Dactyl. 30 76/630

UNIVERSITÉ DE NANCY I U.E.R. SCIENCES MATHÉMATIQUES

Sc. N. 76/3 B

USAGE D'UNE METHODE DE SIMULATION POUR LA FORMULATION MATHEMATIQUE D'UN MODELE DE GESTION DE STOCK

UNIVERSITÉ NANCY BIBLIOTHÈQUE

THESE

pour l'obtention du

DOCTORAT DE SPÉCIALITÉ DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Soutenue le 28 Janvier 1976

par

Bernard MARCHAL

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1
D 095 181611 8

MEMBRES DU JURY :

Président : M. J. LEGRAS
Examinateurs : Mme C. ROLLAND
M. P. BOYER

USAGE D'UNE METHODE DE SIMULATION POUR LA FORMULATION MATHEMATIQUE D'UN MODELE DE GESTION DE STOCK

UNIVERSITE NANCY BIBLIOTHEQUE

par

Bernard MARCHAL

J'ai effectué ce travail sous la direction de Monsieur LEGRAS, Professeur à l'Université de NANCY I. Je le remercie ici très sincèrement pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés, l'aide qu'il m'a apportée, pour son enseignement et la formation qu'il m'a ainsi donnée.

Je remercie Madame ROLLAND, Professeur à l'Université de NANCY II et Monsieur BOYER, Professeur à l'Institut Commercial de Nancy, qui m'ont honoré de leur participation au jury.

Je remercie également le personnel de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique de Nancy pour l'aide apportée dans l'exécution des programmes, ainsi que Madame MARCHAND pour le travail réalisé à la dactylographie et l'impression du texte.

SOMMAIRE

	Pages
INTRODUCTION	1
GENERALITES	4
1 Gestion par seuil et par quantité de commande constante dans le cas des ventes manquées	4
2 Définition du coût de gestion et d'un type de problème	6
3 Exemples de coûts de gestion. Un modèle de coût de gestion	6
4 Qualité de service. Exemple de problème	9
CHAPITRE I : ETUDE DU MODELE DE GESTION DU STOCK DANS LE CAS DETERMINISTE	10
1 Evaluation du coût de gestion et du taux de rupture	11
1.1 Cas où la demande sur une période égale au délai de livraison est supérieure ou égale au seuil ($\lambda\delta \geq R$)	11
1.2 Cas où la demande sur une période égale au délai de livraison est inférieure ou égale au seuil ($\lambda\delta \leq R$)	16
1.3 Résumé	19
2 Optimisation avec contrainte de service bilatérale	20
2.1 Cas où le taux de rupture est nul ($\tau_o = 0$)	20
2.2 Cas où le taux de rupture est positif ($0 < \tau_o < 1$)	21
2.2.1 Courbe d'équi-taux	22
2.2.2 Minimisation du coût de gestion sur la courbe d'équi-taux	23
3 Optimisation avec contrainte de service unilatérale	27
3.1 Remarques préliminaires	28
3.2 Optimisation dans les différents cas	31
3.3 Résumé et remarques	35
3.4 Usage de variables sans dimension. Optimisation utilisable pour une classe de marchandises.	39

CHAPITRE II : RECHERCHE D'UNE FORMULATION APPROCHEE DU COUT DE GESTION ET DU TAUX DE RUPTURE DANS LE CAS ALEATOIRE 43

1 Méthode de formulation du coût de gestion et du taux de rupture 43

1.1 Expressions générales du coût de gestion et du taux de rupture 44

1.2 Autre formulation du coût de gestion 46

2 Description de la technique de simulation 51

2.1 Algorithme détaillé pour décrire le stock disponible sur un cycle 53

2.2 Calcul de la durée de rupture et de la quantité de marchandise-temps sur un cycle 59

2.3 Calcul de la quantité de marchandise-temps tournante sur un cycle 60

3 Mise en œuvre de notre méthode de formulation à l'aide de la simulation 61

3.1 Description du processus de la demande et de la livraison 61

3.1.1 Loi de Gauss tronquée 62

3.1.2 Calcul de μ et σ quand la loi de Gauss de moyenne μ et d'écart-type σ tronquée a pour moyenne μ_r et pour écart-type σ_r 65

3.1.3 Processus de la demande et de la livraison 70

3.1.4 Exemples de représentation de l'approvisionnement et du stock disponible 73

3.2 Exemples de simulations 79

3.3 Recherche d'une formulation approchée de $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$, Ω_r 89

3.3.1 Approximation de $\hat{\Omega}_1$ 89

3.3.2 Approximation de $\hat{T}$ et Ω_r 94

3.3.3 Résumé des formules 116

CHAPITRE III : APPLICATION DE LA FORMULATION DU COUT DE GESTION ET DU TAUX DE RUPTURE A UNE OPTIMISATION DU COUT DE GESTION 119

1 Première méthode d'optimisation 119

2 Deuxième méthode d'optimisation 126

3 Conclusions 132

BIBLIOGRAPHIE 136

INTRODUCTION

Les méthodes scientifiques de gestion des stocks tentent d'obtenir une formulation directe de certaines grandeurs comme le coût de gestion connaissant le modèle de gestion, les processus qui interviennent comme ceux de la demande et du délai de livraison ; elles tentent d'obtenir des formulations pour des systèmes relativement simples comme celui de la gestion du stock d'une seule marchandise en un seul point de stockage ; ces formulations étant établies, elles peuvent servir à étudier des systèmes plus complexes comme celui d'une structure en échelons des stocks d'une même marchandise (où un stock peut servir à approvisionner plusieurs autres stocks), elles peuvent servir à résoudre certains problèmes particuliers comme la minimisation d'un coût de gestion sous certaines contraintes. Cette méthode directe utilisant souvent la théorie des probabilités se heurte vite à des difficultés de calcul même pour un système de stock "élémentaire". Ainsi, si on s'intéresse à un modèle de gestion du stock d'une marchandise en régime permanent : approvisionnement par seuil et par quantité de commande fixe dans le cas des ventes manquées, il n'existe aucune formulation rigoureuse du coût lorsqu'il peut exister plus d'une commande en attente de livraison et à fortiori lorsqu'on veut tenir compte du caractère aléatoire du délai de livraison.

Nous nous attacherons donc à ce système simple d'un stock d'une marchandise géré par seuil et par quantité de commande fixe en régime permanent et notre but sera d'établir une formulation approchée de deux grandeurs : le coût de gestion et le taux de rupture, même lorsqu'il peut y avoir plus d'une commande en attente de livraison ; ce seront des fonctions du seuil, de la quantité de commande, des processus de la demande et du délai de livraison, d'autres données comme le coût de lancement d'une commande ; nous verrons que nous sommes amenés à approcher d'autres grandeurs à partir desquelles on formule le coût de gestion et le taux de rupture.

Pour cela nous simulerons la gestion du stock sur calculateur afin de calculer des valeurs approchées de grandeurs élémentaires utiles pour l'approximation du coût de gestion et du taux de rupture.

Nous verrons ensuite comment les formulations approchées obtenues par cette méthode expérimentale peuvent être utilisées à la résolution d'un problème particulier : la minimisation du coût de gestion pour une qualité de service minimum c'est à dire pour un taux de rupture à ne pas dépasser.

L'étude de ce problème particulier nous amène à parler de variables sans dimension : en effet, comme la méthode de simulation pour approcher le coût de gestion et le taux de rupture demande une durée de calcul importante et qu'il pourrait être trop coûteux de faire des simulations chaque fois que l'on veut optimiser la gestion du stock d'une marchandise, nous indiquons comment on peut envisager de faire des tables établies une fois pour toutes à l'aide de la simulation et pouvant nous permettre par exemple d'optimiser la gestion du stock de n'importe quelle marchandise pour ce modèle de gestion quand la demande et le délai de livraison peuvent être décrits par des processus analogues à ceux qui sont utilisés dans la simulation.

L'exposé que nous donnons se compose comme suit :

nous rappelons d'abord quelques généralités.
Il y a ensuite trois chapitres principaux :

le chapitre I traite du cas déterministe où le taux de demande et le délai de livraison sont constants. On établit la forme exacte de la fonction stock disponible ce qui nous permet de donner en exemple la formulation mathématique rigoureuse d'un type de coût de gestion et de qualité de service quel que soit le nombre maximum de commandes pouvant être en attente de livraison. Nous utilisons cette formulation pour une optimisation.

Le cas souvent traité dans les ouvrages est celui de la minimisation du coût de gestion pour une quantité de service maximum (pas de rupture de stock) ; nous donnons ici une généralisation.

Le chapitre II traite du cas aléatoire. On y donne une méthode de simulation nous permettant d'établir une formulation mathématique approchée de certaines grandeurs et par là d'un type de coût de gestion et de qualité de service, pour n'importe quel processus de la demande et du délai de livraison en régime permanent. Nous appliquons cette méthode à quelques exemples.

Dans le chapitre III, nous faisons usage des formulations obtenues au chapitre II pour la résolution d'un problème particulier : la minimisation d'un type de coût de gestion pour une qualité de service minimum (taux de rupture à ne pas dépasser).

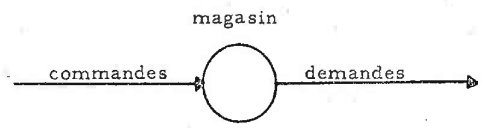
Nous développons la notion de variables sans dimension pouvant conduire à la construction de tables.

GENERALITES

Nous rappelons ici quelques définitions et nous précisons le modèle de gestion du stock qui sera étudié dans la suite.

Nous donnerons quelques exemples de coûts de gestion, nous définirons une qualité de service, ce qui nous permettra de définir un type de problème : minimisation d'un certain coût de gestion pour une qualité de service minimum.

1 - GESTION PAR SEUIL ET PAR QUANTITE DE COMMANDE CONSTANTE DANS LE CAS DES VENTES MANQUEES



sens de la marchandise

Le système étudié se compose d'un magasin (ou point de stockage) dont le rôle est de lancer des commandes d'une marchandise à certains instants, à les recevoir après un certain délai pouvant être variable dans le temps, à stocker la marchandise reçue, à satisfaire si possible les demandes des clients.

Nous supposons connaître la loi de la demande, la loi donnant le délai de livraison (ou délai d'approvisionnement) pour une commande lancée à un instant quelconque et le modèle de gestion du stock.

A un instant donné le stock disponible est la quantité de la marchandise se trouvant en magasin ; le stock net est égal au stock disponible moins les ventes restant à satisfaire ;

l'approvisionnement (ou les ressources) est égal à la somme du stock net et de la quantité de marchandise qui se trouve en attente de livraison à la suite de commandes antérieures ; il y a rupture de stock si le stock disponible est nul. Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'au cas où les demandes arrivant en rupture de stock sont annulées : cas des ventes manquées. Dans ce cas le stock net est égal au stock disponible.

Le modèle de gestion du stock est celui de la commande par seuil et par quantité fixe dans le cas des ventes manquées, c'est à dire que nous choisissons un seuil $R \geq 0$, une quantité de commande $Q > o$ et nous observons l'approvisionnement ; lorsqu'il devient inférieur ou égal au seuil nous lançons une commande de la quantité Q qui arrivera en magasin après un certain délai.

Nous appelons article l'unité de marchandise.

Le taux de la demande sur un certain intervalle de temps est égal à la quantité de marchandise demandée par unité de temps sur cet intervalle. Exemple : la demande sur une journée est de 25, 3 articles ; si l'unité de temps est la journée, le taux de demande sur cette journée est de 25, 3 ; si l'unité de temps est le mois de 30 jours, le taux de la demande sur cette journée est $25,3 \times 30 = 759$.

Nous étudierons la loi de la demande de la manière suivante : nous choisirons Δt tel que sur un intervalle de temps de longueur Δt, on peut approcher "valablement" la loi de la demande en admettant que la demande est continue et que le taux de demande est constant sur chacun des intervalles de longueur Δt.

2 - DEFINITION DU COUT DE GESTION ET D'UN TYPE DE PROBLEME

Nous calculons le coût de gestion sur un intervalle de temps $[0, t[$: K_t. Le coût de gestion par unité de temps pour cette période est K_t / t. Nous supposons que le système étudié est tel que $K = \lim_{t \to \infty} \frac{K_t}{t}$ existe. Nous appellerons K le coût de gestion par unité de temps ou simplement coût de gestion.

Appelons politique de gestion la gestion qui correspond au choix d'un seuil $R \geq o$, d'une quantité de commande $Q > o$ et qui suit notre modèle. Il se peut que nous devions limiter l'ensemble des politiques possibles en imposant certaines contraintes (dues par exemple à une limite de la surface de stockage, à une contrainte financière, à un taux de rupture à ne pas dépasser, etc) : c'est l'ensemble des politiques admissibles. Un type de problème courant dans la pratique est celui qui consiste à savoir déterminer une politique optimale, c'est à dire une politique admissible qui minimise le coût de gestion.

3 - EXEMPLES DE COUTS DE GESTION - UN MODELE DE COUT DE GESTION

La gestion du stock de l'article suivant notre modèle s'accompagne de coûts. La description de ces coûts dépend du système étudié ; nous en donnons une qui peut s'appliquer à de nombreux cas.

1) Coût de lancement d'une commande

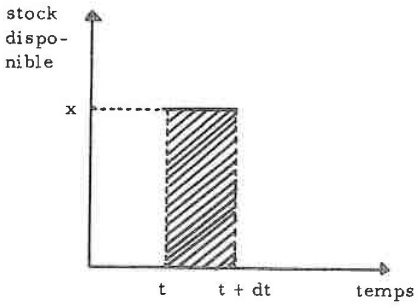
Lorsque l'approvisionnement devient égal au seuil, il y a lancement d'une commande qui s'accompagne d'un coût A (pouvant être dû aux frais de secrétariat, aux frais de réception de cette commande, ...). Ce coût peut être

fonction de la quantité de commande Q : par exemple le travail de réception peut augmenter avec Q et si cela se justifie on pourrait approcher A par $A_0 + A_1 \times Q$.

Pour notre modèle de coût de gestion, nous supposerons A constant pour une marchandise donnée.

2) Coût de stockage

Le stockage de la marchandise occasionne un coût qui peut avoir plusieurs origines : assurances, impôts, détérioration de la marchandise, location de l'entrepôt, éclairage, chauffage, etc. Nous supposons que le coût de stockage pendant une courte période dt où le stock disponible est x est proportionnel à la valeur du stock et à dt.



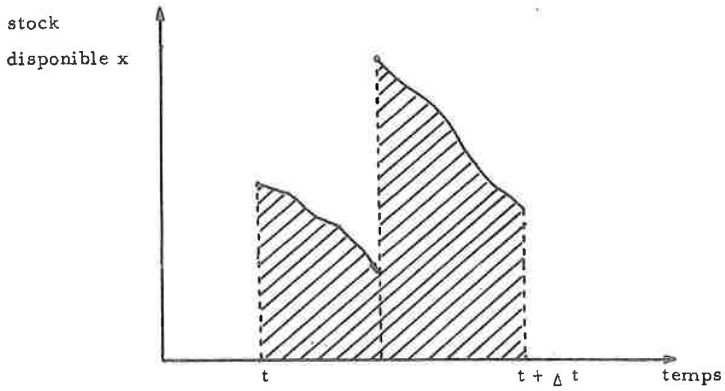
C : valeur de l'article

Cx : valeur du stock disponible x

Le coût de stockage sur l'intervalle (t, t + dt) est IC x dt

I est le coût de stockage par unité de temps et par unité de coût ; il est appelé taux de possession de la marchandise.

Soit x la fonction stock disponible (x est bornée sur tout intervalle, continue par morceaux, les discontinuités étant dues aux livraisons de commandes, et x est décroissante sur tout intervalle où elle est continue).



En utilisant ce qui précède, le coût de stockage sur (t, t + Δ t) est :

$$IC \int_t^{t+\Delta t} x(u)\, du$$ si I et C sont indépendants du temps.

Pour notre modèle de coût de gestion, nous supposerons que I et C sont constants pour une marchandise donnée.

3) Autres coûts

Nous supposons qu'il n'existe pas d'autres coûts dépendant de R ou Q (s'il existe des coûts de gestion indépendants de R et Q, nous n'avons pas à en tenir compte dans la mesure où nous voulons minimiser le coût de gestion considéré comme fonction de R et Q).

Pour certains systèmes il peut exister un coût de rupture de stock (dû par exemple à une perte de clientèle) ; ce coût de rupture de stock dans le cas des ventes manquées est souvent difficile à établir ; de plus nous ne savons pas à priori quelle qualité de service nous aurons à l'optimum en minimisant le coût de gestion sans aucune contrainte autre que $R \geq o$, $Q > o$.

Il paraît judicieux de faire fonctionner un système de stock de manière à assurer une certaine qualité de service, sans tenir compte du coût de rupture.

En résumé notre modèle de coût de gestion ne comporte qu'un coût de lancement de commande et un coût de stockage.

4 - QUALITE DE SERVICE - EXEMPLE DE PROBLEME

Soit T_r la durée de rupture de stock sur un intervalle de temps (0, T) ; nous appelons taux de rupture sur cette période le rapport Tr/T. Nous supposons que le système étudié est tel que $\tau = \lim_{T \to \infty} \frac{Tr}{T}$ existe, nombre que nous appelons taux de rupture de la gestion ; on a $0 \leq \tau < 1$; par exemple si $\tau = 0,1$, il y a en moyenne un jour de rupture sur 10 jours de gestion.

Nous mesurons la qualité de service par ce taux de rupture ; on pourrait la mesurer à partir de rapports tels que :

$$\frac{\text{durée de non rupture}}{\text{durée totale}}, \quad \frac{\text{durée de rupture}}{\text{durée de non rupture}}$$

$$\frac{\text{ventes manquées}}{\text{demande totale}}, \quad \frac{\text{ventes totales}}{\text{demande totale}}, \ldots$$

L'exemple de problème utilisant la formulation du coût de gestion et du taux de rupture que nous traiterons sera la minimisation du coût de gestion avec une contrainte de service : taux de rupture à ne pas dépasser.

CHAPITRE I

ETUDE DU MODELE DE GESTION DU STOCK DANS LE CAS DETERMINISTE

Nous supposons dans ce chapitre que le taux de la demande et le délai de livraison sont constants : cas déterministe.

Le plus souvent, dans la pratique, les délais de livraison et les taux de demande ne peuvent être décrits que suivant des processus aléatoires. Si ceux-ci sont "faiblement" aléatoires, les résultats obtenus dans le cas déterministe pourront être utilisés.

Nous allons établir la forme exacte de la fonction stock disponible, même lorsqu'il peut y avoir plusieurs commandes en attente de livraison. Elle nous permettra de donner une formulation exacte de notre modèle de coût de gestion et du taux de rupture.

Dans les ouvrages consultés (voir la bibliographie) la minimisation du coût de gestion est faite pour une qualité de service maximum : taux de rupture nul. Comme exemple d'utilisation des formulations, nous donnons ici une extension en minimisant le coût de gestion d'abord pour un taux de rupture donné (contrainte de service bilatérale) puis pour un taux de rupture maximum à ne pas dépasser (contrainte de service unilatérale) ; cette étude nous aidera à traiter le cas aléatoire dans les mêmes conditions.

De plus les optimums pour différents processus aléatoires de la demande et du délai de livraison peuvent nous permettre d'approcher l'optimum pour un processus "intermédiaire" de la demande et du délai (par exemple par interpolation) ; ainsi l'optimisation du cas déterministe peut être utilisée comme cas "limite" du cas aléatoire.

Nous utiliserons les notations suivantes :

R : seuil d'approvisionnement

Q : quantité de commande

λ : taux de la demande

δ : délai de livraison

A : coût de lancement d'une commande

I : taux de possession

C : valeur de l'article.

1 - EVALUATION DU COUT DE GESTION ET DU TAUX DE RUPTURE

1.1 Cas où la demande sur une période égale au délai de livraison est supérieure ou égale au seuil ($\lambda\,\delta \geq R$).

a) Propriétés de la fonction stock disponible

* Nous allons d'abord montrer que :

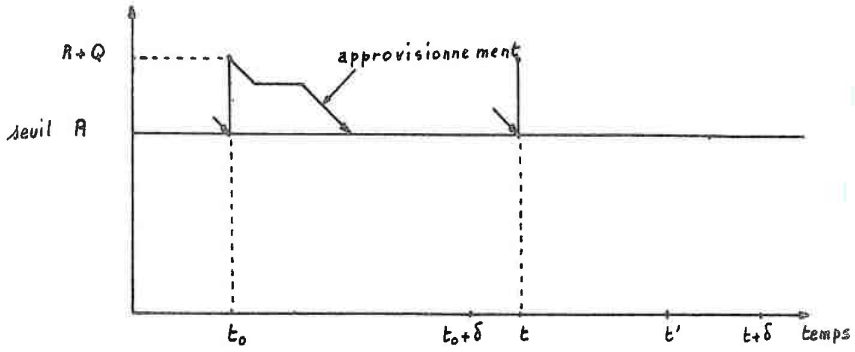
Quelles que soient les conditions initiales, si $R \leq \lambda\,\delta$, il existe une date à partir de laquelle les livraisons ne se produisent plus qu'à des instants où il y a rupture de stock.

Nous commençons à gérer le stock d'une marchandise avec un seuil R et une quantité de commande Q : ceci peut se produire dans la pratique lorsqu'il y a ouverture d'un magasin ou changement de modèle de gestion ou simplement changement des valeurs des variables de décision R ou Q.

A la mise en place de cette nouvelle gestion, il existe un certain stock disponible (éventuellement nul ou même supérieur à ce qui sera notre approvisionnement maximum : R + Q), un certain nombre de commandes en attente de livraison (éventuellement zéro) avec des quantités de commandes qui ne sont pas nécessairement égale à Q. Le premier travail à faire est de calculer l'approvisionnement ; s'il est inférieur à R nous lançons une ou plusieurs commandes groupées de la quantité Q.

Ces remarques déterminent les conditions initiales de la gestion du stock avec le seuil R et la quantité de commande Q.

Au bout d'un certain temps l'approvisionnement devient égal au seuil R et nous lançons une commande de la quantité Q : soit t_o cette date



L'approvisionnement à l'instant t_o est R + Q ;

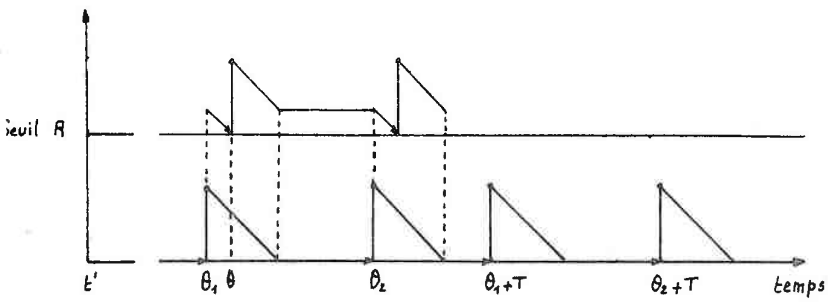
La durée de vente d'une quantité Q est Q/λ, donc l'approvisionnement sera de nouveau égal à R au bout d'un temps Q/λ s'il n'y a pas de rupture de stock et supérieur à Q/λ s'il y a rupture de stock. Ainsi nous pouvons affirmer qu'à partir de l'instant t_o, nous ne lançons des commandes qu'à des intervalles de temps au moins égaux à Q/λ.

Soit t un instant $\geq t_o + \delta$ où l'approvisionnement devient égal à R et où nous lançons une commande qui sera livrée à l'instant $t + \delta$. La quantité vendue sur $(t, t+\delta)$ est au plus égale au stock disponible à l'instant t augmenté des commandes (autres que celle de l'instant t) qui sont encore en attente de livraison à l'instant t c'est-à-dire qu'elle est au plus égale à R ; comme $R \leq \lambda\,\delta$, il y a au moins une rupture de stock sur $]\,t,\ t + \delta\,]$: soit t' une date de cet intervalle où le stock disponible s'annule. Les commandes livrées à partir de t' ont été lancées après t_o à des intervalles de temps au moins égaux à Q/λ ; elles sont livrées dans les mêmes conditions ; il en résulte que la première commande livrée sur $[\,t',\ +\infty\,[$ arrivent en rupture de stock et étant vendue au bout d'un temps égal à Q/λ, la commande suivante est livrée lorsqu'il y a de nouveau rupture de stock, et ainsi de suite. Ainsi à partir de t' le stock se trouve en rupture à chaque livraison de commande. c q f d.

* Périodicité de la fonction stock disponible

Soit t' une date de] t, t + δ] où le stock disponible est nul et où il y a livraison d'une commande.

La fonction stock disponible est périodique sur [t', + ∞ [et a pour période $\delta + \frac{mQ - R}{\lambda}$ où m = partie entière de $(\frac{R}{Q} + 1)$.



Appelons a la fonction approvisionnement, après passage de la commande s'il y a lieu et s la fonction stock disponible, après livraison de la commande s'il y a lieu.

Soient θ_1 et θ_2 deux dates consécutives où il y a livraison d'une commande telle que $t' \leq \theta_1 < \theta_2$.

$s(\theta_1) = s(\theta_2) = Q$.

$a(\theta_1)$ est un multiple de Q et $R < a(\theta_1) \leq R + Q$, d'où $a(\theta_1) = m \times Q$ avec $m = [\frac{R}{Q}] + 1$ ($[\frac{R}{Q}]$ désigne la partie entière de $\frac{R}{Q}$).

Soit $\theta > \theta_1$ l'instant le plus proche de θ_1 où il y a lancement d'une commande ; la quantité vendue sur (θ_1, θ) est $mQ - R$ donc $\theta - \theta_1 = \frac{mQ - R}{\lambda}$

la commande passée à l'instant θ sera livrée à l'instant $\theta + \delta = \theta_1 + \delta + \frac{mQ - R}{\lambda}$

Posons $T = \delta + \frac{mQ - R}{\lambda}$

Nous avons $s(\theta_1) = s(\theta_1 + T) = Q$;

de même $s(\theta_2) = s(\theta_2 + T) = Q$.

Il n'y a pas d'autre commande livrée entre $\theta_1 + T$ et $\theta_2 + T$.

Il en résulte que la fonction stock disponible est périodique de période T sur [t', + ∞ [.

D'autre part ∀ u ∈ [t', + ∞ [, nous avons d'après la définition de l'approvisionnement :

$a(u) = s(u)$ si $s(u) > R$

$a(u) = s(u) + ([\frac{R - s(u)}{Q}] + 1) \times Q$ si $s(u) \leq R$

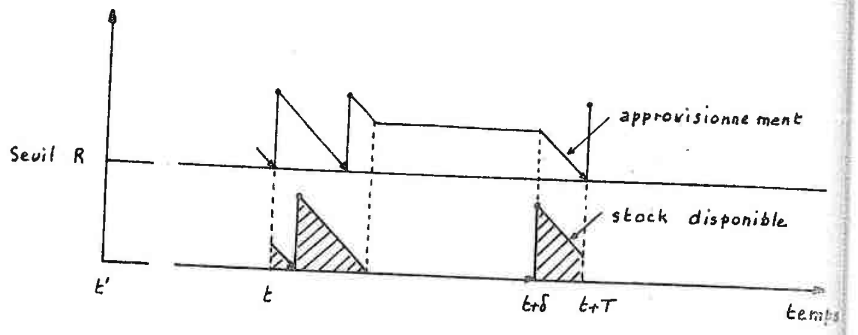
ce qui permet d'affirmer que sur [t', + ∞ [, la fonction approvisionnement est elle aussi périodique de période T.

b) Coût de gestion et taux de rupture

Nous avons vu qu'il existe une date t' à partir de laquelle une commande n'est livrée que si le stock est en rupture et les fonctions stock disponible et approvisionnement sont périodiques de période

$$T = \delta + \frac{mQ - R}{\lambda} \quad \text{où} \quad m = [\frac{R}{Q}] + 1.$$

Evaluons maintenant le coût de gestion par unité de temps et le taux de rupture.



Soit t une date supérieure ou égale à t' où il y a lancement d'une commande.

L'approvisionnement à l'instant t avant le passage de la commande est $R \leq \lambda\ \delta$ et le stock disponible à l'instant $t + \delta$ avant la réception de cette commande est nul donc la quantité vendue sur $(t,\ t + \delta)$ est R.

Sur $[\ t,\ t + \delta\ ]$, il y a lancement d'une commande à l'instant t et chaque fois qu'un volume Q de marchandise est vendu ; le nombre de commandes lancées sur cet intervalle est donc $m = [\ \frac{R}{Q}\ ] + 1$.

A l'instant $t + T$, il y a lancement d'une nouvelle commande.
Finalement sur $]\ t,\ t + T\ ]$,
le nombre de commandes lancées est : m
la quantité de marchandise vendue est : $m\ Q$
la durée de non rupture du stock est : $m\ Q/\lambda$
la durée de rupture du stock est : $\delta - R/\lambda$ (sur $(t,\ t + \delta)$ la quantité vendue est R donc la durée de non rupture est R/λ).

Appelons <u>cycle</u> un intervalle de temps $]\ t,\ t + T\ ]$ tel qu'il y a lancement d'une commande à l'instant t et que $T = \delta + \frac{m\ Q - R}{\lambda}$. La fin d'un cycle est le début d'un autre ; tous les cycles successifs venant après t' ont même durée T et même durée de rupture $\delta - \frac{R}{\lambda}$.

D'après sa définition le <u>taux de rupture de la gestion</u> est donc

$$\tau = \frac{\lambda\ \delta - R}{m\ Q + \lambda\ \delta - R}.$$

Sur un cycle $]\ t,\ t + T\ ]$ le coût total de gestion se compose de :

$m \times A$: coût de lancement des commandes

$IC \times m \times \frac{Q^2}{2\lambda}$: coût de stockage.

On en déduit que le <u>coût de gestion par unité de temps</u> est :

$$K = \frac{\lambda\ m}{m\ Q + \lambda\ \delta - R}\left(A + IC\ \frac{Q^2}{2\lambda}\right).$$

<u>Remarque</u> : $m = [\ \frac{R}{Q}\ ] + 1$, nombre de commandes lancées sur un cycle est aussi le nombre maximum de commandes en attente de livraison à un instant quelconque.

1.2 <u>Cas où la demande sur une période égale au délai de livraison est inférieure ou égale au seuil $(\lambda\ \delta \leq R)$.</u>

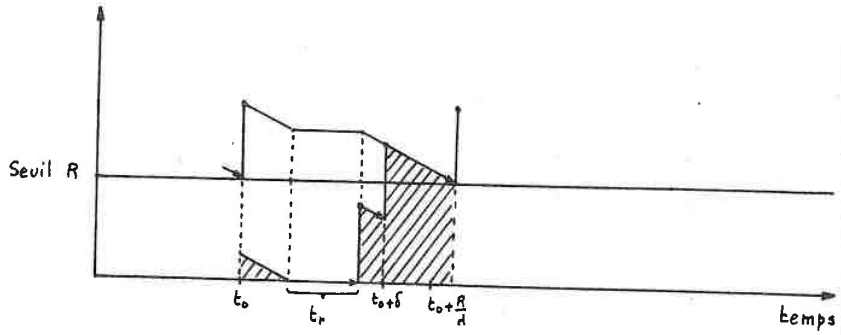
a) <u>Propriétés de la fonction stock disponible</u>

Nous allons montrer que :

<u>Quelles que soient les conditions intiales, si $R \geq \lambda\ \delta$, il existe une date à partir de laquelle chaque livraison de commande se produit lorsque le stock disponible est égal à $R - \lambda\ \delta$.</u>

Il est possible que sur un intervalle de temps $(t_o,\ t_o + \delta)$ apparaisse une durée de rupture de stock non nulle : par exemple, t_o est le début de gestion du stock avec un seuil R et une quantité de commande Q, le stock disponible à l'instant t_o est nul et la première commande arrive après t_o.

* Montrons qu'il ne peut y avoir de durée de rupture non nulle qu'initialement.



Soit t_o un instant où l'approvisionnement devient égal à R et où nous lançons une commande qui arrivera à l'instant $t_o + \delta$ et tel que des commandes non encore livrées à l'instant t_o arrivent au plus tard à l'instant $t_o + \delta$.

Soit t_r la durée de rupture, éventuellement nulle, qu'il y a entre le lancement de cette commande et le suivant :

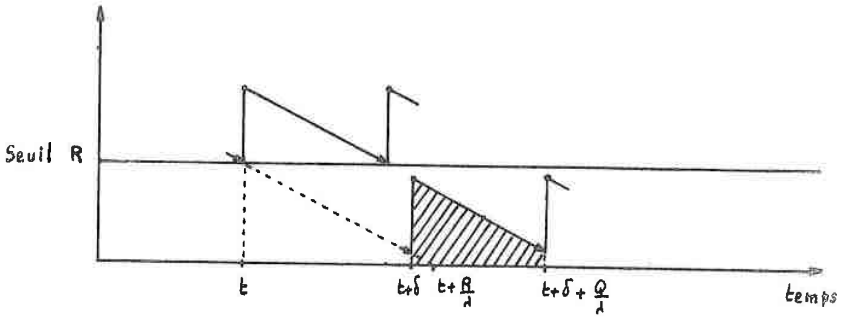
$$0 \leq t_r \leq \delta.$$

La quantité vendue sur $(t_o, t_o + \delta)$ est au plus : $\lambda\,\delta - \lambda\, t_r$. La quantité en stock à l'instant $t_o + \delta$ après la livraison de la commande est égale à : $R + Q$ - quantité vendue sur $(t_o, t_o + \delta)$; elle est donc supérieure ou égale à $R + Q - (\lambda\,\delta - \lambda\, t_r) = R + Q - \lambda\,\delta + \lambda\, t_r$. Le temps nécessaire pour épuiser ce stock est au moins : $\frac{R+Q}{\lambda} - \delta + t_r$. Ce stock ne peut donc s'épuiser qu'à un instant supérieur ou égal à $t_1 = t_o + \delta + \frac{R+Q}{\lambda} - \delta + t_r = t_o + \frac{R+Q}{\lambda} + t_r$. La première commande faite après celle de l'instant t_o est lancée à l'instant : $t_o + t_r + \frac{Q}{\lambda}$; elle sera donc livrée à l'instant $t_2 = t_o + t_r + \frac{Q}{\lambda} + \delta$. Comme $t_1 \geq t_2$, <u>la durée de rupture entre les livraisons des commandes lancées aux instants t_o et $t_o + t_r + \frac{Q}{\lambda}$ est nulle.</u>

De la même manière la durée de rupture de stock est nulle entre les livraisons de la commande lancée à l'instant $t_o + t_r \frac{Q}{\lambda}$ et de la commande suivante, et ainsi de suite.

