

Sc N 71  
43<sup>A</sup>

ETUDE NUMERIQUE DE  
L'EQUATION DE LA DIFFUSION :  
PROBLEME DIRECT - PROBLEME INVERSE

THESE

pour l'obtention du

DOCTORAT de SPECIALITE MATHEMATIQUES (3ème CYCLE)

Soutenu devant le Jury le 30 Juin 1971

par



JEAN LAURENT MALLET

Jury :      Président      :   Mr ROUBAULT M. , Membre de l'Institut  
                 Examineur     :   Mr LEGRAS J.  
                 Examineur     :   Mr DEPAIX M.

**ETUDE NUMERIQUE DE  
L'EQUATION DE LA DIFFUSION :  
PROBLEME DIRECT - PROBLEME INVERSE**



par

JEAN LAURENT MALLET

AVANT PROPOS

J'exprime ici tous mes remerciements à ceux grâce auxquels j'ai pu faire ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur ROUBAULT,  
Membre de l'Institut, qui me fait aujourd'hui le grand honneur de  
présider ce Jury.

Ma reconnaissance et ma gratitude profondes et sincères  
vont à Monsieur le Professeur LEGRAS, Directeur de l'Institut  
Universitaire de Calcul Automatique de Nancy, qui a bien voulu  
diriger ce travail et m'aider de ses conseils constants, ne mé-  
nageant ni son temps ni sa peine.

Je remercie également Monsieur le Professeur DEPAIX,  
Directeur de l'U. E. R. de Mathématiques de l'Université Nancy I,  
à qui je dois mon orientation vers les mathématiques et dont les  
conseils et explications ont toujours été pour moi très précieux.

Je dois beaucoup à Monsieur de LA ROCHE, Directeur-Adjoint  
du Centre de Recherches Pétrographiques et Géochimiques, qui m'a  
accueilli au sein de son équipe et qui a mis à ma disposition toutes  
les conditions matérielles souhaitables pour mener à bien cette étude ;  
qu'il soit ici remercié des efforts qu'il poursuit pour développer  
l'Informatique en général et les Mathématiques appliquées en particu-  
lier dans le domaine des Sciences de la Terre.

Je n'oublie pas non plus mes camarades, tant Géologues que  
Mathématiciens, pour les discussions fructueuses que j'ai pu avoir  
avec eux et qui m'ont toujours été d'une grande utilité ; ma pensée va  
en particulier à Monsieur BLAZY, Directeur de l'E. N. S. G. et à  
Monsieur HOUPERT, responsable du Centre de Mécanique des Roches  
et des Sols de l'E. N. S. G. , dont les encouragements ont été un élément  
déterminant pour mon orientation vers la recherche scientifique.

Je remercie enfin tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce document, et en particulier Mademoiselle BURTE, qui en a assuré la frappe.

# SOMMAIRE

## PREMIERE PARTIE

### INTRODUCTION

A - PRESENTATION DU PROBLEME	1
Introduction	1

## DEUXIEME PARTIE

### ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME DIRECT

A - BASES THEORIQUES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	12
Opérateurs linéaires définis positifs : rappels	12
Théorème fondamental des méthodes variationnelles	15
Application au problème direct	23
Méthode des éléments finis	41
B - ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME STATIONNAIRE DE TYPE DIRICHLET BIDIMENSIONNEL	46
Discrétisation du problème en éléments finis	46
Calcul de $I_{ijk}^* = I_{ijk}(\varphi^*)$	49
Calcul de $I^* = I(\varphi^*)$	54
Minimisation de $I^* = I(\varphi^*)$ en fonction de $[\phi_I]$	59
Conclusions	62
C - ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME DE TYPE DIRICHLET BIDIMENSIONNEL EN REGIME TRANSITOIRE	67
Position du problème	67
Calcul de $I_{ijk}^{*T}$	69
Calcul de $I_{ijk}^*$ et conclusion	73
Méthode de Runge - Kutta	75

D - MISE EN OEUVRE DE LE METHODE	78
Construction des matrices $[E]$ ou $[E(\Delta t)]$	78
Stockage de la matrice $[E]$	83
Résolution du système (79)	85
Remarques techniques	88
E - TEST DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	96
Cas d'un régime permanent	96
Cas d'un régime transitoire	101

### TROISIEME PARTIE

#### ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME INVERSE

A - APPROXIMATION EN $\mu$ -MOYENNE QUADRATIQUE	105
Présentation de la méthode	105
Mise en oeuvre de la méthode des moindres carrés	115
Application au problème inverse	123
B - ETUDE DU PROBLEME INVERSE BIDIMENSIONNEL DANS LE REPERE ORTHONORME $\{\vec{u}_i, x^i\}$	129
Introduction	129
Forme canonique du problème inverse	133
Première méthode d'intégration du problème inverse	137
Deuxième méthode d'intégration du problème inverse	142
Résultats numériques	151
C - ETUDE INTRINSEQUE DU PROBLEME INVERSE ISOTROPE BIDIMENSIONNEL	158
Présentation du problème	158
Etude du problème inverse dans le repère $\{\vec{e}_i, y^i\}$	163
Conséquences	171

QUATRIEME PARTIE

CONCLUSION

180

BIBLIOGRAPHIE

181

PREMIERE PARTIE

INTRODUCTION

# A PRESENTATION DU PROBLEME

## INTRODUCTION

### TYPE DE LOI ETUDIEE

#### Domaine d'étude

Considérons l'espace  $\mathbb{R}^n$  repéré par rapport à un système orthonormé de coordonnées rectilignes  $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  de vecteurs unitaires covariants  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ . Soit dans cet espace, un domaine fermé  $\bar{\Omega}$  de frontière  $\Sigma$  (cf. fig. 1) dans lequel va porter notre étude ; nous supposons  $\bar{\Omega}$  repéré par rapport à un système intrinsèque de coordonnées curvilignes  $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$  de vecteurs de base covariants  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ .

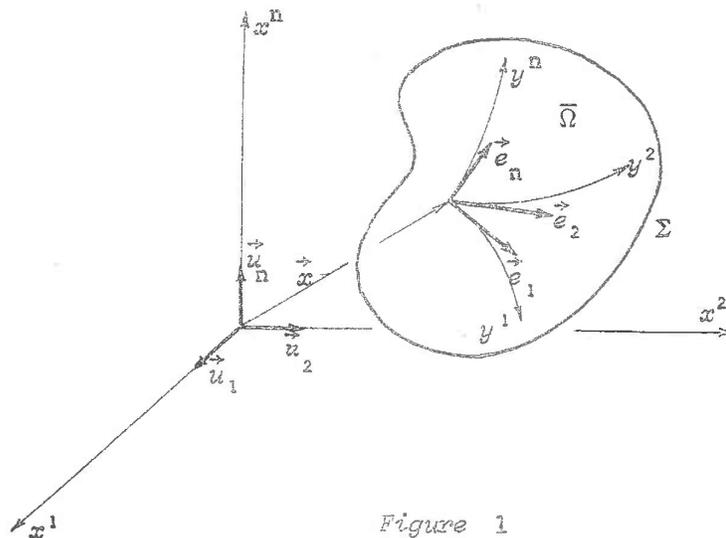


Figure 1

#### Description intrinsèque du domaine $\bar{\Omega}$ dans le repère $\{\vec{\alpha}_i, z^i\}$

Dans ce qui suit, nous utiliserons les variables  $z^i$  associées aux vecteurs de base covariants  $\vec{\alpha}_i$  lorsque nous ne voudrons pas préciser

si l'on se réfère au repère  $\{\vec{u}_i, x^i\}$  ou au repère  $\{\vec{e}_i, y^i\}$  :

$$(1) \quad \vec{\alpha}_i = \begin{cases} \vec{u}_i & \text{si } z^i = x^i \\ \vec{e}_i & \text{si } z^i = y^i \end{cases}$$

Cette convention nous permettra d'écrire en toute généralité des relations valables aussi bien dans l'un ou dans l'autre repère. On définit également les vecteurs de base contravariants  $\vec{\alpha}^i$  par la relation classique :

$$(2) \quad \delta_i^j = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}^j$$

Nous désignerons par  $G(\vec{z})$  le tenseur métrique fondamental au point  $\vec{z}$  dont les composantes covariantes  $\gamma_{ij}$  et contravariantes  $\gamma^{ij}$  sont telles que :

$$(3) \quad \left[ \begin{aligned} \gamma_{ij} = \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j &= \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } z^i = x^i \\ g_{ij} & \text{si } z^i = y^i \end{cases} \\ \gamma^{ij} = \vec{\alpha}^i \cdot \vec{\alpha}^j &= \begin{cases} \delta^{ij} & \text{si } z^i = x^i \\ g^{ij} & \text{si } z^i = y^i \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Suivant l'habitude, nous désignerons par  $\gamma$  le déterminant de la matrice des  $\gamma_{ij}$  :

$$(4) \quad \gamma = \det \{\gamma_{ij}\} = \begin{cases} 1 & \text{si } z^i = x^i \\ g & \text{si } z^i = y^i \end{cases}$$

Il s'en suit que si nous adoptons la règle de sommation d'Einstein, tout vecteur  $\vec{W}$  du domaine  $\bar{\Omega}$  pourra s'écrire sous la forme...

$$(5) \quad \vec{W} = \vec{\alpha}_i \cdot W^i = \vec{\alpha}^i \cdot W_i$$

... où  $W^i$  et  $W_i$  sont respectivement les composantes contravariantes et covariantes de  $\vec{W}$  dans le repère  $\{\vec{\alpha}_i, z^i\}$ .

### Dérivée covariante

Suivant la convention habituelle, nous noterons ...

$$(6) \quad \partial_i f = \partial f / \partial z^i$$

... la dérivée de la fonction  $f(\vec{z})$  par rapport à  $z^i$ .

### Type de loi étudiée : forme tensorielle dans le repère $\{\vec{\alpha}_i, z^i\}$

Soit  $\varphi(\vec{z}, t)$  une fonction scalaire définie dans  $\bar{\Omega}$  et dépendant du vecteur d'espace  $\vec{z}$  et du paramètre temps  $t$ .

On rencontre souvent en physique mathématique des champs de vecteurs  $\vec{V} = \vec{\alpha}_i \cdot V^i$  du type ...

$$(7) \quad \boxed{V^i = - C^{ij} \cdot \partial_j \varphi}$$

... et obéissant à l'équation de continuité, appelée équation de la diffusion :

$$(8) \quad \boxed{\text{div}(\vec{V}) = - A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B}$$

On donne généralement le nom de loi de diffusion à l'équation (7).

Dans l'équation (8),  $A(\vec{z})$  est une capacité scalaire souvent appelée "coefficient d'emmagasinement" et  $B(\vec{z})$  un débit source par unité de surface alimentant le domaine  $\bar{\Omega}$  (au sens algébrique du terme) au point  $\vec{z}$  considéré.

Dans l'équation (7), les quantités  $C^{ij}$  sont les composantes contravariantes d'un tenseur  $C(\vec{z})$  symétrique du second ordre ( $\Leftrightarrow C^{ij} = C^{ji}$ ) que nous supposerons défini positif, c'est-à-dire tel que :

$$(9) \quad \boxed{\forall \{\vec{W} \neq \vec{0}\} \Leftrightarrow \{C^{ij} \cdot W_i \cdot W_j > 0\}}$$

Si de plus il existe un scalaire  $C = C(\vec{z})$  tel que l'on puisse écrire la relation suivante en tout point de  $\Omega$  ...

$$(10) \quad C^{ij} = C \cdot \gamma^{ij}$$

... alors nous dirons que " $C(\vec{z})$  est un tenseur isotrope".

Type de loi étudiée : forme pseudo-matricielle dans le repère  $(\vec{\alpha}_i, z^i)$

Considérons les tableaux  $[V]$ ,  $[C]$ , et  $[\text{grad}\varphi]$  définis comme suit :

(11)

$$[V] = \begin{bmatrix} V^1 \\ \vdots \\ V^n \end{bmatrix} ; \quad [\text{grad}\varphi] = \begin{bmatrix} \partial_1 \varphi \\ \vdots \\ \partial_n \varphi \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C^{11} & C^{12} & \dots & C^{1n} \\ C^{21} & C^{22} & \dots & C^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C^{n1} & C^{n2} & \dots & C^{nn} \end{bmatrix}$$

Il convient de remarquer que seul le tableau  $[V]$  est une vraie matrice car lors d'un changement de repère ses composantes se transforment suivant les règles relatives aux matrices, ce qui n'est pas le cas pour  $[\text{grad}\varphi]$  et  $[C]$  ; pour cette raison, nous dirons que les tableaux  $[\text{grad}\varphi]$  et  $[C]$  sont des pseudo-matrices.

En fait, en dehors de tout changement de coordonnées, nous pouvons convenir de considérer ces pseudo-matrices comme des matrices de façon à pouvoir profiter des règles de calcul matriciel, ce qui nous permet d'écrire :

$$(12) \quad [V] = - [C] \cdot [\text{grad}\varphi]$$

Cette écriture matricielle nous sera utile par la suite lors des applications pratiques, en particulier dans l'étude numérique du problème direct ou nous aurons à expliciter l'expression  $C^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \varphi$  qui peut s'écrire sous la forme :

$$(13) \quad C^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \varphi = [\text{grad} \varphi]^t \cdot [C] \cdot [\text{grad} \varphi]$$

Remarquons que la forme quadratique (13) est un vrai scalaire, bien que  $[\text{grad} \varphi]$  et  $[C]$  ne soient pas de vraies matrices.

### EXEMPLES DE LOIS DE LA DIFFUSION EN PHYSIQUE

#### Thermique

On sait que l'écoulement de la chaleur dans les milieux conducteurs est régi par une équation du même type que l'équation (7) et que l'on a ...

$$\left[ \begin{array}{l} (\vec{V} \equiv \vec{D}) = \text{densité de courant} \\ (\mathcal{C}) = \text{conductivité thermique du milieu} \\ (\varphi \equiv T) = \text{température} \end{array} \right.$$

... où le vecteur densité de courant  $\vec{D}$  est un vecteur orienté dans le sens de l'écoulement de la chaleur et dont le module est égal au flux de chaleur traversant une unité de surface normale à la direction  $\vec{D}$  pendant une unité de temps.

#### Electricité

En électricité, la loi d'Ohm généralisée est du même type que l'équation (7) où l'on a posé :

$$\left[ \begin{array}{l} (\vec{V} \equiv \vec{J}) = \text{vecteur densité de courant} \\ (\mathcal{C} \equiv \sigma) = \text{conductivité électrique du milieu} \\ (\varphi \equiv V) = \text{potentiel électrique} \end{array} \right.$$

### Hydrodynamique des milieux poreux

L'expérience montre que le mouvement des fluides dans les milieux poreux (ouverts) est régi par la loi de Darcy généralisée, qui est justement du type de l'équation (7) où l'on a posé :

$$\left[ \begin{array}{l} (\vec{V}) = \text{vitesse de filtration de Darcy} \\ (C \equiv T) = \text{perméabilité du milieu} \\ (\Psi \equiv H) = \text{potentiel hydrodynamique} \end{array} \right.$$

En fait, on constate que cette loi n'est valable que si le nombre de Reynolds ...

$$Re = \frac{V_e d}{\mu/\rho}$$

... est compris entre 1 et 10 avec :

$$\begin{array}{l} V = \text{module du vecteur } \vec{V} \\ d = \text{diamètre moyen des pores} \\ \mu = \text{viscosité du fluide} \\ \rho = \text{masse spécifique du fluide} \end{array}$$

### APPLICATIONS AUX SCIENCES DE LA TERRE

#### Introduction

Bien que cela n'apparaisse pas dans la suite de l'exposé, ce travail a été réalisé en vue de ses applications aux sciences de la terre. En effet, plusieurs problèmes géologiques, et non des moindres sur le plan économique, sont régis par des lois du type étudié et ont fait l'objet de nombreuses études de la part des physiciens.

En fait, il nous est apparu nécessaire de faire un exposé à la fois plus général et plus précis des techniques numériques mises en oeuvre pour résoudre ces problèmes ; plus général car les démonstrations ne font plus appel à des notions physiques plus ou moins intuitives, et plus précis car l'existence des solutions numériques y est démontrée de façon rigoureuse.

### Application à la géophysique

La prospection électrique utilisée en géophysique consiste à injecter du courant dans les terrains afin de pouvoir en étudier les conductivités ; en effet, on a de bonnes raisons de penser que deux terrains différents ont en général des conductivités différentes, d'où une technique possible pour identifier les structures géologiques.

Le problème posé est alors en général bidimensionnel dans un plan horizontal, et consiste à trouver la carte des conductivités  $\sigma(\vec{z})$  connaissant la carte des potentiels  $V(\vec{z}, t)$ .

### Application à l'hydrodynamique souterraine

C'est sans aucun doute ce domaine d'application qui est actuellement le plus intéressant sur le plan économique. En effet, on pense immédiatement à l'exploitation de pétrole, de gaz ou de nappes d'eau dans le sous-sol, mais il ne faut pas oublier l'application inverse qui consiste à injecter des hydrocarbures ou des eaux usées dans des structures géologiques appropriées, dans le but de les stocker ou de s'en débarrasser sans nuire à l'environnement.

Le problème posé ici est en général double ; il s'agit d'abord de trouver la répartition de  $C(\vec{z})$  dans le domaine étudié, connaissant une répartition particulière  $\varphi(\vec{z}, t_0)$  à une date  $t_0$ , puis ensuite connaissant  $C(\vec{z})$ , étudier l'évolution de  $\varphi(\vec{z}, t)$  lorsque l'on fait varier  $B(\vec{z})$  dans  $\Omega$  ou  $\varphi(\vec{z}, t)$  sur la limite  $\Sigma$  du domaine.

### Application à l'étude du "gradient géothermique"

Il n'est pas nécessaire d'être géologue pour savoir que la température augmente lorsque l'on s'enfonce dans le sol ; ceci correspond à un gradient de température appelé gradient géothermique dont la valeur varie suivant l'endroit où l'on se place. Les flux de chaleur qui en résultent obéissent à la loi étudiée, leur étude est importante, aussi bien sur le plan théorique, que sur le plan pratique. Sur le plan théorique, il peut être intéressant pour le géologue de pouvoir construire un modèle mathématique permettant l'étude de la répartition des températures ou des flux thermiques au cours d'un métamorphisme par exemple ; d'un point de vue plus pratique, on ne peut pas rester indifférent à cette

source d'énergie que peut représenter le "gradient géothermique" et dans cette optique, il n'est pas inintéressant de posséder un outil permettant de l'étudier en laboratoire de façon suffisamment précise.

#### Application à la géochimie

Nous terminerons en signalant que les transferts de matière par diffusion dans les milieux dilués sont régis par la loi de Fick qui est du même type que l'équation (7) où l'on a posé :

$$\left[ \begin{array}{l} (\vec{V} \equiv \vec{I}) = \text{intensité de diffusion} \\ (C \equiv D) = \text{diffusivité de la substance dans le fluide} \\ (\varphi \equiv C) = \text{concentration} \end{array} \right.$$

Cette remarque peut être intéressante en ce qui concerne l'étude de la métasomatose par diffusion.

### PROBLEMES POSES

#### Introduction

Nous nous limiterons à l'étude du cas où  $C(\vec{z})$  et  $\varphi(\vec{z}, t)$  ont une distribution bidimensionnelle, ce qui n'est pas très gênant car un grand nombre de problèmes pratiques correspondent en général à ce cas.

Les problèmes posés sont de deux ordres :

- a) Le premier consiste à étudier dans un domaine  $\bar{\Omega}$  la répartition du potentiel  $\varphi(\vec{z}, t)$  connaissant la répartition de la conductivité  $C(\vec{z})$  ; c'est ce que l'on appelle le "problème direct".
- b) Le second, le "problème inverse", consiste à étudier la répartition de la conductivité  $C(\vec{z})$  connaissant la répartition du potentiel  $\varphi(\vec{z}, t)$ .

#### Résolution numérique du problème direct

Le problème direct a déjà été résolu depuis de nombreuses années par la méthode des "différences finies". Depuis quelque temps, on commence à

utiliser une nouvelle technique dite des "éléments finis" qui, sur le plan théorique, paraît très satisfaisante ; c'est cette dernière méthode que nous présenterons en essayant de justifier les calculs sur le plan numérique, ce qui n'a pas toujours été fait.

### Résolution numérique du problème inverse

Jusqu'à ces derniers temps, on avait recours à des modèles analogiques du type "cuve rhéoélectrique" pour trouver, par une technique de tâtonnement, une solution approchée à ce problème. Actuellement, le problème inverse fait l'objet de nombreuses recherches sur le plan numérique dans plusieurs laboratoires ; nous proposons ici une famille de méthodes qui semblent donner des résultats numériques satisfaisants.

La technique présentée ici consiste à intégrer les conductivités le long des lignes de courant (tangentes à  $\vec{V}$ ) à partir de points où l'on connaît  $C(\vec{z})$ . Pour ce type de problème, nous nous limiterons au cas où le tenseur  $C(\vec{z})$  est isotrope et se réduit donc au produit d'une conductivité scalaire  $C(\vec{z})$  par le tenseur métrique fondamental contravariant  $\{\gamma^{ij}\}$  relatif au système de coordonnées utilisées :

$$C^{ij} = C \cdot \gamma^{ij}$$

### EQUATION DE CONTINUITÉ

#### Introduction

Toutes les méthodes de résolution du problème direct et du problème inverse reposent sur l'intégration de l'équation de continuité (8). Pour cette raison, il est peut-être intéressant de voir quelle est la forme développée de cette équation ainsi que sa signification physique :

#### Forme développée de $\text{div}(\vec{V})$ dans le repère $\{\vec{\alpha}_i, z^i\}$

Lorsque l'on se repère par rapport à un système de coordonnées  $z^i$  de vecteurs de base covariants  $\vec{\alpha}_i$ , on appelle, par définition, divergence du vecteur  $\vec{V} = \vec{\alpha}_i \cdot V^i$ , le scalaire définit par ...

$$(14) \quad \left[ \text{div}(\vec{V}) = \nabla_i V^i \right]$$

... où  $\nabla_i$  désigne le symbole "dérivée covariante absolue" par rapport à

la variable  $z^i$ . On démontre en calcul tensoriel que ceci peut encore s'écrire sous la forme développée suivante :

$$(15) \quad \left[ \operatorname{div} (\vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \partial_i (\sqrt{\gamma} \cdot V^i) \right]$$

Dans notre problème particulier, on a de plus  $V^i = -c^{ij} \cdot \partial_j \varphi$  si bien qu'en définitive, nous avons :

$$(16) \quad \boxed{\operatorname{div} (\vec{V}) = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \partial_i (\sqrt{\gamma} \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi)}$$

#### Formule de Green (ou d'Ostrogradsky)

Si  $\vec{W}$  désigne un champ de vecteur défini sur  $\bar{\Omega}$  et si  $\vec{n}$  est le vecteur normale unitaire en un point de la frontière  $\Sigma$  de  $\bar{\Omega}$ , orienté vers l'extérieur de  $\bar{\Omega}$ , alors on montre que la relation suivante est toujours vérifiée ...

$$(17) \quad \boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} (\vec{W}) \cdot d\omega = \int_{\Sigma} \vec{W} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma}$$

... où  $d\omega$  représente l'élément de "volume" dans  $\Omega$  et  $d\sigma$  l'élément de "surface" sur  $\Sigma$ .

Cette relation est appelée formule de Green dans les ouvrages de langue anglo-saxonne et formule d'Ostrogradsky dans les ouvrages de langue russe.

#### Signification physique de l'équation de continuité

Si l'on compare les relations (8) et (17), et si l'on considère un petit élément de "volume"  $d\omega$  entourant le point  $M(\vec{z})$ , nous voyons que le flux du vecteur  $\vec{V}$  à travers cet élément est conservatif, c'est-à-dire qu'il est égal à la somme :

- a) du flux  $(-A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \cdot d\omega$  libéré au point  $M(\vec{z})$  par unité de temps par l'élément  $d\omega$ .
- b) du flux  $(B) \cdot d\omega$  injecté au point  $M(\vec{z})$  et correspondant à un débit source  $B(\vec{z})$  alimentant l'élément  $d\omega$ .

### AVERTISSEMENT

L'étude qui va suivre est essentiellement axée vers la recherche de techniques numériques permettant de calculer sur ordinateur des solutions approchées satisfaisantes des problèmes proposés. Ce faisant, nous aurons à faire à deux types d'erreurs :

- a) l'erreur de méthode due à la technique numérique utilisée,
- b) l'erreur d'arrondi due au fait qu'un ordinateur ne travaille qu'avec un nombre de chiffres significatifs finis.

