

N° d'ordre CNRS :

A.O. 10.118

*Dactyl 3ex*

*Sc. N. 74/42 B*

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT  
ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

par

Jean-Laurent MALLET

---

ÉTUDE D'UNE MÉTHODE D'ESTIMATION  
ET D'UNE MÉTHODE DE FILTRAGE

Application à la Cartographie Automatique

---

*Soutenue publiquement le 15 juin 1974 devant la Commission d'Examen*

MM. J. LEGRAS

Président

M. DEPAIX

Rapporteur

P.L. HENNEQUIN

C. PAIR

} Examineurs

H. de la ROCHE

N° d'ordre CNRS :

A.O. 10.118

**THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT  
ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES**

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

par

Jean-Laurent MALLET

---

**ÉTUDE D'UNE MÉTHODE D'ESTIMATION  
ET D'UNE MÉTHODE DE FILTRAGE**

Application à la Cartographie Automatique

---

*Soutenue publiquement le 15 juin 1974 devant la Commission d'Examen*

MM. J. LEGRAS

M. DEPAIX

P.L. HENNEQUIN

C. PAIR

H. de la ROCHE

Président

Rapporteur

} Examineurs

## AVANT-PROPOS

Je remercie M. le Professeur LEGRAS pour l'enseignement qu'il m'a prodigué, pour l'intérêt qu'il porte à mes travaux sur la cartographie automatique et pour l'honneur qu'il me fait en président ce Jury.

Je n'oublie pas M. le Professeur DEPAIX à qui je dois l'essentiel de ma formation mathématique ; qu'il soit assuré de ma profonde et respectueuse gratitude pour les nombreux conseils qu'il m'a prodigués, pour le sens qu'il a su donner à mes recherches et pour la bienveillance avec laquelle il les a toujours encouragées.

Je remercie M. le Professeur HENNEQUIN et M. le Professeur PAIR qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail et qui me font l'honneur de participer au Jury de cette thèse.

Que M. de La ROCHE soit également assuré de toute ma gratitude pour l'intérêt qu'il porte à l'utilisation des méthodes mathématiques dans le domaine de la cartographie automatique des paramètres géochimiques et pour les possibilités matérielles qu'il a si largement mises à ma disposition au Centre de Recherches Pétrographiques et Géochimiques dont il est le directeur.

Je suis heureux de pouvoir remercier M. le Professeur BLAZY, Directeur de l'Ecole de Géologie et M. HOUPERT, Directeur du Centre de Géomécanique pour les encouragements et le soutien moral qu'ils m'ont toujours manifestés.

Mes remerciements vont également à tous mes collègues de l'Ecole de Géologie, du Centre de Géomécanique, du Centre de Recherches Pétrographiques et Géochimiques, et du Centre de Calcul Automatique pour l'accueil amical qu'ils m'ont toujours réservé. En particulier, je n'oublie pas mes amis F. de BEAUCCOURT, R. SAVARY et A. THOMAS pour les innombrables discussions passionnantes et quelquefois passionnées que nous avons eues à propos des problèmes soulevés par la cartographie, ainsi que pour l'aide effective qu'ils m'ont quelquefois apportée dans le domaine de la programmation.

Je ne saurai non plus oublier tout ce que je dois à mon épouse Danielle qui par son dévouement m'a permis de consacrer la majeure partie de mon activité à la rédaction de cette thèse.

Enfin, je tiens à remercier d'une façon générale tous ceux qui ont participé à la confection de ce mémoire et en particulier Mlle Marie-Paule BURTE qui en a assuré la dactylographie et Mlle GERROLODT qui en a réalisé la multicoopie.

## TABLE DES MATIERES

	Pages
Chapitre 0 - PRESENTATION HEURISTIQUE DES METHODES ETUDIEES . . . . .	1
0-1 Introduction . . . . .	1
0-2 Présentation de l'interpolation en $\mu$ - moyenne quadratique	
dans le cas où $T$ est discret . . . . .	2
0-2-1 <i>Problème posé</i> . . . . .	2
0-2-2 <i>Méthode des filtres autorégressifs</i> . . . . .	2
a) Remarque préliminaire . . . . .	2
b) Définition. . . . .	3
c) Construction de $\hat{F}(t_0)$ . . . . .	4
0-2-3 <i>Mise en oeuvre de la méthode des filtres autorégressifs</i> . . . . .	6
a) Introduction . . . . .	6
b) Hypothèses (H1) . . . . .	6
c) Hypothèses (H2) . . . . .	6
d) Hypothèses (H2') . . . . .	7
0-2-4 <i>Motivations et principe de l'interpolation en <math>\mu</math>- moyenne quadratique</i> . . . . .	8
0-2-5 <i>Avantages apportés par l'interpolation en <math>\mu</math>- moyenne quadratique</i> . . . . .	10
0-2-6 <i>Remarques</i> . . . . .	10
a) Remarque 1 . . . . .	10
b) Remarque 2 . . . . .	10
c) Remarque 3 . . . . .	12
- Rappels sur les fonctions splines d'interpolation . . . . .	12
- Représentation cardinale des splines d'interpolation . . . . .	12
- Analogie entre les splines d'interpolation et la technique des filtres autorégressifs . . . . .	14
0-2-7 <i>Conclusion</i> . . . . .	16
0-3 Présentation du filtrage statistique dans le cas où $T$ est discret. . . . .	17
0-3-1 <i>Problème posé</i> . . . . .	17
0-3-2 <i>Résolution du problème</i> . . . . .	18
a) Notations . . . . .	18
b) Solution fournie par le théorème de Gauss-Markov . . . . .	18
0-4 Motivations et organisation du mémoire . . . . .	19
0-4-1 <i>But de l'étude présentée</i> . . . . .	19
0-4-2 <i>Organisation du mémoire</i> . . . . .	19
a) Chapitres I et II . . . . .	19
b) Chapitre III . . . . .	20

	Pages
Chapitre 1 - ETUDE DES ESPACES $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ , $\mathcal{L}_1^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ET $L_1^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	21
I-1 Introduction . . . . .	21
I-2 Applications mesurables à valeurs dans un Banach séparable . . . . .	22
I-2-1 Définitions . . . . .	22
a) Espaces mesurables $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(E, \mathcal{B}_E)$ . . . . .	22
- Définitions . . . . .	22
- Remarques . . . . .	22
b) Notion d'application mesurable . . . . .	22
- Définition . . . . .	22
- Ensemble $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ . . . . .	22
- Application étagée . . . . .	23
I-2-2 Propriétés . . . . .	23
a) Proposition 1 . . . . .	23
- Énoncé . . . . .	23
- Démonstration . . . . .	23
b) Proposition 2 . . . . .	24
- Énoncé . . . . .	24
- Démonstration . . . . .	24
c) Proposition 3 . . . . .	24
- Énoncé . . . . .	24
- Démonstration . . . . .	24
d) Proposition 4 . . . . .	25
- Énoncé . . . . .	25
- Démonstration : première partie . . . . .	25
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	26
- Démonstration : troisième partie . . . . .	27
e) Proposition 5 . . . . .	27
- Énoncé . . . . .	27
- Démonstration . . . . .	28
f) Proposition 6 . . . . .	28
- Énoncé . . . . .	28
- Démonstration : première partie . . . . .	28
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	30
g) Remarque . . . . .	31
I-3 Espaces $\mathcal{L}_1^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $L_1^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	32
I-3-1 Définitions et propriétés fondamentales . . . . .	32
a) Espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	32
b) Espace $\mathcal{L}_1^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	32
- Remarque préliminaire . . . . .	32
- Définition . . . . .	32
c) Espace $L_1^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	33
d) Notations . . . . .	33
e) Propriétés classiques de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	34
f) Définition . . . . .	34
- Énoncé . . . . .	34
- Remarque . . . . .	34
g) Propriété de correspondance . . . . .	35
- Énoncé . . . . .	35
- Démonstration : première partie . . . . .	35
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	36
h) Remarque . . . . .	36
i) Proposition . . . . .	36
- Énoncé . . . . .	36
- Démonstration . . . . .	37

	Pages
I-3-2 $\mu$ -moyenne d'une application $X(\cdot) \in \mathcal{L}_1^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	38
a) Définition constructive . . . . .	38
- Énoncé . . . . .	38
- Démonstration : première partie . . . . .	38
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	40
- Démonstration : troisième partie . . . . .	42
b) Remarque . . . . .	43
c) Propriété fondamentale . . . . .	43
- Énoncé . . . . .	43
- Démonstration . . . . .	43
d) Propriétés linéaires . . . . .	45
- Énoncé . . . . .	45
- Démonstration . . . . .	45
e) Proposition . . . . .	46
- Énoncé . . . . .	46
- Démonstration . . . . .	46
f) Proposition . . . . .	47
- Énoncé . . . . .	47
- Démonstration . . . . .	47
g) Proposition . . . . .	48
- Énoncé . . . . .	48
- Démonstration . . . . .	48
h) Notation . . . . .	48
Chapitre II - CONSTRUCTION D'ESTIMATEURS LINEAIRES DANS $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	49
II-1 Introduction . . . . .	49
II-2 Notion de vecteur paramétré . . . . .	50
II-2-1 Définition et propriétés fondamentales . . . . .	50
a) Définition . . . . .	50
b) Propriétés . . . . .	50
- Énoncé . . . . .	50
- Démonstration . . . . .	50
II-2-2 Covariance et opérateur de covariance . . . . .	51
a) Covariance . . . . .	51
b) Opérateur de covariance . . . . .	51
c) Propriété 1 . . . . .	51
- Énoncé . . . . .	51
- Démonstration . . . . .	52
d) Propriété 2 . . . . .	52
- Énoncé . . . . .	52
- Démonstration . . . . .	53
II-3 Construction d'estimateurs linéaires . . . . .	53
II-3-1 Espace $F\{U\}$ . . . . .	53
a) Définition . . . . .	53
b) Notations . . . . .	53
c) Produit scalaire sur $F\{U\}$ . . . . .	54
- Énoncé . . . . .	54
- Démonstration . . . . .	54
d) Définition . . . . .	55
- Énoncé . . . . .	55
- Démonstration . . . . .	56
e) Proposition . . . . .	57
- Énoncé . . . . .	57
- Démonstration . . . . .	57

	Pages
f) Proposition . . . . .	58
- Énoncé . . . . .	58
- Démonstration . . . . .	58
II-3-2 Espace $\mathcal{E}\{U\}$ . . . . .	59
a) Définition . . . . .	59
b) Produit scalaire sur $\mathcal{E}\{U\}$ . . . . .	59
II-3-3 Application $\Pi$ . . . . .	59
a) Définition . . . . .	59
b) Théorème . . . . .	59
- Énoncé . . . . .	59
- Démonstration : première partie . . . . .	60
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	61
c) Proposition . . . . .	62
- Énoncé . . . . .	62
- Démonstration . . . . .	62
II-3-4 Théorème d'approximation dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	62
a) Théorème . . . . .	62
- Énoncé . . . . .	62
- Démonstration : première partie . . . . .	63
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	64
- Démonstration : troisième partie . . . . .	66
b) Définition . . . . .	66
II-3-5 Théorème de Gauss-Markov généralisé . . . . .	66
a) Énoncé . . . . .	66
b) Démonstration : première partie . . . . .	68
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	68
- Démonstration : troisième partie . . . . .	71
- Démonstration : quatrième partie . . . . .	71
c) Remarque . . . . .	72
Chapitre III - APPLICATION A L'ESTIMATION LINEAIRE DES FONCTIONS NUMERIQUES . . . . .	73
III-1 Introduction . . . . .	73
III-2 Vecteurs paramétrés $U_f$ à valeurs dans $E \equiv \mathcal{E}(T, \mathbb{C})$ . . . . .	74
III-2-1 Espaces $E$ et $E'$ : Définitions . . . . .	74
a) Espace $E$ . . . . .	74
b) Espace $E'$ . . . . .	74
c) Notations . . . . .	74
d) Remarque . . . . .	75
III-2-2 Projection canonique $\Pi_t$ . . . . .	75
a) Définition . . . . .	75
b) Proposition 1 . . . . .	75
- Énoncé . . . . .	75
- Démonstration . . . . .	75
c) Lemme technique . . . . .	76
- Énoncé . . . . .	76
- Démonstration : première partie . . . . .	76
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	77
III-2-3 Vecteurs paramétrés $U_f(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . . . . .	78
a) Théorème . . . . .	78
- Énoncé . . . . .	78
- Démonstration : première partie . . . . .	78
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	79
b) Définition . . . . .	80
c) Conséquence . . . . .	81

	Pages
III-2-4 Fonction moyenne $\phi_f$ . . . . .	81
III-2-5 Fonctions de covariance et de corrélation . . . . .	81
a) Définitions . . . . .	81
- Introduction . . . . .	81
- Fonction de covariance . . . . .	82
- Fonction de covariance centrée . . . . .	82
- Fonctions de corrélation . . . . .	82
b) Propriétés de $\Gamma_{fg}$ . . . . .	83
- Énoncé . . . . .	83
- Démonstration : première partie . . . . .	83
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	84
c) Remarque . . . . .	84
d) Degré de ressemblance . . . . .	84
III-2-6 Cas particulier où $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega$ . . . . .	85
a) Proposition . . . . .	85
- Énoncé . . . . .	85
- Démonstration . . . . .	85
b) Applications . . . . .	85
- Introduction . . . . .	85
- Premier exemple . . . . .	86
- Deuxième exemple . . . . .	86
- Troisième exemple . . . . .	87
III-2-7 Famille $\mu$ - libre $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$ . . . . .	88
a) Définition . . . . .	88
b) Propriétés caractéristiques . . . . .	88
- Énoncé . . . . .	88
- Démonstration . . . . .	88
III-2-8 Vecteur paramétré centré . . . . .	89
a) Proposition . . . . .	89
- Énoncé . . . . .	89
- Démonstration . . . . .	90
b) Définition . . . . .	90
c) Conséquence . . . . .	91
III-3 Approximation en $\mu$ - moyenne quadratique . . . . .	91
III-3-1 Proposition fondamentale . . . . .	91
a) Énoncé . . . . .	91
- Démonstration : première partie . . . . .	92
- Démonstration : deuxième partie . . . . .	93
b) Remarque : cas où $T$ est discret . . . . .	93
III-3-2 Approximation au sens des moindres carrés . . . . .	94
a) Définition . . . . .	94
b) Solution du problème . . . . .	95
c) Remarque . . . . .	95
d) Application . . . . .	95
III-4 Estimation et interpolation en $\mu$ - moyenne quadratique . . . . .	96
III-4-1 Notations et définitions préliminaires . . . . .	96
a) Introduction . . . . .	96
b) Notations . . . . .	96
- Somme de deux parties de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	96
- Compacts $T, D, S$ , et espaces associés . . . . .	97
- $\nu$ régularisée d'une fonction continue et bornée . . . . .	97
c) Fonction $F$ . . . . .	97
- Définition de $F$ . . . . .	97
- $\nu$ régularisée de $F$ . . . . .	98

	Pages		Pages
- Familles de fonctions associées à $F$	98	- Énoncé	129
- Vecteurs paramétrés associés à $F$	98	- Démonstration : première partie	130
- Fonction aléatoire associée à $F$	99	- Démonstration : deuxième partie	130
- Remarque	99	- Démonstration : troisième partie	132
d) Définitions	99	c) Conséquence pratique	134
- Définition 1	99	d) Cas des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}^n$	134
- Définition 2	100	III-4-4 Généralisation des exemples présentés au paragraphe III-4-3	136
III-4-2 Notion d'estimation et d'interpolation en $\mu$ - moyenne quadratique	100	a) Introduction	136
a) Proposition fondamentale	100	b) Notations	137
- Énoncé	100	- Avertissement	137
- Démonstration : première partie	101	- Ensemble $K$ et $K_*$	137
- Démonstration : deuxième partie	103	- Matrices $[E(K_*; T)]$ et $[E(K_*; T)]$	138
b) Cas particulier où $T$ est discret	105	- Matrices $R(k\theta)$ et $\mathcal{R}(k\theta)$	139
c) Propriété des mesures $\hat{\lambda}_{T_0}$ solution de l'équation de Wiener-Hopf	106	- Symbole de sommation	139
- Énoncé	106	c) Proposition	139
- Démonstration	106	- Énoncé	139
- Remarque	107	- Démonstration : première partie	141
d) Estimation et interpolation en $\mu$ - moyenne quadratique	107	- Démonstration : deuxième partie	141
- Notations	107	- Démonstration : troisième partie	144
- Interpolation : définition	108	d) Remarque	147
- Estimation : définition stricte	108	e) Proposition	148
- Estimation : définition large	109	- Énoncé	148
e) Interprétation de $\hat{F}_V(t_0)$ et $\hat{e}_V(t_0)$	109	- Démonstration	148
- Énoncé	109	f) Corollaire	150
- Démonstration	110	- Énoncé	150
- Remarque	111	- Démonstration	151
f) Continuité de $\hat{F}_V(t_0)$ lorsque $T$ est discret	112	g) Remarque pratique	151
- Énoncé	112	- Introduction	151
- Démonstration : première partie	112	- Construction d'une solution initiale $F^*$ de forme imposée	152
- Démonstration : deuxième partie	113	III-5 Filtrage statistique optimal	154
g) Continuité de $\hat{F}_V(t_0)$ lorsque $T$ est un compact quelconque de $\mathbb{R}^n$	114	III-5-1 Nature du problème posé	154
- Énoncé	114	a) Introduction	154
- Démonstration : première partie	114	- Rappels	154
- Démonstration : deuxième partie	114	- Remarque	154
- Démonstration : troisième partie	117	b) Notion de filtrage statistique optimal	155
- Remarque	117	c) Remarque : cas où $T$ est discret	156
III-4-3 Application : technique d'interpolation	118	III-5-2 Proposition fondamentale	157
a) Introduction	118	a) Proposition	157
b) Proposition 1	118	- Énoncé	157
- Énoncé	118	- Démonstration : première partie	157
- Démonstration	119	- Démonstration : deuxième partie	159
- Corollaire	121	b) Cas particulier où $T$ est discret	160
c) Proposition 2	122	III-5-3 Application au filtrage d'un bruit additif	161
- Énoncé	122	a) Problème posé	161
- Démonstration	123	b) Solution du problème posé	162
d) Technique d'interpolation	124	III-5-4 Exemples de bruit	163
- Présentation	124	a) Proposition	163
- Intérêt de cette technique	125	- Énoncé	163
- Remarque	125	- Démonstration : première partie	164
III-4-4 Exemples de fonctions interpolables en $\mu$ - moyenne quadratique	125	- Démonstration : deuxième partie	165
a) Proposition 1	125	b) Cas des fonctions aléatoires de plusieurs variables	166
- Énoncé	125	III-5-5 Généralisation des exemples présentés au paragraphe III-5-4	167
- Démonstration : première partie	126	a) Introduction	167
- Démonstration : deuxième partie	126	b) Proposition	168
- Démonstration : troisième partie	127		
b) Proposition 2	129		

	Pages
- Enoncé . . . . .	168
- Démonstration . . . . .	169
III-6 Applications pratiques . . . . .	172
III-6-1 Aspect informatique des méthodes proposées . . . . .	172
a) Contraintes technologiques . . . . .	172
b) Conséquences pratiques . . . . .	173
III-6-2 Premier exemple . . . . .	174
a) Présentation . . . . .	174
b) Mise en oeuvre . . . . .	174
c) Remarque . . . . .	177
III-6-3 Deuxième exemple . . . . .	177
a) Présentation . . . . .	177
b) Construction d'un exemple numérique . . . . .	178
- Choix de $K$ et des coefficients $\sigma_k$ . . . . .	178
- Choix de $m(t)$ et discrétisation de $T$ . . . . .	179
c) Résultats obtenus . . . . .	180
- Construction numérique des réalisations de $g(\omega, t)$ . . . . .	180
- Filtrage statistique des trajectoires . . . . .	180
- Contrôle statistique de la méthode . . . . .	181
III-6-4 Troisième exemple . . . . .	184
a) Présentation . . . . .	184
- Introduction . . . . .	184
- Visualisation de $F$ dans le domaine $D$ . . . . .	185
- Problème posé . . . . .	185
b) Construction d'une solution initiale . . . . .	185
c) Visualisation des résultats obtenus . . . . .	186
- Techniques de visualisation . . . . .	186
- Résultats obtenus . . . . .	187

## Chapitre 0

### PRESENTATION HEURISTIQUE DES METHODES ETUDIEES

#### 0-1 - INTRODUCTION

Il existe de nombreuses branches de l'activité scientifique où l'on se trouve confronté au problème délicat posé par la visualisation d'une fonction numérique  $F$  à l'intérieur d'un domaine d'étude bidimensionnel  $D$ . La plupart du temps, la fonction étudiée n'est connue que sur un ensemble  $T$  de points de mesure situés à l'intérieur de  $D$ , et l'on se contente de tracer "à la main" des courbes de niveau interpolant les points connus. Depuis quelques années se développe un certain nombre de méthodes et de techniques qu'il serait matériellement impossible de mettre en oeuvre sans l'aide d'un ordinateur et qui permettent de résoudre de façon automatique les problèmes cartographiques les plus ardues, tout en intégrant au maximum les informations disponibles.

Parmi les nombreux problèmes soulevés par la cartographie automatique numérique, nous nous proposons d'étudier les deux problèmes particuliers suivants :

- 1°) Dans le cas où  $F$  est parfaitement connue sur  $T$ , trouver une fonction  $\hat{F}$  "interpolant"  $F$  sur  $D$  en un certain sens à préciser.
- 2°) Dans le cas où  $F$  n'est connue sur  $T$  que par une observation imparfaite  $F_\omega$  effectuée par exemple à l'aide d'un instrument de mesure au cours d'une expérience  $\omega$ , trouver une fonction  $\hat{F}_\omega$  "approchant"  $F$  sur  $T$  en un certain sens à préciser.

En fait, ces deux problèmes de cartographie, qui sont à l'origine des problèmes bidimensionnels, se généralisent de façon toute naturelle pour des fonctions définies dans  $\mathbb{R}^n$ . C'est le point de vue que nous adopterons dans toute cette étude où nous supposons que  $T$  et  $D$  sont des compacts de  $\mathbb{R}^n$ .

## 0-2 - PRESENTATION DE L'INTERPOLATION EN $\mu$ -MOYENNE QUADRATIQUE DANS LE CAS OU $T$ EST DISCRET

### 0-2-1 - Problème posé

Soit d'une part  $t_0 \in D$  un point fixé dans  $\mathbb{R}^n$  et  $T$  un ensemble fini de points  $t_i \in \mathbb{R}^n$ :

$$T \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$$

Soit d'autre part  $F$  une fonction (réelle ou complexe) définie (donc bornée) sur  $(T \cup t_0)$  et connue seulement par ses valeurs numériques  $F(t_i)$  sur l'ensemble  $T$ . Nous nous proposons de trouver une valeur  $\hat{F}(t_0)$  approchant la valeur inconnue  $F(t_0)$  en un certain sens à définir de telle façon que l'on ait :

$$\forall t_0 \in T \Rightarrow \hat{F}(t_0) = F(t_0)$$

Ce problème, qui possède a priori une infinité de solutions lorsque  $t_0$  n'appartient pas à  $T$ , ne peut évidemment être résolu que moyennant un certain nombre d'hypothèses "a priori". C'est en essayant de limiter au maximum ces hypothèses que nous avons été conduit à imaginer la méthode d'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique dont le principe est directement inspiré de la méthode des filtres autorégressifs.

Pour cette raison et afin de bien préciser les motivations qui nous ont amené à concevoir cette méthode d'interpolation, nous pensons qu'il n'est pas inutile de donner (sans démonstrations) une présentation rapide de la technique des filtres autorégressifs en insistant sur les points qui ont retenu notre attention.

### 0.2.2. - Méthode des filtres autorégressifs

#### a) Remarque préliminaire

La fonction  $F$  étant fixée, on peut toujours trouver un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et une fonction aléatoire  $f(\omega, t)$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}) \times (T \cup t_0)$  de façon à posséder les propriétés  $(f_1)$  et  $(f_2)$  suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} (f_1) \quad \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow E\{|f(\omega, t)|^2\} < +\infty \\ (f_2) \quad \exists \omega_0 \in \Omega \quad : \quad \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow f(\omega_0, t) = F(t) \end{array} \right\}$$

Par exemple, si nous choisissons  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  tel que ...

$$\left. \begin{array}{l} \Omega \equiv \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_M\} \\ \mathcal{A} = \text{ensemble des parties de } \Omega \end{array} \right\}$$

... alors l'application  $f(\omega, t)$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}) \times (T \cup t_0)$  par les relations  $(f_1')$  et  $(f_2')$  ci-dessous est effectivement une fonction aléatoire :

$$\left. \begin{array}{l} (f_1') \quad \forall \omega \in \Omega \Rightarrow f(\omega, \cdot) = \text{fonction bornée sur } (T \cup t_0) \\ (f_2') \quad \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow f(\omega_0, t) = F(t) \end{array} \right\}$$

De plus, compte tenu de la relation  $(f_2')$ , cette fonction aléatoire vérifie effectivement la propriété  $(f_2)$  et la propriété  $(f_1)$  est également vérifiée car d'après la relation  $(f_1')$  on a :

$$\begin{aligned} \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow E\{|f(\omega, t)|^2\} &= \int_{\Omega} |f(\omega, t)|^2 \cdot P(d\omega) \\ &\leq \sup_{t \in (T \cup t_0)} \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega, t)|^2 < +\infty \end{aligned}$$

Ceci dit, il est important de remarquer pour la suite de l'exposé que la propriété  $(f_1)$  implique pour  $f(\omega, t)$  l'existence sur  $(T \cup t_0)$  d'une fonction moyenne  $\phi_f$  et d'une fonction d'autocorrélation  $\Gamma_{ff}$  telles que :

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \phi_f(t) = E\{f(\omega, t)\} \\ \forall \left. \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = E\{f(\omega, t_1) \cdot \overline{f(\omega, t_2)}\} \end{array} \right\}$$

#### b) Définition

Soit d'une part  $f(\omega, t)$  une fonction aléatoire vérifiant les propriétés  $(f_1)$  et  $(f_2)$  définies au paragraphe précédent, et soit d'autre part  $\{U_0^t, U_1^t, \dots, U_N^t\}$  un ensemble de  $(N+1)$  variables aléatoires centrées telles que :

$$\forall \omega \in \Omega \Rightarrow \begin{cases} U_0^c(\omega) = f(\omega, t_0) - \Phi_f(t_0) \\ U_1^c(\omega) = f(\omega, t_1) - \Phi_f(t_1) \\ \vdots \\ U_N^c(\omega) = f(\omega, t_N) - \Phi_f(t_N) \end{cases}$$

Soit enfin  $[\Gamma^c]$  la matrice carrée à  $N$  lignes et  $N$  colonnes telle que :

$$[\Gamma^c] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^c & \Gamma_{21}^c & \dots & \Gamma_{N1}^c \\ \Gamma_{12}^c & \Gamma_{22}^c & \dots & \Gamma_{N2}^c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1N}^c & \Gamma_{2N}^c & \dots & \Gamma_{NN}^c \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } \begin{cases} t_i \in T \\ t_j \in T \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{ij}^c = \Gamma_{ff}(t_i, t_j) - \Phi_f(t_i) \cdot \overline{\Phi_f(t_j)}$$

Dans ces conditions, si  $[\Gamma^c]$  est inversible, alors il existe une régression linéaire  $\hat{U}_0^c$  (au sens des moindres carrés) de la variable aléatoire  $U_0^c$  en fonction des variables aléatoires  $\{U_1^c, \dots, U_N^c\}$  et, par définition, on appelle interpolation de  $F$  au point  $t_0$  au sens des filtres autorégressifs la valeur numérique  $\hat{F}(t_0)$  telle que :

$$\hat{F}(t_0) = \Phi_f(t_0) + \hat{U}_0^c(\omega_0)$$

### c) Construction de $\hat{F}(t_0)$

Si nous posons ...

$$\forall \begin{cases} t_i \in (T \cup t_0) \\ t_j \in (T \cup t_0) \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{ij}^c = \Gamma_{ff}(t_i, t_j) - \Phi_f(t_i) \cdot \overline{\Phi_f(t_j)}$$

... alors, d'après la théorie de la régression linéaire, nous savons que la variable aléatoire  $\hat{U}_0^c$  vérifie les relations suivantes :

$$(A1) : \hat{U}_0^c = \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}^i(t_0) \cdot U_i^c$$

$$(A2) : E\{U_0^c - \hat{U}_0^c\}^2 = \min_{\{\lambda^i\}_{i=1}^N} E\{U_0^c - \sum_{i=1}^N \lambda^i \cdot U_i^c\}^2$$

$$(A3) : E\{\hat{U}_0^c\} = E\{U_0^c\} = 0$$

$$(A4) : \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^c & \Gamma_{21}^c & \dots & \Gamma_{N1}^c \\ \Gamma_{12}^c & \Gamma_{22}^c & \dots & \Gamma_{N2}^c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1N}^c & \Gamma_{2N}^c & \dots & \Gamma_{NN}^c \end{bmatrix}}_{[\Gamma^c]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\lambda}^1(t_0) \\ \hat{\lambda}^2(t_0) \\ \vdots \\ \hat{\lambda}^N(t_0) \end{bmatrix}}_{[\hat{\Lambda}(t_0)]} = \begin{bmatrix} \Gamma_{01}^c \\ \Gamma_{02}^c \\ \vdots \\ \Gamma_{0N}^c \end{bmatrix}$$

$$(A5) : E\{U_0^c - \hat{U}_0^c\}^2 = \Gamma_{00}^c - [\hat{\Lambda}(t_0)]^t \cdot [\Gamma^c] \cdot [\hat{\Lambda}(t_0)]$$

De plus, compte-tenu de la définition de  $\Gamma_{ij}^c$ , on déduit que les coefficients  $\{\hat{\lambda}^i(t_0)\}_{i=1}^N$  solution de l'équation (A4) sont tels que l'on ait :

$$(A6) : \begin{cases} t_0 \in T \\ [\Gamma^c] \text{ inversible} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\lambda}^i(t_0) = 1 \text{ si } t_0 = t_i \\ \hat{\lambda}^i(t_0) = 0 \text{ si } t_0 \neq t_i \end{cases}$$

En se souvenant que par construction on a ...

$$\forall i = (0, 1, \dots, N) \Rightarrow U_i^c(\omega_0) = F(t_i) - \Phi_f(t_i)$$

... il s'en suit que l'on peut écrire :

$$(F1) : \hat{F}(t_0) = \Phi_f(t_0) + \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}^i(t_0) \cdot \{F(t_i) - \Phi_f(t_i)\}$$

$$(F2) : \begin{cases} t_0 \in T \\ [\Gamma^c] \text{ inversible} \end{cases} \Rightarrow \hat{F}(t_0) = F(t_0)$$

Nous sommes alors en mesure d'affirmer, grâce à la relation (F2), que la méthode d'estimation de  $\hat{F}(t_0)$  au sens des filtres autorégressifs est effectivement une méthode d'interpolation au sens habituel du terme.

0-2-3 - Mise en oeuvre de la méthode des filtres autorégressifs

a) Introduction

D'après ce que nous venons de voir, la méthode des filtres autorégressifs ne peut être mise en oeuvre que si l'on connaît a priori la moyenne  $\phi_f$  et la fonction d'auto-corrélation relatives à la fonction aléatoire  $f(\omega, t)$  ce qui n'est pratiquement jamais le cas dans les applications courantes. Pour sortir de cette impasse, on est contraint de formuler "a priori" un certain nombre d'hypothèses :

b) Hypothèses (H1)

Généralement, on suppose tout d'abord que  $f(\omega, t)$  est ergodique du second ordre et vérifie de ce fait, quels que soient  $t, t_1$  et  $t_2$  appartenant à  $(T \cup t_0)$ , les relations suivantes où  $B_\rho$  est une boule de  $\mathbb{R}^n$  centrée à l'origine, de rayon  $\rho$  et de volume  $|B_\rho|$  :

$$\forall \omega_0 \in \Omega \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \phi_f(t) &= \int_{\Omega} f(\omega, t) \cdot P(d\omega) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(\omega_0, t+s) ds \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} F(t+s) ds \\ \Gamma_{ff}(t_1, t_2) &= \int_{\Omega} f(\omega, t_1) \cdot f(\omega, t_2) \cdot P(d\omega) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f(\omega_0, t_1+s) \cdot f(\omega_0, t_2+s) \cdot ds \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} F(t_1+s) \cdot F(t_2+s) \cdot ds \end{aligned} \right.$$

L'hypothèse d'ergodicité du second ordre (H1) n'est généralement pas suffisante à elle seule pour permettre de déterminer les fonctions  $\phi_f(t)$  et  $\Gamma_{ff}(t_1, t_2)$ , aussi est-il conduit à la compléter par une nouvelle série d'hypothèses (H2) ou (H2') :

c) Hypothèses (H2)

En deuxième hypothèse, il est classique de supposer que  $f(\omega, t)$  est stationnaire de second ordre, c'est-à-dire qu'il existe des constantes  $|\sigma_f|^2$  et  $\phi_f$  ainsi qu'une fonction de type positif définie sur  $\mathbb{R}^n$  telles que :

$$\left\{ \begin{aligned} \forall t \in (T \cup t_0) &\Rightarrow \phi_f(t) = \phi_f \\ \forall \left\{ \begin{aligned} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = |\sigma_f|^2 \cdot \gamma(t_1 - t_2) + |\phi_f|^2 \\ \forall t \in (T \cup t_0) &\Rightarrow \Gamma_{ff}(t, t) = |\sigma_f|^2 + |\phi_f|^2 \end{aligned} \right.$$

Compte-tenu de l'ergodicité du second ordre de  $f(\omega, t)$ , cela implique en particulier que l'on ait :

$$\begin{aligned} \phi_f &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} F(s) ds \\ |\sigma_f|^2 &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} |F(s)|^2 ds - |\phi_f|^2 \end{aligned}$$

Ceci dit, si nous posons...

$$\begin{aligned} \phi_f^* &= \frac{1}{N} \sum_{t_i \in T} F(t_i) \\ |\sigma_f^*|^2 &= \frac{1}{N} \sum_{t_i \in T} |F(t_i)|^2 - |\phi_f^*|^2 \end{aligned}$$

... on peut alors utiliser la méthode des filtres autorégressifs en supposant comme dernière hypothèse que l'on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \forall t \in (T \cup t_0) &\Rightarrow \phi_f(t) = \phi_f^* \\ \forall \left\{ \begin{aligned} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = |\sigma_f^*|^2 \cdot \gamma(t_1 - t_2) + |\phi_f^*|^2 \end{aligned} \right.$$

d) Hypothèse (H2')

L'ergodicité du second ordre étant admise, il existe de nombreuses façons de formuler des hypothèses complémentaires, et si les hypothèses (H2) sont les plus fréquemment utilisées par les praticiens de la méthode, il ne faut pas perdre de vue qu'il existe d'autres possibilités. Par exemple, imaginons que l'on connaisse une première approximation  $\phi_f^*$  de la fonction  $F$ , et soit  $B$  une boule de volume  $|B|$  centrée à l'origine : si nous posons...

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \phi_f^*(t) = \frac{1}{|B|} \int_B F^*(t+s) ds \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}^*(t_1, t_2) = \frac{1}{|B|} \int_B F^*(t_1+s) \cdot \overline{F^*(t_2+s)} \cdot ds \end{array} \right.$$

... alors, sous réserve que le rayon de  $B$  soit "suffisamment grand", on peut utiliser la technique des filtres autorégressifs en admettant comme dernière hypothèse que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \phi_f(t) = \phi_f^*(t) \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \Gamma_{ff}^*(t_1, t_2) \end{array} \right.$$

#### 0-2-4 - Motivations et principe de l'interpolation en $\mu$ -moyenne quadratique

Il faut bien comprendre que le problème posé au départ, à savoir "trouver une valeur numérique  $\hat{F}(t_0)$  interpolant  $F$  au point  $t_0$ " possède a priori une infinité de solutions puisqu'en l'absence d'information complémentaire, il existe a priori une infinité de fonctions  $F$  prenant des valeurs identiques sur l'ensemble  $T$  des  $N$  points d'échantillonnage. Etant donné qu'il n'existe aucun procédé générateur d'information en dehors des procédés de mesure des valeurs  $F(t_i)$  en des points  $t_i \in \mathbb{R}^n$ , il est absolument nécessaire de formuler "a priori" un certain nombre d'hypothèses si l'on veut pouvoir calculer une solution  $\hat{F}(t_0)$  particulière ; l'hypothèse d'ergodicité de  $f(\omega, t)$  est une façon de procéder qui, dans les applications pratiques, donne souvent de bons résultats malgré la brutalité du principe qui consiste en fait à supposer que les moyennes statistiques portant sur la variable  $\omega$  sont identiques aux moyennes spatiales portant sur la variable  $t$ .

En réfléchissant sur les implications de l'ergodicité, on est tout naturellement conduit à se demander s'il n'est pas possible de choisir  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $f(\omega, t)$  de telle façon que la variable  $\omega$  et la variable  $t$  aient effectivement un rôle symétrique. La réponse à cette question est positive si  $F$  est définie, continue et bornée sur  $^{(1)}[(T \cup t_0) + \Omega]$  et si on pose :

<sup>(1)</sup>  $A$  et  $B$  étant des parties de  $\mathbb{R}^n$ , nous désignerons par  $C = (A+B)$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  tels que :

$$\forall c \in (A+B) \Leftrightarrow \exists \left\{ \begin{array}{l} a \in A \\ b \in B \end{array} \right\} : c = a+b$$

$$(f3) \left\{ \begin{array}{l} \Omega \equiv \text{partie de } \mathbb{R}^n \text{ contenant l'origine } \theta_{\mathbb{R}^n} \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_{\Omega} = \text{tribu borélienne de } \Omega \\ P \equiv \mu = \text{mesure positive normée sur } (\Omega, \mathcal{B}_{\Omega}) \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t \in (T \cup t_0) \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow f(\omega, t) = F(t + \omega) \end{array} \right.$$

En effet, comme nous le verrons au chapitre III, l'application  $f(\omega, t)$  ainsi définie est effectivement une fonction aléatoire définie sur  $[(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega}) \times (T \cup t_0)]$  et vérifiant la propriété (f1) :

$$\forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow E\{|f(\omega, t)|^2\} < +\infty$$

Comme d'autre part en posant  $\omega_0 = \theta_{\mathbb{R}^n}$  on a bien...

$$\exists (\omega_0 = \theta_{\mathbb{R}^n}) \in \Omega : \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow f(\omega_0, t) = F(t + \theta_{\mathbb{R}^n}) = F(t)$$

... il s'en suit que  $f(\omega, t)$  vérifie également la propriété (f2) et que l'on peut par conséquent appliquer la méthode des filtres autorégressifs pour estimer  $F$  au point  $t_0$ . On remarquera alors que pour ce faire, il n'est plus nécessaire de supposer l'ergodicité de  $f(\omega, t)$  puisque cette fonction jouit d'une propriété tout à fait analogue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \phi_f(t) = \int_{\Omega} f(\omega, t) \cdot P(d\omega) \\ \phantom{\forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow} = \int_{\Omega} F(t + \omega) \cdot \mu(d\omega) \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} f(\omega, t_1) \cdot \overline{f(\omega, t_2)} \cdot P(d\omega) \\ \phantom{\forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow} = \int_{\Omega} F(t_1 + \omega) \cdot \overline{F(t_2 + \omega)} \cdot \mu(d\omega) \end{array} \right.$$

En fait, on s'aperçoit qu'en choisissant  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $f(\omega, t)$  suivant les relations (f3) on remplace par des " $\mu$ -moyennes mobiles" toutes les "espérances mathématiques" intervenant dans la théorie des filtres autorégressifs. Pour cette raison, nous proposons d'appeler "interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique" ce cas particulier d'interpolation au sens des filtres autorégressifs.

### 0-2-5 - Avantages apportés par l'interpolation en $\mu$ -moyenne quadratique

Nous venons de montrer que la méthode d'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique possède l'avantage de supprimer l'hypothèse (H1) d'ergodicité du second ordre de  $f(\omega, t)$ . Cela n'est pas dénué d'intérêt compte-tenu de l'impossibilité pratique de contrôler cette hypothèse dans les applications courantes.

De plus, nous verrons au chapitre III que la nature particulière de  $f(\omega, t)$  permet d'obtenir un certain nombre de résultats complémentaires concernant  $\hat{F}(t_0)$ .

### 0-2-6 - Remarques

#### a) Remarque 1

Par souci de simplicité de l'exposé dans cette présentation heuristique, nous n'avons traité que le cas où  $T$  est un ensemble discret. Il convient toutefois de remarquer qu'il existe une forme plus générale des "filtres autorégressifs" connue sous le nom de "filtres de Wiener" et qui prend en compte le cas où  $T$  est un compact quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .

#### b) Remarque 2

Soit d'une part  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré défini de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \equiv [-\pi, +\pi] \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega \\ \mu(d\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot d\omega \end{array} \right.$$

Soit d'autre part  $K$  un entier positif fini et  $F$  un polynôme trigonométrique réel tel que :

$$\left[ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^K \left\{ a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt) \right\} \\ \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} |a_k| < +\infty \quad \text{quel que soit } k = (0, 1, \dots, K) \\ |b_k| < +\infty \quad \text{quel que soit } k = (1, \dots, K) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, nous verrons au paragraphe III-4-3-a que si  $T$  est un ensemble de  $N$  points appartenant à  $\mathbb{R}$  et si  $t_0$  est un point quelconque de  $\mathbb{R}$ , alors  $F$  est continue et bornée sur  $[(T \cup t_0) + \Omega]$  et la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée à  $F$  par la relation suivante...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\omega, t) = F(t + \omega)$$

... admet pour moyenne et autocorrélation des fonctions  $\phi_f$  et  $\Gamma_{ff}$  telles que :

$$\left[ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \phi_f(t) = a_0 \\ \left. \begin{array}{l} \forall t_1 \in (T \cup t_0) \\ \forall t_2 \in (T \cup t_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = |a_0|^2 + \sum_{k=1}^K \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \cdot \cos[k(t_1 - t_2)] \end{array} \right.$$

Ceci dit, si nous posons...

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_f = a_0 \\ |\sigma|^2 = \sum_{k=1}^K \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \end{array} \right.$$

$$\gamma(t_1 - t_2) = \sum_{k=1}^K \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2 \cdot |\sigma|^2} \cdot \cos[k(t_1 - t_2)]$$

... alors, si les  $N$  points  $\{t_i\} \in T$  sont uniformément répartis sur un intervalle  $[\alpha, \alpha + 2\pi]$  et si  $N$  est suffisamment grand, nous savons d'après les propriétés des coefficients d'une série de Fourier que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_f = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(t) \cdot dt \\ \simeq \frac{1}{N} \sum_{t_i \in T} F(t_i) = \phi_f^* \\ |\sigma|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |F(t)|^2 \cdot dt - |\phi_f^*|^2 \\ \simeq \frac{1}{N} \sum_{t_i \in T} |F(t_i)|^2 - |\phi_f^*|^2 = |\sigma^*|^2 \end{array} \right.$$

En comparant ces relations avec celles présentées aux paragraphes 0-2-3-b et 0-2-3-c, nous voyons que les hypothèses (H1) et (H2) classiquement utilisées dans la technique des filtres autorégressifs reviennent en fait à utiliser un cas particulier d'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique.

Notons enfin que cette dernière remarque s'étend sans difficulté théorique au cas des polynômes trigonométriques réels ou complexes définis sur  $\mathbb{R}^n$ .

c) Remarque 3

Rappels sur les fonctions splines d'interpolation

Considérons une fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  et connue seulement par ses valeurs  $F(t_i)$  en  $N$  points  $t_i$  appartenant à un ensemble  $T$ .

Il existe certains instruments de dessin qui permettent de faire passer "au mieux" une courbe par les  $N$  points  $\{t_i, F(t_i)\}$ . Par exemple, le "spline" qui est une longue règle flexible réalise mécaniquement sur la feuille de dessin une interpolation en général satisfaisante lorsqu'on l'oblige à passer par les  $N$  points de coordonnées  $\{t_i, F(t_i)\}$  à l'aide d'objets pesants appelés "dogs", placés en ces points ; l'élasticité du matériau dont est constitué le spline assure une certaine régularité dans le tracé, tandis que l'interpolation est obtenue par la présence des dogs. On peut montrer que le spline tend à prendre la forme d'une ligne composée d'arcs polynômiaux du troisième degré raccordés de façon à assurer la continuité des deux premières dérivées, les points de raccordement étant ceux où l'on a placé les dogs.

Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  contenant l'ensemble  $T$ , et soit  $q$  un entier positif ; en s'inspirant de cette analogie mécanique, on dit que  $\sigma_{2q}(t)$  est une fonction spline d'interpolation d'ordre  $2q$  pour la fonction  $F$  sur le segment  $[a, b]$  si et seulement si elle possède les propriétés ci-dessous :

- 1°)  $\sigma_{2q}$  est un polynôme de degré  $(q - 1)$  sur  $[a, t_1[$  et  $]t_N, b]$
- 2°)  $\sigma_{2q}^{(n)}(t_i) = \sigma_{2q}^{(n)}(t_i^+)$  quels que soient  $\begin{cases} n = 0, 1, \dots, (2q - 2) \\ t_i \in T \end{cases}$
- 3°)  $\sigma_{2q}$  est formée de morceaux de polynômes de degré  $(2q - 1)$  sur chacun des  $(N-1)$  intervalles suivants :  
 $]t_1, t_2[ ; \dots ; ]t_i, t_{i+1}[ ; \dots ; ]t_{N-1}, t_N[$
- 4°)  $\sigma_{2q}(t_i) = F(t_i)$  quel que soit  $t_i \in T$

On démontre qu'il suffit que l'on ait  $N > q$  pour que la fonction spline d'interpolation de  $F$  ainsi définie sur le segment  $[a, b]$  contenant  $T$  soit unique.

En particulier, le procédé mécanique qui nous a servi à introduire la notion de fonction spline d'interpolation correspond à une fonction spline d'ordre  $2q = 4$ .

Représentation cardinale des splines d'interpolation

Schoenberg à qui l'on doit le terme de "fonction spline" a montré que dans le cas où l'ensemble  $T$  est de la forme ...

$$\left\{ \begin{array}{l} T \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_N\} \\ \text{avec } t_j = j \text{ quel que soit } j = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

... alors toute fonction spline d'interpolation d'ordre  $2q$  construite sur les  $N$  points d'appui  $t_i \in T$  admet la représentation suivante ...

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{2q}(t) = \sum_{j=1}^N \alpha^j \cdot M_{2q}(t - j) \\ \text{avec : } M_{2q}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin(u/2)}{(u/2)} \right]^{2q} \cdot e^{i u \tau} \cdot du \\ = \frac{1}{(2q - 1)!} \cdot \sum_{k=0}^{2q} (-1)^k \cdot C_{2q}^k \cdot (\tau + q - k)_+^{2q-1} \end{array} \right.$$

... où la notation  $x_+^m$  désigne la fonction telle que :

$$\left[ \begin{array}{l} x_+^m = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^m & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ \text{avec la convention } 0_+^0 = 1/2 \end{array} \right.$$

Par analogie avec la série cardinale ...

$$y(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} y_j \cdot \frac{\sin \pi(t - j)}{\pi(t - j)}$$

... nous dirons que ...

$$\sigma_{2q}(t) = \sum_{j=1}^N \alpha^j \cdot M_{2q}(t - j)$$

... est une représentation cardinale de  $\sigma_{2q}$ .

Par ailleurs, on constate que les courbes représentatives des fonctions  $M_{2q}(\tau)$  définies ci-dessus ont l'allure de courbes en cloche de plus en plus ablaties au fur et à mesure que  $2q$  augmente et qui de plus sont telles que :

$$\begin{cases}
 M_{2q}(0) > M_{2q}(\tau) \text{ quel que soit } \tau \in \mathbb{R} \\
 M_{2q}(\tau) = M_{2q}(-\tau) \\
 M_{2q}(\tau) = 0 \text{ quel que soit } \tau \in ]-q, +q[ \\
 M'_{2q}(q) = M'_{2q}(-q) = M'_{2q}(0) \text{ quel que soit } q > 1 \\
 \sum_{i=1}^N \lambda^i \cdot M_{2q}(\tau - i) \equiv 0 \Leftrightarrow \lambda^i = 0 \text{ quel que soit } i = 1, \dots, N
 \end{cases}$$

Enfin, compte tenu du théorème de Bochner, on ne manquera pas de remarquer que pour tout  $q > 0$ , la fonction  $M_{2q}(\tau)$  est de type positif en tant que transformée de Fourier d'une fonction non négative et intégrable sur  $\mathbb{R}$ ; en effet, on a :

$$\begin{aligned}
 q > 0 \Rightarrow & \left[ \begin{aligned}
 & \left[ \frac{\sin(u/2)}{(u/2)} \right]^{2q} \geq 0 \text{ quel que soit } u \in \mathbb{R} \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin(u/2)}{(u/2)} \right]^{2q} \cdot du = 2\pi \cdot M_{2q}(0) \\
 & = \frac{2\pi}{(2q-1)!} \cdot \sum_{k=0}^q (-1)^k \cdot C_{2q}^k \cdot (q-k)^{2q-1}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Analogie entre les splines d'interpolation et la technique des filtres autorégressifs

Soit d'une part  $T$  un ensemble de  $N$  points appartenant à  $\mathbb{R}$  et tels que :

$$\begin{cases}
 T \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_N\} \\
 \text{avec } t_i = i \text{ quel que soit } i = 1, \dots, N
 \end{cases}$$

Soit d'autre part  $F$  une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}$  et connue seulement par ses valeurs numériques  $F(t_i)$  aux  $N$  points d'échantillonnage  $t_i \in T$ .

1°) Si nous supposons que  $[a, b]$  est un segment de  $\mathbb{R}$  contenant l'ensemble  $T$  et si l'on se donne un entier  $q$  satisfaisant l'inégalité  $q \leq N$ , alors on sait, d'après ce qui a été dit dans les deux paragraphes précédents, qu'il existe une fonction spline  $\sigma_{2q}(t)$  et une seule interpolant  $F$  sur  $[a, b]$ . Compte tenu de la nature particulière de  $T$ , on a vu que  $\sigma_{2q}(t)$  admet une représentation du type cardinal :

$$(1) \quad \sigma_{2q}(t) = \sum_{i=1}^N \alpha^i \cdot M_{2q}(t - i)$$

Pour déterminer les coefficients  $\alpha^i$ , il suffit donc de résoudre le système des  $N$  équations linéaires obtenues en posant :

$$\forall t_i \in T \Rightarrow \sigma_{2q}(t_i) = F(t_i)$$

En opérant ainsi, on trouve :

$$(2) \quad \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{N1} \\ M_{12} & M_{22} & \dots & M_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1N} & M_{2N} & \dots & M_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t_1) \\ F(t_2) \\ \vdots \\ F(t_N) \end{bmatrix}$$

avec  $M_{ij} = M_{ji} = M_{2q}(t_i - t_j)$  quels que soient  $\begin{cases} i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, N \end{cases}$

Il est utile de remarquer pour la suite de l'exposé que les  $N$  fonctions  $M_{2q}(t - i)$  étant linéairement indépendantes et la fonction  $\sigma_{2q}$  étant unique (puisque  $q \leq N$ ) on en déduit que la matrice  $[M]$  intervenant dans le système d'équation (2) est inversible.

2°) Considérons maintenant un point  $t_0 \in [a, b]$  et supposons qu'il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et une fonction aléatoire  $f(\omega, t)$  définie sur  $[(\Omega, \mathcal{A}) \times (T \cup t_0)]$  qui, tout en satisfaisant les conditions  $(f_1)$  et  $(f_2)$  présentées au paragraphe 0-2.2-a, soit stationnaire d'ordre 2 et vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases}
 \forall t \in (T \cup t_0) \Rightarrow \phi_f(t) = 0 \\
 \forall \begin{cases} t_1 \in (T \cup t_0) \\ t_2 \in (T \cup t_0) \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = |\sigma_f|^2 \cdot \gamma(t_1 - t_2) \\
 \text{avec : } \begin{cases} |\sigma_f|^2 = S^2 \cdot M_{2q}(0) \\ \gamma(\tau) = \frac{M_{2q}(\tau)}{M_{2q}(0)} = \text{fonction de type positif} \end{cases}
 \end{cases}$$

Compte tenu que la matrice  $[\Gamma^c] = S^2 \cdot [M]$  est inversible, on en déduit qu'il existe une interpolation  $\hat{F}(t_0)$  au sens des filtres autorégressifs telle que...

$$\begin{cases}
 \hat{F}(t_0) = \sum_{j=1}^N \hat{\lambda}^j(t_0) \cdot F(t_j) \\
 \text{avec } \hat{\lambda}^j(t_0) = \sum_{i=1}^N (M^{ij}/S^2) \cdot \Gamma_{ff}^c(t_0 - t_i)
 \end{cases}$$

... où les coefficients  $M^{ij}$  sont les composantes de la matrice  $[M]^{-1}$ . En remarquant que  $\hat{F}(t_0 - t_i) = S^2 \cdot M_{2q}(t_0 - i)$  on peut écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{F}(t_0) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (M^{ij}/S^2) \cdot S^2 \cdot M_{2q}(t_0 - i) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M^{ij} \cdot F(t_j) \cdot M_{2q}(t_0 - i) \end{aligned} \right.$$

Compte tenu des équations (2), on a en définitive :

$$(3) \quad \hat{F}(t_0) = \sum_{i=1}^N \alpha^i \cdot M_{2q}(t_0 - i)$$

En comparant les relations (1) et (3) on peut donc conclure que dans le cas particulier que nous venons d'étudier, l'interpolation par la méthode des filtres autorégressifs et l'interpolation par une fonction spline donnent le même résultat :

$$\hat{F}(t_0) = \sigma_{2q}(t_0)$$

### 0-2-7 - Conclusion

Nous voyons que les fonctions splines d'interpolation possèdent, tout comme l'interpolation en  $\mu$ - moyenne quadratique, un lien très étroit avec la technique des filtres autorégressifs. Toutefois, il convient de noter que les objectifs de ces différentes méthodes sont en général différents. C'est ainsi que les splines d'interpolation sont la plupart du temps utilisés comme des "outils de dessin" permettant de construire une représentation continue d'une fonction  $F$  à partir d'un échantillonnage très serré de celle-ci. A l'opposé, la méthode des filtres autorégressifs et l'interpolation en  $\mu$ - moyenne quadratique sont plus spécialement adaptées à la "prévision" des valeurs d'une fonction  $\hat{F}$  connue à partir d'un échantillonnage peu dense ; en particulier, nous verrons au paragraphe III-4.2-e que l'interpolation en  $\mu$ - moyenne quadratique nous fournit une fonction  $\hat{F}(t_0)$  qui caractérise, en un certain sens, la précision avec laquelle a été estimée  $F(t_0)$  en tout point  $t_0$  où est définie l'interpolation  $\hat{F}(t_0)$ .

## 0-3 - PRÉSENTATION DU FILTRAGE STATISTIQUE DANS LE CAS OU Y EST DISCRET

### 0-3-1 - Problème posé

Soit d'une part  $T$  un ensemble discret de  $N$  points appartenant à  $\mathbb{R}^n$  :

$$T \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$$

Soit d'autre part  $\{V_j\}_{j=1}^m$  un ensemble de  $m$  fonctions données définies et bornées sur  $T$ , et soit  $F$  une fonction elle-même définie et bornée sur  $T$  telle que...

$$\forall t \in T \Rightarrow F(t) = \sum_{j=1}^m \alpha^j \cdot V_j(t)$$

... où les  $m$  coefficients  $\alpha^j$  sont des constantes inconnues.

Soit enfin  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé donné et  $\mathfrak{A}_\omega$  un opérateur qui, à chaque expérience  $\omega \in \Omega$  faite sur  $F$ , associe l'observation  $F_\omega \equiv g(\omega, \cdot)$  telle que...

$$F \xrightarrow{\mathfrak{A}_\omega} g(\omega, \cdot) = F(\cdot) + f(\omega, \cdot)$$

... où  $f(\omega, t)$  est une fonction aléatoire vérifiant les relations suivantes :

$$\forall t \in T \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} E\{|f(\cdot, t)|^2\} &< +\infty \\ E\{f(\cdot, t)\} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Nous nous proposons de trouver une fonction aléatoire  $\hat{g}(\omega, t)$  de la forme suivante...

$$\forall \left\{ \begin{aligned} \omega &\in \Omega \\ t &\in T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{g}(\omega, t) = \sum_{j=1}^m \hat{\alpha}^j(\omega) \cdot V_j(t)$$

... sachant que les  $m$  coefficients  $\hat{\alpha}^j(\omega)$  sont des variables aléatoires à déterminer en fonction de  $g(\omega, t)$  de telle façon que l'on ait simultanément :

$$(\hat{g}) \quad \left\{ \begin{aligned} 1^\circ \quad \forall t \in T &\Rightarrow E\{\hat{g}(\cdot, t)\} = F(t) \\ 2^\circ \quad \forall j = (1, \dots, m) &\Rightarrow E\{|\hat{\alpha}^j(\cdot) - \alpha^j|^2\} \text{ est "aussi petit que possible"} \end{aligned} \right.$$

Une expérience  $\omega_0 \in \Omega$  étant fixée, nous dirons alors par définition que  $\hat{F}_{\omega_0} \equiv \hat{g}(\omega_0, \cdot)$  est un filtrage statistique de  $F_{\omega_0} \equiv g(\omega_0, \cdot)$ .

### 0-3-2 - Résolution du problème

#### a) Notations

Par définition, nous poserons dans ce qui suit :

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1(t_1) & \dots & V_m(t_1) \\ V_1(t_2) & \dots & V_m(t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ V_1(t_N) & \dots & V_m(t_N) \end{bmatrix} ; [g(\omega)] = \begin{bmatrix} g(\omega, t_1) \\ g(\omega, t_2) \\ \vdots \\ g(\omega, t_N) \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, nous désignerons par  $\{A_g^j\}_{j=1}^{j=m}$  les  $m$  sous-ensembles de  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  tels que :

$$\forall \tilde{\alpha}^j(\cdot) \in A_g^j \Leftrightarrow \begin{cases} 1^\circ) E\{\tilde{\alpha}^j(\cdot)\} = \alpha^j \\ 2^\circ) \exists \left\{ \tilde{\lambda}_i^j \right\}_{i=1}^{i=N} : \tilde{\alpha}^j(\cdot) = \sum_{i=1}^N \tilde{\lambda}_i^j g(\cdot, t_i) \end{cases}$$

#### b) Solution fournie par le théorème de Gauss-Markov

Si la matrice  $[r]$  définie par ...

$$[r] = E \left\{ [g(\cdot)] \cdot \overline{[g(\cdot)]}^t \right\}$$

... est inversible, alors le théorème de Gauss-Markov classiquement utilisé en statistiques, nous apprend qu'il existe  $m$  variables aléatoires  $\{\hat{\alpha}^j(\cdot)\}_{j=1}^{j=m}$  satisfaisant les conditions  $\hat{\alpha}^j$  présentées au paragraphe 0-3-1 dans le sens suivant :

$$\begin{cases} 1^\circ) E\{\hat{\alpha}^j(\cdot)\} = \alpha^j \\ 2^\circ) E\{|\hat{\alpha}^j(\cdot) - \alpha^j|^2\} = \min_{\tilde{\alpha}^j \in A_g^j} E\{|\tilde{\alpha}^j(\cdot) - \alpha^j|^2\} \end{cases}$$

De plus, ces  $m$  variables aléatoires  $\{\hat{\alpha}^j(\cdot)\}_{j=1}^{j=m}$  sont alors données en fonction des observations  $F_{\omega} \equiv g(\omega, \cdot)$  par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^1(\omega) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}^m(\omega) \end{bmatrix} &= [G]^{-1} \cdot \left( [V]^t \cdot [r]^{-1} \right) \cdot \begin{bmatrix} g(\omega, t_1) \\ g(\omega, t_2) \\ \vdots \\ g(\omega, t_N) \end{bmatrix} \\ \text{avec : } [G] &= [V]^t \cdot [r]^{-1} \cdot [V] \end{aligned} \right\}$$

### 0-4 - MOTIVATIONS ET ORGANISATION DU MEMOIRE

#### 0-4-1 - But de l'étude présentée

Nous venons d'exposer sans démonstration dans le cas particulier où  $T$  est un ensemble discret de  $N$  points  $t_i \in \mathbb{R}^n$ , deux méthodes qui, dans certains cas favorables, sont susceptibles de résoudre les deux problèmes présentés dans l'introduction.