Par conséquent, ceci nous montre que <u>la durée de rupture de stock sur $[\, t_o + \delta, +\infty\,[$ est nulle.</u>

* <u>Périodicité de la fonction stock disponible</u>.



Soit maintenant t une date de $[\, t_o + \delta, +\infty\,[$ où il y a passation d'une commande qui sera livrée à l'instant $t + \delta$.

L'approvisionnement à l'instant t avant le lancement de la commande est R ; la durée de rupture sur $(t, t + \delta)$ est nulle donc la quantité vendue sur cet intervalle est $\lambda\,\delta$; ainsi le stock disponible à l'instant $t + \delta$ avant réception de la commande est $R - \lambda\,\delta$.

La commande suivante sera lancée à l'instant $t + \frac{Q}{\lambda}$ et livrée à l'instant $t + \frac{Q}{\lambda} + \delta$ quand le stock disponible atteint la valeur $R - \lambda\,\delta$ et ainsi de suite. Finalement sur $[\, t + \delta, +\infty\,[$, le stock disponible est une fonction périodique de période $\frac{Q}{\lambda}$, chaque livraison ayant lieu lorsque le stock disponible atteint la valeur $R - \lambda\,\delta$.

b) Coût de gestion et taux de rupture

La durée de rupture sur $[\, t_o + \delta, \infty\, [$ est nulle donc le taux de rupture est nul.

Sur un intervalle $]\, \theta, \theta + \frac{Q}{\lambda}\,]$, $\theta \geq t + \delta$,

il y a lancement d'une commande dont le coût est A

le coût de stockage est $IC \times (R - \lambda\, \delta + \frac{Q}{2}) \times \frac{Q}{\lambda}$

donc le coût de gestion par unité de temps sur cet intervalle est :

$$\frac{\lambda}{Q}\, (A + IC \times (R - \lambda\, \delta + \frac{Q}{2}) \times \frac{Q}{\lambda}) = \frac{\lambda}{Q}\, (A + IC\, \frac{Q^2}{2\lambda}) + IC\, (R - \lambda\, \delta)$$

Comme la fonction stock disponible est périodique de période $\frac{Q}{\lambda}$ sur $[\, t + \delta, + \infty\, [$, le coût de gestion par unité de temps est :

$$\frac{\lambda}{Q}\, (A + IC\, \frac{Q^2}{2\lambda}) + IC\, (R - \lambda\, \delta).$$

1.3 Résumé

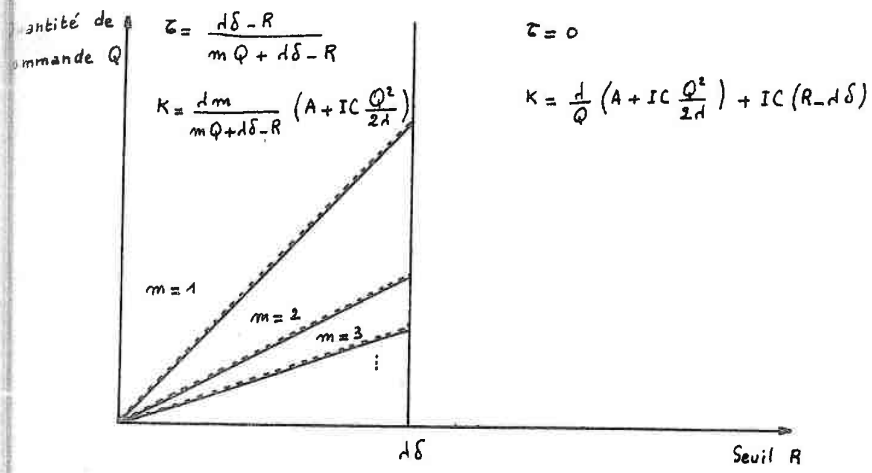
τ : taux de rupture, K : coût de gestion, $m = [\, \frac{R}{Q}\,] + 1$

1) $R \leq \lambda\, \delta$ $\qquad \tau = \dfrac{\lambda\, \delta - R}{m\, Q + \lambda\, \delta - R}$

$$K = \frac{\lambda\, m}{m\, Q + \lambda\, \delta - R}\, (A + IC\, \frac{Q^2}{2\lambda})$$

2) $R \geq \lambda\, \delta$ $\qquad \tau = 0$

$$K = \frac{\lambda}{Q}\, (A + IC\, \frac{Q^2}{2\lambda}) + IC\, (R - \lambda\, \delta)$$



2 - OPTIMISATION AVEC CONTRAINTE DE SERVICE BILATERALE

Appelons K (R, Q) et τ (R, Q) les coût de gestion et taux de rupture donnés par le paragraphe précédent lorsque le seuil est R et la quantité commandée Q. Il s'agit de minimiser le coût de gestion de manière que le taux de rupture ait une valeur donnée τ_o $(0 \leq \tau_o < 1)$.

L'ensemble des politiques admissibles ou domaine d'optimisation est l'ensemble des points (R, Q) vérifiant $R \geq 0$, $Q > 0$ et la contrainte bilatérale $\tau\, (R, Q) = \tau_o$.

2.1 Cas où le taux de rupture est nul ($\tau_o = 0$)

τ ne s'annule que si $R \geq \lambda\, \delta$; le domaine d'optimisation est donc l'ensemble des points (R, Q) vérifiant $R \geq \lambda\, \delta$ et $Q > 0$. Sur ce domaine $K\, (R, Q) = \frac{\lambda}{Q}\, (A + IC\, \frac{Q^2}{2\lambda}) + IC\, (R - \lambda\, \delta)$ d'où $\frac{\partial K}{\partial R}\, (R, Q) = IC > 0$;

un optimum ne peut donc se trouver que sur la droite $R = \lambda\ \delta$.

$$\frac{\partial K}{\partial Q}(R, Q) = \frac{IC}{2} - \frac{\lambda A}{Q^2}$$ qui s'annule dans le domaine pour

$$Q = \sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}}$$

Si $\tau_o = 0$, le point optimum (R^*, Q^*) existe et est unique

$$R^* = \lambda\delta \text{ et } Q^* = Qw = \sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}}$$

Qw est la quantité de Wilson

Pour la politique optimale, le stock s'annule au moment de la livraison d'une commande.

2.2 Cas où le taux de rupture est positif $(0 < \tau_o < 1)$

On accepte dans ce cas un taux de rupture non nul.

$\tau(R, Q)$ ne peut prendre la valeur τ_o que sur le domaine $R \geq 0$, $Q > 0$ et $R < \lambda\ \delta$.

Sur ce domaine K et τ présentent des discontinuités en tout point (nQ, Q) $n = 1, 2, 3, \ldots$

En effet si le seuil R est égal à nQ, $\left[\frac{R}{Q}\right] + 1 = n + 1$

d'où $K(R, Q) = K_1 = \frac{\lambda(n+1)}{Q + \lambda\ \delta}\left(A + IC\ \frac{Q^2}{2\lambda}\right)$

et $\tau(R, Q) = \tau_1 = \frac{\lambda\ \delta - nQ}{Q + \lambda\ \delta}$

D'autre part : $\lim\limits_{R \xrightarrow{<} nQ} K(R, Q) = \frac{n}{o}\left(A + IC\ \frac{Q^2}{2\lambda}\right) < K_1$

et $\lim\limits_{R \xrightarrow{<} nQ} \tau(R, Q) = \frac{\lambda\ \delta - nQ}{\lambda\ \delta} > \tau_1$

Appelons région (m) la région définie par $R - (m-1)Q \geq 0$ et $R - mQ < 0$ sur laquelle $[R/Q] + 1 = m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$.

Sur une telle région K et τ sont des fonctions continues de R et Q.

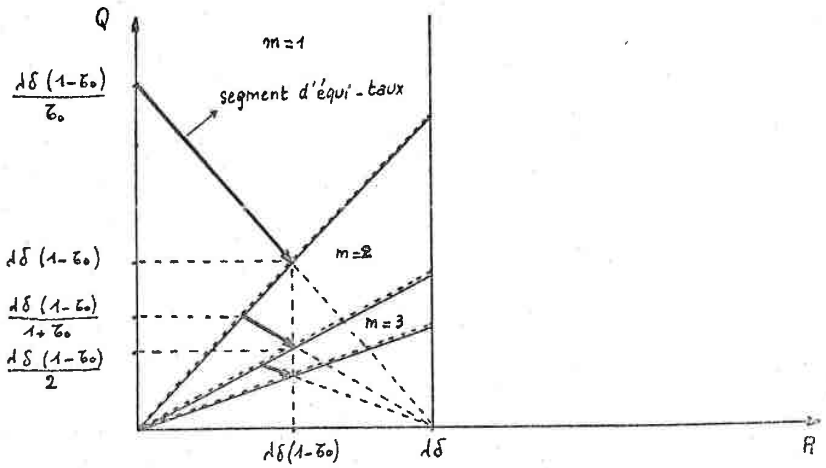
2.2.1 Courbe d'équi-taux

Sur la région (m) $\tau(R, Q) = \tau_o \Longleftrightarrow R - \frac{\tau_o}{\tau_o - 1} mQ - \lambda\ \delta = 0$

La courbe de niveau du taux de rupture (ou d'équi-taux) correspondant à τ_o se compose pour la région (m) du segment intersection de (m) et de la droite $R - \frac{\tau_o}{\tau_o - 1} mQ + \lambda\ \delta = 0$.

Les ordonnées des extrémités de ce segment sont $\frac{\lambda\ \delta\ (1 - \tau_o)}{m}$ et $\frac{\lambda\ \delta\ (1 - \tau_o)}{m - 1 + \tau_o}$. Le segment d'équi-taux de la région (m) est le segment de la droite $R + \frac{\tau_o}{1 - \tau_o} mQ - \lambda\ \delta = 0$ défini par :

$$\frac{\lambda\ \delta\ (1 - \tau_o)}{m} < Q \leq \frac{\lambda\ \delta\ (1 - \tau_o)}{m - 1 + \tau_o}.$$



sur la région (m) et pour $R \leq \lambda\,\delta$ le coût de gestion K (R, Q) est égal à

$$K_m(R, Q) = \frac{\lambda m}{m\,Q + \lambda\,\delta - R}\left(A + IC\,\frac{Q^2}{2\lambda}\right).$$

Sur le segment d'équi-taux, $R = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1}\,m\,Q + \lambda\,\delta$, donc le coût de gestion sur ce segment est égal à :

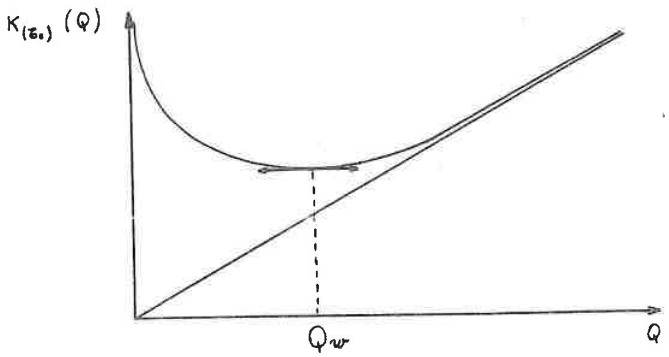
$\frac{\lambda\,(1 - \tau_o)}{Q}\left(A + IC\,\frac{Q^2}{2\lambda}\right)$. Il en résulte que sur la courbe d'équi-taux, le coût de gestion est $K_{(\tau_o)}(Q) = \lambda\,(1 - \tau_o)\left(\frac{A}{Q} + IC\,\frac{Q}{2\lambda}\right)$, expression indépendante de m.

2.2.2 Minimisation du coût de gestion sur la courbe d'équi-taux

On est donc amené à chercher un minimum de $K_{(\tau_o)}(Q)$ sur l'ensemble des Q vérifiant : $\frac{\lambda\,\delta(1 - \tau_o)}{m} < Q \leq \frac{\lambda\,\delta\,(1 - \tau_o)}{m - 1 + \tau_o}$ m = 1, 2, 3,..

$$K'_{(\tau_o)}(Q) = \lambda\,(1 - \tau_o)\left(\frac{IC}{2\lambda} - \frac{A}{Q^2}\right)$$

$K'_{(\tau_o)}(Q)$ s'annule pour $Q = \sqrt{\frac{2\,\lambda\,A}{IC}} = Qw$ (quantité de Wilson).



Posons $v = \lambda\,\delta\,(1 - \tau_o)$. Le point à tangente horizontale Qw appartient à un segment $\left]\frac{v}{m}, \frac{v}{m - 1 + \tau_o}\right]$ ou n'appartient à aucun de ces segments ($K_{(\tau_o)}$ est alors monotone sur chacun d'eux).

On a alors les cas possibles suivants :

1) il existe m tel que $v/m < Qw \leq \frac{v}{m - 1 + \tau_o}$

L'optimum est alors $Q^* = Qw$

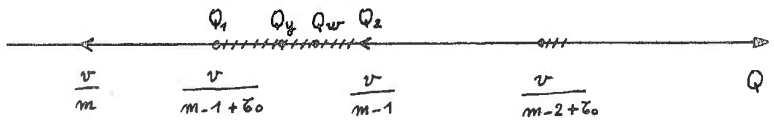
$$R^* = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1}\,m\,Qw + \lambda\,\delta$$

Le coût de gestion minimum est donc $(1 - \tau_o)\sqrt{2\,\lambda\,A\,IC} = (1 - \tau_o)\,Kw$

Kw est le coût minimum lorsque $\tau_o = 0$.

2) Il existe $m \geq 2$ tel que $\frac{v}{m - 1 + \tau_o} < Qw \leq \frac{v}{m - 1}$

Posons $Q_1 = v/(m - 1 + \tau_o)$ et $Q_2 = v/(m - 1)$.



Comparons $K_{(\tau_o)}(Q_1)$ et $K_{(\tau_o)}(Q_2)$

$$K_{(\tau_o)}(Q_1) = \frac{A\,(m - 1 + \tau_o)}{\delta} + \frac{IC\,\lambda\,\delta\,(1 - \tau_o)^2}{2\,(m - 1 + \tau_o)}$$

$$K_{(\tau_o)}(Q_2) = \frac{A\,(m - 1)}{\delta} + \frac{IC\,\lambda\,\delta\,(1 - \tau_o)^2}{2\,(m - 1)}$$

$$D = K_{(\tau_o)}(Q_1) - K_{(\tau_o)}(Q_2)$$

$$= \frac{A\,\tau_o}{\delta} - \frac{IC\,\lambda\,\delta\,(1-\tau_o)^2\,\tau_o}{2\,(m-1)\,(m-1+\tau_o)}$$

D est négatif si et seulement si $Qw < \dfrac{v}{\sqrt{(m-1)\,(m-1+\tau_o)}}$

Posons $\underline{Qy = v/\sqrt{(m-1)\,(m-1+\tau_o)}}$; nous avons $Q_1 < Qy < Q_2$.

On a alors les cas suivants :

a) $\underline{Qw \leq Qy}$

L'optimum est alors $Q^* = Q_1$

$$R^* = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1}\, m\, Q_1 + \lambda\,\delta = (m-1)\, Q_1$$

(R^*, Q^*) est un point de la région (m)

b) $\underline{Qw > Qy}$

En toute rigueur, il n'existe aucun optimum puisque Q_2 n'appartient pas au domaine de minimisation de $K_{(\tau_o)}(Q)$. Il est possible de trouver $Q' > Q_2$ tel que :

$K_{(\tau_o)}(Q_1) > K_{(\tau_o)}(Q') > K_{(\tau_o)}(Q_2)$ et $K_{(\tau_o)}(Q')$ aussi voisin de $K_{(\tau_o)}(Q_2)$ que l'on veut à condition de prendre Q' suffisamment prés de Q_2.

A Q' correspond le seuil $R' = \dfrac{\tau_o}{\tau_o - 1}\,(m-1)\,Q' + \lambda\,\delta$

(R', Q') est un point de la région (m-1).

3) $\underline{\dfrac{v}{\tau_o} < Qw}$

L'optimum est $Q^* = v/\tau_o$, $R^* = 0$

Exemple numérique

Unité de temps : année

demande par unité de temps : $\lambda = 30\,000$

délai de réapprovisionnement : $\delta = 1/24$ ($\sim$15 jours)

valeur de l'article : $C = 10$

coût de lancement d'une commande : $A = 10$

taux de possession : $I = 0,2$

taux de rupture exigé : $\tau_o = 0,1$

Nous avons $K_{(\tau_o)}(Q) = \dfrac{270\,000}{Q} + 0,9\,Q$ $\qquad Qw \sim 547,7$

$\lambda\,\delta\,(1-\tau_o) = 1125 > Qw$

$\dfrac{\lambda\,\delta\,(1-\tau_o)}{2} = 562,5 > Qw$

$\dfrac{\lambda\,\delta\,(1-\tau_o)}{3} = 375 < Qw$

$\dfrac{\lambda\,\delta\,(1-\tau_o)}{2+\tau_o} \sim 535,7 < Qw$

Nous avons $535,7 < 547,7 \leq 562,5$ soit

$$\frac{v}{2+\tau_o} < Qw \leq \frac{v}{2}$$

Nous sommes dans le cas 2) pour $m = 3$

$$\frac{\lambda\,\delta\,(1-\tau_o)}{\sqrt{2\,(2+\tau_o)}} \sim 548,8$$

$547,7 < 548,8$ soit $Qw < Qy$

L'optimum est donc $Q^* = 535,7$

$R^* = (m-1)\,Q^* = 1071,4$

Le nombre maximum de commandes en attente de livraison est $m = 3$.

Remarque : $K_{(\tau_o)}$ (535, 7) $\sim$ 986,14

$K_{(\tau_o)}$ (562, 5) $\sim$ 986, 25

L'écart entre les deux coûts est de l'ordre du 1/10 000 du coût minimum pour un écart de la quantité de commande de l'ordre de 5/100 de la quantité optimum. Ainsi dans la pratique, on peut être amené pour des raisons de commodité à modifier légèrement la quantité de commande optimum sans pour autant modifier de façon appréciable le coût minimum.

3 - OPTIMISATION AVEC CONTRAINTE DE SERVICE UNILATERALE

Nous avons minimisé le coût de gestion K (R, Q) pour $Q > 0$, $R \geq 0$ et une contrainte de service bilatérale τ (R, Q) = τ_o. L'optimum existe et est unique ou n'existe pas, auquel cas on peut trouver un point satisfaisant dans la pratique.

Etant donné un taux de rupture maximum τ_o, ne serait-il pas possible de minimiser davantage le coût de gestion en exigeant seulement que le taux de rupture soit inférieur ou égal à τ_o ?

Dans ce paragraphe, nous cherchons donc à minimiser le coût de gestion avec la contrainte de service unilatérale : $\tau(R,Q) \leq \tau_o$.

Le domaine d'optimisation est $\mathcal{D} = \bigcup_{m=1,2,\ldots} \mathcal{D}_m$

où $\mathcal{D}_m$ est défini par

$$R - (m-1)\,Q \geq 0$$

$$R - mQ < 0$$

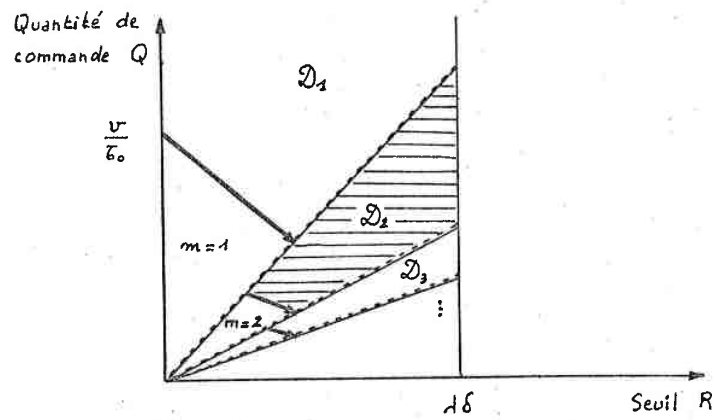
$$R + \frac{\tau_o}{1-\tau_o}\, mQ - \lambda\,\delta \geq 0$$

$$R - \lambda\,\delta < 0$$

Si $\tau_o = 0$, la contrainte unilatérale $\tau(R,Q) \leq \tau_o$ équivaut à la contrainte bilatérale $\tau(R,Q) = \tau_o$.

Nous avons vu que l'optimum pour $\tau(R,Q) = 0$ se trouve sur la droite $R = \lambda\,\delta$ et que $\tau(R,Q) = 0$ pour $R \geq \lambda\,\delta$.

C'est pourquoi nous limitons $\mathcal{D}_m$ par $R - \lambda\,\delta < 0$.



3.1 Remarques préliminaires

(1) Sur le domaine (m), pour $R \leq \lambda\,\delta$, le coût de gestion K (R, Q) est égal à $K_m(R,Q) = \dfrac{\lambda m}{mQ + \lambda\,\delta - R}\left(A + IC\,\dfrac{Q^2}{2\lambda}\right)$

Nous avons $\dfrac{\partial K_m}{\partial R}(R,Q) = \dfrac{\lambda\, m}{(mQ + \lambda\,\delta - R)^2}\left(A + IC\,\dfrac{Q^2}{2\lambda}\right)$

donc $\dfrac{\partial K_m}{\partial R}(R, Q) > 0$ pour $R \geq 0$, $R \leq \lambda\,\delta$, $Q > 0$

(2) En tout point (R', Q') d'un segment $R - (m-1)\,Q = 0$, $R \geq 0$, $R < \lambda\,\delta$ le coût de gestion est discontinu et diminue lorsqu'on passe de la région (m) à la région (m-1) $(m > 1)$

$$R' = (m-1)\,Q'$$

$$K(R', Q') = K_m(R', Q') = \frac{\lambda\, m}{Q' + \lambda\,\delta}\left(A + IC\,\frac{Q'^2}{2\lambda}\right) = C_1$$

La limite de K (R, Q) lorsque (R, Q) tend vers (R', Q') en appartenant à la région (m-1) est :

$$K_{m-1}(R', Q') = \frac{(m-1)}{\delta}\left(A + IC\,\frac{Q'^2}{2\lambda}\right) = C_2$$

$$C_1 - C_2 = \frac{\lambda\,\delta - (m-1)\,Q'}{\delta\,(Q' + \lambda\,\delta)}\left(A + IC\,\frac{Q'^2}{2\lambda}\right) > 0$$

(3) D'après les remarques (1) et (2) :

l'optimum s'il existe ne peut se trouver que sur la courbe d'équi-taux ou les segments des droites $R - m\,Q = 0$ joignant les extrémités de 2 segments d'équi-taux $(m \geq 1)$ ou sur la demi-droite $R = 0$, $Q \geq \lambda\,\delta\,(1-\tau_o)/\tau_o$.

(4) Le segment d'équi-taux de la région (m) correspondant à un taux de rupture τ $(0 < \tau < 1)$ se trouve sur la demi-droite définie par :

$$R + \frac{\tau}{1-\tau}\,m\,Q - \lambda\,\delta = 0, \quad Q > 0.$$

Sur cette demi-droite, nous avons vu que $K_m(R, Q)$ prend la valeur $K_{(\tau)}(Q) = \lambda\,(1-\tau)\left(\frac{A}{Q} + IC\,\frac{Q}{2\lambda}\right)$ indépendante de m. Le minimum de $K_{(\tau)}(Q)$, $Q > 0$, est atteint pour $Q = Qw$, indépendamment de τ.

(5) Sur le segment défini par $R - (m-1)\,Q = 0$, $R \geq 0$, $R \leq \lambda\,\delta$ le coût de gestion est $K_m(R, Q) = K_m((m-1)\,Q, Q)$

$$= \frac{\lambda\, m}{Q + \lambda\,\delta}\left(A + IC\,\frac{Q^2}{2\lambda}\right)$$

Appelons $C_m(Q)$ cette fonction.

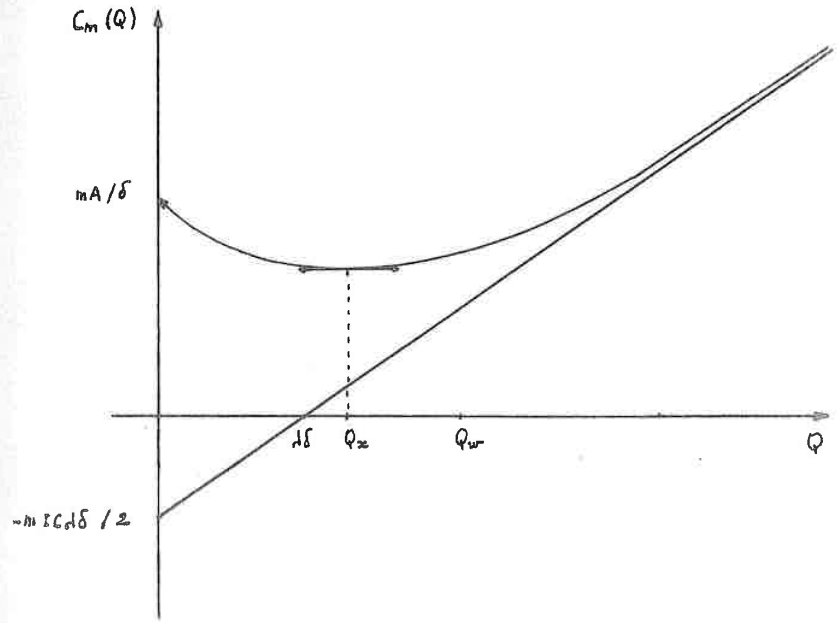
$$C'_m(Q) = \frac{m}{2\,(Q + \lambda\,\delta)^2}\left(IC\,Q^2 + 2\,IC\,\lambda\,\delta\,Q - 2\,A\,\lambda\right)$$

$C'_m(Q)$ admet $Qx = -\lambda\,\delta + \sqrt{\lambda^2\,\delta^2 + \frac{2A\lambda}{IC}}$ comme zéro positif.

$$\frac{Q^2}{Q + \lambda\,\delta} = Q - \lambda\,\delta + \frac{\lambda^2\,\delta^2}{Q + \lambda\,\delta} \quad \text{donc}$$

$$C_m(Q) = m\left(\frac{IC}{2}\,(Q - \lambda\,\delta) + \frac{IC\,\lambda^2\,\delta^2 + 2\,\lambda\,A}{2\,(Q + \lambda\,\delta)}\right)$$

On en déduit l'allure de la fonction $C_m(Q)$ sur $]\,0, +\infty\,[$.



(6) $Qw = \sqrt{\frac{2\lambda A}{IC}}$, $Qx = -\lambda\,\delta + \sqrt{\lambda^2\,\delta^2 + \frac{2A\lambda}{IC}}$

On vérifie facilement que $Qx < Qw$

(7) Soit τ une valeur non nulle du taux de rupture : $0 < \tau < 1$

Posons $v = \lambda \delta (1 - \tau)$

si $Qw \leq \frac{v}{m-1}$ pour $m \geq 2$, alors $Qx < \frac{v}{m-1+\tau}$

$n = m-1$. On vérifie facilement que $Qx < \frac{v}{n+\tau}$

si et seulement si $Qw^2 < \frac{\lambda^2 \delta^2 (1-\tau)(2n+1+\tau)}{(n+\tau)^2}$

Appelons A le second membre de l'inégalité précédente.

$\frac{v^2}{n^2} < A$ est logiquement équivalent à :

$\tau^3 + \tau^2 (2n-1) + \tau (n-1) 2n + 2n^3 > 0$, inégalité vraie puisque $0 < \tau < 1$ et $n \geq 1$.

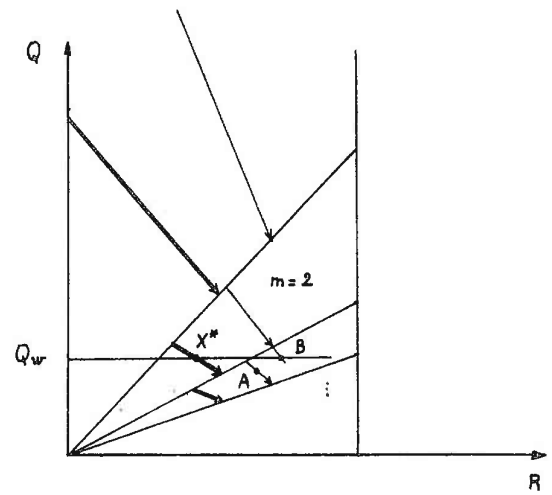
On a donc $Qw^2 \leq \frac{v^2}{n^2} < A$ donc $Qw^2 < A$ c q f d.

3.2 Optimisation dans les différents cas

Posons $v = \lambda \delta (1 - \tau_o)$. Nous avons les différents cas possibles :

1) il existe $m \geq 1$ tel que : $\frac{v}{m} < Qw \leq \frac{v}{m-1+\tau_o}$ (m entier)

si m existe, il est unique.



Pour cette figure m = 2.

Soit X^* le point de la courbe d'équi-taux relative à τ_o ayant pour ordonnée Qw. X^* appartient à $\mathfrak{D}_m$.

Montrons que X^* minimise le coût de gestion :

Soit A un point quelconque de $\mathfrak{D}$; le taux de rupture en A est $\tau \leq \tau_o$. Traçons la courbe d'équi-taux relative à τ ; le segment d'équi-taux de la région (m) se trouve sur la droite $R + \frac{\tau}{1-\tau} m Q - \lambda \delta = 0$; appelons B le point de cette droite qui a pour ordonnée Qw. Son abscisse inférieure à $\lambda \delta$, est supérieure à celle de X^*.

Nous pouvons affirmer :

* le coût de gestion en A, K (A) est supérieur ou égal à K_m (B) d'après la remarque préliminaire (4).
* $K_m (B) \geq K_m (X^*)$ d'après la remarque (1).

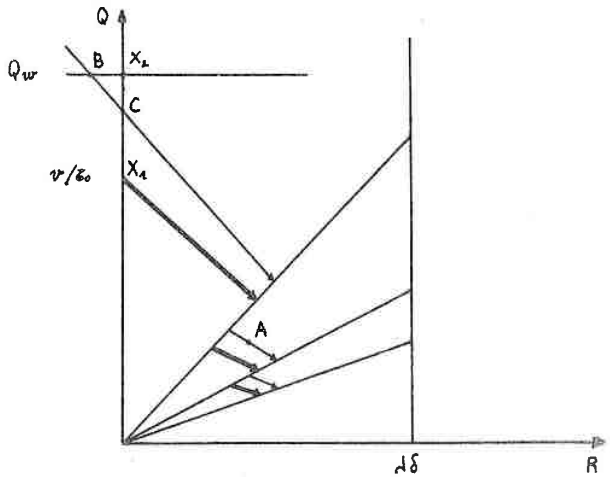
Comme $K_m (X^*)$ est égal au coût de gestion $K (X^*)$, nous avons

$K (A) \geq K (X^*)$ c q f d.

Dans ce cas l'optimum est : $X^* = (R^*, Q^*)$

où $Q^* = Qw$, $R^* = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1} m\, Qw + \lambda\, \delta$

2) $\frac{v}{\tau_o} < Qw$



Soient X_1 et X_2 les points d'ordonnées v/τ_o et Qw, d'abscisse nulle. Montrons que l'optimum ne peut se trouver que sur le segment d'extrémités X_1 et X_2.

Soient A un point quelconque de $\mathcal{D}$ et τ le taux de rupture en A. Traçons la courbe d'équi-taux passant par A ; le segment d'équi-taux de la région (1) se trouve sur la droite $R + \frac{\tau}{1-\tau} Q - \lambda\, \delta = 0$; appelons B le point de cette droite d'ordonnée Qw.

Si l'abscisse de B est supérieure ou égale à 0, nous pouvons affirmer :

* $K(A) \geq K_1(B)$ d'après (4)
* $K_1(B) \geq K_1(X_2)$ d'après (1)

d'où $K(A) \geq K(X_2)$

si l'abcisse de B est négative, soit C le point de la droite $R + \frac{\tau}{1-\tau} Q - \lambda\, \delta = 0$ d'abscisse nulle. C se trouve sur le segment $X_1 X_2$.

Nous avons $K(A) \geq K(C)$ d'après (4) c. q. f. d.

Il nous reste à étudier le coût de gestion sur $X_1 X_2$.

a) $Qx < v/\tau_o$

D'après les remarques préliminaires (5) et (6), le coût de gestion sur $X_1 X_2$ est minimum en X_1.

