussi le lemme un peu moins évident suivant

Lemme 3.1.3 [36] :

Une relation noetherienne est confluente si et seulement si elle est localement confluente.

Démonstration :

La confluence locale est évidente, une condition nécessaire pour la confluence sans que d'ailleurs le caractère noetherien de $\rightarrow$ n'intervienne .
La réciproque se démontre aisément en utilisant un raisonnement par récurrence noethérienne (cf [ 36 ]).

Définition 3.1.4 [ 35 ] :

Soient $E$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence notée $\sim$ et d'une relation binaire notée $\rightarrow$

i) la relation $\rightarrow$ est confluente modulo $\sim$ si et seulement si

$$(\forall x, y, x', y')\ (x \sim y \text{ et } x \xrightarrow{*} x' \text{ et } y \xrightarrow{*} y' \Rightarrow (\exists \bar{x}, \bar{y})(x' \xrightarrow{*} \bar{x} \text{ et } y' \xrightarrow{*} \bar{y} \text{ et } x \sim y))$$

ii) la relation $\rightarrow$ est localement confluente modulo $\sim$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

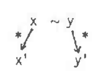
$$(\forall x, y, z)\ (x \rightarrow y \text{ et } x \rightarrow z \Rightarrow (\exists u, v)(y \xrightarrow{*} u \text{ et } z \xrightarrow{*} v \text{ et } u \sim v))$$

$$(\forall x, y, z)\ (x \rightarrow z \text{ et } x \sim y \Rightarrow (\exists u, v)(y \xrightarrow{*} u \text{ et } z \xrightarrow{*} v \text{ et } u \sim v)) \ .$$

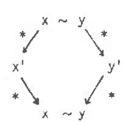
Ces deux notions de confluence et de confluence locale modulo $\sim$ se visualisent mieux sur les diagrammes ci-dessous.

Confluence modulo $\sim$

$\forall x, y, x', y'$

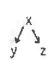


$\Rightarrow \exists \bar{x}, \bar{y}$

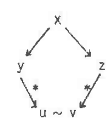


Confluence locale modulo $\sim$ :

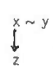
$\forall x, y, z$



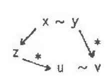
$\Rightarrow \exists u, v$



et $\forall x, y, z$



$\Rightarrow \exists u, v$





Définition 3.1.7 :

Soit $E$ un ensemble muni de deux relations $\rightarrow$ et $\sim$ , $\sim$ étant une relation d'équivalence. On dira que $\rightarrow$ est fortement confluente modulo $\sim$ si et seulement si

$$(\forall x, y \in E)(x\ (\rightarrow \cup \leftarrow \cup \sim)^* y \Rightarrow (\exists x', y')(x \xrightarrow{*} x' \text{ et } x \xrightarrow{*} y' \text{ et } x' \sim y')) \quad .$$

On obtient alors immédiatement le lemme de transitivité suivant.

Lemme 3.1.8 :

Soit $E$ un ensemble muni de trois relations $\longrightarrow$ $\longrightarrow\!\!>$ et $\sim$ , $\sim$ étant une relation d'équivalence. Si $\longrightarrow\!\!>$ est fortement confluente modulo $(\rightarrow \cup \leftarrow \cup \sim)^*$ et si $\longrightarrow$ est fortement confluente modulo $\sim$ , alors $\longrightarrow\!\!> \cup \longrightarrow$ est fortement confluente modulo $\sim$ .

## 3.2.- Système de réécriture.

Revenons maintenant au cas qui nous intéresse, c'est à dire le cas où les relations manipulées sont issues de systèmes d'axiomes.

Définition 3.2.1. :

On appelle système de réécriture un couple formé d'une structure de $\mathfrak{F}$-algèbre et d'un ensemble $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{F}(Y) \times \mathfrak{F}(Y)$ .

Remarquons que cette définition est syntaxiquement identique à celle d'une structure de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre, l'utilisation que l'on va en faire est différente.

Définition 3.2.2. :

Soit $(\mathfrak{F}, \mathcal{A})$ un système de réécriture. On définit sur la $\mathfrak{F}$-algèbre libre $\mathfrak{F}(X)$ la relation $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ en posant

$$r \xrightarrow[\mathcal{A}]{} s \Leftrightarrow (\exists (\alpha, \beta) \in \mathcal{A})\ (\exists u \in \mathfrak{F}\ (X \cup 1))(\exists t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$(r = \tilde{u}(\tilde{\alpha}(t_1, \dots t_n)) \quad \text{et} \quad s = \tilde{u}(\tilde{\beta}(t_1, \dots, t_n)))$$

où $n = \operatorname{card}(Y)$ et $\tilde{u}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ sont les fonctions associées à $u$, $\alpha$ et $\beta$ .

Si on veut préciser l'axiome utilisé, on écrira

$$r \xrightarrow{(\alpha, \beta)} s$$

Remarque :

1°) Dans un système de réécriture la relation $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ n'est pas symétrique puisque l'ordre $(\alpha, \beta)$ des deux membres d'un axiome intervient explicitement dans la définition.

2°) Plutôt que d'écrire $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ nous écrirons $\alpha \rightarrow \beta(\mathcal{A})$ .

Le problème maintenant est de savoir pour un système de réécriture $(\mathfrak{F}, \mathcal{A})$ si la relation $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ est noethérienne, confluente, localement confluente...

On utilise pour cela les propositions suivantes [ 22 ] [48].

Proposition 3.2.3. :

Soit $(\mathfrak{F}, \mathcal{A})$ un système de réécriture, pour que la relation $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ soit noetherienne il suffit de trouver un ordre bien fondé $<$ sur $\mathfrak{F}(X)$ (ordre noetherien ) tel que

$$r \xrightarrow[\mathcal{A}]{} s \quad \Rightarrow \quad r > s \quad .$$

Dans [36 ] on trouvera la démonstration du lemme suivant. Cette démonstration est fondée sur le même principe que celle du lemme 3.1.3 en plus difficile.

Lemme 3.1.5 :

Si la relation $\longrightarrow$ est noetherienne, pour toute relation d'équivalence $\sim$ la confluence modulo est équivalente à la locale confluence modulo $\sim$ .

Dans la suite nous aurons à utiliser ces notions sur des systèmes d'axiomes $\mathcal{A}$ , les axiomes d'un sous-ensemble $\mathcal{A}''$ de $\mathcal{A}$ seront orientés et donneront une relation $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ et le complémentaire $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}''$ dans $\mathcal{A}$ fournira une relation d'équivalence $\xrightarrow[\mathcal{A}']{*}$ . Il sera évidemment utile de savoir calculer $\xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*}$ en fonction de $\xrightarrow[\mathcal{A}'']{}$ et $\xleftrightarrow[\mathcal{A}']{*}$ , pour cela on utilisera deux propriétés indiquées dans le lemme suivant.

Lemme 3.1.6 [36 ] :

Supposons que $\longrightarrow$ normalise $E$ , (c'est à dire que $(\forall x)\ (\exists y)\ (x \xrightarrow{*} y$ et $y \in N(E))$ .
Alors la relation $\rightarrow$ est confluente modulo $\sim$ si et seulement si une des deux propriétés suivantes est vérifiée

$$\text{i) } (\forall x, y)(\forall u, v \in N(E))(x(\rightarrow \cup \leftarrow \cup \sim)^* y \text{ et } x \xrightarrow{*} u \text{ et } y \xrightarrow{*} v \Rightarrow u \sim v)$$

$$\text{ii) } (\forall x, y)(x(\rightarrow \cup \leftarrow \cup \sim)^* y \Rightarrow (\exists u, v)(x \xrightarrow{*} u \text{ et } y \xrightarrow{*} v \text{ et } u \sim v)) \quad .$$

Démonstration :

De façon évidente on obtient :

i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ $\rightarrow$ est confluente modulo $\sim$ ,

il suffit donc de démontrer que si $\rightarrow$ est confluente modulo $\sim$ alors la propriété i) est vérifiée

Soit $x, y, u$ et $v$ tels que

$$x(\rightarrow \cup \leftarrow \cup \sim)^* y \text{ et } x \xrightarrow{*} u \text{ et } y \xrightarrow{*} v \text{ et } u \in N(E) \text{ et } v \in N(E)$$

Soit $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ tels que

$$(\forall i \in [1, n])\ x_{i-1}\ R_i\ x_i \quad \text{avec } R_i \in \{\rightarrow, \leftarrow, \sim\} \quad .$$

Soit $u_0 = u, u_1, \ldots, u_n = v$ tels que

$$\forall i \in [1, n] \quad x_i \xrightarrow{*} u_i \quad \text{et} \quad u_i \in N(E) \quad .$$

En utilisant l'hypothèse " $\rightarrow$ est confluente modulo $\sim$ " et le fait que tous les termes $u_i$ sont irréductibles, on en déduit immédiatement

$$\begin{array}{ccc} x_{i-1} & R_i & x_i \\ \downarrow * & & \downarrow * \\ u_{i-1} & & u_i \end{array} \quad \Rightarrow \quad u_{i-1} \sim u_i$$

Donc par transitivité on obtient $u \sim v$ .

La propriété ii) du lemme 3.1.6 est très utile dans la pratique, il ne nous semble pas que cette propriété ait fait l'objet d'une définition dans la littérature. Je propose la définition suivante.



Définition 3.2.4. :

Soit $<$ un ordre sur $\mathcal{F}(X)$ , soit $\mathcal{F}(X)^*$ les suites finies à valeurs dans $\mathcal{F}(X)$ , la relation $<_{lex}$ est l'ordre sur $\mathcal{F}(X)^*$ défini par

$$(t_1, \ldots, t_n) \underset{lex}{\leq} (s_1, \ldots, s_p) \Leftrightarrow \begin{cases} n = p \text{ et} \\ (\exists j \in [1,n])\ (\forall k < j)(t_k = s_k) \text{ et } t_j < s_j \\ \qquad \text{et } (k \geq j)(t_k \leq s_k) \end{cases}$$

Proposition 3.2.5. :

Soit $<$ une relation d'ordre sur les éléments de $\mathcal{F}$ qui est fini, alors la relation suivante sur $\mathcal{F}(X)$ est un ordre bien fondé

$$r = f(r_1, \ldots, r_n) \Delta s = g(s_1, \ldots, s_p) \Leftrightarrow \begin{cases} f < g \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n] \quad r_i \Delta s \\ \text{ou} \\ f = g \quad \text{et} \quad (r_1, \ldots, r_n) \underset{lex}{\Delta} (s_1, \ldots, s_p) \\ \text{ou} \\ f > g \quad \text{et} \quad \exists i \in [1,n] \quad r \Delta s_i \end{cases}$$

De plus cet ordre est compatible avec la composition des termes et la substitution.
Ce type d'ordre est connu sous le nom de "recursive path ordering".

Nous ne ferons pas la preuve de cette proposition qui est loin d'être évidente mais qui n'a pas de rapport strict avec les théories développées ici. La preuve se trouve dans [48].

Pour tester maintenant la confluence locale de la relation $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ , nous ne savons jusqu'à présent le faire qu'en appliquant la définition 3.1.1 qui est valable pour une relation quelconque. En fait quand la relation utilisée est issue d'un système de réécriture, la preuve de la confluence locale est beaucoup plus simple, il suffit en effet de tester cette propriété au niveau des règles. Pour ne pas alourdir la rédaction, et pour ne pas introduire des notions qui seraient utilisées dans ce seul paragraphe, nous nous contenterons d'une description approximative et non formalisée du procédé permettant de tester la confluence locale dans le cas des système de réécriture. Les définitions correctes et complètement formalisées se trouvent par exemple dans [37] , [38] .

Proposition 3.2.6 :

Soit $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ la relation définie par un système de réécriture $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ . Pour tester la confluence locale de $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ , il faut et il suffit que le procédé suivant soit applicable.

Pour chaque couple de règles de réécriture $\alpha \longrightarrow \beta$ et $\alpha' \longrightarrow \beta'$ on construit les termes $t$ tels que les deux axiomes soient applicables à $t$ en deux "endroits" différents de $t$ et tel que l'on ne puisse pas construire de terme "plus petit" que $t$ vérifiant cette condition. Si on applique à $t$ les deux axiomes respectivement à chacun des deux "endroits" on obtient alors deux termes $t_1$ et $t_2$ tels que $t \xrightarrow{(\alpha, \beta)} t_1$ et $t \xrightarrow{(\alpha', \beta')} t_2$ . On doit alors trouver un terme $t_3$ tels que $t_1 \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} t_3$ et $t_2 \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} t_3$ .

3.3.- Quelques sytèmes d'axiomes et de réécriture particuliers.

Suivant la forme des exiomes ou des règles de réécriture, on obtient des propriétés très différentes. Dans ce paragraphe nous introduisons quelques définitions qui nous serviront en particulier pour l'étude des sous-ensembles reconnaissables.

**Définition 3.3.1 :**

Un axiome $\alpha = \beta$ est dit non effaçant si et seulement si toute variable apparaissant dans $\alpha$ ou $\beta$ apparaît aussi dans l'autre terme. Une structure d'algèbre $\mathcal{T}\mathcal{A}$ est dite non effaçante si et seulement si les axiomes de $\mathcal{A}$ sont non effaçants.

Les conséquences de cette définition sont multiples, en voici quelques unes.

**Proposition 3.3.2 :**

Soit $\mathcal{T}\mathcal{A}$ une structure d'algèbre non effaçante. Pour $t \in \mathcal{T}(X)$ notons $v(t)$ les éléments de $X$ qui ont une occurrence dans $t$, alors

$$(\forall t, t' \in \mathcal{T}(X))\ (t \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}} t' \;\Rightarrow\; v(t) = v(t')) \quad .$$

On pourra donc parler des variables d'un terme $t$ de $\mathcal{T}\mathcal{A}(X)$ en posant $v(t)$ égal à $v(t')$ où $t'$ est un représentant quelconque de $t$ dans $\mathcal{T}(X)$ .

**Proposition 3.3.3 :**

Soit $\mathcal{T}\mathcal{A}$ une structure d'algèbre non effaçante. Soit $E$ un ensemble quelconque, l'ensemble $A = \mathcal{P}(E)$ peut être muni d'une structure de $\mathcal{T}\mathcal{A}$-algèbre en posant

$$f(E_1, \dots, E_n) = \bigcup_{j=1}^{n} E_i \quad .$$

**Démonstration :**

Cette proposition résulte immédiatement des propriétés d'associativité de commutativité et d'idempotence de la réunion.

**Corollaire 3.3.4 :**

Une structure d'algèbre non effaçante est toujours consistante.

**Corollaire 3.3.5 :**

Soit $\mathcal{T}\mathcal{A}$ une structure d'algèbre non effaçante. Pour tout $X$ et $Y$ tel que $X \subseteq Y$ , $\mathcal{T}\mathcal{A}(X)$ est reconnaissable dans $\mathcal{T}\mathcal{A}(Y)$ .

**Démonstration :**

Soit $\psi : \mathcal{T}\mathcal{A}(Y) \to \mathcal{P}(Y)$ défini par $\psi(t) = v(t)$ , $\psi$ est un $\mathcal{T}\mathcal{A}$-morphisme, quand on munit $\mathcal{P}(Y)$ de sa structure de $\mathcal{T}\mathcal{A}$-algèbre définie de la proposition 3.3.3. Donc $\mathcal{T}\mathcal{A}(X)$ est reconnu dans $\mathcal{T}\mathcal{A}(Y)$ par le triplet $(\psi , \mathcal{P}(Y), \mathcal{P}(X))$ .

**Remarque :**

L'algèbre minimale de $\mathcal{T}\mathcal{A}(X)$ dans $\mathcal{T}\mathcal{A}(Y)$ est en fait plus petite .

En effet si on prend $A = \{0, 1\} = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ muni des lois

$$f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i) = 1 \;\Leftrightarrow\; (\forall j \in [1, i])\ (\varepsilon_j = 1)$$

et si on définit le morphisme $\psi : \mathcal{T}\mathcal{A}(Y) \to A$ en posant

$$y \in X \;\Rightarrow\; \psi(y) = 1$$

$$y \in Y\text{-}X \;\Rightarrow\; \psi(y) = 0 \quad .$$

Il est évident que $\mathcal{T}\mathcal{A}(X)$ est reconnu par le triplet $(\psi, A, \{1\})$ .



**Définition 3.3.6 :**

Un axiome $\alpha = \beta$ est dit linéaire si et seulement si une variable a une occurrence au plus dans chacun des membres. Une structure d'algèbre est dite linéaire si et seulement si ses axiomes sont linéaires.

Les axiomes linéaires sont d'une manipulation beaucoup plus facile que les axiomes quelconques, en effet le test pour savoir si un axiome est applicable à un terme est local car on n'a jamais tester l'égalité de deux sous-termes avant d'appliquer l'axiome. Plus formellement on obtient facilement le lemme suivant.

**Lemme 3.3.7 :**

Soit $\mathcal{T}\mathcal{A}$ une structure d'algèbre linéaire. Soit $v \in \mathcal{T}(X \cup [1, n])$ et $\bar{v} : (\mathcal{T}(X))^n \to \mathcal{T}(X)$ défini en posant $v(t_1, \dots, t_n) = h(v)$ où $h : \mathcal{T}(X \cup [1, n]) \to \mathcal{T}(X)$ est le $\mathcal{T}$ morphisme obtenu à partir de $h(x) = x$ et $h(i) = t_i$ . Soit d'autre part $y_1, \dots, y_n$ des variables distinctes ou non alors

$$u = \bar{v}(y_1, \dots, y_n) \underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow} u' \;\Leftrightarrow\; \exists v' \in \mathcal{T}(X \cup [1, n])(u' = \bar{v}'(y_1, \dots, y_n) \text{ et } v \underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow} v' ) \quad .$$

**Démonstration :**

Le sens réciproque de l'équivalence est évident sans que le caractère linéaire de $\mathcal{A}$ n'intervienne. Examinons le sens direct. Soit $\alpha \to \beta$ un axiome de $\mathcal{A}$ et supposons que $u = v(y_1, \dots, y_n) \underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow} u'$ en utilisant cet axiome, on a donc

$$u = \alpha(t_1, \dots, t_k) \quad \text{et} \quad u' = \beta(t_1, \dots, t_k) \quad .$$

Comme $\alpha$ est linéaire on a $v = \alpha(t'_1, \dots, t'_k)$ et donc en posant $v' = \beta(t'_1, \dots, t'_k)$ on obtient

$$u' = \bar{v}'(y_1, \dots, y_n) \quad \text{et} \quad v \underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow} v' \quad .$$

**Remarque :**

1°) On a seulement utiliser le fait que $\alpha$ est linéaire, cela nous servira quend on énoncera un lemme similaire pour les systèmes de réécriture (cf lemme 3.3.12)

2°) On obtient immédiatement la conséquence suivante du lemme 3.3.12

$$u = v(y_1, \dots, y_n) \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}} u' \;\Leftrightarrow\; (\exists v' \in \mathcal{T}(X \cup [1, n]))(u' = v'(y_1, \dots, y_n) \text{ et } v \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}} v')$$

3°) Si à la place des variables $y_i$ , on met des termes $t_i$ le lemme ne subsiste pas, mais si de plus pour chaque terme $t_i$ la racine de ce terme est une fonction sur laquelle ne porte pas d'axiome, on obtient facilement la généralisation suivante

$$u = \bar{v}(t_1, \dots, t_n) \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}} u' \;\Leftrightarrow\; \exists v' \in \mathcal{T}(X \cup [1, n])(\exists t'_1, \dots, t'_n)(u' = v'(t'_1, \dots, t'_n) \text{ et } v \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}} v' \text{ et }$$
$$\forall i \in [1, n] \ (t_i \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}} t'_i)) \quad .$$

**Définition 3.3.8** [45] **:**

Un axiome est dit conforme si et seulement si il est linéaire non effaçant.