Nous nous proposons maintenant d'étudier sous quelles conditions ces méthodes peuvent être étendues au cas où  $T$  est un compact quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .

#### 0-4-2 - Organisation du mémoire

##### a) Chapitres I et II

##### Chapitre I

Dans ce chapitre sont présentés les divers espaces utilisés dans toute la suite de l'ouvrage. Toutes les notions introduites sont très classiques et auraient très bien pu être résumées dans une annexe. En fait, si nous avons préféré rassembler tous ces rappels dans ce premier chapitre, c'est uniquement par souci de ne pas rompre la continuité de l'exposé.

##### Chapitre II

Ce chapitre est consacré à la construction d'estimations dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Ici encore, les notions présentées ne sont pas nouvelles dans leur fond sinon dans leur forme, exception faite du théorème II-2-5 qui constitue une généralisation du théorème de Gauss-Markov.

Remarque

Si on ne désire prendre connaissance dans ces deux chapitres que des notions indispensables à la bonne compréhension de la suite de l'exposé, on pourra se contenter de consulter les énoncés des propositions et définitions des paragraphes suivants :

chapitre I	{	I-2-1-a et b	chapitre II	[	II-2-1-a et b
		I-3-2-a			II-2-2-b
		I-3-1-a, b et c			II-3-1-a et b
					II-3-2-a
					II-3-3-a
					II-3-4-a
					II-3-5-a

b) Chapitre III

Ce chapitre qui est le plus important de ce mémoire expose de façon détaillée l'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique et le filtrage statistique présentés précédemment. Enfin, nous donnons au paragraphe III-6 un certain nombre d'exemples d'application qui permettent de se faire une idée objective de l'efficacité des méthodes proposées.

## Chapitre I

### ÉTUDE DES ESPACES $\mathfrak{M}_E(\Omega, \mathcal{A})$ , $\mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ET $L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

#### I-1 - INTRODUCTION

Nous nous proposons dans ce chapitre d'introduire les principaux outils mathématiques dont nous aurons besoin au cours de notre étude.

Tout d'abord, nous commencerons par présenter la notion d'application mesurable définie sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{A})$  et à valeur dans un espace topologique  $E$  muni de sa tribu Borélienne  $\mathcal{B}_E$  ; très rapidement, on est amené à supposer que :

- 1°)  $E$  est un espace vectoriel normé séparable afin d'assurer une structure d'espace vectoriel à l'ensemble  $\mathfrak{M}_E(\Omega, \mathcal{A})$  des applications mesurables ainsi définies.
- 2°)  $E$  est un Banach séparable de façon que la notion de  $\mu$ -moyenne d'une application  $X \in \mathfrak{M}_E(\Omega, \mathcal{A})$  par rapport à une mesure  $\mu$  positive normée définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  ait un sens.

En fait, pour ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous supposons d'entrée que  $E$  est un Banach séparable (ce qui implique que  $E$  est normé), car dans les applications que nous développerons au cours des chapitres ultérieurs, nous aurons effectivement besoin aussi bien de la structure d'espace vectoriel de  $\mathfrak{M}_E(\Omega, \mathcal{A})$  que de la notion de  $\mu$ -moyenne d'un élément  $X \in \mathfrak{M}_E(\Omega, \mathcal{A})$ .

Enfin, au cours de cet exposé, nous rappellerons brièvement les notions d'espaces  $\mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et  $L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  auxquelles nous nous référerons constamment aux second et troisième chapitres, espaces qui s'identifient aux classiques espaces  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  lorsque le Banach séparable  $E$  est identique au corps des complexes  $\mathbb{C}$ .

## I-2 - APPLICATIONS MESURABLES A VALEURS DANS UN BANACH SEPARABLE

### I-2.1 - Définitions

a) Espaces mesurables  $(\Omega, \mathcal{A})$  et  $(E, \mathcal{B}_E)$

#### Définitions

A partir de maintenant, et dans tout cet ouvrage, nous désignerons par  $(\Omega, \mathcal{A})$  et  $(E, \mathcal{B}_E)$  des espaces mesurables tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \text{ensemble quelconque} \\ \mathcal{A} = \text{tribu sur } \Omega \\ E = \text{espace de Banach séparable} \\ \mathcal{B}_E = \text{tribu borélienne sur } E \end{array} \right.$$

#### Remarques

1°) Remarquons que  $\mathcal{B}_E$  est en fait la tribu engendrée par les boules ouvertes de  $E$  puisque cet espace est normé.

2°) Remarquons également que le corps des complexes  $\mathbb{C}$  est un Banach séparable particulier auquel il nous arrivera fréquemment d'associer l'espace mesurable  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$  obtenu en posant  $E \equiv \mathbb{C}$ .

b) Notion d'application mesurable

#### Définition

Soit  $\mathcal{T}$  un espace topologique muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ . Par définition, on dit qu'une application  $X(\cdot)$  de  $\Omega$  dans  $\mathcal{T}$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathcal{T}, \mathcal{B}_{\mathcal{T}})$  si l'image inverse de tout borélien de  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$  appartient à  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire si l'on a :

$$\forall B_{\mathcal{T}} \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}} \Rightarrow X^{-1}(B_{\mathcal{T}}) \in \mathcal{A}$$

#### Ensemble $\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{A})$

Nous désignerons par  $\mathfrak{M}(\Omega, \mathcal{A})$  l'ensemble des applications mesurables de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathcal{T}, \mathcal{B}_{\mathcal{T}})$ . En particulier lorsque  $\mathcal{T}$  est identique à  $E$  ou  $\mathbb{C}$ , nous désignerons par  $\mathfrak{M}_E(\Omega, \mathcal{A})$  et  $\mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A})$  les ensembles d'applications mesurables de  $(\Omega, \mathcal{A})$  respectivement dans  $(E, \mathcal{B}_E)$  et  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ .

### Application étagée

Soit  $\{A_n\}$  une suite finie ou infinie dénombrable d'ensembles mesurables formant une partition de  $\Omega$  et soit  $\{1_{A_n}(\omega)\}$  la suite des fonctions caractéristiques d'ensembles associées. Par définition, on appelle "application  $\{A_n\}$  - étagée" ou plus simplement "application étagée" toute application de  $\Omega$  dans un espace topologique  $\mathcal{T}$  qui peut se mettre sous la forme ...

$$X(\omega) = \sum_n X_n \cdot 1_{A_n}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

... où  $\{X_n\}$  est une suite de vecteurs appartenant à  $\mathcal{T}$ .

Il est facile de vérifier qu'une telle application est nécessairement mesurable ; en effet, soit  $B_{\mathcal{T}}^i$  un borélien quelconque appartenant à  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$  et soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  le sous ensemble des vecteurs de  $\{X_n\}$  appartenant à  $B_{\mathcal{T}}^i$ , on a manifestement :

$$X^{-1}(B_{\mathcal{T}}^i) = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$$

### I-2.2 - Propriétés

a) Proposition 1

#### Enoncé

Soient  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}_1}$  et  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}_2}$  les tribus boréliennes de deux espaces topologiques  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$ . Si l'application  $X(\cdot)$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathcal{T}_1, \mathcal{B}_{\mathcal{T}_1})$ , et si  $\mathfrak{A}$  est une application continue de  $\mathcal{T}_1$  dans l'espace  $\mathcal{T}_2$ , alors l'application  $Y(\cdot) = \mathfrak{A}\{X(\cdot)\}$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathcal{T}_2, \mathcal{B}_{\mathcal{T}_2})$ .

#### Démonstration

L'application  $\mathfrak{A}$  de  $\mathcal{T}_1$  dans  $\mathcal{T}_2$  étant continue, il s'en suit que l'image inverse de tout ouvert de  $\mathcal{T}_2$  est un ouvert de  $\mathcal{T}_1$ ; on en déduit que l'image inverse de tout borélien de  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}_2}$  est un borélien de  $\mathcal{B}_{\mathcal{T}_1}$  puisque ces tribus sont engendrées respectivement par les ouverts des espaces  $\mathcal{T}_2$  et  $\mathcal{T}_1$  :

$$\forall B_{\mathcal{T}_2} \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}_2} \Rightarrow \mathfrak{A}^{-1}(B_{\mathcal{T}_2}) = B_{\mathcal{T}_1} \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}_1}$$

D'autre part,  $X(\cdot)$  étant par hypothèse mesurable, on en déduit que :

$$\forall B_{\mathcal{T}_1} \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}_1} \Rightarrow X^{-1}(B_{\mathcal{T}_1}) \in \mathcal{A}$$

Comme, en fait, l'application  $Y(\cdot)$  résulte de la composition de l'application  $X(\cdot)$  de  $\Omega$  dans  $\mathcal{K}$  et de l'application  $\mathbf{A}$  de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{K}_2$ , on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} Y(\cdot) &= \mathbf{A}(X(\cdot)) \\ \Rightarrow Y &= \mathbf{A} \circ X \\ \Rightarrow Y^{-1} &= X^{-1} \circ \mathbf{A}^{-1} \\ \Rightarrow Y^{-1}(B_{\tau_2}) &= X^{-1}\{\mathbf{A}^{-1}(B_{\tau_2})\} \quad \forall B_{\tau_2} \in \mathcal{B}_{\tau_2} \\ \Rightarrow Y^{-1}(B_{\tau_1}) &= X^{-1}\{B_{\tau_1}\} \quad \forall B_{\tau_1} \in \mathcal{B}_{\tau_1} \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $Y(\cdot)$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathcal{K}_2, \mathcal{B}_{\tau_2})$

#### b) Proposition 2

##### Enoncé

Soit  $E'$  le dual topologique du Banach séparable  $E$ .

Si l'application  $X(\cdot)$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(E, \mathcal{H}_E)$ , alors les applications ....

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \lambda, X(\cdot) \rangle \quad \text{avec} \quad \lambda \in E' \\ \|X(\cdot)\|_E^p \quad \text{avec} \quad 1 \leq p < +\infty \end{array} \right.$$

... sont mesurables de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ .

##### Démonstration

Les applications  $\langle \lambda, \cdot \rangle$  et  $\|\cdot\|_E$  étant continues de  $E$  dans  $\mathbb{C}$ , il s'en suit que l'on peut appliquer la proposition précédente, ce qui achève la démonstration.

#### c) Proposition 3

##### Enoncé

Si  $\Omega$  est un espace topologique muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_{\Omega}$ , alors toute application continue de  $\Omega$  dans  $E$  est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega})$  dans  $(E, \mathcal{H}_E)$ .

##### Démonstration

Soit  $X(\cdot)$  une application quelconque continue de  $\Omega$  dans  $E$  et soit  $I(\cdot)$  l'application identique de  $\Omega$  dans  $\Omega$ . L'application  $I(\cdot)$  étant manifestement mesurable de  $(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega})$  dans  $(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega})$ , il s'en suit, d'après la proposition I-2.2.a que l'on a effectivement :

$$X(\cdot) = X\{I(\cdot)\} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A})$$

#### d) Proposition 4

##### Enoncé

Si  $X(\cdot)$  et  $Y(\cdot)$  sont des applications appartenant à  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A})$  et si  $\mathcal{X}(\cdot)$  est une application appartenant à  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A})$ , alors les applications ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}(\cdot) \cdot X(\cdot) \\ \mathcal{X}(\cdot) + Y(\cdot) \end{array} \right.$$

... appartiennent à  $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A})$

##### Démonstration : Première partie

Soient  $U(\cdot)$  et  $V(\cdot)$  les applications de  $\Omega$  respectivement dans  $\mathbb{C} \times E$  et  $\mathbb{R} \times E$  telles que :

$$U(\cdot) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}(\cdot) \\ X(\cdot) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V(\cdot) = \begin{pmatrix} X(\cdot) \\ Y(\cdot) \end{pmatrix}$$

On démontre (cf. Parthasarathy page 6) que, puisque  $E$  et  $\mathbb{C}$  sont séparables, on a...

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_{\mathbb{C} \times E} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{H}_E \\ \mathcal{H}_{\mathbb{R} \times E} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{H}_E \end{array} \right.$$

... d'où l'on déduit que pour tout borélien  $B_{\mathbb{C}}$ ,  $B_E^1$ ,  $B_E^2$  appartenant à  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$  et pour tout borélien  $B_E$  appartenant à  $\mathcal{H}_E$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} U^{-1}(B_{\mathbb{C}} \times B_E) = \{ \omega \in \Omega : \mathcal{X}(\omega) \in B_{\mathbb{C}} \text{ et } X(\omega) \in B_E \} \\ V^{-1}(B_E^1 \times B_E^2) = \{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in B_E^1 \text{ et } Y(\omega) \in B_E^2 \} \end{array} \right. \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U^{-1}(B_{\mathbb{C}} \times B_E) = \{ \mathcal{X}^{-1}(B_{\mathbb{C}}) \cap X^{-1}(B_E) \} \in \mathcal{A} \\ V^{-1}(B_E^1 \times B_E^2) = \{ X^{-1}(B_E^1) \cap Y^{-1}(B_E^2) \} \in \mathcal{A} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Il s'en suit que les applications  $U$  et  $V$  sont mesurables.

Démonstration : Deuxième partie

telles que :

Soient  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$  les applications respectivement de  $(\mathbb{C} \times E)$  et  $(E \times E)$  dans  $E$

$$\forall \begin{cases} a \in \mathbb{C} \\ A \in E \\ B \in E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{P} \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} = a \cdot A \\ \mathcal{S} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = A + B \end{cases}$$

Si nous munissons  $(\mathbb{C} \times E)$  et  $(E \times E)$  des normes ...

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C} \times E} = \max \left\{ \|a\|_{\mathbb{C}}, \|A\|_E \right\}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right\|_{E \times E} = \max \left\{ \|A\|_E, \|B\|_E \right\}$$

... correspondant aux topologies produit sur ces espaces produits, on peut facilement vérifier que les applications  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$  sont continues :

1°) Vérifions tout d'abord que  $\mathcal{S}$  est continue de  $(E \times E)$  dans  $E$  ; en tout point  $\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$  de  $(E \times E)$ , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \mathcal{S} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} &= A + B - A_0 - B_0 \\ \Rightarrow \left\| \mathcal{S} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \mathcal{S} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \right\|_E &\leq \|A - A_0\|_E + \|B - B_0\|_E \\ \Rightarrow \left\| \mathcal{S} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \mathcal{S} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \right\|_{E \times E} &\leq 2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \right\|_{E \times E} \end{aligned}$$

On peut donc écrire pour tout  $\varepsilon > 0 \dots$

$$\left\| \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \right\|_{E \times E} < \varepsilon/2 \Rightarrow \left\| \mathcal{S} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - \mathcal{S} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \right\|_E \leq \varepsilon$$

... ce qui exprime la continuité de  $\mathcal{S}$  au point  $\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$ .

2°) Vérifions maintenant que  $\mathcal{P}$  est continue de  $(\mathbb{C} \times E)$  dans  $E$  ; en tout point  $\begin{pmatrix} a_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$  appartenant à  $(\mathbb{C} \times E)$ , on a :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} A &= A_0 + H \\ a &= a_0 + h \end{aligned} \right\} &\Rightarrow aA = (A_0 + H) \cdot (a_0 + h) = A_0 a_0 + A_0 h + H a_0 + H h \\ &\Rightarrow aA - a_0 A_0 = A_0 h + H a_0 + H h \\ &\Rightarrow \|aA - a_0 A_0\|_E \leq |h| \cdot \|A_0\|_E + \|H\|_E \cdot |a_0| + \|H\|_E \cdot |h| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \mathcal{P} \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} - \mathcal{P} \begin{pmatrix} a_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right\|_E \leq \nu^2 + \nu \cdot (\|A_0\|_E + |a_0|)$$

avec  $\nu = \max \{ \|H\|_E, |h| \} = \left\| \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C} \times E}$

Il s'en suit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a ...

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C} \times E} \leq \eta \Rightarrow \left\| \mathcal{P} \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} - \mathcal{P} \begin{pmatrix} a_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right\|_E < \varepsilon$$

avec  $0 < 2\eta \leq -(\|A_0\|_E + |a_0|) + \sqrt{(\|A_0\|_E + |a_0|)^2 + 4\varepsilon}$

... ce qui exprime la continuité de  $\mathcal{P}$  au point  $\begin{pmatrix} a_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$ .

Démonstration : Troisième partie

Puisque les applications  $U(\cdot)$  et  $V(\cdot)$  introduites dans la première partie sont mesurables de  $(\Omega, \mathcal{A})$  respectivement dans  $(\mathbb{C} \times E, \mathcal{B}_{\mathbb{C} \times E})$  et  $(E \times E, \mathcal{B}_{E \times E})$ , et puisque les applications  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{S}$  introduites dans la deuxième partie sont continues respectivement de  $(\mathbb{C} \times E)$  et  $(E \times E)$  dans  $E$ , il s'en suit d'après la proposition I-2.2.a que l'on a :

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} \mathcal{P} \circ U \\ \mathcal{S} \circ V \end{aligned} \right\} \text{ mesurables de } (\Omega, \mathcal{A}) \text{ dans } (E, \mathcal{B}_E) \\ \Rightarrow &\left\{ \begin{aligned} x(\cdot) \cdot X(\cdot) \\ X(\cdot) + Y(\cdot) \end{aligned} \right\} \text{ mesurables de } (\Omega, \mathcal{A}) \text{ dans } (E, \mathcal{B}_E) \end{aligned}$$

e) Proposition 5

Énoncé

La famille  $\mathcal{M}_e(\Omega, \mathcal{A})$  des applications mesurables de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(E, \mathcal{B}_E)$  constitue un espace vectoriel.

Démonstration

La démonstration est évidente compte tenu de la proposition précédente ; en effet, si on considère les nombres complexes comme des applications (mesurables) constantes de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ , on a :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{C} \\ b \in \mathbb{C} \\ X(\cdot) \in \mathfrak{M}_k(\Omega, \mathcal{A}) \\ Y(\cdot) \in \mathfrak{M}_k(\Omega, \mathcal{A}) \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot X(\cdot) + b \cdot Y(\cdot) \in \mathfrak{M}_k(\Omega, \mathcal{A})$$

f) Proposition 6

Énoncé

Pour toute application  $X(\cdot)$  appartenant à  $\mathfrak{M}_k(\Omega, \mathcal{A})$  il existe au moins une suite d'applications étagées  $X_k(\cdot)$  convergeant uniformément vers  $X(\cdot)$  et telle que :

$$\forall \omega \in \Omega \Rightarrow \|X_k(\omega)\|_E < \|X(\omega)\|_E$$

Démonstration : Première partie

Puisque  $E$  est séparable, il existe un ensemble dénombrable  $\{X_n\} \equiv \{X_1, X_2, \dots\}$  partout dense dans  $E$  ; soit donc  $B_n^k$  et  $C_n^k$  des parties de  $E$  telles que l'entier positif  $k$  étant fixé on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_n^k = \text{boule ouverte de centre } X_n \in \{X_n\} \text{ et de rayon } 1/2k \\ C_n^k = B_n^k \cap \left[ \bigcup_{m < n} B_m^k \right]^c \end{array} \right.$$

Puisque  $\{X_n\}$  est dense dans  $E$ , c'est que  $E$  est l'ensemble des points adhérents à  $\{X_n\}$ , ce qui nous permet d'affirmer que tout voisinage d'un point  $X \in E$  contient au moins un point de  $\{X_n\}$ . Mais, du fait que  $E$  est supposé normé, il est en particulier métrique (pour la distance associée à la norme) et les boules ouvertes sont des voisinages ; si bien que l'on est assuré que pour tout point  $X$  fixé dans  $E$ , la boule ouverte de rayon  $1/2k$  centrée au point  $X \in E$  contient un sous ensemble non vide  $\{X_{n_i}\}$  de points appartenant à  $\{X_n\}$  :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} X \in E \\ k \end{array} \right\} \text{ fixés} \Rightarrow \|X - X_{n_i}\| < 1/2k \quad \forall X_{n_i} \in \{X_{n_i}\} \\ \Rightarrow X \in B_{n_i}^k \quad \forall X_{n_i} \in \{X_{n_i}\}$$

Si l'on range les points  $X_{n_i}$  du sous-ensemble  $\{X_{n_1}\}$  de  $\{X_n\}$  de façon que l'on ait ...

$$n_0 < n_1 < \dots < n_i < \dots$$

... il est manifeste que  $X_{n_0}$  est tel que :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} X \in E \\ k \end{array} \right\} \text{ fixés} \Rightarrow \exists X_{n_0} \in \{X_{n_i}\} \text{ tel que : } \left\{ \begin{array}{l} X \in B_{n_0}^k \\ X \notin B_m^k \quad \forall m < n_0 \end{array} \right.$$

Puisque  $\{X_{n_1}\}$  est inclus dans  $\{X_n\}$ , il s'en suit que  $X_{n_0}$  appartient à  $\{X_n\}$  et que l'on peut écrire, compte tenu de la définition des ensembles  $C_n^k$  :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} X \in E \\ k \end{array} \right\} \text{ fixés} \Rightarrow \exists C_{n_0}^k \text{ tel que } X \in C_{n_0}^k$$

Comme les ensembles  $C_n^k$  sont disjoints de par leur définition, on en déduit donc qu'ils forment pour  $k$  fixé une partition de  $E$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m^k \cap C_n^k = \emptyset \quad \forall m \neq n \\ \bigcup_n C_n^k = E \end{array} \right.$$

Si l'on se souvient que  $\mathcal{B}_E$  est engendré par les boules ouvertes de  $E$ , on en déduit immédiatement, d'après les propriétés des tribus, que les ensembles  $C_n^k$  sont des boréliens. Il s'en suit, puisque  $X(\cdot)$  est par hypothèse mesurable, que les ensembles  $A_n^k = X^{-1}(C_n^k)$  appartiennent à la tribu  $\mathcal{A}$  et sont de plus disjoints ; en effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{-1}(C_n^k) = \{ \omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \in C_n^k \} \\ X^{-1}(C_m^k) = \{ \omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \in C_m^k \} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X^{-1}(C_n^k) \cap X^{-1}(C_m^k) &= \{ \omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \in C_n^k \cap C_m^k \} \\ \Rightarrow X^{-1}(C_n^k) \cap X^{-1}(C_m^k) &= \{ \omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \in \emptyset \} \quad \forall m \neq n \\ \Rightarrow X^{-1}(C_n^k) \cap X^{-1}(C_m^k) &= \emptyset \quad \forall m \neq n \end{aligned}$$

Comme de plus on a ....

$$X^{-1}\left(\bigcup_n C_n^k\right) = X^{-1}(E) = \{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in E \} = \Omega$$

... On peut donc écrire :

$$\begin{cases} A_n^k = X^{-1}(C_n^k) \in \mathcal{A} \dots \forall n \\ A_n^k \cap A_m^k = \emptyset \dots \forall m \neq n \\ \bigcup_n A_n^k = \Omega \end{cases}$$

Démonstration : Deuxième partie

Passons maintenant à la deuxième partie de la démonstration et considérons l'application étagée  $X_k(\cdot)$  définie par la relation suivante :

$$\begin{cases} X_k(\cdot) = \sum_n X(\omega_n^k) \cdot 1_{A_n^k}(\cdot) \\ \text{avec } \omega_n^k = \text{point quelconque appartenant à } A_n^k \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in A_n^k \\ n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} X_k(\omega) = X(\omega_n^k) \in C_n^k \\ X(\omega) \in C_n^k \end{cases}$$

Compte tenu que  $C_n^k$  est par construction inclus dans  $B_n^k$ , on a alors les implications ci-dessous :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in A_n^k \\ n \end{array} \right\} \text{ on a : } \begin{cases} X_k(\omega) \in B_n^k \\ X(\omega) \in B_n^k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in A_n^k \\ n \end{array} \right\} \text{ on a : } \begin{cases} \|X_k(\omega) - X_n\|_E < 1/2k \\ \|X(\omega) - X_n\|_E < 1/2k \end{cases}$$

Mais on peut toujours écrire l'inégalité triangulaire suivante :

$$\|X_k(\omega) - X(\omega)\|_E \leq \|X_k(\omega) - X_n\|_E + \|X_n - X(\omega)\|_E \quad \forall \omega \in \Omega$$

Il s'en suit que l'on a :

$$\forall n \Rightarrow \|X_k(\omega) - X(\omega)\|_E < 1/k \quad \forall \omega \in A_n^k$$

Cette dernière relation implique l'inégalité ...

$$\sup_{\omega \in \Omega} \|X_k(\omega) - X(\omega)\|_E < 1/k$$

... d'où l'on conclut que  $X_k(\cdot)$  converge uniformément vers  $X(\cdot)$  lorsque  $k$  tend vers l'infini.

Enfin, si l'on choisit les  $\omega_n^k \in A_n^k$  de telle façon que ...

$$\|X(\omega_n^k)\|_E \leq \|X(\omega)\|_E \quad \forall \omega \in A_n^k$$

... il s'en suit que l'on a :

$$\|X_k(\omega)\|_E \leq \|X(\omega)\|_E \quad \forall \omega \in \Omega$$

g) Remarque

On ne manquera pas de remarquer que  $\mathfrak{m}_\epsilon(\Omega, \mathcal{A})$  est en fait un sous-espace vectoriel appartenant à l'espace  $\mathcal{B}(\Omega, E)$  des applications bornées définies sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $E$  ; en effet,  $E$  étant lui-même un espace vectoriel normé, il s'en suit qu'il ne contient aucun vecteur de norme infini car sinon la somme de deux tels vecteurs n'aurait en général aucun sens.

Comme de plus, l'expression...

$$\forall X(\cdot) \in \mathcal{B}(\Omega, E) \Rightarrow \|X(\cdot)\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\omega \in \Omega} \|X(\omega)\|_E$$

... définit une norme sur  $\mathcal{B}(\Omega, E)$  appelée "norme de la convergence uniforme", il s'en suit que  $\mathfrak{m}_\epsilon(\Omega, \mathcal{A})$  lui-même peut être considéré comme un espace vectoriel normé si on le munit de la norme  $\|\cdot\|_{\mathfrak{m}_\epsilon}$  induite par  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$  sur  $\mathfrak{m}_\epsilon(\Omega, \mathcal{A})$  :

$$\forall X(\cdot) \in \mathfrak{m}_\epsilon(\Omega, \mathcal{A}) \Rightarrow \|X(\cdot)\|_{\mathfrak{m}_\epsilon} = \sup_{\omega \in \Omega} \|X(\omega)\|_E$$

I-3 - ESPACES  $\mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ET  $L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

1-3.1 - Définitions et propriétés fondamentales

a) Espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

Dans tout ce qui suit, le triplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  désignera un espace mesuré pour lequel  $\mu$  est une mesure positive normée définie sur  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{cases} 1^\circ) & 0 \leq \mu(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A} \\ 2^\circ) & \mu(\Omega) = 1 \end{cases}$$

En langage probabiliste, dans le cas où  $\Omega$  représente un ensemble d'évènements élémentaires, nous dirions que  $\mu$  est une mesure de probabilité, ou plus simplement une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

b) Espace  $\mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

Remarque préliminaire

Soit un réel fini  $p \geq 1$ . Nous savons d'après la proposition I-2.2.b que  $\|X(\cdot)\|_E^p \in \mathfrak{M}_0(\Omega, \mathcal{A})$  pour toute application  $X(\cdot) \in \mathfrak{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ ; on en déduit que l'intégrale ...

$$\int_{\Omega} \|X(\omega)\|_E^p \cdot \mu(d\omega)$$

... a toujours un sens si  $X(\cdot)$  appartient à  $\mathfrak{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$ .

Définition

Soit un réel fini  $p \geq 1$ . Nous désignerons par  $\mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  l'espace vectoriel des applications  $X(\cdot)$  de  $\Omega$  dans  $E$  telles que :

$$\begin{cases} 1^\circ) & X(\cdot) \in \mathfrak{M}_1(\Omega, \mathcal{A}) \\ 2^\circ) & \int_{\Omega} \|X(\omega)\|_E^p \mu(d\omega) < +\infty \end{cases}$$

Compte tenu que  $\mu$  est une mesure positive bornée, on démontre sans difficulté, à l'aide de l'inégalité de Hölder, que l'on a la relation d'inclusion suivante :

$$\mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subset \mathcal{L}_E^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \quad \forall p < q$$

c) Espace  $L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

Considérons la relation d'équivalence notée  $\sim$  et définie comme suit sur l'espace  $\mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  :

$$X(\cdot) \sim Y(\cdot) \iff \begin{cases} X(\cdot) \in \mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ Y(\cdot) \in \mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ X(\omega) = Y(\omega) \quad \mu-p.p. \end{cases}$$

Par définition,  $L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  désigne l'espace quotient de  $\mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  par la relation d'équivalence  $\sim$  :

$$L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) / \sim$$

Il s'en suit que les vecteurs  $X(\cdot)$  de l'espace  $L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ainsi défini sont en fait des classes d'équivalence d'applications appartenant à  $\mathfrak{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$  et égales  $\mu$ -presque partout :

$$X(\cdot) \in L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \iff X_1(\cdot) \sim X_2(\cdot) \quad \forall \left\{ \begin{matrix} X_1(\cdot) \\ X_2(\cdot) \end{matrix} \right\} \in X(\cdot)$$

De plus, la relation d'inclusion des espaces  $\mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  induit sur les espaces  $L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  une relation du même type :

$$L_E^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subset L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \quad \forall p < q$$

d) Notations

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, nous adopterons les notations condensées suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \equiv \mathcal{L}_E^p \\ L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \equiv L_E^p \\ \mathcal{L}_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \equiv \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \equiv \mathcal{L}^p \\ L_E^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \equiv L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \equiv L^p \end{cases}$$

De plus, lorsque  $E$  est identique au corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, nous désignerons systématiquement les éléments des espaces  $\mathcal{L}^p$  et  $L^p$  par des lettres minuscules afin de mieux les distinguer des vecteurs appartenant à d'autres espaces.

e) Propriétés classiques de  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

1°) Si deux applications  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , alors leur produit appartient à  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  :

$$\forall \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

2°) Si deux classes d'équivalence  $X_1$  et  $X_2$  appartiennent à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  alors leur produit appartient à  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  :

$$\forall \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow X_1 \cdot X_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

3°) Les espaces  $L^p$  sont des espaces complets si on les munit de la norme suivante :

$$\|x\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |x(\omega)|^p \cdot \mu(d\omega) \right]^{1/p}$$

De plus,  $L^2$  muni du produit scalaire ...

$$\langle x_1 | x_2 \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} x_1(\omega) \cdot \overline{x_2(\omega)} \mu(d\omega)$$

... est un espace de Hilbert.

f) Définition

Énoncé

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux Banach séparables. Pour toute application  $\mathfrak{A}$  linéaire continue de  $E_1$  dans  $E_2$  et pour toute classe  $X(\cdot)$  appartenant à  $L^p_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  nous poserons par définition :

$$\mathfrak{A}\{X(\cdot)\} = \left\{ Y(\cdot) \in \mathfrak{M}_{E_2} \text{ tels que } \exists X(\cdot) \in X(\cdot) : Y(\omega) = \mathfrak{A}\{X(\omega)\} \text{ u. p. p.} \right\}$$

Remarque

La définition précédente implique en particulier que l'on ait :

$$\forall \begin{Bmatrix} X(\cdot) \in L^p_{E_1} \\ \lambda \in E_1' \end{Bmatrix} \Rightarrow \langle \lambda, X(\cdot) \rangle = \left\{ y(\cdot) \in \mathfrak{M}_c \text{ tels que } \exists X(\cdot) \in X(\cdot) : y(\omega) = \langle \lambda, X(\omega) \rangle \text{ u. p. p.} \right\}$$

g) Propriété de correspondance

Énoncé

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux Banach séparables et soit  $\mathfrak{A}$  une application linéaire continue de  $E_1$  dans  $E_2$ .

Dans ces conditions, on a les implications suivantes :

$$\begin{cases} \forall X(\cdot) \in L^p_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow \mathfrak{A}\{X(\cdot)\} \in L^p_{E_2}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ \forall X(\cdot) \in L^p_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow \mathfrak{A}\{X(\cdot)\} \in L^p_{E_2}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{cases}$$

Démonstration : Première partie

Dans ce qui suit, nous désignerons par  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(E_1, E_2)$  l'espace de Banach des applications linéaires continues de l'espace vectoriel normé  $E_1$  dans l'espace vectoriel normé  $E_2$ . Ceci dit, pour tout  $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}$  on a :

$$\|\mathfrak{A}\{X(\omega)\}\|_{E_2} \leq \|\mathfrak{A}\|_{\mathcal{L}} \cdot \|X(\omega)\|_{E_1} \quad \forall \omega \in \Omega$$

Compte tenu de la proposition I-2.2.a, on est assuré que  $\mathfrak{A}\{X(\cdot)\}$  appartient à  $\mathfrak{M}_{E_2}(\Omega, \mathcal{A})$ , d'où l'on déduit d'après la proposition I-2.2.b que  $\|\mathfrak{A}\{X(\cdot)\}\|_{E_2}^p$  appartient à  $\mathfrak{M}_c(\Omega, \mathcal{A})$ . Il s'en suit donc que l'intégrale ...

$$\int_{\Omega} \|\mathfrak{A}\{X(\cdot)\}\|_{E_2}^p \cdot \mu(d\omega)$$

... a un sens. On peut alors écrire :

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \|\mathfrak{A}\{X(\omega)\}\|_{E_2}^p \cdot \mu(d\omega) \leq \|\mathfrak{A}\|_{\mathcal{L}}^p \cdot \int_{\Omega} \|X(\omega)\|_{E_1}^p \cdot \mu(d\omega)$$

Comme, d'autre part, on a ....

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{A} \in \mathcal{L}(E_1, E_2) \\ X(\cdot) \in L^p_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|\mathfrak{A}\|_{\mathcal{L}} < +\infty \\ \int_{\Omega} \|X(\omega)\|_{E_1}^p \cdot \mu(d\omega) < +\infty \end{array} \right.$$

Il s'en suit que l'on peut écrire les implications suivantes :

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \|\mathfrak{A}\{X(\omega)\}\|_{E_2}^p \cdot \mu(d\omega) < +\infty$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A}\{X(\omega)\} \in L^p_{E_2}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

Démonstration : Deuxième partie

$\mathfrak{A}$  étant linéaire continu de  $E_1$  dans  $E_2$ , il s'en suit que si  $\Theta_{E_1}$  et  $\Theta_{E_2}$  désignent respectivement les vecteurs nuls de  $E_1$  et  $E_2$ , alors on a :

$$\Theta_{E_2} = \mathfrak{A}(\Theta_{E_1})$$

Si  $X(\cdot)$  est une classe d'équivalence appartenant à  $L^p_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , on peut donc écrire les implications suivantes :

$$\begin{aligned} \{ X_1(\cdot) \text{ et } X_2(\cdot) \} \in X(\cdot) &\Rightarrow X_1(\omega) - X_2(\omega) = \Theta_{E_1} \mu\text{-p.p.} \\ \Rightarrow \mathfrak{A}\{ X_1(\omega) \} - \mathfrak{A}\{ X_2(\omega) \} &= \mathfrak{A}\{ X_1(\omega) - X_2(\omega) \} = \Theta_{E_2} \mu\text{-p.p.} \\ \Rightarrow \mathfrak{A}\{ X_1(\omega) \} &= \mathfrak{A}\{ X_2(\omega) \} \quad \mu\text{-p.p.} \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a ...

$$\forall X(\cdot) \in X(\cdot) \Rightarrow \mathfrak{A}\{ X(\cdot) \} \in \mathfrak{A}\{ X(\cdot) \}$$

... d'où il découle que :

$$X(\cdot) \in L^p_{E_1} \Rightarrow \mathfrak{A}\{ X(\cdot) \} \in L^p_{E_2}$$

h) Remarque

On déduit immédiatement de la proposition précédente que pour toute fonctionnelle linéaire  $\lambda \in E'$  on a :

$$\begin{cases} \forall X(\cdot) \in L^p_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow \langle \lambda, X(\cdot) \rangle \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ \forall X(\cdot) \in L^p_{E_2}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow \langle \lambda, X(\cdot) \rangle \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{cases}$$

i) Proposition

Enoncé

Les implications suivantes sont toujours vérifiées :

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} X(\cdot) \in L^2_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ x(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{array} \right\} &\Rightarrow x(\cdot) \cdot X(\cdot) \in L^1_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ \left. \begin{array}{l} X(\cdot) \in L^2_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ X(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{array} \right\} &\Rightarrow X(\cdot) \cdot X(\cdot) \in L^1_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{aligned}$$

Démonstration

Soient  $x(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et  $X(\cdot) \in L^2_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ; On sait d'après la proposition I-2.2.d que le produit  $x(\cdot) \cdot X(\cdot)$  appartient à  $M_1(\Omega, \mathcal{A})$ . D'autre part, on peut toujours écrire :

$$\| x(\omega) \cdot X(\omega) \|_E = | x(\omega) | \cdot \| X(\omega) \|_E \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\text{mais } \left\{ \begin{array}{l} X(\cdot) \in L^2_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ x(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \| X(\cdot) \|_E \\ | x(\cdot) | \end{array} \right\} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

Comme on sait (cf. I-3.1.e) que le produit de deux applications appartenant à  $\mathcal{L}^2$  est une application appartenant à  $\mathcal{L}^1$ , il s'en suit que l'on a :

$$\Rightarrow | x(\cdot) | \cdot \| X(\cdot) \|_E \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

$$\Rightarrow \| x(\cdot) \cdot X(\cdot) \|_E \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \| x(\omega) \cdot X(\omega) \|_E \mu(d\omega) < +\infty$$

$$\Rightarrow x(\cdot) \cdot X(\cdot) \in L^1_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

Enfin, si  $x(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , et  $X(\cdot) \in L^2_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , alors - compte tenu de ce qui vient d'être démontré - on a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall X(\cdot) \in X(\cdot) \\ \forall x(\cdot) \in x(\cdot) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X(\cdot) \in L^2_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ x(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x(\cdot) \cdot X(\cdot) \in L^1_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

$$\Rightarrow X(\cdot) \cdot X(\cdot) \in L^1_{E_1}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

I-3.2 -  $\mu$ -moyenne d'une application  $X(\cdot) \in \mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

a) Définition constructive

Enoncé

Soient  $X(\cdot)$  une application appartenant à  $\mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et soit ...

$$X_k(\cdot) = \sum_n X_n^k \cdot 1_{A_n^k}(\cdot)$$

... une suite quelconque d'applications étagées convergeant uniformément vers  $X(\cdot)$ .

Par définition, nous appellerons  $\mu$ -moyenne de  $X(\cdot)$  ou plus simplement moyenne de  $X(\cdot)$ , le vecteur  $M\{X(\cdot)\}$  appartenant à  $E$  et tel que :

$$M\{X(\cdot)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_n X_n^k \cdot \mu(A_n^k)$$

Cette limite existe toujours, est unique, et ne dépend pas de la suite particulière  $\{X_k(\cdot)\}$  choisie. Par définition, nous appellerons "opérateur de  $\mu$ -moyenne" l'application  $M$  ainsi définie.

Démonstration : Première partie

D'après la proposition I-2.2.f, on peut toujours trouver une suite d'applications étagées  $\{X_k(\cdot)\}$  convergeant uniformément vers  $X(\cdot) \in \mathcal{L}_E^1$  et telle que :

$$(\alpha) \begin{cases} X_k(\cdot) = \sum_n X_n^k \cdot 1_{A_n^k}(\cdot) \\ \|X_k(\omega)\|_E \leq \|X(\omega)\|_E \quad \forall \omega \in \Omega \end{cases}$$

Compte tenu que l'on a toujours ...

$$\left| \|X_k(\omega)\|_E - \|X(\omega)\|_E \right| \leq \|X_k(\omega) - X(\omega)\|_E \quad \forall \omega \in \Omega$$

... on en déduit que l'on a l'implication suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k(\cdot) = X(\cdot)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|X_k(\cdot)\|_E = \|X(\cdot)\|_E$$

D'autre part, d'après la proposition I-2.2.b, on sait que la norme d'une application mesurable est mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$  et que, par conséquent, les expressions suivantes ont un sens :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \|X(\omega)\|_E \cdot \mu(d\omega) & \text{existe} \\ \int_{\Omega} \|X_k(\omega)\|_E \cdot \mu(d\omega) & \text{existe} \end{cases}$$

Mais, puisque  $\{\|X_k(\cdot)\|_E\}$  est une suite d'applications mesurables convergeant vers  $\|X(\cdot)\|_E$  et que chaque terme de cette suite est majoré par l'application intégrable  $\|X(\cdot)\|_E$ , on en déduit que l'on a, d'après le théorème de la convergence majorée de Lebesgue :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|X_k(\omega)\|_E \cdot \mu(d\omega) = \int_{\Omega} \|X(\omega)\|_E \cdot \mu(d\omega)$$

Compte tenu que ...

$$\|X_k(\cdot)\|_E = \sum_n \|X_n^k\|_E \cdot 1_{A_n^k}(\cdot)$$

... est une fonction numérique positive étagée, il s'en suit alors que l'on peut écrire :

$$\int_{\Omega} \|X_k(\omega)\|_E \cdot \mu(d\omega) = \sum_n \|X_n^k\|_E \cdot \mu(A_n^k)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_n \|X_n^k\|_E \cdot \mu(A_n^k) = \int_{\Omega} \|X(\omega)\|_E \cdot \mu(d\omega)$$

Mais comme par hypothèse  $X(\cdot)$  appartient à  $\mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , on sait par définition de  $\mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  que l'on a :

$$\begin{aligned} X(\cdot) \in \mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \|X(\omega)\|_E \cdot \mu(d\omega) < +\infty \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_n \|X_n^k\|_E \cdot \mu(A_n^k) &< +\infty \end{aligned}$$

On est donc assuré que :

$$\exists K < +\infty : \forall k \geq K \Rightarrow \sum_n \|X_n^k\|_E \cdot \mu(A_n^k) < +\infty$$

Il s'en suit que la série  $\sum_n X_n^k \cdot \mu(A_n^k)$  est normalement convergente et, puisque  $E$  est un Banach, on en déduit que l'on a :

$$(\beta) \exists K < +\infty : \forall k \geq K \Rightarrow \sum_n X_n^k \cdot \mu(A_n^k) \begin{cases} \text{existe} \\ \text{converge} \\ \text{appartient à } E \end{cases}$$

Démonstration : Deuxième partie

On sait, d'après la proposition I-2.2.f que l'ensemble des suites d'applications étagées convergeant uniformément vers  $X(\cdot)$  et vérifiant les relations (a) (cf. première partie de la démonstration) n'est pas vide. Soient donc  $\{X_h^1(\cdot)\}$  et  $\{X_k^2(\cdot)\}$  deux suites d'applications étagées (éventuellement identiques) de ce type, on est alors assuré qu'il existe deux fonctions positives  $\varepsilon^1(h)$  et  $\varepsilon^2(k)$  pour lesquelles on a :

$$(\alpha') \quad \begin{cases} \sup_{\omega \in \Omega} \|X_h^1(\omega) - X(\omega)\|_E \leq \varepsilon^1(h) & \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \varepsilon^1(h) = 0 \\ \sup_{\omega \in \Omega} \|X_k^2(\omega) - X(\omega)\|_E \leq \varepsilon^2(k) & \text{avec} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon^2(k) = 0 \end{cases}$$

Si maintenant nous posons ...

$$\begin{cases} X_h^1(\cdot) = \sum_m X_m^h \cdot I_{A_m^h}(\cdot) \\ X_k^2(\cdot) = \sum_n X_n^k \cdot I_{A_n^k}(\cdot) \end{cases}$$

... on peut alors, comme le fait Fréchet (cf. Fréchet) introduire les vecteurs  $S_h^1$  et  $S_k^2$  tels que :

$$\begin{cases} S_h^1 = \sum_m X_m^h \cdot \mu(A_m^h) \\ S_k^2 = \sum_n X_n^k \cdot \mu(A_n^k) \end{cases}$$

Compte tenu de la relation (β) démontrée dans la première partie de la démonstration, on est assuré que ces vecteurs  $S_h^1$  et  $S_k^2$  existent toujours et appartiennent à  $E$ , au moins à partir d'un certain rang.

D'autre part, compte tenu que l'on a ...

$$\bigcup_m A_m^h = \bigcup_n A_n^k = \Omega$$

... on peut écrire :

$$\begin{cases} A_m^h = A_m^h \cap \left[ \bigcup_n A_n^k \right] \\ A_n^k = A_n^k \cap \left[ \bigcup_m A_m^h \right] \end{cases}$$

En désignant par  $\sum'$  les sommations réduites aux termes de mesure non nulle, on a alors :

$$\begin{cases} \mu(A_m^h) = \sum'_n \mu(A_m^h \cap A_n^k) \\ \mu(A_n^k) = \sum'_m \mu(A_m^h \cap A_n^k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_h^1 - S_k^2 = \sum'_{m,n} \{ X_m^h - X_n^k \} \cdot \mu(A_m^h \cap A_n^k)$$

Soit  $\omega_{m,n}^{h,k}$  un point appartenant à l'ensemble  $(A_m^h \cap A_n^k)$  supposé de mesure non nulle, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_h^1 - S_k^2 &= \sum'_{m,n} \{ X_m^h - X(\omega_{m,n}^{h,k}) \} \cdot \mu(A_m^h \cap A_n^k) \\ &\quad + \sum'_{m,n} \{ X(\omega_{m,n}^{h,k}) - X_n^k \} \cdot \mu(A_m^h \cap A_n^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|S_h^1 - S_k^2\|_E &\leq \sum'_{m,n} \|X_m^h - X(\omega_{m,n}^{h,k})\|_E \cdot \mu(A_m^h \cap A_n^k) \\ &\quad + \sum'_{m,n} \|X(\omega_{m,n}^{h,k}) - X_n^k\|_E \cdot \mu(A_m^h \cap A_n^k) \end{aligned}$$

Puisque  $\omega_{m,n}^{h,k} \in (A_m^h \cap A_n^k)$ , on sait d'après les relations (α') et (α) que l'on a ...

$$\begin{cases} \|X_m^h - X(\omega_{m,n}^{h,k})\|_E = \|X_m^h(\omega_{m,n}^{h,k}) - X(\omega_{m,n}^{h,k})\|_E \leq \sup_{\omega \in \Omega} \|X_h^1(\omega) - X(\omega)\|_E \leq \varepsilon^1(h) \\ \|X_n^k - X(\omega_{m,n}^{h,k})\|_E = \|X_n^k(\omega_{m,n}^{h,k}) - X(\omega_{m,n}^{h,k})\|_E \leq \sup_{\omega \in \Omega} \|X_k^2(\omega) - X(\omega)\|_E \leq \varepsilon^2(k) \end{cases}$$

... d'où l'on déduit :

$$\Rightarrow \|S_h^1 - S_k^2\|_E \leq \{ \varepsilon^1(h) + \varepsilon^2(k) \} \cdot \sum'_{m,n} \mu(A_m^h \cap A_n^k)$$

Compte tenu que ...

$$\sum'_{m,n} \mu(A_m^h \cap A_n^k) = \sum'_n \mu(A_n^k) = \mu(\Omega) = 1$$

... il vient :

$$(V) \quad \| S_h^1 - S_k^2 \|_E \leq \{ \varepsilon^1(h) + \varepsilon^2(k) \}$$

Démonstration : Troisième partie

1°) Supposons que la suite  $\{ X_k^2(\cdot) \}$  soit identique à la suite  $\{ X_h^1(\cdot) \}$  il s'en suit que les suites  $\{ S_h^1 \}$  et  $\{ S_k^2 \}$  associées sont elles aussi identiques, et la relation (V) établie dans la deuxième partie de la démonstration s'écrit alors sous la forme suivante :

$$(V)' \quad \| S_h^1 - S_k^1 \|_E \leq \{ \varepsilon^1(h) + \varepsilon^1(k) \}$$

On en conclut que toute suite  $\{ S_h^1 \}$  associée à une suite d'applications étagées  $\{ X_h^1(\cdot) \}$  convergeant uniformément vers  $X(\cdot)$  vérifie le critère de Cauchy et converge donc vers un vecteur de  $E$  puisque  $E$  est un Banach ; soit  $M^1\{ X(\cdot) \}$  ce vecteur, on a alors :

$$M^1\{ X(\cdot) \} = \lim_{h \rightarrow \infty} S_h^1$$

2°) Si  $\{ X_k^2(\cdot) \}$  est une suite distincte de  $\{ X_h^1(\cdot) \}$  on peut, par un raisonnement identique à celui effectué ci-dessus, lui associer un vecteur  $M^2\{ X(\cdot) \}$  tel que :

$$M^2\{ X(\cdot) \} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^2$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \| M^1\{ X(\cdot) \} - M^2\{ X(\cdot) \} \|_E &= \lim_{h \rightarrow \infty} \| S_h^1 - \lim_{k \rightarrow \infty} S_k^2 \|_E \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \| S_h^1 - S_k^2 \|_E \\ &\leq \lim_{\substack{h \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \{ \varepsilon^1(h) + \varepsilon^2(k) \} = 0 \end{aligned}$$

On en conclut que les vecteurs  $M^1\{ X(\cdot) \}$  et  $M^2\{ X(\cdot) \}$  sont identiques et ne dépendent pas des suites d'applications étagées convergeant uniformément vers  $X(\cdot)$  qui ont permis de les construire ; c'est la valeur commune  $M\{ X(\cdot) \}$  de ces deux vecteurs que l'on appelle  $\mu$ -moyenne de  $X(\cdot)$ .

b) Remarque

Dans le cas particulier où  $E \equiv \mathbb{C}$ , on vérifie sans peine (cf. Halmos § 25) que la notion de  $\mu$ -moyenne ainsi définie est identique à la notion classique d'intégrale de Lebesgue sur le domaine  $\Omega$  par rapport à une mesure  $\mu$  :

$$\forall x(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow M\{ x(\cdot) \} = \int_{\Omega} x(\omega) \cdot \mu(d\omega)$$

De plus, compte tenu des propriétés de l'intégrale de Lebesgue et du fait que  $\mu$  est bornée, on en déduit que sur  $\mathcal{L}^1$  muni de la norme de la convergence uniforme, l'opérateur  $M$  est linéaire et borné, donc continu.

a) Propriété fondamentale

Enoncé

Pour toute application  $X(\cdot) \in \mathcal{L}_E^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et pour tout  $\lambda \in E'$ , on a la relation suivante :

$$\langle \lambda, M\{ X(\cdot) \} \rangle = M\{ \langle \lambda, X(\cdot) \rangle \}$$

Démonstration

Remarquons tout d'abord que l'expression  $M\{ \langle \lambda, X(\cdot) \rangle \}$  a bien un sens car, d'après la remarque I-3.1.h on est assuré que  $\langle \lambda, X(\cdot) \rangle$  appartient à  $\mathcal{L}^1$  ; en désignant par  $\{ X_k(\cdot) \}$  une suite quelconque d'applications étagées convergeant uniformément vers  $X(\cdot)$  et telles que ...

$$X(\cdot) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_n^k \cdot 1_{A_n^k}(\cdot) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N X_n^k \cdot 1_{A_n^k}(\cdot)$$

... On peut alors écrire :

$$M\{ \langle \lambda, X(\cdot) \rangle \} = M\{ \langle \lambda, \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N X_n^k \cdot 1_{A_n^k}(\cdot) \rangle \}$$

Mais puisque  $M$  appliqué aux fonctions de  $\mathcal{L}^1$  est identique à la notion de  $\mu$ -intégrale sur le domaine  $\Omega$ , il s'en suit que sur  $\mathcal{L}^1$ , l'opérateur  $M$  est linéaire et borné (puisque  $\mu$  est bornée) donc continu ; compte tenu que  $\lambda$  est elle-même linéaire et continue, on a alors :

$$\begin{aligned} M\{ \langle \lambda, X(\cdot) \rangle \} &= \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} M\{ \langle \lambda, \sum_{n=1}^N X_n^k \cdot 1_{A_n^k}(\cdot) \rangle \} \quad (\text{continuité}) \\ &= \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N M\{ \langle \lambda, X_n^k \rangle \cdot 1_{A_n^k}(\cdot) \} \quad (\text{linéarité}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda, X_n^k \rangle \cdot \mu(A_n^k) \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $\lambda$  est linéaire et continue, on a également :

$$\begin{aligned} \langle \lambda, M\{ X(\cdot) \} \rangle &= \langle \lambda, \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N X_n^k \cdot \mu(A_n^k) \rangle \\ &= \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \langle \lambda, \sum_{n=1}^N X_n^k \cdot \mu(A_n^k) \rangle \quad (\text{continuité}) \\ &= \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^N \langle \lambda, X_n^k \rangle \cdot \mu(A_n^k) \quad (\text{linéarité}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \lambda, X_n^k \rangle \cdot \mu(A_n^k) \end{aligned}$$

On en déduit donc que ...

$$\langle \lambda, M\{ X(\cdot) \} \rangle = M\{ \langle \lambda, X(\cdot) \rangle \} \quad \forall \lambda \in E'$$

... ce qui achève la démonstration.

#### d) Propriétés linéaires

##### Énoncé

Quels que soient les éléments ...

$$\begin{cases} c \in \mathbb{C} \\ X \in E \\ X(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ Y(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ x(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{cases}$$

... on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} (a) & M\{ X \} &= X \\ (b) & M\{ c \cdot X(\cdot) \} &= c \cdot M\{ X(\cdot) \} \\ (c) & M\{ X \cdot x(\cdot) \} &= X \cdot M\{ x(\cdot) \} \\ (d) & M\{ X(\cdot) + Y(\cdot) \} &= M\{ X(\cdot) \} + M\{ Y(\cdot) \} \end{cases}$$

##### Démonstration

Les trois premières propriétés étant absolument évidentes compte tenu de la définition de la notion de  $\mu$ -moyenne, nous nous contenterons de vérifier la dernière ; quel que soit  $\lambda \in E'$  on a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda, M\{ X(\cdot) \} + M\{ Y(\cdot) \} \rangle &= \langle \lambda, M\{ X(\cdot) \} \rangle + \langle \lambda, M\{ Y(\cdot) \} \rangle \\ &= M\{ \langle \lambda, X(\cdot) \rangle \} + M\{ \langle \lambda, Y(\cdot) \rangle \} \end{aligned}$$

Mais l'opérateur  $M$  étant linéaire sur  $\mathcal{L}^1$  et les applications  $\langle \lambda, X(\cdot) \rangle$  et  $\langle \lambda, Y(\cdot) \rangle$  appartenant à  $\mathcal{L}^1$  d'après la remarque I-3.1.h, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \lambda, M\{ X(\cdot) \} + M\{ Y(\cdot) \} \rangle &= M\{ \langle \lambda, X(\cdot) \rangle + \langle \lambda, Y(\cdot) \rangle \} \\ &= M\{ \langle \lambda, X(\cdot) + Y(\cdot) \rangle \} \end{aligned}$$

On en déduit donc qu'il existe un vecteur unique appartenant à  $E$ , à savoir  $(M\{X(\cdot)\} + M\{Y(\cdot)\})$ , tel que :

$$M\{ \langle \lambda, X(\cdot) + Y(\cdot) \rangle \} = \langle \lambda, M\{X(\cdot)\} + M\{Y(\cdot)\} \rangle \quad \forall \lambda \in E'$$

Mais, d'après la propriété fondamentale I-3.2.c, on a ...

$$M\{ \langle \lambda, X(\cdot) + Y(\cdot) \rangle \} = \langle \lambda, M\{X(\cdot) + Y(\cdot)\} \rangle \quad \forall \lambda \in E'$$

... on en déduit donc que :

$$M\{X(\cdot) + Y(\cdot)\} = M\{X(\cdot)\} + M\{Y(\cdot)\}$$

e) Proposition

Enoncé

Pour toute application  $X(\cdot)$  appartenant à  $\mathcal{L}_1^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , on a la relation suivante :

$$\|M\{X(\cdot)\}\|_E \leq M\{\|X(\cdot)\|_E\} < +\infty$$

Démonstration

On sait (cf. Bertrandias (2) page 57) que pour  $Y \in E$  fixé il existe une fonctionnelle linéaire continue  $\lambda_Y$  telle que :

$$\begin{cases} \|\lambda_Y\|_{E'} = 1 \\ \langle \lambda_Y, Y \rangle = \|Y\|_E \end{cases}$$

On a donc en posant  $Y = M\{X(\cdot)\}$  :

$$\langle \lambda_Y, M\{X(\cdot)\} \rangle = M\{ \langle \lambda_Y, X(\cdot) \rangle \}$$

$$\Rightarrow | \langle \lambda_Y, M\{X(\cdot)\} \rangle | = | M\{ \langle \lambda_Y, X(\cdot) \rangle \} |$$

Compte tenu des propriétés de linéarité et de continuité de  $M$  sur  $\mathcal{L}_1^1$ , on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \Rightarrow | \langle \lambda_Y, M\{X(\cdot)\} \rangle | &\leq M\{ | \langle \lambda_Y, X(\cdot) \rangle | \} \\ &\leq M\{ \|\lambda_Y\|_{E'} \cdot \|X(\cdot)\|_E \} \end{aligned}$$

En définitive, on a donc compte tenu des propriétés de  $\lambda_Y$  :

$$\Rightarrow \|M\{X(\cdot)\}\|_E \leq M\{\|X(\cdot)\|_E\}$$

Mais comme par définition de  $\mathcal{L}_1^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  on a ...

$$M\{\|X(\cdot)\|_E\} = \int_{\Omega} \|X(\omega)\|_E \cdot \mu(d\omega) < +\infty$$

... il s'en suit que la proposition est démontrée.

f) Proposition

Enoncé

Soient  $(E_1, \mathcal{B}_{E_1})$  et  $(E_2, \mathcal{B}_{E_2})$  deux espaces mesurables associés aux espaces de Banach séparables  $E_1$  et  $E_2$ , et soit  $\mathfrak{A}$  une application linéaire continue de  $E_1$  dans  $E_2$ .

Dans ces conditions, pour toute application  $X(\cdot)$  appartenant à  $\mathcal{L}_1^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , l'application  $\mathfrak{A}\{X(\cdot)\}$  appartient à  $\mathcal{L}_1^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et l'opérateur  $M$  commute avec  $\mathfrak{A}$  :

$$\forall X(\cdot) \in \mathcal{L}_1^1 \Rightarrow \begin{cases} \mathfrak{A}\{X(\cdot)\} \in \mathcal{L}_1^1 \\ M\{\mathfrak{A}\{X(\cdot)\}\} = \mathfrak{A}\{M\{X(\cdot)\}\} \end{cases}$$

Démonstration

On sait déjà, d'après la proposition I-3.1.g que si  $X(\cdot)$  appartient à  $\mathcal{L}_1^1$ , alors  $\mathfrak{A}\{X(\cdot)\}$  appartient à  $\mathcal{L}_1^1$  d'où l'on déduit, compte tenu de la remarque I-3.1.h, que  $\langle \phi, \mathfrak{A}\{X(\cdot)\} \rangle$  appartient à  $\mathcal{L}^1$  quel que soit  $\phi \in E_2'$ . On peut alors écrire en désignant par  $\mathfrak{A}^*$  l'opérateur adjoint de  $\mathfrak{A}$  :

$$M\langle \phi, \mathfrak{A}\{X(\cdot)\} \rangle = M\langle \mathfrak{A}^*\phi, X(\cdot) \rangle \quad \forall \phi \in E_2'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M \langle \varphi, \mathfrak{A}\{X(\cdot)\} \rangle &= \langle \mathfrak{A}\varphi, M\{X(\cdot)\} \rangle \quad \forall \varphi \in E_2' \\ &= \langle \varphi, \mathfrak{A}M\{X(\cdot)\} \rangle \quad \forall \varphi \in E_2' \end{aligned}$$

à savoir (

$$M\{ \langle \cdot \rangle$$

Mais, d'après la propriété fondamentale de  $M$  on sait que ...

$$\langle \varphi, \mathfrak{A}\{X(\cdot)\} \rangle = \langle \varphi, M\{\mathfrak{A}\{X(\cdot)\}\} \rangle \quad \forall \varphi \in E_2'$$

... d'où l'on déduit que l'on a :

$$M\{ \langle$$

$$\mathfrak{A}M\{X(\cdot)\} = M\{\mathfrak{A}\{X(\cdot)\}\}$$

... on en

g) Proposition

Énoncé

Quel que soit le Banach séparable  $E$ , l'opérateur  $M$  est linéaire continu sur  $\mathcal{L}_E^1$  muni de la norme de la convergence uniforme.