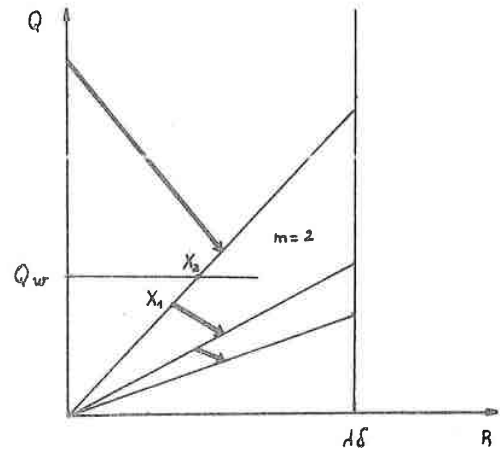
L'optimum est : (R^*, Q^*) où $R^* = 0$, $Q^* = v/\tau_o$

b) $Qx \geq v/\tau_o$

Toujours d'après les remarques (5) et (6), le coût de gestion sur $X_1 X_2$ est minimum au point d'ordonnée Qx.

L'optimum est : (R^*, Q^*) où $R^* = 0$, $Q^* = Qx$

3) Il existe $m > 1$ tel que $\frac{v}{m-1+\tau_o} < Qw \leq \frac{v}{m-1}$



Pour la figure m = 2.

Soient X_1 et X_2 les points de la droite $R - (m-1)\,Q = 0$ d'ordonnées $v/(m-1+\tau_o)$ et Qw. En appliquant le même raisonnement que dans le cas 2), l'optimum, s'il existe ne peut se trouver que sur le segment $X_1 X_2$.

Nous sommes donc amené à étudier le coût de gestion sur $X_1 X_2$, c'est-à-dire $C_m(Q)$ pour $v/m-1+\tau_o \leq Q \leq Qw$. Comme $Qx < \frac{v}{m-1+\tau_o}$ d'après la remarque (7) et d'après l'allure de $C_m(Q)$, l'optimum s'il existe ne peut se trouver qu'en X_1, point où la contrainte de service est saturée.

Le résultat est donc celui du paragraphe 2.2.2.

3.3 Résumé et remarques

Problème : $0 \leq \tau_o < 1$. Minimiser $K(R, Q)$ pour $R \geq 0$, $Q > 0$

$\tau(R, Q) \leq \tau_o$.

Posons $v = \lambda\,\delta\,(1-\tau_o)$

$$Qw = \sqrt{\frac{2A\lambda}{IC}}$$

$$Qx = -\lambda\,\delta + \sqrt{\lambda^2\,\delta^2 + \frac{2A\lambda}{IC}}$$

$$Kw = \sqrt{2\,A\,\lambda\,IC}$$

$$K_{(\tau_o)}(Q) = \lambda\,(1-\tau_o)\left(\frac{A}{Q} + IC\,\frac{Q}{2\lambda}\right)$$

A) $\underline{\tau_o = 0}$

L'optimum (R^*, Q^*) existe et $R^* = \lambda\,\delta$, $Q^* = Qw$.

Le coût de gestion minimum est Kw.

B) $\underline{0 < \tau_o < 1}$

1) $\frac{v}{\tau_o} < Qw$.

L'optimum (R^*, Q^*) existe et $R^* = 0$

a) si $\frac{v}{\tau_o} < Qx$, $Q^* = Qx$

b) si $\frac{v}{\tau_o} \geq Qx$, $Q^* = \frac{v}{\tau_o}$

2) Il existe $m \geq 1$ tel que $\frac{v}{m} < Qw \leq \frac{v}{m-1+\tau_o}$

L'optimum (R^*, Q^*) existe et $R^* = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1}\,m\,Qw + \lambda\,\delta$

$Q^* = Qw$

Le coût de gestion minimum est $(1-\tau_o)\,Kw$.

3) Il existe $m \geq 2$ tel que $\frac{v}{m-1+\tau_o} < Qw \leq \frac{v}{m-1}$

Posons $Q_1 = \frac{v}{m-1+\tau_o}$

$Q_2 = \frac{v}{m-1}$

$Qy = \frac{v}{\sqrt{(m-1)\,(m-1+\tau_o)}}$

a) $Qw \leq Qy$

L'optimum (R^*, Q^*) existe et $Q^* = Q_1$, $R^* = (m-1)\,Q_1$

b) $Qw > Qy$

En toute rigueur l'optimum n'existe pas.

Il existe $Q' > Q_2$ tel que : $K_{(\tau_o)}(Q_1) > K_{(\tau_o)}(Q') > K_{(\tau_o)}(Q_2)$

et $K_{(\tau_o)}(Q')$ aussi voisin de $K_{(\tau_o)}(Q_2)$ que l'on veut à condition de prendre Q' suffisamment voisin de Q_2.

Nous pouvons prendre comme point "satisfaisant" (R', Q')

où $R' = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1}\,(m-1)\,Q' + \lambda\,\delta$.

Un tel point appartient à la région (m-1).

Exemple numérique

unité de temps : année

demande par unité de temps : $\lambda = 30\,000$

délai de réapprovisionnement : $\delta = 1/24$ ($\sim$ 15 jours)

valeur de l'article : $C = 10$

coût de lancement d'une commande : $A = 10,5$

taux de possession : $I = 0,2$

taux de rupture maximum : $\tau_o = 0,1$

Nous avons $K_{(\tau_o)}(Q) = \frac{283\,500}{Q} + 0,9\,Q$

$Qw \sim 561,2$

$v = \lambda\,\delta\,(1 - \tau_o) = 1125 > Qw$

$\frac{v}{2} = 562,5 > Qw$

$\frac{v}{2+\tau_o} \sim 535,7 < Qw$

Nous avons donc $\frac{v}{2+\tau_o} < Qw \leq \frac{v}{2}$ (cas B) 3) pour m = 3)

$Qy \sim 548,8$ $\quad Qw > Qy$ donc <u>l'optimum n'existe pas.</u>

$Q_1 \sim 535,7$ $\quad K_{(\tau_o)}(Q_1) \sim 1011,34$

$Q_2 = 562,5$ $\quad K_{(\tau_o)}(Q_2) \sim 1010,25$

<u>choix d'un point satisfaisant</u>.

L'écart entre les deux coûts est de l'ordre du 1/1000 du coût minimum vers lequel le coût de gestion peut tendre.

Si on considère que cet écart est négligeable, on peut prendre comme point satisfaisant (R', Q') avec $Q' = Q_1$ et $R' = (m-1) \times Q_1 = 2 \times 535,7 = 1071$ pour lequel le coût de gestion est 1011,34.

Supposons maintenant que l'on trouve cet écart trop grand et que l'on considère comme négligeable un coût de 0,05.

Nous cherchons alors $Q' > Q_2$ tel que $K_{(\tau_o)}(Q') - K_{(\tau_o)}(Q_2) \leq 0,05$.

Pour $Q' = 564$ $\quad K_{(\tau_o)}(Q') \sim 1010,26$.

On peut donc prendre comme point satisfaisant (R', Q') avec $Q' = 564$

$$R' = \frac{\tau_o}{\tau_o - 1}\,(m-1)\,Q' + \lambda\,\delta \sim 1124,66$$

<u>Remarques</u>

1) Dans le cas B) 1) a) la contrainte de service $\tau(R, Q) \leq \tau_o$ n'est pas saturée à l'optimum : en ce point le taux de rupture est inférieur à τ_o. C'est le seul cas où la qualité de service est meilleure à l'optimum que celle donnée par un taux de rupture égal à τ_o : dans tous les autres cas la contrainte de service est saturée à l'optimum ou pour un point "satisfaisant".

2) Minimisons le coût de gestion K (R, Q) pour $R \geq 0$, $Q > 0$ sans contrainte de service.

D'après la remarque préliminaire (2) l'optimum se trouve sur la droite R = 0.

D'après la remarque préliminaire (5) la quantité de commande optimum est Qx.

L'optimum est donc (R^*, Q^*) avec $R^* = 0$ et $Q^* = Qx$.

Le plus petit de tous les coûts de gestion possibles pour λ, δ, A, IC fixés est donc

$$K(0, Qx) = \frac{\lambda}{Qx + \lambda\,\delta}\left(A + IC\,\frac{Qx^2}{2\lambda}\right)$$

3.4 Usage de variables sans dimension - Optimisation utilisable pour une classe de marchandises

Pour une marchandise dont on gère le stock suivant notre modèle, choisissons comme unité de temps : le délai de livraison, comme unité de marchandise : la quantité demandée pendant le délai de livraison.

A ces unités correspondent :

C' : valeur de l'unité de marchandise ($C' = C \times \lambda\ \delta$)

I' : taux de possession ($I' = I \times \delta$)

Avec ces unités, le coût de gestion K (R, Q) est égal à :

$$\frac{m}{mQ + 1 - R}\left(A + I'C'\frac{Q^2}{2}\right) \quad \text{si } R \leq 1$$

$$\frac{1}{Q}\left(A + I'C'\frac{Q^2}{2}\right) + I'C'(R-1) \quad \text{si } R \geq 1$$

$\frac{K(R, Q)}{I'C'}$ est le coût de gestion lorsque l'unité de coût est : $I'C'$ et $\frac{A}{I'C'}$ est le coût de lancement d'une commande pour cette unité de coût.

Le taux de rupture est indépendant des unités choisies.

Avec ces unités de temps, de marchandise, de coût, l'optimisation ne dépend que de τ_0 intervenant dans la contrainte de service et de $\frac{A}{I'C'} = \alpha$.

Le résultat de l'optimisation correspondant à τ_0 et α peut être utilisé pour l'ensemble de toutes les marchandises dont les paramètres A, I, C, λ, δ vérifient $\frac{A}{I'C'} = \alpha$ c'est-à-dire $\frac{A}{IC\lambda\delta^2} = \alpha$.

Exemples de résultats numériques

(R^*, Q^*) : point optimum ou "satisfaisant" où R^* désigne le seuil et Q^* la quantité à commander.

K^* coût de gestion correspondant.

Taux de rupture maximum : 0,09

$A/I'C' = \alpha$	R^*	Q^*	K^*	m
0.005	0.901099	0.1	0.091	10.
0.020	0.901099	0.2	0.182	5.
0.045	0.883495	0.294498	0.273047	4.
0.080	0.881319	0.4	0.364	3.
0.125	0.901099	0.5	0.455	2.
0.180	0.881319	0.6	0.546	2.
0.245	0.861539	0.7	0.637	2.
0.320	0.841758	0.8	0.728	2.
0.405	0.834863	0.834863	0.821313	2.
0.5	0.901099	1.	0.91	1.

Lorsque $A/I'C' = 0,045$ $Q^* = 0,294498 < 0,3 = Qw$ (quantité de Wilson)

$= 0,405$ $Q^* = 0,834863 < 0,9 = Qw$

Dans les autres cas la quantité optimum est égale à la quantité de Wilson.

Taux de rupture maximum : 0,25

$A/I'C' = \alpha$	R^*	Q^*	K^*	m
6.845	0.	3.	2.836235	1
7.220	0.	3.	2.929983	1
7.605	0.	3.026148	3.026148	1
8.	0.	3.123089	3.123089	1
8.405	0.	3.220171	3.220171	1

Pour $\alpha = 6,845$ et $7,220$, $Q^* = v/\tau_o = 0,75/0,25 = 3$; c'est le cas B) 1) b) de l'optimisation.

Pour les valeurs suivantes de α, $Q^* = Qx$; c'est le cas B) 1) a) de l'optimisation.

Exemple d'utilisation d'un résultat de l'optimisation

Nous avons indiqué dans ce paragraphe comment faire une optimisation applicable à une classe de marchandises.

Données :

L'unité de temps est l'année

l'unité de marchandise est U_m

l'unité de coût est le franc : F

Avec ces unités :

le délai de livraison est $\delta = 0,1$ ($\sim$1 mois)

le taux de demande est $\lambda = 40\,000$ (demande annuelle)

le coût de lancement d'une commande est $A = 100$

le taux de possession est $I = 0,2$

la valeur de l'article $C = 10$

le taux de rupture maximum est $\tau_o = 0,09$

solution

On choisit comme nouvelle unité de temps le délai de livraison : 0,1 an, comme nouvelle unité de marchandise la quantité demandée pendant un délai de livraison : 4000 U_m.

Avec ces nouvelles unités,

le taux de possession est $I' = 0,02$

la valeur de l'article $C' = 40000$

d'où $I'C' = 800$ et $\frac{A}{I'C'} = \frac{100}{800} = 0,125$

la nouvelle unité de coût est : 800 F

Les résultats précédents nous donnent :

$R^* = 0,901099$

$Q^* = 0,5$

$K^* = 0,455$

Exprimons ces résultats avec les unités initiales : an, F, U_m

seuil optimum : $0,901099 \times 4000 = 3604,396$ (U_m)

quantité à commander optimum : $0,5 \times 4000 = 2000$ (U_m)

le coût de gestion optimum pendant le délai de livraison :

$$0,455 \times 800 = 364 \quad (F)$$

et le coût de gestion optimum par an : $364 \times 10 = 3640$ (F)

CHAPITRE II

RECHERCHE D'UNE FORMULATION APPROCHEE DU COÛT DE GESTION ET DU TAUX DE RUPTURE DANS LE CAS ALEATOIRE

1 - METHODE DE FORMULATION DU COUT DE GESTION ET DU TAUX DE RUPTURE

Dans un grand nombre de problèmes pratiques, la demande n'est pas certaine et faute de connaître tous les facteurs influant sur la demande, il ne nous est possible de la décrire que par un processus aléatoire. Il en est de même pour le délai de livraison. Cette description peut se faire en utilisant l'historique des demandes et délais. Dans la suite nous supposons que le régime est permanent c'est-à-dire que les processus qui régissent la demande et le délai de livraison ne varient pas avec le temps.

Quand la demande est aléatoire et à fortiori quand le délai de livraison est aléatoire, il paraît difficile d'obtenir une écriture rigoureuse du coût de gestion et du taux de rupture pour notre modèle de gestion. D'après Hadley et Whitin "l'étude rigoureuse du cas où plus d'une commande est en attente de livraison n'a pas encore été entreprise" (page 195 réf. I de la bibliographie).

Pour remèdier à cette difficulté, nous allons tenter d'obtenir expérimentalement une écriture approchée du coût de gestion et du taux de rupture pour un certain processus de la demande et du délai de livraison. L'expérience consiste à simuler la gestion du stock suivant notre modèle en émettant des nombres au hasard de manière à suivre le processus de la demande et du délai de livraison et à calculer certaines grandeurs qui seront des approximations de limites au sens des probabilités.

Les nombreux calculs qu'exige la simulation se feront à l'aide de l'ordinateur.

La formulation approchée ainsi obtenue peut nous permettre de résoudre certains problèmes comme ceux de l'optimisation, d'étudier des systèmes plus complexes comme ceux des stocks en chaîne... La philosophie est donc différente de celle des études classiques de simulation où on

se propose d'établir par simulation un résultat final. La notre est de mettre au point une formulation simple, utilisable ultérieurement à des fins diverses.

Nous donnerons dans le chapitre III une application de cette formulation à la recherche d'une gestion optimum.

1.1 Expressions générales du coût de gestion et du taux de rupture

Nous ne faisons ici aucune hypothèse particulière quant à la nature des processus stochastiques qui génèrent la demande et le délai de livraison si ce n'est l'invariance de ces processus dans le temps. Les notations R, Q, m, A, I, C ont la même signification qu'au chapitre I.

1) Définition d'un cycle : on appelle cycle i un intervalle de temps $]t_i, t_i + T_i]$ tel que aux instants t_i et $t_i + T_i$ il y a lancement d'une commande et sur $]t_i, t_i + T_i]$ le nombre de commandes lancées est

$m = [\frac{R}{Q}] + 1$. (la commande de l'instant t_i n'est pas comptée).

Remarque : la quantité vendue sur un cycle est mQ.

2) Evaluons maintenant le coût de gestion et le taux de rupture.

Pour un cycle i, on appelle :

T_i : la durée du cycle.

T'_i : la durée de non rupture du stock.

T''_i : la durée de rupture du stock.

Ω_i : l'intégrale de la fonction stock disponible de t_i à $t_i + T_i$ servant au calcul du coût de stockage.

K_i : le coût de la gestion sur le cycle i.

A l'instant ξ, on appelle $n(\xi)$ le nombre de cycles consécutifs sur $]0, \xi]$, 0 étant l'instant initial du premier cycle.

Les limites qui apparaîtront sont prises au sens de la convergence presque-sûre du calcul des probabilités.

* Le coût de gestion sur un cycle est $K_i = m A + I C \Omega_i$.

La moyenne dans le temps du coût de gestion par unité de temps est :

$$K = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i + k(\xi)}{\xi}$$ où $k(\xi)$ est le coût de gestion de la fin du dernier cycle à ξ.

$$K = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i}{\xi} = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i}{\sum_{i=1}^{n} T_i}$$

$$= \lim_{\xi \to \infty} \frac{m A + IC \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Omega_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T''_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T'_i}$$

Posons

$\hat{\Omega}$ = valeur moyenne de l'intégrale sur un cycle de la fonction stock disponible $= \lim_{\xi \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Omega_i$

$\hat{T}$ = durée moyenne de rupture par cycle $= \lim_{\xi \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T''_i$

λ = taux de la demande moyen dans le temps

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m Q}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T'_i} = \frac{m Q}{\lim_{\xi \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T'_i} = \lambda$$

d'où $\lim_{\xi \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T'_i = \frac{m Q}{\lambda}$

Finalement

$$K = \frac{\lambda}{m Q + \lambda \hat{T}} (m A + IC \hat{\Omega})$$

* Le taux de rupture est :

$$\tau = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} T''_i}{\sum_{i=1}^{n} T_i} = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T''_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T''_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T'_i}$$

$$= \frac{\hat{T}}{\hat{T} + \frac{mQ}{\lambda}} = \frac{\lambda \hat{T}}{mQ + \lambda \hat{T}}$$

En conclusion

Le coût de gestion est $K = \frac{\lambda}{mQ + \lambda \hat{T}} (m A + IC \hat{\Omega})$

Le taux de rupture est $\tau = \frac{\lambda \hat{T}}{mQ + \lambda \hat{T}}$

où λ est le taux moyen de la demande

$\hat{T}$ est la durée moyenne de rupture par cycle

$\hat{\Omega}$ est la valeur moyenne de l'intégrale sur un cycle de la fonction stock disponible.

1.2 Autre formulation du coût de gestion

Définitions

1) Soit f une fonction du temps représentant une quantité de marchandise. Nous appellerons quantité de marchandise-temps de t_1 à t_2 pour la fonction f l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$.

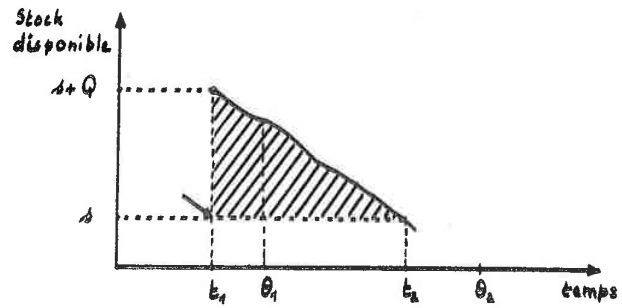
Exemple : f est la fonction stock disponible.
La quantité de marchandise-temps stockée de t_1 à t_2 est $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$.

Remarque : Hadley et Whitin (page 169, réf. I de la bibliographie) parlent de nombre d'unités-années stockées.

2) Soit une commande de la quantité Q reçue à l'instant t_1 lorsque le stock disponible est s. Si aucune commande n'est reçue ultérieurement, le stock disponible (fonction f) atteint la valeur s à l'instant t_2.
La quantité de marchandise-temps tournante relative à la commande reçue à l'instant t_1 est :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt - s\,(t_2 - t_1)$$

Exemple : dans le cas déterministe elle est égale à $\frac{Q^2}{2\lambda}$

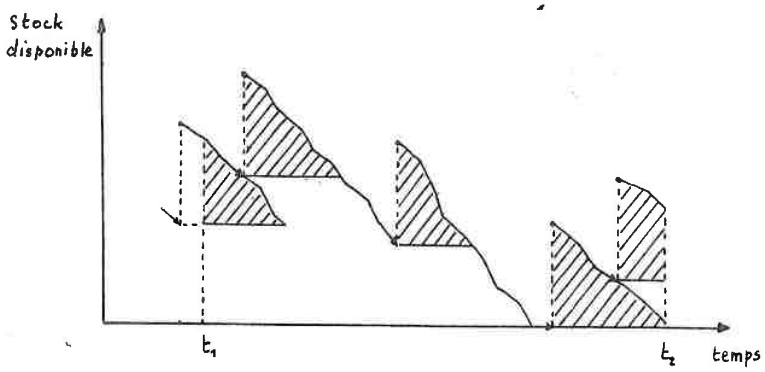


Soient deux instants θ_1 et θ_2 ; on appelera quantité de marchandise-temps tournante relative à la commande reçue à l'instant t_1 sur l'intervalle (θ_1, θ_2) l'intégrale

$$\int_{(t_1,\, t_2) \cap (\theta_1,\, \theta_2)} (f(t) - s)\, dt$$

Par exemple, si $t_1 \leq \theta_1 \leq t_2 \leq \theta_2$, elle est égale à $\int_{\theta_1}^{t_2} (f(t) - s)\, dt$;
si $t_1 < t_2 \leq \theta_1 \leq \theta_2$, elle est égale à 0.

3) La quantité de marchandise-temps tournante sur un intervalle (t_1, t_2) est égale à la somme de toutes les quantités de marchandise-temps tournante relatives aux commandes reçues avant l'instant t_2 prises sur (t_1, t_2).



La surface hachurée représente la marchandise-temps tournante sur (t_1, t_2).

4) La quantité de marchandise-temps résiduelle sur (t_1, t_2) est égale à la différence de la quantité de marchandise-temps stockée sur (t_1, t_2) et de la quantité de marchandise-temps tournante sur (t_1, t_2).

Autre formulation du coût

Soient $\hat{\Omega}_t$ et $\hat{\Omega}_r$ les moyennes dans le temps des quantités de marchandise-temps tournante et résiduelle sur un cycle.

Nous avons $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_t + \hat{\Omega}_r$.

Comme dans le paragraphe précédent, soient :

$n(\xi)$: le nombre de cycles sur $]0, \xi]$.

ω_i : la quantité de marchandise-temps tournante sur le cycle i.

Alors $$\hat{\Omega}_t = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}{n}$$

Appelons α_j : quantité de marchandise-temps tournante relative à la jième commande reçue.

$p(\xi)$: nombre de commandes reçues sur les n premiers cycles. La quantité de marchandise-temps tournante moyenne relative à une commande est :

$$\hat{\Omega}_1 = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}{p} = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}{p}$$

Le nombre de commandes lancées sur les n cycles est $m \times n$

d'où $p(\xi) = m \times n(\xi) + k(\xi)$ ou $k(\xi)$ est borné.

D'où $$\hat{\Omega}_1 = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}{m \times n} = \frac{1}{m} \hat{\Omega}_t$$

Par conséquent $\hat{\Omega}_t = m \hat{\Omega}_1$

D'autre part la quantité de marchandise-temps résiduelle par unité de temps a pour moyenne $\Omega_r = \frac{\lambda}{m\Omega + \lambda \hat{T}} \times \hat{\Omega}_r$,

$\frac{m\Omega + \lambda \hat{T}}{\lambda}$ étant la durée moyenne d'un cycle.

Nous avons vu que le coût de gestion est :

$K = \frac{\lambda}{m\Omega + \lambda \hat{T}} (m A + IC \hat{\Omega})$. D'après les résultats ci-dessus

$K = \frac{\lambda}{m\Omega + \lambda \hat{T}} (m A + m IC \hat{\Omega}_1) + IC \Omega_r$.

En conclusion, le coût de gestion peut s'écrire

$$K = \frac{\lambda m}{m\Omega + \lambda \hat{T}} (A + IC \hat{\Omega}_1) + IC \Omega_r$$

où $\hat{T}$ est la durée moyenne de rupture par cycle

$\hat{\Omega}_1$ est la quantité moyenne de marchandise-temps tournante relative à une commande.

Ω_r est la quantité moyenne de marchandise-temps résiduelle par unité de temps.

Remarques

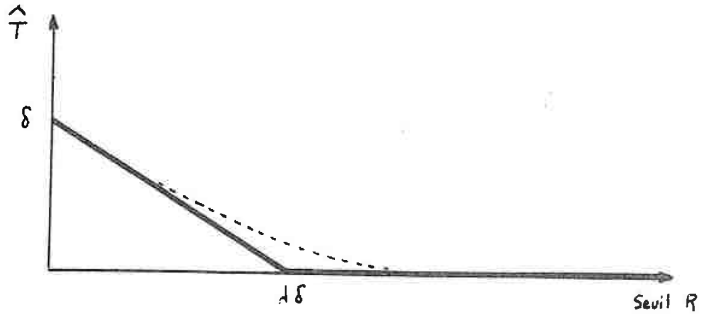
1) Dans le cas déterministe $\hat{\Omega}_1 = \frac{Q^2}{2\lambda}$.

Dans le cas aléatoire $\hat{\Omega}_1$ dépend de Q et du processus de la demande, mais ne dépend pas du seuil R et du processus de livraison d'après la définition même de la quantité de marchandise-temps tournante relative à une commande.

2) Dans le cas déterministe nous avons :

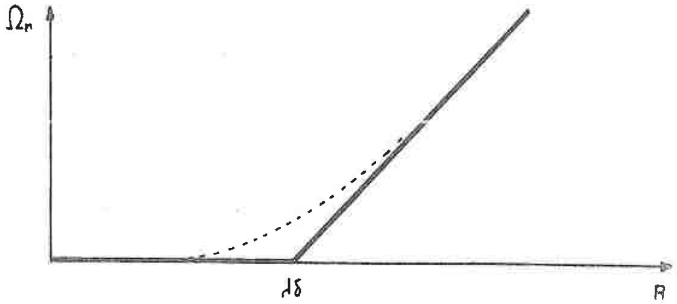
si $R \leq \lambda\,\delta$ $\quad \hat{T} = \delta - \frac{R}{\lambda}$ et $\Omega_r = 0$

si $R > \lambda\,\delta$ $\quad \hat{T} = 0$ et $\Omega_r = R - \lambda\,\delta$



—— $\hat{T}$ dans le cas déterministe

------ $\hat{T}$ dans le cas aléatoire ?



—— Ω_r dans le cas déterministe

------ Ω_r dans le cas aléatoire ?

Comme $\hat{T}$ et Ω_r sont indépendants de Q dans le cas déterministe, on peut se demander si ceci est encore vrai dans le cas stochastique pour les processus de la demande et du délai de livraison considérés.

3) On a choisi d'exprimer le coût de gestion à l'aide de $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$ et Ω_r parce que ces grandeurs sont des fonctions "simples" dépendant chacune d'une seule variable, R ou Q, dans le cas déterministe.

On approchera expérimentalement le coût de gestion et le taux de rupture de la manière suivante :

- Etant donné un processus de la demande et du délai de livraison, on simule la gestion du stock sur plusieurs cycles en divers points (R, Q). Pour chaque point on obtient des valeurs approchées de $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$, Ω_r.

- On choisit des fonctions pour approcher $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$, Ω_r à partir des résultats expérimentaux obtenus dans la simulation (lissage des résultats expérimentaux).

- A partir des fonctions qui approchent $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$, Ω_r, nous obtenons une formulation approchée du coût de gestion et du taux de rupture.

2 - DESCRIPTION DE LA TECHNIQUE DE SIMULATION

Nous avons vu que, pour trouver une formulation approchée de nos modèles de coût de gestion et de qualité de service, nous sommes amenés à trouver des formulations approchées pour les trois grandeurs suivantes :

$\hat{T}$: durée moyenne de rupture de stock par cycle.

$\hat{\Omega}_1$: quantité moyenne de marchandise-temps tournante relative à une quantité de commande.

Ω_r : quantité moyenne de marchandise-temps résiduelle par unité de temps.

La simulation de la gestion du stock a pour but de déterminer des valeurs approchées de ces trois grandeurs pour différentes valeurs du seuil R et de la quantité de commande Q, pour certains processus de la demande et du délai de livraison. Les résultats expérimentaux obtenus par la simulation seront ensuite utilisés pour déterminer par lissage des fonctions approchant $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$, Ω_r.

Cette simulation pourra se faire à l'aide de plusieurs algorithmes :

1) Algorithme pour le processus de la demande.

Comme nous l'avons déjà dit dans les généralités, nous supposons que le processus de la demande peut être décrit "valablement" de la manière suivante :

- la demande est continue
- on choisit une durée Δt et sur chacun des intervalles de temps successifs de durée Δt, le taux de la demande est constant.

Notre technique de simulation ne s'applique qu'aux processus de la demande ainsi décrits.

L'algorithme de la demande aura pour objet de donner à un instant t le taux de demande sur $(t, t + \Delta t)$.

2) Algorithme pour le processus de la livraison.

Il a pour objet de donner à un instant t le délai de livraison d'une commande passée à cet instant.

Nous verrons des exemples simples d'algorithmes de la demande et de la livraison pour l'utilisation de la technique de simulation.

3) Algorithme pour décrire le stock disponible sur un cycle.

Il nous est possible de déterminer des valeurs approchées de $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$, Ω_r si nous connaissons le stock disponible en fonction du temps. On construit alors un algorithme capable de nous donner le stock disponible sur un cycle.

- Il utilise les algorithmes donnant les taux de demande et les délais de livraison.

- Il a besoin de connaître les dates de livraison des commandes restant à livrer ainsi que les quantités livrées (les commandes se font par quantité fixe Q mais pour certains processus de la livraison, des commandes peuvent être groupées ; la quantité livrée est alors un multiple de Q).

L' algorithme nous donnera à la fin du cycle les quantités restant à livrer ultérieurement et les dates correspondantes.

4) Algorithme pour le calcul de la durée de rupture, des quantités de marchandise-temps tournante et résiduelle sur un cycle à partir de la fonction stock disponible donnée par l'algorithme précédent.

2.1 Algorithme détaillé pour décrire le stock disponible sur un cycle

D'après la description du processus de la demande, la fonction stock disponible est linéaire par morceaux. Elle présente des discontinuités aux instants où il y a réception d'une commande (ou de plusieurs commandes groupées). Pour la connaître sur un cycle $]T_1, T_2]$, il suffit de connaître les instants t_i de ce cycle où il y a :

- soit discontinuité
- soit rupture de stock
- soit changement du taux de la demande quand le stock n'est pas en rupture.

Pour décrire le stock disponible, nous utiliserons un tableau de trois colonnes. Dans la première colonne nous plaçons T_1 : début du cycle, les instants t_i dans l'ordre croissant et l'instant T_2 : fin du cycle. Dans la deuxième colonne nous plaçons le stock aux instants t_i et T_2, avant la livraison si c'est le cas.

Dans la troisième colonne nous plaçons le stock aux instants T_1, t_i et T_2 après la livraison si c'est le cas.

Exemple :

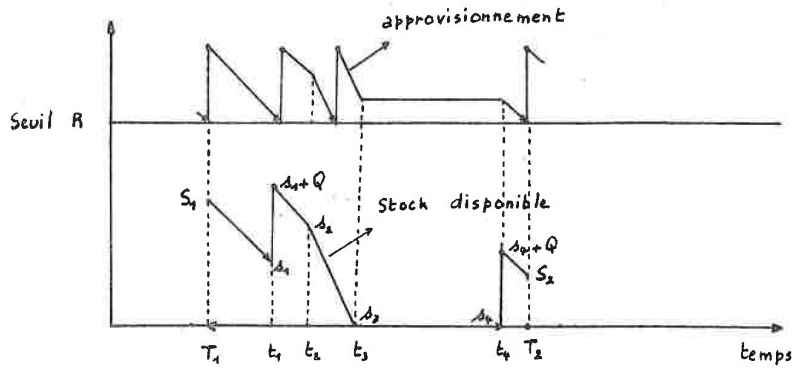


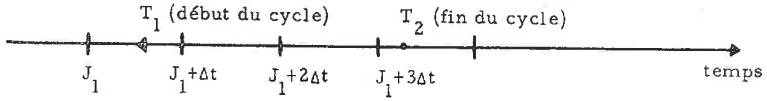
tableau du stock disponible

T_1	rien	S_1
t_1	s_1	$s_1 + Q$
t_2	s_2	s_2
t_3	0	0
t_4	0	Q
T_2	S_2	S_2

Pour simuler la gestion du stock sur un cycle, nous devons connaître initialement l'instant T_1 : début du cycle, les dates de livraison et quantités à livrer après T_1 provenant des commandes passées à l'instant T_1 et avant T_1.

Nous utiliserons un tableau des livraisons à deux colonnes : dans la première nous plaçons dans l'ordre croissant les dates de livraison et dans la deuxième les quantités à livrer correspondantes. Au fur et à mesure de la simulation nous mettons à jour ce tableau en enregistrant les commandes qui viennent d'être faites et en supprimant les lignes pour les commandes qui viennent d'être livrées. En arrivant à la fin du cycle : date T_2, le tableau donne les livraisons à faire après T_2 et peut ainsi être utilisé pour la simulation sur le cycle suivant.