Une structure d'algèbre est dite conforme si et seulement si ses axiomes sont conformes.

On peut caractériser les algèbres conformes par le fait que pour toute algèbre $A$, $\mathcal{P}(A)$ peut être muni d'une structure d'algèbre. Plus précisément on obtient

Proposition 3.3.9 [45 ] :

Une structure d'algèbre $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ est conforme si et seulement si pour toute $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre $A$ , l'ensemble $B = \mathfrak{P}(A)$ a une structure de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre pour les lois

$$f^B(A_1, A_2, \ldots, A_i) = \{ f^A(a_1, \ldots, a_i) \; ; \; (a_1, \ldots, a_i) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i \} \; .$$

Les notions d'algèbre non effaçantes, linéaires ou conformes sont souvent insuffisantes pour étudier un problème car trop restrictive. On peut espérer traiter des cas plus généraux en utilisant des systèmes de réécriture ou un mélange des deux notions en utilisant la confluence locale forte ou non modulo une relation d'équivalence (cf définition 3.1.4 et 3.1.7).

Définition 3.3.10 :

Un système de réécriture est dit linéaire gauche si et seulement si les règles sont de la forme :

$$\alpha \longrightarrow \beta$$

avec les deux conditions

i) $v(\beta) \subseteq v(\alpha)$ (toute variable de $\beta$ est une variable de $\alpha$ ) .

ii) $\alpha$ est linéaire par rapport à chaque variable (une variable apparaît au plus une fois dans $\alpha$ ) .

La condition i) de la définition ci-dessus donne immédiatement la proposition suivante

Proposition 3.3.11 :

Soit $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ un système de réécriture linéaire gauche

$$(\forall t, t' \in \mathfrak{F}(X)) \; (t \xrightarrow[\mathcal{A}]{*} t' \Rightarrow v(t') \subseteq v(t)) \; .$$

Bien que l'on impose peu de chose sur les seconds membres des règles des systèmes de réécriture, le lemme 3.3.7 énoncé à propos des algèbres linéaires subsiste. Plus précisément on obtient si $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ est un système de réécriture linéaire gauche .

Lemme 3.3.12 :

Soit $v \in \mathfrak{F}(X \cup [1, n])$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des variables distinctes ou non

$$u = \bar{v}(y_1, \ldots, y_n) \xrightarrow[\mathcal{A}]{} u' \Longleftrightarrow \exists v' \in \mathfrak{F}(X \cup [1, n]) \; (u' = \bar{v}'(y_1, \ldots, y_n) \text{ et } v \xrightarrow[\mathcal{A}]{} v') \; .$$

Démonstration :

La remarque 1°) qui suit le lemme 3.3.7 permet immédiatement d'énoncer le lemme ci-dessus. D'autre part les remarques 2°) et 3°) sont valables aussi pour les systèmes de réécritures linéaires gauches en remplaçant $\xleftrightarrow[\mathcal{A}]{}$ par $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ .

En mélant les notions d'algèbres et de système de réécriture, on obtient la définition suivante.

Définition 3.3.13 :

Soit $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ une structure d'algèbre, on dit que $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ est une structure quasi-non effaçante si et seulement si $\mathcal{A}$ peut se partionner en deux sous-ensembles $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ tels que

i) $\mathcal{A}'$ est un système d'axiomes non effaçants

ii) les axiomes de $\mathcal{A}''$ peuvent être orientés de façon à obtenir un système de réécriture $\mathfrak{F}\mathcal{A}''$ tel que

a) la relation $\xrightarrow[\mathcal{A}]{}$ est fortement confluente modulo $\xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*}$

b) le système de réécriture $\mathfrak{F}\mathcal{A}''$ est linéaire gauche quand on écrira

Quand on écrira "Soit $\mathfrak{F}\mathcal{A} = \mathfrak{F}\mathcal{A}'\mathcal{A}''$ une structure d'algèbre quasi-non effaçante" cela signifiera que $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}''$ sont la partition de $\mathcal{A}$ vérifiant les conditions ci-dessus.



C'est essentiellement la définition 3.3.13 qui nous servira dans la suite, on peut cependant imaginer des définitions similaires en changeant les propriétés des axiomes $\mathcal{A}'$ pour obtenir des algèbres quasi-linéaires, quasi-conformes, etc...

3.4.- Evolution des parties reconnaissables dans les algèbres libres en liaison avec la forme des axiomes

En théorie des langages il est banal de démontrer que si $L \subseteq V^*$ est reconnaissable en tant que langage sur $V$ alors $L$ l'est aussi en tant que langage sur $V'$ pour tout $V'$ contenant $V$ . Ce phénomène ne subsiste pas dans le cas général des algèbres. En effet on obtient :

Propositon 3.4.1 :

Soit $X \subseteq Y$ et une structure d'algèbre $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ . Notons $\mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X))$ l'ensemble des sous-ensembles reconnaissables de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ . Alors

$$\mathrm{Rec}\,(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)) \supseteq \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(Y)) \cap \mathfrak{P}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X))$$

et dans certains cas cette inclusion peut être stricte.

Démonstration :

Si $L$ est reconnu dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(Y)$ par le triplet $(\chi, A, A')$ et si $L \subseteq \mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ alors $L$ est reconnu dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ par le triplet $(\chi|\mathfrak{F}\mathcal{A}(X), A, A')$ , d'où l'inclusion cherchée.

Montrons un exemple où cette inclusion est stricte. Considérons la structure de groupe et pour cette structure l'objet universel et l'objet libre de base 1. On obtient respectivement les groupes $\{0\}$ et $\mathbb{Z}$ . L'ensemble $\{0\}$ est évidemment reconnaissable dans lui-même par $(Id, \{0\} , \{0\} )$ , mais $\{0\}$ n'est pas reconnaissable dans $\mathbb{Z}$ car il faudrait trouver un triplet $(\chi, G, G')$ tel que

- $\chi : \mathbb{Z} \to G$ est un homomorphisme de groupe
- $G$ est fini
- $\chi^{-1}(G') = \{0\}$ .

Or $\chi^{-1}(G') = \{0\} \Rightarrow \chi(0) \in G' \Rightarrow \mathrm{Ker}(\chi) \subset \chi^{-1}(G') \Rightarrow \mathrm{Ker}(\chi) = \{0\}$
et donc $\chi$ est une injection et $G$ ne peut être fini.

Après quelques lemmes triviaux valables dans le cas général, nous allons étudier quelques cas particuliers où l'inclusion ci-dessus est une égalité.

Lemme 3.4.2 :

Soit $X \subset Y$ et $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ une structure d'algèbre

$$\mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)) = \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(Y)) \cap \mathfrak{P}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)) \Longleftrightarrow \mathfrak{F}\mathcal{A}(X) \in \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(Y)) \; .$$

Démonstration :

$\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ étant reconnaissable dans lui-même en utilisant la $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre réduite à un point, le sens direct de l'équivalence est trivial. Réciproquement, soit $L \in \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X))$ , soit $(\chi, A, A')$ reconnaissant $L$ dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ et soit $(\chi', B, B')$ reconnaissant $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(Y)$ . Pronlongeons $\chi$ à $\mathfrak{F}\mathcal{A}(Y)$ de manière quelconque pour obtenir un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphisme $\bar{\chi}$ , alors $L$ est reconnu dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(Y)$ par le triplet $(\bar{\chi} \times \chi' , A \times B, A' \times B')$ .

Corollaire 3.4.3 :

Soit $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ une structure d'algèbre et $X \subseteq Y \subseteq Z$ , alors

$$\mathfrak{F}\mathcal{A}(X) \in \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(Y)) \text{ et } \mathfrak{F}\mathcal{A}(Y) \in \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(Z)) \Rightarrow \mathfrak{F}\mathcal{A}(X) \in \mathrm{Rec}\,(\mathfrak{F}\mathcal{A}(Z)) \; .$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le lemme 3.4.2.

Examinons maintenant le cas un peu plus complexe des structures quasi-non effaçantes.

Proposition 3.4.4. :

Soit $\mathcal{T}\mathcal{A} = \mathcal{T}\mathcal{A}'\mathcal{A}''$ une structure d'algèbre quasi-non effaçante.

soit $x_0$ et $y_0$ deux variables distinctes alors

$$(\forall X, Y)(X \subseteq Y \rightarrow \mathrm{Rec}(\mathcal{T}\mathcal{A}(X)) = \mathrm{Rec}(\mathcal{T}\mathcal{A}(Y)) \cap \mathcal{P}(\mathcal{T}\mathcal{A}(X))) \leftrightarrow \mathcal{T}\mathcal{A}(\{x_0\}) \in \mathrm{Rec}(\mathcal{T}\mathcal{A}(\{x_0, y_0\})) .$$

Démonstration :

Le sens direct est évident sans d'ailleurs que le caractère quasi-non effaçant de $\mathcal{T}\mathcal{A}$ n'intervienne. Examinons la réciproque.

Soit $X \subseteq Y$ , il suffit en vertu du lemme 3.4.2 de démontrer que

$$\mathcal{T}\mathcal{A}(X) \in \mathrm{Rec}(\mathcal{T}\mathcal{A}(Y)) .$$

Soit $s : \mathcal{T}(Y) \rightarrow \mathcal{T}(\{x_0, y_0\})$ et $s' : \mathcal{T}\mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{A}(\{x_0, y_0\})$ défini par

$$s|X = s'|X = x_0 \quad \text{et} \quad s|Y-X = s'|Y-X = y_0 .$$

Soit $\varphi: \mathcal{T}(Y) \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{A}(Y)$ et $\varphi' : \mathcal{T}(\{x_0, y_0\}) \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{A}(\{x_0, y_0\})$ les projections canoniques. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(Y) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{T}(x_0, y_0) \arrow[d, "\varphi'"] \\
\mathcal{T}\mathcal{A}(Y) \arrow[r, "s'"] & \mathcal{T}\mathcal{A}(x_0, y_0)
\end{tikzcd}$$

Soit $(\chi, A, A')$ un triplet reconnaissant $\mathcal{T}\mathcal{A}(x_0)$ dans $\mathcal{T}\mathcal{A}(x_0, y_0)$ , nous allons montrer que $(\chi \circ s', A, A')$ reconnaît $\mathcal{T}\mathcal{A}(X)$ dans $\mathcal{T}\mathcal{A}(Y)$ .

Soit $t \in \mathcal{T}\mathcal{A}(X)$ alors $s'(t) \in \mathcal{T}\mathcal{A}(\{x_0\})$ et donc $\chi \circ s'(t) \in A'$ .

Réciproquement, supposons que $\chi \circ s'(t) \in A'$ , soit $t_1$ tel que $\varphi(t_1) = t$ , soit $t' = s'(t)$ et $t_1' = s(t_1)$ . On a donc

$$\begin{tikzcd}
t_1 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\varphi"'] & t_1' \arrow[d, "\varphi'"] & \\
t \arrow[r, "s'"] & t' \arrow[r, "\chi"] & a \in A'
\end{tikzcd}$$

Comme $\chi(t') \in A'$ , $t' \in \mathcal{T}\mathcal{A}(\{x_0\})$ et donc il existe un terme $t_2' \in \mathcal{T}(\{x_0\})$ tel que

$$t_1' \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} t_2' .$$

Numérotons les éléments de $Y$ , on obtient $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \cup \{y_{k+1}, \ldots, y_n\}$ avec $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ . Il existe évidemment un élément $v \in \mathcal{T}([1, n])$ tel que

$$t_1 = v(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) .$$



(La manipulation ci-dessus a simplement changé le nom de variables)

On a alors $t_1' = v(x_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots, y_0)$

Utilisons maintenant l'hypothèse sur $\mathcal{A}$

$$t_1' \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} t_2' \leftrightarrow \exists u_1' \text{ et } u_2' \qquad \begin{tikzcd}
t_1' \arrow[d, "\mathcal{A}''"', "*"] & & t_2' \arrow[d, "*"', "\mathcal{A}''"] \\
u_1' \arrow[rr, leftrightarrow, "*", "\mathcal{A}'"'] & & u_2'
\end{tikzcd}$$

Le caractère linéaire gauche de $\underset{\mathcal{A}''}{\longrightarrow}$ implique que $u_2' \in \mathcal{T}(\{x_0\})$ et comme , est non effaçant, on a aussi $u_1' \in \mathcal{T}(\{x_0\})$ .

De $t_1' = v(x_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots, y_0)$ et $t_1' \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longrightarrow}} u_1'$ on en déduit que

$u_1' = w(x_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots, y_0)$ avec $v \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longrightarrow}} w$ (lemme 3.3.12).

D'autre part comme $u_1' \in \mathcal{T}(\{x_0\})$ les variables de $[k+1, n]$ n'apparaissent pas dans $w$ .

Donc

$$t_1 = v(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longrightarrow}} w(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) = t_2 \in \mathcal{T}(X)$$

et par suite $t = \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ est dans $\mathcal{T}\mathcal{A}(X)$ .

Revenons maintenant aux structures d'algèbre non effaçantes pour démontrer un lemme qui nous servira au paragraphe 6.2.2.

Lemme 3.4.5 :

Soit $\mathcal{T}\mathcal{A}$ une structure d'algèbre non effaçante telle que $\{x\}$ est un sous-ensemble reconnaissable de $\mathcal{T}\mathcal{A}(\{x\})$ . Soit $t_1 \in \mathcal{T}(\emptyset)$ un terme construit avec des fonctions sur lesquelles ne portent pas d'axiomes, soit $\varphi : \mathcal{T}(\emptyset) \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{A}(\emptyset)$ la projection canonique. Alors $\{\varphi(t_1)\}$ est un sous ensemble reconnaissable de $\mathcal{T}\mathcal{A}(\emptyset)$ .

Démonstration :

Faisons une récurrence sur la complexité de $t_1$ .

Si $t_1$ est réduit à une constante , alors le lemme est évident car aucun axiome ne porte sur cette constante et donc elle peut être considérée comme une variable.

Supposons que $t_1 = f(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ et que $\{\varphi(s_1)\}, \ldots, \{\varphi(s_k)\}$ soient des sous ensembles reconnaissables de $\mathcal{T}\mathcal{A}(\emptyset)$ . Calculons la fonction $C_{\{\varphi(t_1)\}} : \mathcal{T}\mathcal{A}(\emptyset) \rightarrow \mathcal{T}\mathcal{A}(\{1\})$ (cf §.3.4 ).

Comme aucun axiome ne porte sur $f$ , on obtient

$u_1 \in \mathcal{T}(\emptyset)$ et $f$ a une occurrence dans $u_1$ et $u_1 \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} u_1' \rightarrow f$ a une occurrence dans $u_1'$

(le fait que $\mathcal{T}\mathcal{A}$ est non effaçante est évidemment nécessaire et suffisant pour que l'implication ci-dessus soit vraie). Par abus d'écriture pour $u \in \mathcal{T}\mathcal{A}(\emptyset)$ , on notera $f \in u$ , le fait que $f$ a une occurrence dans tout représentant de $u$ dans $\mathcal{T}(\emptyset)$ . D'autre part on obtient

$$f \in u \leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{N})\ (\exists s \in \mathcal{T}\mathcal{A}([1, q])(u = \tilde{s}(f(t_{11}, \ldots, t_{1k}), \ldots, f(t_{q1}, \ldots, t_{qk}))) .$$

$$\text{et } f \notin s .$$

Supposons que $f \in u$ , écrivons $u = \tilde{s}(f(t_{11}, \ldots, t_{1k}), \ldots, f(t_{q1}, \ldots, t_{qk}))$ .

S'il existe un $i \in [1, q]$ tel que $f(t_{i1}, \ldots, t_{1k}) \neq \varphi(t_1)$ alors on a $C_{\{\varphi(t_1)\}}(u) = \emptyset$ sinon on peut supposer que $q = 1$ et dans ce cas on a $C_{\{\varphi(t_1)\}}(u) = C_{\{x\}} \quad (s(x))$ .

Si $f \notin u$ , calculons $C_{\{\varphi(s_i)\}}(u)$ , on obtient alors

$$C_{\{\varphi(t_1)\}}(u) = \bigcup_{i=1}^{k} \{ t \; ; \; t \in \mathcal{F}\mathcal{A}(\{1\}) \text{ et } t = f(\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_{i-1}), s'_i, \varphi(s_{i+1}), \ldots, \varphi(s_k))$$

$$\text{avec } s'_i \in C_{\{\varphi(s_i)\}}(u) \} \quad .$$

On en déduit donc que $\{ C_{\{\varphi(t_1)\}}(u) \; ; \; u \in \mathcal{F}\mathcal{A}(\emptyset) \}$ est fini et donc que $\varphi(t_1)$ est reconnaissable.

## 4.- TRANSFORMATION FONDAMENTALE SUR LES STRUCTURES D'ALGEBRES CONDUISANT A DES CONSTRUCTIONS DE HIERARCHIES.

Au paragraphe 2 nous avons deux exemples de la transformation que nous allons expliciter ici

### 4.1.- Transformation proprement dite :

Définition 4.1.1. :

Soit $\mathcal{F}\mathcal{A}$ une structure d'algèbre. On dira que cette structure est transformable si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

i) $\mathcal{F} = (F_0, F_1, \ldots, F_n)$

ii) $\forall i \geq 1 \quad F_i = F'_i \cup F''_i$ et $F'_i \cap F''_i = \emptyset$ .

iii) La forme des axiomes de $\mathcal{A}$ est quelconque mais aucun élément de $\bigcup_{i=1}^{n} F''_i$ n'a d'occurrence dans les axiomes.

Quand nous écrivons "Soit $\mathcal{F}\mathcal{A} = \mathcal{F}'\mathcal{F}''\mathcal{A}$ une structure d'algèbre transformable", cela signifiera que $\mathcal{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ , $\mathcal{F}' = (F_0, F'_1, \ldots, F'_n)$ et $\mathcal{F}'' = (\emptyset, F''_1, \ldots, F''_n)$, les ensembles $F_i$, $F'_i$ et $F''_i$ vérifiant les trois conditions ci-dessus.

Le but de la transformation que nous allons étudier est de faire baisser l'arité d'un certain nombre de fonction d'accès de la structure d'algèbre pour obtenir une nouvelle structure et d'étudier les liens existants entre les objets libres des deux structures. L'idée sousjacente est d'utiliser l'isomorphisme bien connu

$$\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}} \longrightarrow A \quad \approx \quad \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n-1 \text{ fois}} \rightarrow (A \rightarrow A)$$

d'introduire un nouvel opérateur binaire (noté plus loin + ) qui correspond à la composition des applications.