Démonstration

La linéarité étant déjà assurée par la proposition I-3.2.d, il nous suffit de démontrer que  $M$  est borné pour démontrer qu'il est continu:

$$\forall X(\cdot) \in \mathcal{L}_E^1 \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ \quad \|X(\omega_0)\|_E \leq \sup_{\omega \in \Omega} \|X(\omega)\|_E \quad \forall \omega_0 \in \Omega \\ 2^\circ \quad \|X(\cdot)\|_E \in \mathcal{L}^1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\{\|X(\cdot)\|_E\} \leq \sup_{\omega \in \Omega} \|X(\omega)\|_E$$

exist

on a :

Il s'en suit que  $M$  est borné car, compte tenu de la proposition I-3.2.e

$$\Rightarrow \|M\{X(\cdot)\}\|_E \leq \sup_{\omega \in \Omega} \|X(\omega)\|_E$$

h) Notation

Pour toute classe d'équivalence  $X(\cdot)$  appartenant à  $L_E^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  nous poserons par convention :

$$M\{X(\cdot)\} = M\{X(\cdot)\} \quad \forall X(\cdot) \in X(\cdot)$$

## Chapitre II

### CONSTRUCTION D'ESTIMATEURS LINÉAIRES DANS $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$

#### II-1 - INTRODUCTION

Etant donné un élément  $U \in L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$  et un vecteur  $\lambda \in E'$ , nous savons, d'après la remarque I-3.1.h, que la forme linéaire  $\langle \lambda, U \rangle$  est un élément de  $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$ . Cette remarque étant faite, nous nous proposons dans ce chapitre de chercher pour un élément  $U \in L^2$  le ou les vecteurs  $\hat{\lambda}$  s'ils existent tels que ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \|U - \langle \hat{\lambda}, U \rangle\|_{L^2} = \min_{\lambda \in L} \|U - \langle \lambda, U \rangle\|_{L^2} \\ \text{avec } L = \text{partie donnée de } E' \end{array} \right.$$

... et, s'il en est ainsi, nous dirons que  $\langle \hat{\lambda}, U \rangle$  est un estimateur (linéaire) optimal de  $U$ . Nous démontrerons en particulier aux paragraphes II-3.4 et II-3.5 deux théorèmes fondamentaux qui sont à la base même du troisième chapitre et qui correspondent en fait à deux cas particuliers d'ensemble  $L$  et d'élément  $U$ ; le premier de ces théorèmes correspond au cas général où  $L \equiv E'$  et  $U$  est identique à un élément quelconque de  $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$ , tandis que le second correspond à un cas très particulier et constitue une extension du théorème de Gauss-Markov bien connu des statisticiens.

On ne manquera pas de remarquer que dans cette façon de procéder,  $U$  est utilisé non pas en tant que classe d'équivalence appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$ , mais bel et bien comme s'il était un vecteur de  $E$  dont on ferait le produit  $\langle \lambda, U \rangle$  par une fonctionnelle linéaire  $\lambda \in E'$ ; pour cette raison, nous avons cru bon de donner à  $U$  le nom de "vecteur paramétré", nom qui présente l'avantage de rappeler à la fois le rôle de "vecteur" joué par  $U$  et sa dépendance par rapport à un paramètre  $\omega \in \Omega$ .

## II-2 - NOTION DE VECTEUR PARAMÈTRE

### II-2.1 - Définition et propriétés fondamentales

#### a) Définition

Soit  $E$  un espace de Banach séparable. Par définition, nous appellerons "vecteur de  $E$  paramétré dans  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ " ou plus simplement "vecteur paramétré", toute classe d'équivalence  $U(\cdot)$  appartenant à  $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ .

#### b) Propriétés

##### Énoncé

Pour tout vecteur paramétré  $U$  appartenant à  $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} M\{U(\cdot)\} \text{ existe} \\ \|M\{U(\cdot)\}\|_E < +\infty \\ \forall \lambda \in E' \Rightarrow \langle \lambda, U(\cdot) \rangle \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{array} \right.$$

##### Démonstration

Pour tout vecteur paramétré  $U(\cdot)$  on a :

$$\left. \begin{array}{l} U(\cdot) \in L^2_E \\ L^2_E \subset L^1_E \end{array} \right\} \Rightarrow U(\cdot) \in L^1_E$$

Il s'en suit donc que  $M\{U(\cdot)\}$  existe et d'après la proposition

I-3.2.e, on a :

$$\|M\{U(\cdot)\}\|_E \leq M\{\|U(\cdot)\|_E\} < +\infty \quad \forall U(\cdot) \in U(\cdot)$$

Par ailleurs, d'après la remarque I-3.1.h on sait que pour tout  $\lambda \in E'$  on a ...

$$\langle \lambda, U(\cdot) \rangle \in L^2$$

... ce qui achève la démonstration.

## II-2.2 - Covariance et opérateur de covariance

### a) Covariance

Par définition, nous appellerons covariance des vecteurs paramétrés  $U(\cdot)$  et  $V(\cdot)$  appartenant à  $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  la fonction complexe  $K_{UV}$  appliquant  $(E' \times E')$  dans  $\mathbb{C}$  et telle que pour tout couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  appartenant à  $(E' \times E')$ , on ait :

$$K_{UV}(\lambda_1, \lambda_2) = M \{ \langle \lambda_1, U(\cdot) \rangle \cdot \overline{\langle \lambda_2, V(\cdot) \rangle} \}$$

On vérifie immédiatement que la covariance existe toujours et jouit des propriétés suivantes pour tous vecteurs  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda$  appartenant à  $E'$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{UV}(\lambda_1, \lambda_2) = \overline{K_{VU}(\lambda_2, \lambda_1)} \\ K_{UV}(\lambda, a\lambda_1 + b\lambda_2) = \bar{a} \cdot K_{UV}(\lambda, \lambda_1) + \bar{b} \cdot K_{UV}(\lambda, \lambda_2) \\ K_{UV}(a\lambda_1 + b\lambda_2, \lambda) = a \cdot K_{UV}(\lambda_1, \lambda) + b \cdot K_{UV}(\lambda_2, \lambda) \\ 0 \leq K_{UU}(\lambda, \lambda) < +\infty \end{array} \right.$$

### b) Opérateur de covariance

Par définition, nous appellerons opérateur de covariance associé aux vecteurs paramétrés  $U(\cdot)$  et  $V(\cdot)$  appartenant à  $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  l'application définie sur  $E'$  et à valeurs dans  $E$  telle que pour tout vecteur  $\lambda \in E'$  on ait :

$$C_{UV}(\lambda) = M \{ U(\cdot) \cdot \overline{\langle \lambda, V(\cdot) \rangle} \}$$

Il est facile de vérifier que cet opérateur existe toujours car  $\langle \lambda, V(\cdot) \rangle$  appartient à  $L^2$  d'après la remarque I-3.1.h et  $\{ U(\cdot) \cdot \overline{\langle \lambda, V(\cdot) \rangle} \}$  appartient à  $L^1_E$  d'après la proposition I-3.1.i

### c) Propriété 1

##### Énoncé

L'opérateur de covariance  $C_{UV}$  associé aux vecteurs paramétrés  $U(\cdot)$  et  $V(\cdot)$  est un opérateur linéaire et continu de  $E'$  dans  $E$ .

Démonstration

Soit  $\lambda$  une fonctionnelle linéaire continue appartenant à  $E'$ , on a par définition de  $C_{UV}$  :

$$\|C_{UV}(\lambda)\|_E = \|M \{ U(\cdot) \cdot \overline{\langle \lambda, V(\cdot) \rangle} \} \|_E$$

On en déduit, d'après la proposition I-3.2.e, que l'on peut écrire, compte tenu de I-3.2.h :

$$\begin{aligned} \|C_{UV}(\lambda)\|_E &\leq M \{ \|U(\cdot) \cdot \overline{\langle \lambda, V(\cdot) \rangle} \|_E \} \\ \Rightarrow \|C_{UV}(\lambda)\|_E &\leq M \{ |\langle \lambda, V(\cdot) \rangle| \cdot \|U(\cdot)\|_E \} \\ \Rightarrow \|C_{UV}(\lambda)\|_E &\leq M \{ \|\lambda\|_{E'} \cdot \|V(\cdot)\|_E \cdot \|U(\cdot)\|_E \} \end{aligned}$$

Comme  $U(\cdot)$  et  $V(\cdot)$  appartiennent à  $L^2_E$ , il s'en suit que  $\|U(\cdot)\|_E$  et  $\|V(\cdot)\|_E$  appartiennent à  $L^2$  d'où il résulte que  $\{ \|U(\cdot)\|_E \cdot \|V(\cdot)\|_E \}$  appartient à  $L^1$  d'après la proposition I-3.1.i, ce qui permet d'écrire :

$$\Gamma_{UV} = M \{ \|U(\cdot)\|_E \cdot \|V(\cdot)\|_E \} < +\infty$$

On a donc, en définitive ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \|C_{UV}(\lambda)\|_E \leq \Gamma_{UV} \cdot \|\lambda\|_{E'} \\ \text{avec } \Gamma_{UV} < +\infty \end{array} \right.$$

... d'où il résulte que l'opérateur  $C_{UV}$  est borné ; comme d'autre part  $C_{UV}$  est manifestement linéaire, il s'en suit donc qu'il est également continu.

d) Propriété 2

Enoncé

L'opérateur de covariance  $C_{UV}$  associé aux vecteurs paramétrés  $U(\cdot)$  et  $V(\cdot)$  est tel que pour tout couple de vecteurs  $(\lambda_1, \lambda_2)$  appartenant à  $E \times E$ , on ait :

$$K_{UV}(\lambda_1, \lambda_2) = \langle \lambda_1, C_{UV}(\lambda_2) \rangle$$

Démonstration

$$\begin{aligned} K_{UV}(\lambda_1, \lambda_2) &= M \{ \langle \lambda_1, U(\cdot) \rangle \cdot \overline{\langle \lambda_2, V(\cdot) \rangle} \} \\ &= M \{ \langle \lambda_1, \overline{\langle \lambda_2, V(\cdot) \rangle} \cdot U(\cdot) \rangle \} \\ &= \langle \lambda_1, M \{ \overline{\langle \lambda_2, V(\cdot) \rangle} \cdot U(\cdot) \} \rangle \\ &= \langle \lambda_1, C_{UV}(\lambda_2) \rangle \end{aligned}$$

II-3 - CONSTRUCTION D'ESTIMATEURS LINEAIRES

II-3.1 - Espace  $F\{U\}$

a) Définition

Soit  $U(\cdot)$  un vecteur paramétré appartenant à  $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et soit  $\sim$  la relation d'équivalence associée définie sur  $E'$  de la façon suivante :

$$\lambda_1 \sim \lambda_2 \iff \begin{cases} \lambda_1 \in E' \\ \lambda_2 \in E' \\ \langle \lambda_1, U(\cdot) \rangle = \langle \lambda_2, U(\cdot) \rangle \end{cases}$$

Par définition, nous désignerons par  $F\{U\}$  l'espace quotient de  $E'$  par la relation d'équivalence  $\sim$  :

$$F\{U\} = E' / \sim$$

Il s'en suit que les vecteurs  $\Lambda$  de l'espace  $F\{U\}$  sont des classes d'équivalence de fonctionnelles linéaires continues appartenant à  $E'$ .

b) Notations

Pour toute classe d'équivalence  $\Lambda \in F\{U\}$  nous poserons par convention :

$$\langle \Lambda, U(\cdot) \rangle = \langle \lambda, U(\cdot) \rangle \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

c) Produit scalaire sur F{U}

Énoncé

Si  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont deux classes quelconques appartenant à  $F\{U\}$ , alors la forme sesquilinéaire  $\langle \Lambda_1 | \Lambda_2 \rangle_F$  telle que ...

$$\langle \Lambda_1 | \Lambda_2 \rangle_F = \langle \lambda_1, c_{UU}(\lambda_2) \rangle \quad \forall \begin{cases} \lambda_1 \in \Lambda_1 \\ \lambda_2 \in \Lambda_2 \end{cases}$$

... définit un produit scalaire sur l'espace  $F\{U\}$  qui devient de ce fait préhilbertien si on le munit de la norme associée :

$$\| \Lambda \|_F = \langle \Lambda | \Lambda \rangle_F$$

Démonstration

Compte tenu de la définition de  $\langle \Lambda_1 | \Lambda_2 \rangle_F$  et des propriétés de  $K_{UU}(\lambda_1, \lambda_2)$ , on a, de façon évidente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \Lambda_1 | \Lambda_2 \rangle_F = K_{UU}(\lambda_1, \lambda_2) = cte \quad \forall \begin{cases} \lambda_1 \in \Lambda_1 \\ \lambda_2 \in \Lambda_2 \end{cases} \\ \langle \Lambda_1 | \Lambda_2 \rangle_F = \overline{\langle \Lambda_2 | \Lambda_1 \rangle_F} \\ \langle \Lambda | a \Lambda_1 + b \Lambda_2 \rangle_F = \bar{a} \cdot \langle \Lambda | \Lambda_1 \rangle_F + \bar{b} \cdot \langle \Lambda | \Lambda_2 \rangle_F \\ \langle a \Lambda_1 + b \Lambda_2 | \Lambda \rangle_F = a \cdot \langle \Lambda_1 | \Lambda \rangle_F + b \cdot \langle \Lambda_2 | \Lambda \rangle_F \\ \langle \Lambda | \Lambda \rangle_F \geq 0 \end{array} \right.$$

Si nous désignons par  $\Theta_F$  le vecteur nul de  $F = F\{U\}$ , il ne nous reste donc qu'à montrer que l'on a :

$$\langle \Lambda | \Lambda \rangle_F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda \equiv \Theta_F$$

Remarquons tout d'abord que l'implication réciproque est toujours vérifiée :

$$\Lambda \equiv \Theta_F \quad \Rightarrow \quad \langle \Lambda | \Lambda \rangle_F = 0$$

Il suffit donc de prouver que l'implication directe est vérifiée :

$$\langle \Lambda | \Lambda \rangle_F = 0 \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad \Lambda \equiv \Theta_F$$

Soit  $x(\cdot)$  le vecteur de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  tel que :

$$x(\omega) = \langle \Lambda, U(\omega) \rangle \quad \forall \omega \in \Omega$$

On a par définition de  $K_{UU}(\lambda, \lambda)$  :

$$M(x(\omega) \cdot \bar{x}(\omega)) = \begin{cases} \langle \Lambda | \Lambda \rangle_F \\ \langle x | x \rangle_{L^2} = \| x \|_{L^2}^2 \end{cases}$$

Si nous désignons par  $\Theta_{L^2}$  le vecteur nul de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , nous savons, d'après les propriétés de la norme, que l'on a :

$$\| x \|_{L^2}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv \Theta_{L^2}$$

On peut donc écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda | \Lambda \rangle_F = 0 & \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv \Theta_{L^2} \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \langle \Lambda, U(\cdot) \rangle \equiv \Theta_{L^2} \end{aligned}$$

Mais, par définition de  $F\{U\}$ , le vecteur  $\Lambda$  tel que ...

$$\langle \Lambda, U(\omega) \rangle = 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

... représente la classe d'équivalence du vecteur nul  $\Theta_F$ , si bien que l'on a :

$$\langle \Lambda | \Lambda \rangle_F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda \equiv \Theta_F$$

En définitive, on en déduit que la forme sesquilinéaire  $\langle \Lambda_1 | \Lambda_2 \rangle_F$  peut effectivement être considérée comme un produit scalaire défini sur  $F\{U\}$ .

d) Définition

Énoncé

Par définition, nous dirons qu'un vecteur paramétré  $U$  appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  est  $\mu$ -libre si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

a)  $c_{UU}$  est positif :

$$\langle \lambda, c_{UU}(\lambda) \rangle > 0 \quad \forall \lambda \neq \Theta_F,$$

b)  $C_{UU}$  est inversible :

$$C_{UU}(\lambda) = \theta_E \iff \lambda = \theta_{E'}$$

c)  $U(\omega)$  n'est orthogonal à aucun vecteur de  $E'$  pour  $\mu$ -presque tout  $\omega$  :

$$\langle \lambda, U \rangle = \theta_{L^2} \iff \lambda = \theta_{E'}$$

Démonstration

Il nous faut démontrer que les trois propriétés a, b, et c sont effectivement équivalentes ; pour cela nous procéderons en trois étapes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) b \Rightarrow c \\ 2^\circ) c \Rightarrow a \\ 3^\circ) a \Rightarrow b \end{array} \right.$$

1°) Supposons que  $C_{UU}$  est inversible et soit  $\lambda$  tel que :

$$\langle \lambda, U \rangle = \theta_{L^2}$$

$$\Rightarrow C_{UU}(\lambda) = M\{U \cdot \overline{\langle \lambda, U \rangle}\} = M\{U \cdot \theta_{L^2}\}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|C_{UU}(\lambda)\|_E = \|M\{U \cdot \theta_{L^2}\}\|_E \leq M\{\|U \cdot \theta_{L^2}\|_E\}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|C_{UU}(\lambda)\|_E \leq M\{\|U\|_E \cdot |\theta_{L^2}|\} = 0$$

$$\Rightarrow C_{UU}(\lambda) = \theta_E$$

$$\Rightarrow \lambda = \theta_{E'} \quad (\text{car } C_{UU} \text{ est inversible})$$

On a donc effectivement  $b \Rightarrow c$

2°) Supposons que c soit vérifié, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\langle \lambda, U \rangle = \theta_{L^2} \iff \lambda = \theta_{E'}$$

On peut toujours écrire ...

$$\begin{aligned} \langle \lambda, C_{UU}(\lambda) \rangle &= M\{ \langle \lambda, U \rangle \cdot \overline{\langle \lambda, U \rangle} \} \\ &= M\{ |\langle \lambda, U \rangle|^2 \} \end{aligned}$$

... d'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \langle \lambda, C_{UU}(\lambda) \rangle = 0 &\iff \langle \lambda, U \rangle = \theta_{L^2} \\ &\iff \lambda = \theta_{E'} \end{aligned}$$

Il s'en suit que l'on a bien  $c \Rightarrow a$

3°) Supposons enfin que  $C_{UU}$  soit positif et supposons qu'il existe  $\lambda \in E'$  vérifiant l'équation suivante :

$$C_{UU}(\lambda) = \theta_E$$

Dans ces conditions, l'élément  $\langle \lambda, U \rangle$  est tel que :

$$\theta_E = C_{UU}(\lambda) = M\{U \cdot \overline{\langle \lambda, U \rangle}\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \langle \lambda, \theta_E \rangle = \langle \lambda, M\{U \cdot \overline{\langle \lambda, U \rangle}\} \rangle \\ &= M\{ \langle \lambda, U \rangle \cdot \overline{\langle \lambda, U \rangle} \} \\ &= \langle \lambda, C_{UU}(\lambda) \rangle \end{aligned}$$

Puisque par hypothèse  $C_{UU}$  est positif, il s'en suit que  $\lambda$  est nécessairement identique à  $\theta_{E'}$  et l'on a donc  $a \Rightarrow b$ .

e) Proposition

Énoncé

Le vecteur paramétré  $U \in L^2_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  est  $\mu$ - libre si, et seulement si  $F\{U\}$  est identique à  $E'$  :

$$U \in L^2_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ est } \mu\text{- libre} \iff F\{U\} \equiv E'$$

Démonstration

Par définition  $U$  est  $\mu$ - libre si, et seulement, si on a :

$$\langle \lambda, U \rangle = \theta_{L^2} \iff \lambda = \theta_{E'}$$

On en déduit que la proposition énoncée est vraie, car l'équivalence ci-dessus est elle-même équivalente aux relations suivantes :

$$\Leftrightarrow \langle \lambda_1, U \rangle \neq \langle \lambda_2, U \rangle \quad \forall \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Leftrightarrow F\{U\} \cong E' \quad (\text{par définition de } F\{U\})$$

f) Proposition

Énoncé

Si le vecteur paramétré  $U \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  est  $\mu$ -libre, alors  $E' \cong F\{U\}$  muni du produit scalaire ...

$$\langle \lambda_1 \mid \lambda_2 \rangle_{E'} = \langle \lambda_1 \mid \lambda_2 \rangle_F$$

... est complet pour la norme associée  $\|\cdot\|_{E'}$  et constitue de ce fait un espace de Hilbert.

Démonstration

Le vecteur paramétré  $U$  étant  $\mu$ -libre, il s'en suit (par définition) que l'opérateur  $C_{UU}$  est inversible et que, par conséquent,  $\|C_{UU}\|_{\mathcal{L}(E', E)}$  est un nombre strictement positif.

D'autre part,  $C_{UU}$  étant linéaire continu (donc borné) sur  $F\{U\}$ , on en déduit que  $\|C_{UU}\|_{\mathcal{L}(E', E)}$  est fini et que de plus on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda\|_{E'}^2 &= \langle \lambda \mid \lambda \rangle_F = \langle \lambda, C_{UU}(\lambda) \rangle \\ &= |\langle \lambda, C_{UU}(\lambda) \rangle| \\ &\leq \|\lambda\|_{E'} \cdot \|C_{UU}(\lambda)\|_E \\ &\leq \|\lambda\|_{E'} \cdot \|C_{UU}\|_{\mathcal{L}(E', E)} \cdot \|\lambda\|_{E'} \end{aligned}$$

On peut alors écrire ...

$$\|\lambda\|_{E'}^2 \leq \|C_{UU}\|_{\mathcal{L}(E', E)} \cdot \|\lambda\|_{E'}^2$$

... d'où l'on déduit que  $E' \cong F\{U\}$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{E'}$  puisqu'il est déjà complet pour la norme  $\|\cdot\|_F$ , et que  $\|C_{UU}\|_{\mathcal{L}(E', E)}$  est un nombre fini strictement positif.

### II-3.2 - Espace $\mathcal{E}\{U\}$

a) Définition

Par définition, nous appellerons espace des estimateurs linéaires engendré par le vecteur paramétré  $U(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et nous noterons  $\mathcal{E}\{U\}$  le sous-espace vectoriel de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  constitué des classes d'équivalence  $x$  telles que :

$$\forall x \in \mathcal{E}\{U\} \Leftrightarrow \exists \lambda \in F\{U\} : x(\cdot) = \langle \lambda, U(\cdot) \rangle$$

b) Produit scalaire sur  $\mathcal{E}\{U\}$

L'espace  $\mathcal{E}\{U\}$  devient préhilbertien si on le munit du produit scalaire  $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$  tels que :

$$\forall \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{Bmatrix} \in \mathcal{E}\{U\} \Rightarrow \begin{cases} \langle x_1 \mid x_2 \rangle_{\mathcal{E}} = \langle x_1 \mid x_2 \rangle_{L^2} \\ \|x\|_{\mathcal{E}} = \|x\|_{L^2} \end{cases}$$

### II-3.3 - Application $\mathbb{U}$

a) Définition

Par définition,  $\mathbb{U}$  désignera l'application linéaire associée au vecteur paramétré  $U(\cdot)$  définie par la relation suivante ...

$$\lambda \xrightarrow{\mathbb{U}} \mathbb{U}\lambda = \langle \lambda, U \rangle$$

... et dont le domaine  $D(\mathbb{U})$  et l'image  $I(\mathbb{U})$  sont tels que :

$$\begin{cases} D(\mathbb{U}) = F\{U\} \\ I(\mathbb{U}) = \mathcal{E}\{U\} \end{cases}$$

b) Théorème

Énoncé

L'application linéaire  $\mathbb{U}$  associée au vecteur paramétré  $U(\cdot)$  est continue, admet un inverse  $\mathbb{U}^{-1}$  linéaire continu et définit un isomorphisme entre les espaces  $F = F\{U\}$  et  $\mathcal{E} = \mathcal{E}\{U\}$  :

$$V \begin{Bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{Bmatrix} \in F \Rightarrow \langle U\Lambda_1 \mid U\Lambda_2 \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \Lambda_1 \mid \Lambda_2 \rangle_F \quad (1)$$

$$V \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \in \mathcal{E} \Rightarrow \langle U^{-1}x_1 \mid U^{-1}x_2 \rangle_F = \langle x_1 \mid x_2 \rangle_{\mathcal{E}} \quad (2)$$

De plus, on a :

$$\|U\|_{\mathcal{L}(F, \mathcal{E})} = \|U^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}, F)} = 1 \quad (3)$$

Démonstration : Première partie

Par définition on a :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} U\Lambda &= \langle \Lambda, U(\cdot) \rangle \\ \langle U\Lambda_1 \mid U\Lambda_2 \rangle_{\mathcal{E}} &= M \{ U\Lambda_1 \cdot \overline{U\Lambda_2} \} \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow & \langle U\Lambda_1 \mid U\Lambda_2 \rangle_{\mathcal{E}} = M \{ \langle \Lambda_1, U(\cdot) \rangle \cdot \overline{\langle \Lambda_2, U(\cdot) \rangle} \} \\ \Rightarrow & \langle U\Lambda_1 \mid U\Lambda_2 \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \Lambda_1 \mid \Lambda_2 \rangle_F \end{aligned} \quad (1)$$

En particulier, si on prend  $\Lambda = \Lambda_1 = \Lambda_2$ , il vient :

$$\|U\Lambda\|_{\mathcal{E}}^2 = \|\Lambda\|_F^2$$

Il s'en suit qu'en désignant par  $\theta_F$  le vecteur nul de  $F$  et par  $\mathcal{L}(F, \mathcal{E})$  l'espace des applications linéaires de l'espace vectoriel normé  $F$  dans l'espace vectoriel normé  $\mathcal{E}$ , on a :

$$(3) \quad \|U\|_{\mathcal{L}(F, \mathcal{E})} = \sup_{\Lambda \neq \theta_F} \frac{\|U\Lambda\|_{\mathcal{E}}}{\|\Lambda\|_F} = 1$$

Cette dernière relation implique que  $U$  est bornée; or une application linéaire d'un espace vectoriel normé  $F$  dans un espace vectoriel normé  $\mathcal{E}$  est bornée si, et seulement, si elle est continue. On en déduit donc que  $U$  est continue.

Démonstration : Deuxième partie

Compte tenu de la relation (1) définie dans la première partie de la démonstration, on a :

$$\|U(\Lambda_1 - \Lambda_2)\|_{\mathcal{E}} = \|\Lambda_1 - \Lambda_2\|_F$$

Ceci nous permet d'écrire l'équivalence suivante :

$$U\Lambda_1 = U\Lambda_2 \iff \Lambda_1 = \Lambda_2$$

Donc,  $U$  établit une bijection de  $F$  sur  $\mathcal{E}$  et il en découle que  $U^{-1}$  existe, est linéaire, et a pour domaine et image respectivement  $\mathcal{E}$  et  $F$  :

$$\begin{cases} D(U^{-1}) = \mathcal{E}\{U\} = I(U) \\ I(U^{-1}) = F\{U\} = D(U) \end{cases}$$

Considérons d'une part deux vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  appartenant à  $\mathcal{E}$  et deux vecteurs  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  appartenant à  $F$  tels que :

$$\begin{cases} \Lambda_1 = U^{-1}x_1 & \begin{cases} x_1 = U\Lambda_1 \\ x_2 = U\Lambda_2 \end{cases} \\ \Lambda_2 = U^{-1}x_2 \end{cases}$$

Considérons d'autre part la relation (1) établie dans la première partie de la démonstration :

$$\langle U\Lambda_1 \mid U\Lambda_2 \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \Lambda_1 \mid \Lambda_2 \rangle_F$$

On conclut en remarquant que ceci implique :

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \langle U\Lambda_1 \mid x_2 \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \Lambda_1 \mid U^{-1}x_2 \rangle_F \\ \Rightarrow & \langle x_1 \mid x_2 \rangle_{\mathcal{E}} = \langle U^{-1}x_1 \mid U^{-1}x_2 \rangle_F \quad (2) \\ \Rightarrow & \|x\|_{\mathcal{E}}^2 = \|U^{-1}x\|_F^2 \quad \forall x \in \mathcal{E} \\ \Rightarrow & \|U^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}, F)} = \sup_{x \neq \theta_{\mathcal{E}}} \frac{\|U^{-1}x\|_F}{\|x\|_{\mathcal{E}}} = 1 \quad (3) \end{aligned}$$

Cette dernière relation implique que l'application linéaire  $U^{-1}$  est bornée, d'où il découle (comme pour  $U$ ) qu'elle est continue.

c) Proposition

Enoncé

Si le vecteur paramétré U est  $\mu$ - libre, alors  $\mathcal{E}\{U\}$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}} \equiv \|\cdot\|_{L^2}$  induite par  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et constitue de ce fait un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \cdot | \cdot \rangle_{L^2}$ .

Démonstration

Si le vecteur paramétré U est  $\mu$ - libre, nous savons que  $F\{U\}$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_F$ ; on en déduit alors immédiatement que  $\mathcal{E}\{U\}$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$  puisque  $\mathbf{U}$  établit un isomorphisme entre  $F\{U\}$  et  $\mathcal{E}\{U\}$ .

II-3.4 - Théorème d'approximation dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

a) Théorème

Enoncé

Soit d'une part  $U(\cdot)$  un vecteur paramétré appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et soit d'autre part  $x$  un vecteur fixé dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Dans ces conditions, les trois propriétés suivantes sont toujours vérifiées :

1°) S'il existe un vecteur  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  tel que l'on ait ...

$$\forall \tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\} \Rightarrow \|x - \hat{x}\|_{L^2} \leq \|x - \tilde{x}\|_{L^2}$$

... alors  $\hat{x}$  est unique, et si l'on désigne par  $\bar{x}$  la classe d'équivalence complexe conjuguée de  $x$ , alors il existe une classe  $\hat{\Lambda} \in F\{U\}$  unique telle que :

$$\begin{cases} \hat{x} = \mathbf{U} \hat{\Lambda} \\ c_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\hat{\Lambda}) = M(\overline{x(\cdot)} \cdot U(\cdot)) \quad \forall \hat{\Lambda} \in \hat{\Lambda} \end{cases}$$

De plus, dans ce cas, le vecteur  $(x - \hat{x})$  est orthogonal à  $\mathcal{E}\{U\}$  et le carré de sa norme dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  est tel que :

$$\begin{cases} \|x - \hat{x}\|_{L^2}^2 = \|x\|_{L^2}^2 - \|\hat{x}\|_{L^2}^2 \\ \text{avec } \|\hat{x}\|_{L^2}^2 = \begin{cases} \langle x | \mathbf{U} \hat{\Lambda} \rangle_{L^2} \\ \langle \hat{\Lambda} | \hat{\Lambda} \rangle_F \end{cases} \end{cases}$$

2°) S'il existe une classe  $\hat{\Lambda} \in F\{U\}$  telle que ...

$$c_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\hat{\Lambda}) = M(\overline{x(\cdot)} \cdot U(\cdot)) \quad \forall \hat{\Lambda} \in \hat{\Lambda}$$

... où  $\bar{x}$  désigne la classe complexe conjuguée de  $x$ , alors  $\hat{\Lambda}$  est unique et il existe un vecteur unique  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  tel que l'on ait :

$$\begin{cases} \hat{x} = \mathbf{U} \hat{\Lambda} \\ \forall \tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\} \Rightarrow \|x - \hat{x}\|_{L^2} \leq \|x - \tilde{x}\|_{L^2} \end{cases}$$

3°) Si le vecteur paramétré U est  $\mu$ - libre, alors il existe un vecteur  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  unique tel que ...

$$\forall \tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\} \Rightarrow \|x - \hat{x}\|_{L^2} \leq \|x - \tilde{x}\|_{L^2}$$

... et l'unique classe  $\hat{\Lambda} \in F\{U\}$  telle que  $\hat{x} = \mathbf{U} \hat{\Lambda}$  se réduit à un seul élément  $\hat{\Lambda} \in E'$ .

Démonstration : Première partie

Supposons qu'il existe  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  tel que l'on ait ...

$$\|x - \hat{x}\|_{L^2} \leq \|x - \tilde{x}\|_{L^2} \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\}$$

... et soit  $\tilde{x}_0$  un vecteur appartenant à  $\mathcal{E}\{U\}$ ; posons

$$\langle (x - \hat{x}) | \tilde{x}_0 \rangle_{L^2} = \delta$$

On peut toujours supposer, sans nuire à la généralité, que  $\tilde{x}_0$  a été choisi tel que  $\|\tilde{x}_0\|_{L^2} = 1$ . Ceci dit, si nous désignons par  $\tilde{x}_1$  le vecteur de  $\mathcal{E}\{U\}$  tel que  $\tilde{x}_1 = \hat{x} + \delta \tilde{x}_0$ , il vient alors :

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}_1\|_{L^2}^2 &= \|x - \hat{x} - \delta \tilde{x}_0\|_{L^2}^2 \\ \Rightarrow \|x - \tilde{x}_1\|_{L^2}^2 &= \|x - \hat{x}\|_{L^2}^2 - \langle (x - \hat{x}) | \delta \tilde{x}_0 \rangle_{L^2} \\ &= \langle \delta \tilde{x}_0 | (x - \hat{x}) \rangle_{L^2} + |\delta|^2 \cdot \|\tilde{x}_0\|_{L^2}^2 \\ \Rightarrow \|x - \tilde{x}_1\|_{L^2}^2 &= \|x - \hat{x}\|_{L^2}^2 - \delta \cdot \langle (x - \hat{x}) | \tilde{x}_0 \rangle_{L^2} \\ &= \delta \cdot \langle \tilde{x}_0 | (x - \hat{x}) \rangle_{L^2} + |\delta|^2 \cdot \|\tilde{x}_0\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Il s'en suit que le vecteur  $\tilde{x}_1$  appartenant à  $\mathcal{E}\{U\}$  et tel que  $\tilde{x}_1 = \hat{x} + \delta \tilde{x}_0$  vérifie l'égalité suivante :

$$\|x - \tilde{x}_1\|_{L^2}^2 = \|x - \hat{x}\|_{L^2}^2 - |\delta|^2$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}_1\|_{L^2}^2 &= \|x - \hat{x}\|_{L^2}^2 \\ \Rightarrow |\delta| &= 0 \\ \Rightarrow \langle (x - \hat{x}) | \tilde{x}_0 \rangle_{L^2} &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \tilde{x}_0 \in \mathcal{E}\{U\} \\ \text{avec } \|\tilde{x}_0\|_{L^2} = 1 \end{array} \right. \\ \Rightarrow \langle (x - \hat{x}) | \tilde{x} \rangle_{L^2} &= 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\} \end{aligned}$$

En définitive, nous voyons que s'il existe  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  tel que l'on ait ...

$$\|x - \hat{x}\|_{L^2} \leq \|x - \tilde{x}\|_{L^2} \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\}$$

... alors le vecteur  $(x - \hat{x})$  est orthogonal à  $\mathcal{E}\{U\}$ . Inversement, si  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  et si  $(x - \hat{x})$  est orthogonal à  $\mathcal{E}$ , alors  $\hat{x}$  est l'unique vecteur de  $\mathcal{E}\{U\}$  rendant minimum  $\|x - \hat{x}\|_{L^2}$  car, quel que soit  $\tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  on a alors, d'après le théorème de Pythagore:

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}\|_{L^2}^2 &= \|(x - \hat{x}) + (\hat{x} - \tilde{x})\|_{L^2}^2 = \|x - \hat{x}\|_{L^2}^2 + \|\hat{x} - \tilde{x}\|_{L^2}^2 \\ \Rightarrow \|x - \tilde{x}\|_{L^2} &\geq \|x - \hat{x}\|_{L^2} \end{aligned}$$

Démonstration : Deuxième partie

Supposons qu'il existe un vecteur unique  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  tel que :

$$(a) \quad \|x - \hat{x}\|_{L^2} \leq \|x - \tilde{x}\|_{L^2} \quad \forall \tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\}$$

Puisque  $\mathbf{U}$  est inversible, on en déduit qu'il existe une classe  $\hat{\Lambda} \in F\{U\}$  unique telle que :

$$\hat{x} = \mathbf{U} \hat{\Lambda}$$

Compte tenu de la première partie de la démonstration, on sait de plus que  $(x - \hat{x})$  est orthogonal à tout vecteur  $\mathbf{U}\Lambda$  appartenant à  $\mathcal{E}\{U\}$  si bien que l'on a :

$$\begin{aligned} \langle (x - \hat{x}) | \mathbf{U}\Lambda \rangle_{\mathcal{E}} &= 0 \quad \forall \Lambda \in F\{U\} \\ \Leftrightarrow \langle \hat{x} | \mathbf{U}\Lambda \rangle_{\mathcal{E}} &= \langle x | \mathbf{U}\Lambda \rangle_{\mathcal{E}} \quad \forall \Lambda \in F\{U\} \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{U}\hat{\Lambda} | \mathbf{U}\Lambda \rangle_{\mathcal{E}} &= \langle x | \mathbf{U}\Lambda \rangle_{\mathcal{E}} \quad \forall \Lambda \in F\{U\} \end{aligned}$$

Mais puisque  $\mathbf{U}$  établit un isomorphisme entre  $\mathcal{E}\{U\}$  et  $F\{U\}$  on a donc en définitive :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \langle \hat{\Lambda} | \Lambda \rangle_F &= \langle x | \mathbf{U}\Lambda \rangle_{\mathcal{E}} \quad \forall \Lambda \in F\{U\} \\ \Leftrightarrow (B) : \langle \Lambda | \hat{\Lambda} \rangle_F &= \langle \mathbf{U}\Lambda | x \rangle_{\mathcal{E}} \quad \forall \Lambda \in F\{U\} \\ \Leftrightarrow \langle \lambda, c_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\hat{\Lambda}) \rangle &= M \{ \langle \lambda, U(\cdot) \rangle \cdot \overline{x(\cdot)} \} \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in E' \\ \hat{\Lambda} \in \hat{\Lambda} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \langle \lambda, c_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\hat{\Lambda}) \rangle &= \langle \lambda, M \{ \overline{x(\cdot)} \cdot U(\cdot) \} \rangle \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in E' \\ \hat{\Lambda} \in \hat{\Lambda} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow c_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\hat{\Lambda}) &= M \{ \overline{x(\cdot)} \cdot U(\cdot) \} \quad \forall \hat{\Lambda} \in \hat{\Lambda} \end{aligned}$$

On en conclut que, s'il existe un vecteur unique  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  satisfaisant, la relation (a), alors il existe une classe unique  $\hat{\Lambda} \in F\{U\}$  telle que...

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = \mathbf{U} \hat{\Lambda} \\ c_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\hat{\Lambda}) = M \{ \overline{x(\cdot)} \cdot U(\cdot) \} \quad \forall \hat{\Lambda} \in \hat{\Lambda} \end{array} \right.$$

D'autre part, si  $\hat{x} = \mathbf{U} \hat{\Lambda}$  existe, alors puisque  $(x - \hat{x})$  est orthogonal à tout vecteur de  $\mathcal{E}\{U\}$ , il est en particulier orthogonal à  $\hat{x}$  et l'on a :

$$\begin{aligned} \|x - \hat{x}\|_{L^2}^2 &= \langle (x - \hat{x}) | (x - \hat{x}) \rangle_{L^2} \\ &= \langle x | (x - \hat{x}) \rangle_{L^2} \\ &= \|x\|_{L^2}^2 - \langle x | \hat{x} \rangle_{L^2} \\ \Rightarrow (\gamma) : \|x - \hat{x}\|_{L^2}^2 &= \|x\|_{L^2}^2 - \langle x | \mathbf{U} \hat{\Lambda} \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

En définitive,  $(x - \hat{x})$  étant orthogonal à  $\hat{x}$ , on peut appliquer le théorème de Pythagore et, compte tenu des relations (B) et (γ) déjà obtenues, il

$$\left\{ \begin{array}{l} \|x - \hat{x}\|_{L^2}^2 = \|x\|_{L^2}^2 - \|\hat{x}\|_{L^2}^2 \\ \text{avec } \|\hat{x}\|_{L^2}^2 = \langle x | \mathbf{U} \hat{\Lambda} \rangle_{L^2} = \langle \hat{\Lambda} | \hat{\Lambda} \rangle_F \end{array} \right.$$

Démonstration : Troisième partie

Si  $U$  est  $\mu$ - libre, on sait que  $F\{U\}$  est identique à  $E'$  et que  $F\{U\}$  et  $\mathcal{E}\{U\}$  sont des espaces complets. On en déduit en particulier que chaque classe  $A \in F\{U\}$  contient un seul élément  $\lambda \in E'$  et que  $\mathcal{E}\{U\}$  est fermé puisqu'il est complet.

Ceci dit, comme  $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$  est un espace de Hilbert et que  $\mathcal{E}\{U\}$  est un sous-espace fermé de  $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$ , on sait d'après le théorème de la projection orthogonale que pour tout vecteur  $x \in L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$ , il existe un vecteur unique  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  tel que :

$$\forall \tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\} \Rightarrow \|x - \hat{x}\|_{L^2} \leq \|x - \tilde{x}\|_{L^2}$$

b) Définition

Soit d'une part  $U$  un vecteur paramétré appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$  et soit d'autre part  $x$  un vecteur fixé dans  $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$ . Par définition, nous appellerons " $\mathcal{E}\{U\}$  - estimateur optimal de  $x$ " ou plus simplement "estimateur de  $x$ ", le vecteur unique  $\hat{x} \in \mathcal{E}\{U\}$  s'il existe tel que :

$$\forall \tilde{x} \in \mathcal{E}\{U\} \Rightarrow \|x - \hat{x}\|_{L^2} \leq \|x - \tilde{x}\|_{L^2}$$

II-3.5 - Théorème de Gauss-Markov généralisé

a) Énoncé

Soient  $X(\cdot)$  et  $U(\cdot)$  deux vecteurs paramétrés appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$  tels que l'on ait ...

- 1°)  $X(\omega) = \sum_{j=1}^n a^j(\omega) \cdot V_j + U(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$
- 2°)  $M\{U(\cdot)\} = \theta_E$
- 3°)  $U$  est  $\mu$ - libre
- 4°)  $\forall j \Rightarrow \exists \mathcal{V}_j \in E' : c_{uu}(\mathcal{V}_j) = V_j$

où  $\{a^j(\cdot)\}_{j=1}^{j=n}$  est une famille de  $n$  classes d'équivalence appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$  et  $\{V_j\}_{j=1}^{j=n}$  une famille de  $n$  vecteurs linéairement indépendants, appartenant à  $E'$ . Dans ces conditions, on a les propriétés suivantes :

1°) La matrice  $[G]$  telle que ...

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \text{ avec } G_{ij} = \langle \mathcal{V}_i, c_{uu}(\mathcal{V}_j) \rangle$$

... est inversible.

2°) Les sous-ensembles  $A_x^j \in L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$  tels que...

$$\forall \tilde{a}^j \in A_x^j \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha) \exists \tilde{\lambda} \in E' : \tilde{a}^j(\omega) = \langle \tilde{\lambda}^j, X(\omega) \rangle \quad \forall \omega \in \Omega \\ \beta) M\{\tilde{a}^j(\cdot)\} = M\{a^j(\cdot)\} \end{cases}$$

... ne sont pas vides quel que soit  $j$  et il existe une famille unique  $\{\hat{\lambda}^j\}_{j=1}^{j=n}$  de  $n$  vecteurs appartenant à  $E'$  et tels que pour  $j$  fixé on ait :

$$\begin{cases} \alpha) : \hat{a}^j(\omega) = \langle \hat{\lambda}^j, X(\cdot) \rangle \quad \forall \omega \in \Omega \\ \beta) : \|\hat{a}^j - a^j\|_{L^2} = \min_{\tilde{a}^j \in A_x^j} \|\tilde{a}^j - a^j\|_{L^2} \end{cases}$$

3°) Les  $n$  vecteurs  $\hat{\lambda}^j \in E'$  sont donnés par la relation matricielle

suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}^1 \\ \vdots \\ \hat{\lambda}^n \end{bmatrix} = [G]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{V}_n \end{bmatrix}$$

4°) On a la relation suivante :

$$\forall (i, j) \Rightarrow \langle (\hat{a}^i - a^i) \mid (\hat{a}^j - a^j) \rangle_{L^2} = \bar{G}^{ij}$$

... où les nombres complexes  $\bar{G}^{ij}$  sont les éléments en  $i^{em}$  ligne et  $j^{em}$  colonne de la matrice  $[G]^{-1}$ .

b) Démonstration : Première partie

Puisque les  $v^j$  sont par hypothèse linéairement indépendants, on en déduit que :

$$\Leftrightarrow \# \{b^j\}_{j=1}^{j=n} : \sum_j b^j v_j = \theta_E$$

$$\Leftrightarrow \# \{b^j\}_{j=1}^{j=n} : \sum_j b^j c_{uu}(v_j) = \theta_E$$

$$\Leftrightarrow \# \{b^j\}_{j=1}^{j=n} : c_{uu}(\sum_j b^j v_j) = \theta_E = c_{uu}(\theta_F)$$

Comme  $c_{uu}$  est supposé inversible, on a alors...

$$\Leftrightarrow \# \{b^j\}_{j=1}^{j=n} : \sum_j b^j v_j = \theta_F$$

... et il s'en suit que les  $v_j$  sont linéairement indépendants. D'autre part, puisque le vecteur paramétré  $U$  est  $\mu$ - libre par hypothèse, on est assuré par la proposition II-3.1.e que  $F = F(U)$  est identique à  $E'$  ; on en déduit que ...

$$G_{ij} = \langle v_i, c_{uu}(v_j) \rangle = \langle v_i | v_j \rangle_F$$

... d'où il découle que  $[G]$  est inversible en tant que matrice de Gram d'un système de  $n$  vecteurs  $\{v_j\}_{j=1}^{j=n}$  linéairement indépendants.

Démonstration : Deuxième partie

Supposons que,  $j$  étant fixé, il existe  $\lambda^j \in E'$  tel que :

$$\forall k \Rightarrow \langle \lambda^j, v_k \rangle = \delta_k^j$$

On a alors pour tout  $k$  en désignant par  $G^{ij}$  les éléments de la matrice inverse de  $[G]$  :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \langle \lambda^j, v_k \rangle &= \sum_i G^{ij} \cdot G_{ik} \quad (\text{car } \delta_k^j = \sum_i G^{ij} \cdot G_{ik}) \\ &= \sum_i G^{ij} \cdot \langle v_i | v_k \rangle_F \\ &= \langle \sum_i G^{ij} \cdot v_i | v_k \rangle_F \\ &= \langle \sum_i G^{ij} \cdot v_i, c_{uu}(v_k) \rangle \\ &= \langle \sum_i G^{ij} \cdot v_i, v_k \rangle \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \langle \lambda^j - \sum_i G^{ij} v_i, v_k \rangle = 0 \quad \forall k$$

Si nous posons ...

$$(1) \quad \tilde{\lambda}^j = \sum_i G^{ij} v_i$$

... alors on a en définitive l'équivalence suivante pour  $j$  fixé :

$$\left\{ \begin{aligned} (2) \quad [ \exists \lambda^j \in E' : \langle \lambda^j, v_k \rangle = \delta_k^j \quad \forall k ] \\ \Leftrightarrow (3) \quad [ \exists \mathcal{W} \in E' : \mathcal{W} = (\lambda^j - \tilde{\lambda}^j) \text{ et } \langle \mathcal{W}, v_k \rangle = 0 \quad \forall k ] \end{aligned} \right.$$

La relation (3) étant toujours satisfaite pour  $\mathcal{W} \equiv \theta_{E'}$ , il s'en suit que  $\tilde{\lambda}^j$  est une solution particulière du système ...

$$(4) \quad \forall k \Rightarrow \langle \tilde{\lambda}^j, v_k \rangle = \delta_k^j$$

... et nous allons montrer maintenant que l'on a :

$$(5) \quad [ \forall \lambda^j \in E' : \lambda^j \neq \tilde{\lambda}^j \text{ et } \langle \lambda^j, v_k \rangle = \delta_k^j \quad \forall k ] \Rightarrow \| \lambda^j \|_F < \| \tilde{\lambda}^j \|_F$$

En effet, d'après ce que nous venons de voir, si  $\lambda^j$  est une autre solution du système (4) différente de  $\tilde{\lambda}^j$ , alors on a :

$$\left\{ \langle \lambda^j, v_k \rangle = \delta_k^j \quad \forall k \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^j = \mathcal{W} + \tilde{\lambda}^j \\ \text{avec } \begin{cases} \langle \mathcal{W}, v_k \rangle = 0 \quad \forall k \\ \mathcal{W} \neq \theta_{E'} \end{cases} \end{cases}$$

... d'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \| \lambda^j \|_F^2 &= \| \tilde{\lambda}^j + \mathcal{W} \|_F^2 \\ &= \| \tilde{\lambda}^j \|_F^2 + \langle \tilde{\lambda}^j | \mathcal{W} \rangle_F + \langle \mathcal{W} | \tilde{\lambda}^j \rangle_F + \| \mathcal{W} \|_F^2 \end{aligned}$$

Comme d'autre part on a ....

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\lambda}^j | \mathcal{W} \rangle_F &= \langle \mathcal{W} | \tilde{\lambda}^j \rangle_F = \langle \mathcal{W} | \sum_k G^{kj} v_k \rangle_F \\ &= \sum_k \overline{G^{kj}} \cdot \langle \mathcal{W} | v_k \rangle_F \\ &= \sum_k \overline{G^{kj}} \cdot \langle \mathcal{W}, c_{uu}(v_k) \rangle \\ &= \sum_k \overline{G^{kj}} \cdot \langle \mathcal{W}, v_k \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

... On en conclut que :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\chi}^j\|_F^2 &= \|\hat{\chi}^j\|_F^2 + \|\mathcal{W}\|_F^2 \\ \Rightarrow \|\tilde{\chi}^j\|_F &> \|\hat{\chi}^j\|_F \end{aligned}$$

Si nous posons ...

$$(6) \quad \begin{cases} \tilde{a}^j(\omega) = \langle \tilde{\chi}^j, X(\omega) \rangle \quad \forall \omega \in \Omega \\ \text{avec } \tilde{\chi}^j = \hat{\chi}^j + \mathcal{W} \end{cases}$$

... on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{a}^j(\omega) &= \sum_i \langle \tilde{\chi}^j, v_i \rangle \cdot a^i(\omega) + \langle \tilde{\chi}^j, U(\omega) \rangle \quad \forall \omega \in \Omega \\ \Rightarrow M(\tilde{a}^j) &= \sum_i \langle \tilde{\chi}^j, v_i \rangle \cdot M(a^i) + \langle \tilde{\chi}^j, M\{U(\cdot)\} \rangle \end{aligned}$$

Compte tenu que par hypothèse  $M\{U(\cdot)\} = \Theta_E$  et que  $\langle \tilde{\chi}^j, v_k \rangle = \delta_k^j$  quel que soit  $k$  d'après les relations (2) et (3) du paragraphe précédent, il s'en suit que l'on a l'implication suivante :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\chi}^j &= \hat{\chi}^j + \mathcal{W} \\ \tilde{a}^j(\omega) &= \langle \tilde{\chi}^j, X(\omega) \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (7) & M(\tilde{a}^j) = M(a^j) \\ (8) & \{\tilde{a}^j(\omega) - a^j(\omega)\} = \langle \tilde{\chi}^j, U(\omega) \rangle \end{cases}$$

Des relations (6) et (7) on déduit immédiatement que la classe d'équivalence  $\tilde{a}^j \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ainsi construite appartient à  $A_X^j$ ; comme d'autre part la relation (8) nous permet d'écrire ...

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}^j - a^j\|_{L^2}^2 &= M \{ \langle \tilde{\chi}^j, U(\cdot) \rangle \cdot \overline{\langle \tilde{\chi}^j, U(\cdot) \rangle} \} \\ &= \langle \tilde{\chi}^j, c_{uu}(\tilde{\chi}^j) \rangle \\ &= \|\tilde{\chi}^j\|_F^2 \end{aligned}$$

.. on en conclut, d'après les relations (1), (5) et (7) que l'on a :

$$\begin{aligned} (1) \quad \hat{\chi}^j &= \sum_i G^{ij} \mathcal{V}_i \\ (6) \quad \hat{a}^j(\omega) &= \langle \hat{\chi}^j, X(\omega) \rangle \end{aligned} \left\} \Rightarrow \|\hat{a}^j - a^j\|_{L^2} = \min_{\tilde{a}^j \in A_X^j} \|\tilde{a}^j - a^j\|_{L^2}$$

Démonstration de troisième partie

D'après la relation (1) posée dans la première partie de la démonstration, on a :

$$\forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \hat{\chi}^j = \sum_i G^{ij} \mathcal{V}_i$$

Il s'en suit que l'on peut écrire la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{\chi}^1 \\ \vdots \\ \hat{\chi}^n \end{bmatrix} = [G]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{V}_n \end{bmatrix}$$

Démonstration de quatrième partie

Pour achever la démonstration, il ne nous reste plus qu'à montrer que l'on a ...

$$\langle (\hat{a}^i - a^i) \mid (\hat{a}^j - a^j) \rangle_{L^2} = \overline{G^{ij}}$$

... où  $\overline{G^{ij}}$  est le complexe conjugué de l'élément  $G^{ij}$  situé en  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne dans la matrice  $[G]^{-1}$ .

Cela résulte immédiatement de la relation (8) qui nous permet d'écrire les égalités suivantes en posant  $\tilde{\chi}^k \equiv \hat{\chi}^k$ , quel que soit  $k$  :

$$\begin{aligned} \langle (\hat{a}^i - a^i) \mid (\hat{a}^j - a^j) \rangle_{L^2} &= M \{ (\hat{a}^i - a^i) \cdot \overline{(\hat{a}^j - a^j)} \} \\ &= M \{ \langle \tilde{\chi}^i, U(\cdot) \rangle \cdot \overline{\langle \tilde{\chi}^j, U(\cdot) \rangle} \} \\ &= \langle \tilde{\chi}^i, c_{uu}(\tilde{\chi}^j) \rangle \\ &= \langle \sum_k G^{ki} \mathcal{V}_k, \sum_h G^{hj} c_{uu}(\mathcal{V}_h) \rangle \\ &= \sum_k \sum_h G^{ki} \overline{G^{hj}} \cdot \langle \mathcal{V}_k, c_{uu}(\mathcal{V}_h) \rangle \\ &= \sum_k \sum_h G^{ki} \cdot \overline{G^{hj}} \cdot G_{kh} \\ &= \sum_h \delta_h^i \cdot \overline{G^{hj}} \\ &= \overline{G^{ij}} \end{aligned}$$

c) Remarque

Dans le cas où  $E$  est l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille  $m$  et que  $X(\omega)$  et  $U(\omega)$  sont des matrices dont les éléments sont des classes d'équivalence de variables aléatoires de variance finie définies sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , on vérifie sans difficulté que le théorème qui vient d'être démontré s'identifie au théorème de Gauss-Markov bien connu des statisticiens.

## Chapitre III

### APPLICATION A L'ESTIMATION LINÉAIRE DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

#### III-1 - INTRODUCTION

Maintenant que nous disposons d'outils mathématiques suffisants, nous pouvons aborder le véritable objectif de cette étude, à savoir l'estimation (linéaire) optimale des fonctions numériques. Toutes les méthodes de construction d'estimateur que nous présentons dans ce chapitre sont basées sur les théorèmes II-3.4 et II-3.5 et consistent en fait à minimiser (quand c'est possible) la norme de l'écart entre l'estimateur recherché et la quantité estimée ; cette norme sera toujours prise dans un espace  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  approprié que nous choisirons en fonction de la quantité à estimer et de la nature de l'information disponible. Nous étudierons ainsi successivement :

- 1°) L'approximation en  $\mu$ - moyenne quadratique bien connue des mathématiciens, et qui est présentée ici comme une conséquence immédiate du théorème II-3.4
- 2°) L'interpolation en  $\mu$ - moyenne quadratique qui découle elle aussi du théorème II-3.4 et que nous avons été amené à développer pour pallier à certains inconvénients rencontrés dans l'utilisation des filtres de Wiener (ou des filtres autoregressifs) comme cela a été dit au chapitre 0 .
- 3°) Le filtrage statistique optimal d'un bruit additif affectant une fonction continue, problème que nous résoudrons en utilisant le théorème II-3.5

Enfin, en conclusion, nous aborderons brièvement l'aspect informatique des méthodes d'estimation proposées, et nous donnerons quelques exemples d'applications qui permettront au lecteur de se faire une idée concrète sur l'efficacité de ces méthodes.

III-2.1 - Espaces  $E$  et  $E'$  : Définitions

a) Espace  $E$

Soit  $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur le compact  $T \subset \mathbb{R}^n$  et à valeurs dans le corps des complexes  $\mathbb{C}$ . On sait que cet espace devient un Banach séparable lorsqu'on le munit de la norme de la convergence uniforme; c'est pourquoi nous poserons dans toutes les applications qui suivront :

$$\left\{ \begin{array}{l} E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C}) \\ \|f\|_E = \sup_{t \in T} |f(t)| \quad \forall f \in E \end{array} \right.$$

b) Espace  $E'$

Soit  $\mathcal{M}(T)$  l'espace des mesures complexes régulières définies sur  $(T, \mathcal{B}_T)$  dont on sait qu'il constitue un Banach lorsqu'on le munit de la norme suivante ...

$$\forall m \in \mathcal{M}(T) \Rightarrow \|m\|_{\mathcal{M}} = \sup_i \sum_{i \in I} |m(T_i)|$$

... où la borne supérieure est prise sur toutes les partitions finies  $\{T_i\}_{i \in I}$  de  $T$ .

Le théorème de représentation de Riesz nous permet d'identifier le dual topologique  $E'$  avec  $\mathcal{M}(T)$  muni de la norme ci-dessus et nous apprend de plus que pour tout  $\lambda \in E'$  il existe une mesure  $m_\lambda \in \mathcal{M}(T)$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \quad \forall f \in E \Rightarrow \langle \lambda, f \rangle = \int_T f(t) \cdot m_\lambda(dt) \\ 2^\circ) \quad \|\lambda\|_{E'} = \|m_\lambda\|_{\mathcal{M}} \end{array} \right.$$

c) Notations

A partir de maintenant, et pour plus de commodité d'écriture, nous adopterons la même notation pour désigner aussi bien une fonctionnelle  $\lambda \in E'$  que la mesure  $m_\lambda \in \mathcal{M}(T)$  associée et nous poserons par convention :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in E' \\ f \in E \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \lambda, f \rangle = \int_T f(t) \cdot \lambda(dt)$$

d) Remarque

Supposons que le compact  $T$  soit en fait un ensemble discret de  $N$  points  $t_i \in \mathbb{R}^n$  :

$$T \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$$

Dans ces conditions, toute fonction définie sur  $T$  (muni de sa topologie discrète) appartient à  $E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  et toute fonctionnelle linéaire continue  $\lambda \in E'$  est telle que ...

$$\lambda(dt) = \sum_{t \in T} a_t \cdot \delta_t(dt)$$

... où chaque  $\delta_t(dt)$  est une mesure de Dirac placée au point  $t \in T$ , tandis que les  $\{a_t\}_{t \in T}$  constituent une famille de  $N$  constantes complexes.