En aucun cas, l'erreur globale ne peut être raisonnablement estimée à l'heure actuelle, et la seule technique permettant de juger la qualité d'une méthode ne peut être qu'une technique expérimentale basée sur la comparaison des résultats numériques et de la solution stricte dans les cas où l'on connaît cette dernière. C'est le point de vue que nous adopterons dans notre étude.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME DIRECT

# A BASES THEORIQUES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

## OPERATEURS LINEAIRES DEFINIS POSITIFS : RAPPELS

### OPERATEURS ASSOCIES AUX PROBLEMES LINEAIRES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES

#### Introduction

- a) Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de fermeture  $\bar{\Omega}$  limité par une frontière  $\Sigma$  (cf. fig. 1)

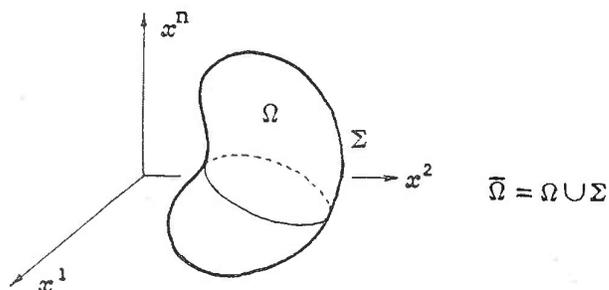


Figure 1

Dans ce qui va suivre nous allons être amenés à considérer un ensemble  $H(\Omega)$  formé d'une certaine famille de fonctions numériques réelles définies sur  $\Omega$ , ainsi qu'un opérateur linéaire  $\alpha$  défini dans une partie  $H_\alpha(\Omega)$  de  $H(\Omega)$  et à valeur dans  $H(\Omega)$  :

$$\forall \varphi \in H_\alpha(\Omega) \longrightarrow \alpha\varphi \in H(\Omega)$$

On supposera de plus que  $H(\Omega)$  est un espace vectoriel de Hilbert pour le produit scalaire et la norme notés :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \psi \end{array} \right\} \in H(\Omega) \iff \left\{ \begin{array}{l} \langle \varphi, \psi \rangle = \text{produit scalaire de } \varphi \text{ et } \psi \\ \|\varphi\|_H = \text{norme de } \varphi \end{array} \right.$$

- b) On désignera par  $H_\alpha(\Omega) \subseteq H(\Omega)$  le domaine d'existence de  $\alpha$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions  $\varphi$  appartenant à  $H(\Omega)$  et telles que l'opération  $\alpha\varphi$  ait un sens.
- c) On désignera par  $H_\alpha^\lambda(\Omega) \subseteq H_\alpha(\Omega)$  le domaine de définition de  $\alpha$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions  $\varphi$  appartenant à  $H_\alpha(\Omega)$  et satisfaisant aux conditions linéaires imposées aux limites. On supposera de plus que  $H_\alpha^\lambda(\Omega)$  est encore un espace vectoriel qui lui n'est pas forcément complet.
- d) Les conditions aux limites sur  $\Sigma$  s'expriment à l'aide d'un opérateur linéaire  $L$  défini sur  $H_\alpha^\lambda(\Omega)$  à valeurs dans  $H(\Omega)$  et tel que pour toute fonction  $\varphi$  appartenant à  $H_\alpha^\lambda(\Omega)$ , la valeur de  $L[\varphi(\vec{z})]$  pour  $\vec{z}$  parcourant  $\Sigma$  soit égale à une certaine fonction  $\lambda(\vec{z})$ , ce que l'on note :

$$\left. \begin{array}{l} L\varphi|_\Sigma = \lambda \\ \varphi \in H_\alpha^\lambda(\Omega) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \varphi \in H_\alpha^\lambda(\Omega)$$

#### Problèmes linéaires avec conditions aux limites

En physique mathématique, de nombreux problèmes linéaires à valeurs aux limites sur  $\Omega$  peuvent être représentés par une équation fonctionnelle de la forme ...

$$(1) \quad \boxed{\alpha\varphi = f}$$

... où  $\alpha$  est un opérateur linéaire donné,  $f$  une fonction donnée appartenant à  $H(\Omega)$  et  $\varphi$  une fonction appartenant à  $H_\alpha^\lambda(\Omega)$ .

En général, le problème consiste à trouver  $\varphi$  solution de l'équation (1) pour  $\alpha$ ,  $f$  et  $H(\Omega)$  fixés.

#### Opérateurs symétriques

On dit que  $\alpha$  est symétrique si on a la relation ...

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \psi \end{array} \right\} \in H_\alpha^\lambda(\Omega) \quad \Leftrightarrow \langle \alpha\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \alpha\psi \rangle$$

... c'est-à-dire si  $\alpha = \alpha^*$  est un opérateur autoadjoint (réel) sur  $H_\alpha^\lambda(\Omega)$ .

### Opérateurs définis positifs

On dit qu'un opérateur  $\alpha$  est défini positif sur  $H_a^\lambda(\Omega)$  si on a les relations suivantes :

$$\varphi \in H_a^\lambda(\Omega) : \begin{cases} \langle \alpha\varphi, \varphi \rangle > 0 & \forall \varphi \neq 0 \\ \langle \alpha\varphi, \varphi \rangle = 0 & \Leftrightarrow \varphi \equiv 0 \end{cases}$$

### Opérateurs fortement positifs

On dit qu'un opérateur  $\alpha$  est fortement positif sur  $H_a^\lambda(\Omega)$  s'il est défini positif et si de plus il existe une constante positive  $k^2$  telle que pour tout  $\varphi \in H_a^\lambda(\Omega)$  on ait :

$$(2) \quad \langle \alpha\varphi, \varphi \rangle \geq k^2 \cdot \|\varphi\|_a^2$$

### ESPACE ENERGETIQUE $W_a^\lambda(\Omega)$ ASSOCIE A UN OPERATEUR $\alpha$ SYMETRIQUE ET DEFINI POSITIF

#### Produit énergétique

Soit  $\alpha$  un opérateur symétrique et défini positif sur  $H_a^\lambda(\Omega)$ . Par définition on appellera produit énergétique de  $\varphi$  et  $\psi$  appartenant à  $H_a^\lambda(\Omega)$ , le produit scalaire noté entre crochet et défini par la relation suivante :

$$(3) \quad [\varphi, \psi] = \langle \alpha\varphi, \psi \rangle$$

On remarquera que le produit énergétique satisfait bien aux axiomes des produits scalaires.

#### Espace énergétique $W_a^\lambda(\Omega)$

Le complété  $W_a^\lambda(\Omega)$  de l'espace vectoriel  $H_a^\lambda(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire  $[\varphi, \psi]$ .

Par définition, l'espace  $W_a^\lambda(\Omega)$  est appelé espace énergétique associé à l'opérateur  $\alpha$ .

### Norme énergétique

On appelle norme énergétique, ou encore énergie, de  $\varphi \in W_\alpha^\lambda(\Omega)$ , et l'on note  $\|\varphi\|_w$  l'expression définie par :

$$\|\varphi\|_w = \sqrt{[\varphi, \varphi]}$$

De plus, si  $\alpha$  est fortement positif, alors on a la relation ...

$$\|\varphi\|_H \leq \frac{1}{k} \|\varphi\|_w$$

... où  $k$  est la constante déjà définie pour les opérateurs fortement positifs.

### Espace $W_\alpha^0(\Omega)$ : définition

Par définition, nous désignerons par  $W_\alpha^0(\Omega)$  le complété de l'espace  $H_\alpha^0(\Omega)$  des fonctions  $\varphi$  appartenant à  $H_\alpha(\Omega)$  et satisfaisant aux conditions aux limites homogènes du type :

$$L\varphi|_\Sigma = 0$$

## THEOREME FONDAMENTAL DES METHODES VARIATIONNELLES

### INTRODUCTION

#### Lemme 1

##### Enoncé

Si  $\alpha$  est un opérateur linéaire défini positif sur  $W_\alpha^\lambda(\Omega)$ , alors l'équation ...

$$\begin{cases} \alpha\varphi = f \\ \varphi \in W_\alpha^\lambda(\Omega) \end{cases}$$

... admet au plus une solution  $\hat{\varphi} \in W_\alpha^\lambda(\Omega)$ .

Démonstration

En effet, soient  $\hat{\varphi}$  et  $\tilde{\varphi}$  deux solutions distinctes appartenant à  $W_\alpha^\lambda(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \alpha \hat{\varphi} &= f \\ \alpha \tilde{\varphi} &= f \\ \Rightarrow \alpha(\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \hat{\varphi} &= \tilde{\varphi} \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

Problème homogène associé

Nous avons vu précédemment que les conditions aux limites sur  $\Sigma$  étaient supposées linéaires et de la forme ...

$$L\varphi|_\Sigma = \lambda$$

... où  $\lambda$  est une fonction définie sur  $\Sigma$ .

Il est commode de considérer deux classes de conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \equiv 0 : \text{conditions aux limites homogènes} \\ \lambda \neq 0 : \text{conditions aux limites non homogènes} \end{array} \right.$$

Etant en présence d'un problème linéaire non homogène du type ...

$$(I) \quad \boxed{\varphi \in W_\alpha^\lambda(\Omega) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \varphi = f \\ L\varphi|_\Sigma = \lambda \end{array} \right.} \quad (4)$$

... nous nous proposons de trouver une fonction  $f_\psi$  de façon que, quelle que soit la fonction  $\psi$  appartenant à  $W_\alpha^\lambda(\Omega)$  et distincte de  $\varphi$ , le problème précédent soit équivalent au problème homogène associé du type :

$$(II) \quad \boxed{\varphi_0 \in W_\alpha^0(\Omega) \left\{ \begin{array}{l} \alpha \varphi_0 = f_\psi \\ L\varphi_0|_\Sigma = 0 \\ \varphi_0 = \varphi - \psi \end{array} \right.} \quad (5)$$

En résumé, on va chercher  $f_\psi$  de telle façon que toute solution  $\hat{\varphi}$  de (I) soit telle que  $\hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi} - \psi$  soit solution de (II).

Par suite de la linéarité du problème, on peut écrire les implications suivantes ...

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0 = \varphi - \psi \iff L\varphi_0 = L\varphi - L\psi \\ \varphi \in W_\alpha^\lambda(\Omega) \iff L\varphi|_\Sigma = \lambda \\ \psi \in W_\alpha^\lambda(\Omega) \iff L\psi|_\Sigma = \lambda \end{array} \right\} \implies L\varphi_0|_\Sigma = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = \varphi - \psi \\ \varphi_0 \in W_\alpha^0(\Omega) \end{array} \right.$$

... d'où il découle que  $\varphi_0 = (\varphi - \psi) \in W_\alpha^0(\Omega)$ .

En portant  $\varphi = \varphi_0 + \psi$  dans l'équation  $\mathcal{A}\varphi = f$ , on a :

$$\mathcal{A}\varphi_0 + \mathcal{A}\psi = f$$

En définitive, nous voyons que le système (I) est équivalent au système (II) à condition de poser :

$$(6) \quad \boxed{f_\psi = f - \mathcal{A}\psi}$$

N.B. : La démonstration précédente admet l'existence d'au moins une fonction  $\psi \in W_\alpha^\lambda(\Omega)$  distincte de  $\varphi$ . Nous admettrons qu'il en est bien ainsi.

### Lemme 2

#### Enoncé

Si  $\mathcal{A}$  est un opérateur linéaire symétrique défini positif sur  $W_\alpha(\Omega) = W_\alpha^\lambda(\Omega) \cup W_\alpha^0(\Omega)$ , et s'il existe une solution  $\widehat{\varphi} \in W_\alpha^\lambda(\Omega)$  au problème ...

$$\left[ \begin{array}{l} \mathcal{A}\varphi = f \\ \varphi \in W_\alpha^\lambda(\Omega) \\ f \in H(\Omega) \end{array} \right.$$

... alors cette solution réalise le minimum de la fonctionnelle  $J(\varphi)$  définie par :

$$\left[ J(\varphi) = \langle \mathcal{A}\varphi, \varphi \rangle - 2 \langle f, \varphi \rangle \right.$$

Démonstration

Par suite de la linéarité du problème, pour toute fonction  $\varphi \in W_\alpha^\lambda(\Omega)$ , il est en général possible de trouver une fonction  $\varphi_0 \in W_\alpha^0(\Omega)$  de telle façon que l'on ait  $\varphi = \hat{\varphi} + \varphi_0$  ; il s'en suit que l'on peut écrire :

$$J(\varphi) = \langle a\varphi, \varphi \rangle - 2 \langle f, \varphi \rangle$$

$$J(\varphi) = \langle a\hat{\varphi} + a\varphi_0, \hat{\varphi} + \varphi_0 \rangle - 2 \langle f, \hat{\varphi} + \varphi_0 \rangle$$

$$J(\varphi) = \langle a\hat{\varphi}, \hat{\varphi} \rangle + \langle a\hat{\varphi}, \varphi_0 \rangle + \langle a\varphi_0, \hat{\varphi} \rangle + \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle - 2 \langle f, \hat{\varphi} \rangle - 2 \langle f, \varphi_0 \rangle$$

mais :

$$\begin{cases} J(\hat{\varphi}) = \langle a\hat{\varphi}, \hat{\varphi} \rangle - 2 \langle f, \hat{\varphi} \rangle \\ \langle a\varphi_0, \hat{\varphi} \rangle = \langle \varphi_0, a\hat{\varphi} \rangle = \langle a\hat{\varphi}, \varphi_0 \rangle \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow J(\varphi) = J(\hat{\varphi}) + 2 \langle a\hat{\varphi}, \varphi_0 \rangle - 2 \langle f, \varphi_0 \rangle + \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle$$

$$J(\varphi) = J(\hat{\varphi}) + 2 \langle a\hat{\varphi} - f, \varphi_0 \rangle + \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle$$

mais  $a\hat{\varphi} = f$  par hypothèse, si bien que l'on a :

$$J(\varphi) = J(\hat{\varphi}) + \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle$$

Comme  $a$  est défini positif sur  $W_\alpha^0(\Omega)$ , il s'en suit que la quantité  $\langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle$  est toujours positive ou nulle, et l'on peut écrire ...

$$J(\varphi) \geq J(\hat{\varphi})$$

... ce qui démontre le lemme.

THEOREME FONDAMENTALEThéorème

Si  $a$  est un opérateur linéaire symétrique défini positif sur  $W_\alpha^0(\Omega)$  et s'il existe une solution  $\hat{\varphi} \in W_\alpha^\lambda(\Omega)$  au problème :

$$(7) \quad \boxed{\begin{array}{l} a\varphi = f \\ \varphi \in W_\alpha^\lambda(\Omega) \\ f \in H(\Omega) \end{array}} \quad (I)$$

... alors cette solution est unique et réalise le minimum de la fonctionnelle ...

$$(8) \quad \begin{array}{l} I(\varphi, \psi) = J(\varphi) + K(\varphi, \psi) \\ \text{avec } \begin{cases} J(\varphi) = \langle a\varphi, \varphi \rangle - 2\langle f, \varphi \rangle \\ K(\varphi, \psi) = \langle a\psi, \varphi \rangle - \langle a\varphi, \psi \rangle \end{cases} \end{array}$$

... et ceci quelle que soit la fonction  $\psi \in W_a^\lambda(\Omega)$  distincte de  $\hat{\varphi}$ .

### Démonstration

S'il existe une solution  $\hat{\varphi}$  au problème (I), alors nous avons vu qu'il existe en général une solution  $\hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi} - \psi$  au problème homogène associé (II) et nous savons d'après le lemme 1 que ces solutions  $\hat{\varphi}$  et  $\hat{\varphi}_0$  sont uniques.

$a$  étant par hypothèse symétrique défini positif sur  $W_a^0(\Omega)$ , on sait d'après le lemme 2 que la solution du problème (II) minimise la fonctionnelle :

$$J(\varphi_0) = \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle - 2\langle f, \varphi_0 \rangle$$

On se propose de montrer que  $a$  étant symétrique défini positif sur  $W_a^0(\Omega)$  et non pas forcément sur  $W_a^\lambda(\Omega)$ , alors la solution  $\hat{\varphi}$  du problème (I) minimise la fonctionnelle :

$$I(\varphi, \psi) = J(\varphi) + K(\varphi, \psi)$$

D'après les relations (5) et (6) déjà établies, on a :

$$\begin{aligned} J(\varphi_0) &= \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle - 2\langle \varphi_0, f \rangle \\ J(\varphi_0) &= \langle a\varphi - a\psi, \varphi - \psi \rangle - 2\langle \varphi - \psi, f \rangle \\ J(\varphi_0) &= \langle a\varphi, \varphi \rangle - \langle a\varphi, \psi \rangle - \langle a\psi, \varphi \rangle + \langle a\psi, \psi \rangle \\ &\quad - 2\langle \varphi, f \rangle + 2\langle \varphi, a\psi \rangle + 2\langle \psi, f \rangle - 2\langle \psi, a\psi \rangle \\ J(\varphi_0) &= \left\{ \langle a\varphi, \varphi \rangle - 2\langle \varphi, f \rangle \right\} - \left\{ \langle a\psi, \psi \rangle - 2\langle \psi, f \rangle \right\} + \left\{ \langle a\psi, \varphi \rangle - \langle a\varphi, \psi \rangle \right\} \end{aligned}$$

En posant  $J(\psi) = \langle a\psi, \psi \rangle - 2\langle \psi, f \rangle$ , il vient :

$$J(\varphi_0) = J(\varphi) - J(\psi) + K(\varphi, \psi)$$

$$\Leftrightarrow (9) \quad \boxed{J(\varphi_0) = I(\varphi, \psi) - J(\psi)}$$

On voit donc que  $I(\varphi, \psi)$  et  $J(\varphi_0)$  ne diffèrent que d'une constante  $J(\psi)$ , si bien que si  $\hat{\varphi}_0$  minimise  $J(\varphi_0)$ , il s'en suit que  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 + \psi$  minimise  $I(\varphi, \psi)$ , ce qui démontre le théorème.

Remarque : relation avec la méthode des moindres carrés

Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur qui n'est pas forcément symétrique défini positif sur  $W_a^\lambda(\Omega)$ . Soit à trouver  $\hat{\varphi} \in W_a^\lambda(\Omega)$  vérifiant l'équation :

$$\mathcal{A}\varphi = f$$

La méthode des moindres carrés consiste à rechercher la fonction  $\hat{\varphi}$  qui minimise la fonctionnelle  $F(\varphi)$  définie par :

$$\left[ F(\varphi) = \|\mathcal{A}\varphi - f\|_H^2 \right.$$

Soit  $\mathcal{A}^*$  l'opérateur linéaire adjoint de  $\mathcal{A}$  et supposons qu'il existe une solution  $\hat{\varphi}$  à notre problème ; on peut alors écrire :

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}\varphi = \mathcal{A}^*f$$

L'opérateur  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$  étant par construction défini positif, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= \langle \mathcal{A}^*\mathcal{A}\varphi, \varphi \rangle - 2 \langle \mathcal{A}^*f, \varphi \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}\varphi, \mathcal{A}\varphi \rangle - 2 \langle f, \mathcal{A}\varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\varphi - f\|_H^2 &= \langle \mathcal{A}\varphi - f, \mathcal{A}\varphi - f \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}\varphi, \mathcal{A}\varphi \rangle - 2 \langle f, \mathcal{A}\varphi \rangle + \langle f, f \rangle \\ &= J(\varphi) + \langle f, f \rangle \end{aligned}$$

On a donc :

$$\left[ J(\varphi) = \|\mathcal{A}\varphi - f\|_H^2 - \|f\|_H^2 \right.$$

par ailleurs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} K(\varphi, \psi) &= \langle \alpha^* a_{\psi, \varphi} \rangle - \langle \alpha^* a_{\varphi, \psi} \rangle \\ &= \langle a_{\psi, a\varphi} \rangle - \langle a_{\varphi, a\psi} \rangle \\ \Leftrightarrow & \left[ K(\varphi, \psi) = 0 \right] \end{aligned}$$

En définitive nous avons :

$$\begin{aligned} I(\varphi, \psi) &= J(\varphi) + K(\varphi, \psi) \\ \Leftrightarrow I(\varphi, \psi) &= \|\alpha\varphi - f\|_H^2 - \|f\|_H^2 \\ \Leftrightarrow & \left[ I(\varphi, \psi) = F(\varphi) - \|f\|_H^2 \right] \end{aligned}$$

Nous voyons donc que les fonctionnelles  $I(\varphi, \psi)$  et  $F(\varphi)$  ne diffèrent que par une constante  $-\|f\|_H^2$ , il s'en suit que si  $\hat{\varphi}$  minimise  $I(\varphi, \psi)$ , il minimise aussi  $F(\varphi)$  et réciproquement.

#### COROLLAIRE : VITESSE DE CONVERGENCE

##### Enoncé

Si  $\alpha$  est un opérateur linéaire symétrique fortement positif sur  $W_\alpha^0(\Omega)$  et s'il existe une solution  $\hat{\varphi} \in W_\alpha^\lambda(\Omega)$  au problème ...

$$\left[ \begin{array}{l} \alpha\varphi = f \\ \varphi \in W_\alpha^\lambda(\Omega) \\ f \in H(\Omega) \end{array} \right. \quad (I)$$

... alors cette solution est unique et l'on a la relation suivante ...

$$(10) \quad \left\| \varphi - \hat{\varphi} \right\|_H \leq \frac{1}{|k|} \cdot \sqrt{I(\varphi, \psi) - I(\hat{\varphi}, \psi)}$$

... où  $\varphi$  est une fonction quelconque appartenant à  $W_\alpha^\lambda(\Omega)$  et  $k$  la constante caractérisant le caractère fortement positif de  $\alpha$  sur  $W_\alpha^0(\Omega)$ .

Démonstration

Considérons le problème homogène associé ; il existe des fonctions  $\psi$ ,  $\varphi_0$ ,  $\hat{\varphi}_0$  et  $f_\psi$  telles que l'on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 + \psi \\ \hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 + \psi \\ f_\psi = f - a\psi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a\hat{\varphi}_0 = f_\psi \end{array} \right.$$

La relation (9) nous permet alors d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\varphi_0) = I(\varphi_0, \psi) - J(\psi) \\ J(\hat{\varphi}_0) = I(\hat{\varphi}_0, \psi) - J(\psi) \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} J(\varphi_0) = \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle - 2 \langle f_\psi, \varphi_0 \rangle \\ J(\hat{\varphi}_0) = \langle a\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0 \rangle - 2 \langle f_\psi, \hat{\varphi}_0 \rangle \end{array} \right.$$

Il s'en suit que l'on a :

$$I(\varphi_0, \psi) - I(\hat{\varphi}_0, \psi) = J(\varphi_0) - J(\hat{\varphi}_0)$$

Par ailleurs, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} J(\varphi_0) - J(\hat{\varphi}_0) &= \{ \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle - 2 \langle f_\psi, \varphi_0 \rangle \} - \{ \langle a\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0 \rangle - 2 \langle f_\psi, \hat{\varphi}_0 \rangle \} \\ &= \{ \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle - 2 \langle a\hat{\varphi}_0, \varphi_0 \rangle \} - \{ \langle a\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0 \rangle - 2 \langle a\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0 \rangle \} \\ &= \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle - 2 \langle a\hat{\varphi}_0, \varphi_0 \rangle + \langle a\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0 \rangle \\ &= \langle a\varphi_0, \varphi_0 \rangle - \langle \hat{\varphi}_0, a\varphi_0 \rangle - \langle a\hat{\varphi}_0, \varphi_0 \rangle + \langle a\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}_0 \rangle \\ &= \langle a\varphi_0, (\varphi_0 - \hat{\varphi}_0) \rangle - \langle a\hat{\varphi}_0, (\varphi_0 - \hat{\varphi}_0) \rangle \\ &= \langle a(\varphi_0 - \hat{\varphi}_0), (\varphi_0 - \hat{\varphi}_0) \rangle \geq k^2 \cdot \|\varphi_0 - \hat{\varphi}_0\|_H^2 \end{aligned}$$

En définitive, on a :

$$I(\varphi_0, \psi) - I(\hat{\varphi}_0, \psi) \geq k^2 \cdot \|\varphi_0 - \hat{\varphi}_0\|_H^2$$

$$\Leftrightarrow \|\varphi_0 - \hat{\varphi}_0\|_H \leq \frac{1}{|k|} \cdot \sqrt{I(\varphi_0, \psi) - I(\hat{\varphi}_0, \psi)}$$

Comme par ailleurs  $\varphi_0 - \hat{\varphi}_0 = \varphi - \hat{\varphi}$ , il s'en suit que le théorème est démontré.

Remarque : remarquons que la formule (10) précise la vitesse de convergence de  $\varphi$  vers  $\hat{\varphi}$  lorsque  $I(\varphi, \psi)$  converge vers  $I(\hat{\varphi}, \psi)$ .