D'après la description de la demande, il est possible que nous terminions un cycle avec un taux de demande Y et que ce taux soit encore le même pour un intervalle du cycle suivant :



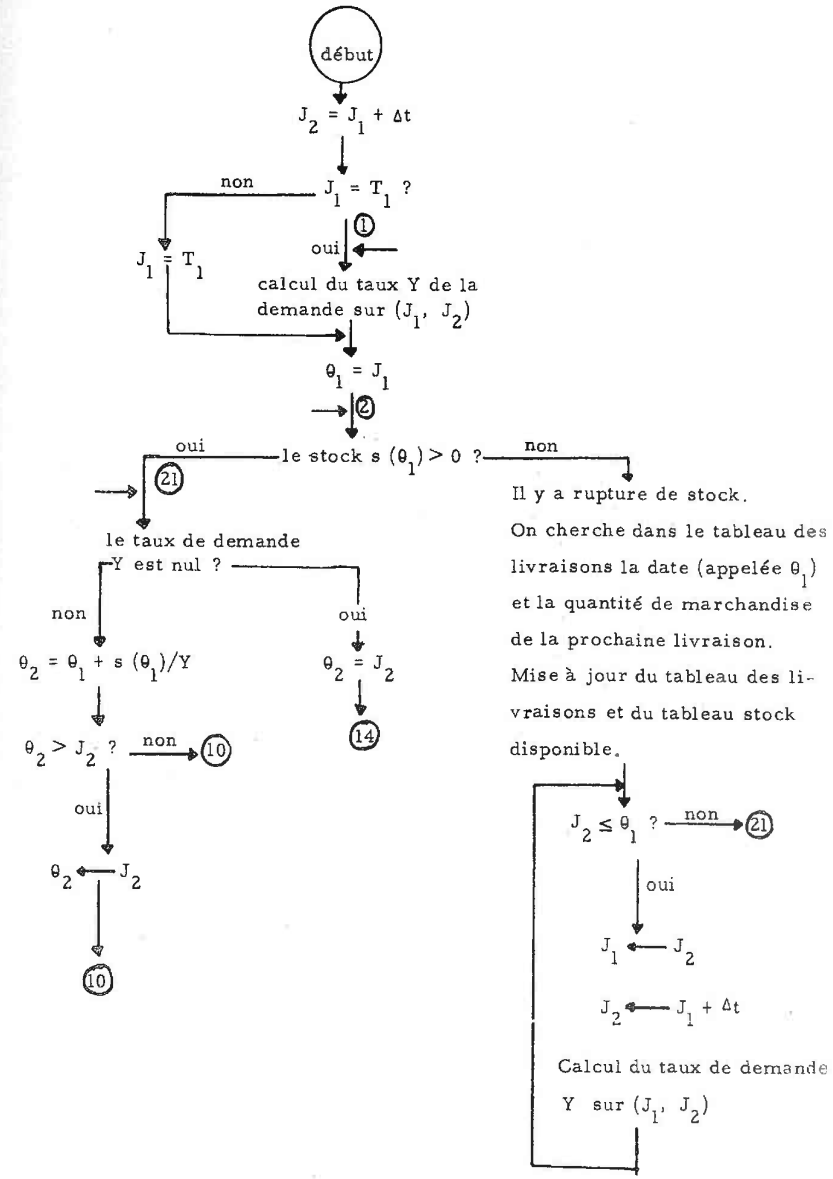
Pour simuler la gestion sur un cycle il faut donc connaître l'instant $J_1 \leq T_1$ tel que $J_1 + \Delta t > T_1$ et sur $(J_1, J_1 + \Delta t)$ le taux de demande est constant. Si $J_1 < T_1$, le taux de demande sur $(T_1, J_1 + \Delta t)$ est déjà connu et si $J_1 = T_1$, le taux de demande devra être calculé.

Organigramme fonctionnel de la simulation sur un cycle

On appelle s la fonction stock disponible.

1) Initalisations et définition de (θ_1, θ_2)

le taux de la demande est constant sur un intervalle (J_1, J_2).
(θ_1, θ_2) est un sous-intervalle de (J_1, J_2) sur lequel la durée de rupture est nulle. (θ_1, θ_2) doit être aussi un sous intervalle du cycle $]T_1, T_2]$.


début
$J_2 = J_1 + \Delta t$
$J_1 = T_1$?
non
$J_1 = T_1$
1
oui
calcul du taux Y de la demande sur (J_1, J_2)
$\theta_1 = J_1$
2
le stock $s(\theta_1) > 0$?
oui
non
21
le taux de demande Y est nul ?
non
oui
$\theta_2 = \theta_1 + s(\theta_1)/Y$
$\theta_2 = J_2$
14
$\theta_2 > J_2$?
non
10
oui
$\theta_2 \leftarrow J_2$
10
Il y a rupture de stock.
On cherche dans le tableau des livraisons la date (appelée θ_1) et la quantité de marchandise de la prochaine livraison.
Mise à jour du tableau des livraisons et du tableau stock disponible.
$J_2 \leq \theta_1$?
non
21
oui
$J_1 \leftarrow J_2$
$J_2 \leftarrow J_1 + \Delta t$
Calcul du taux de demande Y sur (J_1, J_2)

2) Observation de l'approvisionnement sur $]\theta_1, \theta_2]$

Changement de la date θ_2 si $\theta_2 > T_2$

(10)

On connaît l'approvisionnement à l'instant θ_1. (lorsque θ_1 est le début du cycle, il est égal à $R + \Omega$). On cherche dans l'ordre chronologique les instants de $]\theta_1, \theta_2]$ où il y a lancement d'une commande.

il y a lancement d'une commande ?

oui

soit t cet instant.
Calcul du délai de livraison.
Mise à jour du tableau des livraisons.

Le nombre de commandes lancées est égal à m ?
(m est le nombre de commandes lancées sur un cycle)

non

(10)

oui

t est alors la date T_2 de la fin du cycle.

$\theta_2 \leftarrow t$

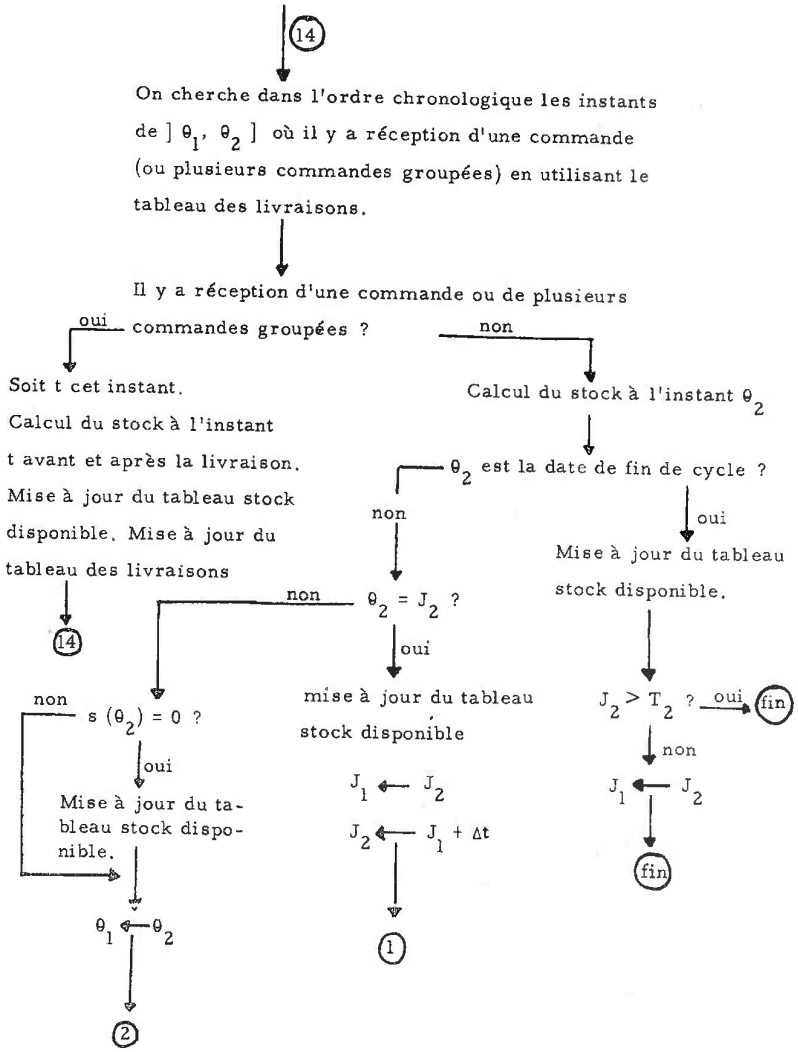
(14)

non

on calcule l'approvisionnement à l'instant θ_2.

(14)

3) Observation du stock disponible sur $]\theta_1, \theta_2]$



2.2 Calcul de la durée de rupture et de la quantité de marchandise-temps sur un cycle

Après avoir simulé la gestion du stock sur un cycle, nous utilisons le tableau stock disponible pour calculer la durée de rupture et la quantité de marchandise-temps sur le cycle.

Tableau stock disponible

t_i	$s_1(t_i)$	$s_2(t_i)$
$< t_{i+1}$	$s_1(t_{i+1})$	$s_2(t_{i+1})$

Appelons $s_1(t)$ et $s_2(t)$ le stock disponible à l'instant t, respectivement avant la livraison et après la livraison s'il y a lieu. La quantité de marchandise-temps stockée sur (t_i, t_{i+1}) est

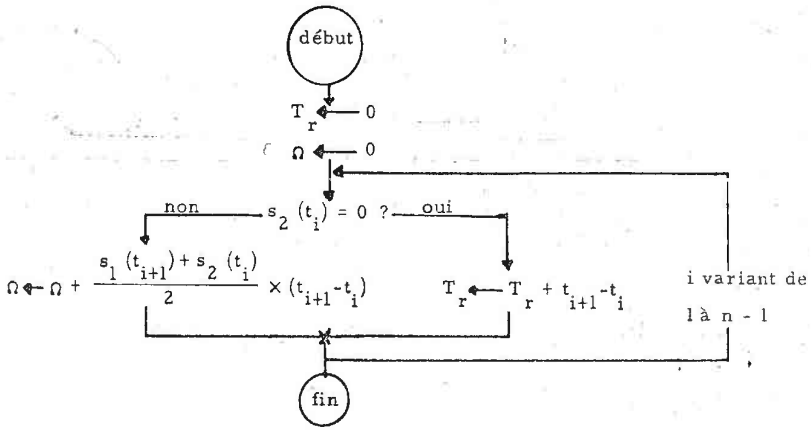
$$\frac{s_1(t_{i+1}) + s_2(t_i)}{2} \times (t_{i+1} - t_i)$$

soient n : le nombre d'instants t_i du tableau

T_r : la durée de rupture sur le cycle

Ω : la quantité de marchandise-temps stockée sur le cycle.

Organigramme du calcul de T_r et Ω



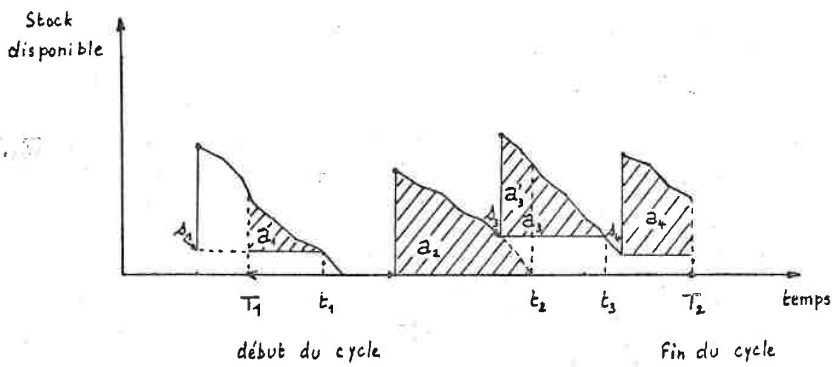
2.3 Calcul de la quantité de marchandise-temps tournante sur un cycle

Nous calculons la quantité de marchandise-temps tournante Ω_t sur un cycle connaissant la fonction stock disponible sur ce cycle donné par un tableau.

Pour calculer la quantité de marchandise-temps tournante relative à une commande sur un certain intervalle de temps, il nous faut connaître la valeur du stock disponible à la livraison de cette commande. Nous utiliserons un tableau de travail à deux colonnes :

Dans l'ordre chronologique nous plaçons dans la première colonne la valeur du stock à la livraison de la commande et dans la deuxième colonne la quantité de marchandise-temps tournante relative à cette commande sur le cycle. On supprime une ligne dès que la quantité de marchandise-temps correspondante est calculée.

Exemple :



$$\Omega_t = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

Composition du tableau de travail à différents instants :

1) instant T_1

s_1	0

2) instant t_1

s_1	a_1

3) instant t_2

0	a_2
s_3	a'_3

4) instant t_3

s_3	a_3

5) instant T_2

s_4	a_4

La quantité de marchandise-temps résiduelle sur un cycle s'obtient comme différence des quantités de marchandise-temps totale et tournante sur ce cycle.

3 - MISE EN ŒUVRE DE NOTRE METHODE DE FORMULATION A L'AIDE DE LA SIMULATION

Nous allons utiliser notre technique de simulation dans quelques cas particuliers et donner un exemple de formulation approchée de $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$, Ω_r conduisant à une formulation approchée du coût de gestion et du taux de rupture

3.1 Description du processus de la demande et de la livraison

Le taux de demande est une variable aléatoire positive ou nulle. Nous donnons un exemple de processus de la demande en utilisant

une variable aléatoire auxiliaire Y qui suit une loi de Gauss.

Si Y est négatif, le taux de demande est nul.

Si Y est positif ou nul, le taux de demande est égal à Y.

3.1.1 Loi de Gauss tronquée

Définitions : Soit une loi de Gauss de densité

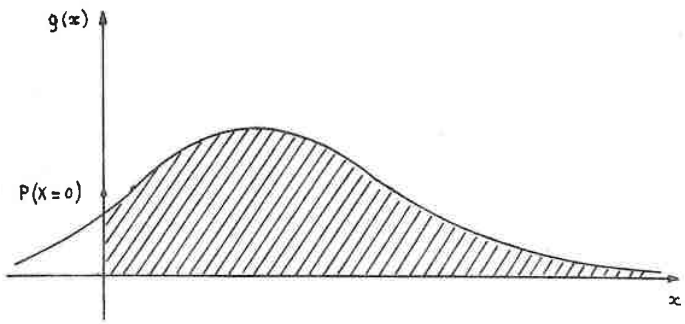
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Nous dirons qu'une variable aléatoire X suit une loi de Gauss, de moyenne μ et d'écart-type σ, tronquée sis :

1) $P(X < 0) = 0$

2) $P(X = 0) = \int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx$

3) $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} g(x)\,dx$ quels que soient $0 < a \leq b$



Nous poserons :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\,du$$

φ est la densité de la loi de Gauss réduite.

Nous voyons immédiatement que

$$\varphi'(x) = -x \times \varphi(x) \quad \text{et} \quad \Phi'(x) = \varphi(x).$$

Moyenne de la loi de Gauss tronquée

Soient une loi de Gauss de moyenne μ et d'écart-type σ et μ_r la moyenne de la variable aléatoire X qui suit la loi de Gauss tronquée correspondante :

$$\mu_r = 0 \times P(X = 0) + \int_0^{\infty} x\,g(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\,g(x)\,dx$$

En faisant le changement de variable $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$, nous trouvons $\mu_r = \sigma\,\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \mu\,\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$.

Ecart-type de la loi de Gauss tronquée

Soit σ_r l'écart-type de la loi de Gauss tronquée.

$$\sigma_r^2 = (0 - \mu_r)^2\,P(X = 0) + \int_0^{\infty} (x - \mu_r)^2\,g(x)\,dx$$

$$= \mu_r^2 \int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx + \int_0^{\infty} (x - \mu_r)^2\,g(x)\,dx$$

En faisant le changement de variable $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-\mu/\sigma} \varphi(u)\,du = 1 - \int_{-\infty}^{\mu/\sigma} \varphi(u)\,du$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right), \text{ sachant que } \varphi \text{ est paire et que } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^{\infty} (x - \mu_r)^2\,g(x)\,dx = \int_{-\mu/\sigma}^{\infty} (\sigma u + \mu - \mu_r)^2\,\varphi(u)\,du$$

$$= \sigma^2 \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} u^2\,\varphi(u)\,du + 2\sigma(\mu - \mu_r) \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} u\,\varphi(u)\,du + (\mu - \mu_r)^2 \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} \varphi(u)\,du$$

Nous avons :

$$\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} u^2 \varphi(u)\, du = u(-\varphi(u))\Big]_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} + \int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} \varphi(u)\, du$$

$$= -\frac{\mu}{\sigma}\varphi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) + \int_{-\infty}^{\frac{\mu}{\sigma}} \varphi(u)\, du$$

$$= -\frac{\mu}{\sigma}\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

$$\int_{-\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} u\,\varphi(u)\, du = \varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right).$$

Par conséquent :

$$\sigma_r^2 = \mu_r^2\left(1 - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right) + \sigma^2\left(-\frac{\mu}{\sigma}\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$+ 2\sigma(\mu - \mu_r)\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + (\mu - \mu_r)^2 \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

On trouve finalement :

$$\sigma_r^2 = -\mu_r^2 + \mu\sigma\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + (\sigma^2 + \mu^2)\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

En conclusion

$$\mu_r = \sigma\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \mu\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \text{ et}$$

$$\sigma_r^2 = -\mu_r^2 + \mu\sigma\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + (\sigma^2 + \mu^2)\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

Exemple : si $\mu = 10$ et $\sigma = 5$, nous avons $\mu_r \sim 10,0424$ et $\sigma_r \sim 4,89952$.

Remarque : Ainsi à une loi de Gauss de moyenne μ et d'écart-type σ correspond une loi de Gauss tronquée de moyenne μ_r et d'écart-type σ_r, ce qui définit une application

$$F : (\mu, \sigma) \longrightarrow (\mu_r, \sigma_r)$$

de $E_1 = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ dans $E_2 =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$

Nous admettrons le résultat suivant :

F est une application bijective de E_1 sur E_2.

3.1.2 Calcul de μ et σ quand la loi de Gauss de moyenne μ et d'écart-type σ tronquée a pour moyenne μ_r et pour écart-type σ_r

Soit X une variable aléatoire positive ou nulle.

A partir des valeurs prises par X, nous pouvons approcher sa moyenne μ_r et son écart-type σ_r (étude de l'historique si X est un taux de demande). Si X suit une loi de Gauss tronquée et que nous voulons émettre une suite de nombres pseudo-aléatoires suivant cette loi, nous devons connaître la moyenne μ et l'écart-type σ de la loi de Gauss.

1) Méthode

Nous sommes amenés à résoudre le système :

$$\begin{cases} \mu_r = \sigma\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \mu\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \\ \sigma_r^2 = -\mu_r^2 + \mu\sigma\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + (\sigma^2 + \mu^2)\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \end{cases}$$

En prenant comme inconnues σ et $\alpha = \frac{\mu}{\sigma}$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \mu_r = \sigma(\varphi(\alpha) + \alpha\Phi(\alpha)) & (1) \\ \sigma_r^2 = -\mu_r^2 + \sigma^2(\alpha\varphi(\alpha) + (1 + \alpha^2)\Phi(\alpha)) & (2) \end{cases}$$

Nous avons :

$$\varphi(\alpha) + \alpha\Phi(\alpha) = \int_{-\alpha}^{\infty} (x + \alpha)\varphi(x)\, dx > 0 \quad \text{car } (x + \alpha)\varphi(x) > 0 \text{ sur le}$$

domaine d'intégration.

D'après (1) $\quad \sigma = \dfrac{\mu_r}{\varphi(\alpha) + \alpha\Phi(\alpha)} \quad (1')$

D'après (1') et (2) $\quad \sigma_r^2 = -\mu_r^2 + \mu_r^2 \times \dfrac{\alpha\varphi(\alpha) + (1 + \alpha^2)\Phi(\alpha)}{(\varphi(\alpha) + \alpha\Phi(\alpha))^2}$

Posons $\quad f(\alpha) = -\sigma_r^2 - \mu_r^2 + \mu_r^2 \times \dfrac{\alpha\varphi(\alpha) + (1 + \alpha^2)\Phi(\alpha)}{(\varphi(\alpha) + \alpha\Phi(\alpha))^2}$

Nous allons résoudre $f(\alpha) = 0$ par linéarisation :

$$f'(\alpha) = \frac{2\,\mu_r^2}{(\varphi(\alpha) + \alpha\,\Phi(\alpha))^3} \times (\varphi^2(\alpha) + \alpha\,\varphi(\alpha)\,\Phi(\alpha) - \Phi^2(\alpha))$$

La solution α existe et est unique car l'application

$F : (\mu, \sigma) \longrightarrow (\mu_r, \sigma_r)$ de E_1 dans E_2 est bijective.

La solution de $f(\alpha) = 0$ est la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par :

$$\begin{cases} \alpha_0 \text{ donné} \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n - \dfrac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)} \end{cases}$$

Connaissant α nous avons $\sigma = \dfrac{\mu_r}{\varphi(\alpha) + \alpha\,\Phi(\alpha)}$ et $\mu = \sigma\alpha$

Nous pouvons choisir $\alpha_0 = \dfrac{\mu_r}{\sigma_r}$

2) Description des calculs

Pour utiliser la formule itérative précédente, il nous faut calculer

$$\Phi(\alpha_n) = \int_{-\infty}^{\alpha_n} \varphi(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} \varphi(u)\,du + \int_0^{\alpha_n} \varphi(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^{\alpha_n} \varphi(u)\,du.$$

Nous allons pour cela construire une table de Gauss donnant les valeurs de $\int_0^{\alpha} \varphi(u)\,du$ pour α variant de 0 à α_M avec un pas de 0,01.

α_M sera choisi de manière que $\varepsilon = \int_{\alpha_M}^{\alpha_M + 0,01} \varphi(u)\,du$ soit "négligeable" par rapport à $I = \int_0^{\alpha_M} \varphi(u)\,du$, c'est-à-dire que le calculateur donne $I + \varepsilon = I$ (erreur de chute).

Pour $\alpha > \alpha_M$, nous prendrons $\int_0^{\alpha} \varphi(u)\,du = \int_0^{\infty} \varphi(u)\,du = \frac{1}{2}$.

Pour $0 \leq \alpha \leq \alpha_M$, nous utiliserons la table de Gauss et calculerons $\Phi(\alpha)$ par interpolation.

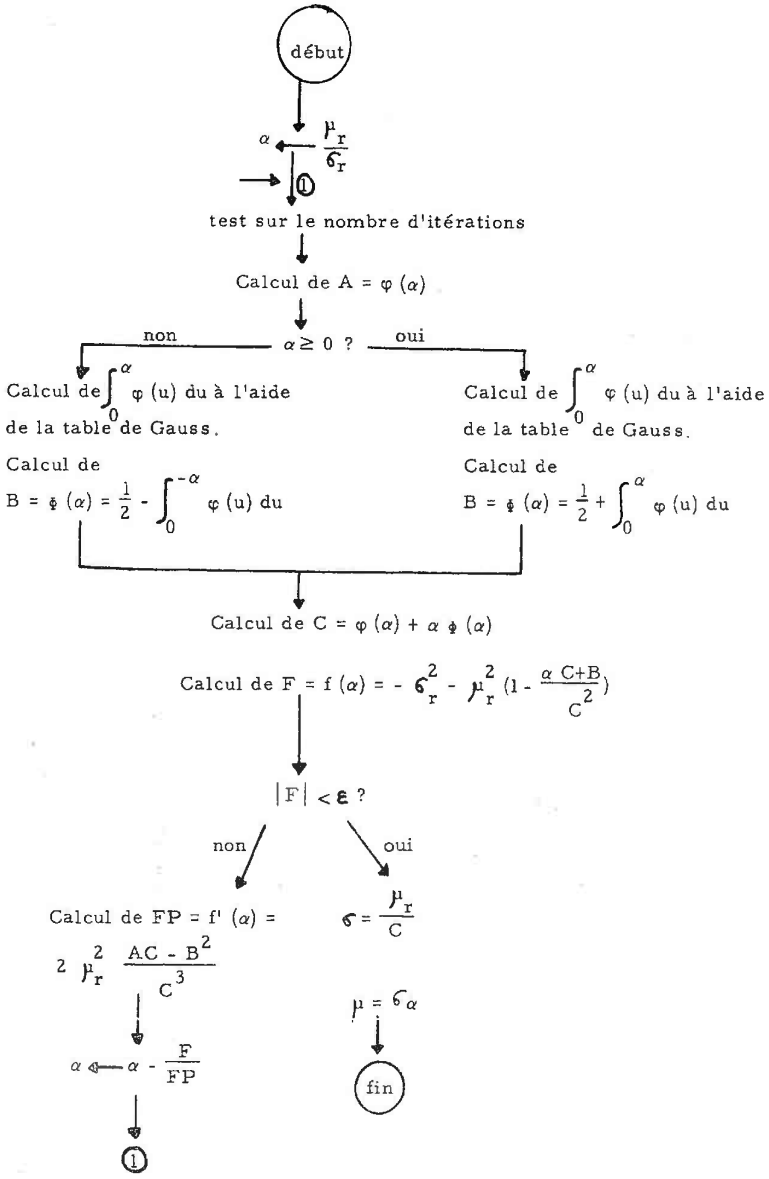
Nous calculons $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ en utilisant la formule d'intégration par arc (page 59, réf. II de la bibliographie) : nous partageons $[a, b]$ en n intervalles égaux de longueur $h = \frac{b-a}{n}$, nous posons $x_i = a + i\,h$ pour $i = 0, \ldots, n$ $(n \geq 7)$ et $\varphi(x_i) = \varphi_i$, nous avons

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \simeq h \left[\frac{8\,\varphi_0 + 31\,\varphi_1 + 20\,\varphi_2 + 25\,\varphi_3}{24} + \sum_{i=4}^{i=n-4} \varphi_i + \frac{25\,\varphi_{n-3} + 20\,\varphi_{n-2} + 31\,\varphi_{n-1} + 8\,\varphi_n}{24} \right]$$

Organigramme du calcul de μ et σ

données : μ_r, σ_r

ε : on arrête le calcul de α lorsque $|f(\alpha)| < \varepsilon$


début
$\alpha \leftarrow \frac{\mu_r}{\sigma_r}$
①
test sur le nombre d'itérations
Calcul de $A = \varphi(\alpha)$
$\alpha \geq 0$?
non
oui
Calcul de $\int_0^{\alpha} \varphi(u)\,du$ à l'aide de la table de Gauss.
Calcul de $B = \Phi(\alpha) = \frac{1}{2} - \int_0^{-\alpha} \varphi(u)\,du$
Calcul de $\int_0^{\alpha} \varphi(u)\,du$ à l'aide de la table de Gauss.
Calcul de $B = \Phi(\alpha) = \frac{1}{2} + \int_0^{\alpha} \varphi(u)\,du$
Calcul de $C = \varphi(\alpha) + \alpha\,\Phi(\alpha)$
Calcul de $F = f(\alpha) = -\sigma_r^2 - \mu_r^2 \left(1 - \frac{\alpha C + B}{C^2}\right)$
$|F| < \varepsilon$?
non
oui
Calcul de $FP = f'(\alpha) = 2\,\mu_r^2\,\frac{AC - B^2}{C^3}$
$\alpha \leftarrow \alpha - \frac{F}{FP}$
①
$\sigma = \frac{\mu_r}{C}$
$\mu = \sigma\alpha$
fin

3) Exemples de résultats

Pour calculer μ et σ connaissant μ_r et σ_r, nous pouvons construire une table donnant μ et σ pour $\mu_r = 1$ et pour différentes valeurs de σ_r (si la variable aléatoire X a pour moyenne μ_r et écart-type σ_r, $\frac{X}{\mu_r}$ a pour moyenne 1 et écart-type $\frac{\sigma_r}{\mu_r}$).

Pour les valeurs de σ_r ne figurant pas dans la table, on peut approcher μ et σ par interpolation.

Nous donnons μ et σ pour $\mu_r = 1$ et σ_r variant de 0,1 à 2 avec un pas de 0,1.

$\mu_r = 1$

σ_r	μ	σ
0.1	1.	0.1
0.2	1.	0.2
0.3	0.999966	0.300121
0.4	0.999151	0.402372
0.5	0.994967	0.511684
0.6	0.983644	0.632766
0.7	0.961069	0.769061
0.8	0.923093	0.923091
0.9	0.865634	1.096814
1.	0.784745	1.291812
1.1	0.676647	1.509403
1.2	0.537756	1.750706
1.3	0.364680	2.016686
1.4	0.154220	2.308193
1.5	-0.096637	2.625967
1.6	-0.390730	2.970677
1.7	-0.730734	3.342919
1.8	-1.119175	3.743234
1.9	-1.558394	4.172076
2.	-2.050712	4.629951

Remarque : pour $\sigma_r = 0,2$ et à priori pour $\sigma_r < 0,2$.

$\mu = \mu_r = 1$, $\sigma = \sigma_r$: la troncature a "peu d'effet".

3.1.3 Processus de la demande et de la livraison utilisés

1) demande

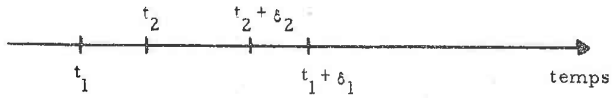
Dans les cas réels de gestion de stock, on étudie souvent le processus de la demande en examinant un relevé des demandes faites dans le passé (on utilise à la rigueur un relevé des ventes). Cette série chronologique nous permet de calculer le taux de demande X sur chacun des intervalles de temps de même durée Δt. X est une variable aléatoire positive ou nulle.

Si X suit un modèle constant, nous calculons les valeurs approchées μ_r et σ_r de sa moyenne et de son écart-type. Nous admettons que X suit une loi de Gauss tronquée de moyenne μ_r et d'écart-type σ_r ; la moyenne μ et l'écart-type σ de la loi de Gauss sont calculés à partir de μ_r et σ_r par la méthode du paragraphe précédent.

Nous utilisons notre technique de simulation pour un tel processus de la demande. L'algorithme du processus de la demande consiste à émettre une suite de nombres pseudo-aléatoires suivant la loi de Gauss tronquée.

On peut concevoir que par une étude plus détaillée du passé, on ait intérêt à utiliser une autre loi mieux adaptée à la réalité.

2) Délai de livraison

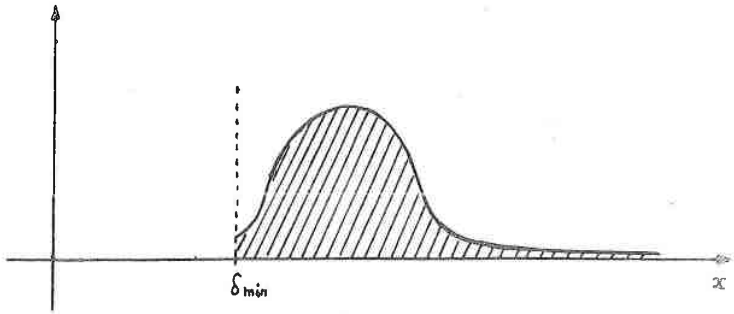


Nous admettons que les commandes ne peuvent pas se croiser, c'est-à-dire qu'une commande lancée à l'instant t_2 ne peut pas être livrée avant une commande lancée antérieurement. Ceci est souvent

le cas lorsqu'il n'y a qu'un fournisseur et qu'un chemin pour les commandes de la marchandise dont on gère le stock. Un retard à la livraison peut être dû au fournisseur se trouvant lui-même en rupture de stock ou de production, au transporteur, etc. Il arrive souvent qu'un fournisseur, voyant arriver une commande alors que la précédente n'est pas encore livrée, groupe les deux commandes pour les livrer simultanément (commandes groupées). Nous appelons délai libre le délai de livraison d'une seule commande. Faute de connaître tous les facteurs déterminant les délais libres ou à cause de leur complexité, nous considérons le délai libre comme une variable aléatoire Y.

Nous supposons que le délai libre suit un modèle constant ; l'étude d'une série chronologique des délais libres nous permet de calculer les valeurs approchées μ' et σ' de la moyenne et de l'écart-type de Y.

Il existe de nombreuses lois permettant de décrire la variable aléatoire positive Y ; par exemple il se peut que Y soit toujours supérieure ou égale à un délai minimum δ_{min} et qu'on puisse admettre que Y suit une loi de Gauss tronquée au sens suivant :



si $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

$$P(Y < \delta_{min}) = 0$$

$$P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b kx\, g(x)\, dx \quad \text{pour } \delta_{min} \leq a \leq b$$

où k est tel que $\int_{\delta_{min}}^{\infty} k\, g(x)\, dx = 1$.

Pour la mise en œuvre de notre technique de simulation, nous supposons que σ' est petit par rapport à μ' et que le délai libre Y suit une loi de Gauss de moyenne μ' et d'écart-type σ' (la probabilité d'émettre un nombre pseudo-aléatoire négatif est pratiquement nulle).

L'algorithme du processus de la livraison consistera à émettre une suite de nombres <u>pseudo-aléatoires</u> suivant la loi de Gauss, chacun de ces nombres positifs représentant un délai de livraison après avoir été éventuellement modifié :

δ_1 : délai de livraison d'une commande lancée à l'instant t_1.

t_2 : date de lancement de la commande suivante.

δ_2 : nombre pseudo-aléatoire émis.

Si $t_2 + \delta_2 < t_1 + \delta_1$, les deux commandes sont groupées.

Le délai de livraison de la deuxième commande sera $t_1 + \delta_1 - t_2$.

<u>Remarque</u> : si $\sigma' = 0$, l'algorithme se simplifie puisque le délai de livraison est constant.