On déduit immédiatement de ceci que pour toute fonction  $f \in E$  et pour toute fonctionnelle linéaire continue  $\lambda \in E'$ , on a, si  $T$  est discret :

$$\langle \lambda, f \rangle = \int_T f(t) \cdot \lambda(dt) = \sum_{t \in T} a_t \cdot f(t)$$

III-2.2 - Projection canonique  $\Pi_t$

a) Définition

On appelle projection canonique de  $E$  sur  $\mathbb{C}$  et on note  $\Pi_t$  l'application dépendant du paramètre  $t \in T$  qui à tout  $f \in E$  associe le nombre complexe  $f(t) \in \mathbb{C}$  :

$$f \xrightarrow{\Pi_t} f(t)$$

b) Proposition 1

Énoncé

Pour tout  $t$  fixé dans  $T$ , l'application  $\Pi_t$  est continue de  $E$  dans  $\mathbb{C}$  et est mesurable de  $(E, \mathcal{B}_E)$  dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ .

Démonstration

Par définition de  $\Pi_t$  et de  $E$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f - f_0\|_E = \sup_{t \in T} |f(t) - f_0(t)| \\ |\Pi_t(f) - \Pi_t(f_0)| = |f(t) - f_0(t)| \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \Pi_t(f) - \Pi_t(f_0) \right| \leq \|f - f_0\|_E \quad \forall \begin{cases} f \in E \\ f_0 \in E \\ t \in T \end{cases}$$

On peut alors écrire pour tout réel positif  $\epsilon$  l'implication suivante qui exprime la continuité de  $\Pi_t$  au point  $f_0 \in E$  :

$$\|f - f_0\|_E < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \Pi_t(f) - \Pi_t(f_0) \right| < \epsilon$$

Enfin,  $\Pi_t$  étant continue de  $E$  dans  $\mathbb{C}$  on en déduit immédiatement, à l'aide de la proposition I-2.2.c, que  $\Pi_t$  est mesurable de  $(E, \mathcal{B}_E)$  dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ .

### a) Lemme technique

#### Énoncé

Soit  $B(f_0, \rho) \subset E$  une boule fermée de centre  $f_0 \in E$  et de rayon  $\rho > 0$ . Pour toute suite (dénombrable) de points  $\mathcal{F} = \{\tau_i\}$  dense dans le compact  $T$ , on a la relation suivante ...

$$B(f_0, \rho) = \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{F}} \Pi_{\tau_i}^{-1} \left\{ B[f_0(\tau_i), \rho] \right\}$$

... où chaque  $B[f_0(\tau_i), \rho]$  désigne une boule fermée de  $\mathbb{C}$  dont le centre est  $f_0(\tau_i)$  et le rayon  $\rho$ .

#### Démonstration : Première partie

Soient  $f$  et  $f_0$  deux fonctions appartenant à  $\mathcal{F}(T, \mathbb{C})$  et soit  $\mathcal{F} = \{\tau_i\}$  une suite de points dense dans le compact  $T$ .

La continuité de  $f$  et  $f_0$  sur  $T$  nous permet d'écrire ...

$$\forall \begin{cases} \epsilon > 0 \\ t \in T \end{cases} \Rightarrow \exists \eta(\epsilon, t) : \| \theta - t \| < \eta \Rightarrow \begin{cases} |f(\theta) - f(t)| < \epsilon/2 \\ |f_0(\theta) - f_0(t)| < \epsilon/2 \end{cases}$$

... d'où l'on déduit puisque  $\mathcal{F}$  est dense dans  $T$  :

$$\forall \begin{cases} \epsilon > 0 \\ t \in T \end{cases} \Rightarrow \exists \tau_i \in \mathcal{F} : \begin{cases} |f(\tau_i) - f(t)| < \epsilon/2 \\ |f_0(\tau_i) - f_0(t)| < \epsilon/2 \end{cases}$$

Comme d'autre part les inégalités suivantes sont toujours

vérifiées ...

$$\left| f(t) - f_0(t) \right| - \left| f(\tau_i) - f_0(\tau_i) \right| \leq \left| \{f(t) - f_0(t)\} - \{f(\tau_i) - f_0(\tau_i)\} \right|$$

$$\leq \left| f(t) - f(\tau_i) \right| + \left| f_0(t) - f_0(\tau_i) \right|$$

... il s'en suit que l'on peut écrire :

$$\forall \begin{cases} \epsilon > 0 \\ t \in T \end{cases} \Rightarrow \exists \tau_i \in \mathcal{F} : \left| f(t) - f_0(t) \right| - \left| f(\tau_i) - f_0(\tau_i) \right| \leq \epsilon$$

$$\Rightarrow \exists \tau_i \in \mathcal{F} : \left| f(t) - f_0(t) \right| \leq \left| f(\tau_i) - f_0(\tau_i) \right| + \epsilon$$

En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 et en passant à la limite, on a en définitive ...

$$\forall \begin{cases} t \in T \\ \rho > 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \tau_i \in \mathcal{F} : \left| f(\tau_i) - f_0(\tau_i) \right| < \rho \Rightarrow \left| f(t) - f_0(t) \right| < \rho$$

... d'où l'on déduit l'implication directe de la relation d'équivalence ci-dessous étant entendu que l'implication réciproque est toujours vraie puisque  $\mathcal{F} \subset T$  :

$$\sup_{\tau_i \in \mathcal{F}} \left| f(\tau_i) - f_0(\tau_i) \right| < \rho \Leftrightarrow \sup_{t \in T} \left| f(t) - f_0(t) \right| < \rho$$

#### Démonstration : Deuxième partie

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} B(f_0, \rho) &= \left\{ f : \|f - f_0\|_E \leq \rho \right\} \\ &= \left\{ f : \sup_{t \in T} |f(t) - f_0(t)| \leq \rho \right\} \end{aligned}$$

D'après la relation établie dans la première partie de la démonstration, on en déduit que :

$$\begin{aligned} B(f_0, \rho) &= \left\{ f : \left| f(\tau_i) - f_0(\tau_i) \right| \leq \rho \quad \forall \tau_i \in \mathcal{F} \right\} \\ &= \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{F}} \left\{ f : \left| f(\tau_i) - f_0(\tau_i) \right| \leq \rho \right\} \\ &= \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{F}} \left\{ f : \left| \Pi_{\tau_i}(f) - f_0(\tau_i) \right| \leq \rho \right\} \\ &= \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{F}} \left\{ f : \Pi_{\tau_i}(f) \in B[f_0(\tau_i), \rho] \right\} \\ &= \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{F}} \Pi_{\tau_i}^{-1} \left\{ B[f_0(\tau_i), \rho] \right\} \end{aligned}$$

III-2.3 - Vecteurs paramétrés  $U_f(\cdot) \in L_E^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

a) Théorème

Énoncé

Soit d'une part  $T$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré où  $\mu$  est une mesure positive normée définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Soit d'autre part  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  une famille de fonctions réelles ou complexes, continues et uniformément bornées sur  $T$  pour  $\mu$ -presque toute valeur du paramètre  $\omega \in \Omega$  :

- 1°)  $f(\omega, \cdot) \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$   $\mu$ -p.p.
- 2°)  $\exists N < +\infty : \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq N$   $\mu$ -p.p.

Soit enfin  $U_f$  une application de  $\Omega$  dans  $E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  telle que :

$$\forall \omega \in \Omega \Rightarrow U_f(\omega) = f(\omega, \cdot) \in E$$

Dans ces conditions,  $U_f$  appartient à  $L_E^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  si, et seulement, si  $f(\omega, t)$  est pour tout  $t \in T$  fixé, une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$  :

$$\left[ f(\cdot, t) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}) \quad \forall t \in T \right] \Leftrightarrow U_f(\cdot) \in L_E^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

Démonstration : Première partie

La projection canonique  $\Pi_t$  étant mesurable de  $(E, \mathcal{B}_E)$  dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$  pour tout  $t$  fixé dans  $T$ , il s'en suit que l'on a :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} t \in T \\ B_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \end{array} \right\} &\Rightarrow f^{-1}(B_{\mathbb{C}}, t) = \left\{ \Pi_t \circ U_f \right\}^{-1}(B_{\mathbb{C}}) \\ &= U_f^{-1} \circ \Pi_t^{-1}(B_{\mathbb{C}}) \\ &= U_f^{-1}(B_E) \quad \text{avec } B_E \in \mathcal{B}_E \end{aligned}$$

Par ailleurs, si  $U_f$  appartient à  $L_E^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , alors  $U_f$  appartient également à  $\mathcal{M}_E(\Omega, \mathcal{A})$  ce qui implique que  $U_f^{-1}(B_E)$  est un élément de  $\mathcal{A}$  quel que soit  $B_E \in \mathcal{B}_E$ . En définitive, puisque pour tout  $t \in T$  et pour tout  $B_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  il existe  $B_E \in \mathcal{B}_E$  tel que  $f^{-1}(B_{\mathbb{C}}, t) = U_f^{-1}(B_E)$ , on en déduit que l'on a l'implication suivante :

$$U_f \in L_E^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow f^{-1}(B_{\mathbb{C}}, t) \in \mathcal{A} \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} B_{\mathbb{C}} \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \\ t \in T \end{array} \right.$$

Il s'en suit que l'on peut écrire :

$$U_f \in L_E^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}) \quad \forall t \in T$$

Démonstration : Deuxième partie

Soit  $\mathcal{J} = \{\tau_i\}$  une suite de points dense dans le compact  $T$ . Pour toute boule fermée  $B(f_0, \rho) \in E$  de rayon  $\rho \geq 0$ , nous savons d'après le lemme III-2.2.c que l'on a ...

$$B(f_0, \rho) = \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{J}} \Pi_{\tau_i}^{-1}(B[f_0(\tau_i), \rho])$$

... où chaque  $B[f_0(\tau_i), \rho]$  désigne une boule fermée de  $\mathbb{C}$ . On peut alors écrire :

$$U_f^{-1}(B(f_0, \rho)) = U_f^{-1} \left\{ \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{J}} \Pi_{\tau_i}^{-1}(B[f_0(\tau_i), \rho]) \right\}$$

Toute application inverse respectant les opérations sur les ensembles, il s'en suit que l'on a :

$$\begin{aligned} U_f^{-1}(B(f_0, \rho)) &= \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{J}} U_f^{-1} \circ \Pi_{\tau_i}^{-1} \left\{ B[f_0(\tau_i), \rho] \right\} \\ &= \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{J}} (\Pi_{\tau_i} \circ U_f)^{-1} \left\{ B[f_0(\tau_i), \rho] \right\} \\ &= \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{J}} f^{-1} \left\{ B[f_0(\tau_i), \rho], \tau_i \right\} \end{aligned}$$

Si nous supposons que  $f(\cdot, t) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A})$  quel que soit  $t \in T$ , nous concluons que les boules fermées  $B[f_0(\tau_i), \rho]$  appartiennent à  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ . on en déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} f^{-1} \left\{ B[f_0(\tau_i), \rho], \tau_i \right\} &\in \mathcal{A} \quad \forall \tau_i \in \mathcal{J} \\ \Rightarrow \bigcap_{\tau_i \in \mathcal{J}} f^{-1} \left\{ B[f_0(\tau_i), \rho], \tau_i \right\} &\in \mathcal{A} \\ \Rightarrow U_f^{-1}(B(f_0, \rho)) &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Puisque les boules fermées  $B(f_0, \rho)$  engendrent  $\mathcal{B}_E$ , on en conclut donc que si  $f(\cdot, t) \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathcal{A})$  quel que soit  $t \in T$ , alors  $U_f(\cdot) \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathcal{A})$  :

$$f(\cdot, t) \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathcal{A}) \quad \forall t \in T \quad \Rightarrow \quad U_f \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathcal{A})$$

Pour démontrer que l'on a ...

$$f(\cdot, t) \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathcal{A}) \quad \forall t \in T \quad \Rightarrow \quad U_f \in \mathcal{L}_1^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

... il nous suffit donc de prouver que  $\int_{\Omega} \|U_f(\omega)\|_E^2 \mu(d\omega)$  existe bien.

Pour cela, souvenons-nous que par hypothèse, on a :

$$\exists N < +\infty : \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq N \quad \mu\text{-p.p.}$$

On peut alors écrire :

$$\|U_f(\omega)\|_E^2 \leq N^2 \quad \mu\text{-p.p.}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \|U_f(\omega)\|_E^2 \mu(d\omega) \leq N^2 < +\infty$$

$$\Rightarrow U_f(\cdot) \in \mathcal{L}_1^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

#### b) Définition

Soit d'une part  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré où  $\mu$  est une mesure positive normée définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  et soit d'autre part  $T$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  une famille de fonctions de  $E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \quad \forall \omega \in \Omega \quad \Rightarrow \quad f(\omega, \cdot) \in E \\ 2^\circ) \quad \forall t \in T \quad \Rightarrow \quad f(\cdot, t) \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathcal{A}) \\ 3^\circ) \quad \exists N < +\infty : \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq N \quad \mu\text{-p.p.} \end{array} \right.$$

Par définition, nous désignerons par  $U_f(\cdot) \in \mathcal{L}_1^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  l'unique vecteur paramétré associé à la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  par la relation suivante :

$$\forall U_f(\cdot) \in U_f(\cdot) \quad \Rightarrow \quad U_f(\omega) = f(\omega, \cdot) \quad \mu\text{-p.p.}$$

#### c) Conséquence

Soit  $T$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$ . Dans tout ce qui suit, et chaque fois qu'il sera question d'un vecteur paramétré  $U_f(\cdot) \in \mathcal{L}_1^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , il sera sous-entendu que celui-ci est associé à une famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  de fonctions telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \quad f(\omega, \cdot) \in E \quad \mu\text{-p.p.} \\ 2^\circ) \quad \forall t \in T \quad \Rightarrow \quad f(\cdot, t) \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathcal{A}) \\ 3^\circ) \quad \exists N < +\infty : \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq N \quad \mu\text{-p.p.} \end{array} \right.$$

Inversement, chaque fois qu'une famille de fonctions  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  sera associée à un vecteur paramétré  $U_f(\cdot) \in \mathcal{L}_1^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , il sera sous-entendu que cette famille vérifie les trois relations ci-dessus.

#### III-2.4 - Fonction moyenne $\phi_f$

Soit  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  la famille de fonctions associée au vecteur paramétré  $U_f(\cdot) \in \mathcal{L}_1^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Par définition, nous appellerons fonction moyenne de la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  la fonction  $\phi_f(\cdot)$  telle que :

$$\phi_f(t) = \int_{\Omega} f(\omega, t) \mu(d\omega) \quad \forall t \in T$$

Compte tenu que  $U_f(\cdot)$  appartient à  $\mathcal{L}_1^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , il s'en suit que  $\phi_f(\cdot)$  existe toujours, appartient à  $E$  et peut être identifié avec le vecteur moyenne de  $U_f(\cdot)$  :

$$\phi_f(\cdot) \equiv M\{U_f(\cdot)\}$$

#### III-2.5 - Fonctions de covariance et de corrélation

##### a) Définitions

##### Introduction

Dans les définitions qui suivent, nous désignerons par  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  deux familles de fonctions supposées associées respectivement à deux vecteurs paramétrés  $U_f(\cdot)$  et  $U_g(\cdot)$  appartenant à  $\mathcal{L}_1^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ .

Fonction de covariance

Par définition, nous appellerons fonction de covariance des familles  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$ , la fonction (complexe)  $\Gamma_{fg}(t_1, t_2)$  définie sur  $(T \times T)$  par la relation suivante :

$$\Gamma_{fg}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} f(\omega, t_1) \cdot \overline{g(\omega, t_2)} \cdot \mu(d\omega)$$

Si nous désignons par  $\delta_{t_1} \in E'$  et  $\delta_{t_2} \in E'$  les mesures de Dirac placées aux points  $t_1 \in T$  et  $t_2 \in T$ , on vérifie sans difficulté que l'on a ...

$$\Gamma_{fg}(t_1, t_2) = \langle \delta_{t_1}, C_{\psi, \psi}(\delta_{t_2}) \rangle$$

... d'où l'on déduit que  $\Gamma_{fg}$  existe toujours sur  $(T \times T)$ .

Fonction de covariance centrée

Par définition, nous appellerons fonction de covariance centrée de familles  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$ , la fonction complexe  $\Gamma_{fg}^c(t_1, t_2)$  définie sur  $(T \times T)$  par la relation suivante :

$$\Gamma_{fg}^c(t_1, t_2) = \int_{\Omega} (f(\omega, t_1) - \phi_f(t_1)) \cdot \overline{(g(\omega, t_2) - \phi_g(t_2))} \cdot \mu(d\omega)$$

On vérifie sans difficulté que l'on peut écrire cette expression sous la forme ...

$$\Gamma_{fg}^c(t_1, t_2) = \Gamma_{fg}(t_1, t_2) - \phi_f(t_1) \cdot \overline{\phi_g(t_2)}$$

... d'où l'on déduit que  $\Gamma_{fg}^c$  existe toujours sur  $(T \times T)$  puisque  $\Gamma_{fg}$ ,  $\phi_f$  et  $\phi_g$  existent.

Fonctions de corrélation

Par définition, nous appellerons fonction de corrélation et fonction de corrélation centrée relatives aux familles  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$ , les fonctions (complexes)  $R_{fg}(t_1, t_2)$  et  $R_{fg}^c(t_1, t_2)$  définies sur  $(T \times T)$  respectivement par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \frac{\Gamma_{fg}(t_1, t_2)}{\sqrt{\Gamma_{ff}(t_1, t_1) \cdot \Gamma_{gg}(t_2, t_2)}} \\ R_{fg}^c(t_1, t_2) &= \frac{\Gamma_{fg}^c(t_1, t_2)}{\sqrt{\Gamma_{ff}^c(t_1, t_1) \cdot \Gamma_{gg}^c(t_2, t_2)}} \end{aligned} \right.$$

Ces fonctions existent toujours sur  $(T \times T)$  puisque les fonctions de covariance qui servent à les définir existent.

b) Propriétés de  $\Gamma_{fg}$

Énoncé

Pour tout couple de familles de fonctions  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associées aux vecteurs paramétrés  $U_f(\cdot)$  et  $U_g(\cdot)$  appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , on a les relations suivantes :

- 1)  $\Gamma_{fg}(t_1, t_2) = \overline{\Gamma_{gf}(t_2, t_1)}$
- 2)  $|\Gamma_{fg}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{\Gamma_{ff}(t_1, t_1) \cdot \Gamma_{gg}(t_2, t_2)}$
- 3)  $\int_T \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \cdot \lambda(dt_1) \cdot \overline{\lambda(dt_2)} \geq 0 \quad \forall \lambda \in E'$
- 4)  $\Gamma_{fg}(\cdot, t) \in E \quad \forall t \in T$

De plus, si  $C_{\psi, \psi}$  désigne l'opérateur de covariance de  $U_f(\cdot)$  et  $U_g(\cdot)$ , alors on a :

$$5) C_{\psi, \psi}(\lambda) = \int_T \Gamma_{fg}(\cdot, t) \overline{\lambda(dt)}$$

Démonstration : Première partie

Remarquons tout d'abord que la première relation ci-dessus est une conséquence immédiate de la définition de  $\Gamma_{fg}$  tandis que la seconde découle directement de l'inégalité de Schwarz. D'autre part, si la relation 5) est vraie, alors on peut écrire :

$$\langle \lambda, C_{\psi, \psi}(\lambda) \rangle = \int_T \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \lambda(dt_1) \overline{\lambda(dt_2)} \quad \forall \lambda \in E'$$

... d'où l'on déduit que la relation 3) est vraie, car on sait d'après la proposition II-2.2.d que l'on a :

$$\langle \lambda, C_{\psi, \psi}(\lambda) \rangle = K_{\psi, \psi}(\lambda, \lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in E'$$

Enfin, si la relation 5) est vraie, alors en faisant  $\lambda = \delta_t$ , on a ...

$$C_{\psi, \psi}(\delta_t) = \Gamma_{fg}(\cdot, t) \in E \quad \forall t \in T$$

... d'où l'on déduit que la propriété 4) est vraie.

On conclut de tout ceci qu'il suffit de démontrer que la propriété 5) est bien vérifiée.

Démonstration : Deuxième partie

Par définition de l'opérateur de covariance  $C_{\psi, \psi}$ , on a pour tout  $\lambda \in E'$  :

$$C_{\psi, \psi}(\lambda) = M \left( U_f(\cdot) \cdot \overline{\langle \lambda, U_g(\cdot) \rangle} \right) \quad \forall \begin{cases} U_f(\cdot) \in U_f \\ U_g(\cdot) \in U_g \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{C_{\psi, \psi}(\lambda)\}(t_1) &= \int_{\Omega} \left( f(\omega, t_1) \cdot \int_T \overline{g(\omega, t_2) \lambda(dt_2)} \right) \mu(d\omega) \quad \forall t_1 \in T \\ &= \int_{\Omega} \left( \int_T f(\omega, t_1) \overline{g(\omega, t_2) \lambda(dt_2)} \right) \mu(d\omega) \quad \forall t_1 \in T \end{aligned}$$

Compte tenu que les mesures  $\lambda$  et  $\mu$  sont bornées, on peut alors appliquer le théorème de Fubini qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \{C_{\psi, \psi}(\lambda)\}(t_1) &= \int_T \left( \int_{\Omega} f(\omega, t_1) \overline{g(\omega, t_2)} \mu(d\omega) \right) \cdot \overline{\lambda(dt_2)} \quad \forall t_1 \in T \\ &= \int_T \Gamma_{fg}(t_1, t_2) \overline{\lambda(dt_2)} \quad \forall t_1 \in T \\ C_{\psi, \psi}(\lambda) &= \int_T \Gamma_{fg}(\cdot, t) \overline{\lambda(dt)} \end{aligned}$$

c) Remarque

On vérifie immédiatement que les propriétés 1), 2), 3) et 4) de  $\Gamma_{fg}$  s'appliquent sans changement aux fonctions  $\Gamma_{fg}^c$ ,  $R_{fg}$  et  $R_{fg}^c$ .

d) Degré de ressemblance

Il découle de la remarque précédente que l'on a ...

$$\begin{cases} |R_{fg}(t_1, t_2)| \leq 1 \\ |R_{fg}^c(t_1, t_2)| \leq 1 \end{cases}$$

... et l'on admet généralement que ces deux fonctions sont des mesures du "degré de ressemblance" entre les familles  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  observées respectivement aux points  $t_1 \in T$  et  $t_2 \in T$  lorsque  $\omega$  parcourt l'espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ .

III-2.6 - Cas particulier où  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega$

a) Proposition

Énoncé

Soit d'une part  $\Omega$  un espace topologique muni de sa tribu borélienne  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega$  et  $\mu$  une mesure positive normée définie sur  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ . Soit d'autre part  $T$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  une famille de fonctions définies sur  $T$ .

Dans ces conditions, on a les implications suivantes :

- (1)  $f(\cdot, t) \in \mathcal{G}(\Omega, \mathbb{C}) \Rightarrow (1') f(\cdot, t) \in M_c(\Omega, \mathcal{A})$   
 (2)  $\sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| < +\infty \Rightarrow (2') \exists N < +\infty : \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq N \mu - p.p.$

Démonstration

D'après la proposition I-2.2.c, nous savons que la relation (1) entraîne la relation (1'). De plus, compte tenu de la relation (2), on a ...

$$\begin{aligned} \exists N = \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| < +\infty &: \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq N \quad \forall \omega \in \Omega \\ \Rightarrow \exists N = \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| < +\infty &: \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq N \quad \mu - p.p. \end{aligned}$$

... ce qui achève la démonstration.

b) Applications

Introduction

Si  $T$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$  et si  $E \equiv \mathcal{G}(T, \mathbb{C})$ , alors on déduit de cette proposition qu'il est très facile de construire des vecteurs paramétrés  $\psi_f(\cdot)$  appartenant à  $L^2_\mu(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  si  $\Omega$  est un espace topologique et si  $\mathcal{A}$  est identique à  $\mathcal{B}_\Omega$ .

En effet, dans ces conditions, il suffit que la famille de fonctions  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée à  $U_f$  soit telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega \Rightarrow f(\omega, \cdot) \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C}) \\ \forall t \in T \Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}) \\ \exists N < +\infty : \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq N \quad \mu\text{-p.p.} \end{array} \right.$$

Ce cas particulier est loin d'être une exception et permet de définir des vecteurs paramétrés extrêmement importants pour les applications :

#### Premier exemple

Supposons que  $\Omega$  ainsi que le compact  $T$  soient des parties de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  la famille de fonctions telles que :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow f(\omega, t) = \exp \left\{ 2i\pi \cdot \langle \omega | t \rangle_{\mathbb{R}^n} \right\}$$

Comme chacune de ces fonctions est continue par rapport à  $\omega$  et à  $t$  et que de plus ...

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq 1$$

... il s'en suit, d'après la définition III-2.3.b et la proposition III-2.6.a qu'il existe un vecteur paramétré unique  $U_f \in L^2(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$  et tel que :

$$\forall U_f \in U_f \Leftrightarrow U_f(\omega) = f(\omega, \cdot) \quad \mu\text{-p.p.}$$

#### Deuxième exemple

Supposons d'une part que  $\Omega$  et  $T$  sont des parties compactes de  $\mathbb{R}^n$  et que  $T$  est constitué de  $N$  points  $t_j \in \mathbb{R}^n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} T \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_N\} \\ \text{avec } t_j \in \mathbb{R}^n \quad \forall j = 1, \dots, N \end{array} \right.$$

Supposons d'autre part que  $\omega^k$  et  $t_j^k$  représentent respectivement la  $k$ ième composante des vecteurs  $\omega \in \Omega$  et  $t_j \in T$ , et soit  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  la famille de fonctions telles que :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t_j \in T \end{array} \right\} \Rightarrow f(\omega, t_j) = \prod_{k=1}^n (\omega^k)^{t_j^k}$$

Comme chacune de ces  $N$  fonctions  $f(\omega, t_j)$  est continue par rapport à  $\omega$  et que  $\Omega$  est supposé compact, il s'en suit que l'on a ...

$$N_j = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega, t_j)| < +\infty \quad \forall t_j \in T$$

... d'où l'on déduit que :

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| < +\infty$$

Mais puisque  $f(\omega, t)$  est continue par rapport à  $\omega$  et à  $t$ , on est assuré, d'après cette dernière relation et compte tenu de la définition III-2.3.b et de la proposition III-2.6.a, qu'il existe un vecteur paramétré unique  $U_f \in L^2(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$  tel que :

$$\forall U_f \in U_f \Leftrightarrow U_f(\omega) = f(\omega, \cdot) \quad \mu\text{-p.p.}$$

Remarquons que lorsque les points  $t_j \in T$  ont des coordonnées entières, alors chaque fonction  $f(\omega, t_j)$  est un polynôme (ou plus exactement un monôme) par rapport aux variables  $(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n)$ .

#### Troisième exemple

Supposons que  $\Omega$  et le compact  $T$  soient des parties de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $F$  une fonction complexe continue et bornée sur l'ensemble  $(T+\Omega)$  défini de la façon suivante :

$$\forall t_\omega \in (T + \Omega) \Leftrightarrow \exists \left\{ \begin{array}{l} t \in T \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} : t_\omega = t + \omega$$

Dans ces conditions, chaque fonction de la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  telle que ...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow f(\omega, t) = F(t + \omega)$$

... est évidemment continue par rapport à  $\omega$  et  $t$  et, de plus, puisque  $F$  est bornée sur  $(T+\Omega)$  on est assuré que l'on a :

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| = \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in T} |F(t + \omega)| < +\infty$$

Il s'en suit, d'après la définition III-2.3.b et la proposition III-2.6.a, qu'il existe un vecteur paramétré unique  $\psi \in L^2_{\mu}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  tel que :

$$\forall U_f \in U_f \iff U_f(\omega) = f(\omega, \cdot) \quad \mu\text{-p.p.}$$

Cet exemple de vecteur paramétré prendra toute son importance lorsque nous étudierons l'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique.

### III-2.7 - Famille $\mu$ -libre $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$

#### a) Définition

Par définition, nous dirons qu'une famille de fonctions  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée à un vecteur paramétré  $U_f \in L^2_{\mu}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  est  $\mu$ -libre si et seulement si le vecteur paramétré  $U_f$  est lui-même  $\mu$ -libre.

#### b) Propriétés caractéristiques

##### Énoncé

Une famille de fonctions  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée à un vecteur paramétré  $U_f \in L^2_{\mu}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  est  $\mu$ -libre si et seulement si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes où  $\theta_{\mathcal{M}}$  désigne le vecteur nul de  $\mathcal{M}(T)$  :

a)  $\Gamma_{ff}$  est positif :

$$\int_T \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \cdot \lambda(dt_1) \overline{\lambda(dt_2)} > 0 \quad \forall \lambda \neq \theta_{\mathcal{M}}$$

b)  $\Gamma_{ff}$  est tel que :

$$\int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \cdot \lambda(dt_1) = 0 \quad \forall t_2 \in T \iff \lambda = \theta_{\mathcal{M}}$$

c) On a :

$$\int_T f(\omega, t) \cdot \lambda(dt) = 0 \quad \mu\text{-p.p.} \iff \lambda = \theta_{\mathcal{M}}$$

##### Démonstration

Ces propriétés découlent immédiatement des propriétés du vecteur paramétré  $U_f$  supposé  $\mu$ -libre, à savoir :

$$a') \quad \langle \lambda, C_{U_f U_f}(\lambda) \rangle > 0 \quad \forall \lambda \neq \theta_E,$$

$$b') \quad C_{U_f U_f}(\lambda) = \theta_E \iff \lambda = \theta_E,$$

$$c') \quad \langle \lambda, U_f \rangle = \theta_{L^2} \iff \lambda = \theta_E,$$

En effet, compte tenu de la définition de  $U_f$  à partir de la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et compte tenu que  $E'$  est identique à  $\mathcal{M}(T)$ , on démontre facilement que :

$$\begin{cases} a' & \iff a \\ b' & \iff b \\ c' & \iff c \end{cases}$$

De plus, les propriétés  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  étant équivalentes, on en déduit qu'il en est de même des propriétés  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

### III-2.8 - Vecteur paramétré centré

#### a) Proposition

##### Énoncé

Soit  $E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  l'espace des fonctions complexes définies sur un compact  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $U_f \in L^2_{\mu}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un vecteur paramétré associé à une famille de fonctions  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$ . Il existe un vecteur paramétré  $U_g \in L^2_{\mu}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  associé à une famille  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  tel que :

$$\forall \omega \in \Omega \implies \begin{cases} U_g(\omega) = U_f(\omega) - \phi_f \\ g(\omega, \cdot) = f(\omega, \cdot) - \phi_f(\cdot) \end{cases}$$

De plus, la fonction moyenne  $\phi_g$  et la fonction de covariance  $\Gamma_{gg}$  sont telles que :

$$\begin{cases} \phi_g & \equiv \theta_E \\ \Gamma_{gg} & \equiv \Gamma_{ff}^c \end{cases}$$

Démonstration

Puisque la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  est associée au vecteur paramétré  $U_f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , il s'en suit, d'après ce qui a été dit au paragraphe III-2.3.c que l'on doit avoir :

$$\left[ \begin{array}{l} \alpha) \quad f(\omega, \cdot) \in E \quad \mu\text{-p.p.} \\ \beta) \quad \forall t \in T \quad \Rightarrow \quad f(\cdot, t) \in m_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}) \\ \gamma) \quad \exists 0 \leq N_f < +\infty : \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| \leq N_f \quad \mu\text{-p.p.} \end{array} \right.$$

D'autre part, la fonction moyenne  $\phi_f$  étant par construction continue sur le compact  $T$ , on a :

$$\exists 0 \leq \nu < +\infty : \sup_{t \in T} |\phi_f(t)| \leq \nu$$

d'où l'on déduit que :

$$\sup_{t \in T} |g(\omega, t)| \leq \sup_{t \in T} |f(\omega, t)| + \sup_{t \in T} |\phi_f(t)| \leq N_f + \nu \quad \mu\text{-p.p.}$$

En définitive, compte tenu que  $\phi_f \in E$  et que  $m_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A})$  est un espace vectoriel, on a donc en posant  $N_g = N_f + \nu$  :

$$\left[ \begin{array}{l} \alpha') \quad g(\omega, \cdot) \in E \quad \mu\text{-p.p.} \\ \beta') \quad \forall t \in T \quad \Rightarrow \quad g(\cdot, t) \in m_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}) \\ \gamma') \quad \exists 0 \leq N_g < +\infty : \sup_{t \in T} |g(\omega, t)| \leq N_g \quad \mu\text{-p.p.} \end{array} \right.$$

Il est alors facile de conclure que  $U_g$  est bien un vecteur paramétré appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  associé à la famille  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_g(\omega) = U_f(\omega) - \phi_f \quad \forall \omega \in \Omega \\ \phi_g \equiv \phi_f \\ \Gamma_{gg} \equiv \Gamma_{ff} \end{array} \right.$$

b) Définition

Par définition, nous dirons qu'un vecteur paramétré  $U_g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et la famille  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée sont centrés si la fonction moyenne  $\phi_g$  est identique au vecteur nul  $\theta_E$  de l'espace  $E \equiv \mathcal{E}(T, \mathbb{C})$ .

c) Conséquence

Soit  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  une famille de fonctions associées à un vecteur paramétré  $U_f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes à savoir que la famille centrée  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  telle que ...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow g(\omega, t) = f(\omega, t) - \phi_f(t)$$

... est  $\mu$ -libre :

$$\left[ \begin{array}{l} a) \quad \int_T \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \lambda(dt_1) \overline{\lambda(dt_2)} > 0 \quad \forall \lambda \in \theta_E \\ b) \quad \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \lambda(dt_1) = 0 \quad \forall t_2 \in T \Leftrightarrow \lambda \in \theta_E \\ c) \quad \int_T \{f(\omega, t) - \phi_f(t)\} \lambda(dt) = 0 \quad \mu\text{-p.p.} \Leftrightarrow \lambda \in \theta_E \end{array} \right.$$

III-3 - APPROXIMATION EN  $\mu$ - MOYENNE QUADRATIQUE

III-3.1 - Proposition fondamentale

a) Énoncé

Soit, d'une part  $U_f(\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  le vecteur paramétré associé à la famille de fonctions  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  appartenant à l'espace  $E \equiv \mathcal{E}(T, \mathbb{C})$  où  $T$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , et soit d'autre part  $\phi$  une classe de fonctions appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ .

1°) Dans ces conditions, si l'ensemble  $\hat{\Lambda}$  des mesures  $\hat{\lambda} \in E'$  solutions de l'équation suivante (appelée équation normale) est non vide ...

$$\forall \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda} \Leftrightarrow \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \cdot \hat{\lambda}(dt_1) = \langle \phi(\cdot) | \delta_{t_2}, U_f(\cdot) \rangle_{L^2} \quad \forall t_2 \in T$$

$$= \int_{\Omega} \phi(\omega) \cdot \overline{f(\omega, t_2)} \cdot \mu(d\omega) \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} t_2 \in T \\ \phi \in \theta \end{array} \right.$$

... alors  $\hat{\Lambda}$  appartient à  $F\{U_f\}$  et il existe une classe unique  $\hat{\phi} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  telle que :

$$\begin{cases} \hat{\phi} = \mathbb{U}_f \hat{\Lambda} \\ \forall \Lambda \in F\{U_f\} \iff \|\varphi - \hat{\phi}\|_{L^2} \leq \|\varphi - \mathbb{U}_f \Lambda\|_{L^2} \end{cases}$$

Par définition, on dit que  $\hat{\phi}$  est "l'approximation de  $\varphi$  en  $\mu$ -moyenne quadratique sur  $\mathcal{E}\{U_f\}$ " et l'on a :

$$\forall \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda} \implies \begin{cases} 1^\circ) \int_T f(\cdot, t) \hat{\lambda}(dt) \in \hat{\phi} \\ 2^\circ) \|\varphi - \hat{\phi}\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2 - \int_T \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \overline{\hat{\lambda}(dt_1)} \hat{\lambda}(dt_2) \end{cases}$$

2°) Si la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mu$ -libre, alors l'ensemble  $\hat{\Lambda}$  des mesures  $\hat{\lambda} \in E'$  solution de l'équation normale est non vide et se réduit à un seul élément  $\hat{\lambda} \in E'$ .

Démonstration : Première partie

On sait d'après le théorème II-3.4 que la classe  $\hat{\Lambda} \in F\{U_f\}$  solution du problème d'approximation de  $\varphi$  en  $\mu$ -moyenne quadratique sur  $\mathcal{E}\{U_f\}$  est, si elle existe, telle que :

$$\forall \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda} \iff C_{U_f U_f}(\hat{\lambda}) = M\{\overline{\varphi(\cdot)} U_f(\cdot)\}$$

Comme d'autre part, d'après la proposition III-2.5-b on a ...

$$C_{U_f U_f}(\hat{\lambda}) = \int \Gamma_{ff}(\cdot, t) \overline{\hat{\lambda}(dt)} = \int \overline{\Gamma_{ff}(t, \cdot)} \hat{\lambda}(dt) \in E$$

... il s'en suit que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda} &\iff \int_T \overline{\Gamma_{ff}(t, \cdot)} \hat{\lambda}(dt) = \int_\Omega \overline{\varphi(\omega) \cdot f(\omega, \cdot)} \mu(d\omega) & \forall \varphi \in \varphi \\ &\iff \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \overline{\hat{\lambda}(dt_1)} = \int_\Omega \varphi(\omega) \overline{f(\omega, t_2)} \mu(d\omega) & \forall \begin{cases} \varphi \in \varphi \\ t_2 \in T \end{cases} \\ &\iff \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \overline{\hat{\lambda}(dt_1)} = \langle \varphi | \langle \delta_{t_2}, U_f \rangle \rangle_{L^2} & \forall t_2 \in T \end{aligned}$$

D'autre part, toujours d'après le théorème II-3.4, si  $\hat{\Lambda}$  n'est pas

vide, on a :

$$\begin{cases} \hat{\phi} = \mathbb{U}_f \hat{\Lambda} \\ \|\varphi - \hat{\phi}\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2 + \langle \hat{\Lambda} | \hat{\Lambda} \rangle_F \end{cases}$$

Compte tenu que les relations suivantes sont vraies quel que soit

$$\hat{\lambda} \in \hat{\Lambda} \dots \begin{cases} \int_T f(\cdot, t) \hat{\lambda}(dt) \in \mathbb{U}_f \hat{\Lambda} \\ \langle \hat{\Lambda} | \hat{\Lambda} \rangle_F = \langle \hat{\lambda}, C_{U_f U_f}(\hat{\lambda}) \rangle = \int_T \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \overline{\hat{\lambda}(dt_1)} \hat{\lambda}(dt_2) \end{cases}$$

... on en déduit que :

$$\begin{cases} \int_T f(\cdot, t) \hat{\lambda}(dt) \in \hat{\phi} \\ \|\varphi - \hat{\phi}\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2 - \int_T \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \overline{\hat{\lambda}(dt_1)} \hat{\lambda}(dt_2) \end{cases}$$

Démonstration : Deuxième partie

Si la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mu$ -libre, alors le vecteur paramétré  $U_f$  est lui-même  $\mu$ -libre, et l'on en conclut, d'après le théorème II-3.4, que la classe  $\hat{\Lambda}$  est non vide et se réduit à un seul élément  $\hat{\lambda} \in E'$  auquel on peut associer une classe  $\hat{\lambda} = \mathbb{U}_f \hat{\lambda}$  unique.

b) Remarque : cas où T est discret

Dans le cas où T est un ensemble discret de N points tels que ...

$$T \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$$

... on sait que chaque mesure  $\hat{\lambda} \in E'$  est obligatoirement de la forme suivante ...

$$\hat{\lambda}(dt) = \sum_{t \in T} \hat{a}_t \delta_t(dt)$$

... où  $\{\hat{a}_t\}_{t \in T}$  est une famille de  $N$  constantes complexes. On en déduit que l'équation normale prend alors la forme suivante aux  $N$  inconnues  $\{\hat{a}_t\}_{t \in T}$  :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{21} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{N1} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{22} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{N2} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \Gamma_{1N} & \dots & \Gamma_{2N} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix}}_{[\Gamma]} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{a}_{t_1} \\ \hat{a}_{t_2} \\ \vdots \\ \hat{a}_{t_N} \end{bmatrix}}_{[\hat{A}]} = \begin{bmatrix} \langle \varphi(\cdot) | \langle \delta_{t_1}, U_f(\cdot) \rangle \rangle_{L^2} \\ \langle \varphi(\cdot) | \langle \delta_{t_2}, U_f(\cdot) \rangle \rangle_{L^2} \\ \vdots \\ \langle \varphi(\cdot) | \langle \delta_{t_N}, U_f(\cdot) \rangle \rangle_{L^2} \end{bmatrix}$$

avec  $\mathbf{V} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \end{Bmatrix} \in T \iff \Gamma_{ij} = \Gamma_{ff}(t_i, t_j)$

Il s'en suit que l'approximation en  $\mu$ -moyenne quadratique  $\hat{\varphi}$  existe toujours si  $T$  est discret, et pour toute solution  $[\hat{A}]$  de l'équation normale, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t \in T} \hat{a}_t \cdot f(\cdot, t) \in \varphi(\cdot) \\ \|\varphi - \hat{\varphi}\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2 - [\hat{A}]^t [\Gamma] [\hat{A}] \end{array} \right.$$

### III-3.2 - Approximation au sens des moindres carrés

#### a) Définition

Soit  $S \equiv \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  un ensemble de  $N$  points répartis sur  $\Omega$ . Par définition, nous dirons qu'une approximation en  $\mu$ -moyenne quadratique  $\hat{\varphi}$  est une approximation au sens des moindres carrés si la mesure  $\mu$  est de la forme ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(d\omega) = \frac{1}{P} \sum_{\omega_i \in S} \{p(\omega_i) \cdot \delta_i(d\omega)\} \\ \text{avec } P = \sum_{\omega_i \in S} p(\omega_i) \end{array} \right.$$

... où  $\delta_i$  représente la mesure de Dirac au point  $\omega_i \in S$  et  $p(\omega_i)$  la valeur en ce point d'une fonction de pondération  $p$  non négative et bornée sur  $\Omega$ .

#### b) Solution du problème

La solution  $\hat{\lambda} \in F\{U\}$  du problème d'approximation au sens des moindres carrés (si elle existe) est évidemment fournie par la même équation intégrale que celle relative au problème de l'approximation en  $\mu$ -moyenne quadratique. On peut toutefois noter que le calcul des fonctions  $\Gamma_{ff}(t_1, t_2)$  et  $\langle \varphi(\cdot) | \langle \delta_{t_2}, U_f(\cdot) \rangle \rangle_{L^2}$  est grandement simplifié puisque l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \frac{1}{P} \cdot \sum_{\omega_i \in S} \{f(\omega_i, t_1) \cdot \overline{f(\omega_i, t_2)} \cdot p(\omega_i)\} \\ \langle \varphi(\cdot) | \langle \delta_{t_2}, U_f(\cdot) \rangle \rangle_{L^2} = \frac{1}{P} \cdot \sum_{\omega_i \in S} \{\varphi(\omega_i) \cdot \overline{f(\omega_i, t_2)} \cdot p(\omega_i)\} \quad \forall \varphi \in \Phi \end{array} \right.$$

#### c) Remarque

L'expression "moindres carrés" provient du fait que  $\hat{\varphi}$  minimise la somme (pondérée par  $p$ ) des carrés des écarts entre  $\varphi$  et  $\hat{\varphi}$  au droit des points  $\omega_i \in S$  :

$$\|\varphi - \hat{\varphi}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{P} \cdot \sum_{\omega_i \in S} \{|\varphi(\omega_i) - \hat{\varphi}(\omega_i)|^2 \cdot p(\omega_i)\} \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in \Phi \\ \hat{\varphi} \in \hat{\Phi} \end{array} \right.$$

#### d) Application

Supposons que l'on désire estimer sur  $\Omega$  une fonction numérique  $\varphi \in L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$  connue seulement sur l'ensemble  $S$  déjà défini. Si l'on se réfère au paragraphe précédent, on voit que  $\Gamma_{ff}(t_1, t_2)$  et  $\langle \varphi | \langle \delta_{t_2}, U_f \rangle \rangle_{L^2}$  ne font intervenir que les valeurs numériques de  $f$  et  $\varphi$  sur l'ensemble  $S$  et peuvent donc toujours être calculés. Il s'en suit que si le problème d'approximation au sens des moindres carrés de la classe  $\Phi \in L^2(\Omega, \mathcal{X}, \mu)$  telle que  $\varphi \in \Phi$  a une solution  $\hat{\lambda}$  non vide, alors on pourra prendre comme estimation de  $\varphi$  toute fonction  $\varphi_{\hat{\lambda}}$  telle que :

$$\forall \hat{\lambda} \in \hat{\Lambda} \iff \varphi_{\hat{\lambda}}(\omega) = \int_T f(\omega, t) \cdot \hat{\lambda}(dt) \quad \forall \omega \in \Omega$$

### III-4 - ESTIMATION ET INTERPOLATION EN $\mu$ - MOYENNE QUADRATIQUE

#### III-4.1 - Notations et définitions préliminaires

##### a) Introduction

Afin d'alléger l'exposé des méthodes présentées au paragraphe III-4, nous nous proposons tout d'abord de donner certaines définitions et de préciser les notations qui seront utilisées dans toute cette étude consacrée à l'estimation et à l'interpolation en  $\mu$ - moyenne quadratique.

##### b) Notations

espaces mesurés  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$  et  $(\Delta, \mathcal{B}_\Delta, \nu)$

Nous désignerons par  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$  et  $(\Delta, \mathcal{B}_\Delta, \nu)$  deux espaces mesurés tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \text{partie de } \mathbb{R}^n \text{ contenant l'origine } \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \\ \mathcal{B}_\Omega = \text{tribu borélienne de } \Omega \\ \mu = \text{mesure positive normée définie sur } (\Omega, \mathcal{B}_\Omega) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = \text{compact de } \mathbb{R}^n \text{ contenant l'origine } \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \\ \mathcal{B}_\Delta = \text{tribu borélienne de } \Delta \\ \nu = \text{mesure bornée définie sur } (\Delta, \mathcal{B}_\Delta) \end{array} \right.$$

Par convention, lorsque  $\nu$  est identique à la mesure de Dirac  $\delta$  au point origine  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ , nous supposons que le compact  $\Delta$  se réduit au point  $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ .

Somme de deux parties de  $\mathbb{R}^n$

A et B étant deux parties quelconques de  $\mathbb{R}^n$ , nous désignerons par  $C = A+B$  la partie de  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$\forall c \in C \iff \exists \left\{ \begin{array}{l} a \in A \\ b \in B \end{array} \right\} : c = a + b$$

### Compacts T, D, S et espaces associés

Par définition, nous supposons donnés T, D et S tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \text{compact de } \mathbb{R}^n \\ D = \text{compact de } \mathbb{R}^n \\ S = \text{compact de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } [(T \cup D) + \Delta] \end{array} \right.$$

Les ensembles T, (T U D) et S étant des compacts de  $\mathbb{R}^n$ , il s'en suit que les ensembles  $E, E_0$  et  $E_1$  tels que ...

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \mathcal{C}[T, \mathbb{C}] \\ E_0 = \mathcal{C}[(T \cup D), \mathbb{C}] \\ E_1 = \mathcal{C}[S, \mathbb{C}] \end{array} \right.$$

... sont des Banach séparables auxquels on peut associer des espaces  $L_E^2(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$ ,  $L_{E_0}^2(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$  et  $L_{E_1}^2(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$ . De plus, on a les implications suivantes :

$$\begin{aligned} & T \subset (T \cup D) \subset S \\ \Rightarrow & E \supset E_0 \supset E_1 \\ \Rightarrow & L_E^2 \supset L_{E_0}^2 \supset L_{E_1}^2 \end{aligned}$$

$\nu$ -régularisée d'une fonction continue et bornée

D'une façon générale,  $\mathcal{S}$  étant une partie de  $\mathbb{R}^n$ , nous désignerons par  $\psi^\nu$  la  $\nu$ -régularisée d'une fonction  $\psi$  continue et bornée sur  $[\mathcal{S} + \Delta]$  telle que :

$$\forall t \in \mathcal{S} \Rightarrow \psi^\nu(t) = \int_{\Delta} \psi(t + \tau) \nu(d\tau)$$

On ne manquera pas de remarquer que, compte tenu du théorème relatif à la continuité des fonctions définies par une intégrale, et compte tenu du fait que  $\nu$  est une mesure bornée, on est assuré que  $\psi^\nu$  est continue et bornée sur  $\mathcal{S}$ .

Enfin, signalons que nous utiliserons également la notation  $\psi_\nu$  qui, généralement, ne devra pas être considérée comme une  $\nu$ -régularisée.

##### c) Fonction F

Définition de F

Par définition, dans tout le paragraphe III-4, nous désignerons par F une fonction continue et bornée sur  $[S + \Omega]$ .

v- régularisée de F

Puisque par définition S contient  $[(T \cup D) + \Delta]$ , et puisque la fonction F est continue et bornée sur  $[S + \Omega]$ , il s'en suit qu'il existe une v- régularisée  $F^v$  elle-même continue et bornée sur  $[(T \cup D) + \Omega]$  et telle que :

$$\forall t \in [(T \cup D) + \Omega] \rightarrow F^v(t) = \int_{\Delta} F(t + \tau) v(d\tau)$$

Familles de fonctions associées à F

La fonction F étant donnée, nous lui associerons une famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  de fonctions continues sur le compact S et telles que :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t \in S \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow f(\omega, t) = F(t + \omega)$$

Enfin, nous désignerons par  $\{f^v(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  la famille des fonctions continues sur  $(T \cup D)$  et telles que :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t \in (T \cup D) \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f^v(\omega, t) &= \int_{\Delta} f(\omega, t + \tau) v(d\tau) \\ f^v(\omega, t) &= F^v(t + \omega) \end{aligned}$$

Vecteurs paramétrés associés à F

Compte tenu que S et  $(T \cup D)$  sont des compacts de  $\mathbb{R}^n$  et que F et  $F^v$  sont continues et bornées respectivement sur  $[S + \Omega]$  et  $[(T \cup D) + \Omega]$ , on sait d'après le troisième exemple de vecteur paramétré présenté au paragraphe III-2.6-b que les familles  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{f^v(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  définissent des vecteurs paramétrés  $U_f$  et  $U_{f^v}$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_f \in L^2_{E_1}(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega}, \mu) \\ U_{f^v} \in L^2_{E_0}(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega}, \mu) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_f \in U_f \Rightarrow U_f(\omega) \equiv f(\omega, \cdot) \quad \mu\text{-p.p.} \\ U_{f^v} \in U_{f^v} \Rightarrow U_{f^v}(\omega) \equiv f^v(\omega, \cdot) \quad \mu\text{-p.p.} \end{array} \right.$$

Puisque par construction on a  $E \supset E_0 \supseteq E_1$ , il s'en suit qu'il existe des moyennes et des fonctions de covariance centrées associées aux familles  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{f^v(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  telles que, d'après ce qui a été dit aux paragraphes III-2.4 et III-2.5-b, on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_f \in E_0 \\ \phi_{f^v} \in E_1 \\ \phi_{f^v} \in E_0 \end{array} \right. \quad \forall t \in (T \cup D) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{ff}^c(\cdot, t) \in E_0 \\ \Gamma_{ff}^c(t, \cdot) \in E_0 \\ \Gamma_{f^v f}^c(\cdot, t) \in E_0 \\ \Gamma_{f^v f}^c(t, \cdot) \in E_0 \end{array} \right.$$

Par ailleurs, les mesures  $\mu$  et  $\nu$  étant bornées, on vérifie sans difficulté, à l'aide du théorème de Fubini, que l'on a :

$$\forall t \in (T \cup D) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi_{f^v}(t) = \phi_f^v(t) = \int_{\Delta} \phi_f(t + \tau) v(d\tau) \\ \Gamma_{f^v f}^c(t, \cdot) = \int_{\Delta} \Gamma_{ff}^c(t + \tau, \cdot) v(d\tau) \end{array} \right.$$

Fonction aléatoire associée à F

Il est toujours possible de donner à l'estimation et à l'interpolation en  $\mu$ - moyenne quadratique une présentation probabiliste. En effet, considérons  $\Omega$  comme un ensemble d'épreuves et  $\mu$  comme une mesure de probabilité sur  $\Omega$ ; Dans ces conditions, on sait, d'après ce qui a été dit au paragraphe III-2.6, que l'on a ...

$$\forall t \in S \Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{M}_c(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega})$$

... ce qui montre que la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  représente en fait l'ensemble des trajectoires d'une fonction aléatoire  $f(\omega, t)$  définie sur  $[(\Omega, \mathcal{B}_{\Omega}) \times S]$ .

Remarque

Si l'on considère la restriction de la famille de fonctions  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  au compact T  $\in S$  et si l'on désigne par  $\theta_{\mathcal{E}}$  et  $\theta_{\mathcal{M}}$  les vecteurs nuls de  $E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  et  $E' \equiv \mathcal{M}(T)$ , alors, d'après ce qui a été dit au paragraphe III-2.8-c, on déduit immédiatement que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad \lambda \neq \theta_{\mathcal{M}} \Rightarrow \int_T \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \lambda(dt_1) \bar{\lambda}(dt_2) > 0 \\ b) \quad \lambda = \theta_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, \cdot) \lambda(dt_1) \equiv \theta_{\mathcal{E}} \\ c) \quad \lambda = \theta_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \int_T \{ F(t + \omega) - \phi_f(t) \} \lambda(dt) = 0 \quad \mu\text{-p.p.} \end{array} \right.$$

d) Définitions

Définition 1

Soit  $F^v(t_0)$  la v- régularisée de F au point  $t_0 \in D$  :

$$F^v(t_0) = \int_{\Delta} F(t_0 + \tau) v(d\tau)$$

Par définition, nous dirons que  $F^v(t_0)$  est T- estimable en  $\mu$ - moyenne quadratique en tout point  $t_0 \in D$  si et seulement si :

1°) La fonction  $F$  est connue numériquement sur  $T$

2°) On connaît sur les compacts  $S \times S$  et  $S$  respectivement la fonction de covariance centrée  $\Gamma_{ff}^c$  et la moyenne  $\phi_f$  relative à la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée à  $F$ .

3°) L'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée, étant entendu que  $\theta_{\mathcal{M}}$  désigne le vecteur nul de  $\mathcal{M}(T)$  et  $\theta_{\mathcal{C}}$  le vecteur nul de  $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  :

$$a) \quad \lambda \neq \theta_{\mathcal{M}} \Rightarrow \int_T \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \lambda(dt_1) \overline{\lambda(dt_2)} > 0$$

$$b) \quad \lambda = \theta_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, \cdot) \lambda(dt_1) \equiv \theta_{\mathcal{C}}$$

$$c) \quad \lambda = \theta_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \int_T \{F(t + \omega) - \phi_f(t)\} \lambda(dt) = 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

### Définition 2

Soit  $\delta$  la mesure de Dirac au point origine  $\theta_{\mathbb{R}^n}$ . Par définition, nous dirons que  $F(t_0)$  est  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $t_0 \in D$  si et seulement si  $F^\delta(t_0)$  est  $T$ -estimable en  $\mu$ -moyenne quadratique en ces mêmes points.