## APPLICATION AU PROBLEME DIRECT

### INTRODUCTION

#### Nature du problème posé

L'équation différentielle de base de notre problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} (\vec{V}) + A \frac{\partial \varphi}{\partial t} = B \\ \text{avec } \vec{V} = - \vec{\alpha}_i \cdot C^{ij} \cdot \partial_j \varphi \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \geq 0 \end{array} \right.$$

Il s'en suit que dans le cas général où  $\partial\varphi/\partial t$  n'est pas nul, cette équation linéaire est de type parabolique par rapport à la fonction  $\varphi$  et l'opérateur  $\mathcal{B}$  défini par ...

$$\mathcal{B}\varphi = \operatorname{div} (\vec{V}) + A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

... n'est manifestement pas symétrique défini positif à cause du terme en  $\partial\varphi/\partial t$

Pour pouvoir utiliser une méthode variationnelle, il est nécessaire d'avoir un opérateur symétrique défini positif ; nous allons voir que moyennant une approximation aux différences finies portant sur la variable  $t$ , il est possible de se ramener à un problème de type elliptique auquel on pourra associer un opérateur  $\mathcal{A}$  symétrique défini positif.

Problème aux différences finies associé

Supposons que l'on recherche la répartition  $\varphi$  du potentiel à la date  $t$  sachant que l'on connaît la répartition  $\varphi^0$  à la date  $t - \Delta t$  où  $\Delta t \geq 0$  fixé est un pas de temps infiniment petit. On peut alors, en commettant une erreur de l'ordre de  $(\Delta t)^2$ , remplacer le problème initialement posé par une approximation aux différences finies du type suivant :

$$(11) \quad \operatorname{div}(\vec{V}) + \frac{A}{\Delta t} [\varphi - \varphi^0] = B$$

L'équation ainsi obtenue, est de type elliptique et on peut lui associer un opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  dont nous montrerons qu'il est symétrique défini positif sur un espace  $W_a^0(\Omega)$  convenablement choisi.

$$(12) \quad \begin{array}{l} \mathcal{A}\varphi = \operatorname{div}(\vec{V}) + \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi \\ \text{avec } \vec{V} = -\vec{\alpha}_1 \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi \end{array}$$

Si maintenant nous posons ...

$$(13) \quad f = \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi^0 + B$$

... notre problème revient à chercher les solutions  $\hat{\varphi}$  du système  $\mathcal{A}\varphi = f$  vérifiant un certain nombre de conditions aux limites.

Si nous désignons par  $C^p(\bar{\Omega})$  l'espace des fonctions  $p$  fois continuellement différentiables sur  $\bar{\Omega}$ , nous voyons que la nature de notre problème nous impose de prendre

$$(14) \quad \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} c \text{ défini positif sur } \bar{\Omega} \\ c^{ij} \in C^1(\bar{\Omega}) \end{array} \right. \\ f \in C^0(\bar{\Omega}) \\ \varphi \in C^2(\bar{\Omega}) \end{array}$$

Conditions aux limites de base

Trois types de conditions aux limites linéaires sur la frontière  $\Sigma$  du domaine  $\Omega$  étudié sont classiquement imposées :

Type I : problème de Dirichlet

Le potentiel  $\varphi$  est imposé sur le contour  $\Sigma$

$$(15) \quad \varphi|_{\Sigma} = \lambda$$

Type II : problème de Neumann

Le flux du vecteur  $\vec{V} = -C^{ij} \cdot \partial_j \varphi \cdot \vec{\alpha}_i$  à travers la frontière  $\Sigma$  est imposé en tous points de  $\Sigma$ , ce qui équivaut à dire que l'on a ...

$$(16) \quad \vec{n} \cdot \vec{V}|_{\Sigma} = \lambda$$

... où  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire à  $\Sigma$  au point considéré orienté vers l'extérieur de  $\Omega$ .

Type III : problème de Fourier

Le problème de Fourier est un mélange de conditions du type I et II, et consiste à écrire que sur la frontière  $\Sigma$  on doit avoir ...

$$(17) \quad [\vec{n} \cdot \vec{V} - \sigma \cdot \varphi]_{\Sigma} = \lambda$$

... où  $\sigma$  est une fonction non identique à zéro sur  $\Sigma$  ; en fait, par suite de la technique numérique utilisée, nous serons obligés de ne considérer que le cas où  $\sigma$  est positive ou nulle.

Conditions aux limites composites

Il est possible de construire de nouveaux types de conditions aux limites en combinant les trois types que nous venons de décrire. Une de ces combinaisons est très importante dans les applications pratiques, aussi dans ce qui suit, la désignerons-nous par "condition de type IV", le problème associé étant appelé par définition "problème mixte".

Type IV : problème mixte

Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux parties de  $\Sigma$  telles que ...

$$\begin{cases} \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset \end{cases}$$

... et soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les fonctions caractéristiques des ensembles  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Le problème mixte consiste à écrire que sur  $\Sigma_1$  on a des conditions de type Neumann et sur  $\Sigma_2$  des conditions de type Dirichlet :

$$(18) \quad \begin{cases} \sigma_1 \cdot (\vec{n} \cdot \vec{V}) |_{\Sigma} = \sigma_1 \cdot \lambda \\ \sigma_2 \cdot \varphi |_{\Sigma} = \sigma_2 \cdot \lambda \end{cases}$$

Comme  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des fonctions caractéristiques de parties de  $\Sigma$ , le signe  $|_{\Sigma}$  dans les conditions ci-dessus est superflu et on peut encore écrire :

$$(19) \quad \begin{cases} \sigma_1 \cdot (\vec{n} \cdot \vec{V}) = \sigma_1 \cdot \lambda \\ \sigma_2 \cdot \varphi = \sigma_2 \cdot \lambda \end{cases}$$

Ce type de problème est de loin le plus fréquemment rencontré dans la pratique car le domaine  $\Omega$  est souvent limité par des équipotentielles (frontière  $\Sigma_2$ ) sur lesquelles le potentiel  $\varphi$  est fixé, et des lignes de courant (frontière  $\Sigma_1$ ) tangentes au vecteur  $\vec{V}$  sur lesquelles on sait par définition que le flux  $\vec{n} \cdot \vec{V}$  est nul.

#### Espaces fonctionnels associés au problème considéré

Si nous nous référons aux notations adoptées dans nos rappels sur les opérateurs linéaires définis positifs, nous voyons que pour notre problème, nous devons prendre ...

$$(20) \quad H(\Omega) \equiv L^2(\Omega)$$

... où  $L^2(\Omega)$  sera supposé représenter l'espace vectoriel Hilbertien des fonctions réelles de carré intégrable sur  $\Omega$ , muni du produit scalaire habituel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \psi \end{array} \right\} \in L^2(\Omega) \iff \langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \varphi \cdot \psi \cdot d\omega$$

Il s'en suit que le domaine d'existence de  $\mathcal{Q}$  est identique à :

$$(21) \quad H_{\mathcal{Q}}(\Omega) \equiv L^2(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$$

D'après le paragraphe précédent, nous voyons que le domaine de définition  $H_\alpha^\lambda(\Omega)$  de  $\mathcal{A}$ , pour des conditions aux limites du type  $i$  fixées, est identique à  $M_1^\lambda(\Omega)$  défini par :

$$(22) \quad \left. \begin{aligned} \varphi \in M_1^\lambda(\Omega) &\iff \begin{cases} \varphi \in H_\alpha(\Omega) \\ \varphi|_\Sigma = \lambda \end{cases} \\ \varphi \in M_2^\lambda(\Omega) &\iff \begin{cases} \varphi \in H_\alpha(\Omega) \\ \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi|_\Sigma = \lambda \end{cases} \\ \varphi \in M_3^\lambda(\Omega) &\iff \begin{cases} \varphi \in H_\alpha(\Omega) \\ [\vec{n} \cdot \vec{\nabla} - \sigma \cdot \varphi]|_\Sigma = \lambda \end{cases} \\ \varphi \in M_4^\lambda(\Omega) &\iff \begin{cases} \varphi \in H_\alpha(\Omega) \\ \sigma_1 \cdot \vec{n} \cdot \vec{\nabla} = \sigma_1 \cdot \lambda \\ \sigma_2 \cdot \varphi = \sigma_2 \cdot \lambda \end{cases} \end{aligned} \right\} \text{avec } \left. \begin{array}{l} \sigma \geq 0 \\ \sigma \\ \sigma_2 \end{array} \right\} \neq 0$$

Dans ce qui suit, nous désignerons par  $\tilde{M}_1^\lambda(\Omega)$  le complété d'un espace  $M_1^\lambda(\Omega)$ , si bien que l'on a :

$$(23) \quad W_\alpha^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_1^\lambda(\Omega)$$

Remarque : En ce qui concerne le problème de Neumann (type II), il convient de signaler que c'est un problème beaucoup plus délicat que les trois autres et pour lequel il n'existe une solution que si la condition suivante est satisfaite :

$$(24) \quad \int_\Omega f \cdot d\omega = \int_\Sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

De plus, si cette condition est satisfaite, il existe alors une infinité de solutions définies à une constante additive près.

#### FORME DEVELOPPEE DU PRODUIT $\langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle$

##### Expression de $\mathcal{A}\varphi$

Par définition, on a la relation suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{A}\varphi = \operatorname{div}(\vec{V}) + \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi \\ \text{avec } \vec{V} = -\vec{a}_i \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi \end{cases}$$

En se référant à l'équation (15) du premier chapitre, on a ...

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \partial_i (\sqrt{\gamma} \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi)$$

... ce qui nous permet d'écrire :

$$(25) \quad \left[ \mathcal{A}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \partial_i (\sqrt{\gamma} \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi) + \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi \right]$$

Forme développée de  $\langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle &= \int_{\Omega} (\mathcal{A}\varphi) \cdot \psi \cdot d\omega \\ &= - \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \partial_i (\sqrt{\gamma} \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi) \cdot \psi \cdot d\omega + \int_{\Omega} \frac{A}{\Delta t} \varphi \cdot \psi \cdot d\omega \end{aligned}$$

Les règles de dérivation d'un produit nous permettent d'écrire ...

$$\partial_i \left\{ (\sqrt{\gamma} \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi) \cdot (\psi) \right\} = \partial_i (\sqrt{\gamma} \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi) \cdot (\psi) + (\sqrt{\gamma} \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi) \cdot \partial_i (\psi)$$

... si bien que l'on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot (\sqrt{\gamma} \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi) \cdot \partial_i (\psi) \cdot d\omega \\ &- \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \partial_i \left\{ (\sqrt{\gamma} \cdot c^{ij} \cdot \partial_j \varphi) \cdot (\psi) \right\} \cdot d\omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi \cdot \psi \cdot d\omega \end{aligned}$$

Si on introduit le vecteur  $\vec{W}$  de composantes contravariantes  $W^i$  telles que ...

$$\left[ W^i = -(\psi \cdot c^{ij}) \cdot \partial_j \varphi \right]$$

... alors la formule de Green nous permet d'écrire ...

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{W}) \cdot d\omega = \int_{\Sigma} \vec{W} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

... où  $\vec{n}$  est la normale unitaire en un point de  $\Sigma$  orientée vers l'extérieur de  $\Sigma$ . Sous forme développée, cette dernière expression peut encore s'écrire :

$$- \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \partial_i \left\{ \sqrt{\gamma} \cdot (\psi \cdot C^{ij}) \cdot \partial_j \psi \right\} \cdot d\omega = \int_{\Sigma} \vec{W} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

En portant cette expression dans le développement de  $\langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle$  on obtient :

$$(26) \quad \langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} C^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \psi \cdot d\omega + \int_{\Omega} \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi \cdot \psi \cdot d\omega + \int_{\Sigma} \vec{W} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

$$\begin{cases} \vec{n} = \text{normale unitaire extérieure à } \Sigma \\ \vec{W} = \vec{a}_i \cdot W^i \\ W^i = - (\psi \cdot C^{ij}) \cdot \partial_j \varphi \end{cases}$$

### CARACTERE SYMETRIQUE DEFINI POSITIF DE $\mathcal{A}$ SUR $W_{\mathcal{A}}^0(\Omega) = \tilde{M}_i^0(\Omega)$

#### Introduction

On se propose de montrer que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est symétrique défini positif pour les problèmes homogènes de type Dirichlet, Neuman, Fourier et mixte, c'est-à-dire sur les espaces  $W_{\mathcal{A}}^0(\Omega)$  respectivement identiques à :

$$W_{\mathcal{A}}^0(\Omega) \equiv \begin{cases} \tilde{M}_1^0(\Omega) \\ \tilde{M}_2^0(\Omega) \\ \tilde{M}_3^0(\Omega) \\ \tilde{M}_4^0(\Omega) \end{cases}$$

Considérons la relation (26) représentant la forme développée du produit  $\langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle$  ;  $A/\Delta t$  étant positif ou nul et le tenseur  $C^{ij}$  étant supposé symétrique défini positif sur  $\Omega$ , il s'en suit que les deux premières intégrales du développement de  $\langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle \dots$

$$\begin{cases} I_{\mathcal{A}}^1(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} C^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \psi \cdot d\omega \\ I_{\mathcal{A}}^2(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi \cdot \psi \cdot d\omega \end{cases}$$

... sont des quantités symétriques en  $\varphi$  et  $\psi$  et qui sont obligatoirement positives si  $\varphi = \psi$ , ou le cas échéant, nulles si  $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ . Si maintenant on considère la troisième intégrale du développement de  $\langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle$  ...

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{\mathcal{A}}^3(\varphi, \psi) = \int_{\Sigma} \vec{W} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{s} \\ \text{avec } W^i = - (\psi \cdot C^{ij}) \cdot \partial_j \varphi \end{array} \right.$$

... on a de façon évidente la propriété suivante :

$$(27) \quad \left[ \begin{array}{l} I_{\mathcal{A}}^3(\varphi, \psi) = I_{\mathcal{A}}^3(\psi, \varphi) \\ I_{\mathcal{A}}^3(\varphi, \varphi) \geq 0 \quad \forall \varphi \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathcal{A}\varphi, \psi \rangle = \langle \mathcal{A}\psi, \varphi \rangle \\ \langle \mathcal{A}\varphi, \varphi \rangle > 0 \quad \forall \varphi \neq 0 \\ \langle \mathcal{A}\varphi, \varphi \rangle = 0 \iff \varphi \equiv 0 \end{array} \right.$$

Autrement dit, si les conditions du membre de gauche de la relation (27) sont satisfaites, alors l'opérateur  $\mathcal{A}$  est symétrique défini positif.

Cas où  $W_{\mathcal{A}}^0(\Omega) = \tilde{M}_1^0(\Omega)$

Si  $\psi \in W_{\mathcal{A}}^0(\Omega)$ , alors le vecteur  $\vec{W}$  de composantes contravariantes ...

$$W^i = - (\psi \cdot C^{ij}) \cdot \partial_j \varphi$$

... est nul sur la frontière  $\Sigma$  quel que soit  $\varphi \in W_{\mathcal{A}}^0(\Omega)$ , car on a :

$$\psi|_{\Sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{W}|_{\Sigma} = \vec{0}$$

Il s'en suit que l'intégrale  $I_{\mathcal{A}}^3(\varphi, \psi)$  est toujours nulle, ce qui fait que les conditions (27) sont toujours vérifiées. On peut alors conclure que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est symétrique défini positif sur  $\tilde{M}_1^0(\Omega)$ .

Cas où  $W_{\mathcal{A}}^0(\Omega) = \tilde{M}_2^0(\Omega)$

Si  $\psi \in W_{\mathcal{A}}^0(\Omega)$ , alors le vecteur  $\vec{W}$  de composantes contravariantes ...

$$W^i = - \psi \cdot C^{ij} \cdot \partial_j \varphi$$

... est tel que sur la frontière  $\Sigma$  on ait :

$$\vec{W} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = 0$$

En effet, il est évident que  $\vec{W} = \psi \cdot \vec{V}$ , si bien que l'on a ...

$$\vec{W} \cdot \vec{n} = \psi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}$$

... mais comme  $\varphi \in W_{\alpha}^0(\Omega)$ , on a sur la frontière  $\Sigma$  la condition imposée  $\vec{V} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = 0$ , d'où la relation  $\vec{W} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = 0$ .

En définitive, l'intégrale  $I_{\alpha}^3(\varphi, \psi)$  est toujours nulle si bien que l'on peut conclure que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est symétrique défini positif sur  $\tilde{M}_2^0(\Omega)$  car les conditions (27) sont alors remplies.

Cas où  $W_{\alpha}^0(\Omega) = \tilde{M}_3^0(\Omega)$

La fonction  $\varphi$  appartenant à  $W_{\alpha}^0(\Omega)$ , on peut écrire ...

$$[\vec{n} \cdot \vec{V} - \sigma \cdot \varphi]_{\Sigma} = 0$$

... où  $\sigma \geq 0$  est une fonction non identiquement nulle sur  $\Sigma$ . Mais comme par définition  $\vec{W} = \psi \cdot \vec{V}$ , on a de façon équivalente :

$$[\vec{n} \cdot \vec{W} - \sigma \cdot \varphi \cdot \psi]_{\Sigma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{W} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = \sigma \cdot \varphi \cdot \psi|_{\Sigma}$$

$$\Leftrightarrow I_{\alpha}^3(\varphi, \psi) = \int_{\Sigma} \sigma \cdot \varphi \cdot \psi \cdot ds$$

En conséquence, nous voyons que dans ce cas,  $I_{\alpha}^3(\varphi, \psi)$  vérifie encore les conditions du membre de gauche de la relation (27), si bien que l'on peut dire une fois de plus que  $\mathcal{A}$  est symétrique défini positif sur  $\tilde{M}_3^0(\Omega)$ .

Cas où  $W_\alpha^0(\Omega) = \tilde{M}_4^0(\Omega)$

Pour ce type de problème, nous allons décomposer la fonctionnelle  $I_\alpha^3(\varphi, \psi)$  en deux morceaux suivant la relation :

$$I_\alpha^3(\varphi, \psi) = \int_{\Sigma_1} \sigma_1 \cdot \vec{w} \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_{\Sigma_2} \sigma_2 \cdot \vec{w} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

Par ailleurs, on a par définition :

$$\vec{w} = \psi \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \cdot \vec{w} \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cdot \psi \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \\ \sigma_2 \cdot \vec{w} \cdot \vec{n} = \sigma_2 \cdot \psi \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \end{cases}$$

mais, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  appartenant à  $\tilde{M}_4^0(\Omega)$ , on a :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} &= \sigma_1 \cdot \lambda \\ \sigma_2 \cdot \psi &= \sigma_2 \cdot \lambda \end{aligned} \right\} \text{ avec } \lambda = 0$$

En définitive,  $\lambda$  étant nul sur la frontière  $\Sigma$ , on peut écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1 \cdot \vec{w} \cdot \vec{n} &= 0 && \text{car } \sigma_1 \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \\ \sigma_2 \cdot \vec{w} \cdot \vec{n} &= 0 && \text{car } \sigma_2 \cdot \psi = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow I_\alpha^3(\varphi, \psi) = I_\alpha^3(\psi, \varphi) = 0$$

Les conditions du membre de gauche de la relation (27) sont donc une fois de plus vérifiées, il s'en suit donc que l'opérateur  $\alpha$  est symétrique défini positif sur  $\tilde{M}_4^0(\Omega)$ .

FORME DEVELOPPEE DE LA FONCTIONNELLE  $K(\varphi, \psi)$  sur  $W_\alpha^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_4^\lambda(\Omega)$

#### introduction

Nous nous proposons maintenant de calculer la fonctionnelle  $K(\varphi, \psi)$  introduite dans la relation (8) :

$$\left[ K(\varphi, \psi) = \langle \alpha \psi, \varphi \rangle - \langle \alpha \varphi, \psi \rangle \right]$$

Pour cela, considérons les deux vecteurs  $\vec{W}_1$  et  $\vec{W}_2$  dont les composantes contravariantes sont données par les relations suivantes pour  $\varphi$  et  $\psi$  appartenant à  $W_\alpha^\lambda(\Omega)$  :

$$(28) \quad \left. \begin{aligned} W_1^i &= - (\psi \cdot C^{ij}) \cdot \partial_j \varphi \\ W_2^i &= - (\varphi \cdot C^{ij}) \cdot \partial_j \psi \end{aligned} \right\} (\varphi, \psi) \in W_\alpha^\lambda(\Omega)$$

Sous forme vectorielle, on peut encore écrire les relations suivantes, équivalentes à celles formulées ci-dessus :

$$(29) \quad \left[ \begin{aligned} \vec{W}_1 &= \psi \cdot \vec{V} \\ \vec{W}_2 &= \varphi \cdot \vec{U} \end{aligned} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{U} &= U^i \cdot \vec{\alpha}_i \\ U^i &= - C^{ij} \cdot \partial_j \psi \end{aligned} \right.$$

En calculant  $\langle \alpha\varphi, \psi \rangle$  et  $\langle \alpha\psi, \varphi \rangle$  à l'aide de la formule (26), on obtient en soustrayant membre à membre :

$$(30) \quad \left[ \begin{aligned} K(\varphi, \psi) &= \int_\Sigma \vec{W}_2 \cdot \vec{n} \cdot ds - \int_\Sigma \vec{W}_1 \cdot \vec{n} \cdot ds \\ K(\varphi, \psi) &= \int_\Sigma (\vec{W}_2 - \vec{W}_1) \cdot \vec{n} \cdot ds \end{aligned} \right.$$

Cas où  $W_\alpha^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_1^\lambda(\Omega)$

Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  appartenant à  $\tilde{M}_1^\lambda(\Omega)$ , on a :

$$\begin{aligned} \varphi|_\Sigma &= \psi|_\Sigma = \lambda \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \vec{W}_1|_\Sigma &= + \lambda \cdot \vec{V} \\ \vec{W}_2|_\Sigma &= + \lambda \cdot \vec{U} \end{aligned} \right. \\ \Leftrightarrow (31) \quad \left[ \begin{aligned} K(\varphi, \psi) &= \int_\Sigma \lambda \cdot \vec{U} \cdot \vec{n} \cdot ds - \int_\Sigma \lambda \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Cas où  $W_A^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_2^\lambda(\Omega)$

Si les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  appartiennent à  $\tilde{M}_2^\lambda(\Omega)$ , on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{W}_1|_\Sigma = \lambda \cdot \psi|_\Sigma \\ \vec{n} \cdot \vec{W}_2|_\Sigma = \lambda \cdot \varphi|_\Sigma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [\vec{W}_2 - \vec{W}_1]_\Sigma \cdot \vec{n} = \lambda \cdot [\varphi - \psi]_\Sigma$$

$$\Leftrightarrow (32) \quad \left[ K(\varphi, \psi) = \int_\Sigma \lambda \cdot (\varphi - \psi) \cdot ds \right]$$

Cas où  $W_A^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_3^\lambda(\Omega)$

Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  appartenant à  $\tilde{M}_3^\lambda(\Omega)$ , on a par définition :

$$\begin{cases} [\vec{n} \cdot \vec{W}_1 - \sigma \varphi \cdot \psi]_\Sigma = \lambda \cdot \psi|_\Sigma \\ [\vec{n} \cdot \vec{W}_2 - \sigma \varphi \cdot \psi]_\Sigma = \lambda \cdot \varphi|_\Sigma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [\vec{W}_2 - \vec{W}_1]_\Sigma \cdot \vec{n} = \lambda \cdot [\varphi - \psi]_\Sigma$$

$$\Leftrightarrow (33) \quad \left[ K(\varphi, \psi) = \int_\Sigma \lambda \cdot (\varphi - \psi) \cdot ds \right]$$

Cas où  $W_A^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_4^\lambda(\Omega)$

posons

$$\begin{cases} K_1(\varphi, \psi) = \int_\Sigma \sigma_1 \cdot (\vec{W}_2 - \vec{W}_1) \cdot \vec{n} \cdot ds \\ K_2(\varphi, \psi) = \int_\Sigma \sigma_2 \cdot (\vec{W}_2 - \vec{W}_1) \cdot \vec{n} \cdot ds \end{cases}$$

On peut alors écrire :

$$K(\varphi, \psi) = K_1(\varphi, \psi) + K_2(\varphi, \psi)$$

Par ailleurs, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  appartenant à  $\tilde{M}_4^\lambda(\Omega)$ , on peut écrire les relations suivantes, compte tenu des relations (29) :

$$\begin{cases} \sigma_1 \cdot \vec{W}_1 \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cdot \lambda \psi \\ \sigma_1 \cdot \vec{W}_2 \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cdot \lambda \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_2 \cdot \vec{W}_1 = \sigma_2 \cdot \lambda \vec{V} \\ \sigma_2 \cdot \vec{W}_2 = \sigma_2 \cdot \lambda \vec{U} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow K_1(\varphi, \psi) = \int_{\Sigma} \sigma_1 \cdot \lambda \cdot (\varphi - \psi) \cdot ds \\
 & K_2(\varphi, \psi) = \int_{\Sigma} \sigma_2 \cdot \lambda \cdot \left\{ \vec{n} \cdot \vec{U} - \vec{n} \cdot \vec{V} \right\} \cdot ds \\
 & \Leftrightarrow (34) \quad \left[ \begin{aligned} K(\varphi, \psi) &= \int_{\Sigma} \sigma_1 \cdot \lambda \cdot (\varphi - \psi) \cdot ds \\ &+ \int_{\Sigma} \sigma_2 \cdot \lambda \cdot \left\{ \vec{n} \cdot \vec{U} - \vec{n} \cdot \vec{V} \right\} \cdot ds \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

FORME DEVELOPPEE DE LA FONCTIONNELLE  $I(\varphi, \psi)$  sur  $W_Q^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_1^\lambda(\Omega)$

Introduction : forme développée de  $J(\varphi)$

Par définition, d'après la relation (8), on a :

$$\left[ J(\varphi) = \langle a\varphi, \varphi \rangle - 2 \langle f, \varphi \rangle \right.$$

A l'aide de la formule (26), on peut développer la quantité  $\langle a\varphi, \varphi \rangle$  et on obtient :

$$\begin{aligned}
 \langle a\varphi, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} C^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \varphi \cdot d\omega + \int_{\Omega} \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi^2 \cdot d\omega + \int_{\Sigma} \vec{w} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \\
 \Leftrightarrow \langle a\varphi, \varphi \rangle &= \int_{\Omega} C^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \varphi \cdot d\omega + \int_{\Omega} \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi^2 \cdot d\omega + \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds
 \end{aligned}$$

par ailleurs on a :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \left( \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi^0 + B \right) \cdot \varphi \cdot d\omega$$

En rassemblant les deux derniers résultats obtenus, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 J(\varphi) &= \int_{\Omega} C^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \varphi \cdot d\omega \\
 &+ 2 \int_{\Omega} \frac{A}{\Delta t} \cdot \left( \frac{1}{2} \varphi - \varphi^0 \right) \cdot \varphi \cdot d\omega - 2 \int_{\Omega} B \cdot \varphi \cdot d\omega \\
 &+ \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds
 \end{aligned}$$

En définitive, en posant ...

$$(35) \quad \boxed{\beta = \frac{A}{\Delta t} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \varphi - \varphi^0 \right]}$$

... on obtient :

$$(36) \quad \left[ \begin{array}{l} J(\varphi) = 2 \cdot [I^D(\varphi) + I^T(\varphi)] + \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} I^D(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} c^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \varphi \cdot d\omega - \int_{\Omega} B \cdot \varphi \cdot d\omega \\ I^T(\varphi) = \int_{\Omega} \beta \varphi \cdot d\omega \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les notations  $I^D$  et  $I^T$  apparaîtront plus clairement par la suite, où nous verrons que  $I^D$  est un terme correspondant au problème de type Dirichlet et  $I^T$  est un terme qui intervient dans le cas d'un problème transitoire.