Définition 4.1.2 :

Soit $\mathcal{F}\mathcal{A} = \mathcal{F}'\mathcal{F}''\mathcal{A}$ une structure d'algèbre transformable. La structure $\mathcal{F}_1\mathcal{A}_1$ transformée de $\mathcal{F}\mathcal{A}$ est définition la structure d'algèbre suivante



$$\mathcal{F}_1 = (F_0 \cup F''_1 \cup \{\wedge\} \;, F'_1 \cup F''_2, F'_2 \cup F''_3 \cup \{+\} \;, F'_3 \cup F''_4, \ldots, F'_{n-1} \cup F''_n, F'_n )$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}''_1 \qquad \text{avec .}$$

$$\mathcal{A}''_1 = \{ x + (y+z) = (x+y)+z \;, \; \wedge+x = x+\wedge = x \;, \; a \in F_0 \Rightarrow a+x = a$$
$$f \in F'_i \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i)+y = f(x_1+y, \ldots, x_i+y) \} \quad .$$

(quand cela sera plus agréable, l'opérateur binaire + sera noté de manière fonctionnelle $+(x, y)$) . Remarquons que les axiomes $a+x = a$ sont un cas particulier des axiomes $f(x_1, \ldots, x_i)+y = f(x_1+y, \ldots, x_i+y)$ pour $i = 0$ .

Remarques sur cette définition :

Remarque 1 :

La structure de $\mathcal{F}_1\mathcal{A}_1$-algèbre contient deux nouveaux symboles $\wedge$ et $+$ , tous les noms de symboles qui sont dans $\mathcal{F}$ sont aussi dans $\mathcal{F}_1$ , mais ceux de $\mathcal{F}'$ ont gardé leur arité alors que ceux de $\mathcal{F}''$ ont perdu une arité.

Remarque 2 :

Comme les éléments de $\mathcal{F}''$ n'interviennent pas dans les axiomes, il n'y a pas d'impossibilité syntaxique à ce que $\mathcal{A}$ soit un ensemble d'axiomes pour la structure de $\mathcal{F}_1$-algèbre.

Remarque 3 :

La fonction + introduite dans $\mathcal{F}'$ est une loi de monoïde. Pour la compréhension de la suite, il est bon de l'interpréter intuitivement comme une composition d'application ou comme un opérateur de greffes d'arbres. D'ailleurs on s'aperçoit vite que ces deux interprétations coïncident. En effet un terme d'une $\mathcal{F}\mathcal{A}$ -algèbre libre est la représentation d'un calcul dans cette catégorie d'algèbre et greffer un calcul sous un autre revient à faire la composition des applications correspondant à ces calculs.

Remarque 4 :

Les fonctions d'accès qui n'étaient pas affectées par les axiomes de $\mathcal{A}$ ne le sont pas non plus par les axiomes de $\mathcal{A}_1$ . Ceci laisse présager que cette transformation va pouvoir être itérée (cf §6).

### 4.2.- Orientation et étude des axiomes introduits par la transformation

Dans la définition 4.1.2 les axiomes de $\mathcal{A}''_1$ introduits par la transformation ne sont pas orientés. Nous allons les orienter pour obtenir un système de réécriture noethérien, confluent et de plus confluent modulo $\overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}}$ .

Pour cela considérons le système de réécriture suivant

$$\overrightarrow{\mathcal{A}''_1} \left\{ \begin{array}{llll} \wedge+x & \xrightarrow{(1)} & x & \\ x+\wedge & \xrightarrow{(2)} & x & \\ a+x & \xrightarrow{(3)} & a & \text{pour tout } a \text{ de } F_0 \\ f(x_1, \ldots, x_i)+y & \xrightarrow{(4)} & f(x_1+y, \ldots, x_i+y) & \text{pour tout } f \in \bigcup_{i=1}^{n} F'_i \\ (x+y)+z & \xrightarrow{(5)} & x+(y+z) & . \end{array} \right.$$

De façon évidente on a $\overleftrightarrow{\mathcal{A}''_1} = \overrightarrow{\mathcal{A}''_1} \cup \overleftarrow{\mathcal{A}''_1}$

Lemme 4.2.1 :

Le système de réécriture $(\mathfrak{F}_1, \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{})$ est noetherien.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer la proposition 3.2.5 en supposant que + est plus grand que tous les autres symboles.

Lemme 4.2.2 :

Le système de réécriture $(\mathfrak{F}_1, \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{})$ est localement confluent .

Démonstration :

Utilisons la proposition 3.2.6 en unifiant tous les couples de règles possibles, on obtient

- (1), (2) $\begin{tikzcd} \wedge + \wedge \arrow[r, bend right, "(1)", "(2)"'] & \wedge \end{tikzcd}$

- (1), (3) impossible, (1) (4) impossible,

- (1)(5) $\begin{tikzcd} (\wedge+x)+y \arrow[r, bend left, "(1)"] \arrow[dr, "(5)"'] & x+z \\ & \wedge+(x+z) \arrow[u, "1"'] \end{tikzcd}$

- (2), (3) $\begin{tikzcd} a+\wedge \arrow[r, bend left, "(2)"] \arrow[r, bend right, "(3)"'] & a \end{tikzcd}$

- (2), (4) $\begin{tikzcd} f(x_1,\ldots, x_i)+\wedge \arrow[r, bend left, "(2)"'] \arrow[d, "(4)"] & f(x_1,\ldots, x_i) \\ f(x_1 + \wedge,\ldots, x_i + \wedge) \arrow[ur, "*", "(2)"'] & \end{tikzcd}$

- (2), (5) $\begin{tikzcd} (x+y)+\wedge \arrow[r, "(2)"'] \arrow[d, "(5)"] & x+y \\ x+(y+\wedge) \arrow[ur, "(2)"'] & \end{tikzcd}$ $\begin{tikzcd} (x+\wedge)+y \arrow[r, "(2)"'] \arrow[d, "(5)"] & x+y \\ x+(\wedge+y) \arrow[ur, "(2)"'] & \end{tikzcd}$

- (3), (4) impossible

- (3), (5) $\begin{tikzcd} (a+x)+y \arrow[r, "(3)"'] \arrow[d, dash, "5"] & a+z \arrow[r, "(3)"'] & a \\ a+(x+y) \arrow[urr, "(3)"'] & & \end{tikzcd}$

- (4), (5) $\begin{tikzcd} (f(x_1,\ldots, x_i)+y)+z \arrow[r, "(4)"'] \arrow[d, "(5)"] & f(x_1+y,\ldots, x_i+y)+z \arrow[r, "(4)"'] & f(x_1+y)+z,\ldots, (x_i+y)+z) \arrow[dl, "*"', "(5)"] \\ f(x_1,\ldots, x_i)+(y+z) \arrow[r, "(4)"'] & f(x_1 + (y+z),\ldots, x_i+(z+z)) & \end{tikzcd}$

- (5), (5) $\begin{tikzcd} ((x+y)+z)+t \arrow[rr, "(5)"'] \arrow[d, "(5)"] & & (x+y)+(z+t) \arrow[d, "(5)"'] \\ (x+(y+z))+t \arrow[dr, "(5)"'] & & x+(y+(z+t)) \\ & x+((y+z)+t) \arrow[ur, "(5)"'] & \end{tikzcd}$



D'après les lemmes 4.2.1 et 4.2.2 on obtient en appliquant le lemme 3.1.3.

Corollaire 4.2.3 :

Le système de réécriture $(\mathfrak{F}_1, \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{})$ est confluent .

Lemme 4.2.4 :

La relation $\xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{}$ est localement confluente modulo $\xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*}$ .

Démonstration :

D'après la définition 3.1.4, il faut vérifier les deux conditions suivante :

(I) $(\forall x, y, z)\ (x \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{} y$ et $x \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{} z \Rightarrow (\exists u, v)(y \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{*} u$ et $z \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{*} v$ et $u \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} v))$

(II) $(\forall x, y, z)\ (x \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} y$ et $x \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{} z \Rightarrow (\forall u, v)(y \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{*} u$ et $z \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{} u$ et $u \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} v))$

Le corollaire 4.2.3 assurant la confluence de $(\mathfrak{F}_1, \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{})$ implique que la condition (I) est vérifiée.

Pour la condition (II), remarquons que les axiomes de $\mathcal{A}$ ne contiennent pas d'occurrence de + et qu'à l'inverse les premiers membres des règles de $\xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{}$ contiennent à chaque fois ce symbole. Donc le seul phénomène qui puisse se produire est que dans le passage de $x$ à $y$ en utilisant la relation $\xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*}$ on ait multiplié le nombre de places où doit s'appliquer la règle de $\xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{}$ permettant de passer de $x$ à $z$ . On en déduit donc une condition plus forte que II qui s'écrit

(II') $(\forall x, y, z)\ (x \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} y$ et $x \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{} z \Rightarrow (\exists u)(y \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{*} u$ et $u \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} z))$ .

Les lemmes 4.2.1 et 4.2.4 permettent, en utilisant les lemmes 3.1.5 et 3.1.6 d'énoncer le corollaire suivant

Corollaire 4.2.5 :

La relation $\xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{}$ est fortement confluente modulo $\xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*}$ .

Comme le système de réécriture $(\mathfrak{F}_1, \xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{})$ est confluent noethérien, chaque terme de $\mathfrak{F}_1(X)$ possède une forme normale. On obtient facilement une description par une $\mathfrak{F}_1$-grammaire de ces formes normales.

Lemme 4.2.6 :

Soit $t$ un terme de $\mathfrak{F}_1(X)$ , $t$ est une forme normale pour $\xrightarrow[\mathcal{A}''_1]{}$ si et seulement si $t$ est engendré par la $\mathfrak{F}_1$- grammaire $G$ suivante

$$G = (\{A, A', A''\} , \bigcup_{i=0}^{n} F_i \cup \{+, \wedge\} \cup X, \rightarrow , A) \text{ avec } \rightarrow \text{ défini par}$$

$A \longrightarrow \underbrace{f(A,\ldots, A)}_{i \text{ fois}}$ pour $i \in [1, n]$ et $f \in F'_i \cup F''_{i+1}$

$A \longrightarrow \wedge \mid a \mid x$ pour $a \in F_o$ et $x \in X$

$A \longrightarrow +(A', A)$

$$A' \longrightarrow \underbrace{f(A,\ldots,A)}_{i-1 \text{ fois}} \quad \text{pour} \quad i \in [1,n] \quad \text{et} \quad f \in F''_i$$

$$A' \longrightarrow x \quad \text{pour} \quad x \in X$$

$$A'' \longrightarrow \underbrace{f(A,\ldots,A)}_{i \text{ fois}} \quad \text{pour} \quad i \in [1,n] \quad \text{et} \quad f \in F'_i \cup F''_{i+1}$$

$$A'' \longrightarrow a \mid x \quad \text{pour} \quad a \in F_0 \quad \text{et} \quad x \in X$$

$$A'' \longrightarrow +(A', A'') \quad .$$

Démonstration :

Une démonstration complète de ce lemme est longue et sans grand intérêt. Bornons nous à donner les propriétés qu'ils faudraient démontrer par récurrence pour vérifier ce lemme.

Posons

$$L_A = \{ t \; ; \; A \xrightarrow[G]{*} t \} \; , \; L_{A'} = \{ t \; ; \; A' \xrightarrow[G]{*} t \} \; \text{et} \; L_{A''} = \{ t \; ; \; A'' \xrightarrow[G]{*} t \} \; .$$

Par récurrence sur la longueur des dérivations on obtient facilement

1°) $t \in L_{A'} \Rightarrow t \in L_{A''} \Rightarrow t \in L_A$

2°) $t \in L_{A''} \Leftrightarrow t \in L_A - \{\wedge\}$

3°) $t \in L_A \Rightarrow$ aucune règle n'est applicable à $t$
et
$t \in L_{A'} \Rightarrow \rho(t) \in X \cup (\bigcup_{i=1}^{n} F''_i)$
et
$t \in L_{A''} \quad t \neq \wedge$ .

Des propriétés 1°) 2°) et 3°) résultent que $G$ engendre seulement des formes normales pour $\overrightarrow{\mathcal{A}''}$ .
Réciproquement par récurrence sur la complexité d'un terme (c'est à dire sur le nombre de point de l'arbre représentant $t$ ) on obtient

4°) $t$ est une forme normale $\Rightarrow (A \xrightarrow[G]{*} t$ et $(t = +(t_1, t_2) \Rightarrow A' \xrightarrow[G]{*} t_1$ et $A'' \xrightarrow[G]{*} t_2))$ .

4.3.- Etude préliminaire des liens existants entre une structure d'algèbre et sa transformée.

Quand on transforme une structure d'algèbre on obtient une structure plus riche, ce qui se traduit par la proposition évidente suivante.

Proposition 4.3.1 :

Soit $\mathfrak{F}\mathcal{A} = \mathfrak{F}'\mathfrak{F}''\mathcal{A}$ une structure d'algèbre transformable et $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ sa transformée. Soit $B$ une $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ -algèbre alors $B$ peut être muni d'une structure de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ algèbre en posant

$$f \in F'_i \Rightarrow \bar{f}(b_1,\ldots, b_i) = f^B(b_1,\ldots, b_i)$$
$$f \in F''_i \Rightarrow \bar{f}(b_1,\ldots, b_i) = f^B(b_1,\ldots, b_{i-1}) + b_i \quad .$$

Réciproquement quand on connait une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ -algèbre $A$ on peut lui associer une $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$-algèbre, plus précisément on obtient



Proposition 4.3.2 :

Soit $\mathfrak{F}\mathcal{A} = \mathfrak{F}'\mathfrak{F}''\mathcal{A}$ une structure d'algèbre transformable et $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ sa transformée. Soit $A$ une $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre non vide et $a_o$ un élément quelconque de $A$ . Soit $B = A^A$ , on peut munir $B$ d'une structure de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ -algèbre en posant

i) $\wedge^B = Id_B$

ii) $a \in F_o \Rightarrow a^B(a') = a^A$

iii) $f \in \bigcup_{i=1}^{n} F'_i \Rightarrow f^B(b_1,\ldots, b_i)(a) = f^A(b_1(a),\ldots, b_i(a))$

iv) $f \in \bigcup_{i=1}^{n} F''_i \Rightarrow f^B(b_1,\ldots, b_{i-1})(a) = f^A(b_1(a_o),\ldots, b_{i-1}(a_o), a)$

v) $+^B(b_1, b_2) = b_1 \circ b_2$ .

Démonstration :

Il faut vérifier que $B$ muni de cette structure vérifie bien les axiomes de $\mathcal{A}_1$ . On sait que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}''_1$ où $\mathcal{A}$ sont des axiomes partant uniquement sur des éléments de $\mathfrak{F}'$ et $\mathcal{A}''_1$ sont les axiomes ajoutés par la transformation. Vu la façon dont on a défini les lois $f^B$ pour $f$ dans $\mathfrak{F}'$ , la vérification des axiomes de $\mathcal{A}$ est immédiate. Vérifions maintenant les axiomes de $\mathcal{A}''_1$ .

- $+^B$ étant la composition des applications, $+^B$ est associative et admet $\wedge^B = Id_B$ comme élément neutre.
- si $a \in F_o$ , alors $a^B$ est l'application constante $a^A$ et donc $a^B$ est absorbant à gauche pour $+^B$
- si $f \in \bigcup_{i=1}^{n} F'_i$ on obtient

$$\begin{aligned} +^B(f^B(b_1,\ldots, b_i), b)(a) &= f^B(b_1,\ldots, b_i)(b(a)) \\ &= f^A(b_1(b(a)),\ldots, b_i(b(a))) \\ &= f^A(+^B(b_1, b)(a),\ldots, +^B(b_i,b)(a)) \\ &= f^B(+^B(b_1, b),\ldots, +^B(b_i, b))(a) \quad . \end{aligned}$$

D'où la distribution de $+^B$ par rapport à toutes les lois de $\bigcup_{i=1}^{n} F'_i$ .
Regardons maintenant le lien entre les $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphismes et les $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ morphismes .

Proposition 4.3.3 :

Soit $\psi : B_1 \longmapsto B_2$ un $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ -morphisme, si on munit $B_1$ et $B_2$ de leurs structures de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbres définies à la proposition 4.3.1 alors $\psi$ devient un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphisme.

Démonstration :

Cette proposition résulte de vérifications triviales.

Proposition 4.3.4 :

En utilisant les notations de la proposition 4.3.2, l'application $\xi : B \rightarrow A$ définie par $\xi(b) = b(a_o)$ est un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ -morphisme (quand évidemment on munit $B$ de sa structure de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre).

Démonstration :

Il faut démontrer que

$$a \in F_o \Rightarrow \xi(a^B) = a^A$$

$$f \in \bigcup_{i=1}^{n} F'_i \Rightarrow \xi(f^B(b_1,\dots,b_i)) = f^A(\xi(b_1),\xi(b_2),\dots,\xi(b_i))$$

$$f \in \bigcup_{i=1}^{n} F''_i \Rightarrow \xi(f^B(b_1,\dots,b_{i-1}) +^B b_i) = f^A(\xi(b_1),\dots,\xi(b_{i-1}),\xi(b_i)) \quad .$$

Tout ceci résulte immédiatement de la définition de $\xi$ et des lois définies sur $B$ .

## 4.4.- Etude des liens existant entre les objets libres d'une structure d'algèbre et de sa transformée

Quand on transforme une structure d'algèbre, on introduit une nouvelle constante $\wedge$ , nous allons étudier des $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphismes entre des $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbres libres et des $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ -algèbres libre où un élément particulier de la base de la $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre se transforme en $\wedge$ .

Théorème 4.4.1 :

Soit $X$ un ensemble ne contenant pas $\wedge$ . Soit $\mathfrak{F}\mathcal{A} = \mathfrak{F}'\mathfrak{F}''\mathcal{A}$ une structure d'algèbre transformable et $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ sa transformée. Soit $\psi_X : \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \to \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ le $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ -morphisme obtenu en munissant $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ de sa structure de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ -algèbre (proposition 4.3.1) et en posant $\psi_X(\wedge) = \wedge$ et $\psi_X|X = Id_X$ . Alors

i) $\psi_X$ est une injection

ii) Soit $\varphi_1 : \mathfrak{F}_1(X) \to \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ la projection canonique, alors l'image de $\psi_X$ est $\varphi_1(L(G_X))$ où $L(G_X)$ est l'ensemble engendré par la $\mathfrak{F}_1$-grammaire $G_X = (\{A, A', A''\} , (\bigcup_{i=0}^{n} F_n) \cup \{\wedge , +\} \cup X, \longrightarrow , A)$ avec

$A \longrightarrow f(A, A,\dots,A)$ pour $i \in [1,n]$ et $f \in F'_i \cup F''_{i+1}$

$A \longrightarrow \wedge \mid x \mid a$ pour $x \in X$ et $a \in F_o$

$A \longrightarrow +(A', A'')$

$A' \longrightarrow \underbrace{f(A,\dots,A)}_{i-1 \text{ fois}}$ pour $i \in [1,n]$ et $f \in F''_i$

$A'' \longrightarrow \underbrace{f(A,\dots,A)}_{i \text{ fois}}$ pour $i \in [1,n]$ et $f \in F'_i \cup F''_{i+1}$

$A'' \longrightarrow a \mid x$ pour $a \in F_o$ et $x \in X$

$A'' \longrightarrow +(A', A'')$

iii) dans le cas particulier où $X = \emptyset$ , $\psi_\emptyset$ est un isomorphisme.

Démonstration :

Commençons par démontrer que $\psi_X$ est une injection. Si on essaie d'aborder cette démonstration de front elle s'avère particulièrement délicate, l'auteur a trouvé une démonstration fondée sur la confluence de $\overrightarrow{\mathcal{A}''_1}$ modulo $\overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}}$ (cf corollaire 4.2.5). Cette preuve sans être difficile est cependant assez lourde. La démonstration qui suit m'a été suggérée par Monsieur Pair.