3) <u>Emission d'une suite de nombres pseudo-aléatoires suivant une loi de Gauss, éventuellement tronquée.</u>

<u>Lemme</u> : Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F est continue et strictement croissante. Alors la variable aléatoire $Y = F(X)$ suit une loi de probabilité uniforme dans $[0,1]$.

- Pour créer une suite de nombres pseudo-aléatoires suivant une loi de Gauss, nous créons donc une suite de nombres y_i pseudo-aléatoires suivant

la loi uniforme sur $]0,1[$.

Nous calculons $x_i = F^{-1}(y_i)$ où F est la fonction de répartition de la loi de Gauss : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du$.

Ce calcul peut se faire à partir d'une table de Gauss. (Nous utilisons le sous-programme d'inversion de la fonction de répartition de la loi gaussienne, page 83, réf. IV de la bibliographie).

- Pour générer une suite de nombres pseudo-aléatoires suivant la loi uniforme sur $]0,1[$, nous utilisons la <u>méthode de Lehmer</u> : on prend la suite d'entiers

$$\begin{cases} x_n = a\, x_{n-1} \text{ (modulo m)} \\ x_0 \text{ donné} \in\,]0, m[\end{cases}$$

avec $a = 2^{16} + 3$

$m = 2^{31}$

x_0 impair

La période de la suite est alors $2^{29} = 536\,870\,912$

Les nombres x_i sont ensuite divisés par m pour avoir un générateur uniforme dans $]0, 1[$.

(Nous utilisons le sous-programme ALEAT, page VII-2, réf. III de la bibliographie).

- Pour générer une suite de nombres pseudo-aléatoires suivant une loi de Gauss tronquée, on génère une suite de nombres suivant la loi de Gauss et, chaque fois qu'un nombre est négatif, nous lui donnons la valeur 0

3.1.4 <u>Exemples de représentation de l'approvisionnement et du stock disponible</u>

La simulation sur un cycle nous donne la fonction stock disponible sur ce cycle qui nous permet de retrouver la fonction approvisionnement sur le cycle. Nous avons représenté graphiquement ces fonctions dans deux cas particuliers à l'aide d'un traceur de courbes.

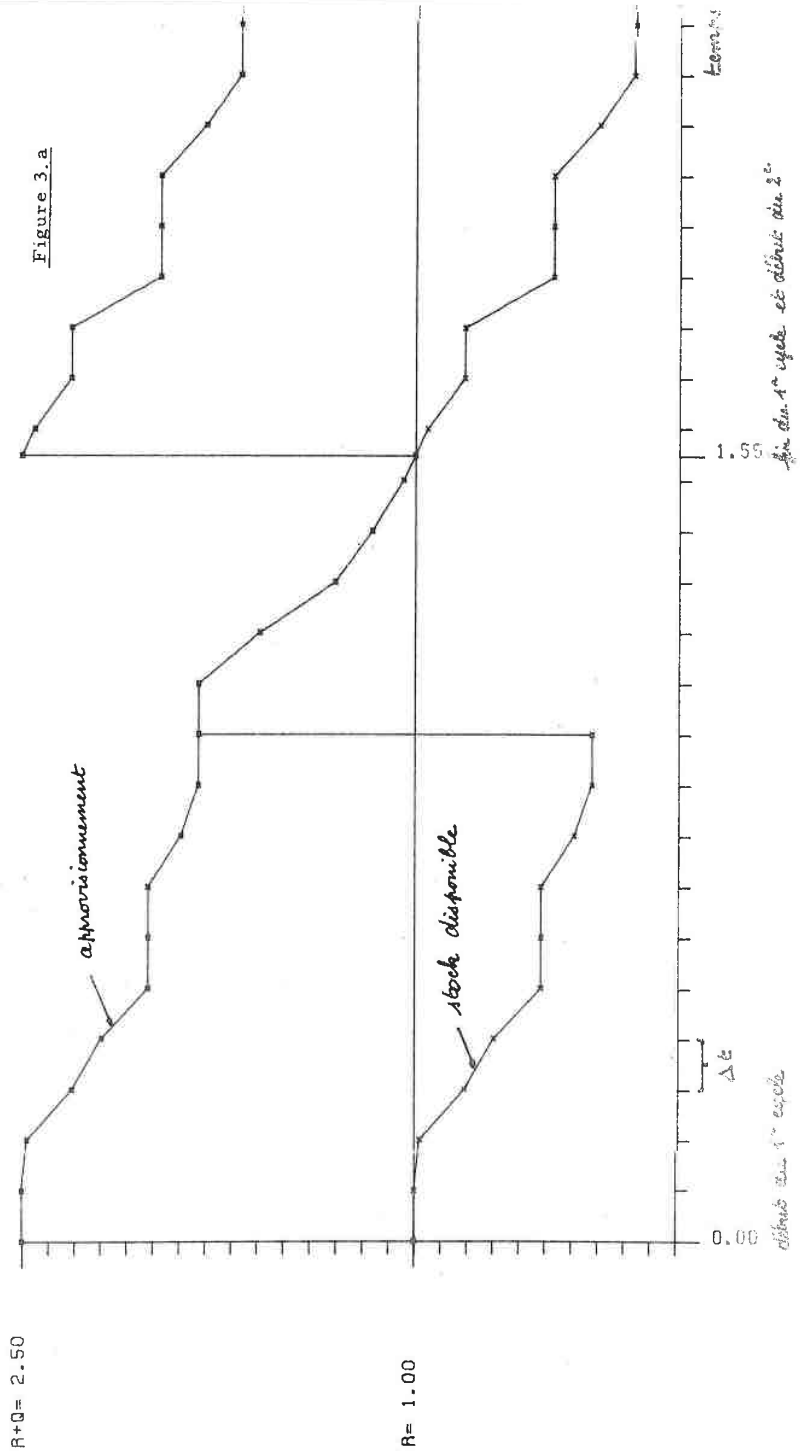
1) Pour les figures 3.a et 3.b

- seuil : R = 1
- Quantité commandée : Q = 1,5
- le délai de livraison est constant et égal à 1
- $\Delta t = 0,1$. Sur chacun des intervalles de temps successifs de longueur Δt, le taux de demande est constant.
- Le taux de demande suit une loi de Gauss tronquée de moyenne $\mu_r = 1$ et d'écart-type $\sigma_r = 1$. La moyenne de la loi de Gauss est alors $\mu = 0.784745$ et son écart type $\sigma = 1.291812$.

2) Pour les figures 3.c et 3.d

- R = 1
- Q = 0,3
- le délai de livraison libre suit une loi de Gauss de moyenne $\mu'_r = 1$ et d'écart-type $\sigma'_r = 0,2$
- $\Delta t = 0,1$
- le taux de demande suit une loi de Gauss tronquée de moyenne $\mu_r = 1$ et d'écart type $\sigma_r = 0,5$. La moyenne de la loi de Gauss est alors $\mu = 0,994967$ et son écart type $\sigma = 0,511684$.

Figure 3.a



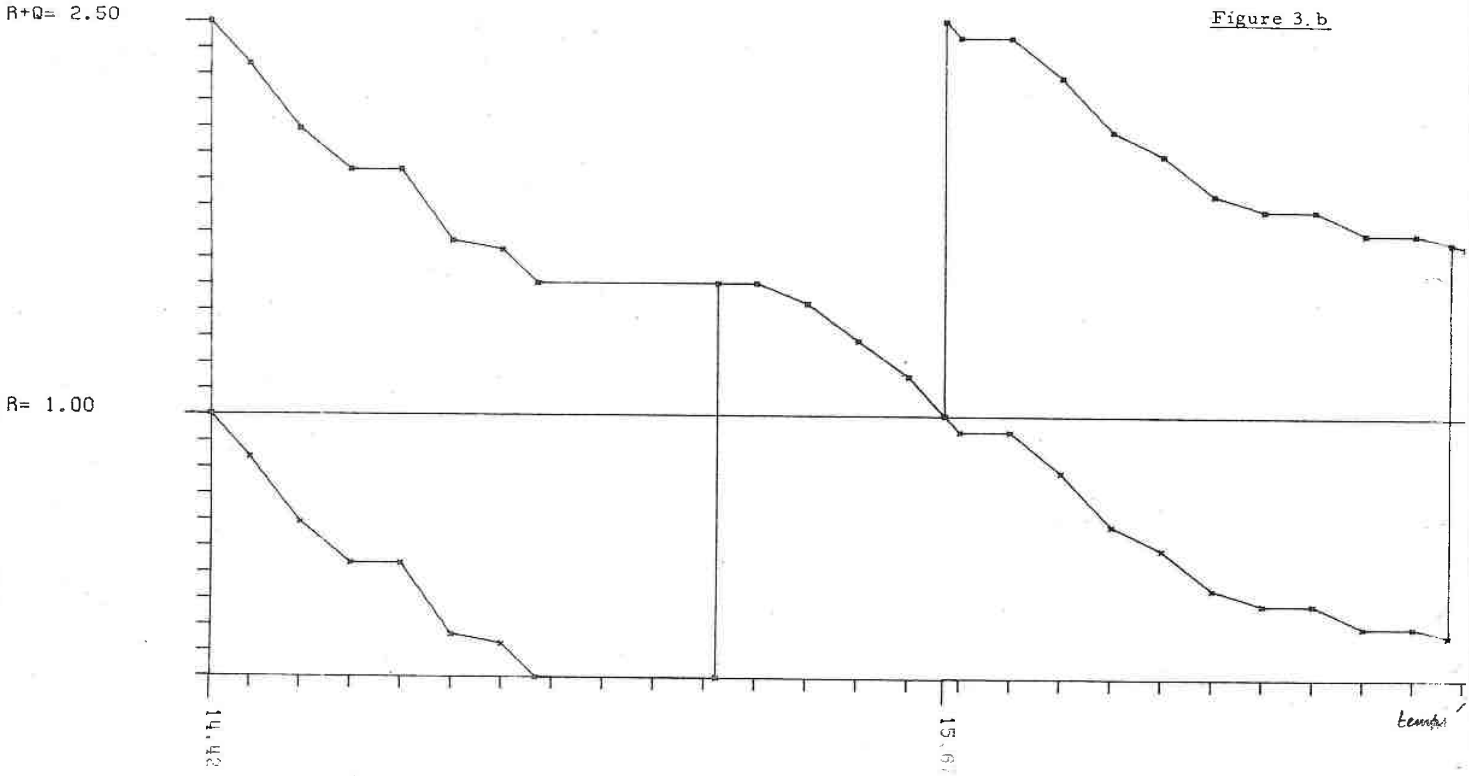


Figure 3.b

Figure 3.c

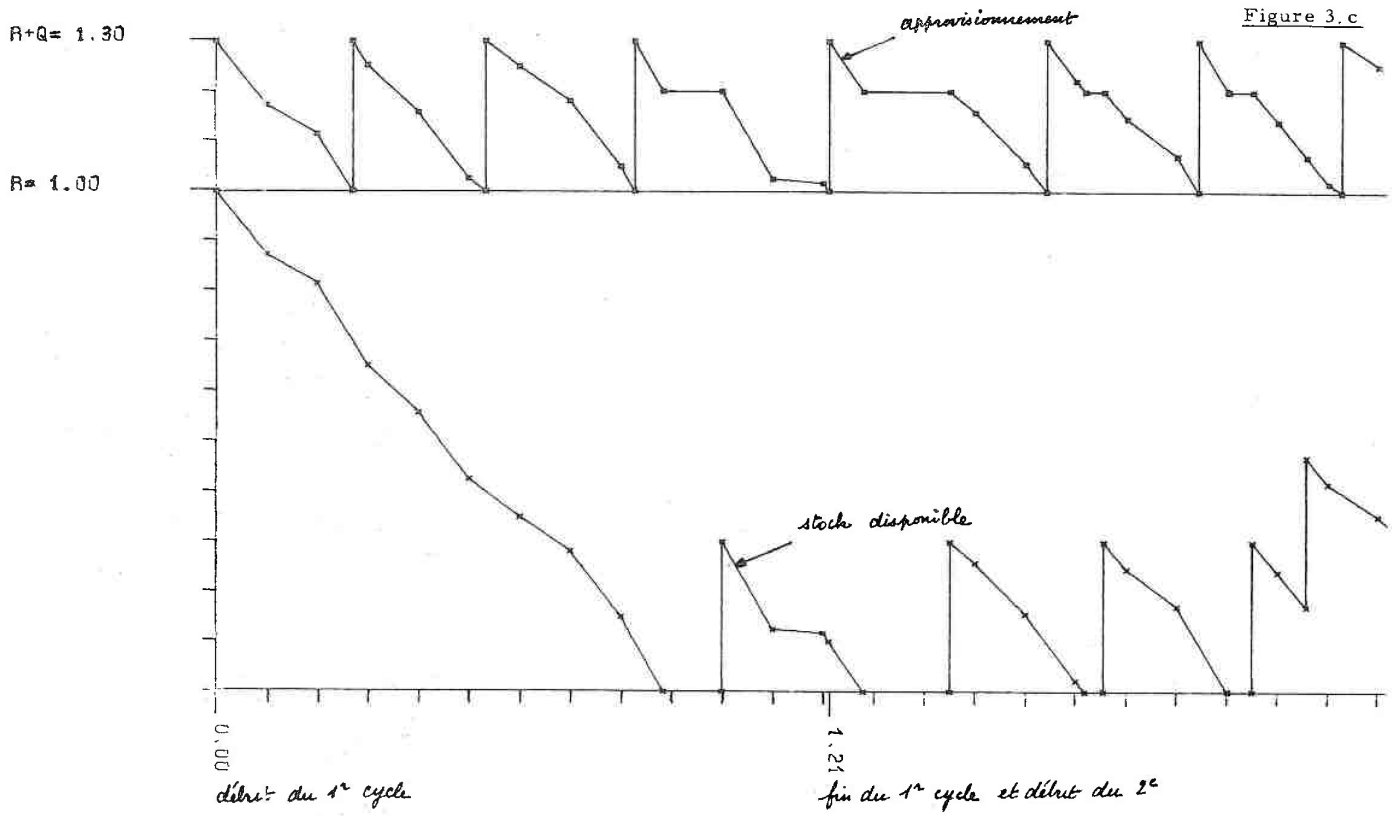
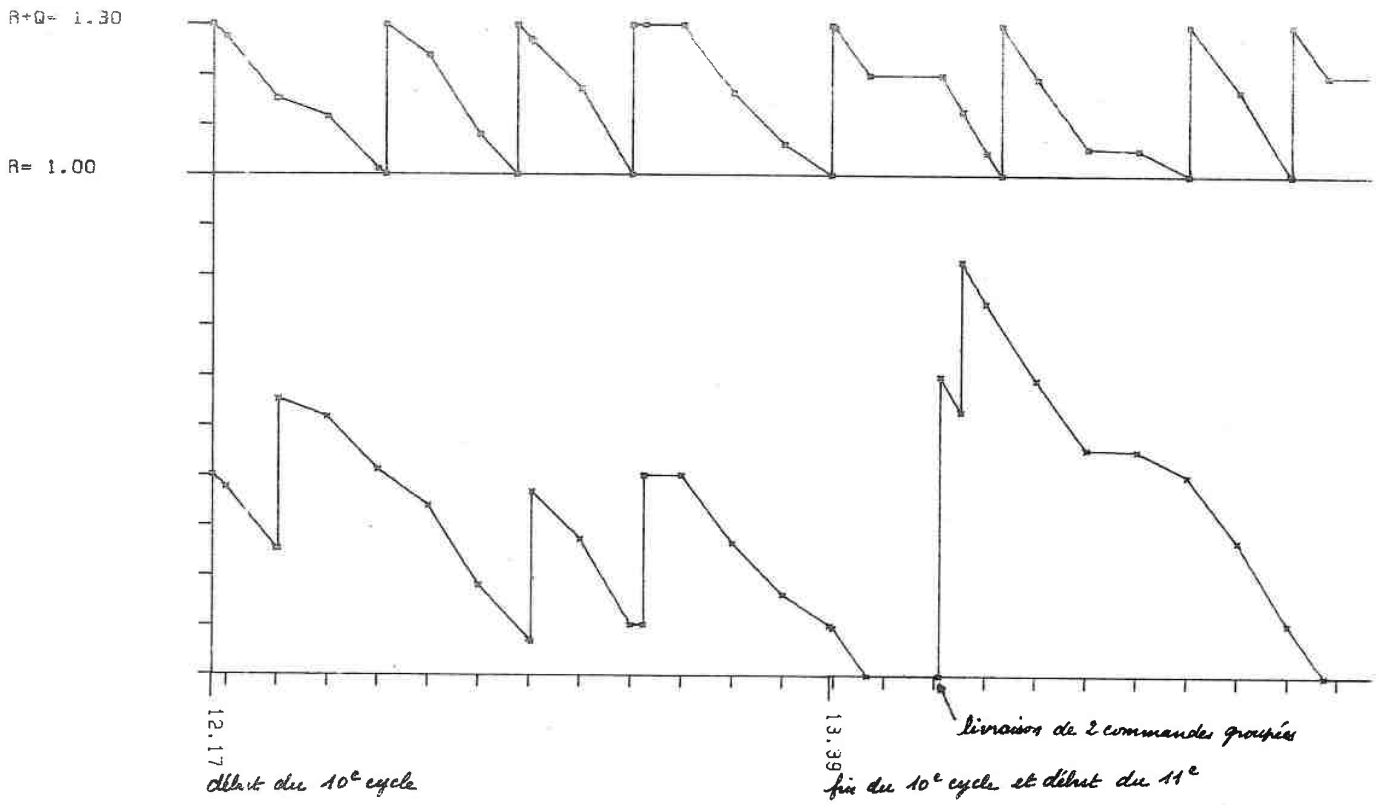

R+Q= 1.30
R= 1.00
approvisionnement
stock disponible
0.00
1.21
début du 1er cycle
fin du 1er cycle et début du 2e

Figure 3.d


R+Q= 1.30
R= 1.00
12.17
13.36
livraison de 2 commandes groupées
début du 10e cycle
fin du 10e cycle et début du 11e

3.2 Exemples de simulations

Dans les simulations que nous avons faites sur calculateur, nous avons choisi :

- comme unité de temps le délai libre moyen
- comme unité de marchandise la quantité de marchandise moyenne demandée sur une période égale au délai moyen.

Le taux moyen de la demande est alors 1.

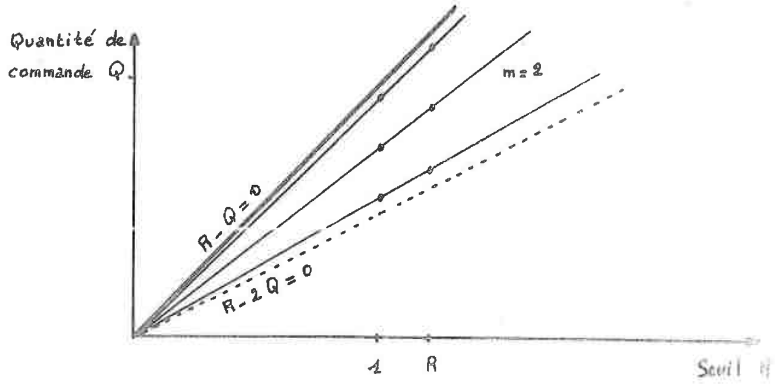
Sur chacun des intervalles de temps successifs de durée Δt, le taux de demande est considéré comme constant. On choisit Δt égal au dixième du délai libre moyen.

Rappelons que (m) désigne le domaine défini par :

$R - (m-1)\,Q \geq 0$ et $R - m\,Q < 0$ pour $m = 1, 2, 3, \ldots$

Sur chacun de ces domaines $\left[\frac{R}{Q}\right]$ est constant et égal à m-1. Nous faisons des simulations sur chacun des dix premiers domaines afin de pouvoir approcher $\hat{T}$ et Ω_r sur chacun d'eux ; $\hat{\Omega}_1$ sera approché par une fonction de Q utilisable sur tous les domaines puisque $\hat{\Omega}_1$ ne dépend que de Q et du processus de la demande.

1) Choix des points (R, Q) où seront faites les simulations



Dans chaque domaine (m) nous choisissons 3 demi-droites de la forme $Q = \alpha R$ avec $\frac{1}{m} < \alpha < \frac{1}{m-1}$ si $m > 1$

$1 < \alpha$ si $m = 1$

si bien qu'à chaque valeur R du seuil correspond 3 points de simulation.

Nous avons choisi les 40 valeurs suivantes du seuil :

0.0975	0.1900	0.2775	0.3600	0.4375
0.5100	0.5775	0.6400	0.6975	0.7500
0.7975	0.8400	0.8775	0.9100	0.9375
0.9600	0.9775	0.9900	0.9975	1.
1.0025	1.0100	1.0225	1.0400	1.0625
1.0900	1.1225	1.1600	1.2025	1.2500
1.3025	1.3600	1.4225	1.4900	1.5625
1.6400	1.7225	1.8100	1.9025	2.

Avec nos unités 1 est la valeur optimum du seuil dans le cas déterministe pour un taux de rupture nul ($1 = \lambda\, \delta$).

2) Quelques résultats

Nous avons établi les moyennes en faisant des simulations sur 100 cycles en chacun des points (R, Q).

Rappel de notations

R : seuil . Q : quantité commandée . $m = [\frac{R}{Q}] + 1$

$\hat{T}$: durée moyenne de rupture par cycle.

$\hat{\Omega}_1$: quantité moyenne de marchandise-temps tournante relative à une commande.

Ω_r : quantité moyenne de marchandise-temps résiduelle par unité de temps.

Les valeurs obtenues par simulation sont des valeurs approchées de $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$, Ω_r.

a) Comparaison des valeurs approchées de $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$, Ω_r par simulation avec celles du cas déterministe. Tableaux 3.a et 3.b

La simulation est faite dans le cas où le taux de demande suit une loi de Gauss tronquée de moyenne $\mu_r = 1$ et d'écart-type $\sigma_r = 0,5$; la moyenne de la loi de Gauss est alors $\mu \sim 0,994967$ et son écart type $\sigma \sim 0,511684$. Le délai libre est aléatoire suivant la loi de Gauss de moyenne $\mu' = 1$ et d'écart-type $\sigma' = 0,2$.

Les points (R, Q) de simulation sont ceux d'une demi droite $Q = \alpha R$ du domaine (2).

On remarque que :

- la durée moyenne de rupture par cycle ne s'annule que pour un seuil $R \geq 1,64$ alors que dans le cas déterministe elle s'annule pour $R \geq 1$.
- La quantité de marchandise-temps résiduelle Ω_r n'est jamais nulle.
- Le processus aléatoire de la demande a pour effet d'augmenter la quantité moyenne de marchandise-temps tournante $\hat{\Omega}_1$.

R	Q	cas aléatoire			cas déterministe		
		$\hat{T}$	$\hat{\Omega}_1$	Ω_r	$\hat{T}$	$\hat{\Omega}_1$	Ω_r
0.0975	0.0951	0.9388	0.0051	0.0025	0.9025	0.0045	0.
0.1900	0.1852	0.8400	0.0190	0.0092	0.8100	0.0171	0.
0.2775	0.2706	0.7741	0.0380	0.0150	0.7225	0.0367	0.
0.3600	0.3510	0.7094	0.0668	0.0263	0.6400	0.0616	0.
0.4375	0.4266	0.5998	0.0960	0.0254	0.5625	0.0911	0.
0.5100	0.4972	0.5439	0.1334	0.0436	0.4900	0.1235	0.
0.5775	0.5631	0.4807	0.1666	0.0359	0.4225	0.1585	0.
0.6400	0.6240	0.4286	0.2019	0.0578	0.3600	0.1947	0.
0.6975	0.6801	0.3889	0.2356	0.0563	0.3025	0.2312	0.
0.7500	0.7312	0.3272	0.2762	0.0774	0.2500	0.2677	0.
0.7975	0.7776	0.2939	0.3036	0.0684	0.2025	0.3026	0.
0.8400	0.8190	0.2567	0.3486	0.0912	0.1600	0.3354	0.
0.8775	0.8556	0.2323	0.3800	0.0983	0.1225	0.3663	0.
0.9100	0.8872	0.1993	0.4023	0.1042	0.0900	0.3934	0.
0.9375	0.9141	0.1819	0.4238	0.1310	0.0625	0.4177	0.
0.9600	0.9360	0.1681	0.4561	0.1138	0.0400	0.4380	0.
0.9775	0.9531	0.1590	0.4791	0.1281	0.0225	0.4541	0.
0.9900	0.9552	0.1711	0.4796	0.1505	0.0100	0.4656	0.
0.9975	0.9726	0.1631	0.4842	0.1382	0.0025	0.4733	0.
1.	0.9750	0.1650	0.4884	0.1574	0.	0.4753	0.

Tableau 3.a

R	Q	Cas aléatoire			cas déterministe		
		$\hat{T}$	$\hat{\Omega}_1$	Ω_r	$\hat{T}$	$\hat{\Omega}_1$	Ω_r
1.0025	0.9774	0.1703	0.4884	0.1448	0.	0.4772	0.0025
1.0100	0.9848	0.1650	0.4931	0.1449	0.	0.4851	0.0100
1.0225	0.9969	0.1450	0.5039	0.1493	0.	0.4970	0.0225
1.0400	1.0140	0.1497	0.5026	0.1452	0.	0.5101	0.0400
1.0625	1.0359	0.1159	0.5416	0.1646	0.	0.5408	0.0625
1.0900	1.0627	0.0868	0.5717	0.1846	0.	0.5618	0.0900
1.1225	1.0944	0.0743	0.6269	0.2172	0.	0.5940	0.1225
1.1600	1.1310	0.0857	0.6553	0.2178	0.	0.6384	0.1600
1.2025	1.1724	0.0455	0.7069	0.2309	0.	0.6844	0.2025
1.2500	1.2187	0.0378	0.7753	0.2823	0.	0.7442	0.2500
1.3025	1.2699	0.0380	0.8198	0.3440	0.	0.8064	0.3025
1.3600	1.3260	0.0162	0.8983	0.3712	0.	0.8844	0.3600
1.4225	1.3869	0.0111	0.9761	0.4065	0.	0.9660	0.4225
1.4900	1.4527	0.0025	1.0718	0.4999	0.	1.0512	0.4900
1.5625	1.5234	0.0058	1.1804	0.5510	0.	1.1552	0.5625
1.6400	1.5990	0.	1.3005	0.6440	0.	1.2800	0.6400
1.7225	1.6794	0.	1.3940	0.7068	0.	1.4112	0.7225
1.8100	1.7647	0.	1.5735	0.8083	0.	1.5488	0.8100
1.9025	1.8549	0.	1.7265	0.9404	0.	1.7112	0.9025
2.	1.95	0.	1.9022	0.9921	0.	1.9012	1.

Tableau 3.b

b) Comparaison des valeurs approchées de $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$, Ω_r dans différents cas aléatoires. Tableaux 3.c et 3.d

Le taux de la demande suit une loi de Gauss tronquée de moyenne μ_r et d'écart type σ_r (la moyenne de la loi de Gauss est μ et sont écart type σ).

Le délai libre suit une loi de Gauss de moyenne μ' et d'écart-type σ' (σ' petit par rapport à μ').

- 1er cas aléatoire :

$\mu_r = 1$ et $\sigma_r = 0,3$ d'où $\mu = 0,999966$ et $\sigma = 0,300121$
$\mu' = 1$ et $\sigma' = 0$ (délai constant).

- 2ème cas aléatoire :

$\mu_r = 1$ et $\sigma_r = 0,5$ d'où $\mu = 0,994967$ et $\sigma = 0,511684$
$\mu' = 1$ et $\sigma' = 0$ (délai constant).

- 3ème cas aléatoire :

$\mu_r = 1$ et $\sigma_r = 1$ d'où $\mu = 0,784745$ et $\sigma = 1,291812$
$\mu' = 1$ et $\sigma' = 0$ (délai constant)

- 4ème cas aléatoire :

$\mu_r = 1$ et $\sigma_r = 0,5$ d'où $\mu = 0,994967$ et $\sigma = 0,511684$
$\mu' = 1$ et $\sigma' = 0,2$ (délai aléatoire).

On remarque que :

- $\hat{T}$, $\hat{\Omega}_1$ et Ω_r augmentent avec la dispersion du taux de demande (1er, 2ème et 3ème cas).

- $\hat{T}$ et Ω_r augmentent avec la dispersion du délai libre (2ème et 4ème cas).

m	R	Q	1er cas aléatoire			2ème cas aléatoire		
			$\hat{T}$	$\hat{\Omega}_1$	Ω_r	$\hat{T}$	$\hat{\Omega}_1$	Ω_r
	0.8400	1.6380	0.1784	1.3259	0.0011	0.1864	1.3275	0.0093
	0.8400	1.2600	0.1445	0.8100	0.0003	0.1601	0.8174	0.0077
	0.8400	0.8820	0.1647	0.3956	0.0018	0.1938	0.3867	0.0092
	1.	1.9500	0.0306	1.9053	0.0291	0.0639	1.9191	0.0558
1	1.	1.5000	0.0431	1.1184	0.0340	0.0503	1.1358	0.0554
	1.	1.0500	0.0415	0.5503	0.0274	0.0578	0.5613	0.0609
	1.1600	2.2620	0.0010	2.5767	0.1697	0.0084	2.5748	0.1745
	1.1600	1.7400	0.0017	1.5345	0.1652	0.0138	1.5570	0.1703
	1.1600	1.2180	0.0018	0.7484	0.1649	0.0141	0.7662	0.1584
	0.8400	0.4130	0.1827	0.0858	0.0168	0.1851	0.0915	0.0432
	0.8400	0.3500	0.1720	0.0627	0.0104	0.1841	0.0642	0.0345
	0.8400	0.2870	0.1583	0.0427	0.0064	0.1800	0.0438	0.0158
	1.	0.4917	0.0547	0.1228	0.0544	0.0991	0.1258	0.0878
3	1.	0.4167	0.0526	0.0891	0.0518	0.0820	0.0922	0.0860
	1.	0.3417	0.0458	0.0596	0.0400	0.0733	0.0634	0.0752
	1.1600	0.5703	0.0064	0.1662	0.1561	0.0183	0.1680	0.1746
	1.1600	0.4833	0.0018	0.1180	0.1525	0.0208	0.1219	0.1775
	1.1600	0.3963	0.0032	0.0800	0.1514	0.0212	0.0828	0.1678

Tableau 3.c

m	R	Q	3ème cas aléatoire			4ème cas aléatoire		
			$\hat{T}$	$\hat{\Omega}_1$	Ω_r	$\hat{T}$	$\hat{\Omega}_1$	Ω_r
	0.8400	1.6380	0.2383	1.4043	0.0330	0.2209	1.3336	0.0231
	0.8400	1.2600	0.2423	0.8038	0.0228	0.1877	0.8069	0.0298
	0.8400	0.8820	0.2115	0.4188	0.0307	0.2040	0.3955	0.0293
	1.	1.9500	0.1086	1.9750	0.1116	0.1009	1.9256	0.0967
1	1.	1.5000	0.1375	1.2237	0.0875	0.0776	1.1463	0.1064
	1.	1.0500	0.1112	0.6230	0.1127	0.0886	0.5640	0.1003
	1.1600	2.2620	0.0748	2.6695	0.1947	0.0463	2.5813	0.1976
	1.1600	1.7400	0.0688	1.6039	0.1470	0.0445	1.5447	0.1797
	1.1600	1.2180	0.0617	0.7971	0.1482	0.0616	0.7544	0.1739
	0.8400	0.4130	0.2886	0.1051	0.1020	0.2721	0.0891	0.0915
	0.8400	0.3500	0.2440	0.0809	0.0932	0.2780	0.0640	0.0877
	0.8400	0.2870	0.2227	0.0546	0.0619	0.2668	0.0457	0.0852
	1.	0.4917	0.1800	0.1432	0.1461	0.1904	0.1284	0.1620
3	1.	0.4167	0.1724	0.1072	0.1413	0.1481	0.0940	0.1447
	1.	0.3417	0.1434	0.0738	0.1350	0.1801	0.0619	0.1250
	1.1600	0.5703	0.0999	0.1983	0.2429	0.0627	0.1781	0.2292
	1.1600	0.4833	0.0898	0.1465	0.2367	0.0728	0.1221	0.2295
	1.1600	0.3963	0.0867	0.0969	0.2235	0.0813	0.0833	0.2128

Tableau 3 d

c) Comparaison de différentes valeurs approchées de $\hat{T}$, Ω_r obtenues pour une même valeur de R et différentes valeurs de Q. Tableau 3.e

Les valeurs approchées de $\hat{T}$ et Ω_r proviennent du 2ème cas aléatoire.

Moyennes des valeurs approchées de Ω_r sur chacun des domaines

m	R=0.75	R=1.	R=1.25
1	0.0028	0.0573	0.2226
2	0.0183	0.0813	0.2526
3	0.0192	0.0830	0.2523
4	0.0208	0.0851	0.2482
5	0.0221	0.0829	0.2513
6	0.0210	0.0831	0.2567

Les moyennes augmentent le plus lorsque nous passons du domaine (1) au domaine (2). Pour tenir compte de ces variations de moyenne, nous pouvons approcher Ω_r sur chacun des domaines.

Pour R = 0,75 on remarque que pour chaque $m \geq 2$ les valeurs approchées de Ω_r diminuent avec Q. Ceci n'est plus vrai pour R = 1,25. En première approximation, nous approcherons Ω_r par une fonction indépendante de Q.