Cas où  $W_{\alpha}^{\lambda}(\Omega) = \tilde{M}_1^{\lambda}(\Omega)$

Dans ce cas, en se référant aux formules (8) et (31), on peut écrire :

$$\begin{aligned} I(\varphi, \psi) &= J(\varphi) + K(\varphi, \psi) \\ \Leftrightarrow I(\varphi, \psi) &= 2 \cdot [I^D(\varphi) + I^T(\varphi)] + \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \\ &\quad - \int_{\Sigma} \lambda \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_{\Sigma} \lambda \cdot \vec{U} \cdot \vec{n} \cdot ds \end{aligned}$$

mais comme la fonction  $\varphi$  appartient à  $\tilde{M}_1^{\lambda}(\Omega)$ , on a  $\varphi|_{\Sigma} = \lambda$  si bien qu'en définitive, on peut écrire :

$$(37) \quad \left[ I(\varphi, \psi) = 2 \cdot [I^D(\varphi) + I^T(\varphi)] + \int_{\Sigma} \lambda \cdot \vec{U} \cdot \vec{n} \cdot ds \right.$$

Cas où  $W_{\alpha}^{\lambda}(\Omega) = \tilde{M}_2^{\lambda}(\Omega)$

Les formules (9), (32) et (36) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} I(\varphi, \psi) &= J(\varphi) + K(\varphi, \psi) \\ \Leftrightarrow I(\varphi, \psi) &= 2 \cdot [I^D(\varphi) + I^T(\varphi)] + \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \\ &\quad + \int_{\Sigma} \lambda \varphi \cdot ds - \int_{\Sigma} \lambda \psi \cdot ds \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi$  appartenant à  $M_2^\lambda(\Omega)$ , on a la relation  $\vec{V} \cdot \vec{n}|_\Sigma = \lambda$ , si bien que l'expression ci-dessus peut s'écrire après simplification :

$$(38) \quad \left[ I(\varphi, \psi) = 2 \cdot [I^D(\varphi) + I^T(\varphi)] + 2 \cdot \int_\Sigma \lambda \varphi \cdot ds - \int_\Sigma \lambda \psi \cdot ds \right.$$

Cas où  $W_2^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_3^\lambda(\Omega)$

A l'aide des formules (8), (33) et (36), on peut écrire :

$$I(\varphi, \psi) = J(\varphi) + K(\varphi, \psi)$$

$$\Leftrightarrow \quad I(\varphi, \psi) = 2 \cdot [I^D(\varphi) + I^T(\varphi)] + \int_\Sigma \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_\Sigma \lambda \varphi \cdot ds - \int_\Sigma \lambda \psi \cdot ds$$

mais la fonction  $\varphi$  appartenant à  $\tilde{M}_3^\lambda(\Omega)$ , on a la relation :

$$[\vec{V} \cdot \vec{n} - \sigma \varphi]_\Sigma = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{V} \cdot \vec{n}|_\Sigma = \lambda + \sigma \varphi|_\Sigma$$

En définitive, en portant ce résultat dans l'expression développée de  $I(\varphi, \psi)$ , on obtient :

$$(39) \quad \left[ I(\varphi, \psi) = 2 \cdot [I^D(\varphi) + I^T(\varphi)] + 2 \cdot \int_\Sigma \lambda \varphi \cdot ds + \int_\Sigma \sigma \varphi^2 \cdot ds - \int_\Sigma \lambda \psi \cdot ds \right.$$

Cas où  $W_2^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_4^\lambda(\Omega)$

La fonction  $\varphi$  appartenant à  $\tilde{M}_4^\lambda(\Omega)$ , on a, par définition, les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cdot \lambda \\ \sigma_2 \cdot \varphi = \sigma_2 \cdot \lambda \end{array} \right.$$

Considérons maintenant l'intégrale sur  $\Sigma$  qui apparaît au deuxième membre de  $J(\varphi)$  dans la relation (36) ; on peut la décomposer sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds &= \int_{\Sigma} \sigma_1 \cdot \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_{\Sigma} \sigma_2 \cdot \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \\ \Leftrightarrow (40) \quad \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds &= \int_{\Sigma} \sigma_1 \cdot \varphi \cdot \lambda \cdot ds + \int_{\Sigma} \sigma_2 \cdot \lambda \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \end{aligned}$$

Par ailleurs, les formules (8) et (36) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} I(\varphi, \psi) &= J(\varphi) + K(\varphi, \psi) \\ \Leftrightarrow (41) \quad I(\varphi, \psi) &= 2 \cdot \left[ I^D(\varphi) + I^T(\varphi) \right] + \left[ \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds + K(\varphi, \psi) \right] \end{aligned}$$

En exprimant le deuxième crochet du développement de  $I(\varphi, \psi)$  à l'aide des relations (34) et (40), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds + K(\varphi, \psi) &= \int_{\Sigma} \sigma_1 \varphi \lambda \cdot ds + \int_{\Sigma} \sigma_2 \lambda \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \\ &+ \int_{\Sigma} \sigma_1 \lambda \varphi \cdot ds - \int_{\Sigma} \sigma_1 \lambda \psi \cdot ds \\ &- \int_{\Sigma} \sigma_2 \lambda \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_{\Sigma} \sigma_2 \lambda \vec{n} \cdot \vec{U} \cdot ds \\ \Leftrightarrow \int_{\Sigma} \varphi \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds + K(\varphi, \psi) &= 2 \cdot \int_{\Sigma} \sigma_1 \lambda \varphi \cdot ds - \int_{\Sigma} \sigma_1 \lambda \psi \cdot ds \\ &+ \int_{\Sigma} \sigma_2 \lambda \vec{n} \cdot \vec{U} \cdot ds \end{aligned}$$

En portant cette dernière relation dans l'expression (41) on a le résultat recherché :

$$(42) \quad \left[ \begin{aligned} I(\varphi, \psi) &= 2 \cdot \left[ I^D(\varphi) + I^T(\varphi) \right] + 2 \cdot \int_{\Sigma} \sigma_1 \lambda \varphi \cdot ds \\ &- \int_{\Sigma} \sigma_1 \lambda \psi \cdot ds + \int_{\Sigma} \sigma_2 \lambda \vec{n} \cdot \vec{U} \cdot ds \end{aligned} \right]$$

RESUMEDéfinition

Posons tout d'abord :

$$(43) \quad \begin{aligned} I^{D_1}(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \varphi \cdot d\omega \\ I^{D_2}(\varphi) &= - \int_{\Omega} B \cdot \varphi \cdot d\omega \end{aligned}$$

Par définition, nous appellerons respectivement fonctionnelles de Dirichlet, de Neuman, de Fourier, du problème mixte et du problème transitoire, les intégrales suivantes :

$$(44) \quad \begin{aligned} I^D(\varphi) &= I^{D_1}(\varphi) + I^{D_2}(\varphi) \\ I^N(\varphi) &= \int_{\Sigma} \lambda \varphi \cdot ds \\ I^F(\varphi) &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\Sigma} \sigma \varphi^2 \cdot ds \\ I^M(\varphi) &= \int_{\Sigma} \sigma_1 \lambda \varphi \cdot ds \\ I^T(\varphi) &= \int_{\Omega} \beta \varphi \cdot d\omega \end{aligned}$$

avec :

$$(45) \quad \beta = \frac{A}{\Delta t} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \varphi - \varphi^0 \right]$$

Hypothèses

- a) soit  $\{\vec{\alpha}_1, z^1\}$  un repère de l'espace  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $\Omega$  un domaine ouvert, de fermeture  $\bar{\Omega}$ , inclus dans  $\mathbb{R}^n$ , et possédant une frontière  $\Sigma$  suffisamment régulière ;
- b) soit  $\mathcal{C}(\vec{z})$  un champ de tenseurs de composantes  $C^{ij}$  symétriques, deux fois contravariantes et défini positif sur  $\Omega$ .

- c) soit  $H_a^\lambda(\Omega) = M_1^\lambda(\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $\varphi$  appartenant à l'espace  $L^2(\Omega)$  des fonctions réelles de carré intégrable sur  $\Omega$ , vérifiant des conditions aux limites linéaires du type  $i$  ( $i = I, II, III, IV$ ) sur la frontière  $\Sigma$  ...

$$\varphi \in M_1^\lambda(\Omega) \iff L\varphi|_\Sigma = \lambda$$

... et telles que l'opération ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}\varphi = \operatorname{div}(\vec{V}) + \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi \\ \text{avec } \vec{V} = -\vec{\alpha}_i \cdot C^{ij} \cdot \partial_j \varphi \end{array} \right.$$

... ait un sens dans le domaine  $\Omega$ .

- d) soit  $W_a^\lambda(\Omega) = \tilde{M}_1^\lambda(\Omega)$  le complété de  $H_a^\lambda(\Omega) = M_1^\lambda(\Omega)$ .

- e) soit  $f \in L^2(\Omega)$  une fonction du type ...

$$\left\{ f = \frac{A}{\Delta t} \cdot \varphi^0 + B \right.$$

... où  $\varphi^0 \in W_a^{\lambda 0}(\Omega)$  et où  $\frac{A}{\Delta t} \geq 0$  et  $B$  sont des fonctions de  $\vec{x}$  appartenant à  $L^2(\Omega)$ .

### Conclusions

#### Enoncé

S'il existe une fonction  $\hat{\varphi} \in W_a^\lambda(\Omega)$  vérifiant l'équation ...

$$\left[ \mathcal{A}\varphi = f \right.$$

... alors cette fonction est unique et réalise dans  $W_a^\lambda(\Omega)$  le minimum respectivement de la fonctionnelle linéaire :

$$(46) \quad \left[ \begin{array}{ll} I(\varphi) = I^D(\varphi) + I^T(\varphi) & \text{si le problème est de type I (Dirichlet)} \\ I(\varphi) = I^D(\varphi) + I^N(\varphi) + I^T(\varphi) & \text{si le problème est de type II (Neuman)} \\ I(\varphi) = I^D(\varphi) + I^N(\varphi) + I^F(\varphi) + I^T(\varphi) & \text{si le problème est de type III (Fourier)} \\ I(\varphi) = I^D(\varphi) + I^M(\varphi) + I^T(\varphi) & \text{si le problème est de type IV (mixte)} \end{array} \right.$$

Démonstration

Ce résultat est évident en vertu du théorème fondamental, compte tenu que les fonctionnelles introduites ci-dessus ne diffèrent des fonctionnelles (37), (38), (39) et (42) que par des termes en  $\psi$ , donc constantes par rapport à  $\varphi$ .

Remarque : forme matricielle de  $I^D(\varphi)$

Les relations (11) de la première partie nous permettent d'écrire :

$$C^{ij} \cdot \partial_i \varphi \cdot \partial_j \varphi = [\text{grad} \varphi]^t \cdot [C] \cdot [\text{grad} \varphi]$$

on a alors la relation suivante :

(47)

$$\begin{aligned} I^D(\varphi) &= I^{D_1}(\varphi) + I^{D_2}(\varphi) \\ I^{D_1}(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\text{grad} \varphi]^t \cdot [C] \cdot [\text{grad} \varphi] \cdot d\omega \\ I^{D_2}(\varphi) &= - \int_{\Omega} B \cdot \varphi \cdot d\omega \end{aligned}$$

METHODE DES ELEMENTS FINIS

INTRODUCTION

Partant d'un problème linéaire du type ...

$$A \varphi = f$$

... nous nous sommes ramenés à la recherche du minimum d'une intégrale  $I(\varphi)$  sous la contrainte  $\varphi \in W_A^\lambda(\Omega)$ .

Avant toute chose, nous devons trouver une technique numérique permettant le calcul approché de l'intégrale  $I(\varphi)$  et ceci quelle que soit la fonction  $\varphi$ . Pour cela, deux grandes possibilités s'offrent à nous :

- a) approcher globalement la fonction  $\varphi$  sur tout le domaine  $\Omega$  par une fonction  $\varphi^*$  et calculer numériquement l'intégrale  $I(\varphi^*)$ ,

- b) partager  $\Omega$  en domaines partiels  $\Omega_e$  et approcher la fonction  $\varphi$  par une fonction  $\varphi_e^*$  sur chaque morceau  $\Omega_e$  du domaine  $\Omega$ , puis calculer numériquement l'intégrale  $I(\varphi_e^*)$  sur chaque morceau ; enfin rassembler tous les morceaux pour calculer  $I(\varphi^*)$  sur tout le domaine  $\Omega$ .

La première technique nous conduit aux méthodes classiques du type "méthode de Ritz" ou encore "méthode de Galerkin". La deuxième technique conduit à la "méthode des éléments finis" à laquelle nous allons nous intéresser maintenant.

### METHODE DES ELEMENTS FINIS

#### Introduction

La méthode des éléments finis consiste à construire tout d'abord un pavage jointif de  $\Omega$  constitué par un nombre fini d'éléments  $\Omega_e$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_e \Omega_e = \Omega \\ \Omega_{e_1} \cap \Omega_{e_2} = \emptyset \end{array} \right.$$

Si  $\chi_e$  est la fonction caractéristique de l'élément  $\Omega_e$ , on peut alors écrire :

$$\left[ \begin{array}{l} I_e(\Omega) = I(\chi_e, \varphi) \\ I(\Omega) = \sum_e I_e(\Omega) \end{array} \right.$$

Soit  $\{\vec{z}_1\}_e = \{\vec{z}_{1_1}, \vec{z}_{1_2}, \dots, \vec{z}_{1_m}\}$  un ensemble de  $m$  points choisis à l'avance et répartis sur le domaine  $\Omega_e$  ; supposons que l'on approche  $\varphi$  sur chaque élément  $\Omega_e$  par une fonction  $\varphi_e^*$  dépendant de  $m$  paramètres choisis de façon que l'on ait :

$$\left[ \vec{z}_1 \in \{\vec{z}_1\}_e \Rightarrow \varphi_e^*(\vec{z}_1) = \varphi(\vec{z}_1) \right.$$

On peut alors calculer une valeur approchée ...

$$I_e^*(\varphi) = I_e(\varphi_e^*) = I_e^*(\{\varphi_i\}_e)$$

... où  $\{\varphi_i\}_e$  désigne l'ensemble des valeurs prises par la fonction  $\varphi$  aux différents points  $\vec{z}_i \in \{\vec{z}_i\}_e$ .

Par suite, on peut écrire ...

(48)

$$I^*(\varphi) = \sum_e I_e^*(\varphi) = I^*(\{\varphi_i\})$$

... où  $\{\varphi_i\}$  désigne la réunion des ensembles  $\{\varphi_i\}_e$  :

(49)

$$\{\varphi_i\} = \bigcup_e \{\varphi_i\}_e$$

#### Recherche d'une solution approchée $\hat{\varphi}$

Toute l'étude suppose que l'on utilise des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  vérifiant des conditions au contour du type  $L\varphi|_{\Sigma} = \lambda$ , c'est-à-dire appartenant à une classe construite  $W_{\Omega}^{\lambda}(\Omega)$  de fonctions en général non explicites et que l'on devra par conséquent approcher.

De façon plus précise, la méthode des éléments finis consiste à approcher, localement sur chaque élément  $\Omega_e$ , les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  par des fonctions  $\varphi^*$  et  $\psi^*$  dépendant des quantités  $\{\varphi_i\}_e$  et  $\{\psi_i\}_e$  qui représentent respectivement les valeurs inconnues prises par  $\varphi$  et  $\psi$  aux points  $\{z_i\}_e$  appartenant à  $\Omega_e$  ; en fait, cette façon de faire équivaut à une discrétisation du problème où les inconnues sont en fin de compte les ensembles de valeurs  $\{\varphi_i\}$  et  $\{\psi_i\}$  ainsi définis :

$$\{\varphi_i\} = \bigcup_e \{\varphi_i\}_e$$

$$\{\psi_i\} = \bigcup_e \{\psi_i\}_e$$

De la même façon, nous allons être amenés à discrétiser les conditions au contour en fonction des valeurs  $\varphi_i$  correspondant à des points  $\vec{z}_i \in \Sigma$  ; supposons que l'on soit arrivé à discrétiser les conditions aux limites de façon à pouvoir les écrire sous une forme matricielle du type ...

$$[L] \cdot [\Phi_L] = [\Lambda]$$

... où  $[L]$  est une matrice carrée donnée,  $[\Lambda]$  une matrice colonne donnée, et  $[\Phi_L]$  la matrice colonne des  $\varphi_i$  appartenant à  $\{\varphi_i\}$  et correspondant à des points  $\vec{z}_i \in \Omega$  où sont imposées des conditions aux limites du type  $L \cdot \varphi|_{\Sigma} = \lambda$ .

Soit  $[\Phi]$  le vecteur colonne partitionné ...

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_I \\ \Phi_L \end{bmatrix}$$

... où  $[\Phi_I]$  est la matrice des  $\varphi_i$  appartenant à  $\{\varphi_i\}$  et correspondant à des points  $\vec{z}_i \in \Omega$  où ne sont pas imposées des conditions aux limites. Si maintenant on désigne par  $[M]$  un vecteur colonne de multiplicateurs de Lagrange de même taille que  $[\Phi_L]$ , la recherche des  $\varphi_i \in \{\varphi_i\}$  minimisant l'intégrale  $I(\{\varphi_i\}) \equiv I([\Phi])$  et satisfaisant aux conditions aux limites revient à chercher la matrice  $[\Phi]$  minimisant la fonction de Lagrange  $\mathcal{L}([\Phi], [M])$  définie par :

$$(50) \quad \mathcal{L}([\Phi], [M]) = I([\Phi]) + [M]^t \cdot \{ [L] \cdot [\Phi_L] - [\Lambda] \}$$

En écrivant que les dérivées partielles de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $[\Phi]$  et à  $[M]$  sont nulles, on obtient un système d'équations dont la solution  $[\hat{\Phi}]$  correspond à un optimum pour  $\mathcal{L}$ ; il ne reste plus alors qu'à vérifier que l'optimum ainsi obtenu est bien un minimum.

#### Cas du problème direct

Dans le cas plus particulier du problème direct qui nous intéresse, il est intéressant de constater que la fonctionnelle  $I(\varphi)$  ne fait plus intervenir que des dérivées partielles par rapport à  $\varphi$  au plus d'ordre 1. Il s'en suit que si nous choisissons pour fonction approchante sur chaque élément  $\Omega_e$ , un polynôme  $\varphi_e^*$ , il suffira que celui-ci soit au moins du premier degré pour convenir à notre étude.

Supposons que l'on travaille dans  $\mathbb{R}^n$  et que  $\varphi_e^*$  soit un polynôme du premier degré, celui-ci sera entièrement déterminé si on connaît  $\varphi_e^*(\vec{z}_i) = \varphi(\vec{z}_i) = \varphi_i$  en  $n+1$  points  $\vec{z}_i$  du domaine  $\Omega_e$ ; dans ce cas, il suffit de prendre pour  $\Omega_e$ , le simplexe  $\Omega_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}$  de sommets  $\{i\}_e = \{i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\}$  et de

choisir l'ensemble  $\{\varphi_i\}_e$  tel que l'on ait :

$$\{\varphi_i\}_e = [\varphi(\vec{z}_i) : i \in \{i\}_e]$$

En particulier, dans le cas du problème bidimensionnel que nous allons traiter numériquement à titre d'exemple, nous prendrons pour domaines  $\Omega_e$ , des triangles  $\Omega_{ijk}$  de sommets  $i, j$  et  $k$ .

### REMARQUES

#### Remarque 1

On peut démontrer à l'aide des inégalités de Friedrich et de Poincaré que l'opérateur  $A$  rencontré dans le problème direct est non seulement symétrique défini positif, mais aussi fortement positif sur  $W^0_A(\Omega)$  ; nous admettrons ce résultat car la démonstration n'apporterait aucun résultat intermédiaire exploitable dans l'étude qui va suivre.

L'opérateur  $A$  du problème direct étant fortement positif, il s'en suit alors, d'après le corollaire du théorème fondamental que la relation (10) est vérifiée et s'écrit dans le cas particulier qui nous intéresse ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\varphi^* - \hat{\varphi}\|_H \leq \frac{1}{|k|} \sqrt{I(\varphi^*) - I(\hat{\varphi})} \\ \text{avec } I(\varphi^*) = I^*(\varphi) \end{array} \right.$$

... d'où il découle que si  $I(\varphi^*) = I^*(\varphi)$  converge vers  $I(\hat{\varphi})$ , alors  $\varphi^*$  converge vers  $\hat{\varphi}$ .

#### Remarque 2

Dans le cas du problème direct, il est intéressant de constater que la méthode des éléments finis rentre directement en concurrence avec la méthode des différences finies et on peut alors se poser la question des mérites comparés de ces deux techniques.

Il convient tout d'abord de remarquer que ces deux méthodes sont les techniques les plus élémentaires utilisées pour approcher  $A\varphi = f$  ; la première méthode est plus restreinte (nécessité d'avoir  $A$  symétrique défini positif) et le fait de n'avoir à approcher que des dérivées premières permet d'explicitier l'approximation quel que soit le simplexe  $\Omega_e$ , alors que la méthode des différences finies n'est maniable que pour des maillages rectilignes et des contours simples.