Posons $A = \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$ . D'après la proposition 4.3.2 le choix d'un élément de $A$ permet de munir $B = A^A$ d'une structure de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ -algèbre. Choisissons $\wedge$ comme élément distingué dans $A$ . Soit $h : \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X) \to B$ le $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ morphisme tel que $h(x)$ est l'application constante $x$ . Soit finalement $\xi : B \longrightarrow A$ défini par $\xi(b) = b(\wedge)$ . On sait que $\xi$ est un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ morphisme (proposition 4.3.4). On obtient donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \arrow[rr, "\psi_X"] & & \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X) \arrow[d, "h"] \\
& & \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \arrow[ull, "\xi"']
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$

$h$ peut être considéré comme un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphisme (proposition 4.3.3), si bien que $k = \xi \circ h \circ \psi_X$ est un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ -morphisme de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$ dans lui-même. Or il est trivial de vérifier que $k(\wedge) = \wedge$ et $k|X = Id_X$ et donc d'après la propriété universelle de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$ on en déduit que $k = Id$ .

C'est à dire

$$\xi \circ h \circ \psi_X = Id : \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \to \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \quad .$$

Et donc $\psi_X$ est une injection.

La deuxième partie du théorème bien que plus technique est en fait plus facile. Montrons que le diagramme commutatif suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(\{\wedge\} \cup X) \arrow[r, "\psi'_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{F}_1(X) \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \arrow[r, "\psi_X"] & \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)
\end{tikzcd}$$

où $\psi'_X$ est défini par la récurrence suivante

$$\psi'_X(\wedge) = \wedge$$

$$x \in X \Rightarrow \psi'_X(x) = x$$

$$a \in F_o \Rightarrow \psi'_X(a) = a$$

$$f \in \bigcup_{k=1}^{n} F'_k \Rightarrow \psi'_X(f(t_1,\dots,t_k)) = f(\psi'_X(t_1),\dots,\psi'_X(t_k))$$

$$f \in \bigcup_{k=1}^{n} F''_k \Rightarrow \psi'_X(f(t_1,\dots,t_k)) = \underline{\text{si}}\ t_k = \wedge\ \underline{\text{alors}}\ f(\psi'_X(t_1),\dots,\psi'_X(t_{k-1}))$$
$$\underline{\text{sinon}}\ f(\psi'_X(t_1),\dots,\psi'_X(t_{k-1})) + \psi'_X(t_k)\ \underline{\text{fsi}}$$

Il faut donc montrer que

$$\forall t \in \mathfrak{F}(\{\wedge\} \cup X)\ (\varphi_1 \circ \psi'_X(t) = \psi_X \circ \varphi(t)) \quad .$$

Ceci résulte d'une récurrence évidente sur $t$ .

On a donc $Im(\psi_X) = \varphi_1(Im\ \psi'_X)$ .

Or de façon évidente également, $\mathrm{Im}\,\psi'_X$ est formée de termes sous forme normale pour la relation $\overrightarrow{\mathcal{A}''_1}$ .
Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Im}(\psi'_X)$ est engendré par la $\mathfrak{F}_1$-grammaire $G_X$ définie dans le théorème.
Là aussi des récurrences faciles prouvent ce fait.

Remarquons que ce que l'on vient de montrer revient à dire que $\mathrm{Im}(\psi'_X)$ est formée des images par $\varphi_1$ des termes sous forme normale dans $\mathfrak{F}_1(X)$ tels qu'une variable $x$ n'est jamais un argument gauche de l'opération $+$ . Dans le cas où $X = \emptyset$ , cette condition est toujours vérifiée et donc dans ce cas $\psi_\emptyset$ est une surjection et donc $\psi_\emptyset : \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\}) \to \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ est un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-isomorphisme.

Commentaire :

1°) Nous avons vu trois exemples du phénomène décrit par ce théorème au paragraphe 2, le premier quand on remarque que la V-algèbre monadique universelle est isomorphe au monoïde libre de base V (§2.1), le deuxième est l'isomorphisme entre la V-algèbre diadique universelle et le V-binoïde universel et le troisième est l'isomorphisme entre le V-binoïde libre V[1] et le V-dioïde universel.

2°) Dans la suite nous allons essentiellement exploiter le troisième résultat de ce théorème disant que $\psi_\emptyset$ est un isomorphisme.

3°) Remarquons que le point ii) du théorème signifie en particulier que $\mathrm{Im}(\psi_X)$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ . Le problème de savoir si $\mathrm{Im}(\psi_X)$ est un sous ensemble reconnaissable sera abordé au paragraphe suivant.

## 5.- EVOLUTION DES SOUS ENSEMBLES RECONNAISSABLES ET ALGEBRIQUES DANS LA TRANSFORMATION.

### 5.1.- Evolution dessous-ensembles reconnaissables.

Commençons par étudier l'évolution des sous ensembles reconnaissable quand on utilise l'isomorphisme $\psi_\emptyset$ que l'on notera $\psi_0$ dans la suite. On notera $\mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X))$ l'ensemble des sous ensembles reconnaissables de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$ .

Théorème 5.1.1 :

Soit $\mathfrak{F}\mathcal{A} = \mathfrak{F}'\mathfrak{F}''\mathcal{A}$ une structure d'algèbre transformable, soit $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ sa transformée. Soit $\psi_0 : \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\}) \to \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ l'isomorphisme mis en évidence au théorème 4.4.1. Soit $L \subseteq \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ , $L$ est un sous ensemble reconnaissable de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ si et seulement si $\psi_0(L)$ est reconnaissable dans $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ . C'est à dire que l'on a
$\psi_0(\mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})) = \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset))$ .

Démonstration :

1°) Supposons que $(\chi , B, B')$ soit un triplet reconnaissant $\psi_0(L)$ dans $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ .
Munissons $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ et $B$ de leurs structures de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-algèbre (proposition 4.3.1). Le $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$-morphisme devient un $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphisme et de $\chi^{-1}(B') = \psi_0(L)$ on déduit $(\chi\circ\psi_0)^{-1}(B') = L$ , donc $L$ est reconnu dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ par le triplet $(\chi\circ\psi_0, B, B')$ .

2°) Supposons que $(\chi, A, A')$ reconnaisse $L$ dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ . Le chois de l'élément $\wedge^A = \chi(\wedge)$ dans $A$ permet de définir sur $B = A^A$ une structure de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ -algèbre (proposition 4.3.2). D'autre part, on sait que le diagramme suivant est commutatif (proposition 4.3.4)



$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\}) \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\chi"'] & \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset) \arrow[d, "\overline{\chi}"] \\
A & B = A^A \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

- $\overline{\chi}$ est l'unique $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ morphisme de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ dans $B = A^A$
- $\xi(b) = b(\wedge^A) = b(\chi(\wedge))$ .

On en déduit donc que $\psi_0(L) = \chi^{-1}(B')$ où $B' = \{ b \,;\, \xi(b) = b(\wedge^A) \in A'\}$ , et donc $\psi_0(L)$ est reconnaissable dans $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ car $B$ est fini si $A$ l'est.

Commentaire :

Ce théorème généralise donc ce que l'on avait vu sur les exemples du paragraphe 2 où l'on avait remarqué la conservation des sous ensembles reconnaissables dans trois exemples.
L'étude de l'évolution des sous ensembles reconnaissables quand on utilise ses $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphismes $\psi_X$ est très nettement moins simple : nous introduirons à cette occasion des notions qui nous servirons aussi dans les autres paragraphes.

Proposition 5.1.2 :

Avec les notations du théorèmes 4.4.1, soit $\psi_X : \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \to \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ . Soit $L$ un sous ensemble reconnaissable de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ , alors $\psi_X^{-1}(L)$ est reconnaissable dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$ .

Démonstration :

Si $(\chi , B, B')$ reconnait $L$ dans $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ , alors $(\chi\circ\psi_X, B, B')$ reconnait $\psi^{-1}(L)$ dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$ .

Proposition 5.1.3 :

Avec les mêmes notations que ci-dessus, pour que tout sous ensemble $L$ reconnaissable dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$ ait son image par $\psi_X$ reconnaissable dans $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ , il faut et il suffit que $\mathrm{Im}(\psi_X)$ soit un sous ensemble reconnaissable de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ .

Démonstration :

La condition est nécessaire car $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$ est évidemment reconnaissable dans lui-même (son algèbre minimal est l'algèbre singleton !). Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}(\psi_X)$ reconnu dans $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ par le triplet $(\chi , B, B')$ . Soit $L$ reconnu dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$ par le triplet $(\chi', A, A')$ . On choisit le point $\chi'(\wedge) = \wedge^A$ de $A$ , munissons $C = A^A$ d'une structure de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ algèbre et soit $\overline{\chi} : \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X) \to C$ le $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ morphisme tel que $\overline{\chi}(x)(a) = \chi'(x)$. soit $C' = \{c \,;\, c(\wedge^A) \in A'\}$ .
Montrons que $\psi_X(L)$ est reconnu par le triplet $(\chi \times \overline{\chi} , B \times C, B' \times C')$ , en effet

$$\chi \times \overline{\chi}(t) \in B' \times C' \Longleftrightarrow \chi(t) \in B' \text{ et } \overline{\chi}(t) \in C' \Longleftrightarrow (\exists t' \in \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X))(\psi_X(t') = t \text{ et } \overline{\chi}\circ\psi_X(t') \in C')$$
$$\Longleftrightarrow (\exists t' \in \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X))(\psi_X(t') = t \text{ et } \xi\circ\overline{\chi}\circ\psi_X(t') \in A')$$

avec $\xi : C \to A$ défini par $\xi(c) = c(\wedge^A)$ . Or $\xi\circ\overline{\chi}\circ\psi_X = \chi'$ et donc on obtient

$$\chi \times \overline{\chi}(t) \in B' \times C' \Longleftrightarrow (\exists t' \in \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X))(\psi_X(t') = t \text{ et } \chi'(t') \in A') \Longleftrightarrow (\exists t' \in L)(t = \psi_X(t'))\ .$$

Bien qu'il ne soit pas très facile de construire un exemple, il semble peu probable sans hypothèse sur les axiomes de $\mathcal{A}$ que $\mathrm{Im}(\psi_X)$ soit toujours un sous ensemble reconnaissable de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ (cf la proposition 3.4.1 qui traite un cas analogue mais plus simple). Nous allons voir que cela est vrai dans un cas assez général qui de plus a le mérite d'être conservé quand on itère la transformation (cf §6.1 et 6.2).

Commençons par mettre en évidence une manipulation qui nous reservira ultérieurement sous une autre forme (cf § 6.2.2).

Lemme 5.1.4 :

Soit $\mathfrak{F}\mathcal{A} = \mathfrak{F}'\mathfrak{F}''\mathcal{A}$ une structure d'algèbre transformable, soit $X$ un ensemble de variable et $\overline{X}$ un ensemble de symboles de fonction unaire en bijection avec $X$ par la bijection $x \rightleftarrows x$ .
Notons $\mathfrak{F}'' \cup X$ le n-uplet $(\emptyset, F_1'' \cup \overline{X}, F_2'', \ldots, F_n'')$ .
La structure d'algèbre $\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})\mathcal{A}$ est transformable. Soit $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ et $\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})_1\mathcal{A}_1$ les transformées de $\mathfrak{F}\mathcal{A}$ et de $\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})\mathcal{A}$ respectivement. On obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})\,\mathcal{A}\,(\{\wedge\}) \arrow[r, "\psi_{o,X}"] \arrow[d] & \mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})_1\mathcal{A}_1(\emptyset) \arrow[d, "\theta_X"] \\
\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \arrow[r, "\psi_X"] & \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)
\end{tikzcd}$$

où $\psi_{o,X}$ et $\psi_X$ sont les $\mathfrak{F}\mathcal{A}$-morphismes définis au théorème 4.4.1 et $\theta_X$ est le $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$-morphisme tel que $\theta(x) = x$ . De plus $\theta_X$ est un morphisme bijectif (il serait légèrement incorrect de dire que $_X$ est un isomorphisme car les deux structures d'algèbres sont différentes. En fait comme le prouve la suite cette incorrection se justifie tout à fait !)

Démonstration :

Ce lemme d'énoncé un peu lourd est parfaitement évident une fois qu'il est écrit. En effet $\overline{X}$ étant des fonctions d'arités un , deviennent dans la transformation des constantes sur lesquelles ne portent pas d'axiome. Ces constantes peuvent donc être considérées comme des variables d'où l'isomorphisme canonique $\theta_X$ .

Corollaire 5.1.5 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Im}(\psi_X)$ soit reconnaissable dans $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ , il faut et il suffit que $\psi_{o,X}^{-1}(\theta_X(\mathrm{Im}(\psi_X)))$ soit reconnaissable dans $\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})(\{\wedge\})$ .

Démonstration :

Il suffit d'utiliser le théorème 5.1.1 qui est applicable à $\psi_{o,X}$ .
En examinant les termes $\psi_{o,X}^{-1}(\theta_X(\mathrm{Im}(\psi_X)))$ on obtient immédiatement

Lemme 5.1.6 :

Soit $\varphi : \mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})(\{\wedge\}) \to \mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})\mathcal{A}(\{\wedge\})$ la projection canonique. Un terme $t$ est dans $\psi_{o,X}^{-1}(\theta_X(\mathrm{Im}(\psi_X)))$ si et seulement si il existe un terme $t'$ tel que $\varphi(t') = t$ et que dans $t'$ l'argument d'une fonction de $X$ est toujours $\wedge$ .



Jusqu'à présent nous n'avons pas introduit d'hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{A}$ .Faisons-le maintenant.

Théorème 5.1.7 :

Supposons vérifier les hypothèses suivantes :

i) $\mathfrak{F}'\mathcal{A}$ est une structure d'algèbre quasi-non effaçante ( $\mathcal{A}$ se décomposant en $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ )

ii) $\{\wedge\}$ est reconnaissable dans $\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup X)\mathcal{A}(\{\wedge\})$

iii) Si $x_o$ et $y_o$ sont deux variables distinctes alors $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{x_o\})$ est reconnaissable dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{x_o, y_o\})$ .

Dans ces conditions pour tout $L$ reconnaissable dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$, $\psi_X(L)$ est reconnaissable dans $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ C'est à dire $\psi_X(\mathrm{Rec}(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X))) \subseteq \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(X))$ .

Démonstration :

Soit $(\chi_\wedge, A, A')$ un triplet reconnaissant $\{\wedge\}$ dans $\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})\mathcal{A}(\{\wedge\})$ .
Soit $(\chi', B, B')$ une triplet reconnaissant $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{x_o\})$ dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{x_o, y_o\})$ . Munissons $C = A \times B$ d'une structure de $\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})\mathcal{A}$ algèbre en posant

a) $f \in \mathfrak{F}'$ ou $f \in \mathfrak{F}'' \Rightarrow f((a_1, b_1), \ldots, (a_i, b_i)) = (f(a_1, \ldots, a_i), f(b_1, \ldots, b_i))$

b) $x \in X \Rightarrow x(a, b) =$ si $a \in A'$ alors $(x(a), \chi'(x_o))$ sinon $(x(a), \chi'(y_o))$ .

(la définition a) implique que les axiomes de $\mathcal{A}$ sont bien vérifiés).
Soit $\overline{\chi} : \mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup X)\mathcal{A}(\{\wedge\}) \to C$ le morphisme obtenu en posant $\overline{\chi}(\wedge) = (\chi_\wedge(\wedge), \chi'(x_o))$ .
Soit $t$ un terme de $\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})\mathcal{A}(\{\wedge\})$ cherchons une interprétation de $\overline{\chi}(t) = (\chi_\wedge(t), \chi''(t))$ .
(d'après a) et b) et l'initialisation $\overline{\chi}(\wedge) = (\chi_\wedge(\wedge), \chi'(x_o))$ , la première composante de $\overline{\chi}(t)$ est bien $\chi_\wedge(t)$). Soit $\varphi : \mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})(\{\wedge\}) \to \mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})\mathcal{A}(\{\wedge\})$ et $\varphi' : \mathfrak{F}(\{x_o, y_o\}) \to \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{x_o, y_o\})$ les projections canoniques, d'après a) et b) on obtient immédiatement que

$$(\forall t)(\forall t')\ (\varphi(t') = t \to \chi''(t) = \chi'(\varphi'(\zeta(t')))) \quad \text{où} \quad \zeta : \mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \overline{X})(\{\wedge\}) \to \mathfrak{F}(\{x_o, y_o\})$$

est l'application définie par

$$\zeta(\wedge) = x_o \ , \ f \in \mathfrak{F}' \cup \mathfrak{F}'' \Rightarrow \zeta(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\zeta(t_1), \ldots, \zeta(t_n))$$

et $\overline{x} \in \overline{X} \Rightarrow \zeta(\overline{x}(t_1)) =$ si $t_1 \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} \wedge$ alors $x_o$ sinon $y_o$ .
Montrons alors que $L = \psi_{0,X}^{-1}(\theta_X(\mathrm{Im}(\psi_X)))$ est reconnu par le triplet $(\overline{\chi}, C, C')$ avec $C' = A \times B'$ .
Une fois ceci montré, le corollaire 5.1.5 et le proposition 5.1.3 donnent immédiatement le résultat cherché.

D'après le lemme 5.1.6, si $t \in L$ , il existe un $t'$ tel que $\varphi(t') = t$ et dans $t'$ l'argument d'une fonction $\overline{x}$ de $\overline{X}$ est toujours $\wedge$ . Donc $\zeta(t') \in \mathfrak{F}(x_o)$ et donc

$$\overline{\chi}(t) = (\ \chi_\wedge(t), \ \chi' \circ \varphi'(\zeta(t')) \in A \times B' = C' \ .$$

Réciproquement supposons que $\overline{\chi}(t) \in C'$ . On en déduit donc que $\varphi'(\zeta\ t')) \in \mathfrak{F}(x_o)$ et donc il existe un terme $t_1$ de $\mathfrak{F}(x_o)$ tel que $\zeta(t') \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} t_1$ . Utilisons la dernière hypothèse qui n'est pas encore utilisée. Comme $\mathfrak{F}'\mathcal{A}$ est quasi-non effaçant on en déduit que

$$\zeta(t') \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} t_1 \Rightarrow \exists t'', t_1' \quad \zeta(t') \underset{\mathcal{A}'}{\overset{*}{\longrightarrow}} t'' \underset{\mathcal{A}''}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} t_1' \underset{\mathcal{A}'}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} t_1 \quad .$$

Le caractère linéaire gauche de $\underset{\mathcal{A}'}{\longrightarrow}$ , puis le caractère conservant de $\underset{\mathcal{A}''}{\longleftrightarrow}$ impliquent que $t_1' \in \mathfrak{F}(x_o)$ puis que $t'' \in \mathfrak{F}(x_o)$ (propositions 3.3.11 et 3.3.2).

D'autre part, on peut trouver un élément $v \in \mathfrak{F}([1,k] \cup [k+1, q] \cup [q+1,n])$ tel que

$$\zeta t' = \bar{v}(\underbrace{\wedge, \ldots, \wedge}_{k \text{ fois}}, x(t_{k+1}), \ldots, x(t_q), x(t_{q+1}), \ldots, x(t_n))$$

avec $k+1 \leqslant i \leqslant q \Rightarrow t_i \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} \wedge$

$q+1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow \text{non}(t_i \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} \wedge)$

Avec cette notation on obtient

$$\zeta(t') = v(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{k \text{ fois}}, \underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{(q-k) \text{ fois}}, \underbrace{y_0, \ldots, y_0}_{(n-q) \text{ fois}})$$

De $\zeta(t') \xrightarrow[\mathcal{A}']{*} t''$ on déduit $t'' = \bar{v}'(\underbrace{x_0, \ldots, x_0}_{q \text{ fois}}, \underbrace{y_0, \ldots, y_0}_{n-q \text{ fois}})$ et $v \xrightarrow[\mathcal{A}']{*} v'$ (lemme 3.3.12).