### III-4.2 - Notion d'estimation et d'interpolation en $\mu$ -moyenne quadratique

#### a) Proposition fondamentale

##### Énoncé

Si  $F^\nu(t_0)$  est  $T$ -estimable en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $t_0 \in D$ , alors, pour tout  $t_0$  fixé dans  $D$ , l'équation de Wiener-Hopf ...

$$\forall t_2 \in T \Rightarrow \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \hat{\lambda}_{t_0}^\nu(dt_1) = \int_\Delta \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau, t_2) \nu(d\tau)$$

... admet une solution unique  $\hat{\lambda}_{t_0}^\nu \in \mathcal{M}(T)$ . De plus, si l'on désigne par  $\delta$  et  $\delta_{t_0}$  les mesures de Dirac respectivement à l'origine  $\theta_{\mathbb{R}^n}$  et au point  $t_0$ , alors  $\hat{\lambda}_{t_0}^\nu$  est telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \equiv \delta \\ \text{et} \\ t_0 \in T \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\lambda}_{t_0}^\nu \equiv \delta_{t_0}$$

Enfin, si  $\tilde{\lambda}$  désigne une mesure bornée quelconque appartenant à  $\mathcal{M}(T)$ , alors les expressions ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{F}_\nu(t_0, \omega) = \phi_f^\nu(t_0) + \int_T \{F(t + \omega) - \phi_f(t)\} \hat{\lambda}_{t_0}^\nu(dt) \\ \tilde{F}_\nu(t_0, \omega) = \phi_f^\nu(t_0) + \int_T \{F(t + \omega) - \phi_f(t)\} \tilde{\lambda}(dt) \\ \{ \hat{\varepsilon}_\nu(t_0) \}^2 = \int_\Omega |F^\nu(t_0 + \omega) - \hat{F}_\nu(t_0, \omega)|^2 \mu(d\omega) \\ \{ \tilde{\varepsilon}_\nu(t_0) \}^2 = \int_\Omega |F^\nu(t_0 + \omega) - \tilde{F}_\nu(t_0, \omega)|^2 \mu(d\omega) \end{array} \right.$$

... ont toujours un sens et vérifient les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega \hat{F}_\nu(t_0, \omega) \mu(d\omega) = \int_\Omega F^\nu(t_0 + \omega) \mu(d\omega) = \phi_f^\nu(t_0) \\ t_0 \in T \Rightarrow \hat{F}_\delta(t_0, \omega) = F(t_0 + \omega) \quad \forall \omega \in \Omega \\ 0 \leq \{ \hat{\varepsilon}_\nu(t_0) \}^2 \leq \{ \tilde{\varepsilon}_\nu(t_0) \}^2 \\ \{ \hat{\varepsilon}_\nu(t_0) \}^2 = \int_\Delta \int_\Delta \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau_1, t_0 + \tau_2) \nu(d\tau_1) \cdot \overline{\nu(d\tau_2)} \\ \quad - \int_T \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \hat{\lambda}_{t_0}^\nu(dt_1) \overline{\hat{\lambda}_{t_0}^\nu(dt_2)} \\ t_0 \in T \Rightarrow \hat{\varepsilon}_\delta(t_0) = 0 \end{array} \right.$$

#### Démonstration : Première partie

Soit  $\{g(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  la famille telle que ...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} g(\omega, t) = F(t + \omega) - \phi_f(t) \\ \Rightarrow g(\omega, t) = f(\omega, t) - \phi_f(t) \end{array}$$

... et soit  $E$  le Banach séparable identique à  $\mathcal{C}(T, \mathbb{C})$ . On sait, d'après ce qui a été dit au paragraphe III-1.8-a, qu'il existe un vecteur paramétré centré  $U_g \in L_E^2(\Omega, \mathcal{A}_\Omega, \mu)$ , associé à cette famille et tel que par conséquent l'on ait :

$$\forall U_g \in U_g \Leftrightarrow U_g(\omega) = g(\omega, \cdot) \quad \mu\text{-p.p.}$$

Si nous supposons que l'ensemble  $\hat{\Lambda}_{t_0}^v$  des solutions de l'équation de Wiener-Hopf n'est pas vide, alors on peut écrire, compte tenu de ce qui a été dit au paragraphe III-4.1-c :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_{t_0}^v \in \hat{\Lambda}_{t_0}^v \\ t_2 \in T \end{array} \right\} \Rightarrow \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt_1) = \Gamma_{ff}^c(t_0, t_2)$$

Comme d'autre part on vérifie facilement que l'on a ...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 \end{array} \right\} \in T \Rightarrow \Gamma_{gg}(t_1, t_2) = \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)$$

... il s'en suit que l'implication suivante est vérifiée :

$$(1) \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_{t_0}^v \in \hat{\Lambda}_{t_0}^v \\ t_2 \in T \end{array} \right\} \Rightarrow \int_T \Gamma_{gg}(t_1, t_2) \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt_1) = \Gamma_{ff}^c(t_0, t_2),$$

Ceci dit, soit  $\varphi_{t_0}^v$  la classe de  $L^2(\Omega, \mathcal{G}_{\Omega}, \mu)$  telle que :

$$\forall \varphi_{t_0}^v \in \varphi_{t_0}^v \Leftrightarrow \varphi_{t_0}^v(\omega) = f^v(\omega, t_0) - \phi_f^v(t_0) \quad \mu\text{-p.p.}$$

Compte tenu que ...

$$\forall t_2 \in T \Rightarrow \{ f(\cdot, t_2) - \phi_f(t_2) \} \equiv g(\cdot, t_2) \in \langle \delta_{t_2}, U_g \rangle$$

... on a donc :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ff}^c(t_0, t_2) &= \int_{\Omega} \{ f^v(\omega, t_0) - \phi_f^v(t_0) \} \cdot \overline{\{ f(\omega, t_2) - \phi_f(t_2) \}} \cdot \mu(d\omega) \\ &= \langle \varphi_{t_0}^v | \langle \delta_{t_2}, U_g \rangle \rangle_{L_2} \end{aligned}$$

En définitive, si on porte cette dernière égalité dans la relation (1), il vient :

$$(2) \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_{t_0}^v \in \hat{\Lambda}_{t_0}^v \\ t_2 \in T \end{array} \right\} \Rightarrow \int_T \Gamma_{gg}(t_1, t_2) \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt_1) = \langle \varphi_{t_0}^v | \langle \delta_{t_2}, U_g \rangle \rangle_{L_2}$$

Cela implique, d'après la proposition III-3.1, que  $\hat{\lambda}_{t_0}^v$  appartient à  $F\{U_g\}$  et que la classe ...

$$(3) \quad \hat{\phi}_{t_0}^v = U_g \hat{\lambda}_{t_0}^v$$

... approche  $\varphi_{t_0}^v$  en  $\mu$ -moyenne quadratique sur  $\mathcal{E}\{U_g\}$ ; on en déduit également que pour tout  $\hat{\lambda}_{t_0}^v \in \hat{\Lambda}_{t_0}^v$  et tout  $\tilde{\lambda} \in \mathcal{M}(T)$ , on a :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| \varphi_{t_0}^v - \hat{\phi}_{t_0}^v \|_{L^2}^2 = \| \varphi_{t_0}^v \|_{L^2}^2 - \int_T \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt_1) \overline{\hat{\lambda}_{t_0}^v(dt_2)} \\ \| \varphi_{t_0}^v - \hat{\phi}_{t_0}^v \|_{L^2}^2 \leq \| \varphi_{t_0}^v - U_g \tilde{\lambda} \|_{L^2}^2 \end{array} \right.$$

Enfin, comme par hypothèse, la fonction  $F$  est telle que ...

$$\left[ \int_T \{ F(t+\omega) - \phi_f(t) \} \lambda(dt) = 0 \quad \mu\text{-p.p.} \Leftrightarrow \lambda \equiv 0 \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[ \int_T g(\omega, t) \lambda(dt) = 0 \quad \mu\text{-p.p.} \Leftrightarrow \lambda \equiv 0 \right]$$

... il s'en suit que le vecteur paramétré  $U_g$  et la famille  $\{ g(\omega, \cdot) \}_{\omega \in \Omega}$  sont par définition  $\mu$ -libres; la même proposition III-3.1 nous apprend alors que l'ensemble  $\hat{\Lambda}_{t_0}^v$  se réduit à un seul élément, ce qui revient à dire que l'équation de Wiener-Hopf possède une solution et une seule  $\hat{\lambda}_{t_0}^v$  appartenant à  $E' \equiv \mathcal{M}(T)$ . Par ailleurs, si  $t_0$  appartient à  $T$  et si  $\nu$  est identique à la mesure de Dirac  $\delta$  au point origine  $\Theta_{\mathbb{R}^n}$ , alors l'unicité de  $\hat{\lambda}_{t_0}^v$  nous garantit que la solution particulière évidente  $\hat{\lambda}_{t_0}^v \equiv \delta_{t_0}$  est l'unique solution de cette équation; ceci implique en particulier que l'on ait pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \nu \equiv \delta \\ t_0 \in T \end{array} \right\} &\Rightarrow \hat{F}_{\delta}(t_0, \omega) = \phi_f^{\delta}(t_0) + \int_T \{ F(t+\omega) - \phi_f(t) \} \delta_{t_0}(dt) \\ &\Rightarrow \hat{F}_{\delta}(t_0, \omega) = \phi_f(t_0) + \{ F(t_0 + \omega) - \phi_f(t_0) \} \\ &\Rightarrow \hat{F}_{\delta}(t_0, \omega) = F(t_0 + \omega) \end{aligned} \quad (5)$$

#### Démonstration : Deuxième partie

Compte tenu de tout ce qui a été dit dans la première partie de la démonstration, on est assuré que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{F}_v(t_0, \cdot) - \phi_f^v(t_0) = \int_T g(\cdot, t) \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt) \in U_g \hat{\lambda}_{t_0}^v \equiv \hat{\phi}_{t_0}^v \\ \hat{F}_v(t_0, \cdot) - \phi_f^v(t_0) = \int_T g(\cdot, t) \tilde{\lambda}(dt) \in U_g \tilde{\lambda} \\ \{ F^v(t_0 + \cdot) - \phi_f^v(t_0) \} \in \varphi_{t_0}^v \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \| \varphi_{t_0}^v \|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} | F^v(t_0 + \omega) - \phi_f^v(t_0) |^2 \mu(d\omega) \\ \| \varphi_{t_0}^v - \hat{\phi}_{t_0}^v \|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} | F^v(t_0 + \omega) - \hat{F}_v(t_0, \omega) |^2 \mu(d\omega) = \{ \hat{\epsilon}_v(t_0) \}^2 \\ \| \varphi_{t_0}^v - U_g \tilde{\lambda} \|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} | F^v(t_0 + \omega) - \hat{F}_v(t_0, \omega) |^2 \mu(d\omega) = \{ \tilde{\epsilon}_v(t_0) \}^2 \end{array} \right.$$

Ceci nous permet de conclure que  $\hat{F}_v(t_0, \omega)$ ,  $\tilde{F}_v(t_0, \omega)$ ,  $\hat{e}_v(t_0)$  et  $\tilde{e}_v(t_0)$  existent. D'autre part, compte tenu que  $v$  et  $\mu$  sont des mesures bornées, on démontre sans difficulté à l'aide du théorème de Fubini que l'on a :

$$\int_{\Omega} |F^v(t_0 + \omega) - \phi_f^v(t_0)|^2 \mu(d\omega) = \int_{\Delta} \int_{\Delta} \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau_1, t_0 + \tau_2) v(d\tau_1) \overline{v(d\tau_2)}$$

Il s'en suit que l'on peut écrire, d'après la relation (4) démontrée dans la première partie :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \{\hat{e}_v(t_0)\}^2 &\leq \{\tilde{e}_v(t_0)\}^2 \\ \{\hat{e}_v(t_0)\}^2 &= \int_{\Delta} \int_{\Delta} \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau_1, t_0 + \tau_2) v(d\tau_1) \overline{v(d\tau_2)} \\ &\quad - \int_T \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt_1) \overline{\hat{\lambda}_{t_0}^v(dt_2)} \end{aligned} \right.$$

En particulier, nous avons vu que si  $t_0$  appartient à  $T$  et si  $v$  est identique à  $\delta$ , alors  $\hat{\lambda}_{t_0}^v$  est identique à  $\delta_{t_0}$  et l'on a ...

$$\begin{aligned} \{\hat{e}_{\delta}(t_0)\}^2 &= \int_{\Delta} \int_{\Delta} \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau_1, t_0 + \tau_2) \delta(d\tau_1) \delta(d\tau_2) \\ &\quad - \int_T \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \delta_{t_0}(dt_1) \delta_{t_0}(dt_2) \\ \Rightarrow \{\hat{e}_{\delta}(t_0)\}^2 &= \Gamma_{ff}^c(t_0, t_0) - \Gamma_{ff}^c(t_0, t_0) \end{aligned}$$

... d'où l'on déduit que :

$$(7) \quad t_0 \in T \Rightarrow \hat{e}_{\delta}(t_0) = 0$$

Enfin, compte tenu que l'on a l'implication suivante ...

$$\int_T \{F(t + \cdot) - \phi_f(t)\} \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt) \in \hat{\phi}_{t_0}^v \Rightarrow M \left\{ \int_T \{F(t + \cdot) - \phi_f(t)\} \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt) \right\} \text{ existe}$$

... on peut toujours écrire :

$$\begin{aligned} M \left\{ \int_T \{F(t + \cdot) - \phi_f(t)\} \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt) \right\} &= M \left\langle \hat{\lambda}_{t_0}^v, \{F(\cdot + \cdot) - \phi_f(\cdot)\} \right\rangle \\ &= \langle \hat{\lambda}_{t_0}^v, M \{F(\cdot + \cdot) - \phi_f(\cdot)\} \rangle \\ &= \langle \hat{\lambda}_{t_0}^v, M \{F(\cdot + \cdot)\} - \phi_f(\cdot) \rangle \end{aligned}$$

Compte tenu que par construction  $\phi_f(t) = M\{F(t + \cdot)\}$  quel que soit  $t \in T$ , on en conclut que l'on a ...

$$\begin{aligned} M \left\{ \int_T \{F(t + \cdot) - \phi_f(t)\} \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt) \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \left\{ \int_T \{F(t + \omega) - \phi_f(t)\} \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt) \right\} \mu(d\omega) &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \{\hat{F}_v(t_0, \omega) - \phi_f^v(t_0)\} \mu(d\omega) &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \hat{F}_v(t_0, \omega) \mu(d\omega) &= \phi_f^v(t_0) \end{aligned} \quad (8)$$

... Ce qui achève la démonstration.

b) Cas particulier où  $T$  est discret

Dans le cas particulier (important pour les applications sur ordinateur) où  $T$  est un ensemble discret de  $N$  points de  $R^n$  tels que ...

$$T \equiv \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$$

... on sait que chaque mesure  $\lambda \in \mathcal{M}(T)$  est obligatoirement de la forme suivante où  $\{\hat{a}_t\}_{t \in T}$  est un ensemble de  $N$  constantes complexes :

$$\lambda(dt_1) = \sum_{t \in T} a_t \cdot \delta_t(dt_1)$$

On en déduit que l'équation de Wiener-Hopf prend alors la forme matricielle suivante aux inconnues  $\{\hat{a}_{t_0}^v(t)\}_{t \in T}$  :

$$\left[ \begin{array}{cccc} \Gamma_{11}^c & \Gamma_{21}^c & \dots & \Gamma_{N1}^c \\ \Gamma_{12}^c & \Gamma_{22}^c & \dots & \Gamma_{N2}^c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1N}^c & \Gamma_{2N}^c & \dots & \Gamma_{NN}^c \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} \hat{a}_{t_1}^v(t_0) \\ \hat{a}_{t_2}^v(t_0) \\ \vdots \\ \hat{a}_{t_N}^v(t_0) \end{array} \right] = \int_{\Delta} \left[ \begin{array}{c} \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau, t_1) \\ \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau, t_2) \\ \vdots \\ \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau, t_N) \end{array} \right] \cdot v(d\tau)$$

$[\Gamma^c] \quad [\hat{A}^v(t_0)]$

$$\text{avec } \mathbf{V} \left\{ \begin{array}{c} t_i \\ t_j \end{array} \right\} \in T \Rightarrow \Gamma_{ij}^c = \Gamma_{ff}^c(t_i, t_j)$$

Il s'en suit que  $F^v(t_0)$  est  $T$ -estimable en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $t_0 \in D$  si, et seulement si :

1°) La fonction  $F$  est connue numériquement sur  $T$

2°) On connaît sur  $S \times S$  et  $S$  respectivement la fonction de covariance centrée  $\Gamma_{ff}^c$  et la moyenne  $\phi_f$  relatives à la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée à  $F$ .

3°) La matrice  $[\Gamma^c]$  est définie positive, ou, ce qui revient au même, les  $N$  fonctions  $\{F(t_i + \omega) - \phi_f(t_i)\}_{t_i \in T}$  sont des fonctions de  $\omega \in \Omega$  linéairement indépendantes.

On en déduit également que si  $F^v(t_0)$  est  $T$ -estimable en  $\mu$ -moyenne quadratique au point  $t_0 \in D$ , alors on a :

$$\hat{F}_v(t_0, \omega) = \phi_f^v(t_0) + \sum_{t \in T} \hat{a}_t^v(t_0) \cdot \{F(t + \omega) - \phi_f(t)\}$$

$$\{\hat{\epsilon}_v(t_0)\}^2 = \int_{\Delta} \int_{\Delta} \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau_1, t_0 + \tau_2) v(d\tau_1) \overline{v(d\tau_2)} - [\hat{A}^v(t_0)]^t \cdot [\Gamma^c] \cdot [\hat{A}^v(t_0)]$$

c) Propriété des mesures  $\hat{\lambda}_{t_0}^v$  solution de l'équation de Wiener-Hopf

#### Énoncé

Supposons que  $t_0$  soit un point de  $D$  et que  $F(t_0^\Delta)$  soit  $T$ -interpolable en tout point  $t_0^\Delta \in [t_0 + \Delta]$ . Si il existe une famille finie  $\{\hat{a}_s(t_0^\Delta, t_1)\}_{s \in \sigma}$  de fonctions continues pour  $t_0^\Delta \in [t_0 + \Delta]$  et continues pour  $t_1 \in T$ , et si il existe une famille finie  $\{\lambda_s\}_{s \in \sigma}$  de mesures appartenant à  $\mathcal{M}(T)$  et telles que ...

$$\forall t_0^\Delta \in [t_0 + \Delta] \Rightarrow \hat{\lambda}_{t_0^\Delta}^\delta(dt_1) = \sum_{s \in \sigma} \hat{a}_s(t_0^\Delta, t_1) \lambda_s(dt_1)$$

... alors  $F^v(t_0)$  est  $T$ -estimable au point  $t_0$  quel que soit  $v \in \mathcal{M}(\Delta)$  et l'on a :

$$\hat{\lambda}_{t_0}^v(dt_1) = \sum_{s \in \sigma} \hat{a}_s^v(t_0, t_1) \lambda_s(dt_1)$$

#### Démonstration

Par définition, on a :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t_0^\Delta \in [t_0 + \Delta] \\ t_2 \in T \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{s \in \sigma} \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \hat{a}_s(t_0^\Delta, t_1) \lambda_s(dt_1) = \Gamma_{ff}^c(t_0^\Delta, t_2)$$

Il s'en suit que l'on peut écrire pour tout  $t_2 \in T$  :

$$\sum_{s \in \sigma} \int_{\Delta} \left\{ \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \hat{a}_s(t_0 + \tau, t_1) \lambda_s(dt_1) \right\} v(d\tau) = \int_{\Delta} \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau, t_2) v(d\tau)$$

Les mesures  $v$  et  $\lambda_s$  étant bornées, on a alors d'après le théorème de Fubini :

$$\Leftrightarrow \sum_{s \in \sigma} \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \left\{ \int_{\Delta} \hat{a}_s(t_0 + \tau, t_1) v(d\tau) \right\} \lambda_s(dt_1) = \int_{\Delta} \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau, t_2) v(d\tau)$$

$$\Leftrightarrow \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \left\{ \sum_{s \in \sigma} \hat{a}_s^v(t_0, t_1) \lambda_s(dt_1) \right\} = \int_{\Delta} \Gamma_{ff}^c(t_0 + \tau, t_2) v(d\tau)$$

Mais comme par définition des fonctions  $T$ -interpolables on a ...

$$\left[ \forall t_2 \in T \Rightarrow \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \lambda(dt_1) = 0 \right] \Leftrightarrow \lambda = \emptyset$$

... il s'en suit que l'on peut identifier l'équation de Wiener-Hopf avec la dernière relation obtenue ci-dessus :

$$\Leftrightarrow \hat{\lambda}_{t_0}^v(dt_1) = \sum_{s \in \sigma} \hat{a}_s^v(t_0, t_1) \lambda_s(dt_1)$$

#### Remarque

Compte tenu de ce qui a été dit au paragraphe III-4.2-b, on vérifie facilement que les conditions d'application de la propriété énoncée ci-dessus sont toujours satisfaites si  $T$  est un ensemble discret de  $N$  points  $t_i \in \mathbb{R}^n$ . Il en est évidemment de même si  $\hat{\lambda}_{t_0}^\delta(dt_1)$  admet par rapport à une mesure  $\lambda(dt_1)$  une densité  $\hat{\lambda}(t_0^\Delta, t_1)$  qui soit continue pour  $t_0^\Delta \in [t_0 + \Delta]$  et pour  $t_1 \in T$ .

d) Estimation et interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique

#### Notations

Lorsque  $v$  est identique à  $\delta$ , on a manifestement :

$$F(t_0) = F^\delta(t_0)$$

Par analogie, nous adopterons à partir de maintenant les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_{t_0} \equiv \hat{\lambda}_{t_0}^\delta \\ \lambda \equiv \lambda^\delta \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}(t_0, \cdot) \equiv \hat{F}_\delta(t_0, \cdot) \\ \hat{V}(t_0, \cdot) \equiv \hat{V}_\delta(t_0, \cdot) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\epsilon}(t_0) = \hat{\epsilon}_\delta(t_0) \\ \hat{v}(t_0) = \hat{v}_\delta(t_0) \end{array} \right.$$

Interpolation : Définition

Supposons que  $F(t_0)$  soit  $T$ -interpolable en tout point  $t_0 \in D$  et soit  $\theta_{\mathbb{R}^n}$  le point origine de l'espace  $\mathbb{R}^n$  ; par définition, nous dirons que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) F(t_0, \cdot) \text{ est l'interpolateur de } F \text{ au point } t_0 \\ 2^\circ) \hat{F}(t_0) = \hat{F}(t_0, \theta_{\mathbb{R}^n}) \text{ est l'interpolation de } F \text{ au point } t_0 \\ 3^\circ) \hat{\varepsilon}(t_0) \text{ est l'erreur quadratique moyenne d'interpolation au point } t_0 \end{array} \right.$$

Remarquons que  $\hat{F}(t_0)$  interpole bien  $F(t)$  au point  $t_0 \in D$  au sens commun du terme car, d'après la proposition III-4.2-a, on a :

$$t_0 \in T \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}(t_0) = \hat{F}(t_0, \theta_{\mathbb{R}^n}) = F(t_0 + \theta_{\mathbb{R}^n}) = F(t_0) \\ \hat{\varepsilon}(t_0) = 0 \end{array} \right.$$

Estimation : Définition stricte

Supposons que  $t_0$  soit un point de  $D$  et que  $F(t_0)$  soit  $T$ -interpolable en tout point  $t_0^\Delta \in [t_0 + \Delta]$ . Supposons d'autre part qu'il existe une famille finie  $\{\hat{a}_s(t_0^\Delta, t_1)\}_{s \in \sigma}$  de fonctions continues pour  $t_0^\Delta \in [t_0 + \Delta]$  et continue pour  $t_1 \in T$ . Supposons enfin qu'il existe une famille finie  $\{\hat{\lambda}_s\}_{s \in \sigma}$  de mesures appartenant à  $\mathcal{M}(T)$  et telles que :

$$\forall t_0^\Delta \in [t_0 + \Delta] \Rightarrow \hat{\lambda}_{t_0^\Delta}(dt_1) = \sum_{s \in \sigma} \hat{a}_s(t_0^\Delta, t_1) \hat{\lambda}_s(dt_1)$$

Dans ces conditions, si  $\theta_{\mathbb{R}^n}$  est le point origine de  $\mathbb{R}^n$ , alors pour toute mesure  $\nu \in \mathcal{M}(\Delta)$ , nous dirons par définition que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \hat{F}_\nu(t_0, \cdot) \text{ est l'estimateur de } F^\nu(t_0) \text{ au point } t_0 \\ 2^\circ) \hat{F}_\nu(t_0) = \hat{F}_\nu(t_0, \theta_{\mathbb{R}^n}) \text{ est l'estimation de } F^\nu(t_0) \text{ au point } t_0 \\ 3^\circ) \hat{\varepsilon}_\nu(t_0) \text{ est l'erreur quadratique moyenne d'estimation au point } t_0 \end{array} \right.$$

Compte tenu de la proposition III-4.2-c, on montre facilement que sous les conditions précédentes, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{F}_\nu(t_0, \cdot) \equiv \{\hat{F}(t_0, \cdot)\}^\nu \equiv \hat{F}^\nu(t_0, \cdot) \\ \hat{F}_\nu(t_0) = \{\hat{F}(t_0)\}^\nu = \hat{F}^\nu(t_0) \\ \hat{\varepsilon}_\nu(t_0) \neq \{\hat{\varepsilon}(t_0)\}^\nu \end{array} \right.$$

Estimation : Définition large

Dans le cas général où  $F^\nu(t_0)$  est  $T$ -estimable en tout point  $t_0 \in D$ , l'expression  $F_\nu(t_0, \omega)$  existe toujours pour tout  $\omega \in \Omega$ . On peut alors, par analogie avec la définition précédente, poser par définition que :

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \hat{F}_\nu(t_0, \cdot) \text{ est l'estimateur de } F^\nu(t_0) \text{ au point } t_0 \\ 2^\circ) \hat{F}_\nu(t_0) = \hat{F}_\nu(t_0, \theta_{\mathbb{R}^n}) \text{ est l'estimation de } F^\nu(t_0) \text{ au point } t_0 \\ 3^\circ) \hat{\varepsilon}_\nu(t_0) \text{ est l'erreur quadratique moyenne d'estimation au point } t_0 \end{array} \right.$$

Il faut cependant remarquer qu'en général on a alors ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{F}_\nu(t_0, \cdot) \neq \{\hat{F}(t_0, \cdot)\}^\nu \\ \hat{F}_\nu(t_0) \neq \{\hat{F}(t_0)\}^\nu \end{array} \right.$$

... ce qui rend cette nouvelle définition quelque peu artificielle.

e) Interprétation de  $\hat{F}_\nu(t_0)$  et  $\hat{\varepsilon}_\nu(t_0)$

Énoncé

Soit  $t_0$  un point fixé dans le compact  $D \in \mathbb{R}^n$ . L'estimation  $\hat{F}(t_0)$  (si elle existe) est une valeur numérique particulière extraite d'un ensemble de valeurs  $\{\hat{F}_\nu(t_0, \omega)\}_{\omega \in \Omega}$  telles que :

- $$\begin{array}{l} a) \hat{F}_\nu(t_0, \omega) = \phi_f^\nu(t_0) + \int_T \{F(t + \omega) - \phi_f(t)\} \lambda_{t_0}^\nu(dt) \\ b) \int_\Omega \hat{F}_\nu(t_0 + \omega) \mu(d\omega) = \int_\Omega F^\nu(t_0 + \omega) \mu(d\omega) = \phi_f^\nu(t_0) \\ c) t_0 \in T \Rightarrow \hat{F}_\delta(t_0, \omega) = F^\delta(t_0 + \omega) \text{ quel que soit } \omega \in \Omega \end{array}$$

$$d) \left\{ \begin{array}{l} A_T^\nu(t_0) = \left\{ \omega \in \Omega : |\hat{F}_\nu(t_0, \omega) - F^\nu(t_0 + \omega)| \leq \tau \cdot \hat{\varepsilon}_\nu(t_0) \right\} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_T^\nu(t_0) \in \mathcal{A}_\Omega \\ \mu\{A_T^\nu(t_0)\} \geq (1 - 1/\tau^2) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

e) Dans le cas particulier où  $\Omega$  et  $\mu$  sont tels que l'on ait ...

$$\begin{cases} |\Omega| = \int_{\Omega} d\omega < +\infty \\ \mu(d\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \cdot d\omega \end{cases}$$

... alors on est assuré qu'il y a au moins  $100 \cdot (1 - 1/\tau^2)$  % des valeurs numériques  $\{\hat{F}_V(t_0, \omega)\}_{\omega \in \Omega}$  pour lesquelles on a :

$$|\hat{F}_V(t_0, \omega) - F^V(t_0 + \omega)| \leq \tau \cdot \hat{\epsilon}_V(t_0)$$

#### Démonstration

Nous ne reviendrons pas sur les relations a), b) et c) qui ont déjà été présentées au paragraphe III-4.2-a. Ceci dit, remarquons que  $\hat{F}_V(t_0, \cdot)$  et  $F^V(t_0 + \cdot)$  sont des applications mesurables de  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$  dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$ ; en effet :

1°) Dans la deuxième partie de la démonstration relative à la proposition III-4.2-a, on a vu que ...

$$\hat{F}_V(t_0, \cdot) - \phi_{F^V}(t_0) \in \hat{\Phi}_{t_0}^V$$

... où  $\hat{\Phi}_{t_0}^V$  est une classe de  $L^2(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$ . On a donc :

$$\hat{F}_V(t_0, \cdot) - \phi_{F^V}(t_0) \in \mathcal{I}^2(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$$

$$\Rightarrow \hat{F}_V(t_0, \cdot) \in \mathcal{M}_\mathbb{C}(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$$

2°) Comme d'autre part  $F^V$  est continue sur  $[D+\Omega]$ , pour tout  $t_0$  fixé dans  $D$ , on est donc assuré que  $F^V(t_0 + \cdot)$  est une fonction continue de  $\omega \in \Omega$ . Ce qui implique :

$$F^V(t_0 + \cdot) \in \mathcal{M}_\mathbb{C}(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$$

La mesure  $\mu$  étant positive normée, il s'en suit que l'espace  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$  est en fait un espace probabilisé et que, par conséquent, l'application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$  dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_\mathbb{C})$  telle que ...

$$\forall \omega \in \Omega \Rightarrow X(\omega) = \hat{F}_V(t_0, \omega) - F^V(t_0 + \omega)$$

... peut toujours être considérée comme une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mu)$ . En particulier on déduit de ceci que l'ensemble  $A_\tau^V(t_0)$  appartient à la tribu  $\mathcal{B}_\Omega$ ; de plus, comme d'après la proposition III-4-2.a on a ...

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \hat{F}_V(t_0, \omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} F^V(t_0 + \omega) \mu(d\omega) = \phi_{F^V}(t_0) \\ \{\hat{\epsilon}_V(t_0)\}^2 = \int_{\Omega} |\hat{F}_V(t_0, \omega) - F^V(t_0 + \omega)|^2 \mu(d\omega) \end{cases}$$

... il s'en suit que  $X$  est de moyenne nulle et possède une variance  $\sigma_X^2$  égale à  $\{\hat{\epsilon}_V(t_0)\}^2$ .

Si donc on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebichef, on a :

$$\mu \left\{ \omega \in \Omega : |X(\omega)| \leq \tau \cdot \sigma_X \right\} \geq 1 - 1/\tau^2$$

$$\Leftrightarrow \mu \left\{ \omega \in \Omega : |\hat{F}_V(t_0, \omega) - F^V(t_0 + \omega)| \leq \tau \cdot \hat{\epsilon}_V(t_0) \right\} \geq 1 - 1/\tau^2$$

$$\Leftrightarrow \mu \left\{ A_\tau^V(t_0) \right\} \geq 1 - 1/\tau^2$$

Dans le cas particulier où l'on a ...

$$\begin{cases} |\Omega| = \int_{\Omega} d\omega < +\infty \\ \mu(d\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \cdot d\omega \end{cases}$$

... on peut alors écrire :

$$\begin{cases} |A_\tau^V(t_0)| = \int_{A_\tau^V(t_0)} d\omega \\ \Rightarrow \mu \left\{ A_\tau^V(t_0) \right\} = \frac{|A_\tau^V(t_0)|}{|\Omega|} \geq 1 - 1/\tau^2 \end{cases}$$

... ce qui exprime qu'il y a au moins  $100 \cdot (1 - 1/\tau^2)$  % des points de  $\Omega$  pour lesquels la relation suivante est vérifiée :

$$|\hat{F}_V(t_0, \omega) - F^V(t_0 + \omega)| \leq \tau \cdot \hat{\epsilon}_V(t_0)$$

#### Remarque

Comme nous l'avons déjà fait remarquer au paragraphe III-4.1-c, on peut toujours considérer  $\Omega$  comme un ensemble d'épreuves et conférer à l'interpolation et à l'estimation en  $\mu$ -moyenne quadratique une interprétation probabiliste; les fonctions  $\hat{F}_V(t_0, \cdot)$  et  $F^V(t_0 + \cdot)$  peuvent alors être considérées, pour  $t_0$  fixé, comme des variables aléatoires de même moyenne  $\phi_{F^V}(t_0)$  et telles que :

$$\{\hat{\epsilon}_V(t_0)\}^2 = E \left\{ |\hat{F}_V(t_0, \cdot) - F^V(t_0 + \cdot)|^2 \right\}$$

En fait, il faut bien comprendre que cette interprétation probabiliste purement formelle est, à certains égards, dangereuse car, par le jeu de la terminologie probabiliste, elle attribue artificiellement un caractère aléatoire à des quantités qui sont par ailleurs parfaitement déterminées.

f) Continuité de  $\hat{F}_V(t_0)$  lorsque  $T$  est discret

Énoncé

Si  $T$  est un ensemble discret de  $N$  points appartenant à  $\mathbb{R}^n$  et si  $F^V(t_0)$  est  $T$ -estimable en tout point  $t_0 \in D$ , alors l'estimation  $\hat{F}_V(t_0)$  est une fonction continue sur  $D$ .

Démonstration : première partie

Reprenons les notations relatives à la démonstration de la proposition III-4.2-a, et soit  $C_{\psi\psi}$  l'opérateur de covariance du vecteur paramétré  $U_g$ .

D'après la proposition III-2.5-b et d'après ce qui a été dit au paragraphe III-4.1-c, on sait que les relations suivantes sont toujours vérifiées :

1°)  $\phi_{f^V} \equiv \phi_f^V \in \mathcal{E}[(T \cup D), \mathbb{C}]$

2°)  $\forall t \in (T \cup D) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{ff}^c(t, \cdot) \\ \Gamma_{f^V f^V}^c(t, \cdot) \end{array} \right\} \in \mathcal{E}[(T \cup D), \mathbb{C}]$

3°)  $\forall \lambda \in \mathcal{M}(T) \Rightarrow C_{\psi\psi}(\lambda) = \int_T \Gamma_{ff}^c(\cdot, t) \bar{\lambda}(dt)$

Comme par définition des fonctions  $T$ -estimables on a ...

$$\left[ \forall t_2 \in T \Rightarrow \int_T \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \lambda(dt_1) = 0 \right] \Leftrightarrow \lambda \equiv 0_{\mathcal{M}}$$

... il s'en suit que  $C_{\psi\psi}$  est inversible ; ceci nous permet d'écrire :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t_0 \\ t'_0 \end{array} \right\} \in D \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda}_{t_0}^V = C_{\psi\psi}^{-1} \{ \Gamma_{f^V f^V}^c(t_0, \cdot) \} \\ \hat{\lambda}_{t'_0}^V = C_{\psi\psi}^{-1} \{ \Gamma_{f^V f^V}^c(t'_0, \cdot) \} \end{array} \right.$$

Soit  $u_g$  l'application linéaire associée au vecteur paramétré  $U_g$ . Quels que soient  $t_0$  et  $t'_0$  appartenant à  $D$ , on a donc :

$$u_g \hat{\lambda}_{t_0}^V - u_g \hat{\lambda}_{t'_0}^V = u_g C_{\psi\psi}^{-1} \{ \Gamma_{f^V f^V}^c(t_0, \cdot) - \Gamma_{f^V f^V}^c(t'_0, \cdot) \}$$

$$\Rightarrow \{ \hat{F}_V(t_0, \omega) - \phi_f^V(t_0) \} - \{ \hat{F}_V(t'_0, \omega) - \phi_f^V(t'_0) \} = \langle C_{\psi\psi}^{-1} \{ \Gamma_{f^V f^V}^c(t_0, \cdot) - \Gamma_{f^V f^V}^c(t'_0, \cdot) \}, U_g(\omega) \rangle$$

$$\Rightarrow \{ \hat{F}_V(t_0) - \hat{F}_V(t'_0) \} = \{ \phi_f^V(t_0) - \phi_f^V(t'_0) \}$$

$$+ \langle C_{\psi\psi}^{-1} \{ \Gamma_{f^V f^V}^c(t_0, \cdot) - \Gamma_{f^V f^V}^c(t'_0, \cdot) \}, \{ F(\cdot) - \phi_f(\cdot) \} \rangle$$

$$\Rightarrow | \hat{F}_V(t_0) - \hat{F}_V(t'_0) | \leq | \phi_f^V(t_0) - \phi_f^V(t'_0) |$$

$$+ \| C_{\psi\psi}^{-1} \| \cdot \sup_{t \in T} | \Gamma_{f^V f^V}^c(t_0, t) - \Gamma_{f^V f^V}^c(t'_0, t) | \cdot \sup_{t \in T} | F(t) - \phi_f(t) |$$

Comme par ailleurs on a ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_f^V \text{ continue sur } D \Rightarrow \lim_{t'_0 \rightarrow t_0} | \phi_f^V(t_0) - \phi_f^V(t'_0) | = 0 \\ C_{\psi\psi}^{-1} = \text{opérateur linéaire continu} \Rightarrow \| C_{\psi\psi}^{-1} \| < +\infty \\ F \text{ et } \phi_f \text{ continues sur le compact } T \Rightarrow \sup_{t \in T} | F(t) - \phi_f(t) | < +\infty \end{array} \right.$$

... il s'en suit qu'il nous suffit de montrer que la relation suivante est vérifiée quels que soient  $t_0$  et  $t'_0$  appartenant à  $D$  pour être assuré que  $\hat{F}_V$  est continue sur  $D$  :

$$(1) \quad \lim_{t'_0 \rightarrow t_0} \sup_{t \in T} | \Gamma_{f^V f^V}^c(t_0, t) - \Gamma_{f^V f^V}^c(t'_0, t) | \stackrel{!}{=} 0$$

Démonstration : deuxième partie

Nous avons vu au paragraphe III-4.1-c que l'on a :

$$\forall t \in T \Rightarrow \Gamma_{f^V f^V}^c(\cdot, t) \in \mathcal{E}[(T \cup D), \mathbb{C}]$$

L'ensemble  $D$  étant compact, il s'en suit que pour tout  $t \in T$  on peut écrire la relation suivante exprimant la continuité (uniforme) de  $\Gamma_{f^V f^V}^c(\cdot, t)$  sur  $D$  au point  $t_0 \in D$  :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \eta(\varepsilon, t) : \left\{ \begin{array}{l} \| t_0 - t'_0 \|_{\mathbb{R}^n} \leq \eta(\varepsilon, t) \\ \text{avec } t'_0 \in D \end{array} \right\} \Rightarrow | \Gamma_{f^V f^V}^c(t_0, t) - \Gamma_{f^V f^V}^c(t'_0, t) | \leq \varepsilon$$

Si nous posons ... 
$$\eta(\varepsilon) = \inf_{t \in T} \eta(\varepsilon, t)$$

... on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \eta(\varepsilon) : \left\{ \begin{array}{l} \| t_0 - t'_0 \|_{\mathbb{R}^n} \leq \eta(\varepsilon) \\ \text{avec } t'_0 \in D \end{array} \right\} \Rightarrow \sup_{t \in T} | \Gamma_{f^V f^V}^c(t_0, t) - \Gamma_{f^V f^V}^c(t'_0, t) | \leq \varepsilon$$

Il s'en suit que la relation (1) est vérifiée, ce qui, compte tenu des résultats obtenus dans la première partie de la démonstration, nous permet d'affirmer la continuité de  $\hat{F}_V$  en tout point  $t_0 \in D$ .

g) Continuité de  $\hat{F}_V(t_0)$  lorsque  $T$  est un compact quelconque de  $\mathbb{R}^n$

Énoncé

Si  $T$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$  et si  $F^V(t_0)$  est  $T$ -estimable en tout point  $t_0 \in D$  alors, pour que l'estimation  $\hat{F}_V(t_0)$  soit une fonction continue sur  $D$  il suffit qu'il existe dans  $\mathbb{R}^n$  une boule ouverte  $B$  contenant l'origine  $0_{\mathbb{R}^n}$  et telle que  $F^V$  soit continue sur l'ensemble  $(D+B+\Omega)$ .

Démonstration : première partie

La première partie de la démonstration relative à la proposition énoncée ci-dessus est strictement identique à la première partie de la démonstration effectuée pour la proposition III-4.2-f et nous assure que l'on a l'implication suivante :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{t'_0 \rightarrow t_0 \\ t'_0 \in D}} \sup_{t \in T} |\Gamma_{F^V}^{\alpha}(t_0, t) - \Gamma_{F^V}^{\alpha}(t'_0, t)| = 0 \text{ quel que soit } t_0 \in D \\ \Rightarrow \hat{F}_V \text{ est continue sur } D \end{array} \right.$$

Par contre, il est important de noter que la deuxième partie de la démonstration de la proposition III-4.2-f devient fautive lorsque  $T$  n'est plus un ensemble de  $N$  points, puisque la constante  $\eta(\epsilon)$  telle que ...

$$\eta(\epsilon) = \inf_{t \in T} \eta(\epsilon, t)$$

... peut alors être nulle !

Toutefois, si l'on restreint la généralité en supposant qu'il existe une boule ouverte  $B$  contenant l'origine  $0_{\mathbb{R}^n}$  telle que  $F^V$  soit continue sur l'ensemble  $(D+B+\Omega)$  alors, comme nous allons le voir dans la démonstration présentée ci-dessous, il est encore possible de conclure à la continuité de  $\hat{F}_V$  sur  $D$ .

Démonstration : deuxième partie

Soient  $t_0$  et  $t'_0$  deux points appartenant à  $D$  ; par définition on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_{F^V}^{\alpha}(t_0, t) - \Gamma_{F^V}^{\alpha}(t'_0, t) &= \int_{\Omega} \{ F^V(t_0+\omega) \cdot \bar{F}(t+\omega) - F^V(t'_0+\omega) \cdot \bar{F}(t+\omega) \} \cdot \mu(d\omega) \\ &= \int_{\Omega} \{ F^V(t_0+\omega) - F^V(t'_0+\omega) \} \cdot \bar{F}(t+\omega) \cdot \mu(d\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\Gamma_{F^V}^{\alpha}(t_0, t) - \Gamma_{F^V}^{\alpha}(t'_0, t)| &\leq \sup_{\omega \in \Omega} \{ |F^V(t_0+\omega) - F^V(t'_0+\omega)| \cdot |F(t+\omega)| \} \\ \Rightarrow \sup_{t \in T} |\Gamma_{F^V}^{\alpha}(t_0, t) - \Gamma_{F^V}^{\alpha}(t'_0, t)| &\leq \sup_{\omega \in \Omega} |F^V(t_0+\omega) - F^V(t'_0+\omega)| \\ &\quad \cdot \sup_{t \in T} \sup_{\omega \in \Omega} |F(t+\omega)| \end{aligned}$$

La fonction  $F^V$  étant supposée  $T$ -estimable, cela implique en particulier que  $F$  est bornée sur  $(T+\Omega)$ , d'où l'on déduit qu'il existe une constante positive finie  $C(F)$  telle que l'inégalité suivante soit vérifiée pour tout  $t_0$  et  $t'_0$  appartenant à  $D$  :

$$\sup_{t \in T} |\Gamma_{F^V}^{\alpha}(t_0, t) - \Gamma_{F^V}^{\alpha}(t'_0, t)| \leq C(F) \cdot \sup_{\omega \in \Omega} |F^V(t_0+\omega) - F^V(t'_0+\omega)|$$

Si maintenant nous supposons que  $t_0$  est fixé dans  $D$  et si nous posons ...

$$h = t'_0 - t_0$$

... alors on a :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in T} |\Gamma_{F^V}^{\alpha}(t_0, t) - \Gamma_{F^V}^{\alpha}(t'_0, t)| &\leq C(F) \cdot \sup_{\omega \in \Omega} |F^V(t_0+\omega) - F^V(t_0+\omega + h)| \\ &\leq C(F) \cdot \sup_{s \in (t_0+\Omega)} |F^V(s) - F^V(s+h)| \\ &\leq C(F) \cdot \sup_{s \in (D+\Omega)} |F^V(s) - F^V(s+h)| \end{aligned}$$

En définitive, on peut écrire l'inégalité suivante quels que soient  $t_0$  et  $t'_0$  appartenant à  $D$  :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \sup_{t \in T} |\Gamma_{F^V}^{\alpha}(t_0, t) - \Gamma_{F^V}^{\alpha}(t'_0, t)| \leq C(F) \cdot \sup_{s \in (D+\Omega)} |F^V(s) - F^V(s+h)| \\ \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} h = t'_0 - t_0 \\ 0 \leq C(F) < +\infty \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ceci étant dit, nous poserons dans ce qui suit :

$$G_h(s) = F^V(s+h) - F^V(s)$$

Compte tenu de la continuité de  $F^V$  sur  $(D+B+\Omega)$ , cela implique en particulier que l'on ait :

$$\forall h \in B \Rightarrow G_h \in \mathcal{C}(D+\Omega)$$

En désignant par  $\| \cdot \|$  la norme relative à l'espace  $\mathcal{E}(D+\Omega)$  on a donc :

$$\forall h \in B \Rightarrow \| G_h \| = \sup_{s \in (D+\Omega)} | F^V(s+h) - F^V(s) |$$

Mais d'autre part, puisque  $F^V$  est continue sur  $(D+B+\Omega)$  on est assuré que :

$$\forall s \in (D+\Omega) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow \Theta} G_h(s) = 0 \quad \text{avec } \Theta \equiv \mathbb{0}_{\mathbb{R}^n}$$

La fonction identiquement nulle sur  $(D+\Omega)$  étant en particulier continue on a donc :

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow \Theta} G_h \in \mathcal{E}(D+\Omega)$$

La norme  $\| \cdot \|$  d'une fonction identiquement nulle sur  $(D+\Omega)$  étant égale à zéro, on en déduit :

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow \Theta} \| G_h \| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow \Theta} \| G_h \| = 0$$

Compte tenu de la définition de  $G_h$  il s'en suit que l'on peut écrire :

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow \Theta} \sup_{s \in (D+\Omega)} | F^V(s+h) - F^V(s) | = 0$$

Compte tenu de la relation (2), on a donc en tout point  $t_0 \in D$  :

$$(3) \quad \lim_{t'_0 \rightarrow t_0} \sup_{t \in T} | \Gamma_{f \vee f}(t_0, t) - \Gamma_{f \vee f}(t'_0, t) | = 0$$

Démonstration : troisième partie

Par définition, on a :

$$\begin{cases} \Gamma_{f \vee f}^c(t_0, t) = \Gamma_{f \vee f}(t_0, t) - \phi_f^V(t_0) \cdot \bar{\phi}_f(t) \\ \Gamma_{f \vee f}^c(t'_0, t) = \Gamma_{f \vee f}(t'_0, t) - \phi_f^V(t'_0) \cdot \bar{\phi}_f(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{f \vee f}^c(t_0, t) - \Gamma_{f \vee f}^c(t'_0, t) = \{ \Gamma_{f \vee f}(t_0, t) - \Gamma_{f \vee f}(t'_0, t) \} - \{ \phi_f^V(t_0) - \phi_f^V(t'_0) \} \cdot \bar{\phi}_f(t)$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in T} | \Gamma_{f \vee f}^c(t_0, t) - \Gamma_{f \vee f}^c(t'_0, t) | \leq \sup_{t \in T} | \Gamma_{f \vee f}(t_0, t) - \Gamma_{f \vee f}(t'_0, t) | + | \phi_f^V(t_0) - \phi_f^V(t'_0) | \cdot \sup_{t \in T} | \bar{\phi}_f(t) |$$

Nous savons, d'après ce qui a été dit au paragraphe III-4.1-c, que  $\phi_f^V$  et  $\bar{\phi}_f$  sont continues sur le compact  $(T \cup D)$  ce qui implique :

$$\lim_{t'_0 \rightarrow t_0} | \phi_f^V(t_0) - \phi_f^V(t'_0) | \cdot \sup_{t \in T} | \bar{\phi}_f(t) | = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t'_0 \rightarrow t_0} \sup_{t \in T} | \Gamma_{f \vee f}^c(t_0, t) - \Gamma_{f \vee f}^c(t'_0, t) | \leq \lim_{t'_0 \rightarrow t_0} \sup_{t \in T} | \Gamma_{f \vee f}(t_0, t) - \Gamma_{f \vee f}(t'_0, t) |$$

Compte tenu de la relation (3), on a donc en définitive ...

$$\lim_{t'_0 \rightarrow t_0} \sup_{t \in T} | \Gamma_{f \vee f}^c(t_0, t) - \Gamma_{f \vee f}^c(t'_0, t) | = 0$$

... d'où l'on déduit, d'après l'implication (1), que  $\hat{F}_V$  est continue sur  $D$ .

Remarque

Compte tenu de la définition de  $S$  énoncée au paragraphe III-4-1-b, on déduit de la proposition qui vient d'être démontrée que  $\hat{F}_V$  est continue sur le compact  $D$  s'il existe dans  $\mathbb{R}^n$  une boule ouverte  $B$  contenant l'origine et telle que :

$$S \supset (D + B + \Omega)$$

### III-4.3 - Application : technique d'interpolation

#### a) Introduction

Les développements théoriques qui viennent d'être exposés au paragraphe III-3.1 nous suggèrent d'utiliser l'estimation en  $\mu$ -moyenne quadratique  $\hat{F}_V(t_0)$  lorsqu'elle existe comme une "prévision" de la vraie valeur  $F^V(t_0)$  en général inconnue.

Du point de vue pratique, il est à noter que la détermination de  $\hat{F}_V(t_0)$  exige la connaissance des fonctions  $\Gamma_{ff}^c$  et  $\phi_f$  définies respectivement sur  $S \times S$  et  $S$ , fonctions dont on ne dispose pas en général. Supposons que l'on sache "a priori" que  $F$  est "voisine" d'une fonction connue  $F^*$  continue et bornée sur  $[S + \Omega]$  et telle que  $F^{*V}(t_0)$  soit  $T$ -estimable en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $t_0 \in D$ . L'idée de base de la technique proposée ici est de supposer "a priori" que l'on a ...

$$\begin{cases} \Gamma_{ff}^c \equiv \Gamma_{f^*f^*}^c \\ \phi_f \equiv \phi_{f^*} \end{cases}$$

... où  $\Gamma_{f^*f^*}^c$  et  $\phi_{f^*}$  sont la fonction de covariance centrée et la moyenne de la famille  $\{f^*(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  telle que :

$$\forall \begin{cases} t \in S \\ \omega \in \Omega \end{cases} \Rightarrow f^*(\omega, t) = F^*(t + \omega)$$

#### b) Proposition 1

##### Enoncé

Soient  $F$  et  $F^*$  deux fonctions continues et bornées sur  $S$  et soient  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  et  $\{f^*(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  les deux familles de fonctions continues sur  $S$  et telles que :

$$\forall \begin{cases} t \in S \\ \omega \in \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\omega, t) = F(t + \omega) \\ f^*(\omega, t) = F^*(t + \omega) \end{cases}$$

Si nous posons ...

$$\epsilon = \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in S} |F^*(t + \omega) - F(t + \omega)|$$

... alors quels que soient  $t, t_1$  et  $t_2$  appartenant à  $S$ , on a :

$$\begin{cases} 1^{\circ} & |\phi_{f^*}(t) - \phi_f(t)| \leq \epsilon \\ 2^{\circ} & |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| \leq 4 \epsilon \cdot \left\{ \epsilon + \frac{\sqrt{\Gamma_{ff}^c(t_1, t_1)} + \sqrt{\Gamma_{ff}^c(t_2, t_2)}}{2} \right\} \\ 3^{\circ} & |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| \leq 4 \epsilon \cdot \left\{ \epsilon + \frac{\sqrt{\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_1)} + \sqrt{\Gamma_{f^*f^*}^c(t_2, t_2)}}{2} \right\} \end{cases}$$

##### Démonstration

Compte tenu des définitions posées dans l'énoncé de la proposition, on peut toujours écrire :

$$\begin{aligned} \forall t \in S \Rightarrow |\phi_{f^*}(t) - \phi_f(t)| &= \left| \int_{\Omega} \{F^*(t + \omega) - F(t + \omega)\} \cdot \mu(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |F^*(t + \omega) - F(t + \omega)| \cdot \mu(d\omega) \\ &\leq \sup_{\omega \in \Omega} |F^*(t + \omega) - F(t + \omega)| \cdot \mu(\Omega) \end{aligned}$$

En définitive, puisque  $\mu(\Omega) = 1$ , on a donc :

$$\forall t \in S \Rightarrow |\phi_{f^*}(t) - \phi_f(t)| \leq \epsilon \quad (1)$$

Ceci étant dit, afin d'alléger les notations, nous poserons dans tout ce qui suit :

$$\forall \begin{cases} t \in S \\ \omega \in \Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G(\omega, t) = F(t + \omega) - \phi_f(t) \\ G^*(\omega, t) = F^*(t + \omega) - \phi_{f^*}(t) \\ \Delta(\omega, t) = G^*(\omega, t) - G(\omega, t) \end{cases}$$

Compte tenu de la relation (1) et de la définition de  $\varepsilon$ , on  
 it donc écrire les implications suivantes :

$$\Delta(\omega, t) = \{F^*(t+\omega) - F(t+\omega)\} - \{\phi_{f^*}(t) - \phi_f(t)\}$$

$$\begin{aligned} > \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in S} |\Delta(\omega, t)| &\leq \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in S} |F^*(t+\omega) - F(t+\omega)| \\ &\quad + \sup_{t \in S} |\phi_{f^*}(t) - \phi_f(t)| \\ > \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in S} |\Delta(\omega, t)| &\leq 2\varepsilon \quad (2) \end{aligned}$$

autre part, les égalités ci-dessous sont toujours vérifiées :

$$\begin{aligned} \{G^*(\omega, t_1) \cdot \overline{G^*(\omega, t_2)} - G(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)}\} &= \{G(\omega, t_1) + \Delta(\omega, t_1)\} \cdot \overline{\{G(\omega, t_2) + \Delta(\omega, t_2)\}} \\ &\quad - \{G(\omega, t_1) + \overline{\Delta(\omega, t_1)}\} \\ &= G(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)} + G(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \\ &\quad + \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)} + \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \\ &\quad - G(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \{G^*(\omega, t_1) \cdot G^*(\omega, t_2) - G(\omega, t_1) \cdot G(\omega, t_2)\} &= G(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \\ &\quad + \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)} \\ &\quad + \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \end{aligned}$$

Comme il est évident que l'on a ...

$$\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = \int_{\Omega} \{G^*(\omega, t_1) \cdot \overline{G^*(\omega, t_2)} - G(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)}\} \cdot \mu(d\omega)$$

... il s'en suit que l'on peut écrire les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| &\leq \left| \int_{\Omega} G(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \cdot \mu(d\omega) \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{G(\omega, t_2)} \cdot \mu(d\omega) \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} \Delta(\omega, t_1) \cdot \overline{\Delta(\omega, t_2)} \cdot \mu(d\omega) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| &\leq \sqrt{\int_{\Omega} |G(\omega, t_1)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |\Delta(\omega, t_2)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \\ &\quad + \sqrt{\int_{\Omega} |\Delta(\omega, t_1)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |G(\omega, t_2)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \\ &\quad + \sqrt{\int_{\Omega} |\Delta(\omega, t_1)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} |\Delta(\omega, t_2)|^2 \cdot \mu(d\omega)} \end{aligned}$$

Comme d'autre part  $\mu(\Omega) = 1$ , on peut donc écrire d'après la relation (2) et d'après  
 la définition de  $G(\omega, t)$  et  $\Gamma_{ff}^c(t, t)$  :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\Delta(\omega, t)|^2 \cdot \mu(d\omega) \leq \sup_{\omega \in \Omega} |\Delta(\omega, t)|^2 \cdot \mu(\Omega) \leq \{2\varepsilon\}^2 \\ \int_{\Omega} |G(\omega, t)|^2 \cdot \mu(d\omega) = \Gamma_{ff}^c(t, t) \end{cases}$$

On en conclut que pour tout  $t_1 \in S$  et tout  $t_2 \in S$ , on a :

$$(3) \quad |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| \leq 4\varepsilon \cdot \left\{ \varepsilon + \frac{\sqrt{\Gamma_{ff}^c(t_1, t_1)} + \sqrt{\Gamma_{ff}^c(t_2, t_2)}}{2} \right\}$$

Par un raisonnement tout à fait analogue, on peut montrer que l'on a :

$$(4) \quad |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| \leq 4\varepsilon \cdot \left\{ \varepsilon + \frac{\sqrt{\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_1)} + \sqrt{\Gamma_{f^*f^*}^c(t_2, t_2)}}{2} \right\}$$

Corollaire

D'après ce qui a été dit au paragraphe III-2-5.a, on vérifie

facilement que les inegalités suivantes sont toujours satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ)} \quad 0 \leq \sup_{t \in S} \Gamma_{ff}^c(t, t) < +\infty \\ 2^{\circ)} \quad 0 \leq \sup_{t \in S} \Gamma_{f^*f^*}^c(t, t) < +\infty \end{array} \right.$$

Il s'en suit que si nous posons ...

$$\gamma = \sqrt{\sup_{t \in S} \Gamma_{ff}^c(t, t)}$$

... alors on a :

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{t \in S} |F^*(t+\omega) - F(t+\omega)| = \varepsilon \\ 1^{\circ)} \quad \sup_{t \in S} |\phi_{f^*}(t) - \phi_f(t)| \leq \varepsilon \\ 2^{\circ)} \quad \sup_{t_1, t_2 \in S} |\Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) - \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)| \leq 4\varepsilon \cdot (\varepsilon + \gamma) \end{array} \right.$$

Ces relations expriment que lorsque  $F^*$  converge uniformément vers  $F$  sur  $(S+\Omega)$ , alors  $\phi_{f^*}$  converge uniformément vers  $\phi_f$  sur  $S$  et  $\Gamma_{f^*f^*}^c$  converge uniformément vers  $\Gamma_{ff}^c$  sur  $(S \times S)$ .

c) Proposition 2

Enoncé

Soient  $F$  et  $F^*$  deux fonctions continues et bornées sur  $[S + \Omega]$  supposées  $T$ -interpolables en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $t_0 \in D$ , et soient  $\hat{F}(t_0, \omega)$  et  $\hat{F}^*(t_0, \omega)$  leurs interpolateurs en un point  $t_0 \in D$  :

$$\forall \omega \in \Omega \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}(t_0, \omega) = \phi_f(t_0) + \int_T \{F(t+\omega) - \phi_f(t)\} \cdot \hat{\lambda}_{t_0}^*(dt) \\ \hat{F}^*(t_0, \omega) = \phi_{f^*}(t_0) + \int_T \{F^*(t+\omega) - \phi_{f^*}(t)\} \cdot \hat{\lambda}_{t_0}^*(dt) \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, si nous posons ...

$$\forall \omega \in \Omega \Rightarrow \hat{F}_*(t_0, \omega) = \phi_{f^*}(t_0) + \int_T \{F(t+\omega) - \phi_{f^*}(t)\} \cdot \hat{\lambda}_{t_0}^*(dt)$$

... alors on a pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$t_0 \in T \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}_*(t_0, \omega) = F(t_0 + \omega) \\ \int_{\Omega} \hat{F}_*(t_0, \omega) \mu(d\omega) = \phi_{f^*}(t_0) \end{array} \right.$$

De plus, si  $t_0$  est un point quelconque de  $D$ , alors on a l'implication suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \forall \left\{ \begin{array}{l} t \in (T \cup t_0) \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow F^*(t+\omega) = F(t+\omega) \right] \\ \Rightarrow \left[ \forall \omega \in \Omega \Rightarrow \hat{F}_*(t_0, \omega) = \hat{F}(t_0, \omega) \right] \end{array} \right.$$

Démonstration

Si  $t_0$  est un point de  $T$ , alors quelle que soit  $F^*$  et compte tenu de la proposition III-4.1-b, on a :

$$\begin{aligned} t_0 \in T &\Rightarrow \hat{\lambda}_{t_0}^* = \hat{\lambda}_{t_0} = \delta_{t_0} \\ &\Rightarrow \hat{F}^*(t_0, \omega) = \hat{F}_*(t_0, \omega) = \hat{F}(t_0, \omega) = F(t_0 + \omega) \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} \hat{F}_*(t_0, \omega) \mu(d\omega) = \int_{\Omega} F(t_0 + \omega) \mu(d\omega) = \phi_{f^*}(t_0) \end{aligned}$$

D'autre part, si pour un point quelconque  $t_0 \in D$  on a ...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t \in (T \cup t_0) \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow F^*(t+\omega) = F(t+\omega)$$

... alors  $\phi_f$  est identique à  $\phi_{f^*}$  sur  $(T \cup t_0)$  et  $\Gamma_{ff}^c$  est identique à  $\Gamma_{f^*f^*}^c$  sur  $(T \cup t_0) \times (T \cup t_0)$  ; il s'en suit que  $\hat{\lambda}_{t_0}^*$  est identique à  $\hat{\lambda}_{t_0}$  et que par conséquent on a les relations suivantes pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$\Rightarrow \hat{F}_*(t_0, \omega) = \phi_{f^*}(t_0) + \int_T \{F(t + \omega) - \phi_{f^*}(t)\} \delta_{t_0}(dt)$$

$$\Rightarrow \hat{F}_*(t_0, \omega) = \hat{F}(t_0, \omega)$$

#### d) Technique d'interpolation

##### Présentation

Supposons que l'on désire interpoler en un point  $t_0 \in D$  une fonction  $F$  continue et bornée sur  $[S + \Omega]$  et supposée connue sur le compact  $T \in \mathbb{R}^n$ . Si  $t_0$  n'appartient pas à  $T$ , il existe évidemment une infinité de solutions à ce problème et l'on doit impérativement formuler des hypothèses pour extraire de cette infinité une solution satisfaisante.

En fait, nous savons que si  $\Omega$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine et  $\mu$  une mesure positive bornée définie sur  $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ , alors la méthode d'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique peut nous donner une interpolation  $\hat{F}(t_0)$  à condition que nous connaissions  $\phi_f(t)$  sur  $(T \cup D)$  et  $\Gamma_{ff}^c(t_1, t_2)$  sur  $(T \cup D) \times (T \cup D)$ . Les propositions III-4.3-b et III-4.3-c qui viennent d'être démontrées suggèrent de nous donner une fonction  $F^*$   $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique au point  $t_0$  et de supposer que l'on a les identités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_f(t) \equiv \phi_{f^*}(t) \\ \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) \equiv \Gamma_{f^*f^*}^c(t_1, t_2) \end{array} \right.$$

Evidemment cette façon de procéder n'est justifiée par la proposition III-4.3-b que si  $F^*$  est elle-même une première approximation de  $F$  ; on est alors assuré par la proposition III-4.3-c que l'on a ...

$$t_0 \in T \Rightarrow \hat{F}^*(t_0) = \hat{F}(t_0, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}) = \hat{F}_*(t_0, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}) = F(t_0)$$

... d'où l'on déduit que  $\hat{F}_*(t_0)$  interpole bien  $F$  au point  $t_0$  même si  $F^*$  n'est pas identique à  $F$  sur  $T$ .

#### Intérêt de cette technique

L'intérêt de cette technique est triple :

- 1°) Elle permet d'obtenir une interpolation  $\hat{F}(t_0)$  à partir d'une première approximation  $F^*$  même si cette dernière n'est pas identique à  $F$  sur  $T$ .
- 2°) La seule hypothèse faite pour sélectionner une solution particulière  $\hat{F}^*(t_0)$  est très "concrète" et consiste en fait à se donner, par le biais de  $F^*$ , "l'allure générale" de la fonction  $F$ .
- 3°) Enfin, on peut faire intervenir toutes les informations non numériques concernant  $F$  en choisissant  $F^*$  en fonction de ces informations.