# B ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME STATIONNAIRE DE TYPE DIRICHLET BIDIMENSIONNEL

## DISCRETISATION DU PROBLEME EN ELEMENTS FINIS

### INTRODUCTION

#### Repère utilisé, notations

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au cas d'un problème stationnaire et bidimensionnel. Pour cette étude, nous prendrons pour repère  $\{\vec{a}_1, z_1\}$ , le repère de coordonnées rectilignes orthonormées  $\{\vec{u}_1, x^1\}$  introduit au début du premier chapitre. En fait, nous utiliserons la notation classique pour les problèmes bidimensionnels et nous poserons :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = x \\ x^2 = y \end{array} \right.$$

Remarquons que dans ce repère orthonormé, les notions de covariance et contravariance ne jouent plus puisque l'on a :

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}, \quad \gamma^{ij} = \delta^{ij}, \quad \gamma = 1$$

#### Position du problème

Si nous nous reportons aux relations (46) et (47), nous voyons que notre problème revient à chercher la fonction  $\hat{\varphi}$  qui rend minimum la fonctionnelle  $I(\varphi)$  associée au problème de Dirichlet, telle que ...

$$(51) \quad \begin{array}{l} I(\varphi) = I^{D_1}(\varphi) + I^{D_2}(\varphi) \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} I^{D_1}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\text{grad}\varphi]^t \cdot [C] \cdot [\text{grad}\varphi] \cdot dx \, dy \\ I^{D_2}(\varphi) = - \int_{\Omega} B \cdot \varphi \cdot dx \, dy \end{array} \right. \end{array}$$

... et qui satisfait aux conditions aux limites de type Dirichlet :

(52)

$$\varphi|_{\Sigma} = \lambda$$

Découpage du domaine  $\Omega$  en éléments triangulaires  $\Omega_{ijk}$

Supposons que l'on ait couvert le domaine  $\Omega$  par un maillage de  $N$  points constituant un pavage jointif d'éléments triangulaires  $\Omega_{ijk}$  de sommets  $i, j, k$  (cf. figure 2). Cela implique évidemment que  $\Omega$  soit une réunion de triangles.

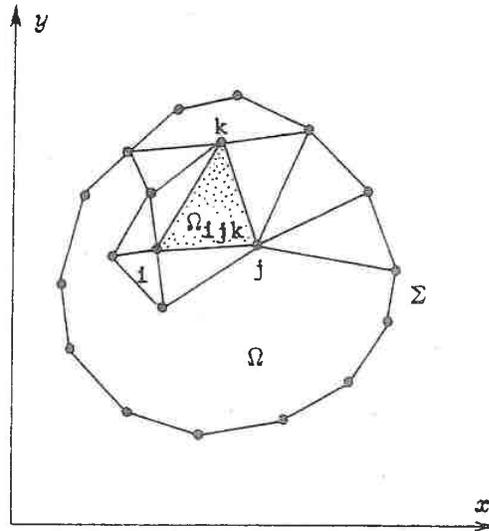


Figure 2

Les domaines élémentaires  $\Omega_{ijk}$  sont évidemment supposés tels que :

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_e \Omega_e = \Omega \quad \text{avec } e = (ijk) \\ \Omega_{e_1} \cap \Omega_{e_2} = \emptyset \quad \text{avec } e_1 \neq e_2 \end{array} \right.$$

Dans ce qui suit, nous poserons ...

$$(54) \quad \boxed{\begin{array}{l} I_{ijk}^{D_1}(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega_{ijk}} [\sigma_{\tau\tau d\varphi}]^t \cdot [C] \cdot [\sigma_{\tau\tau d\varphi}] \cdot dx \cdot dy \\ I_{ijk}^{D_2}(\varphi) = - \int_{\Omega_{ijk}} B \cdot \varphi \cdot dx \cdot dy \end{array}}$$

... si bien qu'en définitive on peut écrire en vertu des relations (51), (53) et (54) ...

$$(55) \quad I(\varphi) = \sum_{\Omega_{ijk}} I_{ijk}(\varphi)$$

$$I_{ijk}(\varphi) = I_{ijk}^{D_1}(\varphi) + I_{ijk}^{D_2}(\varphi)$$

... où le signe  $\sum_{\Omega_{ijk}}$  indique que l'on fait la somme des quantités  $I_{ijk}(\varphi)$  pour tous les triangles  $\Omega_{ijk}$  couvrant le domaine  $\Omega$ .

EXPRESSION DE  $\varphi^* = \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$  DANS  $\Omega_{ijk}$

Construction d'un estimateur  $\varphi^*$  de  $\varphi$  dans  $\Omega_{ijk}$

Nous prendrons pour approximation  $\varphi^*$  du potentiel à l'intérieur du domaine  $\Omega_{ijk}$  le polynôme du premier degré en  $x$  et en  $y$  défini par la relation linéaire suivante :

$$\varphi^* = [1 \quad x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

... où  $a_0, a_1, a_2$  ont été choisis de façon que  $\varphi_i^*, \varphi_j^*, \varphi_k^*$  coïncident avec  $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$  aux trois sommets  $i, j, k$  de  $\Omega_{ijk}$ . Ceci implique que l'on ait la relation suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}}_{[\varphi]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}}_{[M]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{[A]}$$

... où  $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$  et  $(x_k, y_k)$  représentent les coordonnées des points  $i, j, k$ . On en déduit alors que la matrice des coefficients  $[A]$  pour le domaine  $\Omega_{ijk}$  est donnée par la relation :

$$(56) \quad [A] = [M^{-1}] \cdot [\varphi]$$

En définitive, si la matrice  $[M]$  est inversible, c'est-à-dire si l'aire de  $\Omega_{ijk}$  est non nulle, on définira le potentiel  $\varphi^*$  dans le domaine  $\Omega_{ijk}$  par la relation :

$$(57) \quad \varphi^* = [1 \quad x \quad y] \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi]$$

Expression de  $[M^{-1}]$ 

Nous voyons que la formule (57) nécessite le calcul explicite de la matrice  $[M^{-1}]$ . Tous calculs faits, on trouve ...

$$(58) \quad [M^{-1}] = \frac{1}{2 \cdot S} \cdot \begin{bmatrix} (x_j y_k - x_k y_j) & (x_k y_i - x_i y_k) & (x_i y_j - x_j y_i) \\ (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \end{bmatrix}$$

... où  $|S|$  représente l'aire du triangle  $\Omega_{ijk}$  avec :

$$(59) \quad 2 \cdot S = (x_j - x_i) \cdot (y_k - y_i) - (x_k - x_i) \cdot (y_j - y_i)$$

CALCUL DE  $I_{ijk}^* = I_{ijk}(\varphi^*)$ INTRODUCTION

Si dans les relations (55) nous remplaçons  $\varphi$  par  $\varphi^*$  et si nous posons  $I_{ijk}^* = I_{ijk}(\varphi^*)$ , on a :

$$(60) \quad \text{avec } \begin{cases} I_{ijk}^* = I_{ijk}^{*D_1} + I_{ijk}^{*D_2} \\ I_{ijk}^{*D_1} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega_{ijk}} \left[ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right] \cdot [C] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot dx \, dy \\ I_{ijk}^{*D_2} = - \int_{\Omega_{ijk}} B \cdot \varphi^* \cdot dx \, dy \end{cases}$$

CALCUL DE  $I_{ijk}^{*D_1}$ 

Dans le domaine  $\Omega_{ijk}$  on a la relation suivante si on prend pour  $\varphi^*$  un polynôme du premier degré :

$$\varphi^* = [1 \ x \ y] \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi]$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{[M^{-1}]}_{[D]} \cdot [\varphi]$$

$$\Leftrightarrow I_{ijk}^{*D_1} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega_{ijk}} [\varphi]^t \cdot [M^{-1}]^t \cdot [D]^t \cdot [C] \cdot [D] \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi] \cdot dx \, dy$$

En fait, la seule quantité dépendant des variables  $x$  et  $y$  est la matrice  $[C]$  de composantes  $c^{\alpha\beta}(x,y)$  pour le domaine  $\Omega_{ijk}$ , si bien que l'on peut écrire :

$$I_{ijk}^{*D_1} = \frac{1}{2} \cdot [\varphi]^t \cdot [M^{-1}]^t \cdot [D]^t \cdot \left\{ \int_{\Omega_{ijk}} [C] \cdot dx \, dy \right\} \cdot [D] \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi]$$

Si nous supposons que  $c^{\alpha\beta}(x,y)$  peut être approché raisonnablement par un polynôme du premier degré en  $x$  et en  $y$  dans le domaine  $\Omega_{ijk}$ , on peut écrire comme pour  $\varphi^*$  une relation du type ...

$$\Leftrightarrow (61) \quad \int_{\Omega_{ijk}} c^{\alpha\beta} \cdot dx \, dy = |S| \cdot [1 \quad \bar{x} \quad \bar{y}] \cdot [M^{-1}] \cdot \begin{bmatrix} c^{\alpha\beta} \\ c^{\alpha\beta} \\ c^{\alpha\beta} \\ c^{\alpha\beta} \\ c^{\alpha\beta} \\ c^{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

... où  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  représentent les coordonnées du centre de gravité de  $\Omega_{ijk}$ .

Si maintenant nous posons ...

$$(62) \quad \begin{bmatrix} \bar{c}^{\alpha\beta} \\ \bar{c}^{\alpha\beta} \\ \bar{c}^{\alpha\beta} \\ \bar{c}^{\alpha\beta} \\ \bar{c}^{\alpha\beta} \\ \bar{c}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|S|} \cdot \int_{\Omega_{ijk}} c^{\alpha\beta} \cdot dx \, dy$$

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{c}^{11} & \bar{c}^{12} \\ \bar{c}^{21} & \bar{c}^{22} \end{bmatrix}$$

... alors on peut écrire :

$$I_{ijk}^{*D_1} = \frac{|S|}{2} \cdot [\varphi]^t \cdot [M^{-1}]^t \cdot [D]^t \cdot [\bar{C}] \cdot [D] \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi]$$

Par définition, nous appellerons matrice des conductivités élémentaires pour l'élément  $\Omega_{ijk}$ , la matrice  $[K]$  symétrique définie par la relation

suivante :

$$(63) \quad [K] = |S| \cdot [M^{-1}]^t \cdot [D]^t \cdot [\bar{C}] \cdot [D] \cdot [M^{-1}]$$

En définitive, on a la relation matricielle suivante :

$$(64) \quad I_{ijk}^{*D_1} = \frac{1}{2} \cdot [\varphi]^T \cdot [K] \cdot [\varphi]$$

### CALCUL DE $I_{ijk}^{*D_2}$

Très souvent dans les applications pratiques, la fonction  $B(x,y)$  est en fait une distribution de masses ponctuelles correspondant à des sources alimentant le domaine  $\Omega$  au sens algébrique du terme.

Supposons donc que la fonction  $B(x,y)$  soit nulle partout dans le domaine  $\Omega_{ijk}$  sauf aux trois sommets  $i,j,k$  où elle est égale respectivement à  $B_i, B_j, B_k$ . Dans ce cas, si  $v_i$  est le nombre de triangles de sommet  $i$ , on peut admettre que le flux extérieur  $B_i$ , au point  $i$ , est la somme de  $v_i$  flux égaux à  $\frac{1}{v_i} \cdot B_i$  apportés par les  $v_i$  triangles de sommet  $i$ . En faisant un raisonnement identique aux trois sommets  $i,j,k$  on peut écrire ...

$$\forall (x,y) \in \Omega_{ijk} \Rightarrow B(x,y) = \frac{1}{v_i} \cdot B_i \cdot \delta_i + \frac{1}{v_j} \cdot B_j \cdot \delta_j + \frac{1}{v_k} \cdot B_k \cdot \delta_k$$

... où  $\delta_i, \delta_j, \delta_k$  sont les distributions de Dirac aux points  $i,j,k$ .

On peut alors écrire :

$$- I_{ijk}^{*D_2} = \int_{\Omega_{ijk}} B \cdot \varphi^* \cdot dx \cdot dy$$

$$\Leftrightarrow - I_{ijk}^{*D_2} = \frac{1}{v_i} \cdot B_i \cdot \int_{\Omega_{ijk}} \delta_i \cdot \varphi^* \cdot dx \cdot dy + \frac{1}{v_j} \cdot B_j \cdot \int_{\Omega_{ijk}} \delta_j \cdot \varphi^* \cdot dx \cdot dy + \frac{1}{v_k} \cdot B_k \cdot \int_{\Omega_{ijk}} \delta_k \cdot \varphi^* \cdot dx \cdot dy$$

$$\Leftrightarrow - I_{ijk}^{*D_2} = \frac{1}{v_i} \cdot B_i \cdot \varphi_i^* + \frac{1}{v_j} \cdot B_j \cdot \varphi_j^* + \frac{1}{v_k} \cdot B_k \cdot \varphi_k^*$$

mais comme par construction on a  $\varphi_i^* = \varphi_i$ ,  $\varphi_j^* = \varphi_j$  et  $\varphi_k^* = \varphi_k$ , il vient :

$$\left[ - I_{ijk}^{*D_2} = \frac{1}{v_i} \cdot B_i \cdot \varphi_i + \frac{1}{v_j} \cdot B_j \cdot \varphi_j + \frac{1}{v_k} \cdot B_k \cdot \varphi_k \right]$$

ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$- I_{ijk}^{*D_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_i & B_j & B_k \\ v_i & v_j & v_k \end{bmatrix}}_{[B]^t} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

$$(65) \quad I_{ijk}^{*D_2} = - [B]^t \cdot [\varphi]$$

### EXPRESSION ELEMENTAIRE DE $I_{ijk}^*$

#### Expression élémentaire

Il est facile de calculer l'expression élémentaire de  $I_{ijk}^*$ , il suffit pour cela d'additionner les deux quantités  $I_{ijk}^{*D_1}$  et  $I_{ijk}^{*D_2}$  comme l'indique la relation (60) :

$$(66) \quad I_{ijk}^* = \frac{1}{2} \cdot [\varphi]^t \cdot [K] \cdot [\varphi] - [B]^t \cdot [\varphi]$$

#### Notations

Rappelons que les quantités ...

$$\begin{array}{c} S \\ [M^{-1}] \\ [\bar{C}] \\ [K] \\ [\varphi] \\ [B] \end{array}$$

... dépendent en fait de l'élément  $v_{ijk}$  sur lequel elles ont été calculées et devraient par conséquent comporter un indice (ijk) que nous n'avons pas fait figurer afin de ne pas surcharger inutilement les notations.

EXPRESSION GLOBALE DE  $I_{ijk}^*$

Introduction

- \* Soit  $[\Phi]$  une matrice colonne de taille  $N$  dont les éléments sont  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ .
- \* Soit  $[Q_{ijk}]$  une matrice colonne de taille  $N$  dont les éléments sont tous nuls sauf ceux situés sur les lignes  $i, j, k$  qui sont égaux respectivement à  $+ B_i/v_i, + B_j/v_j$  et  $+ B_k/v_k$ .
- \* Soit  $[e_{ijk}]$  une matrice carrée symétrique de taille  $N \times N$  dont les éléments sont tous nuls sauf ceux situés aux intersections des lignes et des colonnes  $i, j, k$  et qui sont égaux aux éléments  $K_{ijk}^{\alpha\beta}$  de la matrice  $[K]$  relative à l'élément  $\Omega_{ijk}$ .

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_N \end{bmatrix}; [Q_{ijk}] = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i/v_i \\ B_j/v_j \\ 0 \\ B_k/v_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [e_{ijk}] = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textcircled{i} & \textcircled{j} & \textcircled{k} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & K_{ijk}^{11} & K_{ijk}^{12} & -0 & K_{ijk}^{13} & -0 & -0 \\ -0 & K_{ijk}^{21} & K_{ijk}^{22} & -0 & K_{ijk}^{23} & -0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & K_{ijk}^{31} & K_{ijk}^{32} & -0 & K_{ijk}^{33} & -0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \textcircled{i} \\ \textcircled{j} \\ \textcircled{k} \end{matrix} \end{array}$$

On se propose d'écrire la relation (66) à l'aide des matrices  $[\Phi]$ ,  $[Q_{ijk}]$  et  $[e_{ijk}]$ .

Expression globale de  $I_{ijk}^*$

On vérifiera facilement que la relation (66) est strictement identique à l'expression suivante :

(67)

$$I_{ijk}^* = \frac{1}{2} \cdot [\Phi]^t \cdot [e_{ijk}] \cdot [\Phi] - [Q_{ijk}]^t \cdot [\Phi]$$

(68)

avec :

$$I_{ijk}^{*D_1} = \frac{1}{2} \cdot [\phi]^t \cdot [e_{ijk}] \cdot [\phi]$$

$$I_{ijk}^{*D_2} = - [q_{ijk}]^t \cdot [\phi]$$

CALCUL DE  $I^* = I(\varphi^*)$

CALCUL DE  $I^*$  : PREMIERE FORMULE

La quantité  $I_{ijk}^*$  étant une valeur approchée de  $I_{ijk}$ , la relation (55) nous permet d'écrire ...

$$I \approx I^* = \sum_{\Omega_{ijk}} I_{ijk}^*$$

... où, rappelons-le, le symbole  $\sum_{\Omega_{ijk}}$  indique que l'on fait la somme des quantités  $I_{ijk}^*$  pour tous les triangles  $\Omega_{ijk}$  couvrant le domaine  $\Omega$ .

$$\Leftrightarrow I^* = \sum_{\Omega_{ijk}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot [\phi]^t \cdot [e_{ijk}] \cdot [\phi] - [q_{ijk}]^t \cdot [\phi] \right\}$$

(69) posons :

$$[e] = \sum_{\Omega_{ijk}} [e_{ijk}]$$

$$[q] = \sum_{\Omega_{ijk}} [q_{ijk}]$$

(70)  $\Leftrightarrow$ 

$$I^* = \frac{1}{2} \cdot [\phi]^t \cdot [e] \cdot [\phi] - [q]^t \cdot [\phi]$$

(71) avec :

$$I^{*D_1} = \frac{1}{2} \cdot [\phi]^t \cdot [e] \cdot [\phi]$$

$$I^{*D_2} = - [q]^t \cdot [\phi]$$

On remarquera que les éléments  $\{q_i\}$  de la matrice colonne  $[q]$  sont tels que l'on ait ...

(72)

$$q_i = B_i$$

...où  $B_1$  est le flux alimentant le domaine  $\Omega$  (au sens algébrique du terme) au point numéroté 1.

Cette dernière propriété découle directement des relations (65), (66) et (67).

\* Dans ce qui suit, nous donnerons à  $[C]$  le nom de matrice des conductivités globale.

### PROPRIETE DE LA MATRICE $[C]$

#### Lemme

##### Enoncé

Soit  $[W] = [W(x,y)]$  un vecteur et  $[C] = [C(x,y)]$  une matrice définie positive dont les éléments sont des fonctions de  $x$  et de  $y$  dans un domaine  $\Omega$  ; alors l'intégrale ...

$$J = \int_{\Omega} [W]^t \cdot [C] \cdot [W] \cdot dx \, dy$$

... est telle que :

$$J \begin{cases} = 0 & \text{si } [W] \text{ est identiquement nul dans } \Omega \\ > 0 & \text{si } [W] \text{ n'est pas identiquement nul dans } \Omega \end{cases}$$

##### Démonstration

Pour montrer cela, il suffit de considérer la fonction ...

$$g_w(x,y) = [W]^t \cdot [C] \cdot [W]$$

...qui, du fait que  $[C]$  est définie positive, est telle que :

$$g_w(x,y) \begin{cases} > 0 & \text{si } [W(x,y)] \neq [0] \\ = 0 & \text{si } [W(x,y)] = [0] \end{cases}$$

le lemme est alors évident si l'on se souvient que l'intégrale dans un domaine  $\Omega$  d'une fonction  $g_w$  positive ou nulle dans  $\Omega$  est positive, où le cas échéant nulle si  $g_w$  est identiquement nulle en tout point de  $\Omega$ .

### Théorème 1

#### Énoncé

Si la matrice  $[C]$  associée au tenseur des conductivités  $\mathcal{C}(x,y)$  est définie positive en tout point du domaine  $\Omega$ , alors la matrice  $[\mathcal{E}]$  des conductivités globales est définie non négative.

#### Démonstration

En se référant à la décomposition (51) et aux formules (71), nous voyons que l'on peut écrire :

$$I^{*D_1} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right] \cdot [C] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot dx \, dy \\ \frac{1}{2} \cdot [\Phi]^t \cdot [\mathcal{E}] \cdot [\Phi] \end{array} \right\} \text{ avec } \varphi^* = \varphi^*([\Phi])$$

En posant  $[W]^t = \left[ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right]$ , nous voyons d'après le lemme précédent que la forme intégrale de  $I^{*D_1}$  ne peut être que positive ou nulle ; ce dernier cas ( $I^{*D_1} = 0$ ) ne se présente d'ailleurs que si  $\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = 0$  en tout point  $(x, y)$  du domaine  $\Omega$ , c'est-à-dire si  $\varphi^* = \lambda = \text{constante}$  dans tout  $\Omega$ . Comme par construction  $\varphi^*$  est fonction de  $[\Phi]$ , il s'en suit que quel que soit  $[\Phi]$ , on a ...

$$[\Phi]^t \cdot [\mathcal{E}] \cdot [\Phi] \geq 0$$

... ce qui démontre le théorème.

Remarque

Nous venons de voir que  $I^{*D_1}$  ne s'annule que si  $\phi^e = \lambda$  en tout point du domaine  $\Omega$  ; ceci doit être vrai en particulier en tout point  $i$  du maillage utilisé, si bien que les éléments  $\phi_i$  de la matrice  $[\phi]$  doivent tous être égaux à  $\lambda$ . Nous en déduisons que l'on a la relation :

$$(73) \quad \left[ \begin{array}{l} [\phi]^t \cdot [e] \cdot [\phi] \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad \text{si } [\phi] = \lambda [\xi] \\ > 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right. \\ \text{avec } [\xi] = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Théorème 2Enoncé

Si la matrice  $[C]$  associée au tenseur des conductivités  $C(x,y)$  est définie positive en tout point du domaine  $\Omega$ , alors toute sous-matrice carrée extraite de  $[e]$  par suppression de lignes (et de colonnes correspondantes) est définie positive.

Démonstration

Considérons sur  $[e]$  une partition quelconque du type suivant :

$$[e] = \begin{bmatrix} e_\alpha & e_{\alpha\beta} \\ e_{\alpha\beta}^t & e_\beta \end{bmatrix}$$

Pour que la sous-matrice  $[e_\alpha]$  soit définie positive, il faut et il suffit que l'on ait :

$$[\phi_\alpha]^t \cdot [e_\alpha] \cdot [\phi_\alpha] > 0 \quad \forall [\phi_\alpha] \neq [0]$$

Cette condition peut encore s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{bmatrix} \phi_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} e_\alpha & e_{\alpha\beta} \\ e_{\alpha\beta}^t & e_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \quad \forall [\phi_\alpha] \neq [0]$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \phi_\alpha \\ 0 \end{bmatrix}^t \cdot [\mathcal{E}] \cdot \begin{bmatrix} \phi_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \quad \forall [\phi_\alpha] \neq [0]$$

Or, d'après la relation (73) établie au paragraphe précédent, nous savons que la relation ci-dessus est toujours positive sauf dans le cas où  $[\phi_\alpha] = [0]$ , ce qui démontre le théorème.

#### Remarque

Les deux théorèmes énoncés ci-dessus dans le cas où  $\psi^* = \psi^*([\phi])$  est un polynôme du premier degré sur chaque élément  $\Omega_{ijk}$  sont beaucoup plus généraux ; en fait, ces deux théorèmes sont encore valables si  $\psi$  est approché par un polynôme  $\psi^*$  de degré quelconque sur chaque élément  $\Omega_{ijk}$ .

#### CALCUL DE $I^*$ : DEUXIEME FORMULE

##### Partitionnement des matrices $[\phi]$ , $[\mathcal{E}]$ et $[Q]$

Il va être capital pour nous par la suite de distinguer dans la matrice colonne  $[\phi]$  l'ensemble  $\phi_I$  des valeurs  $\psi_i$  correspondant à des points  $i$  qui appartiennent à l'intérieur du domaine  $\Omega$  et l'ensemble  $\phi_L$  des valeurs  $\psi_l$  correspondant à des points  $l$  situés sur la limite  $\Sigma$  du domaine  $\Omega$  où l'on a appliqué des conditions de Dirichlet du type  $\psi_l = \text{constante}$ .