Mais comme $t'' \in \mathfrak{F}(\{x_0\})$, on a $v' \in \mathfrak{F}([1,q])$, on obtient alors

$$v \xrightarrow[\mathcal{A}']{*} v' \Rightarrow \bar{v}(\wedge, \ldots, \wedge, x(t_{k+1}), \ldots, x(t_n)) \xrightarrow[\mathcal{A}']{*} \bar{v}'(\wedge, \ldots, \wedge, x(t_{k+1}), \ldots, x(t_n))$$

donc $t' \xrightarrow[\mathcal{A}']{*} t'_1 = \bar{v}'(\wedge, \ldots, \wedge, x(t_{k+1}), \ldots, x(t_n))$ et comme $v'$ ne contient pas de variable de $[q+1, n]$, on en déduit que $\varphi(t'_1) = \varphi(t') \in L$ (lemme 5.1.6). CQFD

Commentaire sur ce théorème :

1°) On suppose que $\{\wedge\}$ est reconnaissable dans $\mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup X)\mathcal{A}(\{\wedge\})$ par $(x_\wedge, A, A')$. Manifestement si cela est possible $A'$ est réduit à un point. Une condition suffisante pour que cela soit possible est que l'on puisse trouver une algèbre $A$ contenant un élément $a_0$ tel que

$$(\forall f \in \mathfrak{F}'(\mathfrak{F}'' \cup \bar{X}))\ (f^A(a_1, \ldots, a_k) \neq a_0)$$

Voir à ce propos le lemme 2.4.1 où l'on montre un phénomène de ce genre. D'autre part, toute algèbre ne vérifie pas cette hypothèse, par exemple dans $\mathbb{Z}$ qui est le groupe libre sur la base 1, il est facile de voir que $\{1\}$ n'est pas reconnaissable dans $\mathbb{Z}$.

2°) C'est la deuxième fois que l'on rencontre l'hypothèse vérifiant $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{x_0\})$ reconnaissable dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{x_0, y_0\})$ (cf proposition 3.4.4). Il serait intéressant de savoir caractériser les algèbres vérifiant cette hypothèse ou tout du moins d'avoir un assez large éventail de cas, autre que le cas trivial des algèbres non effaçantes, où cette hypothèse est vraie.

On peut remarquer que cette hypothèse peut en général être remplacée par la suivante :

$\mathfrak{F}\mathcal{A}(\emptyset)$ est reconnaissable dans $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{x_0\})$ et $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\emptyset) \neq \emptyset$ et une fonction de $\mathfrak{F}$ au moins n'a pas d'occurrence dans les axiomes (les démonstrations dans ce cas sont du même genre, mais il faut modifier le lemme 3.3.12 en utilisant la remarque 3 suivant le lemme 3.3.7).

## 5.2.- Evolution des sous-ensembles algébriques dans la transformation.

La définition des sous ensembles algébriques d'une algèbre libre a été donnée au paragraphe 3.8. Nous allons montrer ici que sous quelques hypothèses raisonnables, la transformation de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ en $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ fait croître strictement l'ensemble des sous-ensembles algébriques. Cette démonstration est moins simple que celle du précédent paragraphe. On notera $\mathcal{A}lg(\mathfrak{F}\mathcal{A}(X))$ l'ensemble des sous-ensembles algébriques de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(X)$.

Proposition 5.2.1 :

Soit $L$ un sous ensemble algébrique de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ alors $\psi_0(L)$ est un sous ensemble algébrique de $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$. C'est à dire $\psi_0(\mathcal{A}lg(\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\}))) \subset \mathcal{A}lg(\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset))$.



Démonstration :

Cette proposition découle immédiatement de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(\{\wedge\}) \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{F}_1(\emptyset) \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\}) \arrow[r, "\psi_0"] & \mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)
\end{tikzcd}$$

Donc si $L$ est un sous ensemble de $\mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ vérifiant $L = \varphi(L(G))$ où $G$ est une $\mathfrak{F}$-grammaire algébrique, alors $\psi_0(L) = \varphi_1(L(\psi'(G)))$ où $\psi'(G)$ désigne la $\mathfrak{F}_1$-grammaire algébrique obtenue à partir de $G$ en transformant chaque second membre de règle par $\psi'$.

Rappelons que $\mathfrak{F}'' = (\emptyset, F''_1, \ldots, F''_n)$ est formée de fonctions sur lesquelles ne portent pas d'axiomes, soit $\varphi'' : \mathfrak{F}''(\{\wedge\}) \to \mathfrak{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ la projection canonique.

Lemme 5.2.2 :

Sauf dans le cas où la structure d'algèbre est inconsistante, l'application $\varphi$ est une injection.

Démonstration :

Il suffit de démontrer que si $\alpha$ et $\beta$ sont deux termes de $\mathfrak{F}''(\{\wedge\})$ alors

$$\alpha \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} \beta \Rightarrow \alpha = \beta .$$

Cette implication semble une banalité. On l'a d'ailleurs utilisée souvent dans le cas particulier où $\alpha$ est une constante sur laquelle ne porte pas d'axiomes. Malgré cela l'auteur n'a pas trouvé de démonstration particulièrement simple.

Commençons par démontrer un lemme de confluence.

Supposons qu'un terme $\alpha'$ de $\mathfrak{F}(\{\wedge\})$ s'écrive

$$\alpha' = \tilde{u}(f(t_1, \ldots, t_k)) \quad \text{avec} \quad u \in \mathfrak{F}(\{\wedge, 1\}) \text{ et } f \in \mathfrak{F}'' .$$

Supposons que l'on applique sur $\alpha'$ des axiomes dans la "zone" $u$ de $\alpha$. On obtiendra

$$\alpha' \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} \tilde{v}(f(t_1, \ldots, t_k) \quad \text{avec} \quad v \in \mathfrak{F}(\{\wedge, 1\}) \text{ et } u \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} v .$$

Supposons maintenant que l'on applique des axiomes sur les $t_i$ on obtiendra

$$\alpha' \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} \tilde{u}(f(t'_1, \ldots, t'_k)) \quad \text{avec} \quad t_i \xleftrightarrow[\mathcal{A}]{*} t'_i .$$

Donc

$$\begin{tikzcd}
\alpha' \arrow[r, leftrightarrow, "*", "\mathcal{A}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathcal{A}"', "*"] & \alpha_1 = \tilde{v}(f(t_1, \ldots, t_k)) \\
\tilde{u}(f(t'_1, \ldots, t'_k)) = \alpha_2 &
\end{tikzcd}$$

On en déduit immédiatement que l'on peut en appliquant $\underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}}$ refermer le diagramme pour obtenir

$$\begin{tikzcd} \alpha' \arrow[r, leftrightarrow, "*", "\mathcal{A}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "*"', "\mathcal{A}"] & \alpha_1 \arrow[d, leftrightarrow, "\mathcal{A}"', "*"] \\ \alpha_2 \arrow[r, leftrightarrow, "*", "\mathcal{A}"'] & \tilde{v}(f(t'_1,\ldots,t'_k)) \end{tikzcd} \quad .$$

Revenons maintenant au problème initial. Supposons qu'il existe un plus petit terme $\alpha$ de $\mathcal{F}''(\{\wedge\})$ tel que l'on ait $(\exists\, \beta \in \mathcal{F}''(\{\wedge\}))\ (\alpha \overset{*}{\longleftrightarrow} \beta$ et $\alpha \neq \beta)$ .

On a donc $\alpha = \alpha_0 \underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow} \alpha_1 \underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow} \alpha_2 \cdots \underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow} \alpha_q = \beta$ .

Grâce au lemme de confluence ci-dessus , on peut supposer que les premiers axiomes ont été appliqués en tête ( $\alpha$ étant manipulé globalement) et qu'ensuite seuls des sous termes de $\alpha$ ont été affectés par les axiomes.
Soit $\alpha_{i_0}$ le dernier de la suite $\alpha_i$ obtenue en manipulant $\alpha$ globalement .

<u>1er cas</u> :

$\alpha_{i_0} = \alpha = g''(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_k)$ , maintenant les applications des axiomes vont porter sur $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_k$ et par hypothèse avec ces sous termes de $\alpha$ , on ne peut pas obtenir un élément $\alpha''_i$ tel que

$$\alpha'_i \overset{*}{\longleftrightarrow} \alpha''_i \quad \text{et} \quad \alpha''_i \in \mathcal{F}''(\{\wedge\}) \quad \text{et} \quad \alpha''_i \neq \alpha'_i$$

Dans ce premier cas on en déduit que $\alpha = \beta$ d'où une contradiction avec $\alpha \neq \beta$ .

<u>2ème cas</u> :

$\alpha_{i_0} \neq \alpha$ . Comme $\alpha$ a été manipulé globalement par les axiomes, pour $i$ appartenant à $[0, i_0]$ on a $\alpha_i = \tilde{t}_i(\alpha)$ où $t_i$ est un terme de $\mathcal{F}'(\{1\})$ . Si pour $\alpha_{i_0}$ , $t_{i_0}$ contient la variable 1, c'est à dire si $\alpha$ apparaît effectivement dans $\alpha_i$ , les axiomes de $\mathcal{A}$ en agissant sur des sous termes de $\alpha$ ne pourront pas détruire les symboles de $\mathcal{F}'$ apparaissant dans $t_{i_0}$ et on ne pourra pas obtenir $\alpha_n = \beta \in \mathcal{F}''(\{\wedge\})$ . On en déduit que $\alpha$ n'apparaît pas explicitement dans $\alpha_{i_0}$ et donc que $t_{i_0} \in \mathcal{F}'(\emptyset)$ . Comme $\alpha$ a été manipulé globalement, on obtient en remplaçant $\alpha$ par une variable $x$ quelconque et en appliquant les mêmes axiomes que $x \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} \alpha_{i_0}$ .

Dans ce cas la structure de $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre est inconsistante.

Dans la suite on supposera que la structure de $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre est consistante et on identifiera $\mathcal{F}''(\{\wedge\})$ et $\varphi''(\mathcal{F}''(\wedge))$ .

<u>Lemme 5.2.3</u> :

Soit $L$ un sous ensemble algébrique de $\mathcal{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ contenu dans $\mathcal{F}''(\{\wedge\})$ . Il existe alors une $\mathcal{F}''$-grammaire engendrant $L$ .

<u>Démonstration</u> :

Soit $G = (N, T, \to, X)$ une $\mathcal{F}$-grammaire engendrant $L$ , il faut trouver une $\mathcal{F}''$-grammaire équivalente à $G$ . On peut évidemment supposer $G$ réduite inférieurement et supérieurement. Pour chaque non terminal $A \in N$ considérons le langage $L_A$ engendré par la $\mathcal{F}'$-grammaire $G_A = (N', T \cup N, \twoheadrightarrow, A')$ définie par



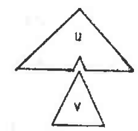
$N'$ est en bijection avec $N$ par la bijection $B \rightleftarrows B'$

$$B' \longrightarrow f(A''_1,\ldots,A''_i) \Longleftrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{F}' \text{ et} \\ (A''_k = A_k \in N \text{ ou } A''_k = A'_k \in N') \text{ et } B \longrightarrow f(A_1,\ldots,A_i) \\ \text{est une règle de } G \text{ et } A''_k \in N \Rightarrow \begin{cases} \text{il existe dans } G \text{ une règle de} \\ \text{premier membre } A''_k \text{ et de second} \\ \text{membre de type } \mathcal{F}'' \ . \end{cases} \end{cases}$$

Le langage $L_A$ est un sous ensemble de $\mathcal{F}'(N)$ , soit $N_A$ l'ensemble des éléments de $N$ tels que

$$B \in N_A \Longleftrightarrow (\exists \alpha \in L_A)\ (B \underset{\mathcal{A}}{\overset{*}{\longleftrightarrow}} \alpha) \quad .$$

Soit $\beta$ un élément de $L(G)$ , considérons une dérivation de $X$ à $\beta$ et dans cette dérivation considérons la première réécriture qui utilise une règle qui n'est pas de type $\mathcal{F}''$ et qui réécrit un non terminal $A$ . Perturbons l'ordre des réécritures dans cette dérivation de façon à utiliser d'abord sur $A$ toutes les réécritures de type $\mathcal{F}'$ . On obtient alors un terme $\beta'$ de la forme suivante




avec $u \in \mathcal{F}''(1)$ (1 étant un marqueur permettant de greffer $v$ en dessous de $u$ ) , $v \in \mathcal{F}'(N)$ et de plus $v$ est dans $L_A$ . Comme $\beta'$ doit par dérivation donner $\beta$ et que $\beta$ modulo les axiomes de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{F}''(\emptyset)$ , il est nécessaire que $v$ se réduise à une variable de $N$ modulo les axiomes de $\mathcal{A}$ . Le phénomène se poursuit tout au long de la dérivation conduisant à $\beta$ . Donc finalement on obtient une grammaire $G'$ équivalente à $G$ en transformant $G$ de la manière suivante :

i) On supprime dans $G$ toutes les règles de la forme $A \longrightarrow f(A_1,\ldots,A_n)$ avec $f \in \mathcal{F}'$

ii) On rajoute toutes les règles $A \to B$ avec $B \in N_A$

iii) On supprime à l'aide l'algorithme classique sur les grammaires algébriques les règles $A \to B$

iv) On réduit supérieurement la grammaire obtenue si on désire une grammaire réduite.

La grammaire obtenue est alors de type $\mathcal{F}''$ .

<u>Remarque</u> :

Le procédé de construction de $G'$ à partir de $G$ n'est pas effectif malgré les apparences. En effet la construction de $N_A$ à partir de $L_A$ est dans le cas général non effective.

<u>Théorème 5.2.4</u> :

Si $\bigcup_{i=1}^{n} F''_i$ contient au moins deux éléments et si la structure de $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre est consistante, alors $\psi_0(\mathcal{A}lg(\mathcal{F}\mathcal{A}(\wedge))) \subsetneq \mathcal{A}lg(\mathcal{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset))$ . C'est à dire qu'il existe un ensemble algébrique $L'$ dans $\mathcal{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ tel que pour aucun $L$ algébrique dans $\mathcal{F}\mathcal{A}(\{\wedge\})$ on ait $\psi_0(L) = L'$ .

<u>Démonstration</u> :

L'inclusion au sens large a déjà été vue à la proposition 5.2.1. Les lemmes 5.2.2 et 5.2.3 conduisent à travailler dans $\mathcal{F}''(\{\wedge\})$ . Comme les sous ensembles algébriques de $\mathcal{F}''(\{\wedge\})$ sont engendrés par des grammaires de type $\mathcal{F}''$ et qu'aucun axiome ne porte sur ces fonctions, on en déduit que les représentations arborescentes des éléments d'un sous ensemble algébrique de $\mathcal{F}''(\{\wedge\})$ forment un bilangage régulier. Pour démontrer le théorème 5.2.4, il suffit donc de construire un sous ensemble algébrique L de $\mathcal{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$ tel que $\psi^{-1}(L)$ soit contenu dans $\mathcal{F}''(\{\wedge\})$ et ne soit pas un bilangage régulier.

Soit $f \in F''_i$ et $g \in F''_j$ deux fonctions d'accès distinctes (par hypothèse, il existe deux telles fonctions). Considérons la $\mathcal{F}'$-grammaire $G = (N, T, \longrightarrow, X)$ telle que

- $N = \{X\}$
- $T = \{\wedge, f, g\}$
- la relation $\rightarrow$ est définie par

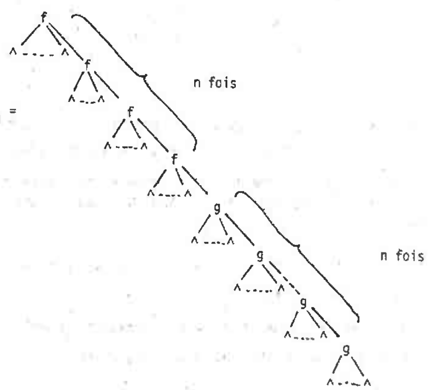
$$X \longrightarrow f(\underbrace{\wedge,\ldots,\wedge}_{(i-1)\text{ fois}}) + X + g(\underbrace{\wedge,\ldots,\wedge}_{(j-1)\text{ fois}}) \mid \wedge$$

Il est facile de voir que G engendre les expressions

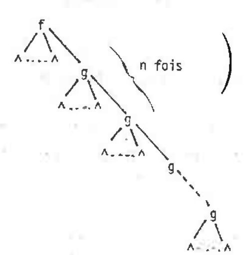
$$\alpha_n = (f(\wedge,\ldots,\wedge)+)^n + \quad (+\ g(\wedge,\ldots,\wedge))^n \quad .$$

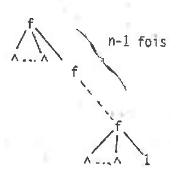
On démontre d'autre part que $\alpha_n = \psi(\beta_n)$ , $\beta_n$ étant représenté par la ramification suivante

$\beta_n =$




Donc $L' = \psi^{-1}(L) = \{\beta_n,\ n \geq 0\}$ et ce bilangage n'est manifestement pas régulier. En effet en utilisant les notations du paragraphe 1.5.6 on obtient

$D_{L'}$ (  ) =


et donc l'ensemble $\{\ D_{L'}(\alpha)\ ;\ \alpha \in \hat{T}\ \}$ est infini et L' n'est pas régulier.



Remarque :

l'hypothèse du théorème 5.2.4 disant que $\bigcup_{i=1}^{n} F''_i$ contient au moins deux éléments est nécessaire dans le cas général. En effet si on applique cette méthode au V-algèbres monadiques avec V réduit à un élément, on n'augmente pas l'ensemble des sous ensembles algébriques puisqu'il est bien connu en théorie des langages que les langages algébriques sur un vocabulaire à une lettre sont en fait réguliers.
L'évolution des sous ensembles algébriques quand on utilise le $\mathcal{F}\mathcal{A}$-morphisme $\psi_X : \mathcal{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \rightarrow \mathcal{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ est plus facile que pour les sous ensembles reconnaissables grâce à la proposition suivante

Proposition 5.2.5 :

Soit X et Y tels que $X \subseteq Y$ et $i : \mathcal{F}\mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{A}(Y)$ l'injection canonique. Soit L un sous ensemble algébrique de $\mathcal{F}\mathcal{A}(Y)$ , alors L est un sous ensemble algébrique de $\mathcal{F}\mathcal{A}(X)$ si et seulement si L est contenu dans $\mathcal{F}\mathcal{A}(X)$ .

Démonstration :

Si L est algébrique dans $\mathcal{F}\mathcal{A}(X)$ , L l'est aussi dans $\mathcal{F}\mathcal{A}(Y)$ et est engendré par la même grammaire.