Nous avons des remarques analogues pour $\hat{T}$.

m	R = 0.75			R = 1.			R = 1.25		
	Ω	$\hat{T}$	Ω_r	Ω	$\hat{T}$	Ω_r	Ω	$\hat{T}$	Ω_r
1	1.4625	0.2384	0.0025	1.9500	0.0639	0.0558	2.4375	0.0075	0.2192
	1.1250	0.2580	0.0034	1.5000	0.0503	0.0554	1.8750	0.0043	0.2121
	0.7875	0.2366	0.0026	1.0500	0.0578	0.0609	1.3125	0.0031	0.2367
2	0.7312	0.2722	0.0289	0.9750	0.0885	0.0848	1.2187	0.0098	0.2415
	0.5625	0.2668	0.0188	0.7500	0.0749	0.0753	0.9375	0.0082	0.2446
	0.3937	0.2600	0.0073	0.5250	0.0774	0.0840	0.6563	0.0081	0.2717
3	0.3687	0.2686	0.0246	0.4917	0.0991	0.0878	0.6146	0.0096	0.2468
	0.3125	0.2780	0.0212	0.4167	0.0820	0.0860	0.5208	0.0057	0.2476
	0.2562	0.2495	0.0119	0.3417	0.0733	0.0752	0.4271	0.0014	0.2625
4	0.2469	0.2838	0.0247	0.3292	0.0915	0.0855	0.4115	0.0146	0.2536
	0.2187	0.2710	0.0239	0.2917	0.0821	0.0850	0.3646	0.0073	0.2423
	0.1906	0.2610	0.0138	0.2542	0.0561	0.0848	0.3177	0.0083	0.2487
5	0.1856	0.2865	0.0286	0.2475	0.0879	0.0935	0.3094	0.0111	0.2445
	0.1687	0.2700	0.0214	0.2250	0.0769	0.0739	0.2812	0.0089	0.2573
	0.1519	0.2425	0.0162	0.2025	0.0733	0.0814	0.2531	0.0087	0.2522
6	0.1487	0.2633	0.0271	0.1983	0.0877	0.0834	0.2479	0.0102	0.2611
	0.1375	0.2472	0.0186	0.1833	0.0898	0.0892	0.2292	0.0054	0.2627
	0.1262	0.2390	0.0174	0.1683	0.0846	0.0767	0.2104	0.0108	0.2464

Table 3.e

3.3 Recherche d'une formulation approchée de $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$, Ω_r

Pour un certain processus de la demande et du délai de livraison, $\hat{\Omega}_1$ est une fonction de Q, $\hat{T}$ et Ω_r sont fonctions de Q et R.

Notre but est d'approcher $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$ et Ω_r par des fonctions de formulations connues ; le problème est de trouver de "bonnes" formulations, c'est-à-dire autant que possible "simples" et permettant une bonne approximation.

Nous avons déjà signalé, après observation des résultats de la simulation, que sur chacun des domaines (m), $\hat{T}$ et Ω_r varient peu avec Q ; nous nous contenterons alors d'approcher $\hat{T}$ et Ω_r par des fonctions de la seule variable R sur chacun de ces domaines.

Les paramètres des fonctions approchant $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$, Ω_r seront ajustés en utilisant les résultats expérimentaux donnés par la simulation.
(Un problème plus vaste serait par exemple d'approcher $\hat{T}$ par une fonction de R, Q, du taux de demande moyen $\bar{\lambda}$, de l'écart-type du taux de demande $\sigma(\lambda)$, du délai libre moyen $\bar{\delta}$, de l'écart type du délai libre $\sigma(\delta)$ pour un certain modèle du processus de la demande et du délai de livraison).

3.3.1 Approximation de $\hat{\Omega}_1$

Dans le cas déterministe $\hat{\Omega}_1 = \frac{Q^2}{2\lambda}$ où Q est la quantité commandée et λ le taux de demande.

Dans le cas général $\hat{\Omega}_1$ ne dépend que de Q et du processus de la demande ; de plus $\hat{\Omega}_1$ est nul si Q est nul. Nous allons approcher $\hat{\Omega}_1$ par un polynôme du 2ème degré $P(Q) = C_1 Q + C_2 Q^2$.

Supposons que nous disposions de N points (Q_i, F_i) où :

Q_i est la quantité commandée

F_i est la valeur approchée de $\hat{\Omega}_1(Q_i)$ donnée par la simulation.

Nous voulons résoudre au sens des moindres carrés le système surdéterminé,

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_1^2 \\ Q_2 & Q_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ Q_N & Q_N^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad \text{ou } B \times C = F$$

si le rang de B est 2, ${}^tB \times B$ est inversible et la pseudo-solution est la solution du système : ${}^tB \times B \times C = {}^tB \times F$

$${}^tB \times B = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 & \sum_{i=1}^{N} Q_i^3 \\ \sum_{i=1}^{N} Q_i^3 & \sum_{i=1}^{N} Q_i^4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tB \times F = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} Q_i F_i \\ \sum_{i=1}^{N} Q_i^2 F_i \end{bmatrix}$$

Posons :

$${}^tB \times B = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tB \times F = \begin{bmatrix} s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}$$

Le système $\begin{cases} s_1 C_1 + s_2 C_2 = s_4 \\ s_2 C_1 + s_3 C_2 = s_5 \end{cases}$ a pour solution

$$C_1 = \frac{s_4 s_3 - s_5 s_2}{s_1 s_3 - s_2^2} \qquad C_2 = \frac{s_1 s_5 - s_2 s_4}{s_1 s_3 - s_2^2}$$

Un calcul rapide permet donc de déterminer $P(Q)$.

Exemples :

Le délai est constant et égal à 1.

Le taux de la demande suit une loi de Gauss tronquée de moyenne μ_r et d'écart type σ_r (la loi de Gauss a pour moyenne μ et écart type σ).

La visualisation des points expérimentaux et de la fonction P obtenue après lissage nous permet d'apprécier la "qualité" de l'approximation.

Appelons $\widehat{\Omega_{1,d}}$ la fonction $\hat{\Omega}_1$ dans le cas déterministe :

$$\widehat{\Omega_{1,d}}(Q) = \frac{Q^2}{2\lambda} \qquad \text{avec } \lambda = \mu_r.$$

Au lieu de représenter la fonction P, nous représenterons la fonction $P - \widehat{\Omega_{1,d}}$ et au lieu de représenter les points (Q_i, F_i), nous représenterons les points $(Q_i, F_i - \widehat{\Omega_{1,d}}(Q_i))$, ceci afin d'augmenter la précision des graphiques.

1er exemple

$\mu_r = 1$ et $\sigma_r = 0,5$ d'où $\mu = 0,994967$ et $\sigma = 0,511684$

on obtient $C_1 = 7,60963 \times 10^{-3}$ et $C_2 = 0,502518$.

Voir la figure 3.e.

2ème exemple

$\mu_r = 1$ et $\sigma_r = 1$ d'où $\mu = 0,784745$ et $\sigma = 1,291812$

on obtient $C_1 = 4,64510 \times 10^{-2}$ et $C_2 = 0,500390$.

Voir la figure 3.f.

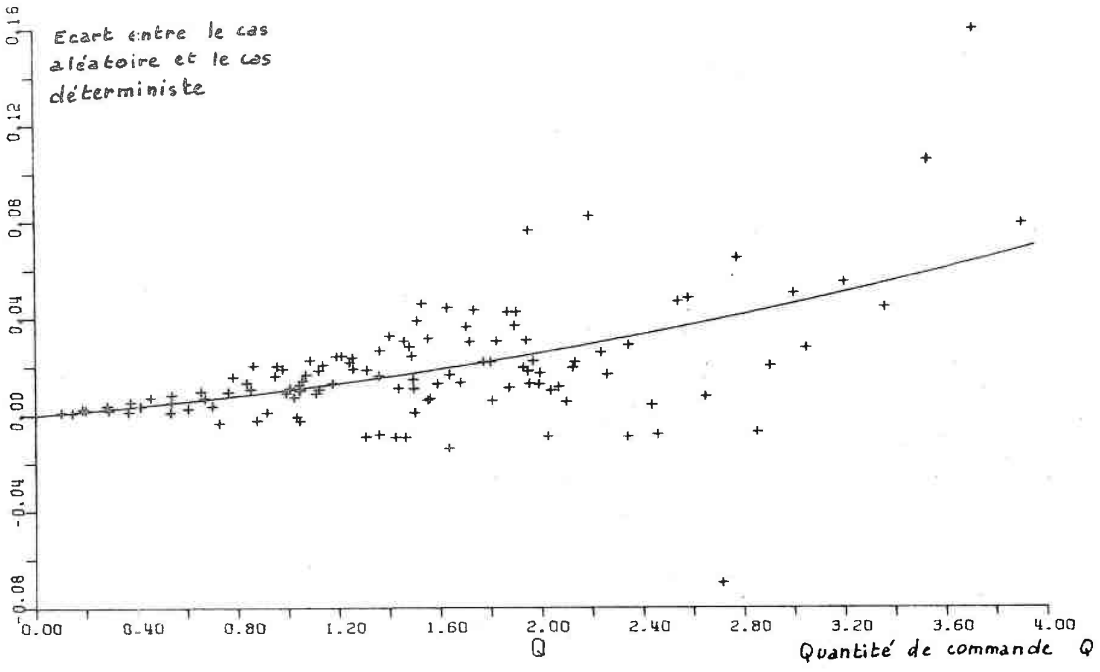

Ecart entre le cas aléatoire et le cas déterministe
0.16
0.12
0.08
0.04
0.00
-0.04
-0.08
0.00
0.40
0.80
1.20
1.60
2.00
2.40
2.80
3.20
3.60
4.00
Q
Quantité de commande Q

Figure 3.e

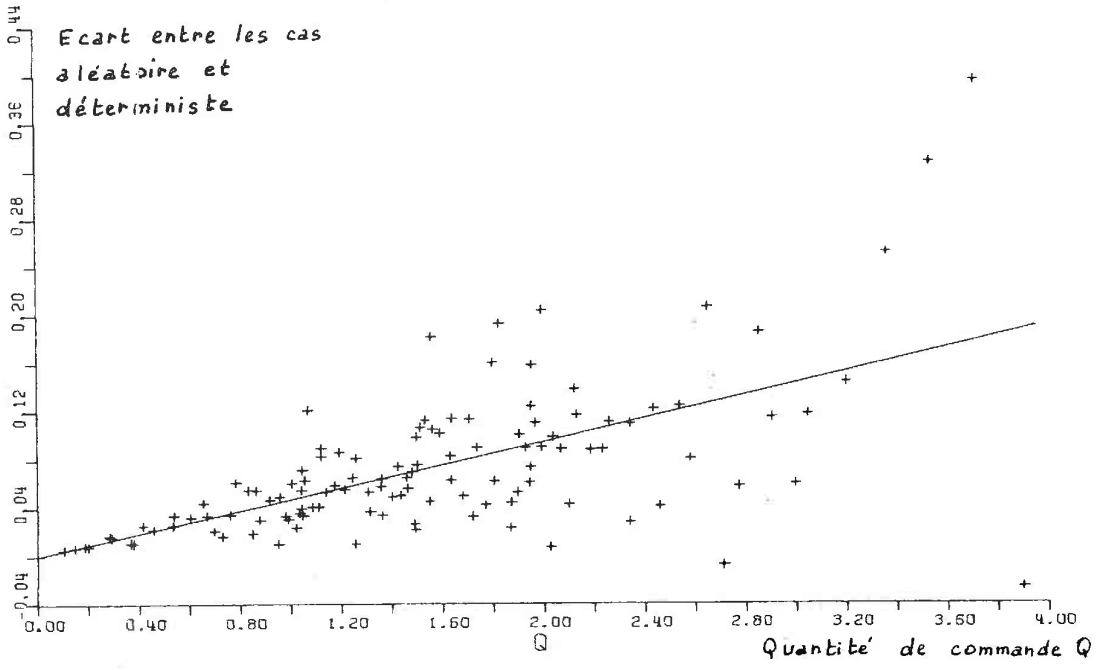

Ecart entre les cas
aléatoire et
déterministe
0.44
0.36
0.28
0.20
0.12
0.04
-0.04
0.00
0.40
0.80
1.20
1.60
2.00
2.40
2.80
3.20
3.60
4.00
Q
Quantité de commande Q

Figure 3.f

3.3.2 Approximation de $\hat{T}$ et Ω_r

Appelons $\widehat{T}_d$ et $\Omega_{r,d}$ les fonctions $\hat{T}$ et Ω_r dans le cas déterministe.

Nous avons $\widehat{T}_d(R) = \delta - \frac{R}{\lambda}$ et $\Omega_{r,d}(R) = 0$ pour $0 \leq R \leq \lambda\,\delta$

$\widehat{T}_d(R) = 0$ et $\Omega_{r,d}(R) = -\lambda\,\delta + R$ pour $R \geq \lambda\,\delta$

où λ est le taux de demande et δ le délai.

Lorsque la dispersion du taux de demande ou du délai libre diminue, les fonctions $\hat{T}$ et Ω_r "se rapprochent" des fonctions $\widehat{T}_d$ et $\Omega_{r,d}$ comme nous l'indiquent les résultats expérimentaux des simulations. Ces remarques nous conduisent à essayer d'approcher les fonctions $\hat{T}$ et Ω_r par une branche d'hyperbole ayant pour asymptotes les droites $y_1(R)$ parallèle à

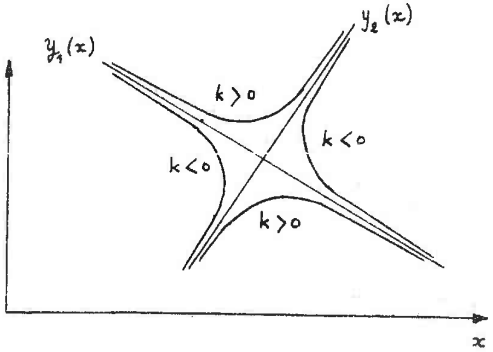
$y(R) = -\frac{R}{\lambda} + \delta$ pour $\hat{T}$

$= R - \lambda\,\delta$ pour Ω_r

(λ : taux de demande moyen ; δ : délai libre moyen)

et $y_2(R) = 0$.

1) Approximation par une branche d'hyperbole



Soient deux droites : $y_1(x) = a_0 + a_1 x$ et $y_2(x) = b_0 + b_1 x$ et un réel k. L'ensemble des (x, y) vérifiant :

$$(y - y_1(x))(y - y_2(x)) = k \quad \text{est une hyperbole.}$$

Cette équation s'écrit :

$$y^2 - y(y_1(x) + y_2(x)) + y_1(x)\, y_2(x) - k = 0$$

$$\Delta(x) = (y_1(x) + y_2(x))^2 - 4\, y_1(x)\, y_2(x) + 4k$$

$$\Delta(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2 + 4k$$

Prenons $k > 0$, alors $\Delta(x) > 0 \quad \forall x$

L'hyperbole se compose de deux branches et la branche supérieure a pour équation :

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(y_1(x) + y_2(x) + \sqrt{\Delta(x)}\right)$$

Supposons que nous disposions de N points (R_i, y_i) où

R_i est une valeur du seuil

y_i est la valeur approchée de $\hat{T}$ ou Ω_r correspondante donnée par la simulation.

Notre approximation consiste à minimiser

$$F(a_o, k) = \sum_{i=1}^{N} (y(R_i) - y_i)^2 \quad \text{sur le domaine suivant :}$$

$k > 0$, $a_0 \in \mathbb{R}$, en prenant $b_0 = b_1 = 0$

$a_1 = -\frac{1}{\lambda}$ si l'on approche $\hat{T}$

$= 1$ si l'on approche Ω_r.

Des essais ont été faits en utilisant un programme de maximisation avec contraintes ; la visualisation des résultats montre que y ne permet pas d'approcher avec précision $\hat{T}$ ou Ω_r car il existe des régions où les points expérimentaux se trouvent "accumulés" d'un même côté de la courbe représentant y.

Exemple : figure 3.g

Le délai est constant et égal à 1.

Le taux de la demande suit une loi de Gauss tronquée de moyenne $\lambda = 1$ et d'écart-type $\sigma_r = 0,511684$ (la moyenne de la loi de Gauss est $\mu = 0,994967$ et son écart type $\sigma = 0,511684$).

Nous approchons $\hat{T}$ sur le domaine (1), à partir de 120 points expérimentaux (R_i, y_i).

On obtient $a_0 \sim 0,992$ et $k \sim 0,00434$

Pour augmenter la précision du graphique nous représentons :

- les points $(R_i, y_i - \hat{T}_d(R_i))$
- la courbe $y - \hat{T}_d$.

On remarque que pour $R \geq 1,20$ tous les points expérimentaux se trouvent au dessous de la courbe.

D'après les résultats de la simulation, on peut considérer que le taux de rupture est nul pour $R \geq 1,40$; si on utilise la fonction y approchant $\hat{T}$ et qu'on exige un taux de rupture presque nul, on serait amené à prendre un seuil R plus grand que 1,40 ce qui augmente inutilement la quantité de marchandise-temps résiduelle Ω_r donc le coût de gestion.

2) Approximation par une branche de pseudo-hyperbole

a) Remarques préliminaires :

Soient N points (R_i, Q_i) $i = 1, 2, \ldots, N$ d'une domaine (m), y_i et z_i les valeurs approchées de $\hat{T}$ et Ω_r obtenues par la simulation en (R_i, Q_i).

* D'après les simulations faites, y_i s'annule dès que le seuil R_i est suffisamment grand ; soit R_o la plus petite valeur du seuil telle que $y_i = 0$ pour $R_i \geq R_o$. Il est intéressant d'approcher $\hat{T}$ par une fonction y telle que $y(R) = 0$ pour $R \geq R_o$.

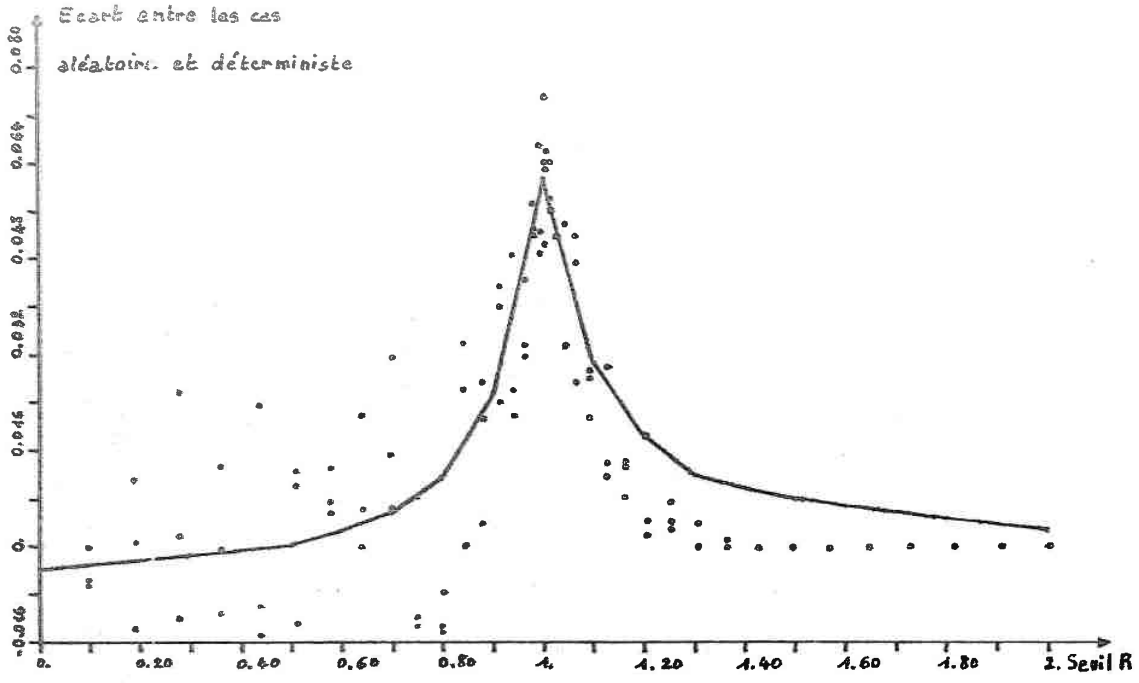

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
0.080
0.064
0.048
0.032
0.016
0.
-0.016
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.
1.20
1.40
1.60
1.80
2. Seuil R

Figure 3.g

* Dans des cas où les dispersions du taux de demande et du délai libre ne sont pas trop élevées, z_i s'annule dès que le seuil R_i est suffisamment petit ; soit R_o la plus grande valeur du seuil telle que $z_i = 0$ pour $R_i \leq R_o$.

Si ce n'est pas le cas nous prendrons $R_o = 0$.

En effet $0 \leq \Omega_r \leq R$ donc Ω_r tend vers 0 lorsque R tend vers 0. Il est intéressant d'approcher Ω_r par une fonction y telle que $y(R) = 0$ pour $R \leq R_o$.

b) Pseudo-hyperbole

D'après ces remarques, au lieu de prendre pour k une constante positive comme au 1), nous prendrons une fonction de x positive ou nulle s'annulant pour $x \geq R_o$ si on approche $\hat{T}$

$x \leq R_o$ si on approche Ω_r.

Définition k fonction positive ou nulle

$$y_1(x) = a_0 + a_1 x, \quad y_2(x) = b_0 + b_1 x$$

$$\Delta(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2 + 4\,k(x)$$

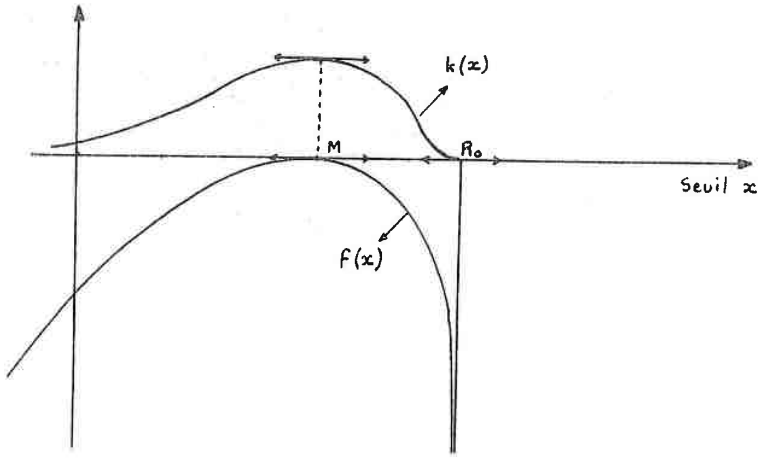
$$y(x) = \frac{1}{2}\left(y_1(x) + y_2(x) + \sqrt{\Delta(x)}\right)$$

La courbe représentant y fonction de x est appelée branche supérieure d'une pseudo-hyperbole.

Si k est dérivable par rapport à x et si $k(x_0) > 0$ pour x_0 vérifiant $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, alors y est dérivable par rapport à x quel que soit x.

c) Type de pseudo-hyperbole

approche de $\hat{T}$



On approche $\hat{T}$ par une fonction pseudo-hyperbole ainsi définie

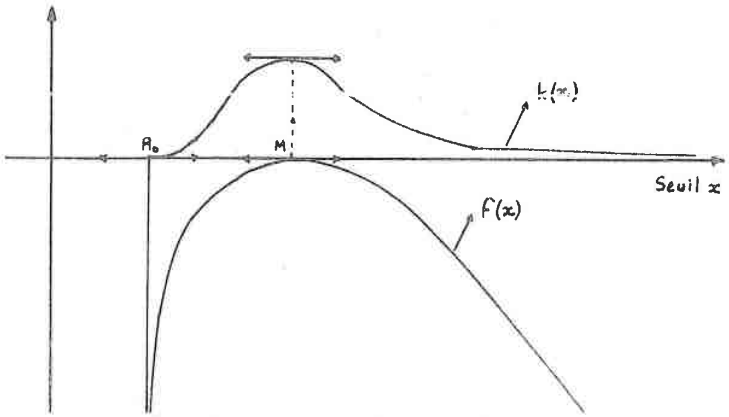
$$k(x) = c\ e^{f(x)} \quad \text{pour } x < R_o$$
$$= 0 \quad \text{pour } x \geq R_o$$

où $f(x) = -\alpha (x - M)^2$ pour $x \leq M$

$$= -\beta \frac{(x - M)^2}{R_o - x} \quad \text{pour } M \leq x < R_o$$

et $c > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $0 < M < R_o$

<u>approche de Ω_r</u>



La pseudo-hyperbole permettant d'approcher Ω_r est définie par :

$$k(x) = 0 \quad \text{pour } x \leq R_o$$
$$k(x) = c\ e^{f(x)} \quad \text{pour } x > R_o$$

où $$f(x) = \frac{\beta (x - M)^2}{R_o - x} \quad \text{pour } R_o < x \leq M$$
$$= -\alpha (x - M)^2 \quad \text{pour } x > M$$

et $c > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $R_o < M$.

<u>Formulation commune aux approximations de $\hat{T}$ et Ω_r</u>

Posons $S = -1$ si on approche $\hat{T}$

$S = 1$ si on approche Ω_r

Nous avons alors la formulation suivante, utile pour la programmation

$$k(x) = c\ e^{f(x)} \quad \text{pour } S(x - R_o) > 0$$
$$= 0 \quad \text{pour } S(x - R_o) \leq 0$$

où $$f(x) = -\alpha (x - M)^2 \quad \text{pour } S(x - M) \geq 0$$
$$= S \frac{\beta (x - M)^2}{R_o - x} \quad \text{pour } S(x - M) \leq 0.$$

Nous choisissons $y_1(x) = a_0 - \frac{x}{\lambda}$ pour approcher $\hat{T}$

$= a_0 + x$ pour approcher Ω_r

$y_2(x) = 0$

(λ : taux moyen de la demande).

d) <u>Exemples d'approximation de $\hat{T}$ et Ω_r par une pseudo-hyperbole</u>

* D'après le choix de $y_1(x)$, $y_2(x)$ et de R_o, une pseudo-hyperbole du type précédent dépend des paramètres :

a_0, c, α, β, M qu'il s'agit "d'ajuster au mieux" pour chaque approximation de $\hat{T}$ ou Ω_r.

Nous ajustons ces paramètres de la manière suivante :

- nous choisissons $M = \lambda\ \delta$ où λ est le taux de demande moyen et δ le délai libre moyen : la figure 3.g représente l'approximation de $\hat{T}$ par une fonction hyperbole ; elle paraît de bonne qualité pour $R \leq \lambda\ \delta\ (\lambda\ \delta = 1)$; par contre, d'après la position des points expérimentaux, la valeur de k obtenue est trop grande pour $R > \lambda\ \delta$.

De là vient l'idée de choisir k fonction du seuil R et <u>k décroissante pour $R > \lambda\ \delta$,</u> d'où le choix de M.

- Soient N points (R_i, Q_i) $i = 1, \ldots, N$ et y_i la valeur approchée de $\hat{T}$ ou Ω_r au point (R_i, Q_i) donnée par la simulation. Un premier essai consiste à ajuster a_0, c, α, β en minimisant

$$F(a_0, c, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{N} (y(R_i) - y_i)^2 \text{ avec les contraintes}$$

$c > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ (approximation au sens des moindres carrés). On utilise pour cela un programme de maximisation avec contraintes suivant une méthode du gradient. On remarque alors que α et β restent très "voisins" de leurs valeurs initiales même après un nombre important d'itérations (on peut penser que F est beaucoup plus "sensible" aux variables a_0 et c qu'aux variables α et β).

Dans un deuxième essai <u>nous fixons arbitrairement α et β et</u> nous minimisons $F(a_0, c) = \sum_{i=1}^{N} (y(R_i) - y_i)^2$ avec la contrainte <u>$c > 0$</u> (si on approche $\hat{T}$, a_0 doit rester voisin de δ ; on ajoute alors des contraintes de sécurité du type $\delta - \varepsilon \leq a_0 \leq \delta + \varepsilon$).

Si on approche Ω_r, a_0 doit rester voisin de $-\lambda\ \delta$; on ajoute alors des contraintes du type $-\lambda\ \delta - \varepsilon \leq a_0 \leq -\lambda\ \delta + \varepsilon$).

* <u>Quelques résultats</u>

Nous approchons $\hat{T}$ et Ω_r sur chacun des domaines (m) $m = 1, 2, \ldots, 10$ dans deux cas aléatoires.

<u>1er cas aléatoire</u> : la moyenne du taux de demande est $\lambda = 1$, son écart type est $\sigma_r = 0,5$. Le délai est constant et égal à 1. Les résultats se trouvent dans le tableau 3.f.

<u>2ème cas aléatoire</u> : la moyenne du taux de demande est $\lambda = 1$, son écart type est $\sigma_r = 1$. Le délai est constant et égal à 1. Les résultats se trouvent dans le tableau 3.g.

(les simulations ont été faites pour des seuils $R \leq 2$; dans le 2ème cas aléatoire, la plus petite valeur R_o du seuil telle que les valeurs approchées de $\hat{T}$ soient nulles pour $R \geq R_o$ est supérieure à 2. En effet les valeurs approchées de $\hat{T}$ pour $R = 2$ sont :

- pour m = 1 : 0., 0.004, 0.
- pour m = 2 : 0.0006, 0.0014, 0.
- pour m = 3 : 0.0006, 0., 0.0010 etc.

Comme ces valeurs sont petites, nous garderons $R_o = 2$.

Mais d'une manière générale, <u>pour utiliser notre technique d'approche de $\hat{T}$, il est nécessaire de faire des simulations pour des seuils suffisamment grands, c'est-à-dire pour lesquels la durée moyenne de rupture par cycle est nulle).</u>

On remarque que :

- les valeurs de R_o sont à peu près indépendantes de m.
- Les valeurs de a_o diminuent lorsque m augmentent et qu'on approche $\hat{T}$: ainsi dans le 1er cas a_o a diminué environ de $\frac{6}{100}$ de sa valeur maximum lorsqu'on passe de m = 1 à m = 10 ; dans le 2ème cas a_o a diminué environ de 13 % de sa valeur maximum.
- Lorsqu'on approche Ω_r, cette diminution de a_o est beaucoup moins nette.
- c augmente avec m ; pour un seuil donné, plus le nombre maximum m de commandes en attente de livraison est grand, plus la durée moyenne de rupture par cycle est grande et plus la quantité moyenne de marchandise-temps résiduelle par unité de temps est grande.

Tableau 3.f

	M = 1 $\alpha = 0.1$ $\beta = 10$					
	approximation de $\hat{T}$			approximation de Ω_r		
m	R_o	a_0	$C \times 10^3$	R_o	a_0	$C \times 10^3$
1	1.49	0.9917	4.339	0.0975	-1.0166	3.657
2	1.64	0.9836	8.161	0.	-1.0260	7.546
3	1.49	0.9738	9.801	0.	-1.0254	8.542
4	1.64	0.9698	9.929	0.	-1.0269	9.269
5	1.64	0.9633	10.894	0.	-1.0275	9.705
6	1.5625	0.9576	11.113	0.	-1.0256	9.479
7	1.49	0.9475	12.534	0.	-1.0256	9.561
8	1.49	0.9467	12.123	0.	-1.0257	9.869
9	1.5625	0.9423	12.585	0.	-1.0321	10.645
10	1.5625	0.9396	12.949	0.	-1.0258	10.450

Tableau 3.g

	M = 1 $\alpha = 0.1$ $\beta = 5$					
	approximation de $\hat{T}$			approximation de Ω_r		
m	R_o	a_0	$C \times 10^3$	R_o	a_0	$C \times 10^3$
1	2.	0.9641	19.314	0.0975	-1.0700	14.928
2	2.	0.9384	36.507	0.	-1.0862	28.996
3	2.	0.9057	42.507	0.	-1.0921	33.499
4	2.	0.9030	43.455	0.	-1.0776	32.958
5	2.	0.8838	46.532	0.	-1.0810	33.514
6	2.	0.8678	48.522	0.	-1.0821	34.722
7	2.	0.8633	48.677	0.	-1.0875	37.651
8	2.	0.8641	47.757	0.	-1.0855	37.532
9	2.	0.8444	52.559	0.	-1.0894	38.173
10	2.	0.8365	52.648	0.	-1.0874	39.621

Nous représentons graphiquement les écarts entre les cas aléatoire et déterministe :

- les points expérimentaux : $(R_i, y_i - \hat{T}_d(R_i))$ ou $(R_i, y_i - \Omega_{r,d}(R_i))$
- les courbes représentant les fonctions : $y - \hat{T}_d$ ou $y - \Omega_{r,d}$ afin d'apprécier la qualité des approximations de $\hat{T}$ ou Ω_r.

Nous donnons quelques exemples de graphiques (figure 3.g à figure 3.p).

Remarques

- Nous avons pris arbitrairement $\alpha = 0,1$. D'après les graphiques cette valeur paraît satisfaisante dans tous les cas (α influe sur la courbe pour $R \leq 1$ lorsqu'on approche $\hat{T}$, pour $R \geq 1$ lorsqu'on approche Ω_r).
- β influe sur la courbe pour $1 < R < R_o$ lorsqu'on approche $\hat{T}$, pour $R_o < R < 1$ lorsqu'on approche Ω_r. Pour une telle valeur R du seuil k (R) augmente donc y (R) augmente lorsque β diminue. Dans le cas des figures 3.k, 3.ℓ 3.p nous aurions intérêt à diminuer β.

Dans le cas de la figure 3.o, nous aurions intérêt à augmenter β. Ainsi on pourrait améliorer l'approximation de $\hat{T}$ ou Ω_r de la manière suivante :

on choisit un ensemble fini de valeurs à donner à β ;
pour chaque valeur de β on ajuste a_o et c comme nous l'avons fait et on calcule le résidu

$$\sum_{i=1}^{N} (y(x_i) - y_i)^2 ;$$

la meilleur valeur de β est celle qui donne le plus petit résidu.