##### Remarque

Si  $\Delta$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$  et si  $\nu \in \mathcal{M}(\Delta)$ , alors on peut utiliser une technique tout à fait identique pour obtenir une estimation  $\hat{F}_\nu^*(t_0)$  au point  $t_0$  à partir d'une solution initiale  $F^*$  continue et bornée sur  $[S + \Omega]$ .

#### III-4.3 - Exemples de fonctions interpolables en $\mu$ -moyenne quadratique

##### a) Proposition 1

##### Énoncé

Soit d'une part  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré défini de la façon suivante ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \equiv [-\pi, +\pi] \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega \\ \mu(d\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot d\omega \end{array} \right.$$

... et soit d'autre part  $K$  un entier positif fini et  $F$  une fonction complexe définie sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^K \left\{ a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt) \right\} \\ \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} |a_k| < \infty \text{ quel que soit } k = (0, 1, \dots, K) \\ |b_k| < \infty \text{ quel que soit } k = (1, \dots, K) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, pour tout compact  $S \subset \mathbb{R}$ , la fonction  $F$  est continue et bornée sur  $(S + \Omega)$  et la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée à  $F$  par la relation suivante :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t \in S \\ \omega \in \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow f(\omega, t) = F(t + \omega)$$

... admet pour moyenne et covariance centrée les fonctions  $\phi_f$  et  $\Gamma_{ff}^c$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in S \Rightarrow \phi_f(t) = a_0 \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in S \\ t_2 \in S \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \cdot \cos[k(t_1 - t_2)] \right. \\ \left. + \frac{\bar{a}_k b_k - a_k \bar{b}_k}{2} \cdot \sin[k(t_1 - t_2)] \right\} \end{array} \right.$$

Démonstration : première partie

Compte tenu que  $K$  et les coefficients  $\{a_k, b_k\}$  sont finis, il est évident que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ; d'autre part, on est assuré que  $F$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  puisque l'on a :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(t)| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^K \left\{ |a_k| + |b_k| \right\} < +\infty$$

En conclusion, on peut donc affirmer que  $F$  étant continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , elle est a fortiori continue et bornée sur tout ensemble  $(S + \Omega) \subset \mathbb{R}$

Démonstration : deuxième partie

Par définition de  $f(\omega, t)$ , on a :

$$f(\omega, t) = a_0 + \sum_k \left\{ a_k \cdot \cos[k(t + \omega)] + b_k \cdot \sin[k(t + \omega)] \right\}$$

$$\Rightarrow \phi_f(t) = a_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_k \left\{ \int_{\Omega} \left[ a_k \cdot [\cos(kt) \cdot \cos(k\omega) - \sin(kt) \cdot \sin(k\omega)] \right. \right. \\ \left. \left. + b_k \cdot [\sin(kt) \cdot \cos(k\omega) + \sin(k\omega) \cdot \cos(kt)] \right] \cdot d\omega \right\}$$

$$\Rightarrow \phi_f(t) = a_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_k \left\{ a_k \left[ \cos(kt) \cdot \int_{\Omega} \cos(k\omega) d\omega - \sin(kt) \cdot \int_{\Omega} \sin(k\omega) d\omega \right] \right. \\ \left. + b_k \cdot \left[ \sin(kt) \cdot \int_{\Omega} \cos(k\omega) d\omega + \sin(k\omega) \cdot \int_{\Omega} \sin(k\omega) d\omega \right] \right\}$$

Compte tenu que l'on a ...

$$\forall k \neq 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(k\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(k\omega) d\omega = 0$$

... il s'en suit que l'on peut écrire :

$$\forall t \in S \Rightarrow \phi_f(t) = a_0$$

Démonstration : troisième partie

Posons :

$$I_{pq}^{cc}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} \cos[p(t_1 + \omega)] \cdot \cos[q(t_2 + \omega)] \cdot d\omega$$

$$I_{pq}^{cs}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} \cos[p(t_1 + \omega)] \cdot \sin[q(t_2 + \omega)] \cdot d\omega$$

$$I_{pq}^{sc}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} \sin[p(t_1 + \omega)] \cdot \cos[q(t_2 + \omega)] \cdot d\omega$$

$$I_{pq}^{ss}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} \sin[p(t_1 + \omega)] \cdot \sin[q(t_2 + \omega)] \cdot d\omega$$

On vérifie facilement que l'on a :

$$\Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left\{ f(\omega, t_1) - \phi_f(t_1) \right\} \cdot \overline{\left\{ f(\omega, t_2) - \phi_f(t_2) \right\}} \cdot d\omega$$

$$\Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{pq} \left\{ a_p \bar{a}_q \cdot I_{pq}^{cc}(t_1, t_2) + a_p \bar{b}_q \cdot I_{pq}^{cs}(t_1, t_2) \right. \\ \left. + b_p \bar{a}_q \cdot I_{pq}^{sc}(t_1, t_2) + b_p \bar{b}_q \cdot I_{pq}^{ss}(t_1, t_2) \right\}$$

D'autre part, en supposant  $p$  et  $q$  différents de 0, on a :

$$2 \cdot I_{pq}^{cc}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} \left\{ \cos[pt_1 + qt_2] \cdot \cos[(p+q)\omega] - \sin[pt_1 + qt_2] \cdot \sin[(p+q)\omega] \right. \\ \left. + \cos[pt_1 - qt_2] \cdot \cos[(p-q)\omega] - \sin[pt_1 - qt_2] \cdot \sin[(p-q)\omega] \right\} d\omega$$

$$= \cos[pt_1 + qt_2] \cdot \frac{2 \cdot \sin[(p+q)\pi]}{p+q}$$

$$+ \cos[pt_1 - qt_2] \cdot \frac{2 \cdot \sin[(p-q)\pi]}{p-q}$$

$$\Rightarrow I_{pq}^{cc}(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi \cdot \cos[k(t_1 - t_2)] & \dots \text{ si } p = q = k \end{cases}$$

$$2 \cdot I_{pq}^{cs}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} \left\{ \sin[pt_1 + qt_2] \cdot \cos[(p+q)\omega] + \cos[pt_1 + qt_2] \cdot \sin[(p+q)\omega] \right. \\ \left. - \sin[pt_1 - qt_2] \cdot \cos[(p-q)\omega] - \cos[pt_1 - qt_2] \cdot \sin[(p-q)\omega] \right\} d\omega$$

$$= \sin[pt_1 + qt_2] \cdot \frac{2 \cdot \sin[(p+q)\pi]}{p+q}$$

$$- \sin[pt_1 - qt_2] \cdot \frac{2 \cdot \sin[(p-q)\pi]}{p-q}$$

$$\Rightarrow I_{pq}^{cs}(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ -\pi \cdot \sin[k(t_1 - t_2)] & \dots \text{ si } p = q = k \end{cases}$$

$$2 \cdot I_{pq}^{ss}(t_1, t_2) = \int_{\Omega} \left\{ \cos[pt_1 - qt_2] \cdot \cos[(p-q)\omega] - \sin[pt_1 - qt_2] \cdot \sin[(p-q)\omega] \right. \\ \left. - \cos[pt_1 + qt_2] \cdot \cos[(p+q)\omega] + \sin[pt_1 + qt_2] \cdot \sin[(p+q)\omega] \right\} d\omega$$

$$= \cos[pt_1 - qt_2] \cdot \frac{2 \cdot \sin[(p-q)\pi]}{p-q}$$

$$- \cos[pt_1 + qt_2] \cdot \frac{2 \cdot \sin[(p+q)\pi]}{p+q}$$

$$\Rightarrow I_{pq}^{ss}(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \dots \text{ si } p \neq q \\ \pi \cdot \cos[k(t_1 - t_2)] & \dots \text{ si } p = q = k \end{cases}$$

Compte tenu que l'on a ...

$$I_{pq}^{sc}(t_1, t_2) = I_{qp}^{cs}(t_2, t_1) = -I_{qp}^{cs}(t_1, t_2)$$

... il s'en suit que l'on peut écrire pour tout couple  $(t_1, t_2) \in S \times S$  :

$$\Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \cdot \cos[k(t_1 - t_2)] + \frac{\bar{a}_k b_k - a_k \bar{b}_k}{2} \cdot \sin[k(t_1 - t_2)] \right\}$$

b) Proposition 2

Énoncé

Soit d'une part  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré défini de la façon suivante :

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \Omega = [-\pi, +\pi] \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_{\Omega} \\ \mu(d\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot d\omega \end{array} \right.$$

Soit d'autre part  $K$  un entier positif fini et  $F$  un polynôme trigonométrique tel que :

$$(T2) \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow F(t) = a_0 + \sum_{k=1}^K \left\{ a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt) \right\} \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} |a_k| < +\infty \text{ quel que soit } k = (0, 1, \dots, K) \\ |b_k| < +\infty \text{ quel que soit } k = (1, \dots, K) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, si  $T$  est un ensemble de  $N$  points  $\{t_i\}_{i=1}^{i=N}$  appartenant à  $\mathbb{R}$  et si  $D$  est un compact quelconque de  $\mathbb{R}$ , alors  $F$  est continue et bornée sur  $[(T \cup D) + \Omega]$  et la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée à  $F$  admet pour moyenne et covariance centrée les fonctions suivantes :

$$(T3) \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup D) \rightarrow \phi_f(t) = a_0 \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup D) \\ t_2 \in (T \cup D) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \cdot \cos [k(t_1 - t_2)] \right. \\ \left. + \frac{\bar{a}_k \cdot b_k - a_k \bar{b}_k}{2} \cdot \sin [k(t_1 - t_2)] \right\} \end{array} \right.$$

De plus, si les coefficients  $a_0$  et  $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{k=K}$  sont connus et si

l'on a ...

$$(T4) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \quad K \geq N \\ 2^\circ \quad T \subset ]0, 2\pi[ \\ 3^\circ \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} t_p \\ t_q \end{array} \right\} \in T \Rightarrow t_p \neq t_q \quad \text{si } p \neq q \\ 4^\circ \quad \forall k = (1, \dots, N) \Rightarrow (|a_k|^2 + |b_k|^2) > 0 \end{array} \right.$$

... alors la fonction  $F$  est  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $t_0 \in D$ .

#### Démonstration : première partie

Compte tenu que  $S = (T \cup D)$  est un compact de  $\mathbb{R}$ , on sait d'après la proposition III-4.3-a que  $F$  est continue et bornée sur  $[(T \cup D) + \Omega]$  et que la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  associée à  $F$  admet pour moyenne et covariance centrée des fonctions telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in (T \cup D) \Rightarrow \phi_f(t) = a_0 \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \in (T \cup D) \\ t_2 \in (T \cup D) \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma_{ff}^c(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} \cdot \cos [k(t_1 - t_2)] \right. \\ \left. + \frac{\bar{a}_k \cdot b_k - a_k \bar{b}_k}{2} \cdot \sin [k(t_1 - t_2)] \right\} \end{array} \right.$$

#### Démonstration : deuxième partie

Pour démontrer que, sous les conditions (T1) et (T4) la fonction  $F$  est  $T$ -interpolable, nous aurons besoin de quelques résultats techniques que nous nous proposons d'exposer à part dans cette deuxième partie de la démonstration :

Soit  $[E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)]$  la matrice carrée définie de la façon suivante :

$$[E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)] = \begin{bmatrix} i\theta_1 & i\theta_2 & i\theta_N \\ e & e \dots e & e \\ 2i\theta_1 & 2i\theta_2 & 2i\theta_N \\ e & e \dots e & e \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Ni\theta_1 & Ni\theta_2 & Ni\theta_N \\ e & e \dots e & e \end{bmatrix}$$

En désignant par  $\det [M]$  le déterminant d'une matrice carrée quelconque  $[M]$ , on peut alors écrire :

$$\det [E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)] = (e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \dots e^{i\theta_N}) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{i\theta_1} & e^{i\theta_2} & \dots & e^{i\theta_N} \\ (e^{i\theta_1})^2 & (e^{i\theta_2})^2 & \dots & (e^{i\theta_N})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e^{i\theta_1})^{N-1} & (e^{i\theta_2})^{N-1} & \dots & (e^{i\theta_N})^{N-1} \end{bmatrix}$$

En remarquant que le déterminant figurant au membre de droite de l'égalité ci-dessus est un déterminant de Van der Monde, on peut écrire :

$$\det [E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)] = e^{i \sum_p \theta_p} \cdot \prod_{p < q} (e^{i\theta_p} - e^{i\theta_q})$$

Compte tenu que  $e^{i \sum_p \theta_p}$  n'est jamais nul, on a donc en définitive :

$$\det [E(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)] = 0 \Leftrightarrow \exists \left\{ \begin{array}{l} \theta_p \\ \theta_q \end{array} \right\} \in (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) : \theta_p = \theta_q \text{ modulo } 2\pi$$

Ce résultat étant acquis, on peut alors écrire les équivalences suivantes où  $(t_1, t_2, \dots, t_N)$  désignent les points de l'ensemble  $T$  et  $(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^N)$  un ensemble de  $N$  nombres complexes non tous nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \cos(k t_p) = 0 \\ \text{et} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \sin(k t_p) = 0 \end{array} \right\} \text{ quel que soit } k = (1, \dots, N)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot e^{ikt_p} = 0 \\ \text{et} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot e^{-ikt_p} = 0 \end{array} \right\} \text{ quel que soit } k = (1, \dots, N)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det [E(t_1, \dots, t_N)] = 0 \\ \text{et} \det [E(-t_1, \dots, -t_N)] = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \exists \left\{ \begin{array}{l} t_p \\ t_q \end{array} \right\} \in T : t_p = t_q \text{ modulo } 2\pi$$

Si les conditions (T4) sont satisfaites, alors compte tenu que l'on

a ...

$$\left\{ \begin{array}{l} T \subset ]0, 2\pi[ \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_p \\ t_q \end{array} \right\} \in T \Rightarrow t_p \neq t_q \text{ si } p \neq q \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \left\{ \begin{array}{l} t_p \\ t_q \end{array} \right\} \in T : t_p = t_q \text{ modulo } 2\pi$$

... on peut affirmer que l'implication suivante est vraie si et seulement si les coefficients  $(\lambda^1, \dots, \lambda^N)$  sont tous nuls :

$$(1) \quad \forall k = (1, \dots, N) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \cos(k t_p) = 0 \\ \text{et} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \sin(k t_p) = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration : troisième partie

D'après les définitions III-4.1-d et III-4.1-c, nous savons que  $F$  est  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $t_0 \in D$  si et seulement si :

$$\lambda = 0 \Leftrightarrow \int_T \{F(t + \omega) - \phi_f(t)\} \lambda(dt) = 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

Puisque  $T$  est discret et que  $\phi_f(\cdot) \equiv a_0$ , on est donc assuré que  $F$  est  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique si et seulement si :

$$(2) \quad \left[ \sum_{t_p \in T} \{F(t_p + \omega) - a_0\} \cdot \lambda^p = 0 \quad \mu\text{-p.p.} \right] \Leftrightarrow \left\{ \lambda^p = 0 \right\}_{p=1}^N$$

En développant les calculs, on obtient la relation suivante pour tout  $\omega \in \Omega$  ...

$$(3) \quad t_p \in T \sum \{F(t_p + \omega) - a_0\} \cdot \lambda^p = \sum_{k=1}^K \left\{ \alpha_k \cdot \cos(k\omega) + \beta_k \cdot \sin(k\omega) \right\}$$

... dans laquelle les coefficients  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont tels que :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_p \lambda^p \cdot \cos(k t_p) & \sum_p \lambda^p \cdot \sin(k t_p) \\ -\sum_p \lambda^p \cdot \sin(k t_p) & \sum_p \lambda^p \cdot \cos(k t_p) \end{bmatrix}}_{[M_k]} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

Compte tenu des relations (1) obtenues dans la première partie de la démonstration et compte tenu que  $K \geq N$  d'après (T4), on est alors assuré qu'il existe au moins un entier  $k_* \in [1, N]$  pour lequel on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \\ \Leftrightarrow \exists k_* \in [1, N] : \det\{[M_{k_*}]\} = \left( \sum_p \lambda^p \cdot \cos(k_* t_p) \right)^2 + \left( \sum_p \lambda^p \cdot \sin(k_* t_p) \right)^2 \neq 0 \end{array} \right.$$

Puisque d'après les hypothèses (T4) nous avons supposé que ...

$$\forall k = (1, \dots, N) \Rightarrow \{ |a_k|^2 + |b_k|^2 \} > 0$$

... on en déduit que :

$$\left[ (\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \right] \Leftrightarrow \left[ \exists k_* \in [1, N] : \{ |a_{k_*}|^2 + |b_{k_*}|^2 \} > 0 \right]$$

$\mu$  étant identique à la mesure de Lebesgue sur  $\Omega$  au coefficient  $1/2\pi$  près, on est donc assuré d'après la relation (3) que :

$$\left[ (\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \right] \Leftrightarrow \sum_{t_p \in T} \{F(t_p + \omega) - a_0\} \cdot \lambda^p \neq 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

Il s'en suit d'après la relation (2) que  $F$  est  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $t_0 \in D$ .

c) Conséquence pratique

Lorsque  $T$  est un ensemble discret de  $N$  points appartenant à  $\mathbb{R}^1$ , alors compte tenu de la proposition précédente, il est très facile de construire des exemples de fonction  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique.

Dans la pratique, cette remarque prend toute son importance si pour mettre en oeuvre la technique d'interpolation présentée au paragraphe III-4.2 on décide de choisir une solution initiale  $F^*$  du type suivant :

$$F^*(t) = a_0^* + \sum_{k=1}^K \left\{ a_k^* \cdot \cos(kt) + b_k^* \cdot \sin(kt) \right\}$$

d) Cas des fonctions complexes définies sur  $\mathbb{R}^n$

Tout ce qui a été dit aux paragraphes a), b) et c) précédents s'étend sans difficulté au cas des fonctions  $F$  réelles ou complexes de plusieurs variables. Par exemple, supposons que  $F$  soit définie sur  $\mathbb{R}^2$  par la relation suivante où  $(t^1, t^2)$  représentent les composantes d'un vecteur  $t \in \mathbb{R}^2$  :

$$(T2) \left\{ \begin{array}{l} F(t^1, t^2) = C_0(t^2) + \sum_{k=1}^K \left\{ C_k(t^2) \cdot \cos(kt^1) + S_k(t^2) \cdot \sin(kt^1) \right\} \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} C_0(t^2) = A_{00} + \sum_{h=1}^H \left\{ A_{0h}^C \cdot \cos(ht^2) + A_{0h}^S \cdot \sin(ht^2) \right\} \\ C_k(t^2) = A_{k0}^C + \sum_{h=1}^H \left\{ A_{kh}^C \cdot \cos(ht^2) + B_{kh}^C \cdot \sin(ht^2) \right\} \\ S_k(t^2) = A_{k0}^S + \sum_{h=1}^H \left\{ A_{kh}^S \cdot \cos(ht^2) + B_{kh}^S \cdot \sin(ht^2) \right\} \end{array} \right\} \quad \forall k > 0 \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, si  $(\omega^1, \omega^2)$  représentent les composantes d'un vecteur  $\omega \in \mathbb{R}^2$ , si  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  désigne l'espace mesuré tel que ...

$$(T1) \left\{ \begin{array}{l} \Omega \equiv \left\{ \omega \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq \omega^1 \leq +\pi \text{ et } -\pi \leq \omega^2 \leq +\pi \right\} \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega \\ \mu(d\omega) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot d\omega^1 \cdot d\omega^2 \end{array} \right.$$

... et si enfin les coefficients du polynôme trigonométrique  $F$  sont tous de module borné alors, en désignant par  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  la famille de fonctions associée à  $F$  telle que ...

$$f(\omega, t) = F(t^1 + \omega^1, t^2 + \omega^2)$$

... on trouve :

$$\phi_\omega(t^1, t^2) = A_{00}$$

$$(T3) \left\{ \begin{array}{l} \phi_\omega(t_1^1, t_1^2 | t_2^1, t_2^2) = \sum_{k=1}^K \sum_{h=1}^H \left\{ \frac{(|A_{kh}^C|^2 + |B_{kh}^C|^2) + (|A_{kh}^S|^2 + |B_{kh}^S|^2)}{4} \cdot \cos[k(t_1^1 - t_2^1)] \cdot \cos[h(t_1^2 - t_2^2)] \right. \\ \left. + \frac{(\overline{A_{kh}^C} \cdot B_{kh}^S - A_{kh}^C \cdot \overline{B_{kh}^S}) + (\overline{A_{kh}^S} \cdot B_{kh}^C - A_{kh}^S \cdot \overline{B_{kh}^C})}{4} \cdot \cos[k(t_1^1 - t_2^1)] \cdot \sin[h(t_1^2 - t_2^2)] \right. \\ \left. + \frac{(\overline{A_{kh}^C} \cdot A_{kh}^S - A_{kh}^C \cdot \overline{A_{kh}^S}) + (\overline{B_{kh}^C} \cdot B_{kh}^S - B_{kh}^C \cdot \overline{B_{kh}^S})}{4} \cdot \sin[k(t_1^1 - t_2^1)] \cdot \cos[h(t_1^2 - t_2^2)] \right. \\ \left. + \frac{(\overline{A_{kh}^C} \cdot B_{kh}^S + A_{kh}^C \cdot \overline{B_{kh}^S}) - (\overline{A_{kh}^S} \cdot B_{kh}^C + A_{kh}^S \cdot \overline{B_{kh}^C})}{4} \cdot \sin[k(t_1^1 - t_2^1)] \cdot \sin[h(t_1^2 - t_2^2)] \right\} \\ \left. + \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{(|A_{k0}^C|^2 + |A_{k0}^S|^2)}{2} \cdot \cos[k(t_1^1 - t_2^1)] + \frac{\overline{A_{k0}^C} \cdot A_{k0}^S - A_{k0}^C \cdot \overline{A_{k0}^S}}{2} \cdot \sin[k(t_1^1 - t_2^1)] \right\} \\ \left. + \sum_{h=1}^H \left\{ \frac{(|A_{0h}^C|^2 + |A_{0h}^S|^2)}{2} \cdot \cos[h(t_1^2 - t_2^2)] + \frac{\overline{A_{0h}^C} \cdot A_{0h}^S - A_{0h}^C \cdot \overline{A_{0h}^S}}{2} \cdot \sin[h(t_1^2 - t_2^2)] \right\} \end{array} \right.$$

Ces relations dont la démonstration directe est assez lourde sont en fait un cas particulier de relations beaucoup plus générales qui seront présentées au paragraphe III-4-4. Pour cette raison nous admettons sans plus de justification que  $\phi_\omega$  et  $\tau_{f,f}^C$  sont bien de la forme écrite ci-dessus.

### III-4.4 - Généralisation des exemples présentés au paragraphe III-4.3

#### a) Introduction

Au paragraphe III-4.3 nous avons étudié en détail le cas où  $F$  est un polynôme trigonométrique défini sur  $\mathbb{R}$ . Nous nous proposons dans ce qui suit de démontrer une proposition analogue à la proposition III-4.3-b valable pour un polynôme trigonométrique défini non plus sur  $\mathbb{R}^1$  mais sur  $\mathbb{R}^n$ .

On s'aperçoit que les calculs gagnent beaucoup en clarté si, pour ce faire, on utilise la notion de produit tensoriel de deux matrices noté  $\otimes$  :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow [A] \otimes [B] = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot [B] & \dots & a_{1n} \cdot [B] \\ a_{21} \cdot [B] & \dots & a_{2n} \cdot [B] \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot [B] & \dots & a_{mn} \cdot [B] \end{bmatrix}$$

En particulier, nous utiliserons fréquemment les propriétés suivantes dont on trouvera la démonstration dans le livre de Bellman "introduction to matrix analysis":

- (1) :  $[A] \otimes [B] \neq [B] \otimes [A]$  en général
- (2) :  $([A] \otimes [B]) \otimes [C] = [A] \otimes ([B] \otimes [C]) = [A] \otimes [B] \otimes [C]$
- (3) :  $[A] \otimes ([B] + [C]) = [A] \otimes [B] + [A] \otimes [C]$
- (4) :  $([A] + [B]) \otimes [C] = [A] \otimes [C] + [B] \otimes [C]$
- (5) :  $([A] \otimes [B])^t = [A]^t \otimes [B]^t$
- (6) :  $([A] \otimes [B]) \cdot ([C] \otimes [D]) = ([A] \cdot [C]) \otimes ([B] \cdot [D])$  si les produits ont un sens
- (7) :  $([A] \otimes [B])^{-1} = ([A]^{-1} \otimes [B]^{-1})$  si  $[A]$  et  $[B]$  sont inversibles
- (8) :  $\text{rang}([A] \otimes [B]) = \text{rang}[A] \cdot \text{rang}[B]$

De plus, nous adopterons la notation condensée suivante :

$$\left( \bigotimes_{j=1}^n [A_j] \right) = ([A_1] \otimes [A_2] \otimes \dots \otimes [A_n])$$

Compte tenu de cette dernière notation, on vérifie sans difficulté l'aide des propriétés (6) et (7) que l'on a :

$$(6') : \left( \bigotimes_{j=1}^n [A_j] \right) \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [B_j] \right) = \left( \bigotimes_{j=1}^n [A_j] \cdot [B_j] \right) \text{ si les produits ont un sens}$$

$$(7') : \left( \bigotimes_{j=1}^n [A_j] \right)^{-1} = \left( \bigotimes_{j=1}^n [A_j]^{-1} \right) \text{ si les matrices } [A_j] \text{ sont inversibles}$$

#### b) Notations

##### Avertissement

Pour la commodité de l'exposé, nous définissons ci-dessous un certain nombre de notations qui seront utilisées dans tout ce qui suit ; de plus, pour éviter certaines confusions possibles entre des scalaires et des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , nous conviendrons de mettre une flèche au-dessus de tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

##### Ensemble $K$ et $K_*$

Nous désignerons par  $K$  un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = K^1 \times K^2 \times \dots \times K^n \\ \text{avec : } \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K^j = \{0, 1, \dots, K^j\} \\ 0 < K^j < +\infty \end{array} \right. \end{array} \right.$$

D'autre part, il nous arrivera d'utiliser l'ensemble  $K_*$  défini de la façon suivante :

$$K_* = \{\text{ensemble } K \text{ privé de } \vec{0}\}$$

Compte tenu de ces définitions, on vérifie immédiatement que les cardinaux des ensembles  $K$  et  $K_*$  sont tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{card}(K) = \prod_{j=1}^n (K^j + 1) \\ \text{card}(K_*) = \left\{ \prod_{j=1}^n (K^j + 1) \right\} - 1 \end{array} \right.$$

Enfin, nous désignerons par les mêmes lettres  $K$  et  $K_*$  les ensembles de vecteurs  $\vec{k}$  joignant l'origine de  $\mathbb{R}^n$  aux points des ensembles de même nom définis ci-dessus. De plus, nous supposons ces vecteurs numérotés de 0 à  $\text{card}(K_*)$  de telle façon que l'on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} K \equiv \{ \vec{k}_0, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots \} \\ \text{avec } \vec{k}_0 = \vec{0} \end{array} \right.$$

$$\vec{k}_0 = \vec{0}.$$

Ceci implique donc que  $K_*$  se déduit de  $K$  en supprimant le vecteur

Matrices  $[E(K_*; \vec{t})]$  et  $[E(K_*; T)]$

Soit  $\vec{t}$  un vecteur appartenant à  $\mathbb{R}^n$ ; nous désignerons par  $[E(K_*; \vec{t})]$  la matrice ligne associée à  $K_*$  de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} [E(K_*; \vec{t})] = [e^{i \vec{k}_1 \vec{t}}, e^{i \vec{k}_2 \vec{t}}, \dots] \\ \text{avec } K_* \equiv \{ \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots \} \end{array} \right.$$

De plus, si  $T$  désigne un ensemble de  $N$  points appartenant à  $\mathbb{R}^n$ ...

$$T \equiv \{ \vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_N \}$$

... alors nous poserons également :

$$[E(K_*; T)] = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline [E(K_*; \vec{t}_1)] \\ \hline [E(K_*; \vec{t}_2)] \\ \hline \vdots \\ \hline [E(K_*; \vec{t}_N)] \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ N \\ \downarrow \end{array} \\ \leftarrow \text{card}(K_*) \rightarrow \end{array}$$

matrices  $[R(k\theta)]$  et  $[S(k\theta)]$

Nous utiliserons constamment, au cours des calculs qui vont suivre, les matrices  $[R(k\theta)]$  et  $[S(k\theta)]$  définies ci-dessous :

$$[R(k\theta)] = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$[S(k\theta)] = \begin{cases} [R(k\theta)] & \text{si } k \neq 0 \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Symbole de sommation

Enfin, nous conviendrons de noter de façon symbolique ...

$$\sum_{\vec{k} \in K} \psi(\vec{k}) = \sum_{\vec{k} \in K} \psi(k^1, \dots, k^j, \dots, k^n) = \sum_{k^1=1}^{K^1} \dots \sum_{k^j=1}^{K^j} \dots \sum_{k^n=1}^{K^n} \psi(k^1, \dots, k^j, \dots, k^n)$$

... sachant que  $(k^1, \dots, k^j, \dots, k^n)$  désignent les composantes d'un vecteur  $\vec{k} \in K$ ; nous adopterons également une convention tout à fait analogue pour définir le symbole

$$\sum_{\vec{k} \in K_*}$$

c) Proposition

Enoncé

Soit d'une part  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré défini de la façon suivante :

$$(T1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \Omega^1 \times \Omega^2 \times \dots \times \Omega^n \\ \text{avec : } \forall i = (1, \dots, n) \Rightarrow \Omega^i = [-\pi, +\pi] \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega \\ \mu(d\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot d\omega \end{array} \right.$$

Soit d'autre part  $F$  un polynôme trigonométrique tel que :

$$(T2) \quad \left[ \begin{array}{l} \forall \vec{t} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow F(\vec{t}) = \sum_{\vec{k} \in K} \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j t^j), \sin(k^j t^j)] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \forall \vec{k} \in K \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [C(\vec{k})] = \text{matrice ligne de } (2)^n \text{ composantes } C^k(\vec{k}) \\ \|[C(\vec{k})]\| < +\infty \end{array} \right. \\ \text{b) } \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow t^j = j^{\text{eme}} \text{ composante du vecteur } \vec{t} \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, si  $T$  et  $D$  sont des compacts de  $\mathbb{R}^n$  alors  $F$  est continue et bornée sur  $[(T \cup D) + \Omega]$  et la famille  $\{f(\vec{\omega}, \cdot)\}_{\vec{\omega} \in \Omega}$  associée à  $F$  suivant la relation ...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega} \in \Omega \\ \vec{t} \in (T \cup D) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\vec{\omega}, \vec{t}) = F(\vec{t} + \vec{\omega})$$

... admet pour moyenne et covariance centrée les fonctions suivantes définies respectivement sur  $(T \cup D)$  et  $(T \cup D) \times (T \cup D)$  :

$$(T3) \quad \left[ \begin{array}{l} \phi_f(\vec{t}) = C^1(\vec{0}) = \text{première composante de } [C(\vec{0})] \\ \Gamma_{ff}^c(\vec{t}_1, \vec{t}_2) = \frac{1}{(2)^n} \cdot \sum_{\vec{k} \in K_*} \left\{ \overline{[C(\vec{k})]} \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\mathcal{R}(k^j(t_1^j - t_2^j))] \right) \right\} \cdot [C(\vec{k})]^t \end{array} \right.$$

De plus, si  $T$  est un ensemble discret de  $N$  points  $\{\vec{t}_p\}$  appartenant à  $\mathbb{R}^n$ , si les matrices  $[C(\vec{k})]$  sont connues quel que soit  $\vec{k} \in K$  et si l'on a ...

$$(T4) \quad \left[ \begin{array}{l} 1^\circ) [E(K_*; T)] \text{ est de rang } N \\ 2^\circ) \forall \vec{k} \in K_* \Rightarrow [C(\vec{k})] \neq [0] \end{array} \right.$$

... alors la fonction  $F$  est  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $\vec{t}_0 \in D$ .

Démonstration : première partie

Compte tenu que l'ensemble  $K$  est fini dénombrable et que les matrices  $[C(\vec{k})]$  sont de norme finie, il est évident que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ ; d'autre part  $F$  est bornée sur  $\mathbb{R}^n$  puisqu'on a :

$$\sup_{\vec{t} \in \mathbb{R}^n} |F(\vec{t})| \leq \sum_{\vec{k} \in K} \|[C(\vec{k})]\| < +\infty$$

Il s'en suit que  $F$  est continue et bornée sur le sous-ensemble  $[(T \cup D) + \Omega]$  appartenant à  $\mathbb{R}^n$ .

Démonstration : deuxième partie

Remarquons tout d'abord que la matrice  $[R(k\theta)]$  jouit de la propriété suivante :

$$[\cos\{k(\tau+\theta)\}, \sin\{k(\tau+\theta)\}] = [\cos(k\tau), \sin(k\tau)] \cdot [R(k\theta)]$$

En désignant par  $t^j$  et  $\omega^j$  la  $j^{\text{eme}}$  composante des vecteurs  $\vec{t}$  et  $\vec{\omega}$  on peut donc écrire :

$$F(\vec{t} + \vec{\omega}) = \sum_{\vec{k} \in K} \left\{ \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j \omega^j), \sin(k^j \omega^j)] \cdot [R(k^j t^j)] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \right\}$$

En utilisant la propriété n°6' du produit tensoriel, on obtient :

$$F(\vec{t} + \vec{\omega}) = \sum_{\vec{k} \in K} \left\{ \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j \omega^j), \sin(k^j \omega^j)] \right) \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t^j)] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \right\}$$

Compte tenu que ...

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(k\theta), \sin(k\theta)] \cdot d\theta = \delta_{k0} \cdot [1, 0]$$

... où  $\delta_{kh}$  désigne le symbole de Kronecker, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{\Omega} F(\vec{t} + \vec{\omega}) \cdot d\omega &= \sum_{\vec{k} \in K} \left\{ \left( \bigotimes_{j=1}^n \delta_{k^j 0} \cdot [1, 0] \right) \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t^j)] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \right\} \\ &= \left( \bigotimes_{j=1}^n [1, 0] \cdot [R(0 t^j)] \right) \cdot [C(\vec{0})]^t \\ &= \left( \bigotimes_{j=1}^n [1, 0] \right) \cdot [C(\vec{0})]^t = C^1(\vec{0}) \end{aligned}$$

On conclut donc que l'on a :

$$(1) \begin{cases} \phi_p(\vec{t}) = C^1(\vec{0}) \\ \{P(\vec{t}+\vec{\omega}) - \phi_p(\vec{t})\} = \sum_{k \in K_*} \left\{ \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j \omega^j), \sin(k^j \omega^j)] \right) \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t^j)] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \right\} \end{cases}$$

Ceci étant dit, posons :

$$(2) \begin{cases} \psi_{pq}(\vec{\omega}) = \{P(\vec{t}_p + \vec{\omega}) - \phi_p(\vec{t}_p)\} \cdot \overline{\{P(\vec{t}_q + \vec{\omega}) - \phi_p(\vec{t}_q)\}} \\ \psi_{pq} = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \int_{\Omega} \psi_{pq}(\vec{\omega}) \cdot d\omega \end{cases}$$

En utilisant la propriété n°5 du produit tensoriel, il vient :

$$\psi_{pq}(\vec{\omega}) = \sum_{\vec{k} \in K_*} \sum_{\vec{h} \in K_*} \left\{ \overline{[C(\vec{h})]} \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(h^j t_q^j)] \right)^t \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(h^j \omega^j), \sin(h^j \omega^j)] \right)^t \right. \\ \left. \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j \omega^j), \sin(k^j \omega^j)] \right) \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_p^j)] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \right\}$$

$$\Rightarrow \psi_{pq}(\vec{\omega}) = \sum_{\vec{k} \in K_*} \sum_{\vec{h} \in K_*} \left\{ \overline{[C(\vec{h})]} \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(h^j t_q^j)] \right)^t \right. \\ \left. \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(h^j \omega^j), \sin(h^j \omega^j)] \right)^t \cdot [\cos(k^j \omega^j), \sin(k^j \omega^j)] \right. \\ \left. \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_p^j)] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \right\}$$

Si nous posons ...

$$\begin{cases} [J(k, h)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (\delta_{k_0} \cdot \delta_{h_0}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{avec } \delta_{kh} = \text{symbole de Kronecker} \end{cases}$$

... on peut vérifier que l'on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(h\theta), \sin(h\theta)]^t \cdot [\cos(k\theta), \sin(k\theta)] d\theta = (\delta_{kh}/2) \cdot [J(k, h)]$$

On en déduit que  $\psi_{pq}$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\psi_{pq} = \sum_{\vec{k} \in K_*} \sum_{\vec{h} \in K_*} \left\{ \overline{[C(\vec{h})]} \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(h^j t_q^j)] \right)^t \right. \\ \left. \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n (\delta_{kh^j} / 2) \cdot [J(k^j, h^j)] \right) \right. \\ \left. \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_p^j)] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \right\}$$

$$\Rightarrow \psi_{pq} = \frac{1}{(2)^n} \sum_{\vec{k} \in K_*} \left\{ \overline{[C(\vec{k})]} \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_q^j)] \right)^t \right. \\ \left. \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [J(k^j, k^j)] \right) \right. \\ \left. \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_p^j)] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \right\}$$

$$\Rightarrow \psi_{pq} = \frac{1}{(2)^n} \sum_{\vec{k} \in K_*} \left\{ \overline{[C(\vec{k})]} \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_q^j)] \right)^t \cdot [J(k^j, k^j)] \cdot [R(k^j t_p^j)] \right. \\ \left. \cdot [C(\vec{k})]^t \right\}$$

Ceci étant dit, on vérifie sans difficulté que l'on a ...

$$\forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow [ \mathcal{D}(k^j \theta_p - \theta_q) ] = [R(k^j \theta_q)]^t \cdot [J(k^j, k^j)] \cdot [R(k^j \theta_p)]$$

... d'où l'on déduit finalement :

$$(3) \psi_{pq} = \frac{1}{(2)^n} \sum_{\vec{k} \in K_*} \left\{ \overline{[C(\vec{k})]} \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [ \mathcal{D}(k^j \theta_p - \theta_q) ] \right) \cdot [C(\vec{k})]^t \right\}$$

En rassemblant les relations (1), (2) et (3) on constate que l'on

a ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_f(t) = c^1 \vec{0} \\ \Gamma_{ff}^c(t_p, t_q) = \psi_{pq} \end{array} \right.$$

... d'où l'on conclut que la moyenne et la fonction de covariance centrée sont bien de la forme annoncée.

Démonstration : troisième partie

Supposons les conditions (T4) satisfaites ; puisque  $[E(K_* ; T)]$  est de rang  $N$ , cela signifie que l'on a l'équivalence suivante :

$$\sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot [E(K_* ; t_p)] = [0] \iff (\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^N = 0)$$

On en déduit en particulier qu'il existe certainement  $\vec{k}_* \in K_*$  tel que :

$$\forall (\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \implies \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \left\{ \prod_{j=1}^n e^{i \cdot k_*^j t_p^j} \right\} \neq 0$$

En remarquant que l'équivalence suivante est toujours vérifiée quel que soit  $\theta \dots$

$$\forall (\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \iff (\lambda^1 \cdot e^{i\theta}, \dots, \lambda^N \cdot e^{i\theta}) \text{ non tous nuls}$$

.... on peut donc écrire :

$$\forall (\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \implies \sum_{p=1}^N \left\{ \lambda^p \cdot e^{-2i \cdot k_*^l t_p^l} \right\} \cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n e^{i \cdot k_*^j t_p^j} \right\} \cdot e^{i \cdot k_*^l t_p^l} \neq 0$$

$$\implies \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n e^{i \cdot k_*^j t_p^j} \right\} \cdot e^{-i \cdot k_*^l t_p^l} \neq 0$$

$$\implies \left\{ \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \left\{ \prod_{j=1}^n e^{i \cdot k_*^j t_p^j} \right\} \right\} \neq 0$$

avec  $\varepsilon^j = \begin{cases} -1 & \text{si } j = l \\ +1 & \text{si } j \neq l \end{cases}$

En itérant ce procédé de démonstration, on montre finalement que si  $[E(K_* ; T)]$  est de rang  $N$ , alors il existe certainement  $\vec{k}_* \in K_*$  tel que quels que soient  $\varepsilon^j = \pm 1$  on ait :

$$(4) \quad \forall (\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \implies \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \left\{ \prod_{j=1}^n \exp(i \cdot \varepsilon^j k_*^j t_p^j) \right\} \neq 0$$

Considérons maintenant les matrices  $[J]$  et  $[e(k\theta)]$  définies de la façon suivante :

$$\left[ \begin{array}{l} [J] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \\ [e(k\theta)] = \begin{bmatrix} e^{ik\theta} & 0 \\ 0 & e^{-ik\theta} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

On vérifie sans difficulté que l'on a ...

$$[R(k\theta)] = [J] \cdot [e(k\theta)] \cdot [\overline{J}]^t$$

... ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_p^j)] \right) &= \left( \bigotimes_{j=1}^n [J] \cdot [e(k^j t_p^j)] \cdot [\overline{J}]^t \right) \\ &= \left( \bigotimes_{j=1}^n [J] \right) \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [e(k^j t_p^j)] \right) \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\overline{J}]^t \right) \\ \implies \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_p^j)] \right) &= \left( \bigotimes_{j=1}^n [J] \right) \cdot \left\{ \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [e(k^j t_p^j)] \right) \right\} \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\overline{J}]^t \right) \end{aligned}$$

En remarquant que l'on a ...

$$\left( \bigotimes_{j=1}^n [J] \right)^{-1} = \left( \bigotimes_{j=1}^n [J]^{-1} \right) = \left( \bigotimes_{j=1}^n [\overline{J}]^t \right)$$

... on en déduit :

$$(5) \quad \left\{ \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_p^j)] \right) \right\} \text{ inversible} \iff \left\{ \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [e(k^j t_p^j)] \right) \right\} \text{ inversible}$$

Mais il est manifeste que  $\left( \bigotimes_{j=1}^n [e(k^j t_p^j)] \right)$  est une matrice diagonale

dont les éléments diagonaux sont de la forme suivante :

$$\prod_{j=1}^n \exp \{ i \cdot \epsilon^j k^j t_p^j \} \quad \text{avec} \quad \epsilon^j = \pm 1$$

Il s'en suit que la matrice ...

$$\sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [e(k^j t_p^j)] \right)$$

... est elle-même une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont de la forme :

$$\sum_{p=1}^N \lambda^p \left\{ \prod_{j=1}^n \exp \{ i \cdot \epsilon^j k^j t_p^j \} \right\}$$

Dans ces conditions, si nous posons ...

$$[M(\vec{k} \mid \lambda^1, \dots, \lambda^N)] = \sum_{p=1}^N \lambda^p \left( \bigotimes_{j=1}^n [R(k^j t_p^j)] \right)$$

... alors, compte tenu des derniers résultats ci-dessus, ainsi que des relations (4) et (5), on en conclut que :

$$(6) : \quad \mathbf{V}(\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \Rightarrow \exists \vec{k}_* \in K_* : [M(\vec{k}_* \mid \lambda^1, \dots, \lambda^N)]^{-1} \text{ existe}$$

Ceci étant dit, si on considère la relation (1), on peut toujours écrire :

$$\sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \{ F(\vec{t}_p + \vec{\omega}) - \phi_f(\vec{t}_p) \} = \sum_{\vec{k} \in K_*} \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j \omega^j), \sin(k^j \omega^j)] \right) \cdot [M(\vec{k} \mid \lambda^1, \dots, \lambda^N)] \cdot [C(\vec{k})]^t$$

$$\sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \{ F(\vec{t}_p + \vec{\omega}) - \phi_f(\vec{t}_p) \} = \sum_{\vec{k} \in K_*} \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j \omega^j), \sin(k^j \omega^j)] \right) \cdot [\gamma(\vec{k} \mid \lambda^1, \dots, \lambda^N)]^t$$

$$\text{avec} : [\gamma(\vec{k} \mid \lambda^1, \dots, \lambda^N)]^t = [M(\vec{k} \mid \lambda^1, \dots, \lambda^N)] \cdot [C(\vec{k})]^t$$

Compte tenu de la relation (6) et du fait que sous les hypothèses (T4), les matrices  $[C(\vec{k})]$  sont toutes différentes de  $[0]$ , on est assuré que ...

$$\mathbf{V}(\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \Rightarrow \exists \vec{k}_* \in K_* : [\gamma(\vec{k}_* \mid \lambda^1, \dots, \lambda^N)] \neq [0]$$

... d'où l'on déduit, puisque  $\mu$  est identique à la mesure de Lebesgue sur  $\Omega$  au coefficient  $1/(2\pi)^n$  près :

$$\mathbf{V}(\lambda^1, \dots, \lambda^N) \text{ non tous nuls} \Rightarrow \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \{ F(\vec{t}_p + \vec{\omega}) - \phi_f(\vec{t}_p) \} \neq 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

On en conclut donc que sous les hypothèses (T4), la fonction  $F$  est  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique.

d) Remarque

On remarque qu'il est nécessaire que l'on ait ...

$$\left[ \begin{array}{l} 1^\circ) \quad \mathbf{V} \left\{ \begin{array}{c} \vec{t}_p \\ \vec{t}_q \end{array} \right\} \in T \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\} : t_p^j \neq t_q^j \text{ modulo } 2\pi \text{ si } p \neq q \\ 2^\circ) \quad \text{card}(K_*) \geq N \end{array} \right.$$

... pour que la matrice  $[E(K_*; T)]$  soit de rang  $N$ .

Bien que cette condition ne soit théoriquement pas suffisante, on constate expérimentalement que si les  $N$  points  $\{\vec{t}_p\}$  constituant l'ensemble  $T$  sont tirés au hasard et si l'on a ...

$$\left[ \begin{array}{l} 1^\circ) \quad T \subset \{ ]0, 2\pi[ \}^n \\ 2^\circ) \quad \mathbf{V} \left\{ \begin{array}{c} \vec{t}_p \\ \vec{t}_q \end{array} \right\} \in T \Rightarrow \vec{t}_p \neq \vec{t}_q \text{ si } p \neq q \\ 3^\circ) \quad \text{card}(K_*) \geq N \end{array} \right.$$

... alors la matrice  $[E(K_*; T)]$  est en général inversible.

Ceci étant dit, comme nous allons le voir au paragraphe suivant, il est possible de démontrer une condition suffisante peu différente de la condition nécessaire présentée ci-dessus lorsque les points de  $T$  sont situés aux noeuds d'un réseau parallèle aux axes de coordonnées :

e) Proposition

Énoncé

Pour que la matrice  $[E(K_*; T)]$  soit de rang  $N$ , il suffit que les ensembles  $K$  et  $T$  soient tels que l'on ait :

$$1^\circ) \left[ \begin{array}{l} T = T^1 \times T^2 \times \dots \times T^n \\ N = N^1 \cdot N^2 \cdot \dots \cdot N^n \\ \text{avec : } \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \begin{cases} T^j \equiv \{\tau_1^j, \dots, \tau_{N^j}^j\} \\ \tau_p^j = \tau_q^j \text{ modulo } 2\pi \text{ si } p \neq q \end{cases} \end{array} \right.$$

$$2^\circ) \left[ \begin{array}{l} K = K^1 \times K^2 \times \dots \times K^n \\ \text{avec : } \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \begin{cases} K^j \equiv \{0, 1, \dots, K^j\} \\ K^j \geq N^j \end{cases} \end{array} \right.$$

Démonstration

Il est toujours possible de numérotter les vecteurs de  $K$  de telle façon que l'on ait :

$$[E(K; \vec{t})] = \left( \bigotimes_{j=1}^n [1, e^{i1t^j}, e^{i2t^j}, \dots, e^{iK^j t^j}] \right) = [e^{i k_0 \vec{t}}, e^{i k_1 \vec{t}}, \dots]$$

Supposons qu'il en soit ainsi, et posons :

$$[E(K_*^j; \tau^j)] = [e^{i1\tau^j}, e^{i2\tau^j}, \dots, e^{iK^j \tau^j}]$$

$$[E_*(K_*; \vec{t})] = \left( \bigotimes_{j=1}^n [E(K_*^j; \tau^j)] \right)$$

$$[E_*(K_*; T)] = \begin{bmatrix} [E_*(K_*; \vec{t}_1)] \\ [E_*(K_*; \vec{t}_2)] \\ \vdots \\ [E_*(K_*; \vec{t}_N)] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [E_*(K_*^j; T^j)] = \begin{bmatrix} [E(K_*^j; \tau_1^j)] \\ [E(K_*^j; \tau_2^j)] \\ \vdots \\ [E(K_*^j; \tau_{N^j}^j)] \end{bmatrix}$$

Il est évident que  $[E_*(K_*; T)]$  se déduit de  $[E(K_*; T)]$  en supprimant un certain nombre de colonnes dans cette dernière matrice ; il s'en suit que si  $[E_*(K_*; T)]$  est de rang  $N$ , alors  $[E(K_*; T)]$  est aussi de rang  $N$  :

$$(1) : \text{rang} \{ [E_*(K_*; T)] \} = N \Rightarrow \text{rang} \{ [E(K_*; T)] \} = N$$

D'autre part, on peut vérifier, en développant le produit tensoriel ci-dessous, qu'il est toujours possible de numérotter les points de  $T$  de telle façon que l'on ait :

$$(2) : [E_*(K_*; T)] = \left( \bigotimes_{j=1}^n [E_*(K_*^j; T^j)] \right)$$

Par exemple, si  $n = 2$ ,  $N^1 = 3$  et  $N^2 = 2$ , la relation (2) est compatible avec la numérotation suivante :

$$\vec{t}_1 \begin{vmatrix} \tau_1^1 \\ \tau_1^2 \end{vmatrix} \quad \vec{t}_2 \begin{vmatrix} \tau_1^1 \\ \tau_2^2 \end{vmatrix} \quad \vec{t}_3 \begin{vmatrix} \tau_2^1 \\ \tau_1^2 \end{vmatrix} \quad \vec{t}_4 \begin{vmatrix} \tau_2^1 \\ \tau_2^2 \end{vmatrix} \quad \vec{t}_5 \begin{vmatrix} \tau_3^1 \\ \tau_1^2 \end{vmatrix} \quad \vec{t}_6 \begin{vmatrix} \tau_3^1 \\ \tau_2^2 \end{vmatrix}$$

Ceci étant dit, soit  $j$  un entier fixé dans  $[1, n]$  ; par un raisonnement analogue à celui effectué dans la deuxième partie de la démonstration relative à la proposition III-4.3-b, on peut montrer que si  $K^j = N^j$ , alors :

$$\det \{ [E_*(K_*^j; T^j)] \} = 0 \Leftrightarrow \exists \begin{Bmatrix} \tau_p^j \\ \tau_q^j \end{Bmatrix} \in T^j : \tau_p^j = \tau_q^j \text{ modulo } 2\pi \text{ avec } p \neq q$$

Compte tenu que par hypothèse on a ...

$$\forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ) K^j \geq N^j \\ 2^\circ) \tau_p^j \neq \tau_q^j \text{ modulo } 2\pi \text{ si } p \neq q \end{cases}$$

... il s'en suit que chaque matrice  $[E_*(K_*^j; T^j)]$  est respectivement de rang  $N^j$  :

$$\forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \text{rang} \{ [E_*(K_*^j; T^j)] \} = N^j$$

On en déduit que l'on a, d'après la propriété n°8 du produit tensoriel et compte tenu de la relation (2) :

$$(3) : \text{rang} \{ [E_*(K_*; T)] \} = \prod_{j=1}^n N^j = N$$

En comparant ce dernier résultat avec l'implication (1), on en conclut que la matrice  $[E(K_*; T)]$  est de rang  $N$  à condition que les ensembles  $K_*$  et  $T$  soient numérotés de la façon qui a été précisée dans la démonstration ci-dessus. Si nous remarquons que changer la numérotation des ensembles  $K_*$  et  $T$  revient à permuter des lignes et des colonnes dans la matrice  $[E(K_*; T)]$  alors on est assuré que sous les conditions posées dans l'énoncé, cette matrice est de rang  $N$  puisque les permutations de lignes et de colonnes n'affectent pas le rang d'une matrice.

#### f) Corollaire

##### Enoncé

Soit  $N^j$  le nombre de points de  $T$  qui ont des projections distinctes sur le  $j^{\text{em}}$  axe de coordonnées. Pour que la matrice  $[E(K_*; T)]$  soit de rang  $N$ , il suffit que les ensembles  $K$  et  $T$  satisfassent les deux conditions suivantes :

$$\left[ \begin{array}{l} 1^\circ) \forall \left\{ \begin{array}{l} \vec{t}_p \\ \vec{t}_q \end{array} \right\} \in T \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\} : t_p^j \neq t_q^j \text{ modulo } 2\pi \text{ si } p \neq q \\ 2^\circ) \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow K^j \geq N^j \end{array} \right.$$

#### Démonstration

Pour tout entier  $j$  fixé dans  $[1, n]$ , soit  $T^j$  l'ensemble des  $N^j$  points distincts engendrés par les projections des  $N$  points de l'ensemble  $T$  sur le  $j^{\text{em}}$  axe de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \forall \vec{t}_p \in T \Rightarrow \exists \tau_r^j \in T^j : t_p^j = \tau_r^j \\ 2^\circ) \forall \tau_r^j \in T^j \Rightarrow \exists \vec{t}_p \in T : t_p^j = \tau_r^j \end{array} \right.$$

Soit, d'autre part,  $\Theta$  l'ensemble produit et  $\nu$  l'entier positif définis de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta = T^1 \times T^2 \times \dots \times T^n \\ \nu = N^1 \cdot N^2 \cdot \dots \cdot N^n \end{array} \right.$$

Compte tenu des hypothèses, on vérifie immédiatement à l'aide de la proposition précédente que la matrice  $[E(K_*; T)]$  est de rang  $N$  puisque cette matrice se déduit de  $[E(K_*; \Theta)]$  en supprimant les lignes correspondant aux points de  $\Theta$  qui n'appartiennent pas à  $T \cap \Theta$ .

#### g) Remarque pratique

##### Introduction

Soit  $T$  un ensemble de  $N$  points  $\{\vec{t}_p\} \in \mathbb{R}^n$  tels que ...

$$T \subset \{ ] 0, 2\pi [ \}^n$$

... et soit  $F$  une fonction  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique sur un compact  $D \in \mathbb{R}^n$ .

Supposons que  $F$  soit connue sur  $T$  et que l'on désire construire une interpolation  $\hat{F}^*(t_0)$  en tout point  $t_0 \in D$  à l'aide de la technique présentée au paragraphe III-4.3. Compte tenu de tout ce que nous venons de voir ci-dessus, on a intérêt dans les applications pratiques à définir l'espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  à l'aide des relations (T1) et à choisir pour solution initiale  $F^*$  un polynôme trigonométrique satisfaisant les conditions (T2) présentées au paragraphe III-4.4-c ; en effet, dans ce cas, les fonctions  $\phi_{F^*}$  et  $\Gamma_{F^*}$  sont connues par leur écriture mathématique et, de plus, on dispose d'un certain nombre de résultats théoriques concernant l'existence de solutions au problème posé.

Si on adopte cette façon de procéder, il demeure un problème délicat, à savoir celui du choix de  $F^*$ . Expérimentalement, on constate que l'on obtient en général de bons résultats lorsque  $F^*$  approche  $F$  au sens des moindres carrés sur  $\{ [0, 2\pi] \}^n$  et que  $F^*$  est calculée à partir des  $N$  valeurs  $F(\vec{t}_p)$  prises par  $F$  sur l'ensemble  $T$ ; malheureusement, le choix de  $F^*$  est alors très rigide et il n'est pas possible de "modeler" à volonté la solution initiale. Nous présentons ci-dessous une technique légèrement différente qui a l'avantage de fournir une solution initiale dont la forme peut être facilement imposée a priori :

Construction d'une solution initiale  $F^*$  de forme imposée

Supposons que l'on désire que le polynôme trigonométrique  $F^*$  ait sur  $\{ [0, 2\pi] \}^n$  une forme voisine de celle d'une fonction bornée  $\tilde{F}$  donnée a priori sur  $\{ [0, 2\pi] \}^n$ .

Une façon de procéder consiste à échantillonner  $\tilde{F}$  aux noeuds d'un réseau régulier  $R$  couvrant le domaine  $\{ [0, 2\pi] \}^n$  et à approcher  $\tilde{F}$  par  $F^*$  au sens des moindres carrés en fonction des valeurs prises par  $\tilde{F}$  aux noeuds de ce réseau. Pour ce faire, on a tout intérêt à choisir  $R$  de la façon suivante :

$$R = R^1 \times R^2 \times \dots \times R^n$$

avec :  $\forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R^j \equiv \{ \tau_0^j, \tau_1^j, \dots, \tau_{2\nu_j}^j \} \\ \tau_p^j = p \cdot \frac{2\pi}{2\nu_j + 1} \end{array} \right.$

En effet, dans ce cas, il existe des techniques de détermination directe de  $F^*$  à partir de  $\tilde{F}$  sans avoir à inverser le système des équations normales (cf. Legras, pages 43 et 306). Tous calculs faits, si l'on pose ...

$$\cosin(k, z) = \begin{cases} \cos\left(\frac{k+1}{2} \cdot z\right) & \text{si } k \text{ est impair} \\ \sin\left(\frac{k}{2} \cdot z\right) & \text{si } \begin{cases} k \text{ est pair} \\ k \neq 0 \end{cases} \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

... alors on a les formules d'approximation suivantes ...

$$\left\{ \begin{array}{l} k^1 \leq \nu^1 \\ \vdots \\ k^n \leq \nu^n \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F^*(t) = \sum_{r^1=0}^{2K^1} \dots \sum_{r^n=0}^{2K^n} a^*(r^1, \dots, r^n) \cdot \left( \prod_{j=1}^n \cosin(k^j, t^j) \right) \\ a^*(r^1, \dots, r^n) = \sum_{p^1=0}^{2\nu^1} \dots \sum_{p^n=0}^{2\nu^n} F(\tau_{p^1}^1, \dots, \tau_{p^n}^n) \cdot \left( \prod_{j=1}^n V_{K^j}^{p^j}(k^j, \nu^j) \right) \end{array} \right.$$

... où  $V_{K^j}^{p^j}(k^j, \nu^j)$  désigne le terme situé sur la  $r^j$  em ligne et la  $p^j$  em colonne dans la matrice  $[V(k^j, \nu^j)]$  définie ci-dessous :

$$[V(k^j, \nu^j)] = \frac{2}{2\nu^j + 1} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & \dots & 1/2 \\ 1 & \cos 1 \tau_1^j & \cos 1 \tau_2^j & \dots & \cos 1 \tau_{2\nu_j}^j \\ 0 & \sin 1 \tau_1^j & \sin 1 \tau_2^j & \dots & \sin 1 \tau_{2\nu_j}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos r \tau_1^j & \cos r \tau_2^j & \dots & \cos r \tau_{2\nu_j}^j \\ 0 & \sin r \tau_1^j & \sin r \tau_2^j & \dots & \sin r \tau_{2\nu_j}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos K^j \tau_1^j & \cos K^j \tau_2^j & \dots & \cos K^j \tau_{2\nu_j}^j \\ 0 & \sin K^j \tau_1^j & \sin K^j \tau_2^j & \dots & \sin K^j \tau_{2\nu_j}^j \end{bmatrix}$$

En remarquant que la fonction  $F^*$  ainsi construite est strictement identique à la fonction  $F^*$  définie ci-dessous ...

$$F^*(t) = \sum_{\vec{k} \in K} \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j t^j), \sin(k^j t^j)] \right) \cdot [C^*(\vec{k})]^t$$

avec :  $\left\{ \begin{array}{l} K = K^1 \times K^2 \times \dots \times K^n \\ \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow K^j \equiv \{ 0, 1, \dots, K^j \} \end{array} \right.$

... on en déduit que l'ensemble des composantes des matrices  $[C^*(\vec{k})]$  est identique à l'ensemble des coefficients  $a^*(r^1, \dots, r^n)$ ; il s'en suit que par des identifications judicieuses on peut toujours construire les matrices  $[C^*(\vec{k})]$  à partir des coefficients  $a^*(r^1, \dots, r^n)$ .