Supposons maintenant que L soit algébrique dans $\mathcal{F}\mathcal{A}(Y)$ et que L soit contenu dans $\mathcal{F}\mathcal{A}(X)$ . Soit $G = (N, T, \rightarrow, x)$ une $\mathcal{F}$-grammaire engendrant L' tel que $L = \varphi(L')$ avec $\varphi : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{A}(Y)$ . Si la grammaire G ne contient pas de règle de la forme $A \rightarrow y$ avec $y \in Y\text{-}X$ le problème est résolu et nous allons montrer que l'on peut se ramener à ce cas. Supposons donc que la grammaire G contienne des règles de la forme $A \rightarrow y$ avec $y \in Y\text{-}X$ . Soit $t \in \mathcal{F}(Y)$ engendré par G , comme par hypothèse $L \subseteq \mathcal{F}\mathcal{A}(X)$ , on en déduit qu'il existe $t' \in \mathcal{F}(X)$ tel que $t \overset{*}{\underset{\mathcal{A}}{\longleftrightarrow}} t'$ . C'est à dire que les variables de Y-X qui apparaissent dans t sont en fait inefficaces et qu'en utilisant les axiomes on peut les effacer. En remontant la chaîne de réécriture de t' à t , quand on rencontre le ou les axiomes qui ont introduit des variables de Y-X , on peut, sans changer l'image par $\varphi$ des termes considérés, renommer ces variables en les remplaçant par un $x \in X$ (ou si $X = \emptyset$ par une constante de $F_0$ ) .
Donc dans la grammaire G , si on remplace toutes les règles $A \rightarrow y$ avec $y \in Y\text{-}X$ par $A \rightarrow x$ avec $x \in X$ (ou $A \rightarrow a$ avec $a \in F_0$) , on va générer un langage $L'_s$ vérifiant $\varphi(L'_s) = \varphi(L') = L$ et donc L est algébrique dans $\mathcal{F}\mathcal{A}(X)$ .
On déduit de cette proposition la généralisation suivante du théorème 5.2.4.

Théorème 5.2.6 :

Si $\bigcup_{i=1}^{n} F''_i$ contient au moins deux éléments et si la structure de $\mathcal{F}\mathcal{A}$-algèbre est consistante, il existe un sous ensemble algébrique L de $\mathcal{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ contenu dans l'image de $\psi_X : \mathcal{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X) \rightarrow \mathcal{F}_1\mathcal{A}_1(X)$ tel que $\psi_X^{-1}(L)$ n'est pas algébrique dans $\mathcal{F}\mathcal{A}(\{\wedge\} \cup X)$ .

Démonstration :

D'après la proposition 5.2.5 le sous ensemble L construit pour démontrer le théorème 5.2.4 répond aux conditions du théorème.

## 6.- ITERATION DE LA TRANSFORMATION ET CONSTRUCTION DE HIERARCHIE

La transformation introduite au paragraphe 4 n'introduit pas d'axiome sur les fonctions dont l'arité baisse. On peut réitérer cette transformation avec quelques précautions car évidemment les fonctions dont l'arité est arrivée à 0 ne peuvent plus voir leur arité baisser. Commençons par étudier les structures que l'on obtient en itérant la transformation.

### 6.1.- Itération de la transformation

Reprenons,en les modifiant légèrement les notations du paragraphe 4.

Soit $\mathfrak{F}_0\mathcal{A}_0 = \mathfrak{F}'_0\mathfrak{F}''_0\mathcal{A}_0$ une structure d'algèbre transformable, on a $\mathfrak{F}'_0 = (F_{0,0}, F'_{1,0}, \ldots, F'_{n,0})$ et $\mathfrak{F}''_0 = (\emptyset, F''_{1,0}, \ldots, F''_{n,0})$ . La transformée $\mathfrak{F}_1\mathcal{A}_1$ de $\mathfrak{F}_0\mathcal{A}_0$ est la structure d'algèbre suivante

$$\mathfrak{F}_1 = (F_{0,0} \cup F''_{1,0} \cup \{\wedge_1\},\ F'_{1,0} \cup F''_{2,0},\ F'_{2,0} \cup F''_{3,0} \cup \{+_1\},\ F''_{3,0} \cup F''_{4,0}, \ldots, F'_{n-1,0} \cup F''_{n,0},\ F'_{n,0})$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}''_1$$

Si on écrit $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}'_1 \cup \mathfrak{F}''_1$ avec

$$\mathfrak{F}'_1 = (F_{0,1}, F'_{1,1}, \ldots, F'_{n,1}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}''_1 = (\emptyset, F''_{1,1}, \ldots, F''_{n-1,1}, \emptyset) \quad \text{et}$$

$$F_{0,1} = F_{0,0} \cup F''_{1,0} \cup \{\wedge_1\} \quad \text{et} \quad (\forall i \in [1, n-1] \quad F'_{i,1} \supseteq F'_{i,0}) \quad \text{et} \quad (+_1 \in F'_{2,1})$$

on obtient une structure d'algèbre transformable dont la transformée est $\mathfrak{F}_2\mathcal{A}_2$ . Comme on le voit on a prévu que dans la deuxième transformation, il se peut que certaines fonctions qui ont perdu une arité dans la première transformation n'en perdent plus dans la deuxième.

Plus formellement pour itérer la transformation sur une structure d'algèbre, on se donnera les objets suivants :

1°) Une structure d'algèbre transformable $\mathfrak{F}_0\mathcal{A}_0 = \mathfrak{F}'_0\mathfrak{F}''_0\mathcal{A}_0$

2°) Une fonction $d : \bigcup_{i=0}^{n} F_i \to [0,n]$ telle que

$$f \in F_{0,0} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} F'_{i,0}\right) \Rightarrow d(f) = 0$$

$$f \in \bigcup_{i=1}^{n} F''_{i,0} \Rightarrow 1 \leqslant d(f) \leqslant a(f)$$

($a(f)$ désignant l'arité de $f$) .

La fonctions $d$ donne le nombre d'arité qui va être perdu par les fonctions dans les transformations successives.

A l'aide de ces deux données on définit une suite $\mathfrak{F}_k\mathcal{A}_k = \mathfrak{F}'_k\mathfrak{F}''_k\mathcal{A}_k$ de structures d'algèbres grâce à la récurrence suivante (voir en parallèle les explications qui suivent et qui facilitent la lecture).

1°) $\mathfrak{F}_k = (F_{0,k}, F_{1,k}, \ldots, F_{n,k})$

2°) $\mathfrak{F}'_k = (F'_{0,k}, \ldots\ldots\ldots, F'_{n,k})$

3°) $\mathfrak{F}''_k = (F''_{0,k}, \ldots\ldots\ldots, F''_{n,k})$

4°) $F'_{0,0} = F_{0,0}$ et $F''_{0,0} = \emptyset$ et par convention $i \geqslant n+1 \Rightarrow F''_{i,0} = \emptyset$

5°) $k \geqslant 1 \Rightarrow F_{0,k} = F'_{0,k} \cup F''_{0,k} \cup \{\wedge_k\}$

6°) $k \geqslant 1 \Rightarrow F_{2,k} = F'_{2,k} \cup F''_{2,k} \cup \{+_k\}$

7°) $i \neq 0$ ou $i \neq 2 \Rightarrow F_{i,k} = F'_{i,k} \cup F''_{i,k}$

8°) $k \geqslant 1 \Rightarrow F'_{0,k} = F_{0,k-1}$ et $F''_{0,k} = \{ f \,;\, f \in F''_{1,k-1}$ et $d(f) \geqslant k \}$



9°) $k \geqslant 1 \Rightarrow F'_{2,k} = F'_{2,k-1} \cup \{f \,;\, f \in F''_{2,k-1}$ et $d(f) = k-1\} \cup \{+_{k-1}\}$ et

$F''_{2,k} = \{f \,;\, f \in F''_{3,k-1}$ et $d(f) \geqslant k \}$

(avec la convention $\{+_0\} = \emptyset$ )

10°) $k \geqslant 1$ et $(i \neq 0$ ou $i \neq 2) \Rightarrow F'_{i,k} = F'_{i,k-1} \cup \{f \,;\, f \ \ F''_{i,k-1}$ et $d(f) = k-1\}$ et

$F''_{i,k} = \{f \,;\, f \in F''_{i+1,k-1}$ et $d(f) \geqslant k \}$

11°) $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{k-1} \cup \mathcal{A}''_k$ où $\mathcal{A}''_k$ est l'ensemble d'axiomes suivants

12°) $$\mathcal{A}''_k \quad \begin{cases} \wedge_k +_k x = x & \text{i)} \\ x +_k \wedge_k = x & \text{ii)} \\ a \in F'_{0,k} \Rightarrow a +_k x = a & \text{iii)} \\ f \in F'_{i,k} \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i) +_k y = f(x_1 +_k y, \ldots, x_i +_k y) & \text{iv)} \\ (x +_k y) +_k z = x +_k (y +_k z) & \text{v)} \end{cases}$$

Ces 12 définitions sont un peut "indigestes" à première lecture, expliquons les plus importantes pour se persuader que l'on obtient bien ce que l'on désire.

Les points 1°), 2°), 3°) mettent en place les notations.

Le point 4°) correspond à des initialisations.

Aux points 5°) et 6°) on introduit les deux nouvelles fonctions $\wedge_k$ et $+_k$ ajoutées par la transformation.

Aux point 8°), les fonctions constantes du rang $k-1$ , c'est à dire $F_{0,k-1}$ , ne perdent plus d'arité et sont absorbantes à gauche pour le nouvel opérateur $+_k$ (axiome iii)) . D'autre part, les fonctions d'arité 1 du rang $k-1$ dont l'arité peut encore baisser fournissent d'autres constantes sur lesquelles ne portent pas d'axiomes.

Les points 9°) et 10°) sont similaires sauf que dans $F'_{2,k}$ on doit intégrer l'opérateur $+_{k-1}$ introduit à la transformation précédente. Dans les deux cas $F'_{i,k}$ contient les fonctions du rang $k-1$ de même arité et qui n'ont pas perdu d'arité au rang $k-1$ plus les fonctions de $F''_{i,k-1}$ qui ne peuvent plus perdre d'arité car $d(f) = k-1$ . Dans $F''_{i,k}$ on trouve les fonctions du rang $k-1$ ayant une arité supplémentaire et qui ont encore le droit de perdre des arités $(d(f) \geqslant k)$ .

Les points 11°) et 12°) donnent les nouveaux axiomes introduits par la kième transformation (cf définition 4.1.2).

On peut expliciter complètement les axiomes de $\mathcal{A}_k$ en effet on obtient immédiatement

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}''_1 \cup \mathcal{A}''_2 \cup \ldots\ldots \cup \mathcal{A}''_k$$

Posons $\mathcal{A}'_k = \mathcal{A}''_1 \cup \mathcal{A}''_2 \cup \ldots\ldots \cup \mathcal{A}''_k$ , cet ensemble est formé des axiomes suivants ( $a(f)$ désigne l'arité de $f$ en tant qu'élément de $\mathfrak{F}_o$ ) .

$$\forall i \in [1, k] \quad \wedge_i +_i x = x$$

$$\forall i \in [1, k] \quad x +_i \wedge_i = x$$

$$(\forall i \in [1,k])(d(f) \leqslant i-1 \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_{a(f)-d(f)}) +_i y = f(x_1 +_i y, \ldots, x_{a(f)-d(f)} +_i y))$$

$$(\forall i,j \in [1, k])(i < j \Rightarrow (x +_i y) +_j z = (x +_j z) +_i (x +_j z))$$

$$(\forall i,j \in [1, k])(i < j \Rightarrow \wedge_i +_j x = \wedge_i)$$

$$\forall i \in [1, k] \quad (x +_i y) +_i z = x +_i (y +_i z) \quad .$$

On peut orienter ces axiomes pour obtenir un système de réécriture $\xrightarrow[\mathcal{A}'_k]{}$ . On obtient

$$\xrightarrow[\mathcal{A}'_k]{} \quad \begin{cases} \forall i \in [1, k] \quad \wedge_i +_i x \to x \\ \forall i \in [1, k] \quad x +_i \wedge_i \to x \\ (\forall i \in [1, k])\ (d(f) < i-1 \Rightarrow f(x_1, \dots, x_{a(f)-d(y)}) +_i y \to f(x_1 +_i y, \dots, x_{a(f)-d(f)} +_i y)) \\ (\forall i, j \in [1, k])(i < j \Rightarrow (x +_i y) +_j z \to (x +_j z) +_i (x +_j z)) \\ (\forall i, j \in [1, k])(i < j \quad \wedge_i +_j x \longrightarrow \wedge_i) \\ (\forall i \in [1, k])\ ((x +_i y) +_i z \longrightarrow x +_i (y +_i z)) \quad . \end{cases}$$

En employant les mêmes techniques qu'au paragraphe 4.2, on obtient facilement

Lemme 6.1.1 :

Le système de réécriture $\xrightarrow[\mathcal{A}'_k]{}$ est localement confluent

Lemme 6.1.2 :

Le système de réécriture $\xrightarrow[\mathcal{A}'_k]{}$ est noethérien

Démonstration :

Il suffit d'appliquer les propositions 3.2.3 et 3.2.5 en supposant $+_1 < +_2 < \dots < +_k$

Corollaire 6.1.3 :

Le système de réécriture $\xrightarrow[\mathcal{A}'_k]{}$ est confluent.

D'autre part, en appliquant le lemme 3.1.8 et le corollaire 4.2.5 on obtient

Lemme 6.1.4 :

La relation $\xrightarrow[\mathcal{A}'_k]{}$ est fortement confluente modulo $\overset{*}{\underset{\mathcal{A}_0}{\longleftrightarrow}}$

Les lemmes 6.1.2 et 6.1.3 impliquent que chaque terme de $\mathfrak{F}_k(X)$ a une forme normale pour le système de réécriture $\xrightarrow[\mathcal{A}'_k]{}$ et on peut démontrer comme dans le lemme 4.2.6 que l'ensemble des formes normales de $\mathfrak{F}_k(X)$ est engendré par la $\mathfrak{F}_k$-grammaire $G_k$ suivante :

$$G_k = (\{A, A_1, \dots, A_k, A'_1, \dots, A'_k\} \quad , \bigcup_{i=0}^{n} F_{i,k} \cup X, \to , A)$$

Posons $\Lambda = \{\wedge_1, \dots, \wedge_k\}$ , $\boldsymbol{+} = \{+_1, \dots, +_k\}$ et $F_k = \bigcup_{i=0}^{n} F_{i,k} - (\boldsymbol{\Lambda} \cup \boldsymbol{+})$

Alors les règles de $G_k$ sont

$$G_k \quad \begin{cases} A \longrightarrow f(A, \dots, A) & \text{pour} \quad f \in F_k \\ A \longrightarrow \wedge \mid x & \text{pour} \quad \wedge \in \Lambda \quad \text{et} \quad x \in X \\ A \longrightarrow +_i(A_i, A'_i) & \text{pour} \quad i \in [1, k] \\ A_i \longrightarrow f(A, \dots, A) & \text{pour} \quad f \in F_k \quad \text{et} \quad i \in [1, k] \quad \text{et} \quad d(f) \geq i \\ A_i \longrightarrow +_j(A_j, A'_j) & \text{pour} \quad i \in [1, k] \quad \text{et} \quad j \in [1, k] \quad \text{et} \quad i < j \\ A_i \longrightarrow \wedge_j & \text{pour} \quad i \in [1, k] \quad \text{et} \quad j \in [1, k] \quad \text{et} \quad i < j \\ A_i \longrightarrow x & \text{pour} \quad x \in X \\ A'_i \longrightarrow f(A, \dots, A) & \text{pour} \quad f \in F_k \quad \text{et} \quad i \in [1, k] \\ A'_i \longrightarrow +_j(A_j, A'_j) & \text{pour} \quad i \in [1, k] \quad \text{et} \quad j \in [1, k] \\ A'_i \longrightarrow \wedge & \text{pour} \quad \wedge \in (\Lambda - \{\wedge_i\}) \quad \text{et} \quad i \in [1, k] \\ A'_i \longrightarrow x & \text{pour} \quad x \in X \end{cases}$$



(l'arité des fonctions de $F_k$ n'est pas précisée dans les règles ci-dessus, il est facile de voir que l'arité de $f$ appartenant à $F_k$ dans la structure de $\mathfrak{F}_k$-algèbre est $a(f) - \inf(d(f), k) = a_k(f))$ .

La démonstration du fait que $G_k$ engendre bien les formes normale est évidemment longue et fastidieuse, mais elle n'est pas difficile et est sans grand intérêt.
Si on particularise les propriétés de $\mathcal{A}_0$ on obtient alors

Proposition 6.1.5 :

1°) Si $\mathcal{A}_0$ est un système d'axiomes non effaçants alors $\mathfrak{F}_k \mathcal{A}_k$ est une structure d'algèbre quasi-non effaçante

2°) Si $\mathfrak{F}_0 \mathcal{A}_0$ est une structure d'algèbre quasi-non effaçante alors $\mathfrak{F}_k \mathcal{A}_k$ est aussi une structure d'algèbre quasi-non effaçante

Démonstration :

1°) Le système de réécriture $\xrightarrow[\mathcal{A}'_k]{}$ est linéaire gauche et donc si $\mathcal{A}_0$ est non effaçant le lemme 6.1.4 prouve le caractère quasi-non effaçant de $\mathfrak{F}_k \mathcal{A}_k$

2°) Si $\mathfrak{F}_0 \mathcal{A}_0$ est seulement quasi-non effaçante, il suffit d'appliquer en plus le lemme 3.1.8 pour obtenir le caractère quasi-non effaçant de $\mathfrak{F}_k \mathcal{A}_k$ .

6.2.- Utilisation de l'itération de la transformation pour construire des hiérarchies.

Pour utiliser les isomorphismes mis en évidence au théorème 4.4.1, nous avons besoin de particulariser un élément de la base de la première algèbre.
On peut procéder de deux manières différentes. Dans une première méthode on oblige la transformation elle-même à produire cet élément particulier. Dans une deuxième méthode on introduit cet élément particulier quand on en a besoin. Explicitons ces deux procédés.

6.2.1. - Première méthode de construction de hiérarchies.

Le théorème 5.2.4 prouvant la croissance stricte de l'ensemble des sous ensembles algébrique demande dans ses hypothèses que deux fonctions au moins perdent une arité. Donc si $\mathfrak{F}_0 \mathcal{A}_0$ est une structure d'algèbre transformable avec $\mathfrak{F}_0 = (F_{0,0}, \dots, F_{n,0})$ , le théorème 5.2.4 ne donnera à priori des résultats que pour les $n$ premières transformations. Supposons que l'on veuille construire une hiérarchie de longueur $k$ $(k \leq n)$ , on procède de la manière suivante :

1°) On considère des symboles $\wedge_1, \wedge_2, \dots, \wedge_k$ et on pose $\boldsymbol{\Lambda}_{i,k} = (\wedge_i, \dots, \wedge_k)$ .

Par définition

$$\mathfrak{F}_0 \underset{j}{\cup} \wedge_{i,k} = (F_{0,0}, \dots, F_{j-1,0}, F_{j,0} \cup \{\wedge_i\}, \dots, F_{j+k-i,0} \cup \{\wedge_k\}, F_{j+k-i+1,0}, \dots, F_{n,0})$$

2°) On part de la structure de $(\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \boldsymbol{\Lambda}_{1,k})\mathcal{A}_0$ algèbre, comme $\wedge_1$ est une constante sur laquelle ne porte pas d'axiome, on obtient l'isomorphisme

$$\theta_0 : (\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \boldsymbol{\Lambda}_{1,k})\ \mathcal{A}_0(\emptyset) \Longleftrightarrow (\mathfrak{F}_0 \underset{1}{\cup} \boldsymbol{\Lambda}_{2,k})\ \mathcal{A}_0(\{\wedge_1\}) \quad .$$

D'autre part, on définit une fonction $d : \mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \boldsymbol{\Lambda}_{1,k} \to [0,n]$ comme au paragraphe 6.1 et on impose $d(\wedge_i) = i-1$ .