- Nous avons dit que les points de simulation (R, Q) étaient choisis dans chaque domaine sur 3 demi-droites $Q = u_i \times R$ $i = 1, 2, 3$ $u_1 > u_2 > u_3$. Sur les figures 3.g $\longrightarrow$ 3. p, un point expérimental est représenté par :

+	s'il correspond d'un	point de simulation sur		$\Omega = u_1 R$
×	"	"	"	$\Omega = u_2 R$
◇	"	"	"	$\Omega = u_3 R$

sur la figure 3.k nous remarquons que pour $R \leq 1$, les valeurs approchées de Ω_r augmentent avec u_i.

Dans l'ensemble <u>les graphiques justifient le fait que nous approchions $\hat{T}$ et Ω_r par des fonctions indépendantes de Ω.</u>

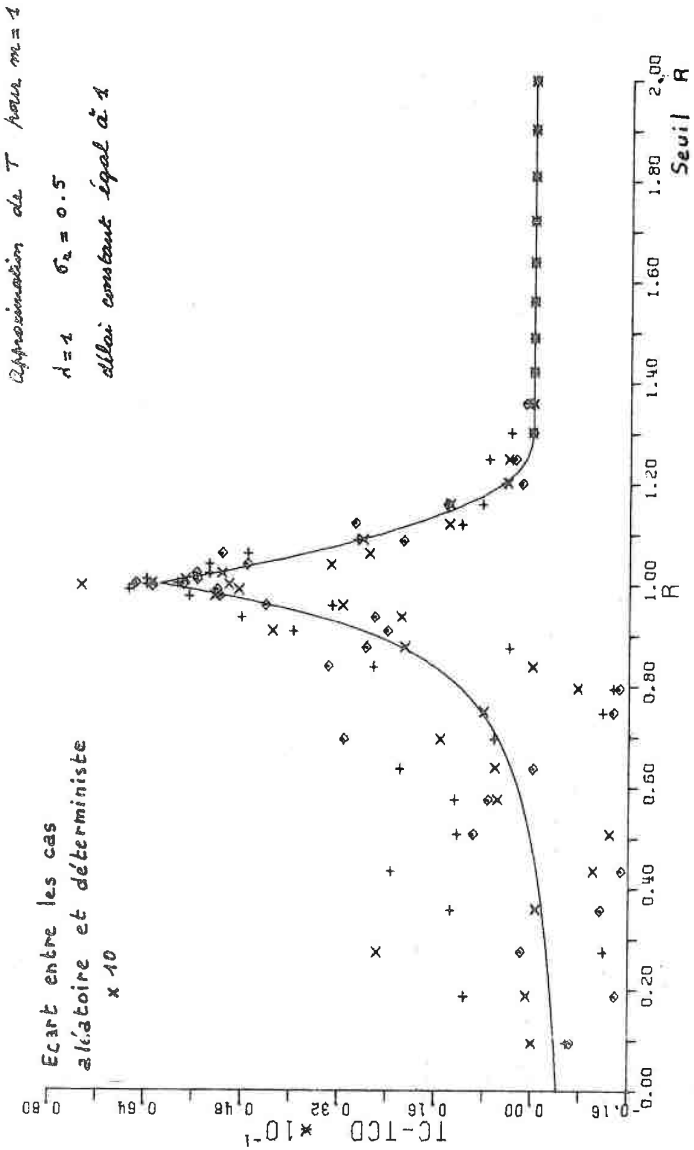


Figure 3.g

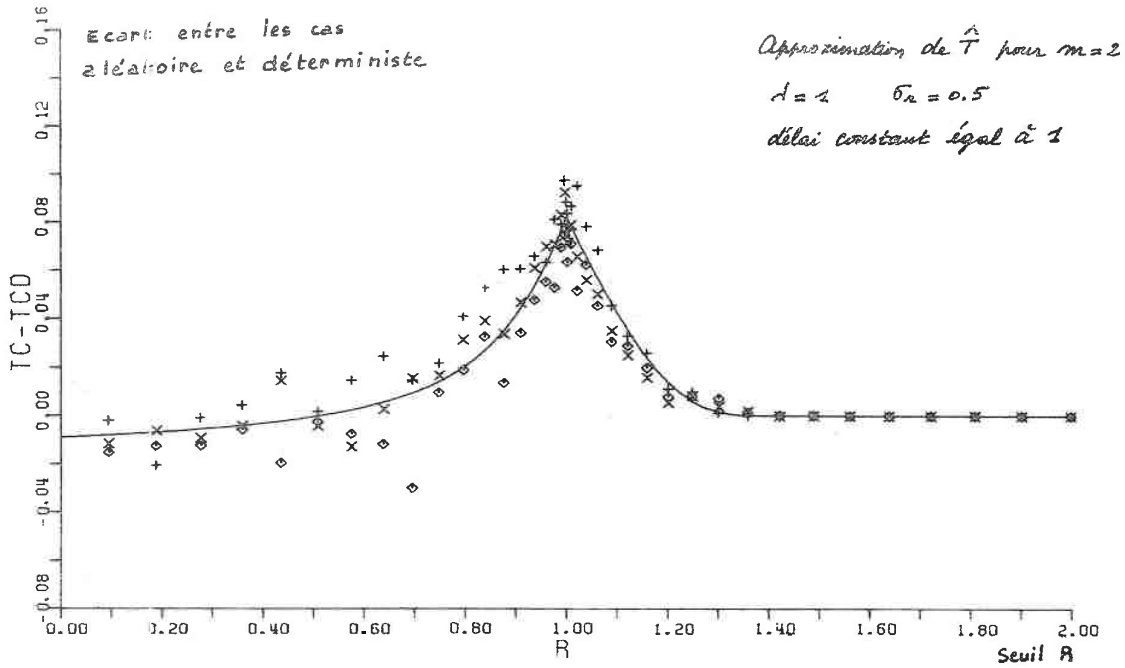

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
Approximation de $\hat{T}$ pour $m=2$
$\lambda = 1$ $\sigma_R = 0.5$
délai constant égal à 1
TC-TCD
0.16
0.12
0.08
0.04
0.00
-0.04
-0.08
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
1.80
2.00
R
Seuil R

Figure 3.h

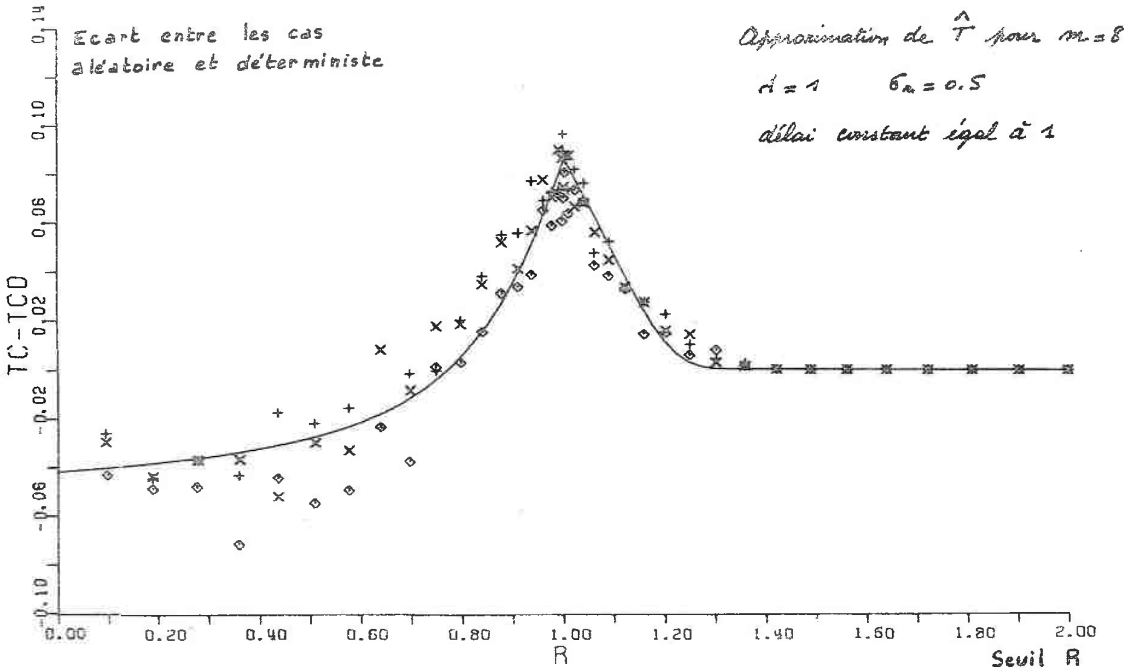

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
Approximation de $\hat{T}$ pour $m=8$
$d=1$ $\sigma_a=0.5$
délai constant égal à 1
TC-TCD
0.14
0.10
0.06
0.02
-0.02
-0.06
-0.10
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
1.80
2.00
R
Seuil R

Figure 3.1

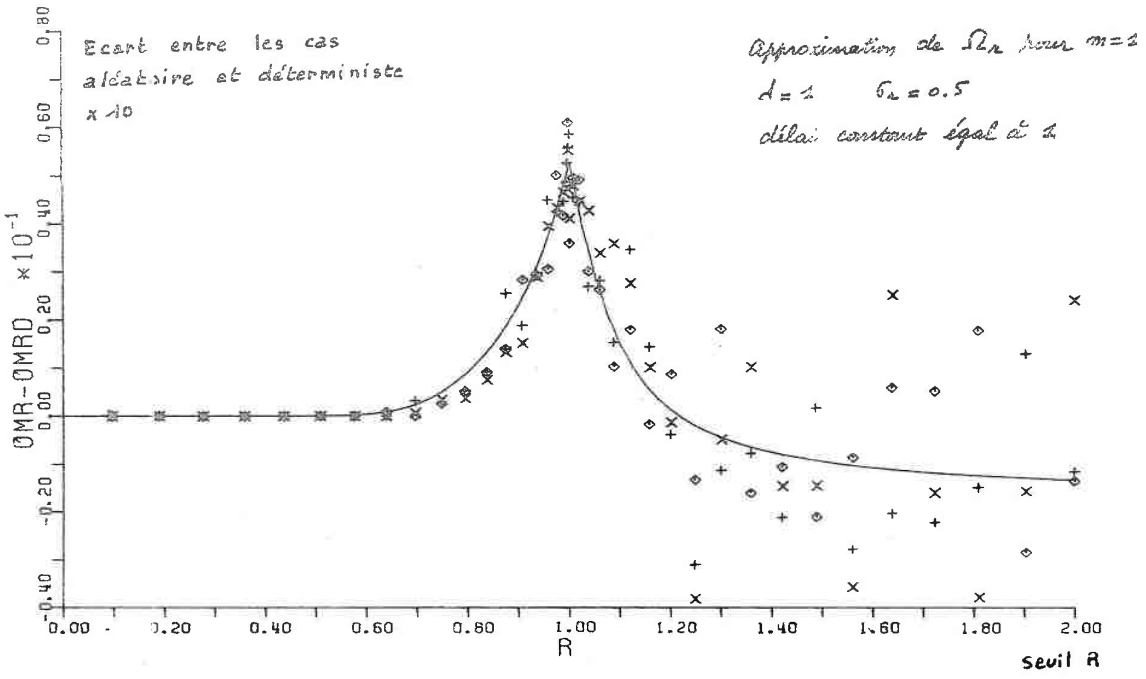

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
x 10
Approximation de Ω_R pour m=1
d = 1 σ_R = 0.5
délai constant égal à 1
OMR-OMRD x10⁻¹
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
-0.20
-0.40
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
1.80
2.00
R
seuil R

Figure 3.j

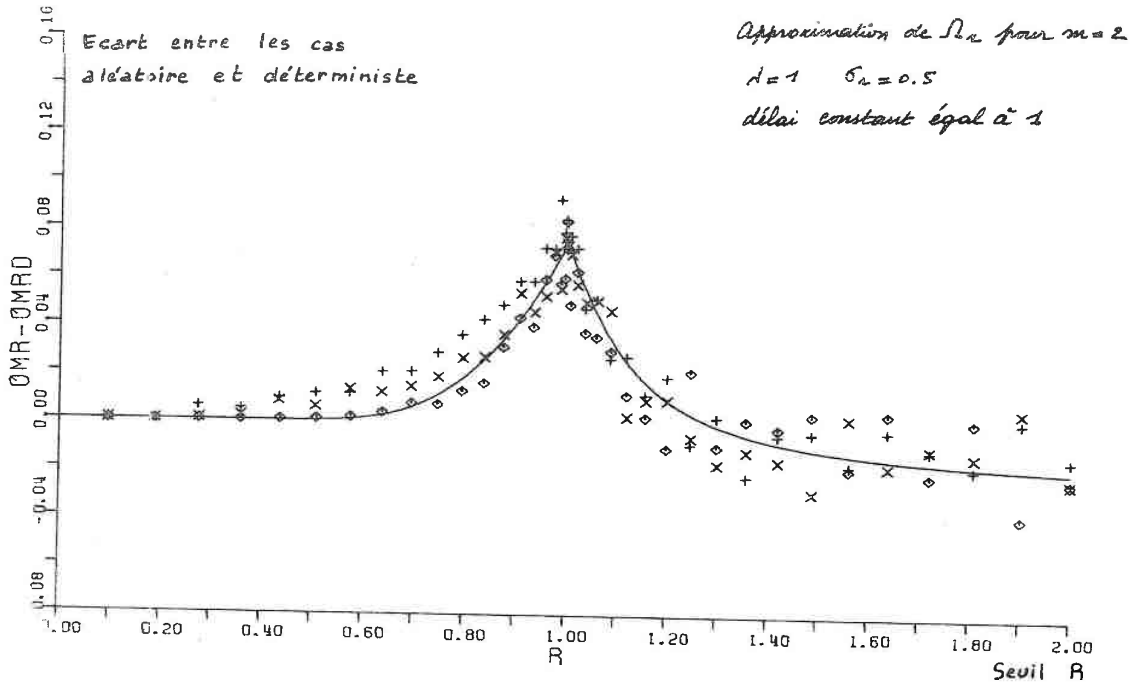

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
Approximation de Ω_R pour $m=2$
$\lambda=1$ $\sigma_R=0.5$
délai constant égal à 1
ØMR-ØMRD
0.16
0.12
0.08
0.04
0.00
-0.04
-0.08
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
1.80
2.00
R
Seuil R

Figure 3.k

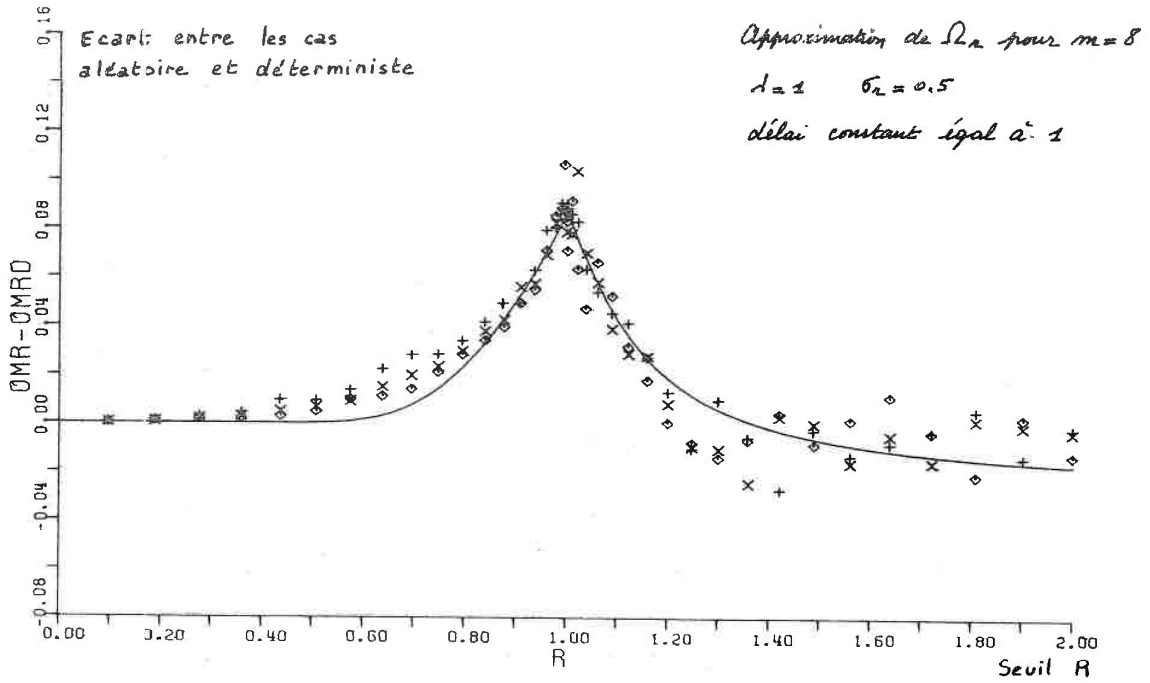

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
Approximation de Ω_R pour $m=8$
$d=1$ $\sigma_R=0.5$
délai constant égal à 1
ØMR-ØMRD
0.16
0.12
0.08
0.04
0.00
-0.04
-0.08
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
1.80
2.00
R
Seuil R

Figure 3.1

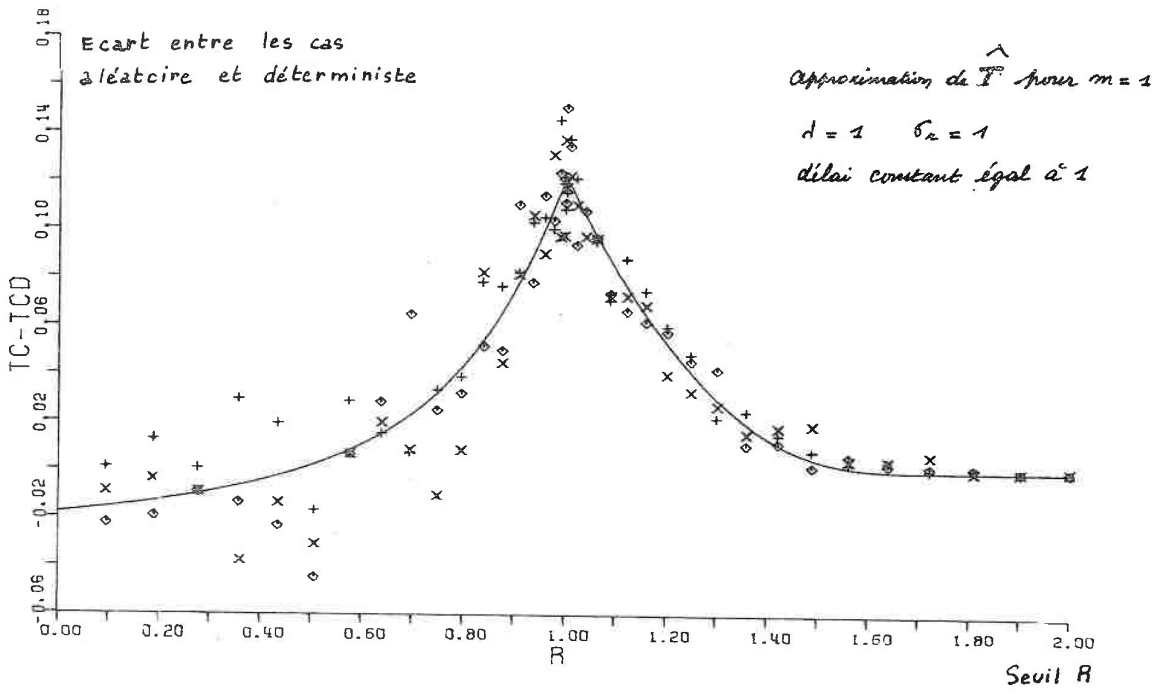

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
Approximation de $\hat{T}$ pour m = 1
d = 1 σ_r = 1
délai constant égal à 1
TC-TCD
0.18
0.14
0.10
0.06
0.02
-0.02
-0.06
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
1.80
2.00
R
Seuil R

Figure 3.m

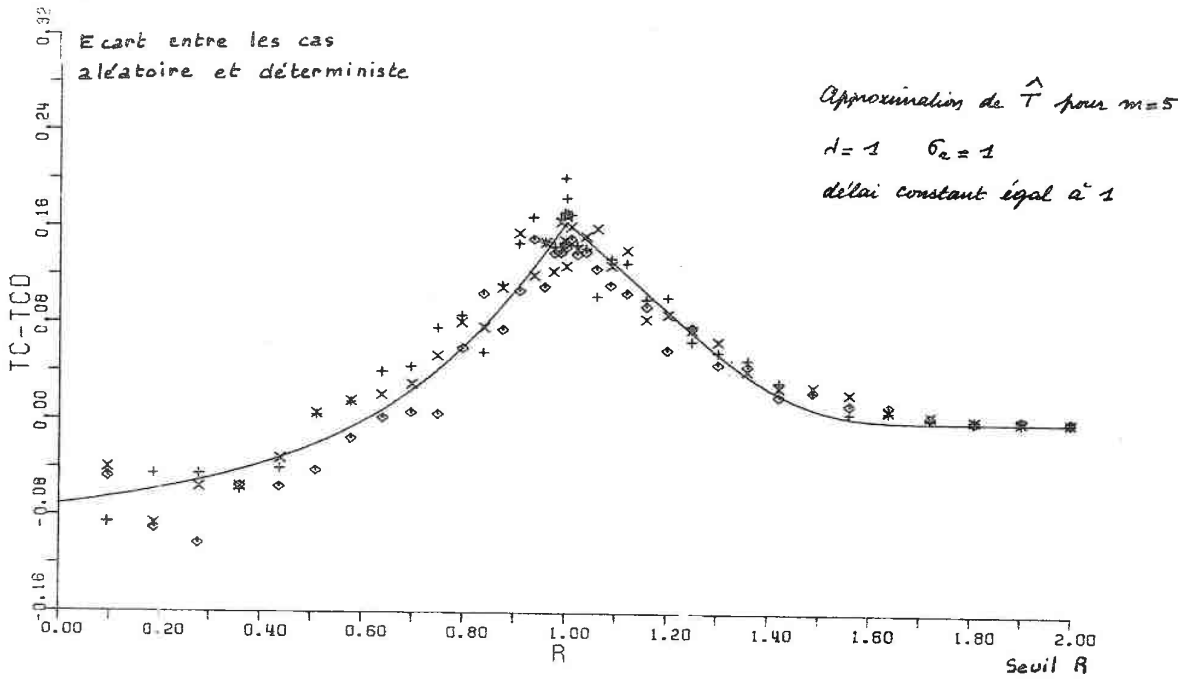

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
Approximation de $\hat{T}$ pour m=5
d=1 σ_a=1
délai constant égal à 1
TC-TCD
0.32
0.24
0.16
0.08
0.00
-0.08
-0.16
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
1.80
2.00
R
Seuil R

Figure 3.n

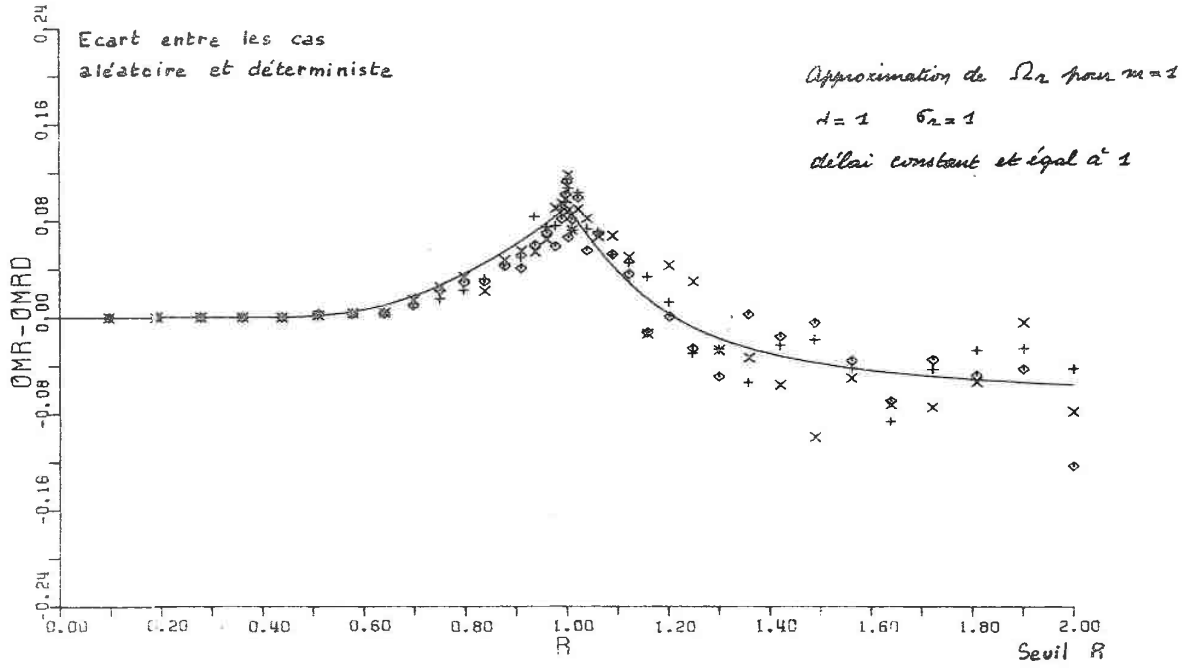

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
Approximation de Ω_2 pour $m=1$
$d=1$ $\sigma_2=1$
délai constant et égal à 1
OMR-OMRD
0,24
0,16
0,08
0,00
-0.08
-0.16
-0.24
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
1.80
2.00
R
Seuil R

Figure 3.o

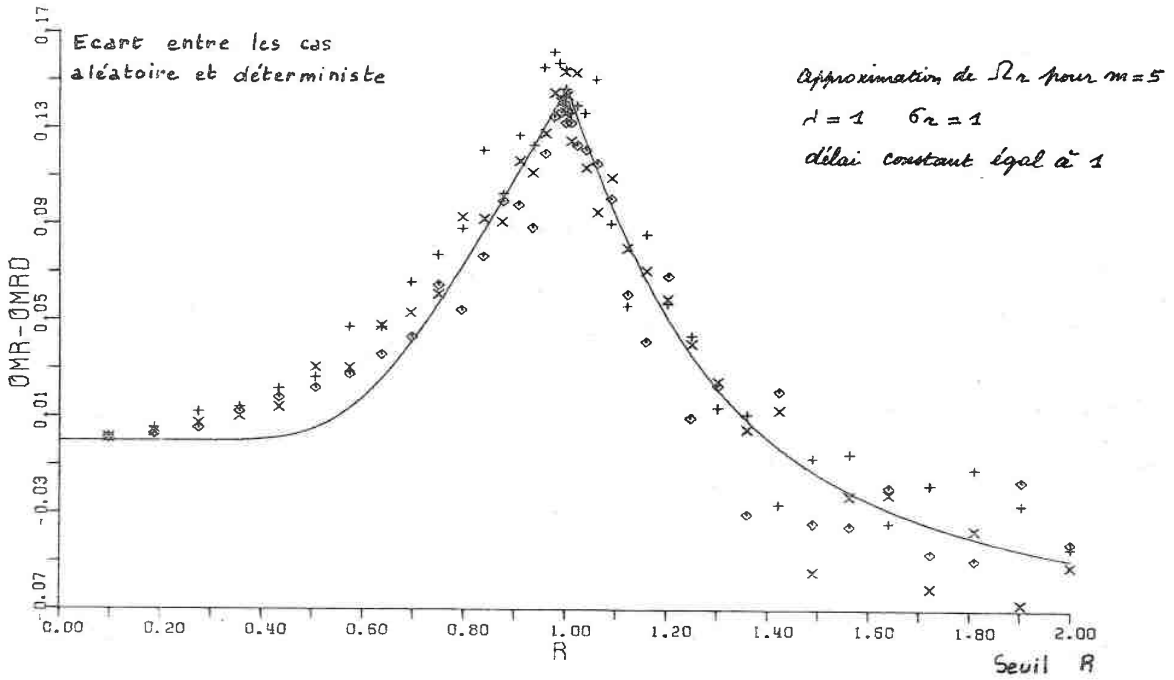

Ecart entre les cas
aléatoire et déterministe
Approximation de Ωr pour m=5
r = 1 σr = 1
délai constant égal à 1
ØMR-ØMRD
0.17
0.13
0.09
0.05
0.01
-0.03
-0.07
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
1.20
1.40
1.60
1.80
2.00
R
Seuil R

Figure 3 b

3.3.3 Résumé des formules

R : seuil d'approvisionnement

Q : quantité de commande

$m = [\frac{R}{Q}] + 1$

A : coût de lancement d'une commande

I : taux de possession

C : valeur de l'article

λ : taux moyen de la demande

δ : délai libre moyen

1) formulation du coût de gestion et du taux de rupture

coût de gestion $K = \frac{\lambda m}{m Q + \lambda \hat{T}} (A + IC \hat{\Omega}_1) + IC \Omega_r$

taux de rupture $= \frac{\lambda \hat{T}}{m Q + \lambda \hat{T}}$

où $\hat{T}$ est la durée moyenne de rupture par cycle

$\hat{\Omega}_1$ est la quantité moyenne de marchandise-temps tournante relative à une commande

Ω_r est la quantité moyenne de marchandise-temps résiduelle par unité de temps.

2) Approximation de $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$, Ω_r considérées comme fonctions des variables R et Q.

a) approximation de $\hat{\Omega}_1$

$\hat{\Omega}_1 (Q) = c_1 Q + c_2 Q$

b) approximation de $\hat{T}$

R_o : plus petite valeur du seuil donnée par la simulation telle que pour $R \geq R_o$ la durée moyenne de rupture par cycle est nulle.

$y_1(x) = a_0 - \frac{x}{\lambda}$ $\qquad y_2(x) = 0$

$k(x) = c\, e^{f(x)}$ $\qquad$ pour $x < R_o$

$\quad = 0$ $\qquad$ pour $x \geq R_o$

où $\quad f(x) = -\alpha (x - M)^2$ $\qquad$ pour $x \leq M$

$\quad = -\beta \frac{(x - M)^2}{R_o - x}$ $\qquad$ pour $M \leq x < R_o$

$\Delta(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2 + 4\,k(x) = (y_1(x))^2 + 4\,k(x)$

$y(x) = \frac{1}{2}\left(y_1(x) + y_2(x) + \sqrt{\Delta(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(y_1(x) + \sqrt{\Delta(x)}\right)$

<u>$\hat{T}$ est approché par</u> :

<u>$\hat{t}(R) = y(R)$ avec $M = \lambda\,\delta$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $c > 0$</u>

<u>les paramètres à ajuster étant a_0, c, α, β.</u>

c) <u>Approximation de Ω_r</u>

R_o : plus grande valeur du seuil donnée par la simulation telle que pour $R \leq R_o$, la quantité moyenne de marchandise-temps résiduelle par unité de temps est nulle.

$y_1(x) + a_0 + x$ $\qquad y_2(x) = 0$

$k(x) = c\, e^{f(x)}$ $\qquad$ pour $x > R_o$

$\quad = 0$ $\qquad$ pour $x \leq R_o$

où $\quad f(x) = -\alpha (x - M)^2$ $\qquad$ pour $x \geq M$

$\quad = \beta \frac{(x - M)^2}{R_o - x}$ $\qquad$ pour $R_o < x \leq M$

$\Delta(x) = (y_1(x))^2 + 4\,k(x)$

$y(x) = \frac{1}{2}\left(y_1(x) + \sqrt{\Delta(x)}\right)$

<u>Ω_r est approché par</u>

<u>$\omega_r(R) = y(R)$ avec $M = \lambda\,\delta$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $c > 0$</u>

<u>les paramètres à ajuster étant a_0, c, α, β.</u>

d) <u>Formulation commune de $\hat{t}$ et ω_r</u>

$S = \pm 1$

$k(x) = c\, e^{f(x)}$ $\qquad$ pour $S(x - R_o) > 0$

$\quad = 0$ $\qquad$ pour $S(x - R_o) \leq 0$

où $\quad f(x) = -\alpha (x - M)^2$ $\qquad$ pour $S(x - M) \geq 0$

$\quad = S\,\beta \frac{(x - M)^2}{R_o - x}$ $\qquad$ pour $S(x - M) \leq 0$

$\Delta(x) = (y_1(x))^2 + 4\,k(x)$

$y(x) = \frac{1}{2}\left(y_1(x) + \sqrt{\Delta(x)}\right)$

<u>Si $S = -1$ et $y_1(x) = a_0 - \frac{x}{\lambda}$ $\quad \hat{t}(R) = y(R)$</u>

<u>Si $S = 1$ et $y_1(x) = a_0 + x$ $\quad \omega_r(R) = y(R)$</u>

CHAPITRE III

APPLICATION DE LA FORMULATION DU COÛT DE GESTION ET DU TAUX DE RUPTURE A UNE OPTIMISATION DU COÛT DE GESTION

La formulation que nous venons d'obtenir à l'aide de la simulation peut être utilisée dans différents problèmes : par exemple, elle peut servir à une formulation d'un système plus complexe, à minimiser le coût de gestion sous certaines contraintes...

Notre but dans ce chapitre est de minimiser le coût de gestion avec un taux de rupture à ne pas dépasser.

Dans ce qui suit les fonctions approchant $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$, Ω_r s'appelleront $\hat{\omega}_1$, $\hat{t}$, ω_r.