III-5.1 - Nature du problème posé

a) Introduction

Rappels

Soit  $T$  une partie du  $\mathbb{R}^n$  et  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé. Par définition, on appelle fonction aléatoire du second ordre, toute application  $f$  définie sur  $[(\Omega, \mathcal{A}) \times T]$  et à valeurs dans  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$  telle que :

$$\begin{cases} 1^\circ) \forall \omega \in \Omega & \Rightarrow f(\omega, \cdot) = \text{fonction de } t \in T \\ 2^\circ) \forall t \in T & \Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \end{cases}$$

De plus, pour toute fonction aléatoire du second ordre  $f$ , il existe une fonction  $\Gamma_{ff}(t_1, t_2)$  appelée fonction d'auto-corrélation et telle que ...

$$\Gamma_{ff}(t_1, t_2) = E \{ f(\cdot, t_1) \cdot \bar{f}(\cdot, t_2) \} = \int_{\Omega} f(\omega, t_1) \cdot \bar{f}(\omega, t_2) \mu(d\omega)$$

... où  $E$  désigne l'opérateur "espérance mathématique".

Remarque

Si  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace probabilisé et si  $T$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , alors toute fonction aléatoire du second ordre  $f$  définie sur  $[(\Omega, \mathcal{A}) \times T]$  et telle que ...

$$f(\omega, \cdot) \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C}) \quad \mu - p.p.$$

... engendre, pour  $\mu$ -presque tout  $\omega$ , une famille de fonctions  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  appartenant à  $E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  à laquelle on peut associer un vecteur paramétré  $U_f(\cdot) \in L_E^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  en posant :

$$\forall U_f(\cdot) \in U_f(\cdot) \Rightarrow U_f(\omega) = f(\omega, \cdot) \quad \mu - p.p.$$

On constate sans difficulté que la fonction de covariance de la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  ainsi définie, est identique à la fonction d'auto-corrélation de la fonction aléatoire  $f$  et l'on a de plus :

$$\forall t \in T \Rightarrow E \{ f(\cdot, t) \} = M \{ U_f(\cdot) \} (t)$$

b) Notion de filtrage statistique optimal

Soit, d'une part  $\{V_j\}_{j=1}^n$  une famille finie de  $n$  fonctions linéairement indépendantes appartenant au Banach séparable  $E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$ , et soit  $f$  une fonction aléatoire du second ordre définie sur  $(\Omega \times T)$  et telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) f(\omega, \cdot) \in E \quad \mu - p.p. \\ 2^\circ) E \{ f(\cdot, t) \} = 0 \quad \forall t \in T \\ 3^\circ) \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \text{ est connue} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall t_1 \in T \\ \forall t_2 \in T \end{array} \right. \\ 4^\circ) \text{La famille } \{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega} \text{ est } \mu - \text{libre} \\ 5^\circ) \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \exists \chi_j^j \in E' : \int_T \Gamma_{ff}(\cdot, t) \bar{\chi}_j^j(dt) = V_j(\cdot) \end{array} \right.$$

Soit, d'autre part  $g$  une autre fonction aléatoire du second ordre telle que ...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow g(\omega, t) = \sum_{j=1}^n \alpha^j \cdot V_j(t) + f(\omega, t)$$

... où  $\{\alpha^j\}_{j=1}^n$  est une famille de  $n$  constantes complexes inconnues, et soit  $A_g^i$  le sous-ensemble de  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  tel que :

$$\forall \hat{\alpha}^j(\cdot) \in A_g^j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) E \{ \hat{\alpha}^j \} = \alpha^j \\ 2^\circ) \exists \hat{\chi}^j \in E' : \hat{\alpha}^j(\omega) = \int_T g(\omega, t) \hat{\chi}^j(dt) \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, nous appellerons filtrage statistique optimal la fonction aléatoire  $g$ , toute fonction aléatoire  $\hat{g}$  telle que ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{g}(\omega, t) = \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}^j(\omega) \cdot V_j(t) \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{array} \right. \\ \text{avec : } \hat{\alpha}^j(\omega) = \int_T g(\omega, t) \hat{\chi}^j(dt) \quad \forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ j=1, \dots, n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

... où les mesures  $\lambda^j \in E'$  sont choisies de telle façon que l'on ait :

$$E \{ |\hat{a}^j(\cdot) - a^j|^2 \} = \min_{a^j \in A_g^j} E \{ |\hat{a}^j(\cdot) - a^j|^2 \}$$

c) Remarque : Cas où  $T$  est discret

Dans le cas où  $T$  est un ensemble discret de  $N$  points  $\{t_k\}$  appartenant à  $\mathbb{R}^n$ , il est facile de vérifier que si nous posons ...

$$\left[ \Gamma \right] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \dots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix}$$

avec :  $\forall \begin{pmatrix} t_i \\ t_j \end{pmatrix} \in T \Rightarrow \Gamma_{ij} = \Gamma_{ff}(t_i, t_j)$

... alors, pour que les conditions suivantes soient vérifiées ...

$$\begin{cases} 4^\circ) \text{ la famille } \{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega} \text{ est } \mu\text{-libre} \\ 5^\circ) \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \exists \mathcal{V}_j \in E' : \int_T \Gamma_{ff}(\cdot, t) \overline{\mathcal{V}_j}(dt) = V_j(\cdot) \end{cases}$$

... il faut et il suffit que la matrice  $[\Gamma]$  soit inversible.

On en déduit de ceci que si l'on a ...

$$\forall \begin{pmatrix} t_i \\ t_j \end{pmatrix} \in T \Rightarrow \Gamma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ |\sigma_j|^2 & \text{si } i = j \end{cases}$$

... alors la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mu$ -libre et les mesures  $\mathcal{V}_j \in E'$  peuvent s'écrire sous la forme suivante où  $\delta_{t_i}$  représente la mesure de Dirac au point  $t_i \in T$  :

$$\mathcal{V}_j(dt) = \frac{1}{|\sigma_j|^2} \cdot \sum_{t_i \in T} \overline{V_j(t_i)} \cdot \delta_{t_i}(dt)$$

### III-5.2 - Proposition fondamentale

a) Proposition

Énoncé

Si l'on désigne par  $[G]$  la matrice carrée telle que ...

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \text{ avec } G_{ij} = \int_T \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \overline{\mathcal{V}_i}(dt_1) \mathcal{V}_j(dt_2)$$

... alors cette matrice est inversible et les coefficients  $\hat{a}^j(\cdot) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  du filtrage statistique optimal  $\hat{g}$  sont donnés par la relation suivante :

$$\forall \omega \in \Omega \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{a}^1(\omega) \\ \vdots \\ \hat{a}^n(\omega) \end{bmatrix} = [G]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \int_T g(\omega, t) \cdot \overline{\mathcal{V}_1}(dt) \\ \vdots \\ \int_T g(\omega, t) \cdot \overline{\mathcal{V}_n}(dt) \end{bmatrix}$$

De plus, si  $\bar{G}^{jk}$  désigne le complexe conjugué du nombre situé en  $j$ -ème ligne et  $k$ -ème colonne dans la matrice  $[G]^{-1}$ , alors on a :

$$\begin{cases} E \{ \hat{g}(\cdot, t) \} = E \{ g(\cdot, t) \} = \sum_{j=1}^n a^j \cdot V_j(t) \\ E \{ |\hat{g}(\cdot, t) - \sum_j a^j \cdot V_j(t)|^2 \} = \sum_{i,j} \bar{G}^{ij} \cdot V_i(t) \cdot \overline{V_j(t)} \end{cases}$$

Démonstration : Première partie

Les fonctions aléatoires  $f$  et  $g$  étant du second ordre et vérifiant les relations ...

$$\left. \begin{cases} f(\omega, \cdot) \in E \\ g(\omega, \cdot) \in E \end{cases} \right\} \mu\text{-p.p.}$$

... il s'en suit que l'on peut leur associer respectivement des vecteurs paramétrés  $U_f(\cdot)$  et  $U_g(\cdot)$  appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et tels que :

$$\begin{cases} \forall U_f(\cdot) \in U_f(\cdot) & \Rightarrow U_f(\omega) = f(\omega, \cdot) & \mu\text{-p.p.} \\ \forall U_g(\cdot) \in U_g(\cdot) & \Rightarrow U_g(\omega) = g(\omega, \cdot) & \mu\text{-p.p.} \end{cases}$$

On est alors assuré que l'on a ...

$$\forall t \in T \Rightarrow M \{ U_f(\cdot) \}(t) = E \{ f(\cdot, t) \} = 0$$

... et que, de plus, l'opérateur de covariance  $C_{U_f, U_f}$  est lié à la fonction d'auto-corrélation  $\Gamma_{ff}(t_1, t_2)$  de  $f$  par la relation suivante :

$$\forall \lambda \in E' \Rightarrow C_{U_f, U_f}(\lambda) = \int_T \Gamma_{ff}(\cdot, \cdot) \bar{\lambda}(dt)$$

Ceci étant dit, on peut alors affirmer que l'on a l'équivalence suivante pour tout  $\omega$  appartenant à  $\Omega$  :

$$\begin{cases} g(\omega, t) = \sum_{j=1}^n \alpha^j \cdot v_j(t) + f(\omega, t) \\ \Leftrightarrow U_g(\omega) = \sum_{j=1}^n \alpha^j \cdot v_j + U_f(\omega) \end{cases} \quad \forall t \in T$$

Compte tenu des hypothèses faites au paragraphe III-5.1-b, on déduit alors immédiatement du théorème de Gauss-Markov (cf II-3.5) que la matrice  $[G]$  est inversible et que, de plus, les classes d'équivalences  $\{\hat{a}^j(\cdot)\}_{j=1}^n$  appartenant à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  telles que ...

$$\forall \omega \in \Omega \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{a}^1(\omega) \\ \vdots \\ \hat{a}^n(\omega) \end{bmatrix} = [G]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathcal{V}_1, U_g(\omega) \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathcal{V}_n, U_g(\omega) \rangle \end{bmatrix}$$

... vérifient les relations suivantes ...

$$\begin{cases} M \{ \hat{a}^j(\cdot) \} = \alpha^j \\ M \left( \{ \hat{a}^i(\cdot) - \alpha^i, \{ \hat{a}^j(\cdot) - \alpha^j \} \right) = \bar{C}^{ij} \\ \| \hat{a}^j(\cdot) - \alpha^j \|_{L^2} = \alpha^j \in \mathcal{A}_{U_g}^{j, \min} \| \hat{a}^j(\cdot) - \alpha^j \|_{L^2} \end{cases}$$

... où  $\mathcal{A}_{U_g}^j$  est le sous-ensemble de  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  tel que :

$$\forall \hat{a}^j(\cdot) \in \mathcal{A}_{U_g}^j \Leftrightarrow \begin{cases} 1^\circ) M \{ \hat{a}^j(\cdot) \} = \alpha^j \\ 2^\circ) \exists \chi^j \in E' : \hat{a}^j(\omega) = \langle \chi^j, U_g(\omega) \rangle \quad \forall \omega \in \Omega \end{cases}$$

Démonstration : Deuxième partie

Remarquons tout d'abord que l'on a les implications suivantes :

$$\begin{cases} 1^\circ) \forall \hat{a}^j(\cdot) \in \mathcal{A}_{U_g}^j \Rightarrow \left[ \forall \chi^j(\cdot) \in \mathcal{V}_j(\cdot) \Rightarrow \hat{a}^j(\cdot) \in \mathcal{A}_g^j \right] \\ 2^\circ) \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \int_T g(\cdot, t) \mathcal{V}_j^*(dt) \in \langle \mathcal{V}_j, U_g(\cdot) \rangle \end{cases}$$

On en déduit alors, d'après les résultats obtenus dans la première partie de la démonstration, que la famille de fonctions  $\{\hat{a}^j(\cdot)\}_{j=1}^n$  appartenant à  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et telle que ...

$$\begin{bmatrix} \hat{a}^1(\omega) \\ \vdots \\ \hat{a}^n(\omega) \end{bmatrix} = [G]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \int_T g(\omega, t) \mathcal{V}_1^*(dt) \\ \vdots \\ \int_T g(\omega, t) \mathcal{V}_n^*(dt) \end{bmatrix}$$

... vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
M \{ \hat{\alpha}^j(\cdot) \} &= \alpha^j \\
M \{ (\hat{\alpha}^i(\cdot) - \alpha^i) \cdot \overline{(\hat{\alpha}^j(\cdot) - \alpha^j)} \} &= \overline{G^{ij}} \\
M \{ |\hat{\alpha}^j(\cdot) - \alpha^j|^2 \} &= \sum_{\alpha^j \in A_g^j}^{\min} M \{ |\hat{\alpha}^j(\cdot) - \alpha^j|^2 \} \\
(1) \quad E \{ \hat{\alpha}^j(\cdot) \} &= \alpha^j \\
(2) \quad E \{ (\hat{\alpha}^i(\cdot) - \alpha^i) \cdot \overline{(\hat{\alpha}^j(\cdot) - \alpha^j)} \} &= \overline{G^{ij}} \\
(3) \quad E \{ |\hat{\alpha}^j(\cdot) - \alpha^j|^2 \} &= \sum_{\alpha^j \in A_g^j}^{\min} E \{ |\hat{\alpha}^j(\cdot) - \alpha^j|^2 \}
\end{aligned}$$

De la relation (3) on déduit que la fonction aléatoire  $\hat{g}$  telle que ...

$$\hat{g}(\omega, t) = \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}^j(\omega) \cdot V_j(t) \quad \forall \begin{cases} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{cases}$$

... est un filtrage statistique optimal de la fonction aléatoire  $g$ , et des relations (1) et (2) on déduit facilement par des calculs élémentaires que l'on a :

$$\begin{cases} E \{ \hat{g}(\cdot, t) \} = E \{ g(\cdot, t) \} = \sum_{j=1}^n \alpha^j \cdot V_j(t) \\ E \{ |\hat{g}(\cdot, t) - \sum_{j=1}^n \alpha^j \cdot V_j(t)|^2 \} = \sum_{i,j} \overline{G^{ij}} \cdot V_i(t) \cdot V_j(t) \end{cases}$$

b) Cas particulier où T est discret

Supposons que T soit constitué de N points  $\{t_j\}$  appartenant à  $\mathbb{R}^n$

et posons :

$$[\hat{A}(\omega)] = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}^1(\omega) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}^n(\omega) \end{bmatrix}; [V] = \begin{bmatrix} V_1(t_1) & \dots & V_n(t_1) \\ V_1(t_2) & \dots & V_n(t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ V_1(t_N) & \dots & V_n(t_N) \end{bmatrix}; [g(\omega)] = \begin{bmatrix} g(\omega, t_1) \\ g(\omega, t_2) \\ \vdots \\ g(\omega, t_N) \end{bmatrix}$$

On peut alors vérifier sans difficulté que l'on a :

$$\begin{cases} [G] = [\bar{V}]^t \cdot [R]^{-1} \cdot [V] \\ [\hat{A}(\omega)] = [G]^{-1} \cdot ([\bar{V}]^t \cdot [R]^{-1} \cdot [g(\omega)]) \end{cases}$$

III-5.3 - Application au filtrage d'un bruit additif

a) Problème posé

Très souvent dans la pratique, on ne connaît une fonction continue  $\varphi \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  qu'à travers une observation faite à l'aide d'un instrument de mesure imparfait qui, à chaque expérience  $\omega$  associe une fonction  $\varphi_\omega \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$  en général différente de  $\varphi$ . Si nous désignons par  $\mathcal{A}_\omega$  l'application qui à chaque expérience  $\omega$  faite sur  $\varphi$  associe l'observation  $\varphi_\omega$ , on a donc :

$$\varphi_\omega = \mathcal{A}_\omega \{ \varphi \}$$

Par définition, nous dirons que  $\varphi$  est le signal et que ...

$$\beta_\omega(t) = \varphi_\omega(t) - \varphi(t) \quad \forall t \in T$$

... est le bruit (additif) affectant ce signal au cours de l'expérience  $\omega$ .

Nous supposons donné dans ce qui suit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  où  $\Omega$  est l'ensemble des expériences  $\omega$  possibles, et nous supposons en outre qu'il existe deux fonctions aléatoires du second ordre  $f(\omega, t)$  et  $g(\omega, t)$  définies sur  $[(\Omega, \mathcal{A}) \times T]$  et telles que :

$$\forall \begin{cases} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(\omega, t) = \varphi_\omega(t) \\ f(\omega, t) = \beta_\omega(t) \end{cases}$$

Enfin, nous admettrons que l'on sait a priori que l'on a ...

$$\begin{cases} \varphi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot V_i(t) & \forall t \in T \\ E \{ f(\cdot, t) \} = 0 & \forall t \in T \\ E \{ f(\cdot, t_1) \cdot \overline{f(\cdot, t_2)} \} = \Gamma_{ff}(t_1, t_2) & \forall \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \in T \end{cases}$$

III-5.4 - Exemples de bruit

a) Proposition

Enoncé

Soit  $T$  un compact de  $\mathbb{R}^1$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé et  $f$  une fonction aléatoire définie sur  $[(\Omega, \mathcal{A}) \times T]$  par la relation suivante où  $K$  est un entier fini positif ou nul :

$$\left[ \begin{array}{l} \forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow f(\omega, t) = \sum_{k=0}^K \{A_k(\omega) \cdot \cos(kt) + B_k(\omega) \cdot \sin(kt)\} \\ \\ \text{avec} \left\{ \begin{array}{l} E\{|A_k|^2\} = E\{|B_k|^2\} = \sigma_k^2 \quad \text{---} \quad \forall k \\ E\{A_k \cdot \bar{B}_h\} = E\{B_k \cdot \bar{A}_h\} = 0 \quad \text{---} \quad \forall (k, h) \\ E\{A_k \cdot \bar{A}_h\} = E\{B_k \cdot \bar{B}_h\} = 0 \quad \text{---} \quad \forall k \neq h \\ E\{A_k\} = E\{B_k\} = 0 \quad \text{---} \quad \forall k \\ \sigma_k^2 < +\infty \quad \text{---} \quad \forall k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions,  $f$  est telle que ...

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\omega, \cdot) \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C}) \quad \mu\text{-p.p.} \\ \forall t \in T \Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ \forall t \in T \Rightarrow E\{f(\cdot, t)\} = 0 \end{array} \right.$$

... et admet pour fonction d'auto-corrélation la fonction suivante :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 \end{array} \right\} \in T \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^K \sigma_k^2 \cdot \cos[k(t_1 - t_2)]$$

... où  $\{V_i(t)\}_{i=1}^n$  est une famille de  $n$  fonctions connues, linéairement indépendantes, appartenant à  $E \equiv \mathcal{C}(T, \mathbb{C})$ ,  $\{a^i\}_{i=1}^n$  un ensemble de  $n$  coefficients inconnus et  $\Gamma_{ff}$  la fonction d'auto-corrélation supposée connue et associée à la fonction aléatoire  $f(\omega, t)$ .

On se propose de trouver une fonction aléatoire  $\hat{g}(\omega, t)$  de la forme ...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{g}(\omega, t) = \sum_{i=1}^n \hat{a}^i(\omega) \cdot V_i(t)$$

... sachant que les  $n$  coefficients  $\hat{a}^i(\omega)$  sont des variables aléatoires à déterminer en fonction de  $\varphi_\omega(t) = g(\omega, t)$  et  $\Gamma_{ff}$  de telle façon que l'on ait simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) E\{\hat{g}(\cdot, t)\} = \varphi(t) \quad \forall t \in T \\ 2^\circ) \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow E\{|\hat{a}^j(\cdot) - a^j|^2\} \text{ est "aussi petit que possible"} \end{array} \right.$$

Si nous arrivons à trouver une telle fonction aléatoire  $\hat{g}(\omega, t)$  alors, une expérience  $\omega_0 \in \Omega$  étant fixée, nous dirons que  $\hat{g}(\omega_0, t)$  est un filtrage statistique de  $\varphi_{\omega_0}$ .

b) Solution du problème posé

Si l'on suppose que ...

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) \text{ La famille } \{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega} \text{ est } \mu\text{-libre} \\ 2^\circ) \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \exists \mathcal{N}_j \in E' : \int_T \Gamma_{ff}(\cdot, t_2) \overline{\mathcal{N}_j}(dt_2) = V_j(\cdot) \end{array} \right.$$

... alors on est dans les conditions du paragraphe III-5.1-b, et la proposition III-5.2 nous permet d'obtenir (au sens du théorème de Gauss-Markov) une solution  $\hat{g}(\omega, t)$  au problème posé, solution qui, rappelons le, est telle que :

$$\forall t \in T \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ) E\{g(\cdot, t)\} = \varphi(t) \\ 2^\circ) E\{|g(\cdot, t) - \varphi(t)|^2\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{G}^{ij} \cdot V_i(t) \cdot V_j(t) \end{array} \right.$$

De plus, si  $T$  est un ensemble discret de  $N$  points appartenant à  $]0, 2\pi[$  et si l'on a ...

$$(T4') \quad \left\{ \begin{array}{l} K \geq N-1 \\ \forall \left\{ \begin{array}{l} t_p \\ t_q \end{array} \right\} \in T \Rightarrow t_p \neq t_q \quad \text{si } p \neq q \\ \forall k = (1, \dots, K) \Rightarrow \sigma_k^2 \neq 0 \end{array} \right.$$

... alors la famille  $\{f(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mu$ -libre

Démonstration : Première partie

Par définition de  $\Gamma_{ff}(t_1, t_2)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ff}(t_1, t_2) &= E\{f(\omega, t_1) \cdot \bar{f}(\omega, t_2)\} \\ &= \sum_{k=0}^K \sum_{h=0}^K E\{[A_k \cdot \cos(kt_1) + B_k \cdot \sin(kt_1)] \cdot [A_h \cdot \cos(ht_2) + B_h \cdot \sin(ht_2)]\} \\ &= \sum_{k=0}^K \left\{ E\{|A_k|^2\} \cdot [\cos(kt_1) \cdot \cos(kt_2)] + E\{|B_k|^2\} \cdot [\sin(kt_1) \cdot \sin(kt_2)] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^K \sigma_k^2 \cdot \cos[k(t_1 - t_2)] \end{aligned}$$

Comme de plus on a ...

$$\forall t \in T \Rightarrow \int_{\Omega} |f(\omega, t)|^2 \cdot \mu(d\omega) = \Gamma_{ff}(t, t) = \sum_{k=0}^K \sigma_k^2 < +\infty$$

... il s'en suit que  $f(\cdot, t)$  appartient à  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  quel que soit  $t \in T$  :

$$\forall t \in T \Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

Enfin, on vérifie immédiatement que l'on a bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\omega, \cdot) \in \mathcal{E}(T, \mathbb{C}) \quad \mu\text{-p.s.} \\ \forall t \in T \Rightarrow E\{f(\cdot, t)\} = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration : deuxième partie

Par un raisonnement analogue à celui de la proposition III-4.3-b, on peut montrer que sous les hypothèses (T4') on a ...

$$(1') \quad \forall k = (0, 1, \dots, N-1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \cos(k t_p) = 0 \\ \text{et } \sum_{p=1}^N \lambda^p \cdot \sin(k t_p) = 0 \end{array} \right.$$

... si et seulement si les coefficients  $(\lambda^1, \dots, \lambda^N)$  sont tous nuls. En d'autres termes, ceci implique que la matrice  $[\Theta]$  définie ci-dessous est de rang  $N$  :

$$[\Theta] = \begin{array}{c} \xrightarrow{N} \\ \begin{bmatrix} \cos 0t_1 & \cos 0t_2 & \dots & \cos 0t_N \\ \sin 0t_1 & \sin 0t_2 & \dots & \sin 0t_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos kt_1 & \cos kt_2 & \dots & \cos kt_N \\ \sin kt_1 & \sin kt_2 & \dots & \sin kt_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos (N-1)t_1 & \cos (N-1)t_2 & \dots & \cos (N-1)t_N \\ \sin (N-1)t_1 & \sin (N-1)t_2 & \dots & \sin (N-1)t_N \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{2N} \end{array}$$

Ceci dit, soit  $[\Theta]$  et  $[\Sigma^2]$  les matrices telles que :

$$[\Theta] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos 0t_1 & \cos 0t_2 & \dots & \cos 0t_N \\ \sin 0t_1 & \sin 0t_2 & \dots & \sin 0t_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos kt_1 & \cos kt_2 & \dots & \cos kt_N \\ \sin kt_1 & \sin kt_2 & \dots & \sin kt_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos Kt_1 & \cos Kt_2 & \dots & \cos Kt_N \\ \sin Kt_1 & \sin Kt_2 & \dots & \sin Kt_N \end{bmatrix} ; \quad [\Sigma^2] = \begin{bmatrix} |\sigma_0|^2 & & & & \\ & |\sigma_1|^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & |\sigma_k|^2 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & |\sigma_k|^2 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & |\sigma_K|^2 \\ & & & & & & & & |\sigma_K|^2 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{N} \quad \quad \quad \xrightarrow{2K+2} \end{array}$$

Compte tenu que sous les hypothèses (T4') les coefficients

$\{ |\sigma_k|^2 \}_{k=0}^{k=N}$  sont tous différents de zéro, on est assuré que la matrice  $[\Sigma^2]$  est de rang  $(2K + 2)$ ; d'autre part, puisque sous les hypothèses (T4') on a également  $K \geq N - 1$ , il s'en suit que  $[\Theta]$  est une sous-matrice de  $[\Theta]$  ce qui nous permet d'affirmer que  $[\Theta]$  est de rang  $N$  puisque nous savons que  $[\Theta]$  est elle-même de rang  $N$ .

Ceci dit, pour démontrer que sous les conditions (T4') la famille  $\{ f(\omega, \cdot) \}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mu$ - libre, il nous suffit de montrer que la matrice  $[\Gamma]$  définie ci-dessous est de rang  $N$ :

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{21} & \dots & \Gamma_{N1} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{1N} & \Gamma_{2N} & \dots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix}$$

avec  $\forall \begin{cases} t_i \in T \\ t_j \in T \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{ij} = \sum_{k=0}^K |\sigma_k|^2 \cdot \cos [k(t_i - t_j)]$

Par des calculs élémentaires, on vérifie facilement que l'on a ...

$$[\Gamma] = [\Theta]^t \cdot [\Sigma^2] \cdot [\Theta]$$

... d'où l'on déduit que  $[\Gamma]$  est effectivement de rang  $N$  sous les hypothèses (T4') et que par conséquent la famille  $\{ f(\omega, \cdot) \}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mu$ - libre.

b) Cas des fonctions aléatoires de plusieurs variables

La proposition précédente s'étend sans difficulté au cas des fonctions aléatoires définies sur  $[(\Omega, \mathcal{A}) \times T]$  où  $T$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple, si  $T$  appartient à  $\mathbb{R}^2$ , si  $(t^1, t^2)$  désignent les composantes d'un vecteur  $t$  appartenant à  $T$  et si  $f(\omega, t) \equiv f(\omega | t^1, t^2)$  est telle que ...

$$\forall \begin{cases} \omega \in \Omega \\ t \in T \end{cases} \Rightarrow f(\omega, t) = \sum_{k=0}^K \left\{ C_k(\omega, t^2) \cdot \cos(kt^1) + S_k(\omega, t^2) \cdot \sin(kt^1) \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_k(\omega, t^2) &= \sum_{h=0}^H \left\{ A_{kh}^C(\omega) \cdot \cos(ht^2) + B_{kh}^C(\omega) \cdot \sin(ht^2) \right\} \\ S_k(\omega, t^2) &= \sum_{h=0}^H \left\{ A_{kh}^S(\omega) \cdot \cos(ht^2) + B_{kh}^S(\omega) \cdot \sin(ht^2) \right\} \end{aligned} \right\} \quad \forall (k, t^2)$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} E \{ |A_{kh}^*|^2 \} &= E \{ |B_{kh}^*|^2 \} = \sigma_{kh}^2 < +\infty & \forall k, h \\ E \{ A_{kp}^* \cdot \bar{B}_{hq}^* \} &= E \{ B_{kp}^* \cdot \bar{A}_{hq}^* \} = 0 & \forall (k, h, p, q) \\ E \{ A_{kp}^* \cdot \bar{A}_{hq}^* \} &= E \{ B_{kp}^* \cdot \bar{B}_{hq}^* \} = 0 & \forall (k \neq h \text{ et } p \neq q) \end{aligned} \right.$$

N.B. les caractères "\*" dans les expressions ci dessus doivent être remplacés par les lettres "c" ou "s"

... alors  $f$  vérifie les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} f(\omega, \cdot) &\in \mathcal{E}(T, \mathbb{C}) \quad \mu\text{-p.p.} \\ \forall t \in T &\Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ \forall t \in T &\Rightarrow E\{f(\cdot, t)\} = 0 \end{aligned} \right.$$

De plus, dans ces conditions,  $f$  possède une fonction d'auto-corrélation telle que :

$$\forall \begin{cases} t_1 \in T \\ t_2 \in T \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1^1, t_1^2 | t_2^1, t_2^2) = \sum_{k=0}^K \sum_{h=0}^H \left\{ \sigma_{kh}^2 \cdot \cos[k(t_1^1 - t_2^1)] \cdot \cos[h(t_1^2 - t_2^2)] \right\}$$

III-5.5 - Généralisation des exemples présentés au paragraphe III-5.4

a) Introduction

Comme nous l'avons fait au sujet des fonctions interpolables, nous nous proposons de généraliser les exemples de bruit présentés au paragraphe III-5.4. Pour ce faire, nous utiliserons une nouvelle fois la notion de produit tensoriel de deux

matrices et nous conserverons les conventions d'écriture adoptées au paragraphe III-4.4-b

b) Proposition

Énoncé

Soit  $T$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé et  $f$  une fonction aléatoire définie sur  $[(\Omega, \mathcal{A}) \times T]$  par la relation suivante où chaque matrice  $[C(\omega, \vec{k})]$  est une matrice ligne aléatoire comportant  $(2)^n$  éléments :

$$\left[ \begin{array}{l} \forall \left. \begin{array}{l} \omega \in \Omega \\ \vec{t} \in T \end{array} \right\} \Rightarrow f(\omega, \vec{t}) = \sum_{\vec{k} \in K} \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j t^j), \sin(k^j t^j)] \right) \cdot [C(\omega, \vec{k})]^t \\ \\ \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \forall \vec{k} \in K \Rightarrow E\{ [C(\omega, \vec{k})] \} = [0] \\ \forall \left. \begin{array}{l} \vec{k} \in K \\ \vec{h} \in K \end{array} \right\} \Rightarrow E\{ [C(\omega, \vec{k})]^t \cdot \overline{[C(\omega, \vec{h})]} \} = \begin{cases} [0] & \text{si } \vec{k} \neq \vec{h} \\ \sigma^2(\vec{k}) \cdot [I] & \text{si } \vec{k} = \vec{h} \end{cases} \\ \forall \vec{k} \in K \Rightarrow \sigma^2(\vec{k}) < +\infty \end{array} \right.$$

Dans ces conditions,  $f$  est telle que ...

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\omega, \cdot) \in \mathcal{E}(T, \mathbb{C}) \quad \mu\text{-p.p.} \\ \forall t \in T \Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ \forall t \in T \Rightarrow E\{f(\cdot, t)\} = 0 \end{array} \right.$$

... et admet pour fonction d'auto-corrélation la fonction suivante :

$$\forall \left. \begin{array}{l} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \end{array} \right\} \in T \Rightarrow \Gamma_{ff}(\vec{t}_1, \vec{t}_2) = \sum_{\vec{k} \in K} \sigma^2(\vec{k}) \cdot \left( \prod_{j=1}^n \cos[k^j(t_1^j - t_2^j)] \right)$$

Enfin, si  $T$  est un ensemble discret de  $N$  points appartenant à  $\mathbb{R}^n$  tels que ...

$$\left[ \begin{array}{l} T = T^1 \times T^2 \times \dots \times T^n \\ N = N^1 \cdot N^2 \cdot \dots \cdot N^n \\ \\ \text{avec : } \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T^j \equiv \{ \tau_1^j, \tau_2^j, \dots, \tau_{N^j}^j \} \\ \tau_p^j \neq \tau_q^j \text{ si } p \neq q \\ 0 < \tau_p^j < 2\pi \end{array} \right. \end{array} \right.$$

... et si de plus on a ...

$$\left\{ \begin{array}{l} K = K^1 \times K^2 \times \dots \times K^n \\ \text{avec : } \forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K^j \equiv \{ 0, 1, \dots, N^j \} \\ K^j \geq N^j - 1 \end{array} \right. \\ \forall \vec{k} \in K \Rightarrow \sigma^2(\vec{k}) \neq 0 \end{array} \right.$$

... alors la famille  $\{ f(\omega, \cdot) \}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mu$ -libre.

Démonstration

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ff}(\vec{t}_1, \vec{t}_2) &= E\{ f(\omega, \vec{t}_1) \cdot \overline{f(\omega, \vec{t}_2)} \} \\ &= \sum_{\vec{k} \in K} \sum_{\vec{h} \in K} \left\{ \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j t_1^j), \sin(k^j t_1^j)] \right) \right. \\ &\quad \cdot E\{ [C(\omega, \vec{k})]^t \cdot \overline{[C(\omega, \vec{h})]} \} \\ &\quad \left. \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(h^j t_2^j), \sin(h^j t_2^j)] \right)^t \right\} \end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses, on a donc :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ff}(\vec{t}_1, \vec{t}_2) &= \sum_{\vec{k} \in K} \left\{ \sigma^2(\vec{k}) \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j t_1^j), \sin(k^j t_1^j)] \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j t_2^j), \sin(k^j t_2^j)] \right)^t \right\} \\ &= \sum_{\vec{k} \in K} \left\{ \sigma^2(\vec{k}) \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\cos(k^j t_1^j), \sin(k^j t_1^j)] \cdot [\cos(k^j t_2^j), \sin(k^j t_2^j)]^t \right) \right\} \\ &= \sum_{\vec{k} \in K} \left\{ \sigma^2(\vec{k}) \cdot \left( \prod_{j=1}^n \cos[k^j(t_1^j - t_2^j)] \right) \right\} \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\forall \vec{t} \in T \Rightarrow \int_{\Omega} |f(\omega, \vec{t})|^2 \cdot \mu(d\omega) = \Gamma_{ff}(\vec{t}, \vec{t}) = \sum_{k \in K} \sigma^2(k) < +\infty$$

Il s'en suit que  $f(\cdot, \vec{t})$  appartient à  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  quel que soit  $t \in T$  :

$$\forall \vec{t} \in T \Rightarrow f(\cdot, \vec{t}) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

a bien :

Enfin, compte tenu des hypothèses on vérifie immédiatement que l'on

$$\begin{cases} f(\omega, \cdot) \in \mathcal{E}(T, \mathbb{C}) & \mu\text{-p.p.} \\ \forall \vec{t} \in T \Rightarrow E\{f(\cdot, \vec{t})\} = 0 \end{cases}$$

Ceci étant dit, posons :

$$[\Theta^j] = \begin{bmatrix} \cos 0 \tau_1^j & \cos 0 \tau_2^j & \dots & \cos 0 \tau_{N^j}^j \\ \sin 0 \tau_1^j & \sin 0 \tau_2^j & \dots & \sin 0 \tau_{N^j}^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos k^j \tau_1^j & \cos k^j \tau_2^j & \dots & \cos k^j \tau_{N^j}^j \\ \sin k^j \tau_1^j & \sin k^j \tau_2^j & \dots & \sin k^j \tau_{N^j}^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos k^j \tau_1^j & \cos k^j \tau_2^j & \dots & \cos k^j \tau_{N^j}^j \\ \sin k^j \tau_1^j & \sin k^j \tau_2^j & \dots & \sin k^j \tau_{N^j}^j \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ 2K^j + 2 \\ \downarrow \end{array}$$

$\xleftarrow{N^j}$

On peut vérifier en développant les calculs que la matrice  $[\Gamma]$  telle que ...

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{1N} & \Gamma_{2N} & \dots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix}$$

avec  $\forall \begin{cases} \vec{t}_p \in T \\ \vec{t}_q \in T \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{pq} = \sum_{k \in K} \left\{ \sigma^2(k) \cdot \left( \prod_{j=1}^n \cos[k^j (t_p^j - t_q^j)] \right) \right\}$

... peut s'écrire sous la forme suivante où  $[\Sigma^2]$  est une matrice diagonale de taille  $\left\{ 2^n \cdot \prod_{j=1}^n (K^j + 1) \right\} \times \left\{ 2^n \cdot \prod_{j=1}^n (K^j + 1) \right\}$  contenant sur sa diagonale les éléments  $\sigma^2(k)$ , chacun d'eux étant répété  $2^n$  fois :

$$[\Gamma] = \left( \bigotimes_{j=1}^n [\Theta^j]^t \right) \cdot [\Sigma^2] \cdot \left( \bigotimes_{j=1}^n [\Theta^j] \right)$$

Mais, d'après les résultats obtenus au cours de la deuxième partie de la démonstration relative à la proposition III-5.4-a, et compte tenu des hypothèses ...

$$\forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow \begin{cases} K^j \geq N^j - 1 \\ \tau_p^j \neq \tau_q^j \text{ si } p \neq q \\ 0 < \tau_p^j < 2\pi \end{cases}$$

... on est assuré que :

$$\forall j = (1, \dots, n) \Rightarrow [\Theta^j] \text{ est de rang } N^j$$

Il s'en suit, d'après la propriété n°8 du produit tensoriel, que l'on a :

$$\left( \bigotimes_{j=1}^n [\Theta^j] \right) \text{ est de rang } N = N^1 \cdot N^2 \cdot \dots \cdot N^n$$

On en conclut que la famille  $\{ f(\omega, \cdot) \}_{\omega \in \Omega}$  est  $\mu$ - libre puisque l'on peut alors écrire les implications suivantes :

$$\left\{ \forall k \in K \Rightarrow \sigma^2(k) \neq 0 \right\} \Rightarrow [\Sigma^2] \text{ est de rang } \left\{ 2^n \cdot \prod_{j=1}^n (K^j + 1) \right\}$$

$$\Rightarrow [\Gamma] \text{ est de rang } N$$

### III-6 - APPLICATIONS PRATIQUES

#### III-6.1 - Aspect informatique des méthodes proposées

##### a) Contraintes technologiques

Les méthodes qui viennent d'être présentées ne sont pratiquement exploitables que si l'on utilise un ordinateur. Un ordinateur étant par construction un automate fini qui, étant donné deux nombres est capable de les comparer, de les additionner, de les soustraire, de les multiplier ou de diviser l'un par l'autre, cela implique deux choses :

1°) Chaque fois que nous rencontrons une intégrale du type...

$$\int_{\Sigma} \gamma(s) \cdot m(ds)$$

... celle-ci ne sera calculable sur ordinateur que si l'on peut la remplacer par une somme finie puisque la mémoire de l'ordinateur est finie. Pour qu'il en soit effectivement ainsi, il est nécessaire que  $\Sigma$  soit un ensemble discret fini dénombrable de  $\nu$  points et que la mesure  $m$  soit de la forme suivante où les  $\nu$  coefficients  $a_s$  sont des constantes complexes données et  $\delta_s(ds)$  la mesure de Dirac au point  $s \in \Sigma$  :

$$m(ds) = \sum_{s \in \Sigma} a_s \cdot \delta_s(ds)$$

Si d'aventure  $\Sigma$  et  $m$  ne sont pas a priori de la forme sus-dite, nous sommes alors en général obligés de choisir un ensemble  $\Sigma^*$  de  $\nu$  points  $s^*$  répartis sur  $\Sigma$  et un ensemble de  $\nu$  constantes complexes  $a_{s^*}^*$  de façon à approcher  $m$  par une mesure  $m^*$  de la forme requise :

$$m^*(ds) = \sum_{s^* \in \Sigma^*} a_{s^*}^* \cdot \delta_{s^*}(ds)$$

2°) Il existe une erreur d'arrondi due au fait qu'un ordinateur ne calcule que sur des nombres rationnels possédant un nombre fini de chiffres significatifs. L'influence de cette erreur sur les méthodes mathématiques utilisées est difficilement estimable à l'heure actuelle et la seule technique permettant de juger raisonnablement de la "qualité informatique" d'une méthode ne peut être qu'une technique expérimentale ; c'est le point de vue que nous adopterons dans ce qui suit.

##### b) Conséquences pratiques

Du point de vue pratique, puisque l'on ne sait traiter sur ordinateur que des problèmes en dimension finie, il s'en suit que le compact  $T$  sera toujours supposé être un ensemble fini dénombrable de  $N$  points. Cela implique en particulier que l'on pourra utiliser la forme discrète des diverses propositions fondamentales présentées respectivement aux paragraphes suivants :

- III-3.1-b  $\rightarrow$  pour l'approximation en  $\mu$ - moyenne quadratique
- III-4.1-c  $\rightarrow$  pour l'interpolation en  $\mu$ - moyenne quadratique
- III-5.1-c  $\rightarrow$  pour le filtrage statistique

Ce faisant, on constate qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'interpolation en  $\mu$ - moyenne quadratique ou la méthode de filtrage statistique soient applicables est que la matrice  $[\Gamma]$  telle que ...

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \dots & \Gamma_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } \forall \begin{Bmatrix} t_i \\ t_j \end{Bmatrix} \in T \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{ij} = \Gamma_{ff}(t_i, t_j) \text{ pour le filtrage statistique} \\ \Gamma_{ij} = \Gamma_{ff}^c(t_i, t_j) \text{ pour l'interpolation} \end{cases}$$

... soit inversible. Il s'en suit donc que chaque fois que nous utiliserons une de ces deux méthodes dans une application pratique, il sera sous-entendu qu'avant toute chose on a le cas échéant vérifié (numériquement) que le déterminant de la matrice  $[\Gamma]$  n'est pas égal à 0 (aux erreurs de chute près).

III-6.2 - Premier exemple

a) Présentation

Cet exemple destiné à tester notre méthode d'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique est extrait d'une application pratique que nous avons été amené à traiter. Il s'agit d'estimer sur un segment  $D = [0, 2\pi]$  donné dans  $\mathbb{R}$ , les variations d'une fonction réelle  $F$  dont on ne connaît à priori que les valeurs numériques  $F(t_i)$  aux points d'un ensemble  $S \equiv \{t_p\}_{p=1}^{p=M}$  de  $M = 20$  points d'échantillonnage distincts répartis sur  $D$  comme l'indique la figure 1-B.

b) Mise en oeuvre

1°) Dans un premier temps, nous avons construit le polynôme trigonométrique ...

$$F^*(t) = a_0^* + \sum_{k=1}^{K=8} \left\{ a_k^* \cdot \cos(kt) + b_k^* \cdot \sin(kt) \right\}$$

... approchant  $F$  au sens des moindres carrés sur  $D$  et dont on trouvera le graphe représenté en pointillés sur la figure 1-B. On constate expérimentalement que les  $K = 8$  coefficients  $(|a_k^*|^2 + |b_k^*|^2)$  sont tous significativement différents de zéro.

2°) Dans un deuxième temps, nous nous sommes donnés 100 points  $t_0(q)$  répartis sur  $D$  et tels que :

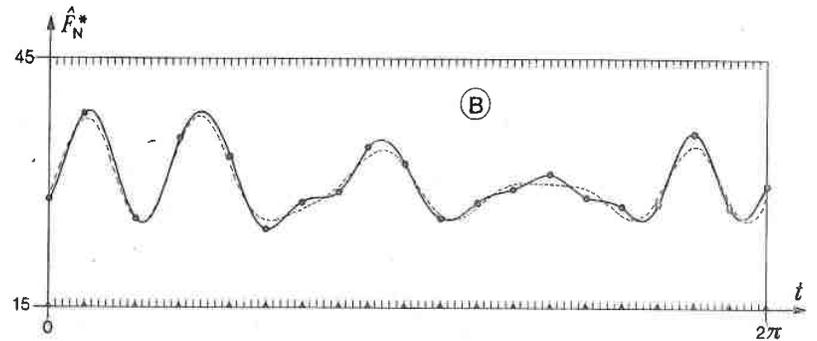
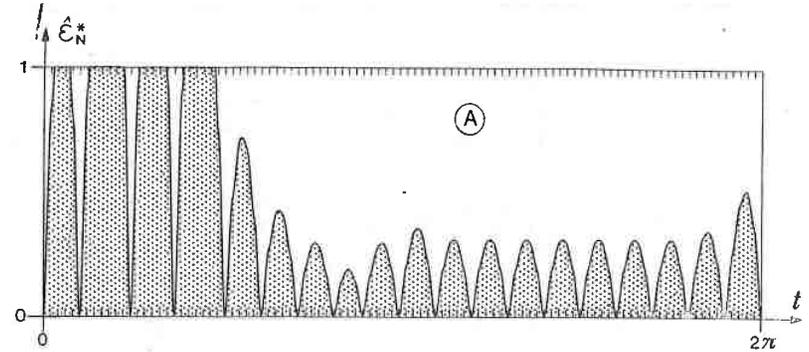
$$\forall q = (0, \dots, 99) \Rightarrow t_0(q) = q \cdot \frac{2\pi}{99}$$

Ensuite, pour chacun de ces points, nous avons calculé l'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique  $\hat{F}_N^*(t_0(q))$  et l'erreur quadratique moyenne associée  $\hat{E}_N^*(t_0(q))$  en prenant chaque fois pour compact  $T$ , l'ensemble  $T_N(q)$  des  $N = 6$  points plus proches voisins de  $t_0(q)$  choisis dans l'ensemble  $S$  et en posant :

$$\left[ \begin{array}{l} \Omega \equiv [-\pi, +\pi] \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{D}_\Omega \\ \mu(dw) = \frac{1}{2\pi} \cdot dw \\ F^* = \text{solution initiale} \end{array} \right.$$

Ce faisant, nous avons obtenu deux suites de nombres ...

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \hat{F}_N^*(t_0(q)) \right\}_{q=0}^{q=99} \\ \left\{ \hat{E}_N^*(t_0(q)) \right\}_{q=0}^{q=99} \end{array} \right.$$

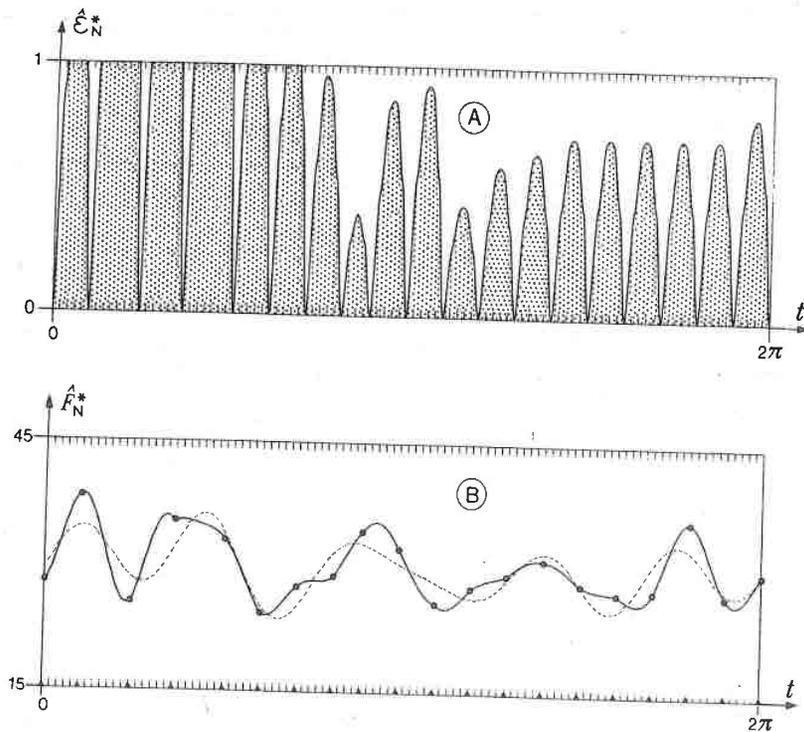


- valeurs  $F(t)$  observées aux points d'échantillonnage
- ▲ points d'échantillonnage  $t_i$
- graphe de l'interpolation  $\hat{F}_N^*$
- - - graphe de la solution initiale  $F^*$

Figure 1

Exemple d'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique d'une fonction  $F$  connue par ses valeurs numériques  $F(t)$  observées en  $M = 20$  points d'échantillonnage  $\{t_i\}$  répartis sur le segment  $[0, 2\pi]$ .

Les valeurs  $\hat{F}_N^*[t_0(q)]$  et  $\hat{E}_N^*[t_0(q)]$  en tout point  $t_0(q) = q \cdot \frac{2\pi}{99}$  ont été calculées à partir des  $N = 6$  plus proches voisins choisis dans  $\{t_i\}$  et en prenant pour solution initiale  $F^*$  un polynôme trigonométrique tel que  $K = 8$ .



- valeurs  $F(t)$  observées aux points d'échantillonnage
- ▲ points d'échantillonnage  $t_i$
- graphe de l'interpolation  $\hat{F}_N^*$
- - - graphe de la solution initiale  $F^*$

Figure 2

Exemple d'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique d'une fonction  $F$  connue par ses valeurs numériques  $F(t)$  observées en  $M = 20$  points d'échantillonnage  $\{t_i\}$  répartis sur le segment  $[0, 2\pi]$ .

Les valeurs  $\hat{F}_N^* [t_0(q)]$  et  $\hat{E}_N^* [t_0(q)]$  en tout point  $t_0(q) = q \cdot \frac{2\pi}{99}$  ont été calculées à partir des  $N = 4$  plus proches voisins choisis dans  $\{t_i\}$  et en prenant pour solution initiale  $F^*$  un polynôme trigonométrique tel que  $K = 6$ .

... représentant respectivement les ordonnées de 100 points situés sur le graphe des fonctions  $\hat{F}_N^*$  et  $\hat{E}_N^*$  au droit des 100 points d'abscisse  $t_0(q) = q \cdot \frac{2\pi}{99}$

3° Dans un dernier temps, et afin de visualiser  $\hat{F}_N^*$  et  $\hat{E}_N^*$ , nous avons relié par des arcs de cubique (suivant la technique des fonctions splines) chacune des deux suites de 100 points définissant respectivement le graphe de  $\hat{F}_N^*$  et  $\hat{E}_N^*$ . On trouvera le résultat final sur la figure 1-B où le graphe de  $\hat{F}_N^*$  est représenté en trait fort, et sur la figure 1-A où l'on a représenté le graphe de  $\hat{E}_N^*$  avec une échelle des ordonnées beaucoup plus grande de façon à mieux mettre en évidence les variations de cette dernière fonction.

c) Remarque

Afin de se faire une idée de l'influence des paramètres  $K$  et  $N$  sur les courbes  $\hat{F}_N^*$  et  $\hat{E}_N^*$ , nous présentons sur les figures 2-A et 2-B des résultats analogues à ceux des figures 1-A et 1-B, mais obtenus cette fois avec  $K = 6$  et  $N = 4$ .

III-6.3 - Deuxième exemple

a) Présentation

Dans ce deuxième exemple, nous nous proposons de tester la technique de filtrage statistique dans le cas où  $T = [0, 0.5]$  est un segment de  $\mathbb{R}$  et la fonction aléatoire  $g(\omega, t)$  à filtrer une fonction telle que ...

$$g(\omega, t) = m(t) + f(\omega, t)$$

$$avec : \begin{cases} m(t) = \sum_{j=1}^3 \alpha^j \cdot t^{j-1} \\ f(\omega, t) = \sum_{k=0}^K \left\{ A_k(\omega) \cdot \cos(kt) + B_k(\omega) \cdot \sin(kt) \right\} \end{cases}$$

... où  $\omega$  est un événement élémentaire pris dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . En supposant que les variables aléatoires  $\{A_k\}_{k=0}^K$  et  $\{B_k\}_{k=0}^K$  sont deux à deux orthogonales et telles que ...

$$\forall k \Rightarrow \begin{cases} E\{A_k\} = E\{B_k\} = 0 \\ A_k \text{ a pour écart type } \sigma_k < +\infty \\ B_k \text{ a pour écart type } \sigma_k < +\infty \end{cases}$$

... On sait alors, d'après la proposition III-5.4-a que  $f$  vérifie les relations suivantes:

$$\begin{cases} f(\omega, \cdot) \in \mathcal{C}(T, \mathbb{C}) \text{ } \mu\text{-p.s.} \\ \forall t \in T \Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \\ \forall \begin{cases} t_1 \in T \\ t_2 \in T \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^K (\sigma_k)^2 \cdot \cos [k(t_1 - t_2)] \end{cases}$$

b) Construction d'un exemple numérique

Choix de  $K$  et des coefficients  $\sigma_k$

Très souvent dans les applications pratiques, la fonction d'auto-corrélation  $\Gamma_{ff}$  est obtenue expérimentalement et a une allure Gaussienne :

$$\begin{cases} \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \simeq \Gamma_0 \cdot \exp \left\{ -\frac{|t_1 - t_2|^2}{2 S^2} \right\} \\ \text{avec } \Gamma_0 > 0 \end{cases}$$

Les coefficients  $\Gamma_0$  et  $S$  étant donnés, on peut toujours (pour peu que  $K$  soit suffisamment grand) choisir les coefficients  $\sigma_k$  de façon que l'on ait :

$$\Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \sum_{k=0}^K (\sigma_k)^2 \cdot \cos [k(t_1 - t_2)] \simeq \Gamma_0 \cdot \exp \left\{ -\frac{|t_1 - t_2|^2}{2 S^2} \right\}$$

Pour cela, si  $T$  appartient au segment  $]0, \pi]$ , nous préconisons d'interpoler la fonction  $\Gamma_0 \cdot \exp \left\{ -\theta^2 / (2 S^2) \right\}$  par le polynôme trigonométrique  $\sum_{k=0}^K (\sigma_k)^2 \cos k\theta$ . Par exemple, si on prend pour support d'interpolation une suite de  $(K+1)$  points  $\theta_h$  répartis sur  $]0, \pi]$  et tels que ...

$$\forall h = (0, 1, \dots, K) \Rightarrow \theta_h = \frac{(2h+1)\pi}{2(K+1)}$$

... on obtient les coefficients  $(\sigma_k)^2$  suivants dont on peut vérifier par des calculs élémentaires qu'ils sont bien positifs :

$$\begin{cases} (\sigma_0)^2 = \frac{\Gamma_0}{K+1} \cdot \sum_{h=0}^K \exp \left\{ -\frac{\theta_h^2}{2S^2} \right\} \\ (\sigma_k)^2 = \frac{2 \cdot \Gamma_0}{K+1} \sum_{h=0}^K \exp \left\{ -\frac{\theta_h^2}{2S^2} \right\} \cdot \cos (k \cdot \theta_h) \quad \forall h \neq 0 \end{cases}$$

En opérant de cette façon avec  $K = 99$ ,  $\Gamma_0 = 0.0625$  et  $S = 0.025$  nous avons obtenu la fonction  $\Gamma(\theta)$  telle que ...

$$\Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \Gamma(t_1 - t_2)$$

... et dont on trouvera le graphe représenté sur la figure 3.

Choix de  $m(t)$  et discrétisation de  $T$

Afin de pouvoir traiter un exemple numérique sur ordinateur, nous avons choisi une fonction  $m(t)$  dont les coefficients  $a^i$  sont les suivants :

$$\begin{cases} a^1 = 1. \\ a^2 = -8. \\ a^3 = 16. \end{cases}$$

Ceci dit, compte tenu des contraintes technologiques évoquées au paragraphe III-6.1, nous avons été obligés de remplacer  $T$  par une suite finie  $T^*$  de  $N$  points distincts répartis sur  $T$  de façon que les intégrales suivantes se réduisent à des sommes finies :

$$\begin{cases} \int_T \int_T \Gamma_{ff}(t_1, t_2) \cdot \mathcal{V}_i(dt) \cdot \overline{\mathcal{V}_j(dt)} \dots \quad \forall (i, j) \\ \int_T \Gamma_{ff}(\cdot, t) \cdot \overline{\mathcal{V}_j(dt)} \dots \quad \forall j \\ \int_T g(\omega, t) \cdot \mathcal{V}_i(dt) \dots \quad \forall i \end{cases}$$

Nous supposons donc à partir de maintenant que  $N = 20$  et que  $T$  est remplacé dans les calculs numériques par une suite finie  $T^*$  telle que :

$$T^* = \left\{ (0, \varepsilon) \cdot \frac{i}{N} \right\}_{i=1}^{i=N}$$

Ce faisant, on ne manquera pas de remarquer que puisque  $T^*$  est inclus dans  $]0, 2\pi[$  et que  $K \geq N$ , alors compte tenu de la proposition III-5.4-a et des résultats exposés aux paragraphes III-5.1-b et III-5.1-c, on est assuré de l'existence de solutions à notre problème.

c) Résultats obtenus

Construction numérique des réalisations de  $g(\omega, t)$

Nous avons construit numériquement 30 trajectoires  $\{g(\omega_i, \cdot)\}_{i=1}^{i=30}$  en associant à chaque  $\omega_i$  des réalisations  $\{A_k(\omega_i)\}_{i=1}^{i=30}$  et  $\{B_k(\omega_i)\}_{i=1}^{i=30}$  extraites de tables de "nombres au hasard" suivant des lois normales de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_k$ . A titre d'exemple, on trouvera sur la figure 4 un certain nombre de ces trajectoires dessinées en trait fin, ainsi que la valeur moyenne  $m(t)$  dessinée en trait fort.

Filtrage statistique des trajectoires

Nous avons appliqué à chacune des 30 trajectoires  $\{g(\omega_i, \cdot)\}_{i=1}^{i=30}$  ainsi construites la technique de filtrage présentée au paragraphe III-5. Ce faisant, à chaque expérience  $\omega_i$ , nous avons obtenu une réalisation  $[\hat{A}(\omega_i)]$  de la variable aléatoire matricielle  $[\hat{A}(\omega)]$  telle que ...

$$[\hat{A}(\omega)] = \begin{bmatrix} \hat{a}^1(\omega) \\ \hat{a}^2(\omega) \\ \hat{a}^3(\omega) \end{bmatrix}$$

... ce qui nous a permis de construire les trajectoires correspondantes de la fonction aléatoire filtrée  $\hat{g}(\omega, \cdot)$  :

$$\forall t \in T \Rightarrow \hat{g}(\omega, t) = \sum_{i=1}^3 \hat{a}^i(\omega) \cdot t^{i-1}$$

On pourra se faire une idée concrète de l'efficacité du filtrage ainsi réalisé en observant la figure 5 où sont dessinées les trajectoires correspondant au filtrage des quelques réalisations  $g(\omega_i, \cdot)$  représentées sur la figure 4.