3°) On applique la transformation à la structure de $(\mathcal{F}_0 \underset{0}{\cup} \Lambda_{1,k})\mathcal{A}_0$ algèbre en appelant évidemment $\Lambda_1$ l'élément neutre de l'opération $+_1$ introduite par la transformation et d'autre part en faisant baisser l'arité de chacun des $\Lambda_i$ pour $i \geqslant 2$. On obtient alors en appliquant le théorème 4.4.1 un isomorphisme $\psi_1$

$$\psi_1 : (\mathcal{F}_0 \underset{1}{\cup} \Lambda_{2,k})\mathcal{F}_0(\{\Lambda_1\}) \longrightarrow (\mathcal{F}_1 \underset{0}{\cup} \Lambda_{2,k})\mathcal{A}_1(\emptyset) \quad .$$

Comme on le voit immédiatement on peut recommencer sur $(\mathcal{F}_1 \underset{0}{\cup} \Lambda_{2,k})\mathcal{A}_1(\emptyset)$ le point 2°)

On obtient donc la suite d'isomorphisme suivante

$$(\mathcal{F}_0 \underset{0}{\cup} \Lambda_{1,k})\mathcal{A}_0(\emptyset) \xrightarrow{\theta_0} (\mathcal{F}_0 \underset{1}{\cup} \Lambda_{2,k})\mathcal{A}_0(\Lambda_1)$$

$$\downarrow \psi_1$$

$$(\mathcal{F}_1 \underset{0}{\cup} \Lambda_{2,k})\mathcal{A}_1(\emptyset) \xrightarrow{\theta_1} (\mathcal{F}_1 \underset{1}{\cup} \Lambda_{3,k})\mathcal{A}_1(\Lambda_2)$$

$$\downarrow \psi_2$$

$$(\mathcal{F}_2 \underset{0}{\cup} \Lambda_{3,k})\mathcal{A}_2(\emptyset) \xrightarrow{\theta_2}$$

$$(\mathcal{F}_{i-1} \underset{0}{\cup} \Lambda_{i,k})\mathcal{A}_{i-1}(\emptyset) \xrightarrow{\theta_{i-1}} (\mathcal{F}_{i-1} \underset{1}{\cup} \Lambda_{i+1,k})\mathcal{A}_{i-1}(\Lambda_i)$$

$$\downarrow \psi_i$$

$$(\mathcal{F}_i \underset{0}{\cup} \Lambda_{i+1,k})\mathcal{A}_i(\emptyset) \xrightarrow{\theta_i}$$

$$(\mathcal{F}_{k-1} \underset{0}{\cup} \Lambda_{k-1,k})\mathcal{A}_{k-1}(\emptyset) \xrightarrow{\theta_{k-1}} \mathcal{F}_{k-1}\mathcal{A}_{k-1}(\Lambda_k)$$

$$\downarrow \psi_k$$

$$\mathcal{F}_k\mathcal{A}_k(\emptyset) \quad .$$

Comme les isomorphismes $\theta_i$ pour $i$ appartenant à $[0, k-1]$ sont en fait des isomorphismes canoniques, ils laissent invariants les sous-ensembles reconnaissables et algébriques. En appliquant les théorèmes 5.1.1 et 5.2.4 on obtient immédiatement :

Théorème 6.2.1.1 :

Le long de la chaine d'isomorphisme ci-dessus l'ensemble des sous ensembles reconnaissables est invariant, en revanche le passage par un isomorphisme $\psi_i$ pour $i \in [1, k]$ fait croître strictement l'ensemble des sous ensembles algébriques à la condition que chaque transformation ait fait décroître l'arité d'au moins deux fonctions. Autrement dit on obtient

$$\forall i \in [1,k] \quad \theta_{i-1}(\mathrm{Rec}((\mathcal{F}_{i-1} \underset{0}{\cup} \Lambda_{i,k})\mathcal{A}_{i-1}(\emptyset))) = \mathrm{Rec}(\mathcal{F}_{i-1} \underset{1}{\cup} \Lambda_{i+1,k})\mathcal{A}_{i-1}(\{\Lambda_i\})) \quad \text{et}$$

$$\psi_i(\mathrm{Rec}((\mathcal{F}_{i-1} \underset{1}{\cup} \Lambda_{i+1,k})\mathcal{A}_{i-1}(\{\Lambda_i\}))) = \mathrm{Rec}((\mathcal{F}_i \underset{0}{\cup} \Lambda_{i+1,k})\mathcal{A}_i(\emptyset)) \quad \text{et}$$

$$\theta_{i-1}(\mathcal{A}lg(\mathcal{F}_{i-1} \cup \Lambda_{i,k})\mathcal{A}_{i-1}(\emptyset))) = \mathcal{A}lg(\mathcal{F}_{i-1} \cup \Lambda_{i+1,k})\mathcal{A}_{i-1}(\{\Lambda_i\}))$$



On obtient donc ainsi une hiérarchie stricte de longueur $k$ pour les ensembles de sous-ensembles algébriques avec conservation tout au long de cette hiérarchie des sous ensembles reconnaissables.

La hiérarchie de Chomsky $\mathrm{Rec} \subsetneq \mathcal{A}lg$ pour la structure de monoïde correspond à l'application de ce théorème pour $k=1$ en partant de la structure de V-algèbre monadique (cf § 2.1).

De même la hiérarchie $\mathrm{Rec}(\tilde{V}) \subsetneq \mathcal{A}lg(\tilde{V})$ pour la structure de V-binoïde correspond aussi à l'application de ce théorème pour $k=1$ en partant de la structure de V-algèbre diadique. (cf § 2.2).

En revanche, dans le paragraphe 2.2 quand on a continué la hiérarchie ci-dessus en passant à la structure de dioïde, on ne procède pas tout à fait de la même façon. En effet on commence par créer le V-binoïde libre de base $\{1\}$ pour le transformer en un dioïde universel. Cette variable $1$ n'est pas créée par la transformation passant de la structure de V-algèbre diadique à la structure de V-binoïde. Ceci correspond à une deuxième méthode de construction de hiérarchie que nous allons étudier maintenant.

6.2.2.- Deuxième méthode de construction de hiérarchie.

Dans cette méthode on introduit au fur et à mesure des besions les variables $\Lambda_i$.

Soit $\mathcal{F}_0\mathcal{A}_0$ une structure d'algèbre transformable et $d : \mathcal{F}_0 \to [0,n]$ une fonction comme au paragraphe 6.1 qui contrôle l'itération de la transformation sur $\mathcal{F}_0\mathcal{A}_0$. Soit $\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i$ la $i^{\text{ième}}$ transformée de la structure $\mathcal{F}_0\mathcal{A}_0$. Soit d'autre part $I_i : \mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset) \longrightarrow \mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\Lambda_{i+1})$ l'injection canonique. On obtient le diagramme suivant où les applications $\phi_i$ sont les isomorphismes contruits grâce au théorème 4.4.1

$$\mathcal{F}_0\mathcal{A}_0(\{\Lambda_1\}) \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{F}_1\mathcal{A}_1(\emptyset)$$

$$\downarrow I_1$$

$$\mathcal{F}_1\mathcal{A}_1(\{\Lambda_2\}) \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{F}_2\mathcal{A}_2(\emptyset)$$

$$\downarrow I_2$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{F}_{i-1}\mathcal{A}_{i-1}(\{\Lambda_i\}) \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset)$$

$$\downarrow I_i$$

$$\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\{\Lambda_{i+1}\}) \xrightarrow{\phi_{i+1}} \cdots\cdots \; \mathcal{F}_{k-1}\mathcal{A}_{k-1}(\{\Lambda_k\}) \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{F}_k\mathcal{A}_k(\emptyset)$$

On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 6.2.2.1 :

Avec les notations introduites ci-dessus et en supposant que chaque transformation fait baisser l'arité d'au moins deux fonctions alors

i) $(\forall i \in [1,k])(\phi_i(\mathrm{Rec}(\mathcal{F}_{i-1}\mathcal{A}_{i-1}(\{\Lambda_i\}))) = \mathrm{Rec}(\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset)))$

ii) $(\forall i \in [1,k])(\phi_i(\mathcal{A}lg(\mathcal{F}_{i-1}\mathcal{A}_{i-1}(\{\Lambda_i\}))) \subsetneq \mathcal{A}lg(\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset)))$

iii) $(\forall i \in [1,k-1])(I_i(\mathrm{Rec}(\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset))) \supseteq \mathrm{Rec}(\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\{\Lambda_{i+1}\})) \cap \mathcal{P}(\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset)))$

iv) $(\forall i \in [1,k-1])(I_i(\mathcal{A}lg(\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset))) = \mathcal{A}lg(\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\{\Lambda_{i+1}\})) \cap \mathcal{P}(\mathcal{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset)))$ .

Démonstration :

La propriété i) résulte du théorème 5.1.1, ii) découle du théorème 5.2.4, iii) est une conséquence immédiate de la proposition 3.4.1 et iv) se déduit de la proposition 5.2.5.

La propriété iii) ne peut être améliorée dans le cas général comme le prouve la proposition 3.4.1. Cependant nous allons montrer que dans un cas particulier l'inclusion indiquée en iii) est une égalité.

Théorème 6.2.2.2 :

Avec les mêmes notations que ci-dessus, si on suppose que la structure $\mathfrak{F}_0\mathcal{A}_0$ est non effaçante alors

$$(\forall i \in [1,k-1])(I_i(\mathrm{Rec}(\mathfrak{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset)) = \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}_i\mathcal{A}_i(\{\wedge_{i+1}\})) \cap \mathcal{P}(\mathfrak{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset))) .$$

Démonstration :

On va utiliser une méthode similaire à celle de la démonstration du théorème 5.1.7 ainsi que les résultats du paragraphe 6.1.
D'après le lemme 3.4.2 il suffit de démontrer que $\mathfrak{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset) \in \mathrm{Rec}(\mathfrak{F}_i\mathcal{A}_i(\{\wedge_{i+1}\}))$ .

En utilisant les notations du paragraphe 6.1 on obtient

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i})\mathcal{A}_0(\emptyset) \arrow[rr, "I'_i"] \arrow[d, "\psi_i \circ \theta_{i-1} \circ \cdots \circ \theta_1 \circ \psi_1 \circ \theta_0"'] & & (\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i+1})\mathcal{A}_0(\emptyset) \arrow[d, "\psi'_i \circ \theta'_{i-1} \circ \cdots \circ \theta'_1 \circ \psi'_1 \circ \theta'_0"] \\
\mathfrak{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset) \arrow[r, "I_i"] & \mathfrak{F}_i\mathcal{A}_i(\{\wedge_{i+1}\}) \arrow[r, dash, "\theta'_i"] & (\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i+1})\mathcal{A}_0(\emptyset)
\end{tikzcd}$$

où $I'_i$ est simplement une injection canonique. Ce diagramme est bien sûr commutatif. Toutes les applications $\psi_j$, $\theta_j$, $\psi'_j$, $\theta'_j$ sont des isomorphismes conservant les sous ensembles reconnaissables et donc pour prouver le théorème il suffit de prouver que $(\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i})\mathcal{A}_0(\emptyset)$ est reconnaissable dans $(\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i+1})\mathcal{A}_0(\emptyset)$ .

Considérons l'ensemble $A = \{0,1\}$ et munissons le d'une structure de $(\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i+1})\mathcal{A}_0$-algèbre en posant

$$\wedge_{i+1}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_i) = 0$$

$$f \in \mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i} \Rightarrow (f(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p) = 1 \Leftrightarrow (\forall j \in [1,p])(\varepsilon_j = 1)) .$$

Soit $\chi : (\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i+1})\mathcal{A}_0(\emptyset) \to A$ l'unique morphisme correspondant à cette structure de $A$ .

De façon évidente $(\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i})\mathcal{A}_0(\emptyset)$ est reconnu dans $(\mathfrak{F}_0 \underset{0}{\cup} \wedge_{1,i+1})\mathcal{A}_0(\emptyset)$ par le triplet $(\chi, \{0,1\}, \{1\})$.

Commentaire :

1°) La démonstration du théorème 6.2.2.2 est assez brève et simple quand on procède comme ci-dessus. Si on essaie de l'aborder autrement, en particulier en essayant de construire directement l'algèbre permettant de reconnaître $\mathfrak{F}_i\mathcal{A}_i(\emptyset)$ dans $\mathfrak{F}_i\mathcal{A}_i(\{\wedge_{i+1}\})$ en utilisant le contenu du paragraphe 6.1, on s'aperçoit très vite que la construction est très difficile. Personnellement m'étant engagé de prime abord dans cette voie je n'en suis pas sorti ! Cependant, sur des exemples simples cela marche très bien, par exemple dans le cas des V-dioïdes le lecteur pourra vérifier que pour reconnaître le V-dioïde de base $X$ dans le V-dioïde de base $Y$ avec $X \subseteq Y$ on peut procéder ainsi :

Soit $D = \mathcal{P}(Y \cup \{1\})$ , on munit $D$ d'une structure de V-dioïde en posant

$$1^D = \{1\} , \quad \wedge^D = \emptyset , \quad a^D = \{1\} \text{ pour } a \in V , \quad +^D = \cup$$

$$A \otimes^D B = \text{si } 1 \in A \text{ alors } (A-\{1\}) \cup B \text{ sinon } A .$$

Le triplet $(\chi, D, D')$ avec $D' = \mathcal{P}(X \cup \{1\})$ et $\chi$ défini par $\chi(y) = \{y\}$ résoud alors le problème.



7.- COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS AVEC CEUX D'AUTRES AUTEURS :

D'autres auteurs se sont préoccupés de problèmes similaires à ceux présentés ici. Notre travail présente des originalités et des améliorations par rapport aux travaux antérieurs. Principalement on peut retenir deux idées originales dans ce qui précède :

- L'idée de partitionner les fonctions d'accès en deux sous-ensembles, celles de l'un d'eux perdant des arités au cours des transformations et les autres gardant la même arité, n'apparaît pas, il me semble, dans les autres travaux. Suivant les auteurs les arités restent constantes ou brutalement tombent à 0 (DAMM [19] ).

- Les autres auteurs travaillent essentiellement sur des structures d'algèbres sans axiome ce qui évidemment simplifie considérablement les problèmes. L'étude des phénomènes dans le cas d'axiomatiques égalitaires quelconques puis dans les cas d'axiomatiques non effaçantes ou quasi-non effaçantes, pour raffiner les résultats, est aussi originale.

- Remarquons aussi que seuls les sous ensembles algébriques ont été étudiés dans les autres travaux. L'étude des sous ensembles reconnaissables et en particulier leur évolution dans la transformation et dans les changements de bases d'algèbres, n'apparaît pas par ailleurs.

Etudions maintenant succinctement quelques références bibliographiques.

La notion d'opérateur dérivé, utilisée ici sous le nom de polynôme, apparaît dans plusieurs travaux : TURNER [84] , MAIBAUM [52] , GOGUEN [32] . Cette notion conduit à la définition des algèbres dérivées et de la fonction "Yield". Cette dernière fonction "Yield" peut être retrouvée dans notre cadre par le procédé suivant :

On part d'une $\mathfrak{F}$-algèbre sans axiome, on effectue la transformation fondamentale un nombre suffisant de fois pour que tous les opérateurs soient devenus d'arité 0. La fonction Yield (ou tout du moins une fonction qui lui ressemble fortement) est tout simplement la projection canonique

$$\mathrm{Yield} : \mathfrak{F}_k(\emptyset) \longrightarrow \mathfrak{F}_k\mathcal{A}_k(\emptyset)$$

où $\mathfrak{F}_k$ est formé des opérateurs de $\mathfrak{F}$ plus les opérateurs $+_i$ et $\wedge_i$ introduits par la transformation et $\mathcal{A}_k$ est l'ensemble des axiomes portant sur les opérateurs $+_i$ et $\wedge_i$ .

Dans l'article de Turner [84] , on trouve une généralisation de cette notion d'opérateurs dérivés grâce à la définition des "Clone Algebras". En particularisant les définitions données dans cet article ("Clone Algebra" d'ordre 2) on retrouve une partie des propriétés des opérateurs + introduits ici (existence d'un élément neutre et associativité). D'autre part la notion de "Clone sequence" présente quelques analogies du point de vue des résultats avec les études de hiérarchies faites au paragraphe 6.

Dans l'article de WAND "an algebraïc formulation of the Chomsky hierarchy" [85] , cet auteur part du même isomorphisme

$$X \times Y \to Z \quad \approx \quad X \longrightarrow (Y \to Z) .$$

Mais ensuite il utilise l'opérateur plus petit point fixe qui n'est pas utilisable dans le cas traité ici quand les axiomes ne sont pas conformes.

DAMM [19] [20] , utilise la fonction "Yield" pour construire des hiérarchies. Cet auteur définit des ensembles de termes grâce à des schémas récursifs. De prime abord ces schémas sont plus compliqués que les $\mathfrak{F}$-grammaires. Mais par l'intermédiaire des algèbres dérivées [29] l'auteur ramène ces schémas récursifs à des formes tout à fait équivalentes aux $\mathfrak{F}$-grammaires. Il y a là indirectement une concordance entre ces travaux et l'opinion que nous émettions à la fin du paragraphe 2 et au paragraphe 3.8 à propos de la définition des sous-ensembles algébriques dans les algèbres libres.

Les hiérarchies qu'obtient cet auteur correspondent donc au cas où tous les opérateurs perdent des arités et où il n'y a pas d'axiomes.

8.- CONCLUSION

Ce chapitre est certainement le plus important et le plus original de cette thèse. Nous avons l'impression d'avoir considérablement généralisé les travaux antérieurs dans ce domaine et montré d'autre part l'utilité des systèmes de réécriture dans le domaine de la théorie des langages. Ce nouveau champ d'applications de cette théorie semble pleins de promesses.

Par rapport aux travaux antérieurs, les améliorations sont essentiellement l'introduction d'une axiomatique quelconque, l'étude des sous ensembles reconnaissables et la possibilité de faire baisser une par une les arités des fonctions. Il est à remarquer que paradoxalement l'étude des sous ensembles reconnaissables s'avère plus délicate que celle des sous ensembles algébriques et que l'on est obligé pour énoncer des résultats de particulariser la forme des axiomes.

Nous avons seulement étudié le cas des algèbres ayant une axiomatique égalitaire. Il se peut que les résultats puissent s'étendre à d'autres cas par exemple au cas d'axiomatique du type $t_1 = t_2 \Rightarrow t'_1 = t'_2$ ou plus généralement dans le cas de variétés où les théorèmes de Birkoff [ 7 ] prouvent l'existence d'objets libres. D'autre part, il est certain que les résultats se généralisent au cas des algèbres hétérogènes, cette dernière généralisation étant probablement du niveau de l'exercice d'école.