1 - PREMIERE METHODE D'OPTIMISATION

Soit $\mathcal{E}_0$ le taux de rupture à ne pas dépasser ; la contrainte de service est $\mathcal{E}(R, Q) \leq \mathcal{E}_0$ ou $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}(R, Q) \geq 0$.

Comme la formulation du coût de gestion et du taux de rupture dépend du domaine (m), nous minimisons le coût de gestion sur chacun des domaines (m) où nous avons approché $\hat{T}$ de Ω_r ; la comparaison des optimums locaux obtenus nous donne l'optimum global. Nous utilisons pour cela le programme de maximisation avec contraintes par la méthode du gradient, déjà mentionné au paragraphe 3.3.2 du chapitre II.

1) Gradient du coût de gestion

Le programme cité nécessite la connaissance du gradient de la fonction à minimiser.

$$K(R, Q) = \frac{\lambda m}{m Q + \lambda \hat{t}(R)} (A + IC\, \hat{\omega}_1(Q)) + IC\, \omega_r(R)$$

$$\frac{\partial K}{\partial R}(R, Q) = -\frac{\lambda^2 m}{(m Q + \lambda \hat{t}(R))^2} \times \frac{d\hat{t}}{dR}(R) \times (A + IC\, \hat{\omega}_1(Q)) + IC\, \frac{d\omega_r}{dR}(R)$$

$$\frac{\partial K}{\partial Q}(R, Q) = -\frac{\lambda\, m^2}{(m\,Q + \lambda\,\hat{t}\,(R))^2}\,(A + IC\,\hat{\varphi}_1\,(Q)) + \frac{\lambda\, m}{m\,Q + \lambda\,\hat{t}\,(R)}\,\frac{d\hat{\varphi}_1}{dQ}\,(Q)$$

D'après le paragraphe 3.3.3 d) du chapitre précédent, nous avons :

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(y_1'(x) + \frac{y_1(x) \times y_1'(x) + 2\,k'(x)}{\sqrt{\Delta(x)}}\right)$$

$$k'(x) = c\,e^{f(x)} \times f'(x) \quad \text{pour } S\,(x - R_o) > 0$$

$$= 0 \qquad \text{pour } S\,(x - R_o) \leq 0$$

$$f'(x) = -2\,\alpha\,(x - M) \quad \text{pour } S\,(x - M) \geq 0$$

$$= S\,\beta\,\frac{(x - M)\,(2\,R_o - x - M)}{(R_o - x)^2}$$

Si $S = -1$ et $y_1(x) = a_0 - \frac{x}{\lambda}$ $\qquad \hat{t}'(R) = y'(R)$

Si $S = 1$ et $y_1(x) = a_0 + x$ $\qquad \varphi_r'(R) = y'(R)$

2) <u>Contraintes</u>

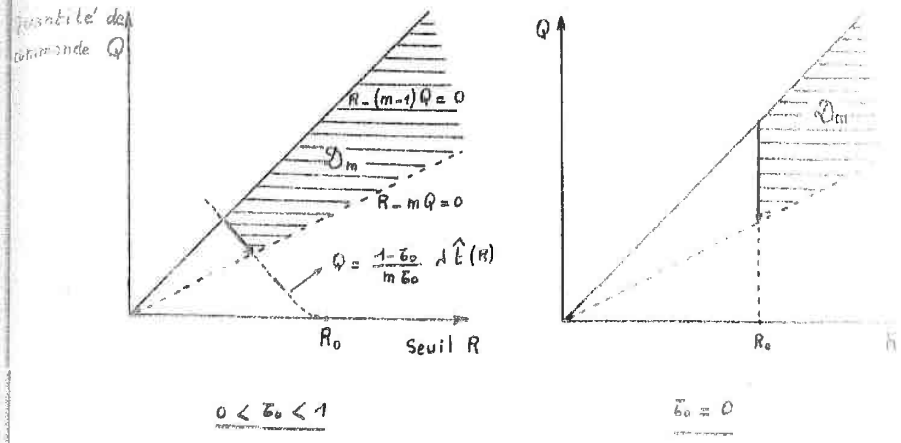
Si $0 < \mathcal{C}_0 < 1$, la courbe d'équi-taux du domaine (m) relative à $\mathcal{C}_0$ a pour équation :

$$Q = \frac{(1 - \mathcal{C}_0)\,\lambda}{m\,\mathcal{C}_0}\,\hat{t}\,(R).$$

Cette courbe est donc une branche de pseudo-hyperbole.

Le taux de rupture ne s'annule que pour $R \geq R_o$. Si $\mathcal{C}_0 = 0$, la contrainte de service peut alors s'écrire $R - R_o \geq 0$.

Nous représentons le <u>domaine d'optimisation $\mathcal{D}_m$</u> lorsque $\left[\frac{R}{Q}\right] + 1 = m$.



Les contraintes intervenant dans la minimisation du coût de gestion sur le domaine $\mathcal{D}_m$ sont :

$$\varphi_1(R, Q) = \mathcal{C}_0 - \frac{\lambda\,\hat{t}\,(R)}{m\,Q + \lambda\,\hat{t}\,(R)} \geq 0 \qquad \text{si } 0 < \mathcal{C}_0 < 1$$

$$\varphi_1(R, Q) = R - R_o \geq 0 \qquad \text{si } \mathcal{C}_0 = 0$$

$$\varphi_2(R, Q) = R - (m-1)\,Q \geq 0$$

$$\varphi_3(R, Q) = -R + m\,Q \geq 0$$

Les gradients des fonctions φ_1, φ_2, φ_3 se calculent facilement.

<u>Remarque</u> : étant donnés $\varepsilon > 0$ et une contrainte $\varphi_i(R, Q) \geq 0$, on considère que φ_i est saturée si $|\varphi_i| \leq \varepsilon$. Il est donc possible que les calculs d'optimisation donnent comme solution un point (R, Q) n'appartenant pas exactement à $\mathcal{D}_m$. Dans ce cas nous choisirons un point aussi voisin de (R, Q) que possible et appartenant à (m) : il sera "pratiquement aussi bon" si ε a été choisi suffisamment petit. Nous associerons alors à chaque solution d'une optimisation

l'entier m correspondant afin de pouvoir éventuellement "corriger" la solution.

3) Quelques résultats

Nous nous plaçons dans le cas où :

- le taux moyen de la demande est $\lambda = 1$
- l'écart type du taux de la demande est $\sigma_r = 1$
- le délai est constant et égal à 1
- le produit $I \times C$ est égal à 1

Nous minimisons le coût de gestion sur les dix premiers domaines où $\hat{T}$ et Ω_r ont été approchés, pour différentes valeurs du taux de rupture maximum τ_0 et du coût de lancement d'une commande A.

Dans le tableau 1.a, nous donnons les solutions des optimisations sur les dix premiers domaines qui nous permettent de déterminer l'optimum global (souligné dans le tableau). Nous remarquons par exemple que si $\tau_0 = 0.01$ et $A = 0.045$, le coût de gestion minimum est 0.7849 et qu'alors le nombre maximum de commandes en attente de livraison est $m = 5$; si la gestion du stock veut fonctionner avec $m = 1$ ($R < Q$), le coût de gestion sera au moins 1.1367 donc augmentera de près de la moitié du coût minimum.

Dans les tableaux 1.b et 1.c, nous donnons pour un taux de rupture maximum $\tau_0 = 0.01$ et différentes valeurs de A

- le seuil optimum R
- la quantité économique de commande Q
- le coût de gestion minimum K
- le nombre maximum de commandes en attente de livraison : m

dans les cas aléatoire et déterministe.

Nous remarquons que R, Q et K augmentent en passant du cas déterministe au cas aléatoire et que dans les deux cas Q et K augmentent avec A.

m	A = 0.045 τ_0 = 0.01			A = 0.32 τ_0 = 0.01			A = 0.045 τ_0 = 0.04		
	R: seuil	Q : quantité	K : coût	R	Q	K	R	Q	K
1	1.3968	1.3968	1.1367	1.3968	1.3968	1.3316	1.2113	1.2113	0.8737
2	1.4498	0.7249	0.8962	1.4302	0.8899	1.2558	1.2896	0.6448	0.7207
3	1.4575	0.4858	0.8183	1.4207	0.7104	1.2529	1.2884	0.4623	0.6653
4	1.4530	0.3894	0.8008	1.4335	0.4778	1.3766	1.2558	0.4186	0.6397
5	1.4424	0.3606	0.7849	1.4424	0.3606	1.5399	1.2703	0.3176	0.6334
6	1.4473	0.2895	0.7855	1.4473	0.2895	1.7260	1.2781	0.2556	0.6443
7	1.4495	0.2416	0.7950	1.4495	0.2416	1.9220	1.2818	0.2136	0.6629
8	1.4498	0.2071	0.8103	1.4498	0.2071	2.1248	1.2827	0.1832	0.6836
9	1.4565	0.1821	0.8311	1.6062	0.2008	2.3194	1.2931	0.1616	0.7109
10	1.4567	0.1619	0.8560	1.7179	0.1909	2.5037	1.2931	0.1437	0.7404

Tableau 1.a

A	cas aléatoire				cas déterministe			
	R	Q	K	m	R	Q	K	m
0.005	1.4567	0.1619	0.6114	10	0.9899	0.1	0.099	10
0.02	1.4498	0.2071	0.6908	8	0.9899	0.2	0.198	5
0.045	1.4424	0.3606	0.7849	5	0.9879	0.3	0.297	4
0.08	1.4335	0.4778	0.8793	4	0.9879	0.4	0.396	3
0.125	1.4335	0.4778	0.9726	4	0.9899	0.5	0.495	2
0.18	1.4233	0.6932	1.0576	3	0.9879	0.6	0.594	2
0.245	1.4207	0.7104	1.1484	3	0.9859	0.7	0.693	2
0.32	1.4207	0.7104	1.2529	3	0.9838	0.8	0.792	2
0.405	1.4192	0.9921	1.3452	2	0.9818	0.9	0.891	2
0.5	1.4088	1.0952	1.4353	2	0.9899	1.	0.99	1
0.605	1.3989	1.1979	1.5250	2	0.9889	1.1	1.089	1
0.72	1.3968	1.3968	1.6151	1	0.9879	1.2	1.188	1
0.845	1.3963	1.4031	1.7037	1	0.9869	1.3	1.287	1
0.98	1.3888	1.5015	1.7957	1	0.9859	1.4	1.386	1
1.125	1.3811	1.6067	1.8879	1	0.9848	1.5	1.485	1
1.28	1.3738	1.7108	1.9805	1	0.9838	1.6	1.584	1

Tableau 1.b : $\tau_0 = 0.01$

A	cas aléatoire				cas déterministe			
	R	Q	K	m	R	Q	K	m
1.445	1.3669	1.8127	2.0733	1	0.9828	1.7	1.683	1
1.62	1.3602	1.9152	2.1664	1	0.9818	1.8	1.782	1
1.805	1.3540	2.0124	2.2597	1	0.9808	1.9	1.881	1
2	1.3475	2.1170	2.3532	1	0.9798	2	1.980	1
2.205	1.3413	2.2202	2.4468	1	0.9788	2.1	2.079	1
2.42	1.3350	2.3273	2.5406	1	0.9778	2.2	2.178	1
2.645	1.3297	2.4212	2.6346	1	0.9768	2.3	2.277	1
2.88	1.3238	2.5257	2.7287	1	0.9758	2.4	2.376	1
3.125	1.3185	2.6237	2.8229	1	0.9747	2.5	2.475	1
3.38	1.3129	2.7281	2.9173	1	0.9737	2.6	2.574	1
3.645	1.3077	2.8269	3.0118	1	0.9727	2.7	2.673	1
3.92	1.3024	2.9293	3.1063	1	0.9717	2.8	2.772	1
4.205	1.2975	3.0270	3.2010	1	0.9707	2.9	2.871	1
4.5	1.2924	3.1291	3.2958	1	0.9697	3.	2.970	1
4.805	1.2873	3.2330	3.3907	1	0.9687	3.1	3.069	1
5.12	1.2824	3.3354	3.4857	1	0.9677	3.2	3.168	1

Tableau 1.c : $\tau_0 = 0.01$

2 - DEUXIEME METHODE D'OPTIMISATION

1) Taux de rupture maximum $\tau_o = 0$

Sur chaque domaine (m) le taux de rupture ne s'annule que si $\hat{t}(R) = 0$ c'est-à-dire $R \geq R_o$.

Pour $R \geq R_o$ le coût de gestion approché est :

$$K(R, Q) = \frac{\lambda}{Q}(A + IC\,\hat{\omega}_1(Q)) + IC\,\omega_r(R)$$

R_o dépend de m mais ses différentes valeurs obtenues à partir des simulations sont voisines ; soit R'_o la plus grande d'entre elles ; nous pouvons admettre que la durée moyenne de rupture par cycle est nulle si et seulement si $R \geq R'_o$.

D'autre part pour $R \geq R'_o$, la quantité moyenne de marchandise-temps résiduelle est voisine de celle du cas déterministe : $R - \lambda\,\delta$ (δ : délai libre moyen).

Pour $R \geq R'_o$, nous pouvons approcher le coût de gestion par

$$K(R, Q) = \frac{\lambda}{Q}(A + IC\,\hat{\omega}_1(Q)) + IC\,(R - \lambda\,\delta) :$$

expression indépendante de m.

Nous avons $\frac{\partial K}{\partial R}(R, Q) = IC > 0$, donc le seuil optimum est R'_o

$\hat{\omega}_1(Q) = c_1 Q + c_2 Q^2$ d'où

$$\frac{\partial K}{\partial Q}(R, Q) = \lambda\left(-\frac{A}{Q^2} + IC \times c_2\right)$$

La quantité économique de commande est alors :

$$Q^* = \sqrt{\frac{A}{IC \times c_2}}$$

$c_2 \sim \frac{1}{2\lambda}$ d'où $Q^* \sim Q_w$ (quantité de Wilson).

2) Le taux de rupture maximum est $\tau_o > 0$

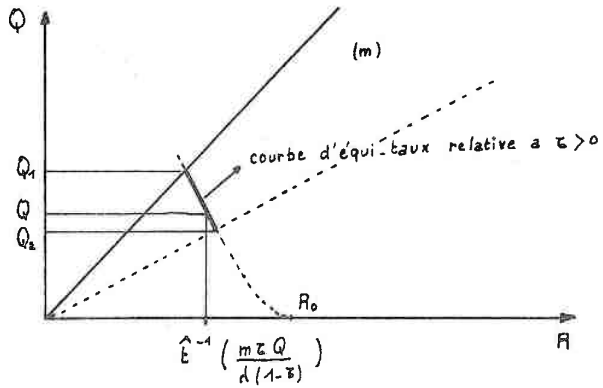
Nous avons vu que dans le cas déterministe l'optimum ou point "satisfaisant" (R^*, Q^*) sature la contrainte de rupture ou peut ne pas la saturer quand $R^* = 0$. Nous admettons qu'il en est de même dans le cas aléatoire.

a) Minimisation du coût de gestion sur une courbe d'équi-taux d'un domaine (m)

Soit un nombre τ $(0 < \tau < 1)$.

Les points de la courbe d'équi-taux du domaine (m) relative à τ vérifient

$$Q = \frac{\lambda (1 - \tau)}{m \tau} \hat{t}(R)$$



Sur cette courbe, le coût de gestion approché s'écrit :

$$K_{(\tau)}(Q) = \lambda (1 - \tau) \left(\frac{A}{Q} + IC \frac{\hat{\omega}_1 (Q)}{Q} \right) + IC\, \omega_r \left(\hat{t}^{-1} \left(\frac{m \tau Q}{\lambda (1 - \tau)} \right) \right)$$

sachant que $\hat{\omega}_1 (Q) = c_1 Q + c_2 Q^2$

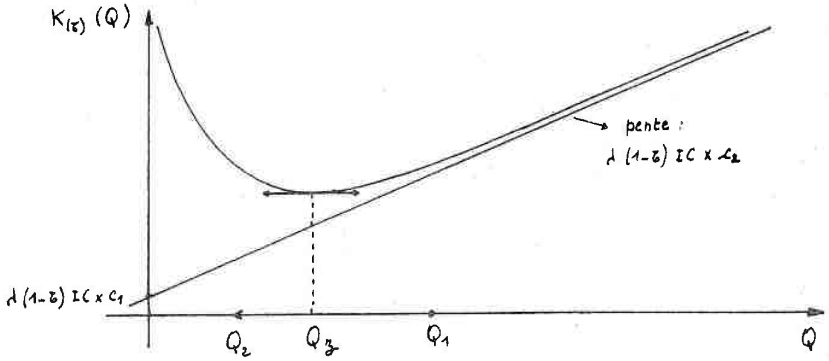
$$\frac{dK_{(\tau)}}{dQ}(Q) = \lambda (1 - \tau) \left(- \frac{A}{Q^2} + IC \times c_2 \right) + IC \frac{\omega'_r}{\hat{t}'} \left(\hat{t}^{-1} \left(\frac{m \tau Q}{\lambda (1 - \tau)} \right) \right) \times \frac{m \tau}{\lambda (1 - \tau)}$$

où ω'_r et $\hat{t}'$ sont les dérivées de ω_r et $\hat{t}$.

Nous admettons que les fonctions "pseudo-hyperboles" $\hat{t}$ et ω_r sont respectivement décroissante et croissante sur $\mathbb{R}$ et que de plus ω'_r et $\hat{t}'$ sont croissantes.

On en déduit alors que lorsque Q croît de 0 à $+\infty$, la fonction $\frac{dK_{(\tau)}}{dQ}$ croît de $-\infty$ à $\lambda (1 - \tau)\, IC \times c_2$. Il en résulte que $\frac{dK_{(\tau)}}{dQ}$ s'annule pour une seule valeur Q_z positive et que cette dérivée est négative pour $0 < Q < Q_z$, positive pour $Q > Q_z$.

On a alors l'allure de la fonction $K_{(\tau)}$



Appelons Q_1 et Q_2 les ordonnées des extrémités de la courbe d'équi-taux du domaine (m) : $Q_2 < Q_1$.

Nous avons alors les cas possibles suivants :

(1) $Q_2 < Q_z < Q_1$: l'optimum est le point d'ordonnée Q_z

(2) $Q_z < Q_2$: en toute rigueur l'optimum n'existe pas puisque le point d'ordonnée Q_2 n'appartient pas à (m). Nous dirons tout de même que

le point $(Q_2, m\,Q_2)$ est l'optimum. (Il est possible de trouver un point de (m) "voisin" de $(Q_2, m\,Q_2)$ et "pratiquement aussi bon").

(3) $Q_1 < Q_z$: l'optimum est le point $(Q_1, (m-1)\,Q_1)$.

Calculs de Q_1, Q_2, Q_z

Q_1 est la solution du système $\begin{cases} Q = \dfrac{\lambda\,(1-\tau)}{m\,\tau}\,\hat{t}\,(R) \\ R = (m-1)\,Q \end{cases}$

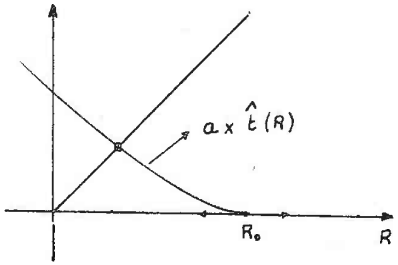
si $m = 1$ $\quad Q_1 = \dfrac{\lambda\,(1-\tau)}{\tau}\,\hat{t}\,(0)$

si $m > 1$ $\quad$ on résoud $R = \dfrac{(m-1)\,\lambda\,(1-\tau)}{m\,\tau}\,\hat{t}\,(R)$

Q_2 est la solution du système $\begin{cases} Q = \dfrac{\lambda\,(1-\tau)}{m\,\tau}\,\hat{t}\,(R) \\ R = m\,Q \end{cases}$

On résoud alors $\quad R = \dfrac{\lambda\,(1-\tau)}{\tau}\,\hat{t}\,(R)$.

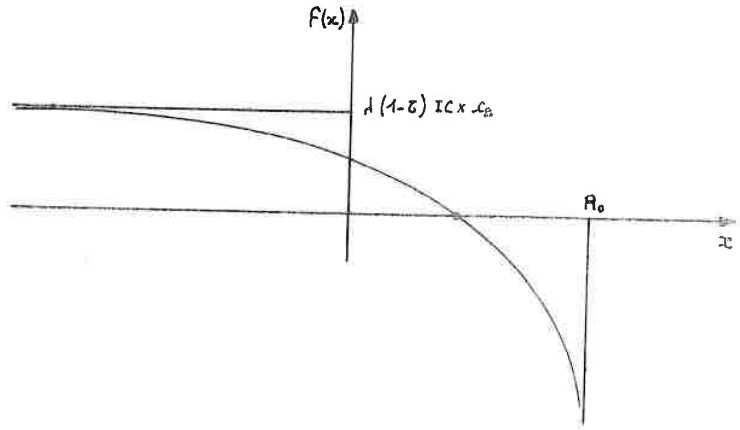
Nous pouvons résoudre facilement une équation de la forme $R = a \times \hat{t}\,(R)$ $\quad (a > 0)$ par dichotomie.



Q_z est le zéro de $\dfrac{dK_{(\tau)}}{dQ}$. En posant $x = \hat{t}^{-1}\left(\dfrac{m\,\tau\,Q}{\lambda\,(1-\tau)}\right)$

ou $Q = \dfrac{\lambda\,(1-\tau)}{m\,\tau}\,\hat{t}\,(x)$, nous pouvons résoudre l'équation : $f\,(x) = 0$ pour $x \in\ ]-\infty, R_o[$ avec

$$f\,(x) = \lambda\,(1-\tau)\left(-\frac{A}{Q^2\,(x)} + IC \times c_2\right) + IC\,\frac{\omega'_r\,(x)}{\hat{t}'\,(x)} \times \frac{m\,\tau}{\lambda\,(1-\tau)}$$



Cette résolution peut se faire par dichotomie.

b) Minimisation du coût de gestion lorsque le seuil R est nul pour les taux de rupture inférieurs à $\tau\,(0 < \tau < 1)$

Lorsque $R = 0$, le taux de rupture est inférieur à τ pour $Q > Q_1 = \dfrac{\lambda\,(1-\tau)}{\tau}\,\hat{t}\,(0)$ et le coût de gestion approché est :

$$K\,(0, Q) = \frac{\lambda}{Q + \lambda\,\hat{t}\,(0)}\,\left(A + IC\,\hat{\omega}_1\,(Q)\right)$$

Posons $K\,(0, Q) = \varphi\,(Q)$ et $\hat{t}\,(0) = d$

On a $\quad \varphi'\,(Q) = \dfrac{\lambda\,(IC\,\hat{\omega}'_1\,(Q)\,(Q + \lambda\,d) - A - IC\,\hat{\omega}_1\,(Q))}{(Q + \lambda\,d)^2}$

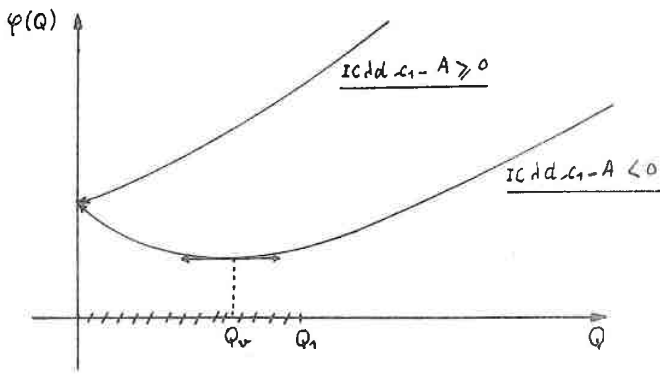
$\hat{\omega}_1 (Q) = c_1 Q + c_2 Q^2$ d'où

$\varphi' (Q) = 0$ si et seulement si :

$$IC\, c_2 Q^2 + 2\, IC\, \lambda\, d\, c_2 Q + IC\, \lambda\, d\, c_1 - A = 0$$

si $IC\, \lambda\, d\, c_1 - A \geq 0$ l'équation du second degré n'a pas de solution positive.

Si $IC\, \lambda\, d\, c_1 - A < 0$ l'équation admet une solution positive Q_v d'où les allures de $\varphi (Q)$.



On a alors les résultats suivants :

(1) si $IC\, \lambda\, d\, c_1 - A \geq 0$ le coût est minimum pour le point d'ordonnée Q_1

(2) si $IC\, \lambda\, d\, c_1 - A < 0$, on calcule Q_v

. si $Q_v \leq Q_1$ le coût est minimum pour le point d'ordonnée Q_1

. si $Q_v > Q_1$ le coût est minimum pour le point d'ordonnée Q

c) Minimisation du coût de gestion pour un taux de rupture maximum $\tau_o \neq 0$

Nous savons minimiser le coût de gestion sur la courbe d'équi-taux relative à τ_o dans chaque domaine (m) et pour $Q > Q_1 = \frac{\lambda (1 - \tau_o)}{\tau_o} \hat{t} (0)$

avec R = 0, ce qui nous permet de trouver le point qui minimise le coût de gestion sur la réunion des domaines (m).

On peut procéder comme suit :

- on cherche le point optimum lorsque m = 1 pour lequel le coût de gestion est K_1
- ayant cherché le point optimum pour m (coût K_m), on cherche le point optimum pour m + 1 (coût K_{m+1}).

  Si $K_m < K_{m+1}$, on s'arrête : l'optimum global est celui du domaine (m).

  Si $K_m > K_{m+1}$, on continue.

(on admet que les coûts K_m augmentent avec m ou qu'ils diminuent avec m jusqu'à $m = m_o$ puis augmentent ensuite).

Cette deuxième méthode présente un avantage :

si on utilise un calculateur pour chercher l'optimum connaissant les différentes fonctions $\hat{t}$, ω_r ainsi que $\hat{\omega}_1$ le programme d'optimisation est plus simple à réaliser suivant la deuxième méthode et le temps de calcul "vraisemblablement" plus court (aucun essai n'a été réalisé suivant cette 2ème méthode).

Suivant la première méthode la durée de calcul moyenne par optimisation est 0,02 minute.

3 - CONCLUSIONS

1) Nous avons approché $\hat{\Omega}_1 (Q)$ (quantité moyenne de marchandise-temps tournante relative à une quantité de commande Q) par $\hat{\omega}_1 (Q) = c_1 Q + c_2 Q^2$. Nous avons remarqué que c_1 est petit et que c_2 est voisin de $\frac{1}{2\lambda}$ où λ est le taux de demande moyen. Dans la mesure où on ne sait pas établir avec précision le coût de stockage

(détermination du taux de possession I), nous pouvons nous contenter d'approcher $\hat{\Omega}_1(Q)$ par $\frac{Q^2}{2\lambda}$ qui est la valeur de $\hat{\Omega}_1(Q)$ dans le cas déterministe. D'autre part des méthodes permettant d'approcher $\hat{T}$ et Ω_r de manière plus rapide restent à être déterminées.

2) La durée moyenne de la simulation de la gestion du stock sur une centaine de cycles pour un seuil R et une quantité de commande Q et du calcul des valeurs approchées de $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$, Ω_r est d'environ 0,05 minute. Il serait donc coûteux de vouloir simuler la gestion du stock sur calculateur chaque fois que l'on veut minimiser le coût de gestion d'une marchandise.

Nous pouvons y remédier de plusieurs manières :

* optimisation utilisable pour une classe de marchandises.

Choisissons comme unité de temps le délai libre moyen : $\bar{\delta}$, comme unité de marchandise la quantité moyenne demandée sur une période de durée $\bar{\delta} : \bar{\lambda}\ \bar{\delta}$ où $\bar{\lambda}$ est le taux moyen de la demande.

A ces unités correspondent

C' : coût de l'unité de marchandise $(C' = C \times \bar{\lambda}\ \bar{\delta})$

I' : taux de possession $(I' = I \times \bar{\delta})$.

Avec ces unités le coût de gestion est :

$$K(R, Q) = \frac{m}{m\,Q + \hat{T}}\,(A + I'\,C'\,\hat{\Omega}_1) + I'\,C'\,\Omega_r$$

$\frac{K(R, Q)}{I'\,C'}$ est le coût de gestion lorsque l'unité de coût est I' C'.

Le taux de rupture est indépendant des unités choisies (il est sans dimension) ; remarquons qu'il en est de même du coût de gestion exprimé à partir des nouvelles unités de marchandise, temps et coût : en effet si K_1 est le coût de gestion avec les unités usuelles, K_2 le coût de gestion avec les unités nouvelles, on a $K_2 = \frac{K_1}{IC\,\bar{\lambda}\,\bar{\delta}}$.

Appelons $\sigma(\lambda)$ et $\sigma(\delta)$ les écarts types du taux de demande et du délai libre avec les unités usuelles de marchandise et de temps.

L'optimisation du coût de gestion exprimé à partir des nouvelles unités de marchandise, temps et coût ne dépend que du taux de rupture maximum τ_o, de $A' = \frac{A}{I'C'} = \frac{A}{IC\,\bar{\lambda}\,\bar{\delta}^2}$, de l'écart-type du taux de demande $\sigma_r = \frac{\sigma(\lambda)}{\bar{\lambda}}$, de l'écart-type du délai libre $\sigma'_r = \frac{\sigma(\delta)}{\bar{\delta}}$.

Le résultat de l'optimisation correspondant à τ_o, A', σ_r, σ'_r peut être utilisé pour l'ensemble de toutes les marchandises dont les paramètres A, I, C, $\bar{\lambda}$, $\bar{\delta}$, $\sigma(\lambda)$, $\sigma(\delta)$ vérifient :

$$\frac{A}{IC\,\bar{\lambda}\,\bar{\delta}^2} = A',\quad \frac{\sigma(\lambda)}{\bar{\lambda}} = \sigma_r,\quad \frac{\sigma(\delta)}{\bar{\delta}} = \sigma'_r.$$

On peut envisager de faire des simulations pour différentes valeurs de σ_r et σ'_r une fois pour toutes. Elles nous permettrons de déterminer le seuil optimum $R^*(\tau_o, A', \sigma_r, \sigma'_r)$ et la quantité de commande optimal $Q^*(\tau_o, A', \sigma_r, \sigma'_r)$ en un nombre fini de points $(\tau_o, A', \sigma_r, \sigma'_r)$, (résultats placés dans une table). Dans la pratique, quand nous aurons à minimiser le coût de gestion d'un article pour un taux de rupture maximum τ_o, nous calculerons A', σ_r, σ'_r ; la solution se trouvera dans la table ou pourra par exemple être déterminée par interpolation. Comme dans beaucoup de cas pratiques A', σ_r, σ'_r ne peuvent pas être évalués de manière précise, nous pourrons choisir les valeurs A', σ_r et σ'_r de la table qui paraissent être les plus proches de celles qui correspondent à notre marchandise.

* Table donnant les paramètres des fonctions approchant $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$, Ω_r pour diverses valeurs de σ_r et σ'_r.

Nous approchons $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$, Ω_r par des fonctions dépendant de paramètres que nous "ajustons" à l'aide des résultats de la simulation. Dans une table nous

donnons les valeurs de ces paramètres ajustés pour différentes valeurs de σ_r et σ'_r. Application à un problème nécessitant la formulation du coût de gestion et du taux de rupture : nous calculons σ_r et σ'_r ; nous en déduisons les paramètres des fonctions approchant $\hat{\Omega}_1$, $\hat{T}$, Ω_r en utilisant la table.

3) On peut penser étendre la méthode que nous avons utilisée pour minimiser le coût de gestion du stock d'un article au cas général suivant :

- nous avons un système qui fonctionne suivant un certain modèle. Ce modèle dépend de paramètres (par exemple le seuil et la quantité de commande). Ce système peut être en relation avec l'extérieur (par exemple demandes, commandes).

- Nous considérons une grandeur qui dépend des paramètres du modèle et qui doit atteindre un certain objectif (par exemple le coût de gestion doit être minimum) ; le problème est de déterminer des valeurs des paramètres du modèle permettant d'atteindre cet objectif

- La grandeur n'ayant pas de formulation mathématique connue on l'approche par une fonction des paramètres en utilisant des simulations qui nous donnent des valeurs approchées de cette grandeur (les simulations doivent être réalisables et ne sont utilisées que si l'expérience directe sur le système n'est pas possible).

- Avec la fonction des paramètres du modèle (ou variables de décision) approchant la grandeur, on cherche à atteindre l'objectif c'est-à-dire à déterminer des valeurs satisfaisantes des variables de décision

---

BIBLIOGRAPHIE

I HADLEY - WHITIN
Etude et pratique des modèles de stocks.
Edition Dunod (1966).

II LEGRAS J.
Méthodes et techniques de l'analyse numérique.
Edition Dunod (1970).

III CII
Manuel d'utilisation de la bibliothéque de gestion des stocks.
Document de la CII, référence 4077 E/FR

IV LAMBERT J.P. - PORTMANN M.C.
Recueil des sous-programmes FORTRAN en analyse numérique.
Institut Universitaire de Calcul Automatique de Nancy

V STARR M.K. - MILLER D.M.
La gestion des stocks. Théorie et pratique.
Edition Dunod (1966).

VI BITTERLIN G.
Gestion scientifique et pratique des stocks.
Edition Dunod (1971).

NOM DE L'ETUDIANT : MARCHAL Bernard

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE SPECIALITE en MATHEMATIQUES APPLIQUEES

VU, APPROUVE

& PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 11/12/1975

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

UNIVERSITE DE NANCY I
Le Président

J.R. BELLUY ☆