Notons enfin que la méthode de filtrage présentée nous permet de préciser a priori la position relative des diverses fonctions  $\{\hat{g}(\omega_i, \cdot)\}_{i=1}^{i=30}$ ; en effet, on sait que l'on a ...

$$\forall t \in T \Rightarrow E \{ |\hat{g}(\cdot, t) - m(t)|^2 \} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 G^{ij} \cdot t^{i-1} \cdot t^{j-1}$$

... où les éléments  $G^{ij}$  sont les composantes de la matrice  $[G]^{-1}$  obtenue comme résultat intermédiaire au cours des calculs et telle que :

$$[G]^{-1} = E \{ \{\hat{a}^i(\cdot) - \hat{a}^i\} \cdot \{\hat{a}^j(\cdot) - \hat{a}^j\} \}$$

A ce sujet, on ne manquera pas de comparer la figure 5 avec la figure 6 sur laquelle on a dessiné en pointillé le graphe des fonctions  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  telles que :

$$\forall t \in T \Rightarrow \begin{cases} S_1(t) = m(t) - 2 \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 G^{ij} \cdot t^{i-1} \cdot t^{j-1} \\ S_2(t) = m(t) + 2 \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 G^{ij} \cdot t^{i-1} \cdot t^{j-1} \end{cases}$$

Contrôle statistique de la méthode

En faisant la moyenne des matrices  $[\hat{A}(\omega_i)]$  obtenues au cours des 30 tirages successifs, on trouve ...

$$\frac{1}{30} \cdot \sum_{i=1}^{30} \begin{bmatrix} \hat{a}^1(\omega_i) \\ \hat{a}^2(\omega_i) \\ \hat{a}^3(\omega_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9904 \\ -7.8866 \\ 16.7564 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1. \\ -8. \\ 16. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

... Ce qui est très proche des véritables valeurs des coefficients  $a^j$  ainsi que cela était prévu par la théorie. De même, en calculant sur les mêmes réalisations la matrice  $[\hat{G}]^{-1}$  des covariances "statistiques" relatives aux coefficients  $\hat{a}^j(\omega)$ , on s'aperçoit que celle-ci est elle-même peu différente de la matrice  $[G]^{-1}$  des covariances "vraies" fournies par la théorie :

$$[\hat{G}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0083 & -0.0567 & 0.0845 \\ -0.0567 & 0.5825 & -1.0295 \\ 0.0845 & 1.0295 & 1.9804 \end{bmatrix}$$

$$[G]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0085 & -0.0553 & 0.0797 \\ -0.0553 & 0.5492 & -0.9423 \\ 0.0797 & -0.9423 & 1.7499 \end{bmatrix}$$

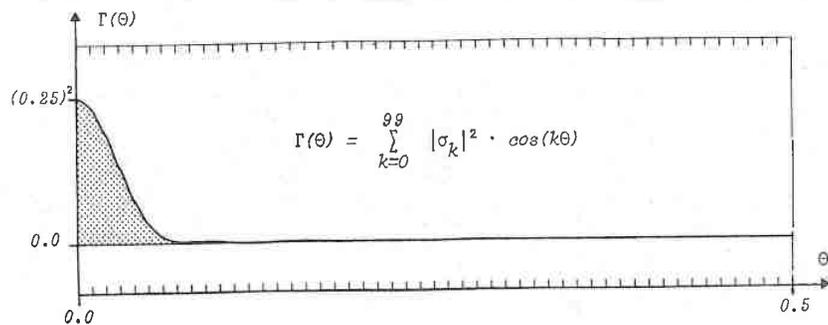


Figure 3

Graph of the function  $\Gamma(\theta)$  defined in paragraph III-6.3-b

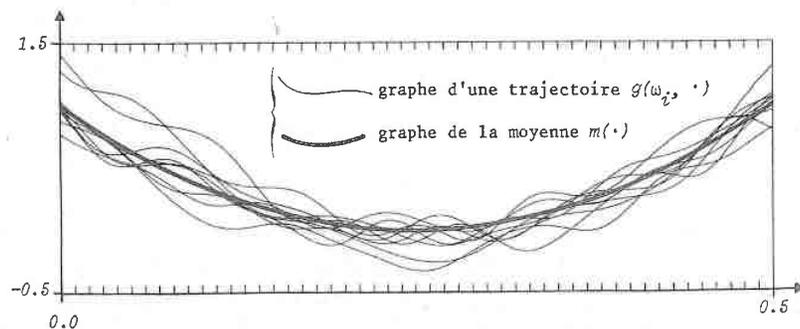


Figure 4

Representation of some trajectories of the random function  $g(\omega, t) = m(t) + f(\omega, t)$  defined in paragraphs III-6.3-a and III-6.3-b. Recall that the random function  $f(\omega, t)$  has zero mean and admits an autocorrelation function  $\Gamma_{ff}$  deduced from the function  $\Gamma(\theta)$  represented in Figure 3 by the relation  $\Gamma_{ff}(t_1, t_2) = \Gamma(t_1 - t_2)$ .

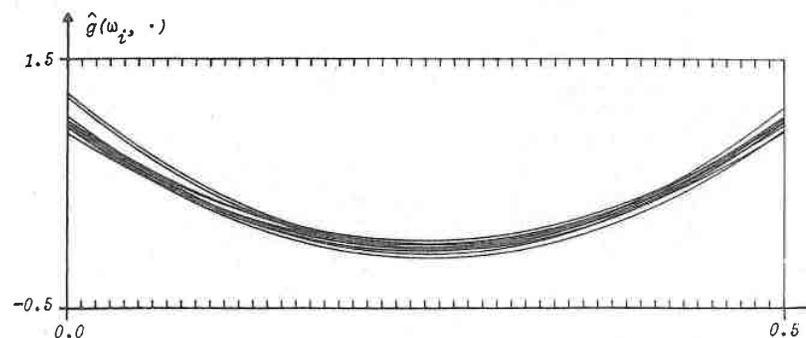


Figure 5

Graph of the trajectories  $\hat{g}(\omega_i, \cdot)$  obtained after statistical filtering of the trajectories  $g(\omega_i, \cdot)$  represented in Figure 4.

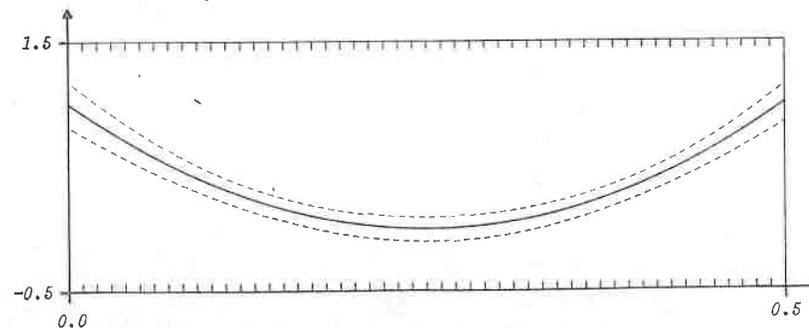


Figure 6

On this figure, the mean function  $m(t)$  is shown in solid lines, and the confidence intervals  $S_1(t) = m(t) - 2\sigma(t)$  and  $S_2(t) = m(t) + 2\sigma(t)$  are shown in dashed lines, where  $\sigma(t)$  is a function such that  $\{\sigma(t)\}^2 = E\{|\hat{g}(\omega, t) - m(t)|^2\}$ . By comparing Figures 5 and 6, one can see that practically all the functions  $\hat{g}(\omega_i, \cdot)$  drawn are such that for all  $t \in [0, 0.5]$  one has:  $S_1(t) < \hat{g}(\omega_i, t) < S_2(t)$ .

### III-6.4 - Troisième exemple

#### a) Présentation

##### Introduction

Afin d'illustrer les possibilités de l'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique appliquée à la cartographie automatique numérique, nous nous proposons d'utiliser cette méthode pour cartographier un morceau de la topographie de la banlieue de Nancy, et ceci à partir d'une information volontairement très limitée. La zone qui a été choisie est située au Nord-Est de la ville, au lieu-dit "Butte Sainte-Geneviève" et correspond à un domaine carré  $\mathcal{D}$  tel que ...

$$\forall \begin{cases} x \\ y \end{cases} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 885 \leq x \leq 887 \\ 119 \leq y \leq 121 \end{cases}$$

... où  $x$  et  $y$  désignent les coordonnées géographiques Lambert du point où l'on se trouve. En fait, pour des raisons pratiques qui apparaîtront plus loin, nous effectuerons tout de suite le changement de variable suivant appliquant  $\mathcal{D}$  dans le carré  $D = \left\{ \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}^2$  :

$$\begin{cases} t^1 = \pi \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} + \frac{\pi}{2} \\ t^2 = \pi \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

avec :  $\begin{cases} x_1 = 885 ; x_2 = 887 \\ y_1 = 119 ; y_2 = 121 \end{cases}$

On a donc en définitive :

$$\forall \begin{cases} x \\ y \end{cases} \in \mathcal{D} \xrightarrow{\quad \circ \quad} \begin{cases} t^1 \\ t^2 \end{cases} \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq t^1 \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \leq t^2 \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Le domaine  $D$  ainsi défini a été couvert par un ensemble  $R$  de points situés aux intersections d'un réseau régulier engendré par 20 droites équidistantes parallèles à l'axe des  $t^1$  et 20 droites équidistantes parallèles à l'axe des  $t^2$  ; de plus, aux noeuds  $(t_p^1, t_p^2)$  de ce réseau, on a relevé sur la carte au 1/25.000 l'altitude du sol  $z = F(t^1, t^2)$ .

### Visualisation de $F$ dans le domaine $D$

On trouvera sur la figure 7 un extrait de la carte au 1/25 000 fournie par l'Institut Géographique National (I.G.N.) et correspondant au domaine  $D$  étudié, ainsi que l'échantillonnage de celle-ci aux noeuds du réseau  $R$ .

#### Problème posé

Posons :

$$\left[ \begin{array}{l} T = \left\{ \begin{array}{l} \text{ensemble des } N = 20 \text{ noeuds du réseau } R \\ \text{marqués d'un gros point noir sur la figure 7} \end{array} \right. \\ \Omega = \left\{ \left[ -\pi, +\pi \right] \right\}^2 \\ \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_\Omega \\ \mu(d\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot d\omega^1 \cdot d\omega^2 \end{array} \right.$$

En posant par hypothèse que  $F$  est  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique en tout point  $(t_0^1, t_0^2) \in R$ , nous nous proposons de calculer les interpolations  $\hat{F}^*(t_0^1, t_0^2)$  en ces mêmes points, et ceci compte tenu d'une solution initiale  $F^*$  choisie de façon à être elle aussi  $T$ -interpolable en tout point  $(t_0^1, t_0^2) \in R$ .

#### b) Construction d'une solution initiale

Pour construire la solution initiale  $F^*$ , nous avons procédé en deux temps :

1°) Tout d'abord, nous avons couvert le domaine  $\left\{ \left[ 0, 2\pi \right] \right\}^2$  par un réseau régulier  $\tilde{R}$  tel que :

$$\left[ \begin{array}{l} \tilde{R} = \tilde{R}^1 \times \tilde{R}^2 \\ \text{avec : } \forall j = (1, 2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{R}^j \equiv \tau_0^j, \tau_1^j, \dots, \tau_{2\sqrt{j}}^j \\ \tau_p^j = p \cdot \frac{2\pi}{2\sqrt{j} + 1} \\ \sqrt{j} = 7 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ensuite, en supposant connues les valeurs numériques  $F(\vec{t}_p)$  prises par  $F$  sur  $T$  nous avons calculé aux noeuds de ce réseau les valeurs  $F(\vec{t}_0)$  prises par la fonction  $\tilde{F}$  interpolant  $F$  au sens des filtres autorégressifs (cf. 0-2.2) sachant que, pour ce faire, on a posé a priori :

$$\left[ \begin{array}{l} \phi_f^* = \frac{1}{20} \cdot \sum_{\vec{t}_p \in T} F(\vec{t}_p) \\ |\sigma_f^*|^2 = \frac{1}{20} \cdot \sum_{\vec{t}_p \in T} |F(\vec{t}_p) - \phi_f^*|^2 \\ \rho = \pi/2 \\ \Gamma_{ff}^{c*}(t_1, t_2) = |\sigma_f^*|^2 \cdot \exp \left\{ -\frac{\rho}{2} \cdot \|\vec{t}_1 - \vec{t}_2\|^2 \right\} \end{array} \right.$$

2°) Dans un deuxième temps, en fonction des  $(2\nu + 1)^2 = 225$  valeurs  $\tilde{F}(\vec{t}_0)$  prises par  $\tilde{F}$  sur  $R$  nous avons, suivant la technique présentée au paragraphe III-4.4.-f, construit une fonction  $F^*$  du type suivant ...

$$\left[ \begin{array}{l} F^*(t^1, t^2) = \sum_{k^1=0}^{K^1} \sum_{k^2=0}^{K^2} \left\{ \left( \bigotimes_{j=1}^2 [\cos(k^j t^j), \sin(k^j t^j)] \right) \cdot [C^*(k^1, k^2)] t \right\} \\ \text{avec } \forall j = (1, 2) \Rightarrow K^j = 5 \end{array} \right.$$

... approchant  $\tilde{F}$  au sens des moindres carrés.

En opérant de la sorte, on constate expérimentalement que les matrices  $[C^*(k^1, k^2)]$  sont toutes différentes de  $[0]$  et que  $F^*$  est effectivement  $T$ -interpolable en  $\mu$ -moyenne quadratique.

### c) Visualisation des résultats obtenus

#### Techniques de visualisation

S'il est facile de représenter une fonction d'une seule variable en traçant son graphe, il est par contre beaucoup plus délicat de visualiser les variations d'une fonction de deux variables. Pour cette raison, nous avons été amenés à élaborer

des méthodes de dessin automatique sur traceur de courbes qui, à partir d'un ensemble de valeurs numériques prises par une fonction continue aux noeuds d'un réseau régulier, fournissent des représentations graphiques de cette fonction.

Ces méthodes, dont le détail technique est exposé par ailleurs (cf. J.L. Mallet), se traduisent matériellement par la série de sous-programmes Fortran suivants :

ZØNE	: sous-programme exécutant des cartes en zones hachurées (cf. par exemple fig. 15)
ISØVAL	: sous-programme exécutant des cartes en courbes isovaleurs (cf. par exemple fig. 10)
ISØBLØ	: sous-programme exécutant des blocs diagrammes isométriques (cf. par exemple fig. 11)

Toutes les représentations graphiques qui seront présentées dans ce qui suit ont été obtenues à l'aide de ces sous-programmes.

#### Résultats obtenus

Compte tenu des  $N = 20$  valeurs numériques  $F(\vec{t}_p)$  prises par  $F$  sur  $T$  et compte tenu de la solution initiale  $F^*$  construite au paragraphe III-6.4-b, nous avons pu calculer les valeurs  $\hat{F}^*(\vec{t}_0)$  et  $\hat{e}^*(\vec{t}_0)$  en chacun des 400 noeuds  $\vec{t}_0$  du réseau  $R$ . On trouvera dans les figures suivantes ces valeurs numériques ainsi que leurs visualisations graphiques réalisées à l'aide des sous-programmes ZØNE, ISØVAL et ISØBLØ cités ci-dessus :

Fonction	N° de Figures
$F$	7, 9, 10, 11
$F^*$	8
$\hat{F}^*$	9, 10, 11
$ F^* - \hat{F}^* $	12
$ F - \hat{F}^* $	13, 14, 15
$\hat{e}^*$	13, 14

De plus, on trouvera sur la figure 16 le nuage des points de coordonnées  $\hat{e}^*(\vec{t}_0)$  et  $|F(\vec{t}_0) - \hat{F}^*(\vec{t}_0)|$  obtenus lorsque  $\vec{t}_0$  décrit le réseau  $R$ . Ainsi qu'on pouvait l'espérer "a priori", l'allongement de ce nuage suggère l'existence d'une liaison stochastique entre  $\hat{e}^*(\vec{t}_0)$  et  $|F(\vec{t}_0) - \hat{F}^*(\vec{t}_0)|$  lorsque  $\vec{t}_0$  est tiré au hasard dans le réseau  $R$ . On peut également considérer ce nuage de points sous un autre aspect et construire l'histogramme des fréquences cumulées  $P(\tau | T, F^*)$  observées lorsque  $\vec{t}_0$  parcourt  $R$  et telles que :

$$P(\tau | T, F^*) = P_p \left\{ |F(\vec{t}_0) - \hat{F}^*(\vec{t}_0)| \leq \tau \cdot \hat{e}^*(\vec{t}_0) \right\}$$

L'histogramme ainsi défini est représenté sur la figure 17 et montre en particulier que l'on a ...

$$\begin{cases} P(2 | T, F^*) = 0.50 \\ P(4 | T, F^*) = 0.82 \end{cases}$$

... ce qui signifie que lorsque  $\vec{t}_0$  est tiré au hasard dans  $R$ , il y a respectivement 50 chances sur 100 pour que  $|F(\vec{t}_0) - \hat{F}^*(\vec{t}_0)|$  soit inférieur à  $2 \cdot \hat{e}^*(\vec{t}_0)$  et 82 chances sur 100 pour que  $|F(\vec{t}_0) - \hat{F}^*(\vec{t}_0)|$  soit inférieur à  $4 \cdot \hat{e}^*(\vec{t}_0)$  ; à ce sujet, on pourra, en se reportant sur la figure 15, se faire une idée de la répartition géographique des points du domaine  $D$  où ces inégalités sont vérifiées.

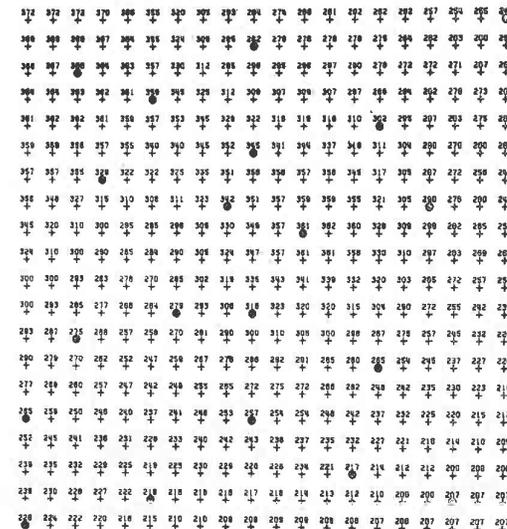
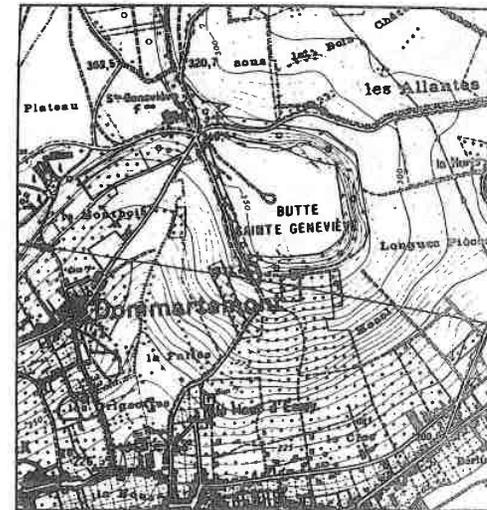


Figure 7

Carte I.G.N. de la butte Sainte Geneviève (feuille Nancy 1-2) dans le domaine d'étude  $D$  et ensemble des cotes topographiques  $F(\vec{t}_p)$  observées dans ce domaine aux noeuds  $\vec{t}_p$  du réseau  $R$ . Les points noirs représentent les points de l'ensemble  $T$  utilisé pour construire une interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique  $\hat{F}^*$ .

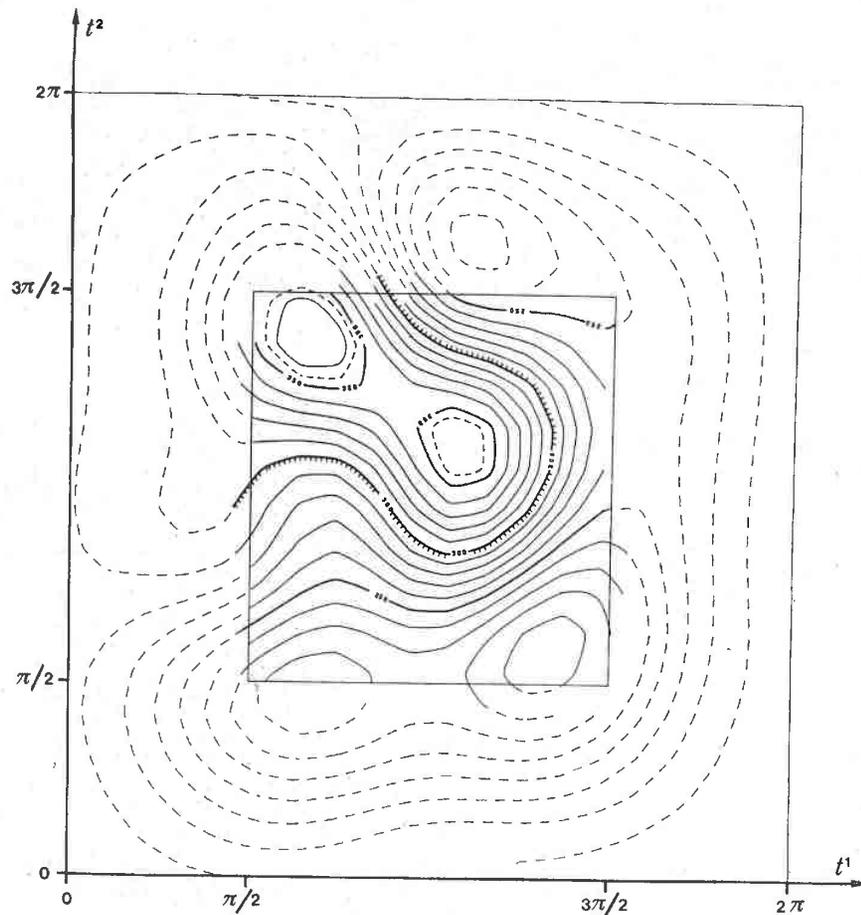


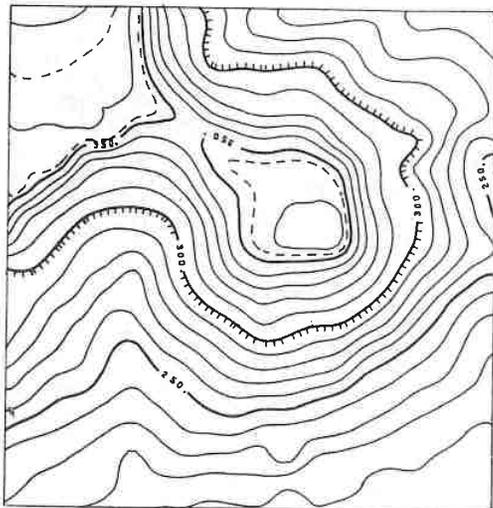
Figure 3

Carte en courbes isovaleurs du polynôme trigonométrique  $F^*$  utilisé comme solution initiale. Seules les parties du dessin correspondant au domaine d'étude  $D$  ont été représentées en trait fort, les autres parties étant dessinées en pointillés.

Valeurs numériques  
de la fonction  $F$  aux  
nœuds du réseau  $R$

372	372	372	370	366	365	360	358	353	354	349	348	343	339	334	329	324	319	314	309	304	299	294	289	284	279	274	269	264	259	254	249	244	239	234	229	224	219	214	209	204	199	194	189	184	179	174	169	164	159	154	149	144	139	134	129	124	119	114	109	104	99	94	89	84	79	74	69	64	59	54	49	44	39	34	29	24	19	14	9	4	-1	-6	-11	-16	-21	-26	-31	-36	-41	-46	-51	-56	-61	-66	-71	-76	-81	-86	-91	-96	-101	-106	-111	-116	-121	-126	-131	-136	-141	-146	-151	-156	-161	-166	-171	-176	-181	-186	-191	-196	-201	-206	-211	-216	-221	-226	-231	-236	-241	-246	-251	-256	-261	-266	-271	-276	-281	-286	-291	-296	-301	-306	-311	-316	-321	-326	-331	-336	-341	-346	-351	-356	-361	-366	-371	-376	-381	-386	-391	-396	-401	-406	-411	-416	-421	-426	-431	-436	-441	-446	-451	-456	-461	-466	-471	-476	-481	-486	-491	-496	-501	-506	-511	-516	-521	-526	-531	-536	-541	-546	-551	-556	-561	-566	-571	-576	-581	-586	-591	-596	-601	-606	-611	-616	-621	-626	-631	-636	-641	-646	-651	-656	-661	-666	-671	-676	-681	-686	-691	-696	-701	-706	-711	-716	-721	-726	-731	-736	-741	-746	-751	-756	-761	-766	-771	-776	-781	-786	-791	-796	-801	-806	-811	-816	-821	-826	-831	-836	-841	-846	-851	-856	-861	-866	-871	-876	-881	-886	-891	-896	-901	-906	-911	-916	-921	-926	-931	-936	-941	-946	-951	-956	-961	-966	-971	-976	-981	-986	-991	-996	-1001	-1006	-1011	-1016	-1021	-1026	-1031	-1036	-1041	-1046	-1051	-1056	-1061	-1066	-1071	-1076	-1081	-1086	-1091	-1096	-1101	-1106	-1111	-1116	-1121	-1126	-1131	-1136	-1141	-1146	-1151	-1156	-1161	-1166	-1171	-1176	-1181	-1186	-1191	-1196	-1201	-1206	-1211	-1216	-1221	-1226	-1231	-1236	-1241	-1246	-1251	-1256	-1261	-1266	-1271	-1276	-1281	-1286	-1291	-1296	-1301	-1306	-1311	-1316	-1321	-1326	-1331	-1336	-1341	-1346	-1351	-1356	-1361	-1366	-1371	-1376	-1381	-1386	-1391	-1396	-1401	-1406	-1411	-1416	-1421	-1426	-1431	-1436	-1441	-1446	-1451	-1456	-1461	-1466	-1471	-1476	-1481	-1486	-1491	-1496	-1501	-1506	-1511	-1516	-1521	-1526	-1531	-1536	-1541	-1546	-1551	-1556	-1561	-1566	-1571	-1576	-1581	-1586	-1591	-1596	-1601	-1606	-1611	-1616	-1621	-1626	-1631	-1636	-1641	-1646	-1651	-1656	-1661	-1666	-1671	-1676	-1681	-1686	-1691	-1696	-1701	-1706	-1711	-1716	-1721	-1726	-1731	-1736	-1741	-1746	-1751	-1756	-1761	-1766	-1771	-1776	-1781	-1786	-1791	-1796	-1801	-1806	-1811	-1816	-1821	-1826	-1831	-1836	-1841	-1846	-1851	-1856	-1861	-1866	-1871	-1876	-1881	-1886	-1891	-1896	-1901	-1906	-1911	-1916	-1921	-1926	-1931	-1936	-1941	-1946	-1951	-1956	-1961	-1966	-1971	-1976	-1981	-1986	-1991	-1996	-2001	-2006	-2011	-2016	-2021	-2026	-2031	-2036	-2041	-2046	-2051	-2056	-2061	-2066	-2071	-2076	-2081	-2086	-2091	-2096	-2101	-2106	-2111	-2116	-2121	-2126	-2131	-2136	-2141	-2146	-2151	-2156	-2161	-2166	-2171	-2176	-2181	-2186	-2191	-2196	-2201	-2206	-2211	-2216	-2221	-2226	-2231	-2236	-2241	-2246	-2251	-2256	-2261	-2266	-2271	-2276	-2281	-2286	-2291	-2296	-2301	-2306	-2311	-2316	-2321	-2326	-2331	-2336	-2341	-2346	-2351	-2356	-2361	-2366	-2371	-2376	-2381	-2386	-2391	-2396	-2401	-2406	-2411	-2416	-2421	-2426	-2431	-2436	-2441	-2446	-2451	-2456	-2461	-2466	-2471	-2476	-2481	-2486	-2491	-2496	-2501	-2506	-2511	-2516	-2521	-2526	-2531	-2536	-2541	-2546	-2551	-2556	-2561	-2566	-2571	-2576	-2581	-2586	-2591	-2596	-2601	-2606	-2611	-2616	-2621	-2626	-2631	-2636	-2641	-2646	-2651	-2656	-2661	-2666	-2671	-2676	-2681	-2686	-2691	-2696	-2701	-2706	-2711	-2716	-2721	-2726	-2731	-2736	-2741	-2746	-2751	-2756	-2761	-2766	-2771	-2776	-2781	-2786	-2791	-2796	-2801	-2806	-2811	-2816	-2821	-2826	-2831	-2836	-2841	-2846	-2851	-2856	-2861	-2866	-2871	-2876	-2881	-2886	-2891	-2896	-2901	-2906	-2911	-2916	-2921	-2926	-2931	-2936	-2941	-2946	-2951	-2956	-2961	-2966	-2971	-2976	-2981	-2986	-2991	-2996	-3001	-3006	-3011	-3016	-3021	-3026	-3031	-3036	-3041	-3046	-3051	-3056	-3061	-3066	-3071	-3076	-3081	-3086	-3091	-3096	-3101	-3106	-3111	-3116	-3121	-3126	-3131	-3136	-3141	-3146	-3151	-3156	-3161	-3166	-3171	-3176	-3181	-3186	-3191	-3196	-3201	-3206	-3211	-3216	-3221	-3226	-3231	-3236	-3241	-3246	-3251	-3256	-3261	-3266	-3271	-3276	-3281	-3286	-3291	-3296	-3301	-3306	-3311	-3316	-3321	-3326	-3331	-3336	-3341	-3346	-3351	-3356	-3361	-3366	-3371	-3376	-3381	-3386	-3391	-3396	-3401	-3406	-3411	-3416	-3421	-3426	-3431	-3436	-3441	-3446	-3451	-3456	-3461	-3466	-3471	-3476	-3481	-3486	-3491	-3496	-3501	-3506	-3511	-3516	-3521	-3526	-3531	-3536	-3541	-3546	-3551	-3556	-3561	-3566	-3571	-3576	-3581	-3586	-3591	-3596	-3601	-3606	-3611	-3616	-3621	-3626	-3631	-3636	-3641	-3646	-3651	-3656	-3661	-3666	-3671	-3676	-3681	-3686	-3691	-3696	-3701	-3706	-3711	-3716	-3721	-3726	-3731	-3736	-3741	-3746	-3751	-3756	-3761	-3766	-3771	-3776	-3781	-3786	-3791	-3796	-3801	-3806	-3811	-3816	-3821	-3826	-3831	-3836	-3841	-3846	-3851	-3856	-3861	-3866	-3871	-3876	-3881	-3886	-3891	-3896	-3901	-3906	-3911	-3916	-3921	-3926	-3931	-3936	-3941	-3946	-3951	-3956	-3961	-3966	-3971	-3976	-3981	-3986	-3991	-3996	-4001	-4006	-4011	-4016	-4021	-4026	-4031	-4036	-4041	-4046	-4051	-4056	-4061	-4066	-4071	-4076	-4081	-4086	-4091	-4096	-4101	-4106	-4111	-4116	-4121	-4126	-4131	-4136	-4141	-4146	-4151	-4156	-4161	-4166	-4171	-4176	-4181	-4186	-4191	-4196	-4201	-4206	-4211	-4216	-4221	-4226	-4231	-4236	-4241	-4246	-4251	-4256	-4261	-4266	-4271	-4276	-4281	-4286	-4291	-4296	-4301	-4306	-4311	-4316	-4321	-4326	-4331	-4336	-4341	-4346	-4351	-4356	-4361	-4366	-4371	-4376	-4381	-4386	-4391	-4396	-4401	-4406	-4411	-4416	-4421	-4426	-4431	-4436	-4441	-4446	-4451	-4456	-4461	-4466	-4471	-4476	-4481	-4486	-4491	-4496	-4501	-4506	-4511	-4516	-4521	-4526	-4531	-4536	-4541	-4546	-4551	-4556	-4561	-4566	-4571	-4576	-4581	-4586	-4591	-4596	-4601	-4606	-4611	-4616	-4621	-4626	-4631	-4636	-4641	-4646	-4651	-4656	-4661	-4666	-4671	-4676	-4681	-4686	-4691	-4696	-4701	-4706	-4711	-4716	-4721	-4726	-4731	-4736	-4741	-4746	-4751	-4756	-4761	-4766	-4771	-4776	-4781	-4786	-4791	-4796	-4801	-4806	-4811	-4816	-4821	-4826	-4831	-4836	-4841	-4846	-4851	-4856	-4861	-4866	-4871	-4876	-4881	-4886	-4891	-4896	-4901	-4906	-4911	-4916	-4921	-4926	-4931	-4936	-4941	-4946	-4951	-4956	-4961	-4966	-4971	-4976	-4981	-4986	-4991	-4996	-5001	-5006	-5011	-5016	-5021	-5026	-5031	-5036	-5041	-5046	-5051	-5056	-5061	-5066	-5071	-5076	-5081	-5086	-5091	-5096	-5101	-5106	-5111	-5116	-5121	-5126	-5131	-5136	-5141	-5146	-5151	-5156	-5161	-5166	-5171	-5176	-5181	-5186	-5191	-5196	-5201	-5206	-5211	-5216	-5221	-5226	-5231	-5236	-5241	-5246	-5251	-5256	-5261	-5266	-5271	-5276	-5281	-5286	-5291	-5296	-5301	-5306	-5311	-5316	-5321	-5326	-5331	-5336	-5341	-5346	-5351	-5356	-5361	-5366	-5371	-5376	-5381	-5386	-5391	-5396	-5401	-5406	-5411	-5416	-5421	-5426	-5431	-5436	-5441	-5446	-5451	-5456	-5461	-5466	-5471	-5476	-5481	-5486	-5491	-5496	-5501	-5506	-5511	-5516	-5521	-5526	-5531	-5536	-5541	-5546	-5551	-5556	-5561	-5566	-5571	-5576	-5581	-5586	-5591	-5596	-5601	-5606	-5611	-5616	-5621	-5626	-5631	-5636	-5641	-5646	-5651	-5656	-5661	-5666	-5671	-5676	-5681	-5686	-5691	-5696	-5701	-5706	-5711	-5716	-5721	-5726	-5731	-5736	-5741	-5746	-5751	-5756	-5761	-5766	-5771	-5776	-5781	-5786	-5791	-5796	-5801	-5806	-5811	-5816	-5821	-5826	-5831	-5836	-5841	-5846	-5851	-5856	-5861	-5866	-5871	-5876	-5881	-5886	-5891	-5896	-5901	-5906	-5911	-5916	-5921	-5926	-5931	-5936	-5941	-5946	-5951	-5956	-5961	-5966	-5971	-5976	-5981	-5986	-5991	-5996	-6001	-6006	-6011	-6016	-6021	-6026	-6031	-6036	-6041	-6046	-6051	-6056	-6061	-6066	-6071	-6076	-6081	-6086	-6091	-6096	-6101	-6106	-6111	-6116	-6121	-6126	-6131	-6136	-6141	-6146	-6151	-6156	-6161	-6166	-6171	-6176	-6181	-6186	-6191	-6196	-6201	-6206	-6211	-6216	-6221	-6226	-6231	-6236	-6241	-6246	-6251	-6256	-6261	-6266	-6271	-6276	-6281	-6286	-6291	-6296	-6301	-6306	-6311	-6316	-6321	-6326	-6331	-6336	-6341	-6346	-6351	-6356	-6361	-6366	-6371	-6376	-6381	-6386	-6391	-6396	-6401	-6406	-6411
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Cartographie de la  
fonction  $F$  dans le  
domaine d'étude  $D$



Cartographie de la  
fonction  $\hat{F}^*$  dans le  
domaine d'étude  $D$

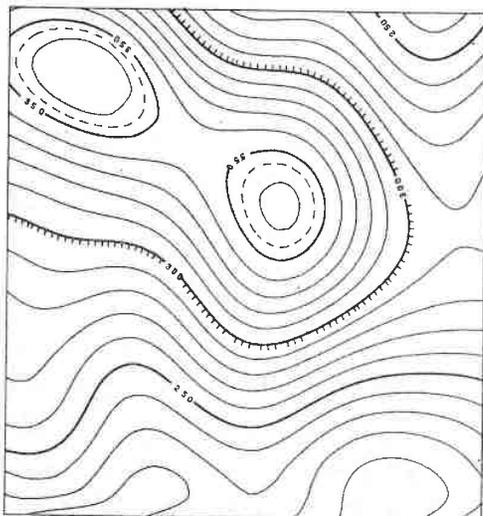


Figure 10

Cartographie en courbes isovalues des fonctions  $F$  et  $\hat{F}^*$  dans le domaine  $D$ .  
Les dessins ont été exécutés à l'aide du sous-programme ISØVAL compte tenu  
des valeurs numériques de ces fonctions aux noeuds du réseau  $R$ .

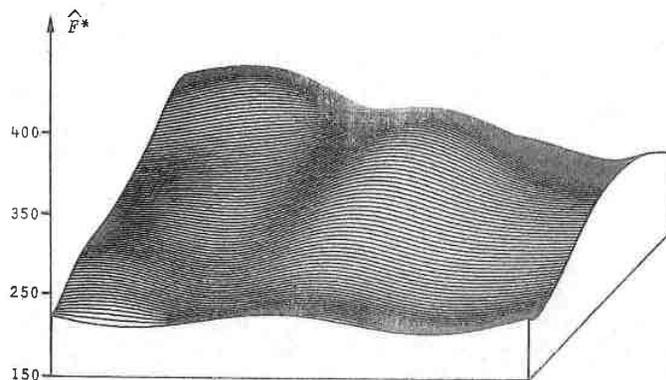
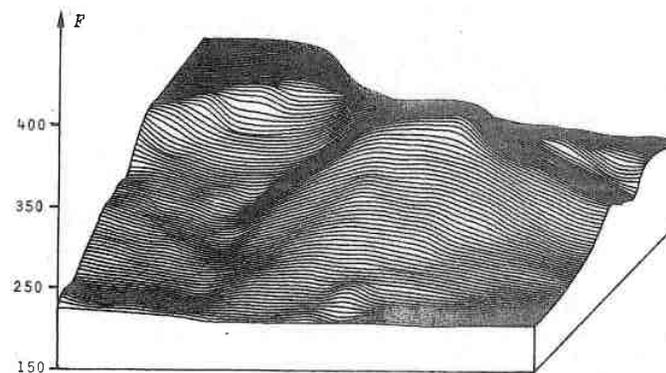


Figure 11

Blocs diagrammes des fonctions  $F$  et  $\hat{F}^*$  construits dans le domaine  $D$   
à l'aide du sous-programme ISØBLØ à partir des valeurs numériques  
prises par ces fonctions aux noeuds du réseau  $R$ .

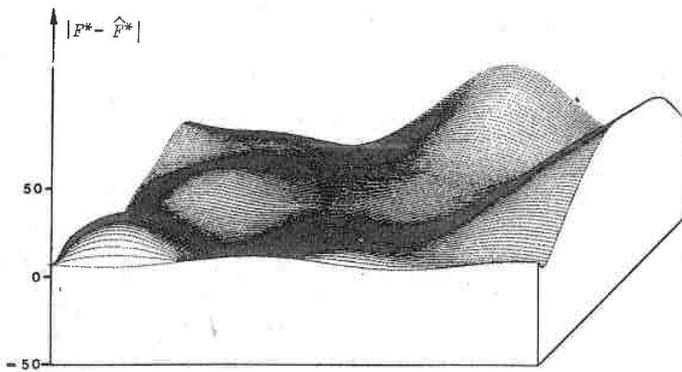


Figure 12

Bloc diagramme de l'écart  $|F^* - \hat{F}^*|$  entre la solution initiale  $F^*$  et l'interpolation en  $\mu$ -moyenne quadratique  $\hat{F}^*$  observées dans le domaine d'étude  $D$ .

Valeurs numériques  
de la fonction  $|F - \hat{F}^*|$   
aux noeuds du réseau  $R$

34.0	30.5	29.9	30.7	33.0	26.4	15.4	15.0	18.1	15.1	7.9	0.6	5.7	1.8	0.1	13.9	18.2	12.1	18.3	0.0
18.9	11.1	11.0	12.2	18.2	1.4	3.7	6.1	0.0	0.1	2.9	0.3	4.2	10.1	6.9	18.4	20.6	13.4	2.0	
12.8	6.4	0.0	0.5	0.9	4.2	7.6	8.2	12.4	3.1	0.0	0.7	3.7	3.0	1.5	7.5	16.6	18.5	10.3	5.6
14.7	8.7	1.0	6.7	8.3	0.0	2.3	8.2	11.6	8.1	7.9	4.5	2.8	4.8	1.2	6.0	15.8	15.0	6.0	10.1
21.3	15.2	8.3	2.4	0.9	0.4	3.2	2.3	7.1	11.2	18.5	12.3	8.3	8.2	0.0	7.8	10.4	10.5	0.2	15.3
31.4	26.0	18.0	12.8	7.7	7.8	5.9	1.1	6.5	6.0	5.9	2.6	3.8	10.3	2.8	8.8	12.3	1.3	21.7	27.2
10.8	37.1	30.5	0.0	10.8	12.1	12.2	5.4	5.7	4.7	0.2	0.1	6.5	5.7	5.8	1.0	6.0	14.5	30.3	35.3
48.7	38.8	18.3	1.0	8.0	18.0	15.3	8.8	6.0	0.8	2.7	3.1	1.9	10.2	7.1	8.2	0.0	14.8	28.4	46.8
46.9	18.1	8.2	5.9	12.4	14.8	16.6	14.1	5.8	1.9	0.6	0.6	8.7	16.6	0.9	3.3	0.6	10.8	25.7	41.9
32.3	10.1	3.8	7.2	12.2	14.4	12.8	7.2	1.5	7.4	8.8	7.2	11.6	20.2	7.0	1.2	1.1	8.9	20.6	26.8
18.1	12.7	3.8	5.8	8.9	18.7	5.8	1.3	4.8	8.2	4.2	0.5	2.8	6.4	7.6	2.1	7.5	15.8	28.4	35.3
21.7	11.8	3.2	2.4	10.0	10.8	0.0	4.0	2.2	0.0	1.4	5.5	0.4	5.8	8.6	0.6	11.3	24.9	38.4	48.1
16.6	10.7	0.0	2.5	6.4	5.4	2.7	3.8	0.2	1.8	1.8	2.6	0.7	8.8	8.8	0.4	14.4	24.4	36.4	42.8
18.0	8.2	0.4	1.0	6.1	5.8	2.9	1.7	1.1	1.0	0.8	2.2	3.5	7.6	0.0	2.1	12.8	18.8	30.0	38.2
7.4	1.8	5.3	0.2	1.7	2.1	2.2	1.5	1.4	0.3	0.8	1.1	4.8	7.1	0.3	6.8	8.9	12.8	21.8	31.5
0.0	8.3	12.7	8.0	2.8	0.5	4.5	3.8	2.8	0.0	4.7	0.8	0.8	3.0	6.1	1.1	4.5	12.7	18.2	25.3
4.8	12.0	12.8	10.0	5.5	1.8	5.0	8.2	3.6	0.8	7.2	4.4	1.0	6.0	7.1	3.8	1.2	5.4	12.2	19.6
6.1	11.9	12.7	9.3	4.9	4.2	4.2	8.8	0.0	8.0	3.4	2.1	3.8	0.0	3.2	4.2	3.9	2.0	7.1	14.1
5.8	5.7	6.8	3.3	1.7	0.0	2.1	0.3	7.5	11.8	12.4	12.7	8.1	1.8	2.8	0.2	4.0	0.8	5.1	11.0
0.8	4.8	7.5	7.6	4.5	1.8	11.4	15.8	18.8	18.3	13.8	8.0	3.6	0.5	0.2	1.8	6.1	12.2	21.2	

5.4	8.3	8.2	3.8	6.2	5.8	5.0	3.8	2.7	2.8	6.2	6.2	6.7	7.0	8.8	8.2	4.8	2.7	0.0	
5.8	3.3	2.8	3.3	4.2	4.3	4.1	3.8	2.2	0.0	2.5	4.4	5.7	5.8	8.0	5.8	4.8	3.8	2.8	
5.1	2.6	3.0	1.7	2.2	2.5	3.0	2.5	1.7	2.9	4.3	4.7	4.4	4.5	4.8	5.4	5.4	5.1	8.0	
5.6	3.5	1.8	1.8	1.4	0.0	1.7	2.8	2.5	2.1	2.9	4.0	4.0	2.8	2.2	3.4	4.7	6.6	6.8	
6.1	4.2	2.8	2.3	1.9	1.8	2.3	2.7	2.2	1.2	2.2	3.4	3.4	2.1	0.0	2.2	3.3	5.3	6.3	7.1
6.5	4.8	2.8	1.7	2.0	2.5	2.9	2.7	1.6	0.0	1.7	2.8	2.3	2.8	2.0	2.0	3.1	4.8	6.0	7.1
6.4	4.4	2.2	0.0	1.8	2.9	3.0	2.2	1.0	0.1	1.8	2.5	3.2	3.4	3.1	2.1	1.8	3.4	5.8	6.8
6.7	5.0	3.3	2.2	2.7	3.5	2.9	1.7	1.0	1.2	1.8	1.6	2.4	3.4	3.4	2.2	0.0	2.8	4.7	8.5
7.3	8.0	4.8	4.1	3.9	3.8	3.1	1.9	1.2	1.6	1.3	0.0	1.8	3.3	3.7	3.0	2.3	3.3	5.1	8.7
7.5	8.4	5.4	4.8	4.4	3.8	3.3	2.2	1.8	1.8	1.5	1.6	2.7	3.8	4.2	4.5	4.6	5.1	6.3	7.5
7.1	5.7	4.8	4.1	3.7	2.8	2.0	1.8	1.7	1.3	1.8	2.8	2.7	4.4	4.8	5.2	5.8	6.3	7.2	8.2
5.8	6.0	2.5	2.8	2.5	1.5	0.0	1.1	1.2	0.6	1.8	3.3	4.0	4.0	4.2	4.8	4.8	8.5	7.5	4.4
4.7	2.5	0.0	2.0	2.8	2.8	2.3	2.9	2.0	1.5	2.5	3.7	3.8	3.0	2.5	3.4	4.8	6.1	7.3	8.3
3.5	1.9	2.1	3.5	4.3	4.4	4.0	3.8	2.9	2.3	3.1	4.1	3.9	2.4	0.0	2.3	4.2	5.7	7.1	8.1
1.8	2.0	3.4	4.7	5.3	5.3	4.0	4.0	2.7	1.8	2.9	4.0	4.0	2.8	0.0	3.1	4.4	5.6	6.8	7.9
0.0	2.7	4.1	5.1	5.4	5.1	4.7	3.8	2.2	0.6	2.2	3.5	3.8	2.8	3.0	3.8	4.8	5.3	6.4	7.5
1.8	3.1	4.5	5.0	4.7	4.1	3.8	3.7	3.0	2.3	2.8	3.2	2.7	1.9	2.8	3.8	4.2	4.4	5.4	6.9
2.7	3.8	4.8	4.8	3.5	2.3	3.0	4.1	4.4	4.4	4.3	3.8	2.9	0.0	2.2	3.3	3.0	2.8	4.0	5.9
1.2	3.1	4.3	4.2	2.8	0.0	2.6	4.6	5.5	5.8	5.7	5.0	3.8	2.4	3.0	3.8	2.5	0.0	2.8	5.8
0.1	2.0	2.9	2.9	2.7	4.8	8.1	7.5	6.1	8.0	7.8	6.0	5.0	4.5	4.3	3.8	3.4	4.3	7.0	

Figure 13

Valeurs numériques prises par les fonctions  $|F - \hat{F}^*|$  et  $\hat{c}^*$  aux noeuds du réseau  $R$ .

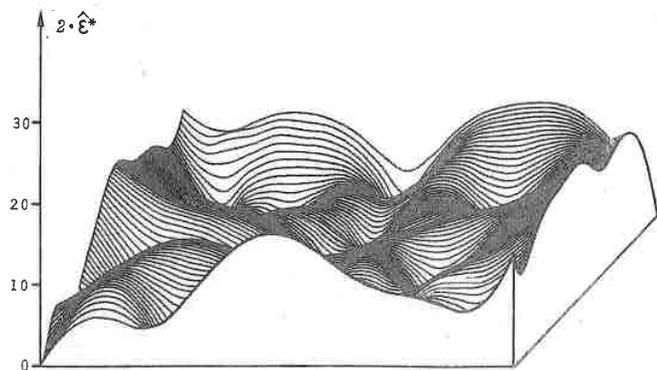
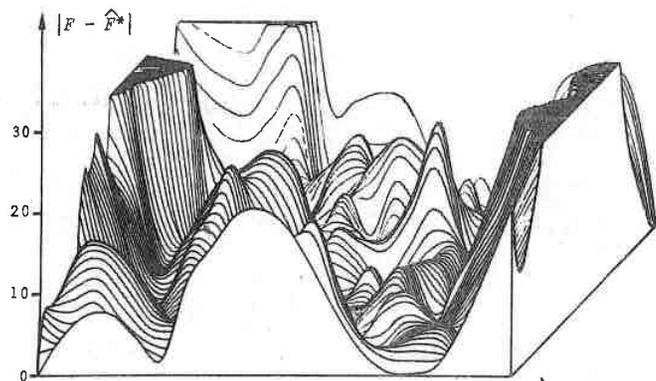
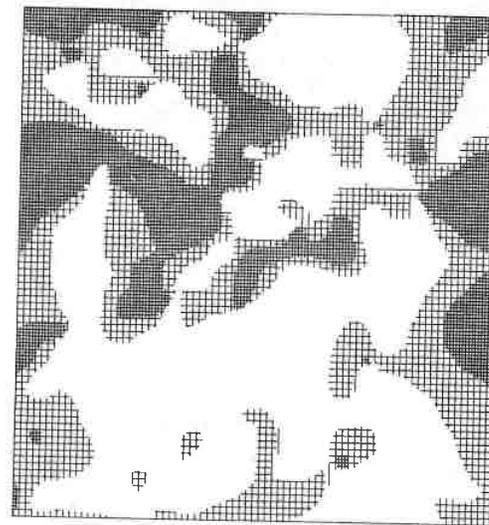


Figure 14

Blocs diagrammes des fonctions  $|F - \hat{F}^*|$  et  $2 \cdot \hat{\epsilon}^*$  construits dans le domaine  $D$  à l'aide du sous-programme ISØBLØ à partir des valeurs numériques prises par ces fonctions aux noeuds du réseau  $R$ .



}		Zones où l'on a :	$ F - \hat{F}^*  < 2 \cdot \hat{\epsilon}^*$
		Zones où l'on a :	$2 \cdot \hat{\epsilon}^* \leq  F - \hat{F}^*  \leq 4 \cdot \hat{\epsilon}^*$
		Zones où l'on a :	$4 \cdot \hat{\epsilon}^* \leq  F - \hat{F}^* $

Figure 15

Visualisation graphique des variations relatives des fonctions  $|F - \hat{F}^*|$  et  $\hat{\epsilon}^*$ . Le dessin a été réalisé dans le domaine  $D$  à l'aide du sous-programme ZONE à partir des valeurs numériques prises par ces fonctions aux noeuds du réseau  $R$ .

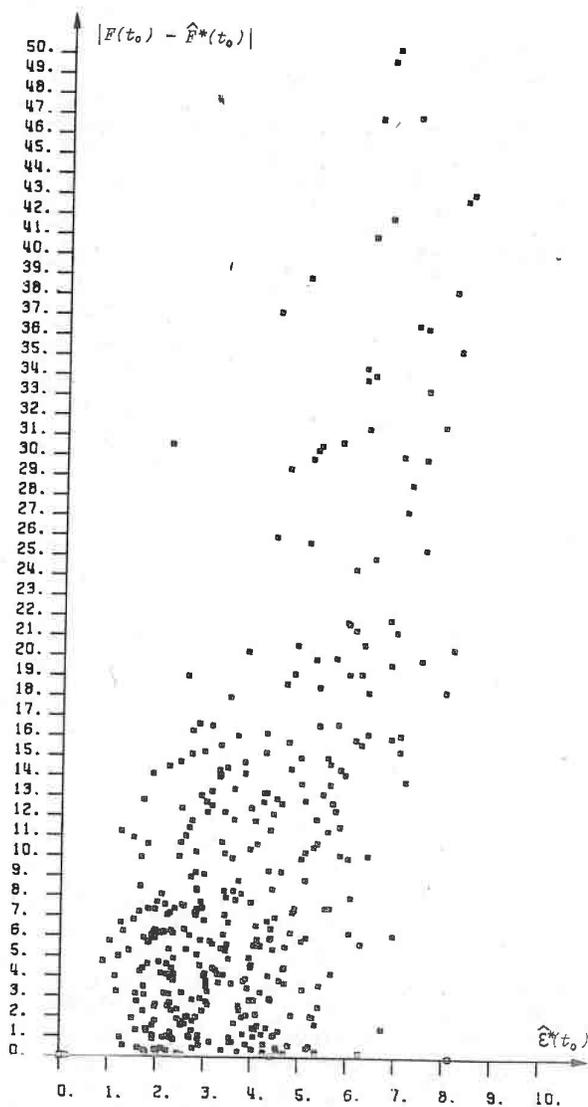


Figure 16

Les points de ce graphique correspondent aux couples de valeurs  $\{\hat{\varepsilon}^*(\vec{t}_0), |F(\vec{t}_0) - \hat{F}^*(\vec{t}_0)|\}$  obtenues lorsque  $\vec{t}_0$  parcourt les noeuds du réseau  $R$ . L'allongement du nuage ainsi réalisé suggère l'existence d'une liaison stochastique entre  $\hat{\varepsilon}^*(\vec{t}_0)$  et  $|F(\vec{t}_0) - \hat{F}^*(\vec{t}_0)|$  lorsque  $\vec{t}_0$  est tiré au hasard dans  $D$ .

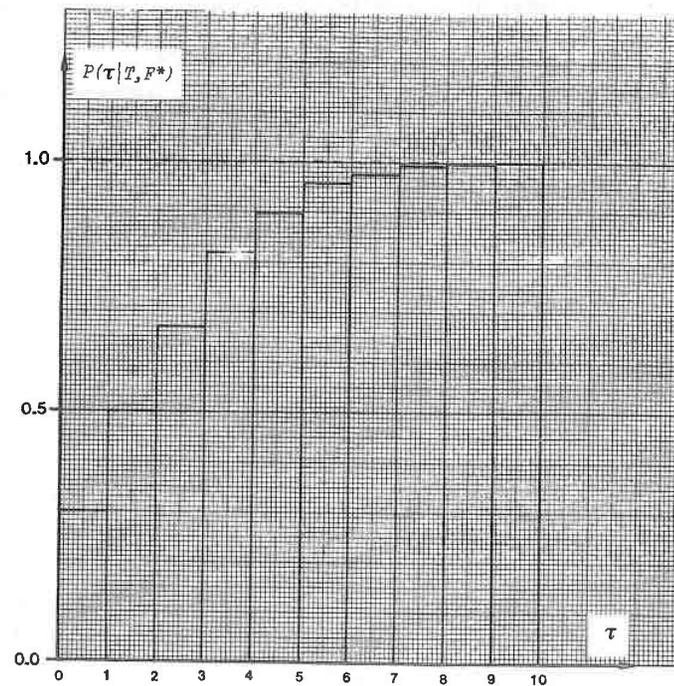


Figure 17

Histogramme des fréquences cumulées  $P(\tau | T, F^*)$  observées lorsque  $t_0$  parcourt les noeuds du réseau  $R$ . et telles que:  
 $P(\tau | T, F^*) = P_p\{ |F(\vec{t}_0) - \hat{F}^*(\vec{t}_0)| \leq \tau \cdot \hat{\varepsilon}^*(\vec{t}_0) \}$

## BIBLIOGRAPHIE

- ANDERSON T.W. - The statistical analysis of time series. *Wiley*, 1971.
- ATTEIA M. - Théorie et application des fonctions-spline en analyse numérique. *Thèse, Grenoble, 1966.*
- BASS J. - (1) Les fonctions pseudo-aléatoires. *Paris, Gauthier-Villars, 1962.*  
(2) Cours de mathématiques. *Tome III, Paris, Masson, 1971.*
- BELLMANN - Introduction to matrix analysis. *Mac Graw Hill, 1960.*
- BENSOUSSAN A. - Filtrage optimal des systèmes linéaires. *Paris, Dunod, 1971.*
- BERTRANDIAS J.P. - (1) Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p. *Bulletin de la Société Mathématique de France. Mémoire 5, 1966.* (2) Analyse fonctionnelle. *Paris, Armand-Colin, 1970.*
- BIRKHOFF G. - Piecewise polynomial interpolation and approximation. *Approximation of Functions, H.L. Garabedian Ed. Elsevier, 1965.*
- BIRKHOFF G. and GARABEDIAN H.L. - Smooth surface interpolation. *J. Math. and Physics 39, 1960.*
- BOURBAKI N. - Intégration. *Chapitres III et IV. Hermann, 1965.*
- CARASSO C. - Méthodes numériques pour l'obtention de fonctions-spline. *Thèse, Grenoble, 1966.*
- CEA J. - Optimisation : théorie et algorithmes. *Paris, Dunod, 1971.*
- CHERRUAULT Y. - Approximation d'opérateurs linéaires et applications. *Paris, Dunod, 1968.*
- DOOB J.L. - Stochastic processes. *Wiley, Septième édition, 1967.*
- FAVARD J. - Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynômes trigonométriques. *Bull. Sci. Math., Série 2, 61. 1937.*
- FERNIQUE X. - Processus linéaires, processus généralisés. *Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble, XVII, Fasc. 1, 1967.*

- FORTET R. et BLANC-LAPIERRE A. - Théorie des fonctions aléatoires. *Masson*, 1953.
- FRECHET M. - Intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque. *Revue Scientifique*, Fasc. 8, Décembre 1944.
- GOLOMB M. - Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes. *J. Approx. Th.* 1. 1968.
- HALMOST. - Measure theory. *Van Nostrand*, 1950.
- HENNEQUIN P.L. et TORTRAT A. - Théorie des probabilités et quelques applications. *Masson*, 1965.
- HILLE E. - (1) Functional analysis and semi-group. *American Soc.*, édit.  
(2) Methods in classical and functional analysis. *Addison-Wesley, publishing company*, 1972.
- JAZWINSKI A.H. - Stochastic processes and filtering theory. *Academic Press*, 1970.
- LAURENT P.J. - Approximation et optimisation. *Hermann*, 1972.
- LEE Y.W. - Statistical theory of communication. *Wiley*, 1960.
- LEGRAS J. - Méthodes et techniques de l'analyse numérique. *Paris, Dunod*, 1971.
- LUENBERGER D.G. - Optimisation by vector space methods. *Wiley*, 1969.
- MALLET J.L. - Présentation d'un ensemble de méthodes et techniques de la cartographie automatique numérique. *Sciences de la Terre, série Mémoire*, 1974.
- MATHERON G. - (1) Les variables régionalisées et leur estimation. *Paris, Masson* 1966.  
(2) Le Krigeage universel. *Ec. Nat. Sup. Mines, Paris*, 1969.
- MEYER P.A. - Probabilités et potentiel. *Publication de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg. Hermann*.
- MOURIER E. - Eléments aléatoires dans un espace de Banach. *Thèse. Faculté des Sciences de l'Univ. de Paris. Gauthier-Villars*, 1954.
- PALLU De La BARRIERE R. - Cours d'automatique théorique. *Paris, Dunod*, 1966.
- PARTHASARATHY K.R. - Probability measures on metric spaces. *Academic Press*, 1967.
- PARZEN E. - Stochastic Processes. *Holden, Day*, 1967.
- RICE J.R. - Approximation des fonctions, théorie linéaire. *Paris, Dunod*, 1969.
- RIES V. - Une application de l'équation de Wiener-Hopf à un problème de prédiction. *Thèse. Nancy*, 1970.
- ROUBINE E. - Introduction à la théorie de la communication. *Tome II. Paris, Masson*, 1970.
- SCHOENBERG I. J. - (1) Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. of Appl. Math.* 4. 1946. (2) Approximations : theory and practice. *Stanford Univ.* (3) Approximation with special Emphasis on spline functions. *Academic Press*, 1969.
- STERN J. - De BARBEYRAC J. et POGGI R. - Méthodes pratiques d'étude des fonctions aléatoires. *Paris, Dunod*, 1967.
- THOMANN J. - Détermination et construction de fonctions-spline à deux variables. *Thèse. Lille*, 1967.
- VO-KHAC-KHOAN. - Distributions, Analyse de Fourier et opérateurs aux dérivées partielles. *Vuibert*, 1970.
- WIENER N. - Extrapolation, Interpolation and Smoothing of stationnary time series. *Wiley*, 1949.