# CONCLUSION

Quand on doit mettre un point final à un travail de longue haleine, on a toujours quelques regrets. On se demande en particulier si on en a assez fait, si on a exploité complètement les idées disseminées dans le texte, si non n'a pas fait d'erreurs, si la présentation est suffisamment claire pour intéresser un lecteur et suffisamment hermétique pour que tout ne paraisse pas banal, etc. La réponse à toutes ces questions est en général négative mais la contre partie est que cela permet d'écrire une conclusion ouvrant de larges perspectives sur un travail à venir.

Reprenons donc chacun des chapitres de ce travail et donnons pour chacun d'eux ses lacunes et ses prolongements possibles.

Le chapitre 1 est probablement celui qui est le plus complet sur les questions qui y sont posées. On peut cependant imaginer quelques prolongements comme .

- Y-a-t-il des liens entre les bigrammaires régulières et les grammaires LR(k) . Une allusion à ce problème est faite auparagraphe 1.5.5 en remarque.

- Y-a-t-il des liens entre les bilangages réguliers et les langages algébriques réguliers, dont les images dans le langage de Dyck sont des langages algébriques déterministes. Au paragraphe 2.3 on étudie des bilangages réguliers de la forme $P \cap K$ qui sont évidemment des langages algébriques déterministes. Il n'y a pas que ceux-là en effet le langage $a^n\bar{a}^n a^p\bar{a}^p$ n'est pas de la forme $P \cap K$ et est un langage algébrique déterministe. La résolution de ce problème permettrait de donner un résultat de décidabilité pour le problème de l'égalité de deux langages déterministes dans un cas assez large.

- Il est bien connu que les langages algébriques sur un vocabulaire à une lettre sont en fait réguliers. Ce résultat se généralise-t-il dans le cas des $C_0$-bigrammaires et des bigrammaires régulières sur le V-binoïde universel dans le cas où V est réduit à un élément. Sur ce même thème on peut aussi se poser le problème de manière beaucoup plus général en utilisant la transformation du chapitre 4 sur une structure d'algèbre ne contenant qu'une seule fonction.

- Le plupart des constructions faite dans ce chapitre sont effectives. La démonstration de l'effectibilité de ces constructions a été faites, mais nous n'avons pas écrit explicitement les algorithmes correspondants. Bien que ce travail risque d'être fastidieux et sans grand intérêt dans beaucoup de cas, il ne serait pas inutile en particulier si on le complète par une étude de la complexité des différents algorithmes. D'autre part la construction à la main du binoïde minimal d'un bilangage régulier est en général long et fastidieux ; une implémentation de ces algorithmes serait un utile outil de recherche, car cela permettrait facilement de valider des idées sur des exemples. Ces remarques valent aussi pour les paragraphes 2.2 et 2.3 du chapitre 2.

Le chapitre 2 est une suite d'applications du chapitre 1. Certains paragraphes (2.1, 2.3, 2.4) peuvent être considérés comme achevés. Les deux autres ne sont en fait que des ébauches et devraient être poursuivis ainsi :

- Dans le paragraphe 2.2 nous mettons en évidence une équivalence $\tau_0$ sur les grammaires réduites sous forme de Greibach strictement plus fortes que l'équivalence structurale. Ensuite nous parlons de différentes équivalences qui sont obtenues en mélangeant la méthode conduisant à l'équivalence structurale et celle conduisant à l'équivalence $\tau_0$ . Y-a-t-il des liens entre chacune de ces équivalences ? Peut-on calculer effectivement la borne supérieure de toutes ces équivalences ? Peut-on retrouver dans cette voie les résultats sur l'équivalence des grammaires simples déterministes ? L'idée générale de ce paragraphe est d'associer à chaque règle $A \twoheadrightarrow \alpha$ d'une grammaire algébrique une règle $A \twoheadrightarrow r$ d'une bigrammaire régulière telle que $h(r) = \alpha$ avec $h(a \times r' + r'') = ah(r')h(r'')$ . On peut obtenir d'autres équivalences en utilisant par exemple $h' : V \to V^*$ défini par $h'(\wedge) = \wedge$ et $h'(a \times r' + r'') = ah(r'')h(r')$ , ou d'autres fonctions plus compliquées.

D'autre part on a seulement transformé les règles $A \to \alpha$ , si on étudie des transformations similaires sur les dérivations $A \overset{p}{\twoheadrightarrow} \alpha$ avec $p < n$ ($n$ fixé) , obtient-on des équivalences de plus en plus fines ?

- Le paragraphe 2.5 introduit la notion de bon sous langage en vue de l'utiliser pour démontrer l'ambiguité inhérente de langages algébriques. Si les préliminaires théoriques sur cette notion sont simples et de bon goût, on ne peut pas en dire autant de ces implications pratiques. Il est nécessaire, pour rendre concurrentielle cette méthode vis à vis d'autres utilisant des théorèmes de paires itérantes rafinés, de trouver des euristiques permettant de démontrer facilement qu'un langage est un bon sous langage d'un autre langage.

- D'autre part, dans ce chapitre on est certainement loin d'avoir exploité toutes les applications possibles des bilangages réguliers. En utilisant les automates finis indéterministes Boasson, Courcelle et Nivat [10] ont introduit une fonction associée à un langage qui mesure la complexité de ce langage. On peut probablement utiliser les bigrammaires régulières, qui sont en quelques sortes des automates d'arbres ascendants indéterministes, pour obtenir des définitions et des résultats du même ordre soit sur les langages algébriques (en utilisant les arbres engendrés par une grammaire) soit sur les langages d'arbres.

Le chapitre 3 est consacré presque exclusivement à la minimalisation des algèbres reconnaissant un sous ensemble d'une algèbre libre. Les résultats théoriques de ce chapitre sont assez séduisants mais, malgré les applications données aux paragraphes 3 et 4, ce chapitre n'a pas assez de conséquences pratiques. Il faudra pour cela utiliser les idées énoncées dans sa conclusion propre.

Le chapitre 4 est certainement le plus original de ce travail. Les résultats, que l'on y obtient, sont très généraux et plusieurs démonstrations peuvent, je crois, être considérées comme astucieuses. Malgré cela un certain nombre de points sont susceptibles d'être améliorés.

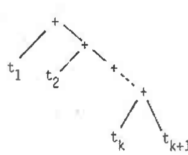
- La théorie des dioïdes a été introduite pour servir d'exemple à la transformation fondamentale. Il serait intéressant de l'étudier pour elle-même et de comparer les résultats obtenus avec ceux de la théorie des magnoïdes qui présente des caractères similaires.

- L'idée sous-jacente à la transformation fondamentale est d'utiliser l'isomorphisme $E^n \to E \approx E^{n-1} \to (E \to E)$ . On peut imaginer d'utiliser l'isomorphisme $E^n \to E \approx E^{n-k} \to (E^k \to E)$ , c'est à dire que les fonctions au lieu de perdre une arité, verraient leur arité partitionnée en deux. Y-a-t-il une transformation sur les structures d'algèbres correspondant à cette idée ? Cette nouvelle transformation a-t-elle un rapport avec la $k^{\text{ième}}$ itéré de la transformation fondamentale ?

- Au chapitre 1 la première définition d'une bigrammaire régulière utilise des seconds membres de règles beaucoup plus généraux que ceux que l'on obtient après le théorème de réduction 1.5.3.1. Ceci est-il génralisable dans les algèbres quelconques ? On obtiendrait un théorème du genre suivant

Soit $\psi_0 : \mathfrak{F}(\{\wedge\}) \to \mathfrak{F}_1 \mathfrak{A}_1(\emptyset)$ , les $\mathfrak{F}_1$-grammaires dont les seconds membres de règles sont de la forme

t =



avec $t_{k+1} = \wedge$ ou $t_{k+1} \in N$

et $i \in [1,k] \Rightarrow t_i = f_i(t_{i1}, \dots, t_{ik_i})$ et $f_i \in \mathfrak{F}$

engendrent exactement les sous-ensembles reconnaissables de $\mathfrak{F}(\{\wedge\})$ .
Dans le cas des langages ce théorème est vérifié, mais c'est une banalité.



En effet, il signifie que les grammaires dont les règles sont de la forme $A \to \alpha B | \beta$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des mots sur le vocabulaire terminal, engendre les langages réguliers. Ce phénomène est dû à l'arité 0 des opérateurs autres que + . Dans le cas général cela donnerait des moyens très puissants pour engendrer des sous ensembles reconnaissables dans les algèbres libres.

- Dans la transformation étudiée dans ce chapitre, les fonctions dont l'arité baisse ne peuvent intervenir dans les axiomes de l'algèbre. Si on essaie de se dispenser de cette hypothèse en disant qu'une fonction $f(x_1, \dots, x_k)$ perdant une arité sera remplacée par $+(f(x_1, \dots, x_{k-1}), x_k)$ dans les axiomes où elle intervient, on s'aperçoit vite que dans le cas général les résultats ne subsistent pas. En particulier les morphismes $\psi_X$ (théorème 4.4.4.1) ne sont plus injectifs, cependant $\psi_0$ reste surjectif. Il semble pourtant que, pour des axiomes particuliers (conformes ?) portant sur les fonctions dont l'arité baisse, on puisse généraliser les résultats.

D'autre part certaines théories qui jouent un grand rôle en théorie des langages sont complètement absentes de cette thèse, alors qu'il est probable que certaines d'entre elles s'insèreraient très bien dans le cadre de notre étude. Citons par exemple :

. La théorie des transductions rationnelles [ ] , qui doit facilement être généralisable au binoïde universel. Il est probable que l'on obtiendrait des résultats différents de ceux de Arnold et Dauchet [ 2] , [21] vu les grandes différences de formalisation.

. Les ensembles rationnels n'ont pas été étudiés.

. Les séries formelles dans le binoïde ou dans les algèbres libres sont aussi des objets qui mériteraient une étude approfondie.

Toutes les remarques de cette conclusion tendent à prouver que ce présent travail ne conduit pas à un cul de sac et qu'il est susceptible de recevoir de nombreux prolongements. J'espère qu'au moins certains d'entre eux verront le jour bientôt. Je remercie le lecteur de m'avoir suivi jusqu'au bout.

# B I B L I O G R A P H I E


1.- A.V. AHO, HOPCROFT, ULLMANN :
The theory of Paraing, Translation and Compiling
Volume I, Prentice Hall, 1973.

2.- A. ARNOLD :
Systêmes d'équations dans le magnoïde, ensembles rationnels et algébriques d'arbres.
Thèse d'Etat, Lille, 1977.

3.- AUTEBERT, BEAUQUIER, BOASSON, NIVAT :
Quelques problèmes ouverts en théorie des langages algébriques.
RAIRO Informatique théorique, vol. 13, 1979, p. 363 à 379.

4.- B.S. BAKER :
Tree Transductions and Families of Tree Languages.
5th A.C.M. Proc. on theory of computing (1973) 200-206.

5.- P. BERLIOUX :
Etude d'automates et de grammaires de ramifications.
Thèse de spécialité, Grenoble, 1972.

6.- M. BIRD :
The equivalence problem for deterministic Two-Tape Automator
J. of Comp. and Syst. Sc., vol.7, 1973, page 218-236.

7.- G. BIRKHOFF :
,On the structure of abstract algebras
Proc. Cambridge Phil. Soc.,vol. 31, 1935, p. 433 à 454.

8.- G. BIRKHOFF, J.D. LIPSON :
Heterogenous algebras
J. Combinatorial Theory, vol. 8, 1970, p. 115-133.

9.- M. BLATTNER :
Inherent Ambiguïté in Families of Grammars.
In : Automata, Languages and Programming (Sixth colloquium), LNCS, vol. 71, p. 38 à 48.

10.- L. BOASSON, B. COURCELLE, M. NIVAT :
The rational index : A Complexity Mesure for Language.
Rapport Université de Bordeaux 1, UER de mathématiques et informatique , n° 7912.

11.- L. BOASSON :
Langages algébriques, paires itérantes et Transductions rationnelles.
Theori. Comput. Sci. 2 (1976), p. 209 à 223.

12.- W. BRAINERD :
Tree Generating Regular Systems.
Information and Control, vol. 14, 1969, p. 217-231.

13.- W. BRAINERD :
The Minimalization of tree automata
Information and Control, vol. 13, 1968.

14.- P.M. COHN :
Universal algebra
Harper and Row, New-York, 1965.

15.- B. COURCELLE :
Une forme canonique pour les grammaires simples déterministes
R.A.I.R.O., 1974, p. 19 à 36.

16.- B. COURCELLE :
A Representation of Trees by Languages, II
Theor. Comput. Sc. , vol. 7, 1978, p. 25-55.

17.- B. COURCELLE :
Arbres Infinis et Systèmes d'Equations.
R.A.I.R.O., Informatique théorique, vol. 13, n° 1, 1979, p. 31 à 48.

18.- B. COURCELLE, P. FRANCHI-ZANNETTACHI :
Attribute Grammars and recursive program schemes
Rapport Université de Bordeaux I UER Mathématiques et Informatique , n° 8008

19.- W. DAMM :
Languages defined by higher type program Schemes
in : Automata, Languages and Programming
LNCS 52, 1977, p. 164 à 179.

20.- W. DAMM :
An algebraic extension of the Chomsky hierarchy
In : les arbres en algèbre et en programmation
actes du 4ième colloque de Lille, 1979, p. 66 à 78.

21.- M. DAUCHET :
Transductions inversibles de Forêts
Thèse de spécialité Lille (1975).

22.- N. DERSHOWITZ, Z. MANNA :
Proving Termination with Multiset Ordering
In : Automata, Languages and Programming (Sixth Colloquium)
L.N.C.S., vol. 71, p. 188 à 202.

23.- J. DONER :
Tree Acceptors and some of their Applications.
J. Comput. Syst. Sci, vol. 4, 1970, p. 406 à 451.

24.- S. EILENBERG :
Automata, Languages and Machines,
vol. A et B, Academic Press, New-York, 1974.



51.- S. LEVY, A.K. JOSHI :
Some Results in Tree Automata
Math. Syst. Theor. vol. 6, 1973, p.

52.- T.S.E. MAIBAUM :
A Generalized Approach to Formal Languages
J. of Comp. and Syst. Sciences, Vol. 8, 1974, p. 409 à 439

53.- P. MARCHAND :
Etude et classification des Bigrammaires,Applications à l'Etude des Systèmes Transformationnels
Thèse de spécialité Nancy I (1974)

54.- P. MARCHAND :
Bigrammaires et systèmes transformationnels
In : les arbres en algèbre et en programmation
Acte du colloque de Lille, 1976, p. 175-195

55.- P. MARCHAND :
Algèbres minimales des parties reconnaissables dans les algèbres libres
In : Les arbres en algèbre et en programmation
Acte du 4ème colloque de Lille , 1979, p. 134-158

56.- P. MARCHAND :
Problème de la reconnaissance d'un ensemble de termes dans une réalisation libre d'un type abstrait
Rapport du Centre de Recherche en Informatique de Nancy n° 79-R-019

57.- P. MARCHAND :
Grammaires Parenthésées et Bilangages réguliers.
R.A.I.R.O. Informatique théorique vol. 14, 1980, p. 3 à 38

58.- J. MEZEI, J.B. WRIGHT :
Algebraic Automata and Context-free Sets
Information and Control, vol. 11, 1967, p. 3 à 29

59.- MAC NAUGHTON :
Parenthesis Grammar
JACM, vol. 14, 1967, p. 490 à 500

60.- M. NIVAT :
On the interpretation of recursive programm schemes
Rapport de recherche Laboria IRIA n° 84, 1974

61.- M. NIVAT :
Extensions et Restrictions de Grammaires algébriques
in Formal Languages and Programming
R. Aguilar (Ed) North-Holland Publishing Company (1976), p. 83-95

62.- W. OGDEN :
A helpful result for proving inherent ambiguity
Math. System Theory, vol. 2, 1967, p. 191-194

63.- C. PAIR, A. QUERE :
Définition et étude des bilangages réguliers
Information and Control, vol. 13, 1968, p. 565 à 593

64.- C. PAIR :
Application de la théorie des ramifications au problème de l'équivalence structurale de deux C-grammaires.
Rev. Fr. Inf. R.O., vol. 5, 1971.

65.- C. PAIR :
Les arbres en théorie des langages
in : les arbres en algèbre et en programmation
Actes du 1er colloque de Lille, 1976.

66.- C. PAIR :
Sur les modèles des types abstraits algébriques
Rapport du Centre de Recherche en Informatique de Nancy, n° 80-P-052

67.- PAULL, UNGER :
Structural equivalence of context-free grammar
J. of Comp. and Syst. Sciences,vol. 2, 1968, p. 427 à 463

68.- J.F. PERROT :
Monoïdes syntactiques des langages algébriques
Acta Informatica 7 (1977), p. 399-413

69.- J.F. PERROT :
Monoïdes syntactiques et amgiguité inhérente des langages algébriques
Rapport du LITP n° 78-56

70.- A. QUERE :
Etude des ramifications et des bilangages
Thèse de spécialité Nancy I (1969)

71.- M.O. RABIN, D. SCOTT :
Finite automata and Their Decisions problems
IBM Journal, avril 1959, p. 114 à 125

72.- B.K. ROSEN :
Tree Manipulating systems et church Rosser Theorem
JACM, vol. 20, 1973, p. 160 à 187

73.- W.C. ROUNDS :
Tree oriented Proof of some Theorems on Context Free and Indexed Languages
in : Proc. A.M Symp. On theory of Computing, 1970

74.- W.C. ROUNDS :
Mappings and Grammars on Trees
Math. Syst. Theor., vol. 4, 1970, p. 257 à 287

75.- SAKAROVITCH :
Monoïdes syntactiques et Langages algébriques
Thèse de spécialité, Université de Paris VII, 1976.

76.- J. SAKAROVITCH :
Syntaxe des langages de Chomsky,
Essai sur le déterminisme
Thèse d'Etat, Paris VII, 1979



77.- C.D. SHEPARD :
Languages in general Algebras
Proceeding of the ACM Symposium on the Theory of Computing, 1969, p. 155 à 163

78.- M. STEINBY :
Syntactic Algebras and Varieties of Subset of Algebras
In : Les arbres en algèbre et en programmation
Actes du 4ème colloque de Lille, 1979, p. 227 à 240

79.- J.M. STEYAERT :
Evaluation des index rationnels de quelques familles de langages
Rapport de recherche Laboria (IRIA) n° 261 novembre 1977

80.- J.W. THATCHER :
Characterising derivation trees of context free grammars through a generalization of finite automata theory
J. of Comp. and Syst. Scie., vol. 1, 1967, p. 317 à 322

81.- J.W. THATCHER, J.B. WRIGHT :
Generalized Finite Automata Theory
Math. Syst. Th., vol. 2, 1968, p. 57 à 81

82.- L. VALIANT :
The equivalence problem for finite-turn DPDA's
Information and Control 25 (1974), 123-133

83.- L. VALIANT :
Regularity and Related Problems for deterministic Push Dawn Automata
J.A.C.M., vol. 22, 1975, p. 1 à 10

84.- R. TURNER :
An Algebraic Theory of Formal Languages
Lecture Notes in Computer Science Vol 32, 1975, p. 426-431

85.- M. WAND :
An algebraic formulation of the Chomsky hierarchy
in : Category theory applied to computation and control
Lecture Notes in Computed Sciences, 25, 1974, p. 209-213

NOM DE L'ETUDIANT : MARCHAND Pierre

NATURE DE LA THESE : Doctorat es Sciences

VU, APPROUVE

ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 30 Avril 1981

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I,

UNIVERSITE NANCY I

LE PRESIDENT

R. MAINARD

- 4 MAI 1981 - 14 30