Quitte à numéroter les points du domaine  $\Omega$  différemment, on pourra toujours s'arranger de façon à pouvoir écrire la matrice  $[\phi]$  sous la forme partitionnée suivante :

$$(74) \quad \boxed{\begin{array}{l} [\phi] = \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_L \end{bmatrix} \\ \text{avec } \begin{cases} \psi_i \in \phi_I & \Leftrightarrow i \in \Omega \\ \psi_l \in \phi_L & \Leftrightarrow l \in \Sigma \end{cases} \end{array}}$$

Cette partition de  $[\phi]$  en sous-matrices induit évidemment sur les matrices  $[\mathcal{E}]$  et  $[Q]$  les partitions suivantes :

(75)

$$\begin{aligned}
 [e] &= \begin{bmatrix} e_I & e_{IL} \\ e_{IL}^t & e_L \end{bmatrix} \\
 [Q] &= \begin{bmatrix} Q_I \\ Q_L \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Conséquence : deuxième forme de l'expression  $I^*$

Les relations (70), (74) et (75) nous permettent d'écrire :

$$I^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \phi_I^t \\ \phi_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_I & e_{IL} \\ e_{IL}^t & e_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_I \\ Q_L \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} \phi_I \\ \phi_L \end{bmatrix}$$

En développant cette expression et tous calculs faits, on trouve :

(76)

$$\begin{aligned}
 I^* &= \frac{1}{2} \cdot [\phi_I]^t \cdot [e_I] \cdot [\phi_I] - [Q_I]^t \cdot [\phi_I] \\
 &+ \frac{1}{2} \cdot [\phi_L]^t \cdot [e_L] \cdot [\phi_L] - [Q_L]^t \cdot [\phi_L] \\
 &+ [\phi_I]^t \cdot [e_{IL}] \cdot [\phi_L]
 \end{aligned}$$

MINIMISATION DE  $I^* = I(\phi^*)$  EN FONCTION DE  $[\phi_I]$

### RAPPELS ET NOTATIONS

#### Introduction

Dans les rappels de calcul matriciel qui vont suivre,  $[B]$ ,  $[X]$  et  $[H]$  sont des vecteurs colonnes tandis que  $[A]$  est une matrice carrée et  $f([X])$  une fonction scalaire de la variable  $[X]$ . De plus, nous adopterons les notations suivantes en ce qui concerne les dérivations par rapport au vecteur  $[X]$  :

$$[X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial [X]} = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{bmatrix} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial [X] \partial [X]} = \begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2 & \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^2 f / \partial x_n \partial x_1 & \partial^2 f / \partial x_n \partial x_2 \cdots \partial^2 f / \partial x_n^2 \end{bmatrix}$$

### Dérivation de produits de matrices

On pourra vérifier que les relations suivantes sont exactes :

$$(77) \quad \begin{aligned} \frac{\partial [B]^t \cdot [X]}{\partial [X]} &= [B] \\ \frac{\partial [X]^t \cdot [A] \cdot [X]}{\partial [X]} &= [A] \cdot [X] + [A]^t \cdot [X] \end{aligned}$$

### Formule de Taylor

Au voisinage d'un point  $[X]$ , le développement limité de la fonction  $f([X])$  s'écrit à l'aide de la formule de Taylor généralisée :

$$(78) \quad f([X] + [H]) = f([X]) + [H]^t \cdot \frac{\partial f}{\partial [X]} + \frac{1}{2} \cdot [H]^t \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial [X] \partial [X]} \cdot [H] + \epsilon([H])$$

### Recherche du minimum d'une fonction $f([X])$

Une condition nécessaire pour qu'une fonction dérivable  $f([X])$  présente un optimum au point  $[X]$  est que la dérivée  $\partial f / \partial [X]$  s'annule en ce point.

$$\left\{ f([X]) \text{ optimum} \right\} \Leftarrow \left\{ \frac{\partial f}{\partial [X]} = [0] \right\}$$

Pour que le point ainsi obtenu soit un minimum, il faut de plus que pour tout vecteur  $[H]$  on ait :

$$f([X] + [H]) - f([X]) > 0$$

D'après la formule de Taylor, et en remarquant que  $\partial f / \partial [X] = [0]$ , on en déduit que l'on doit avoir pour tout vecteur  $[H]$  ...

$$f([X] + [H]) - f([X]) = \frac{1}{2} \cdot [H]^t \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial [X] \partial [X]} \cdot [H] + \epsilon([H]) > 0$$

... c'est-à-dire que si l'on néglige le terme  $\epsilon([H])$ , la matrice  $\frac{\partial^2 f}{\partial [X] \partial [X]}$  doit être définie positive.

RECHERCHE DE LA SOLUTION  $[\phi_I]$  MINIMISANT  $I^*$

Recherche d'un optimum

Les relations (76) et (77) nous permettent d'écrire :

$$\left[ \frac{\partial I^*}{\partial [\phi_I]} \right] = [c_I] \cdot [\phi_I] + [c_{IL}] \cdot [\phi_L] - [q_I]$$

Nous avons vu qu'une condition nécessaire non suffisante pour qu'une fonction  $I^*([\phi_I])$  présente un optimum au point  $[\phi_I]$  est que  $\partial I^* / \partial [\phi_I] = [0]$  ; on en déduit que si cet optimum existe, il correspond à un vecteur  $[\phi_I]$  solution du système suivant :

(79)

$$[c_I] \cdot [\phi_I] = [\chi]$$

$$\text{avec } [\chi] = [q_I] - [c_{IL}] \cdot [\phi_L]$$

L'optimum ainsi déterminé est un minimum

Pour s'en persuader, il suffit de vérifier que la matrice ...

$$\left[ \frac{\partial^2 I^*}{\partial [\phi_I] \partial [\phi_I]} \right] = [c_I]$$

... est bien définie positive, or en vertu du théorème 2 (cf. page 57) nous avons vu qu'il en est bien ainsi, à condition toutefois que la matrice  $[C]$  associée au tenseur des conductivités  $\mathcal{C}(x,y)$  soit elle-même définie positive en tout point du domaine  $\Omega$ .

CONCLUSIONS

THEOREMEEnoncé

Si la matrice  $[C]$  associée au tenseur  $\mathcal{C}(x,y)$  des conductivités est définie positive en tout point du domaine  $\Omega$ , alors, pour des conditions aux limites  $[\phi_L]$  de type Dirichlet fixées, la méthode des éléments finis appliquée au problème direct permanent possède une solution unique  $[\phi_I]$  obtenue en résolvant le système suivant :

(79)

$$[E_I] \cdot [\phi_I] = [X]$$

$$\text{avec } [X] = [Q_I] - [E_{IL}] \cdot [\phi_L]$$

Démonstration

La démonstration est évidente car nous avons vu que si le problème a une solution, cette solution  $[\phi_I]$  vérifie l'équation (79) ; comme d'autre part, on a montré que  $[E_I]$  est définie positive, il s'en suit que le système est inversible et que  $[\phi_I]$  est unique (compte tenu des conditions aux limites  $[\phi_L]$ ).

CONDITIONS AUX LIMITES

Condition de type Dirichlet :  $\varphi = \lambda$  fixé sur  $\Sigma$

Ce type de condition à imposer ne présente aucune difficulté pratique car, dans l'étude précédente, nous avons justement supposé que les conditions imposées étaient uniquement de ce type.

En conséquence, si en un point numéroté  $l$  on a la condition  $\varphi_l = \lambda$ , il suffit de placer la constante  $\lambda$  sur la ligne numérotée  $l$  du vecteur  $[\phi_I]$ .

Condition de type mixte :  $\vec{V}$  fixé sur  $\Sigma_1$  et  $\varphi$  fixé sur  $\Sigma_2$

Si l'on se reporte aux relations (19) définissant les conditions de ce type, on doit avoir ...

$$(80) \quad \left[ \begin{array}{l} \sigma_1 \cdot (\vec{n} \cdot \vec{V}) = \sigma_1 \cdot \lambda \\ \sigma_2 \cdot (\varphi) = \sigma_2 \cdot \lambda \end{array} \right.$$

... où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des fonctions caractéristiques de deux parties  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  complémentaires l'une de l'autre dans  $\Sigma$ , et  $\lambda$  une fonction donnée.

La dernière relation (46) nous indique que la fonctionnelle  $I(\varphi)$  associée à ce problème ne diffère de la fonctionnelle associée au problème de type Dirichlet que par un terme  $I^M(\varphi)$  qui, d'après les formules (44) est du type :

$$(81) \quad \left[ I^M(\varphi) = \int_{\Sigma} \sigma_1 \cdot \lambda \cdot \varphi \cdot ds \right.$$

Il nous suffira donc d'ajouter ce terme à la fonctionnelle  $I(\varphi)$  du problème Dirichlet pour être ramené au problème précédent.

En fait, avant toute chose, le problème se pose à nous de calculer numériquement une approximation  $I^{*M}$  de l'intégrale  $I^M(\varphi)$  ; pour cela, imaginons comme l'indique la figure 3 que sur une partie  $\Sigma_1$  de la frontière  $\Sigma$  soient imposées des conditions du type  $\sigma_1 \cdot (\vec{n} \cdot \vec{V}) = \sigma_1 \cdot \lambda$  où  $\lambda$  est une fonction donnée et  $\vec{n}$  la normale unitaire extérieure à  $\Sigma$ .

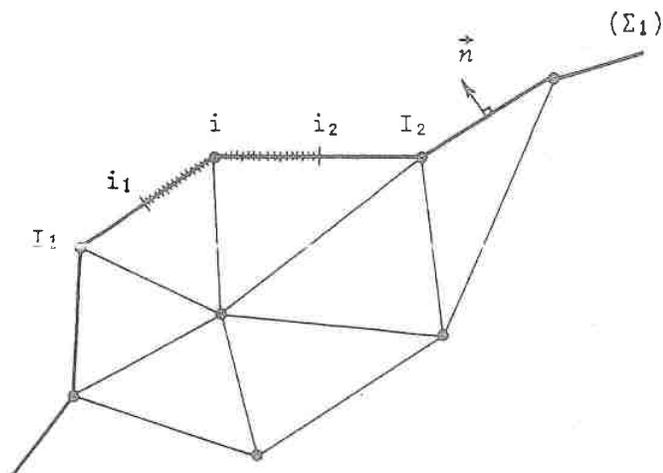


Figure 3

La technique numérique que nous allons utiliser est assez voisine de celle que nous avons employée pour calculer une approximation de l'intégrale  $I^{D_2}(\varphi)$  : après discrétisation en éléments finis, la frontière  $\Sigma_1$  est une ligne brisée ...,  $I_{1,1}, I_{1,2}, \dots$  sur laquelle on peut découper des éléments de courbe du type  $(i_1, i_2) = C_i$  où  $i_1$  et  $i_2$  sont respectivement les milieux des segments  $I_{1,1}$  et  $I_{1,2}$  de part et d'autre du point  $i$ , comme l'indique la figure 3. Les éléments de courbe  $C_i$  ainsi construits sont évidemment tels que l'on ait :

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{i \in \Sigma_1} C_i = \Sigma_1 \\ C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j \end{array} \right.$$

On obtient ainsi une relation analogue à la relation (55) en posant ...

$$(83) \quad \left[ \begin{array}{l} I^M(\varphi) = \sum_{C_i} I_i^M(\varphi) \\ I_i^M(\varphi) = \int_{C_i} \sigma_1 \cdot \lambda \cdot \varphi \cdot ds \end{array} \right.$$

... où le symbole  $\sum_{C_i \in \Sigma_1}$  indique que l'on fait la somme des quantités  $I_i^M(\varphi)$  pour tous les arcs  $C_i \in \Sigma_1$ . Il nous suffit donc maintenant de calculer une valeur approchée de l'intégrale  $I_i^M(\varphi)$  sur chaque segment de courbe  $C_i$  par exemple en posant ...

$$\left[ I_i^{*M}(\varphi) = |C_i| \cdot \lambda_i \cdot \varphi_i \right.$$

... où  $\lambda_i$  et  $\varphi_i$  désignent la valeur des fonctions  $\lambda$  et  $\varphi$  au point  $i$  et  $|C_i|$  la longueur de l'arc  $C_i \in \Sigma_1$ .

Si maintenant nous posons ...

$$(84) \quad \left[ I_i^{*M}(\varphi) = \sigma_1(i) \cdot \lambda_i \cdot \varphi_i \cdot |C_i| \right.$$

... où  $\sigma_1(i)$  est la valeur de la fonction caractéristique  $\sigma_1$  au point  $i$ , nous donnons ainsi un sens à la quantité  $I_i^{*M}(\varphi)$  même en des points  $i$  qui n'appartiennent pas à la frontière  $\Sigma_1$  et on a :

$$(85) \quad I_i^{*M}(\varphi) = \begin{cases} \lambda_i \cdot \varphi_i \cdot |C_i| & \text{si } i \in \Sigma_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par ailleurs, la relation (83) nous permet d'écrire :

$$I^{*M}(\varphi) = \sum_{C_i \in \Sigma_1} I_i^{*M}(\varphi)$$

En vertu des relations (84) et (85), cette dernière expression peut encore se mettre sous la forme suivante ...

$$(86) \quad I^{*M}(\varphi) = \sum_i I_i^{*M}(\varphi)$$

... où la somme est cette fois étendue à tous les points  $i$  du domaine  $\Omega$  discrétisé en éléments finis.

Remarquons que d'après (80) on a ...

$$\int_{C_i} \sigma_i \cdot \lambda \cdot ds = \int_{C_i} \sigma_i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{V}) \cdot ds = -\psi_i$$

... où  $\vec{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Sigma$  au point considéré ; il s'en suit que  $-\psi_i$  désigne le flux de  $\vec{V}$  sortant de  $\Omega$  à travers le contour  $C_i$ . Si maintenant on désigne par  $[\Psi]$  le vecteur colonne défini comme suit ...

$$(87) \quad [\Psi] = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad \text{avec } \psi_i = -\sigma_i(i) \cdot \lambda_i \cdot |C_i|$$

... où  $\psi_i$  désigne le flux du vecteur  $\vec{V}$  entrant à travers l'arc  $C_i$ , la relation (86) peut alors s'écrire sous forme matricielle :

(88)

$$I^{*M}(\varphi) = - [\psi]^t \cdot [\Phi]$$

$$\text{avec } \psi_i = -\sigma_i(i) \cdot \lambda_i \cdot |C_i|$$

En comparant ce résultat avec les relations (70) et (71) nous voyons que pour passer du problème de Dirichlet au problème mixte, il nous suffit d'ajouter la matrice  $[\Psi]$  à la matrice colonne  $[Q]$ .

## C ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME DE TYPE DIRICHLET BIDIMENSIONNEL EN REGIME TRANSITOIRE

### POSITION DU PROBLEME

#### INTRODUCTION

Si un milieu dans lequel existe une certaine répartition du potentiel  $\varphi$  est soumis brusquement à une nouvelle répartition des débits sources  $B(x,y)$  alimentant le domaine  $\Omega$ , ou à de nouvelles conditions aux limites sur la frontière  $\Sigma$ , il s'en suit une nouvelle distribution du potentiel qui évolue en fonction du temps pour tendre vers un nouveau régime permanent.

D'un point de vue analytique, nous sommes en présence d'un problème évolutif de type parabolique régi par l'équation différentielle suivante à l'inconnue  $\varphi(x,y,t)$  :

$$\text{div}\{- [C] \cdot [\text{grad}\varphi] \} = - A \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B$$

En principe, les techniques de résolution numérique (et analytique) de ce problème diffèrent complètement de celui du régime permanent car il s'agit d'un problème à valeur initiale. Les méthodes employées sont généralement des méthodes explicites ou implicites qui permettent de calculer la nouvelle répartition  $\varphi$  au bout d'un pas de temps  $\Delta t$  donné, pour une répartition initiale  $\varphi_0$  du potentiel connue à l'avance.

#### METHODE DES ELEMENTS FINIS

##### Intérêt de la méthode étudiée

Nous avons vu dans la partie **A** du présent exposé que ce problème pouvait se ramener à un problème de type elliptique à condition de poser ...

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi - \varphi^0}{\Delta t}$$

... où  $\varphi^0$  représente la distribution initiale du potentiel et  $\varphi$  la distribution au bout d'un pas de temps donné égal à  $\Delta t$ . Cette façon de faire revient en fait à utiliser la plus élémentaire (et aussi la plus grossière) des méthodes d'intégration, à savoir la méthode d'Euler. Toutefois cette technique n'est pas sans intérêt car très souvent, lorsque l'on utilise des méthodes plus élaborées, celles-ci nécessitent non seulement la connaissance de  $\varphi^0$ , mais encore de  $\varphi^1, \varphi^2, \dots$  qui sont des répartitions à des dates intermédiaires entre la date  $t_0$  et la date  $t_0 + \Delta t$ ; la plupart du temps pour pouvoir "initialiser" de telles méthodes, on utilise la méthode d'Euler qui permet justement de calculer  $\varphi^1, \varphi^2, \dots$  d'où l'intérêt de l'étude que nous allons faire.

#### Présentation du problème

D'après les relations (44) et (46) obtenues dans la partie **A** de cet exposé, nous savons que dans le cas d'un problème transitoire, il est nécessaire d'ajouter à la fonctionnelle  $I(\varphi)$  du type de problème étudié, un terme  $I^T(\varphi)$  défini par les relations suivantes :

$$(89) \quad \begin{aligned} I^T(\varphi) &= \int_{\Omega} \beta \cdot \varphi \cdot dx \, dy \\ \beta &= \frac{A}{\Delta t} \cdot (\frac{1}{2}\varphi - \varphi^0) \end{aligned}$$

Nous allons donc dans ce qui suit nous attacher à construire une technique numérique permettant de calculer une valeur approchée  $I^{*T}$  de la fonctionnelle  $I^T(\varphi)$ . Comme application, nous nous servirons ensuite de cette valeur approchée pour calculer une approximation  $I^*(\varphi)$  de la fonctionnelle  $I(\varphi)$  relative au problème transitoire de type Dirichlet :

$$(90) \quad I^*(\varphi) = I^{*D1}(\varphi) + I^{*D2}(\varphi) + I^{*T}(\varphi)$$

#### ORGANISATION DES CALCULS

Au lieu de calculer brutalement une approximation  $I^{*T}$  de la fonctionnelle  $I^T$  pour l'ajouter ensuite à  $(I^{D1} + I^{D2})$ , il est plus intéressant de calculer une approximation  $I^{*T}_{ijk}$  de l'expression :

$$(91) \quad \left[ I_{ijk}^T = \int_{\Omega_{ijk}} \beta \cdot \varphi \cdot dx \cdot dy \right.$$

... relative à l'élément  $\Omega_{ijk}$  pour l'ajouter ensuite au second membre de la quantité  $I_{ijk}^{*D} = I_{ijk}^{*D_1} + I_{ijk}^{*D_2}$  obtenue en régime permanent (cf. équation 66).

Pour obtenir une approximation  $I^*$  de la fonctionnelle  $I$ , il suffira alors de calculer la somme ...

$$(92) \quad \left[ \begin{aligned} I^* &= \sum_{\Omega_{ijk}} I_{ijk}^* \\ \text{avec } I_{ijk}^* &= I_{ijk}^{*D} + I_{ijk}^{*T} \end{aligned} \right.$$

CALCUL DE  $I_{ijk}^{*T}$

### CALCULS PRELIMINAIRES

#### Introduction

Dans ce qui va suivre, nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats concernant des intégrales doubles étendues au triangle  $\Omega_{ijk}$ , aussi avons-nous trouvé préférable de les calculer à l'avance afin de ne pas alourdir les calculs.

#### Rappels

Considérons un triangle  $\Omega_{ijk}$  de sommets  $i, j, k$  et de centre de gravité  $G$ , ainsi qu'un repère orthonormé  $(X, Y)$  d'origine  $G$  comme l'indique la figure 4 :

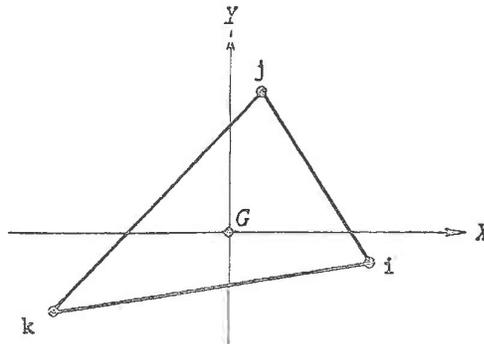


Figure 4

Soient  $(X_i, X_j, X_k)$  et  $(Y_i, Y_j, Y_k)$  les coordonnées des points  $ijk$  dans ce repère, on a alors les relations classiques suivantes :

$$(93) \quad \left[ \begin{aligned} \int_{\Omega_{ijk}} dX dY &= |S| \\ \int_{\Omega_{ijk}} X \cdot dX dY &= \int_{\Omega_{ijk}} Y dX dY = 0 \\ \int_{\Omega_{ijk}} X^2 dX dY &= \frac{|S|}{12} \cdot (X_1^2 + X_j^2 + X_k^2) \\ \int_{\Omega_{ijk}} Y^2 dX dY &= \frac{|S|}{12} \cdot (Y_1^2 + Y_j^2 + Y_k^2) \\ \int_{\Omega_{ijk}} XY \cdot dX dY &= \frac{|S|}{12} \cdot (X_1 Y_1 + X_j Y_j + X_k Y_k) \end{aligned} \right.$$

#### Formules utiles

Si on désigne par  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  les coordonnées du centre de gravité  $G$  de  $\Omega_{ijk}$  dans le repère  $(x, y)$ , en posant ...

$$\begin{cases} X = x - \bar{x} \\ Y = y - \bar{y} \end{cases}$$

... les formules (93) nous permettent d'écrire tous calculs faits ...

$$(94) \quad \left[ \begin{aligned} \int_{\Omega_{ijk}} dx dy &= |S| \\ \int_{\Omega_{ijk}} x \cdot dx dy &= |S| \cdot \bar{x} \quad ; \quad \int_{\Omega_{ijk}} y \cdot dx dy = |S| \cdot \bar{y} \\ \int_{\Omega_{ijk}} x^2 \cdot dx dy &= \frac{|S|}{12} \cdot [(x_1^2 + x_j^2 + x_k^2) + 9 \cdot \bar{x}^2] \\ \int_{\Omega_{ijk}} y^2 \cdot dx dy &= \frac{|S|}{12} \cdot [(y_1^2 + y_j^2 + y_k^2) + 9 \cdot \bar{y}^2] \\ \int_{\Omega_{ijk}} xy \cdot dx dy &= \frac{|S|}{12} \cdot [(x_1 y_1 + x_j y_j + x_k y_k) + 9 \cdot \bar{x} \bar{y}] \end{aligned} \right.$$

... où  $(x_i, x_j, x_k)$  et  $(y_i, y_j, y_k)$  représentent les coordonnées des points  $i, j$  et  $k$  dans le repère  $(x, y)$ .

APPROXIMATION DE  $\beta\varphi$  SUR  $\Omega_{ijk}$

Supposons que l'on approche les quantités  $\beta$  et  $\varphi$  par des fonctions linéaires  $\beta^*$  et  $\varphi^*$  sur chaque élément  $\Omega_{ijk}$  de la forme ...

$$(95) \quad \begin{cases} \beta^* = [1 \ x \ y] \cdot [M^{-1}] \cdot [\beta] \\ \varphi^* = [1 \ x \ y] \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi] \end{cases}$$

... où  $[M^{-1}]$  est une matrice carrée dont les éléments sont donnés par la formule (58) et  $[\beta]$  et  $[\varphi]$  des matrices colonnes dont les éléments  $\beta_i, \beta_j, \beta_k$  et  $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$  sont les valeurs des fonctions  $\beta$  et  $\varphi$  aux points  $i, j$  et  $k$ .

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \beta^* \varphi^* &= [\beta]^t \cdot [M^{-1}]^t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \cdot [1 \ x \ y] \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi] \\ \Leftrightarrow (96) \quad \beta^* \varphi^* &= [\beta]^t \cdot [M^{-1}]^t \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi] \end{aligned}$$

Supposons que par ailleurs la fonction  $A(x, y)$  soit constante et égale à  $A = A_{ijk}$  sur chaque triangle  $\Omega_{ijk}$  ; on a alors la relation :

$$(97) \quad [\beta] = \frac{A}{\Delta t} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot [\varphi] - [\varphi^0] \right\}$$

CALCUL DE  $I_{ijk}^{*T}$

En intégrant  $\beta^* \varphi^*$  sur  $\Omega_{ijk}$ , on obtient :

$$I_{ijk}^{*T} = \int_{\Omega_{ijk}} [\beta]^t \cdot [M^{-1}]^t \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi] \cdot dx \, dy$$

$$= [\beta]^t \cdot [M^{-1}]^t \cdot \left\{ \int_{\Omega_{ijk}} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} \cdot dx \, dy \right\} \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi]$$

En fait, la matrice entre crochets pourra toujours être explicitée grâce aux formules (94) ; posons donc ...

$$(98) \quad [\mu] = [M^{-1}]^t \cdot \left\{ \int_{\Omega_{ijk}} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} \cdot dx \, dy \right\} \cdot [M^{-1}]$$

... il vient alors :

$$(99) \quad I_{ijk}^{*T} = [\beta]^t \cdot [\mu] \cdot [\varphi]$$

En combinant les expressions (97) et (99), on obtient :

$$I_{ijk}^{*T} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot [\varphi]^t - [\varphi^0]^t \right\} \cdot \frac{A}{\Delta t} \cdot [\mu] \cdot [\varphi]$$

posons :

$$(100) \quad [\gamma(\Delta t)] = \frac{A}{\Delta t} \cdot [\mu]$$

En définitive, on a :

$$(101) \quad I_{ijk}^{*T} = \frac{1}{2} \cdot [\varphi]^t \cdot [\gamma(\Delta t)] \cdot [\varphi] - [\varphi^0]^t \cdot [\gamma(\Delta t)] \cdot [\varphi]$$

CALCUL DE  $I_{ijk}^*$  ET CONCLUSION

CALCUL DE  $I_{ijk}^*$

En ajoutant  $I_{ijk}^{*T}$  au second membre de l'équation (66) déjà établie en régime permanent, on obtient l'expression de  $I_{ijk}^*$  en régime transitoire :

$$\left\{ \begin{aligned} I_{ijk}^* &= \frac{1}{2} \cdot [\varphi]^t \cdot [K] \cdot [\varphi] - [B]^t \cdot [\varphi] \\ &+ \frac{1}{2} \cdot [\varphi]^t \cdot [\gamma(\Delta t)] \cdot [\varphi] - [\varphi^0]^t \cdot [\gamma(\Delta t)] \cdot [\varphi] \end{aligned} \right.$$

Soit en posant ...

(102)

$$\begin{aligned} [K(\Delta t)] &= [K] + [\gamma(\Delta t)] \\ [B(\Delta t)] &= [B] + [\gamma(\Delta t)]^t \cdot [\varphi^0] \end{aligned}$$

... il vient :

(103)

$$I_{ijk}^* = \frac{1}{2} \cdot [\varphi]^t \cdot [K(\Delta t)] \cdot [\varphi] - [B(\Delta t)]^t \cdot [\varphi]$$

CONCLUSION

Nous voyons que l'expression de  $I_{ijk}^*$  en régime transitoire (cf. équation 103) est identique à l'expression de  $I_{ijk}^*$  obtenue en régime permanent (cf. équation 66) à condition toutefois de remplacer les matrices  $[K]$  et  $[B]$  par :

$$\left\{ \begin{aligned} [K] &\longrightarrow [K(\Delta t)] \\ [B] &\longrightarrow [B(\Delta t)] \end{aligned} \right.$$

Par un procédé analogue à celui utilisé en régime permanent, on construirait des matrices  $[\chi(\Delta t)]$  et  $[\mathcal{E}_I(\Delta t)]$  telles que la solution du système ...

(104)

$$[\mathcal{E}_I(\Delta t)] \cdot [\phi_I] = [\chi(\Delta t)]$$

... soit justement la solution de notre problème, c'est-à-dire que les composantes de la matrice colonne  $[\phi_I]$  représentent la valeur du potentiel  $\varphi(x, y)$  à la date  $t$  aux points intérieurs du domaine  $\Omega$ .

THEOREMEEnoncé

Si en tout point du domaine  $\Omega$ , la matrice  $[C]$  associée au tenseur  $\mathcal{C}(x,y)$  des conductivités est définie positive et si le rapport  $A(x,y)/\Delta t$  est positif ou nul, alors pour des conditions aux limites  $[\phi_L]$  de type Dirichlet fixées, la méthode des éléments finis appliquée aux problème direct transitoire possède une solution unique  $[\phi_I]$  obtenue en résolvant le système suivant :

$$(105) \quad \begin{array}{l} [\mathcal{E}_I(\Delta t)] \cdot [\phi_I] = [\chi(\Delta t)] \\ \text{avec } [\chi(\Delta t)] = [\phi_I] - [\mathcal{E}_{II}(\Delta t)] \cdot [\phi_L] \end{array}$$

Démonstration

Si nous considérons la relation (102), nous voyons que l'on peut écrire ...

$$[\mathcal{E}(\Delta t)] = [\mathcal{E}] + [\Gamma(\Delta t)]$$

... où  $[\Gamma(\Delta t)]$  est une matrice construite à partir de  $[\gamma(\Delta t)]$  suivant le même algorithme qui a permis de construire  $[\mathcal{E}]$  à partir de  $[K]$ .

Remarquons que  $[\gamma(\Delta t)]$  est manifestement une matrice carrée symétrique qui est définie positive ou définie non négative pourvu que  $A(x,y)/\Delta t$  soit positif ou nul aux points  $(i,j,k)$ . Il s'en suit que  $[\Gamma(\Delta t)]$  ne peut être que symétrique définie positive ou définie non négative et que par conséquent la sous-matrice  $[\Gamma_I(\Delta t)]$  construite de la même façon que  $[\mathcal{E}_I]$  est elle-même, soit définie positive, soit définie non négative. On conclut de tout cela que la matrice ...

$$[\mathcal{E}_I(\Delta t)] = [\mathcal{E}_I] + [\Gamma_I(\Delta t)]$$

... est de même nature que  $[\mathcal{E}_I]$ , c'est-à-dire définie positive. Il en découle que le système d'équation (105) a une solution unique qui correspond bien au minimum de la fonctionnelle  $I^*(\varphi)$  en régime transitoire.

METHODE DE RUNGE - KUTTA

INTRODUCTION

Si nous nous plaçons en un point  $\vec{x}_i$  de coordonnées  $x_i$  et  $y_i$  appartenant au maillage des éléments finis, et si nous observons l'évolution du potentiel  $\varphi_i(t) = \varphi(\vec{x}_i, t)$  à partir d'une valeur initiale  $\varphi_i^0 = \varphi_i(t_0) = \varphi(\vec{x}_i, t_0)$ , on observe en général une courbe du type de celle représentée sur la figure 5 :

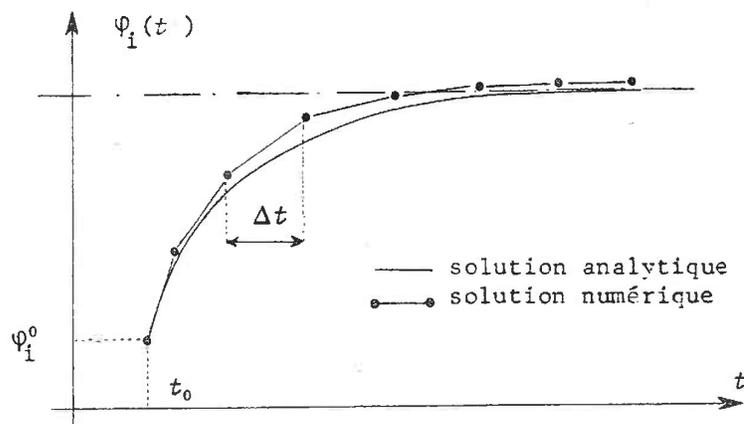


Figure 5

Si on utilise une méthode du type de celle que nous venons de décrire, on observe la plupart du temps au cours des itérations, une dérive de la valeur  $\varphi_i^*(t)$  calculée par rapport à la valeur théorique  $\varphi_i(t)$ .

Comme nous allons le voir, il est possible de corriger dans une certaine mesure ce défaut en utilisant une technique du type Runge - Kutta.

OPERATEUR  $\mathcal{E}(\Delta t)$ Définition

Soit  $[\phi_I(t)]$  la matrice colonne des potentiels  $[\phi_I]$  à la date  $t$ . Par définition, nous désignerons par  $\mathcal{E}(\Delta t)$  l'opérateur qui fait passer d'une répartition initiale  $[\phi_I(t_0)]$  du potentiel à la date  $t_0$  à la répartition  $[\phi_I(t_0 + \Delta t)]$  à la date  $t_0 + \Delta t$  calculée par la méthode d'Euler suivant

la technique des éléments finis :

$$(106) \quad \mathcal{E}(\Delta t) \cdot [\phi_I(t_0)] = [\phi_I(t_0 + \Delta t)]$$

### Conséquence

L'introduction de cet opérateur permet d'écrire sous forme condensée une approximation de la dérivée de  $[\phi_I(t_0)]$  par rapport au temps ; posons ...

$$(107) \quad F_{\Delta t} \left\{ [\phi_I(t)] \right\} = \frac{\mathcal{E}(\Delta t) \cdot [\phi_I(t)] - [\phi_I(t)]}{\Delta t}$$

... où  $F_{\Delta t}$  désigne une matrice colonne de même taille que  $[\phi_I(t)]$ .  
On a alors approximativement :

$$(108) \quad \frac{\partial [\phi_I(t)]}{\partial t} \approx F_{\Delta t} \left\{ [\phi_I(t)] \right\}$$

## METHODE DE RUNGE - KUTIA

### Introduction

Notre problème se trouve maintenant mis sous la forme vectorielle suivante ...

$$(109) \quad \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}[t, \vec{V}(t)]$$

... et on sait que dans ce cas il est toujours possible d'utiliser pour résoudre ce système différentiel, une formule de Runge - Kutta à n approximation.

Par exemple, pour des formules à deux approximations, le système (109) se résout en posant pour un pas d'intégration égal à  $\Delta t$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{K}_1 = \Delta t \cdot \vec{F}[t_0 ; \vec{V}(t_0)] \\ \vec{K}_2 = \Delta t \cdot \vec{F}[t_0 + \frac{\Delta t}{2} ; \vec{V}(t_0) + \frac{1}{2} \vec{K}_1] \\ \Delta \vec{V} = \vec{K}_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t_0 + \Delta t) = \vec{V}(t_0) + \Delta \vec{V}$$

### Application

A titre d'exemple, essayons de mettre en oeuvre une méthode de Runge - Kutta dans le cas de notre problème ; on a les relations suivantes dans le cas d'une approximation d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_1] = \Delta t \cdot F_{\Delta t} \left\{ [\phi_I(t_0)] \right\} \\ [K_2] = \Delta t \cdot F_{\Delta t} \left\{ [\phi_I(t_0)] + \frac{1}{2} \cdot [K_1] \right\} \\ [\phi_I(t_0 + \Delta t)] = [\phi_I(t_0)] + [K_2] \end{array} \right.$$

En fait, si on explicite ces formules à l'aide de la relation (107), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_1] = \mathcal{C}(\Delta t) \cdot [\phi_I(t_0)] - [\phi_I(t_0)] \\ [K_2] = \mathcal{C}(\Delta t) \cdot \left\{ [\phi_I(t_0)] + \frac{1}{2} \cdot [K_1] \right\} - \left\{ [\phi_I(t_0)] + \frac{1}{2} \cdot [K_1] \right\} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow [\phi_I(t_0 + \Delta t)] = [\phi_I(t_0)] + [K_2]$$

$$\Leftrightarrow [\phi_I(t_0 + \Delta t)] = \mathcal{C}(\Delta t) \cdot \left\{ [\phi_I(t_0)] + \frac{1}{2} \cdot [K_1] \right\} - \frac{1}{2} \cdot [K_1]$$

En définitive, on a les relations suivantes :

$$(110) \quad \boxed{\begin{array}{l} [K_1] = \mathcal{C}(\Delta t) \cdot [\phi_I(t_0)] - [\phi_I(t_0)] \\ [K_2] = \mathcal{C}(\Delta t) \cdot \left\{ [\phi_I(t_0)] + \frac{1}{2} \cdot [K_1] \right\} - \left\{ [\phi_I(t_0)] + \frac{1}{2} \cdot [K_1] \right\} \\ [\phi_I(t_0 + \Delta t)] = \mathcal{C}(\Delta t) \cdot \left\{ [\phi_I(t_0)] + \frac{1}{2} \cdot [K_1] \right\} - \frac{1}{2} \cdot [K_1] \end{array}}$$

### Remarque

On peut évidemment appliquer cette technique pour des formules de Runge - Kutta d'ordre quelconque, mais nous ne l'avons pas fait car évidemment cela est coûteux au point de vue mémoire centrale, car il faut réserver plusieurs tableaux pour ranger les résultats intermédiaires  $[K_i]$ .

## D MISE EN OEUVRE DE LA METHODE

### CONSTRUCTION DES MATRICES $[e]$ OU $[e(\Delta t)]$

#### INTRODUCTION

Pour fixer les idées, dans ce qui va suivre, nous allons indiquer le moyen pratique utilisé pour construire  $[e]$  étant entendu que l'on procéderait de même pour obtenir  $[e(\Delta t)]$

#### MAILLAGE UTILISE

Afin d'obtenir une matrice  $[e]$  intéressante du point de vue stockage sur ordinateur, il convient de ne pas utiliser un maillage quelconque constitué de points numérotés n'importe comment.

Nous supposons que le maillage utilisé est un homéomorphisme d'un maillage régulier à maille carrée ; c'est-à-dire que l'on peut passer du maillage utilisé au maillage régulier à maille carrée inscrit dans un rectangle par une déformation continue. De plus, la numérotation des noeuds du maillage sera effectuée comme l'indique sur un exemple la figure 6 :

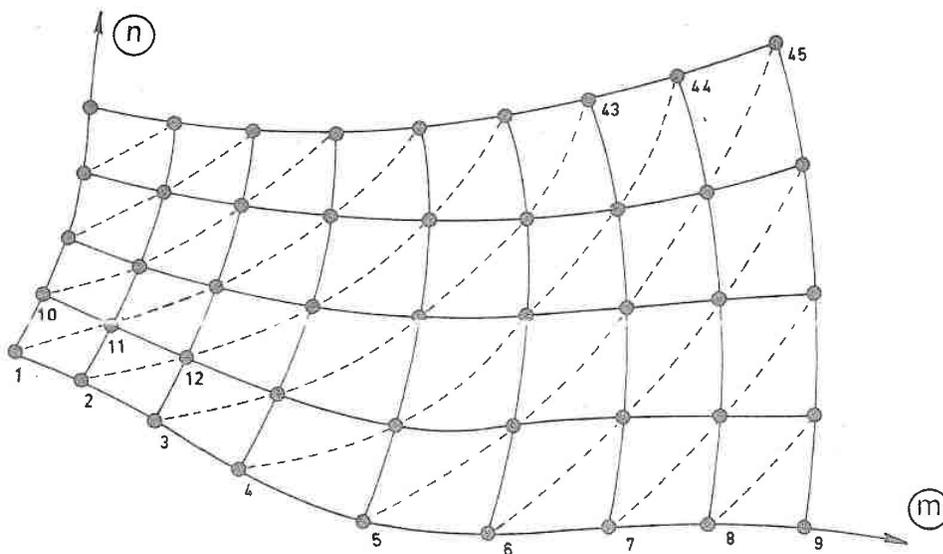


Figure 6

On posera :

$$\left. \begin{array}{l} m = \text{nombre de noeuds suivant l'axe (m) ;} \\ \text{sur la figure 6, on aura par exemple} \\ m = 9 \\ n = \text{nombre de noeuds suivant l'axe (n) ;} \\ \text{sur la figure 6, on aura par exemple} \\ n = 5 \end{array} \right\}$$

On voit qu'il est alors très facile pour l'ordinateur de repérer quels sont les  $v_i = 6$  triangles de sommet  $i$  quelconque, ce qui est très commode comme nous le verrons dans la construction de  $[C]$  (cf. fig. 7).

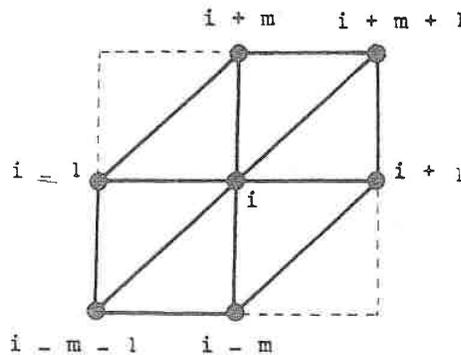


Figure 7

### CONSTRUCTION DE $[C]$

On commence par initialiser la grande matrice  $[C]$  de taille  $N \times N$  à  $[0]$  (avec ici  $N = m.n$ ).

Pour un élément  $\Omega_{ijk}$  quelconque, on calcule la matrice  $[K]$  des conductivités élémentaires ...

$$[K] = \begin{array}{l} i \rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \\ j \rightarrow \begin{bmatrix} b & d & e \end{bmatrix} \\ k \rightarrow \begin{bmatrix} c & e & f \end{bmatrix} \end{array}$$

... et on additionne les éléments de cette matrice aux éléments de la matrice  $[C]$  situés sur les lignes et les colonnes  $i j k$  (cf. fig. 8).

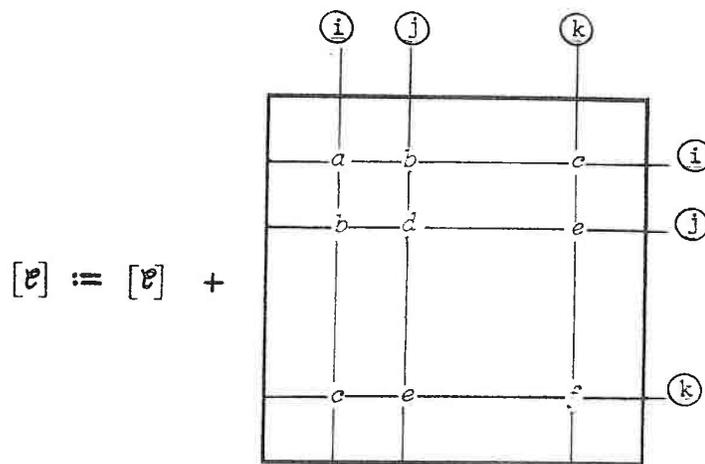


Figure 8

### NATURE DE LA MATRICE $[e]$

#### Introduction

Par suite du maillage utilisé, on constate que l'on obtient ce faisant une matrice heptadiagonale, ce qui est très intéressant au point de vue stockage en mémoire centrale sur ordinateur.

Pour voir cela, considérons un quadrilatère ABCD du maillage régulier utilisé ; on peut comme l'indique la figure 9 extraire de ce quadrilatère deux triangles  $\Omega_{ijk}$  différents :

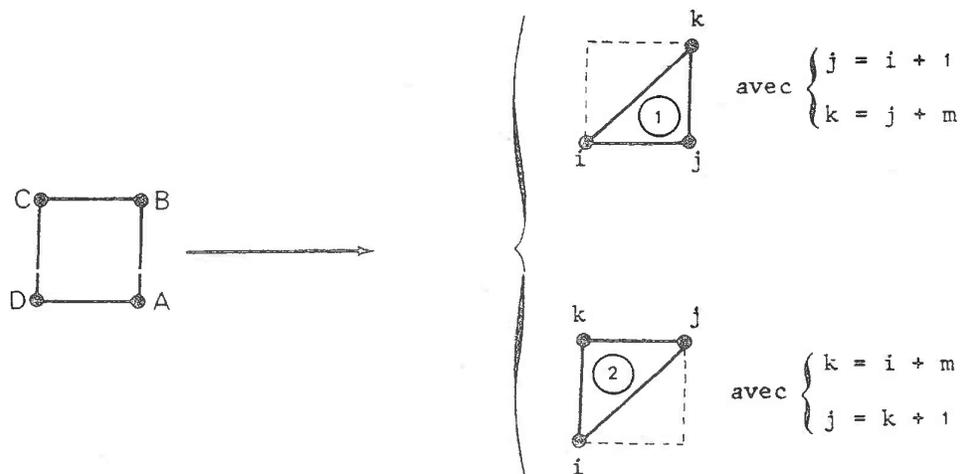


Figure 9

Le quadrilatère ABCD engendre donc deux matrices  $[K_1]$  et  $[K_2]$  qu'il convient de ranger dans la matrice  $[C]$  ; comme  $[C]$ ,  $[K_1]$  et  $[K_2]$  sont symétriques, nous ne nous intéresserons qu'aux demi-matrices inférieures :

Rangement de la matrice  $[K_1]$  dans  $[C]$

Soit  $[K_1]$  la matrice des conductivités élémentaires du triangle 1 (cf. fig. 9). Il s'agit de ranger la demi-matrice inférieure de  $[K_1]$  dans la demi-matrice inférieure de  $[C]$  sachant que l'on a les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} j = i+1 \\ k = j+m \end{array} \right. \quad [K_1] = \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} \begin{array}{|c|cc|} \hline a & & \\ \hline b & d & \\ \hline c & e & f \\ \hline \end{array}$$

On vérifie facilement qu'on obtient la figure suivante :

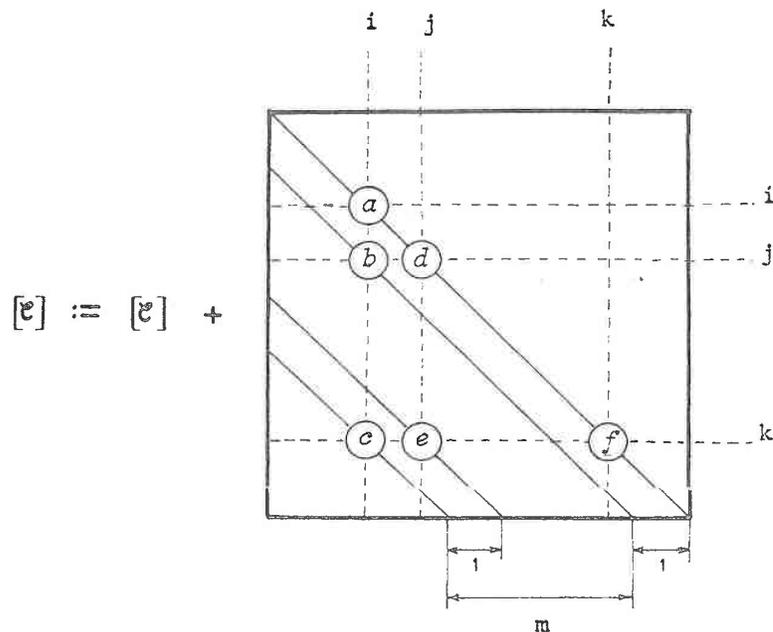


Figure 10

On s'aperçoit que ce faisant, on engendre 4 diagonales de nombres en général différents de 0 dans la demi-matrice inférieure de  $[C]$  ; les équidistances entre ces diagonales ont été indiquées en bas, à droite, de la figure 10.

Rangement de la matrice  $[K_2]$  dans  $[C]$

On opère de même pour la matrice  $[K_2]$  des conductivités élémentaires du triangle 2 (cf. fig. 9) qu'il s'agit de ranger dans  $[C]$  sachant que :

$$\begin{cases} k = i+m \\ j = k+1 \end{cases} \quad [K_2] = \begin{array}{ccc} & i & j & k \\ i & a & & \\ j & b & d & \\ k & c & e & f \end{array}$$

Cette fois encore, on fait apparaître dans la demi-matrice inférieure de  $[C]$  4 diagonales de nombres en général différents de 0, diagonales que l'on constate être exactement identiques à celles obtenues à partir du triangle 1 :

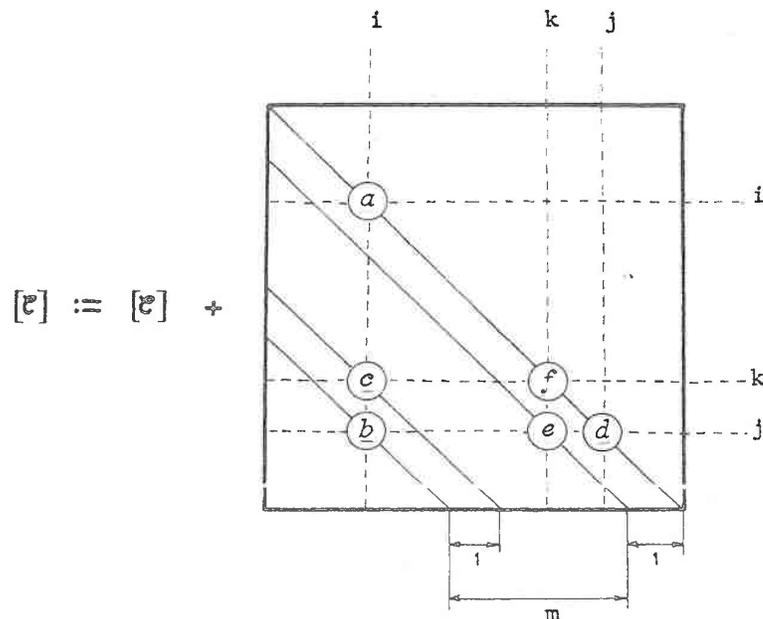


Figure 11

### Conclusion

En conclusion, nous voyons que la matrice complète  $[C]$  a tous ses éléments égaux à 0, sauf sur 7 diagonales parallèles à la diagonale principale.

### STOCKAGE DE LA MATRICE $[C]$

#### INTRODUCTION

La matrice  $[C]$  étant symétrique heptadiagonale, nous ne conserverons que les 3 diagonales inférieures et la diagonale principale par souci d'économie de mémoire centrale de l'ordinateur.

Pour ce faire, on va ranger  $[C]$  dans un tableau  $[C^*]$  à  $N = m.n$  lignes et 4 colonnes de la façon suivante :

#### RANGEMENT DE $[K_1]$ DANS $[C^*]$

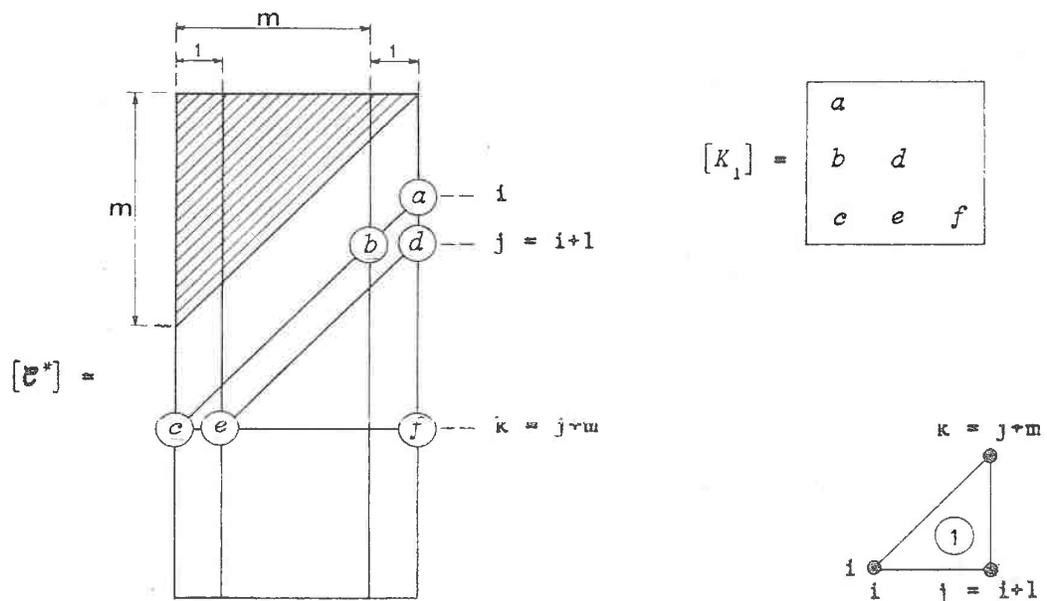


Figure 12

Nous rangerons  $[K_1]$  dans  $[e^*]$  suivant l'algorithme décrit sur la figure 12. Ce faisant, nous pouvons constater sur les figures 10 et 12 que les éléments se trouvant sur une ligne de  $[e^*]$  sont identiques et dans le même ordre que les éléments non nuls se trouvant sur une ligne de la demi-matrice inférieure de  $[e]$ . On pourra également constater que les éléments non nuls de la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la demi-matrice inférieure de  $[e]$  sont identiques à ceux de la diagonale inclinée à  $45^\circ$  dans  $[e^*]$  et passant par le point  $a = e^*(i, 4)$ .

RANGEMENT DE  $[K_2]$  DANS  $[e^*]$

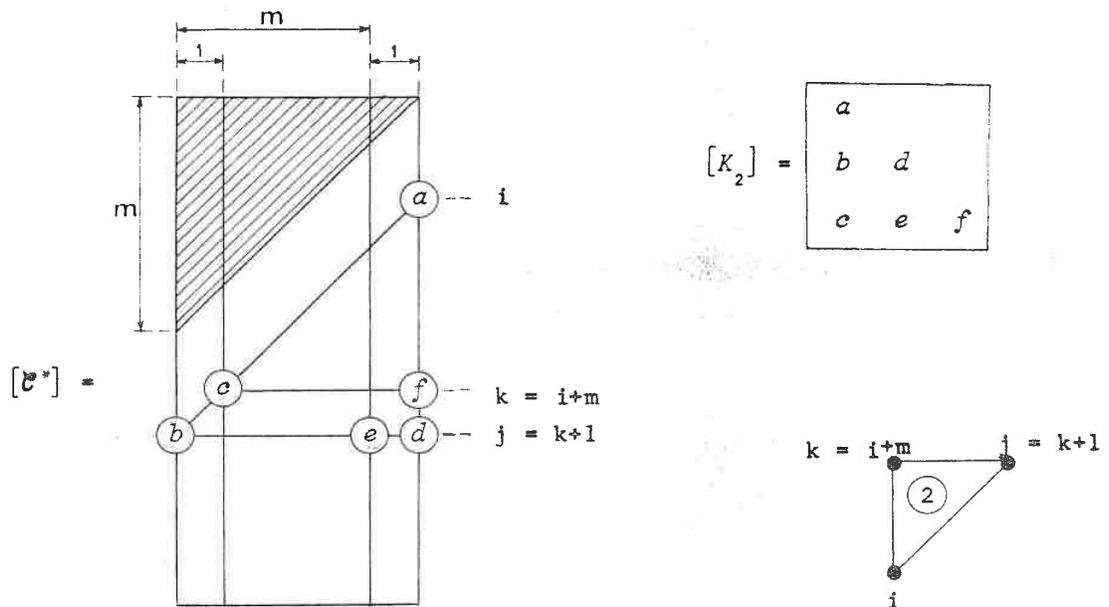


Figure 13

$[K_2]$  sera rangé dans  $[e^*]$  suivant l'algorithme décrit sur la figure 13. On peut faire les mêmes remarques que pour  $[K_1]$  quand à la correspondance entre les lignes et les colonnes de  $[e]$  et  $[e^*]$ , il n'y a pour cela qu'à comparer les figures 11 et 13.

CONCLUSION

Nous voyons en définitive que notre numérotation un peu spéciale des points du maillage nous permet un gain de place en mémoire centrale énorme, car si N est le nombre de points, nous avons réussi à remplacer la matrice  $[C]$  à  $N^2$  éléments par une matrice  $[C^*]$  à  $4.N$  éléments.

## RESOLUTION DU SYSTEME (79)

TECHNIQUES UTILISABLES

Soit donc à résoudre le système ...

$$(79) \quad [C_I] \cdot [\phi_I] = [\chi]$$

... à l'inconnue  $[\phi_I]$ . La matrice  $[C_I]$  étant symétrique et définie positive, on peut être tenté a priori d'utiliser des techniques de résolution du type Cholesky par exemple ; malheureusement, ces méthodes sont ici pratiquement inexploitable car elles détruisent le caractère heptadiagonal de la matrice  $[C_I]$  et rendent de ce fait inutilisable le stockage de  $[C]$  dans  $[C^*]$ . C'est pour cette raison que dans ce type de problème on utilise classiquement des méthodes du type itératif qui laissent intacte la matrice  $[C_I]$  comme par exemple, la méthode de Richardson ou la méthode de Gauss - Seidel avec ou sans surelaxation.

CALCUL DU PRODUIT  $[C] \cdot [\phi]$ 

Si on utilise une méthode itérative pour résoudre le système (79), on sera amené au cours des calculs à calculer des produits du type  $[C] \cdot [\phi]$  où  $[\phi]$  est un vecteur colonne.

Pour cette raison, il est intéressant de donner l'expression  $P_i$  du produit de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $[C]$  par  $[\phi]$  en fonction des éléments du tableau  $[C^*]$  dans lequel on a rangé les éléments non nuls de la demi-matrice inférieure de  $[C]$  :

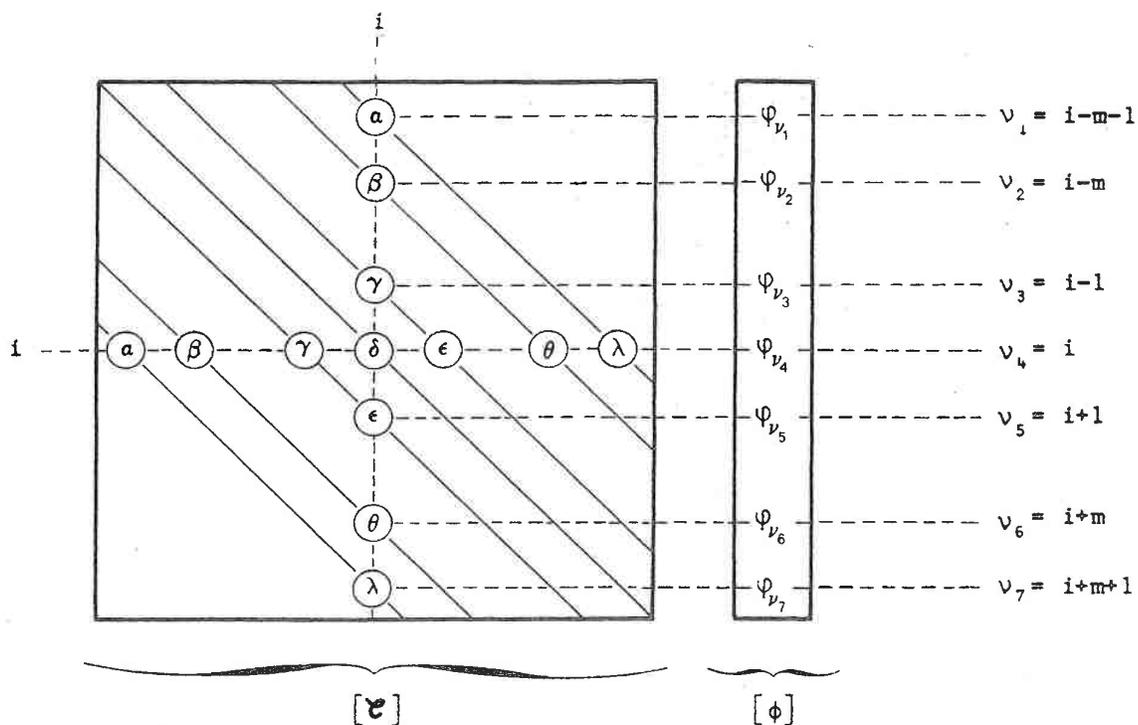


Figure 14

On voit sur la figure 14 que l'on a :

$$(111) \quad \left[ \begin{array}{l} P_i = \alpha \cdot \varphi_{\nu_1} + \beta \cdot \varphi_{\nu_2} + \gamma \cdot \varphi_{\nu_3} + \delta \cdot \varphi_{\nu_4} + \epsilon \cdot \varphi_{\nu_5} + \theta \cdot \varphi_{\nu_6} + \lambda \cdot \varphi_{\nu_7} \end{array} \right.$$

En observant la figure 15, on constate que l'on a les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \mathcal{E}^*(i, 1) \\ \beta = \mathcal{E}^*(i, 2) \\ \gamma = \mathcal{E}^*(i, 3) \\ \delta = \mathcal{E}^*(i, 4) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \mathcal{E}^*(\nu_5, 3) \\ \theta = \mathcal{E}^*(\nu_6, 2) \\ \lambda = \mathcal{E}^*(\nu_7, 1) \end{array} \right.$$

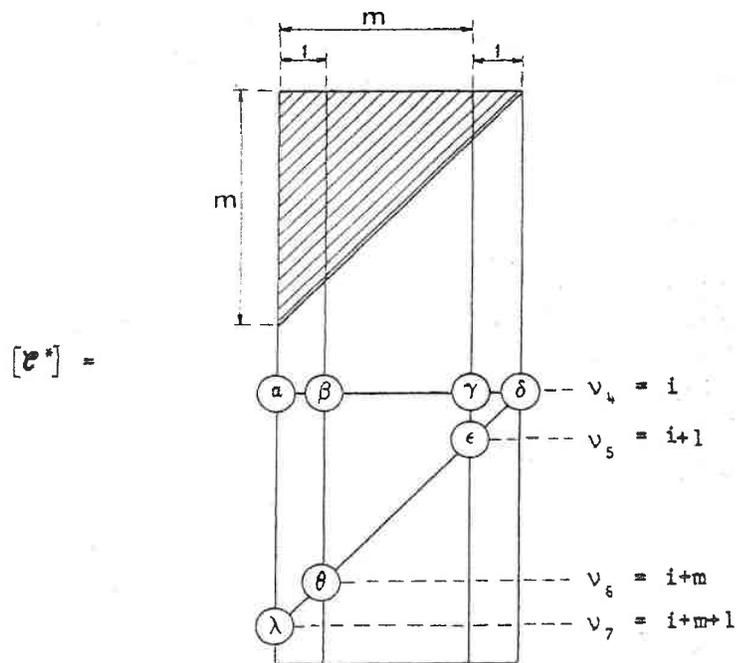


Figure 15

Evidemment la formule (111) que nous venons de donner n'est strictement valable que lorsque l'on a :

$$m + 2 \leq i \leq N - m - 1$$

Si ce n'est pas le cas, il suffit de supprimer dans  $P_i$  les termes correspondant aux  $v_k$  tels que :

$$v_k \notin [1, N]$$

## REMARQUES TECHNIQUES

INTRODUCTION

Tout ce que nous venons de voir jusqu'à présent, tant sur le plan théorique que sur le plan pratique, nous conduit à une valeur approchée  $\phi^*(x,y)$  de la fonction  $\phi(x,y)$  dans le domaine  $\Omega$ .

En fait, le physicien aussi bien que l'ingénieur sont souvent intéressés non pas par  $\phi^*(x,y)$  mais par la connaissance de certaines fonctions liées à  $\phi(x,y)$  comme par exemple le vecteur  $\vec{V}$  où les flux  $\psi_i = \psi(C_i)$  de ce vecteur à travers diverses parties  $C_i \subset \Sigma$  de la frontière  $\Sigma$ , à savoir ...

$$(112) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(C_i) = - \int_{C_i} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \\ C_i \subset \Sigma \end{array} \right.$$

... où  $\vec{n}$  est la normale unitaire à  $\Sigma$  orientée vers l'extérieur de  $\Omega$  de façon à compter positivement le flux  $\psi$  associé à un vecteur  $\vec{V}$  entrant dans  $\Omega$ .

La plupart du temps, une connaissance même approximative de  $\psi(C_i)$  est suffisante pour les applications pratiques, aussi est-il intéressant de fournir un algorithme de calcul automatique même grossier, permettant de se faire une idée de l'ordre de grandeur de ces quantités.

COMPOSANTES DU VECTEUR  $\vec{V}$  DANS UN ELEMENT  $\Omega_{ijk}$ 

Soient  $V^1$  et  $V^2$  les composantes contravariantes du vecteur  $\vec{V}$  dans le repère  $\{u_i, x^i\}$ .

Si on utilise la relation pseudo-matricielle représentée par l'équation (12) de la première partie, on peut écrire de façon approchée ...

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V^1 \\ V^2 \end{bmatrix}}_{[V]} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{c}^{11} & \bar{c}^{12} \\ \bar{c}^{21} & \bar{c}^{22} \end{bmatrix}}_{[\bar{C}]} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

... où les quantités  $c^{ij}$  définies par la relation (62) sont les composantes moyennes du tenseur des conductivités dans l'élément  $\Omega_{ijk}$  considéré.

Par ailleurs, on a, d'après la relation (57) ...

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi]$$

$[D]$

... ce qui nous permet d'écrire :

(113)

$$[V] = - [\bar{C}] \cdot [D] \cdot [M^{-1}] \cdot [\varphi]$$

Comme  $[\bar{C}]$  représente le tableau des composantes moyennes du tenseur  $C(x,y)$  dans  $\Omega_{ijk}$ , il s'en suit que les éléments de la matrice  $[V]$  représentent une approximation de la valeur moyenne des composantes  $V^1$  et  $V^2$  du vecteur  $\vec{V}$  dans l'élément  $\Omega_{ijk}$ .

Si on désire connaître les composantes de  $\vec{V}$  en un point  $i$  du maillage, on pourra par exemple prendre en première approximation la moyenne arithmétique des composantes relatives aux triangles de sommet  $i$ .

FLUX  $\psi_i = \psi(C_i)$  DE  $\vec{V}$  ENTRANT DANS  $\Omega$  A TRAVERS  $C_i \subset \Sigma$

### Introduction

Soit  $i \in \Sigma$  un point du maillage où est imposée une condition aux limites de type Dirichlet et soit  $(I_1, i, I_2)$  un arc de courbe tout entier contenu dans  $\Sigma$ . Nous nous proposons de calculer le flux  $\psi_i = \psi(C_i)$  du vecteur  $\vec{V}$

entrant dans  $\Omega$  à travers l'arc  $C_i = (i_1, i, i_2) \subset \Sigma$  où  $i_1$  et  $i_2$  sont respectivement les milieux des arcs  $I_{1,i}$  et  $I_{2,i}$  comme l'indique la figure 16 :

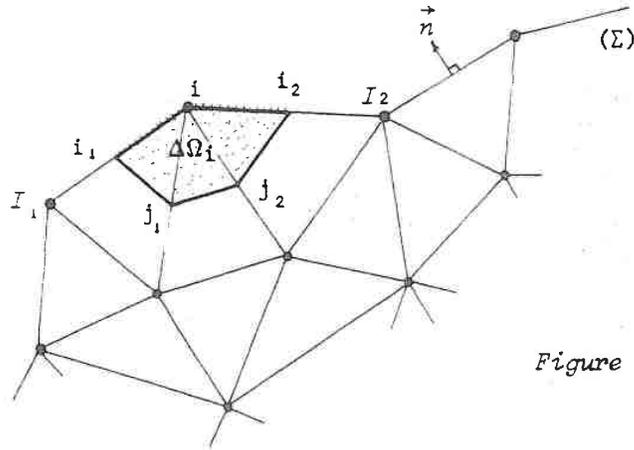


Figure 16

Imaginons que l'on remplace sur  $C_i$  la condition de type Dirichlet par une condition de type Neuman équivalente ...

$$\vec{n} \cdot \vec{V}|_{C_i} = \lambda_i$$

... où  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire à  $\Sigma$  orientée positivement vers l'extérieur de  $\Omega$  ; nous avons vu d'après les équations (88) et (70) que dans ce cas, si  $\psi_i$  désigne le flux du vecteur  $\vec{V}$  entrant à travers l'arc  $C_i$ , il suffit pour passer de la condition de type Dirichlet au point  $i$  à la condition de type Neuman d'ajouter  $\psi_i$  à l'élément  $Q_i = B_i$  de la matrice colonne  $[Q]$  ou ce qui revient au même d'ajouter  $\psi_i$  au débit source  $B_i$  alimentant  $\Omega$  au point  $i$ .

Supposons que l'on soit en régime permanent et considérons le domaine  $\Delta\Omega_i$  de frontière  $\Delta\Sigma_i = (i, i_1, j_1, \dots, j_{v_i}, i_2, i)$  où comme l'indique la figure 16,  $(j_1, \dots, j_p, \dots, j_{v_i})$  sont les milieux des côtés  $(i, j_p)$  des  $v_i$  triangles de sommet  $i$ .

En tenant compte du fait que  $B_i$  doit être remplacé par  $B_i + \psi_i$ , la formule de Green nous permet d'écrire :

$$\int_{\Delta\Sigma_i} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{s} = \int_{\Delta\Omega_i} \text{div}(\vec{V}) \cdot d\omega = B_i + \psi_i$$

$$(114) \iff \left[ \psi_i = \int_{\Delta\Sigma_i} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{s} - B_i \right.$$

Dans ce qui suit, nous allons donc pour trouver  $\psi_i$  calculer l'intégrale  $\int_{\Delta\Sigma_i} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\vec{s}$  ; comme nous connaissons déjà  $\vec{V}$  dans chaque élément  $\Omega_{ijk}$  grâce à la formule approchée (113), il nous suffit de trouver  $\vec{n}$  :

#### Détermination de $\vec{n}$

Soit  $\vec{n}$  la normale unitaire au côté  $jk$  orientée positivement vers l'extérieur de  $\Omega_{ijk}$  comme l'indique la figure 17 :

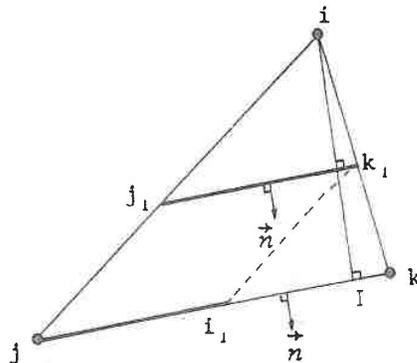


Figure 17

Soit  $h$  la longueur de la hauteur  $iI$  abaissée de  $i$  sur  $jk$  et soient  $\alpha$  et  $\beta$  les composantes du vecteur  $\vec{n}$  :

$$\vec{n} \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

on doit avoir les relations ...

$$\begin{aligned} \vec{ij} \cdot \vec{n} &= h \\ \vec{ik} \cdot \vec{n} &= h \end{aligned}$$

... qui s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (x_j - x_i) & (y_j - y_i) \\ (x_k - x_i) & (y_k - y_i) \end{bmatrix}}_{[N]} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h \end{bmatrix}$$

En inversant  $[N]$  on trouve ...

$$[N^{-1}] = \frac{1}{2 \cdot S} \cdot \begin{bmatrix} (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \end{bmatrix}$$

... où  $S$  est l'aire algébrique du triangle  $\Omega_{ijk}$  définie par la relation (59). Comme d'autre par  $h \cdot |\vec{jk}| = 2 \cdot |S|$ , on a :

$$h = \frac{2 \cdot |S|}{|\vec{jk}|}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot |S|}{2 \cdot S \cdot |\vec{jk}|} \cdot \begin{bmatrix} (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(115) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{|\vec{jk}|} \cdot \frac{|S|}{S} \cdot \begin{bmatrix} (y_k - y_j) \\ -(x_k - x_j) \end{bmatrix}$$

#### Calcul de $\psi_i$ en régime permanent

Soient  $V^1$  et  $V^2$  les composantes moyennes du vecteur  $\vec{V}$  dans l'élément  $\Omega_{ijk}$  définies par la relation matricielle 113. Si nous considérons la figure 17, nous voyons que  $|\vec{j_1 k_1}| = \frac{1}{2} |\vec{jk}|$  si  $j_1$  et  $k_1$  désignent respectivement les milieux des côtés  $ij$  et  $ik$  du triangle  $\Omega_{ijk}$ , si bien que  $\vec{V}$  étant par construction constant dans  $\Omega_{ijk}$ , on peut écrire :

$$\int_{j_1 k_1} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds = \frac{1}{2} \int_{jk} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds = \frac{1}{2} \cdot |\vec{jk}| \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}$$

posons :

$$(116) \quad \left[ \begin{aligned} \bar{q}_i &= \int_{j_1 k_1} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \\ \Leftrightarrow \quad \bar{q}_i &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{jk}| \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \\ \bar{q}_i &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|S|}{S} \cdot \left\{ (y_k - y_j) \cdot V^1 - (x_k - x_j) \cdot V^2 \right\} \end{aligned} \right.$$

De la même façon on pourrait calculer des quantités  $\bar{q}_j$  et  $\bar{q}_k$  relatives aux sommets  $j$  et  $k$  de  $\Omega_{ijk}$  :

$$(117) \quad \left[ \begin{aligned} \bar{q}_i &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|S|}{S} \cdot \left\{ (y_k - y_j) \cdot V^1 - (x_k - x_j) \cdot V^2 \right\} \\ \bar{q}_j &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|S|}{S} \cdot \left\{ (y_i - y_k) \cdot V^1 - (x_i - x_k) \cdot V^2 \right\} \\ \bar{q}_k &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|S|}{S} \cdot \left\{ (y_j - y_i) \cdot V^1 - (x_j - x_i) \cdot V^2 \right\} \end{aligned} \right.$$

en comparant les relations (116) et (114) et en se reportant sur la figure 16, nous voyons que la valeur  $q_i$  de l'intégrale ...

$$(118) \quad q_i = \int_{\Delta\Sigma_i} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

... s'obtient en additionnant les quantités  $\bar{q}_i$  relatives à tous les triangles de sommet  $i$ .

Introduisons maintenant les matrices colonnes  $[q_{ijk}]$ ,  $[q]$  et  $[\psi]$  construites de la façon suivante :

$$[q_{ijk}] = \begin{array}{c} 0 \\ \frac{0}{\bar{q}_1} \\ \frac{0}{\bar{q}_j} \\ 0 \\ \frac{0}{\bar{q}_k} \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow i \\ \rightarrow j \\ \rightarrow k \end{array} ; [q] = \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ q_N \end{array} ; [\psi] = \begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_N \end{array}$$

on a de façon évidente la relation suivante :

$$(119) \quad [q] = \sum_{\Omega_{ijk}} [q_{ijk}]$$

en tenant compte des relations (114) (118) et (72) on a en définitive ...

$$(120) \quad [\psi] = [q] - [Q]$$

Remarque

La relation (120) définit un flux  $\psi_i$  alimentant le domaine  $\Omega$  même en des points  $i$  intérieurs au domaine, comme l'indique la figure 18 :

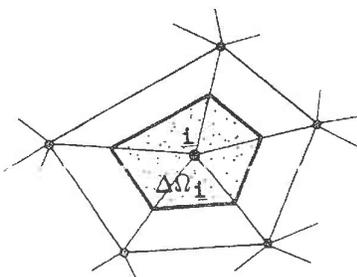


Figure 18

Dans ce cas, s'il n'est pas imposé de condition de type Dirichlet au point  $i$ , alors la formule de Green nous permet d'écrire ...

$$\int_{\Delta\Sigma_i} \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\Delta\Omega_i} \operatorname{div}(\vec{V}) \, d\omega = B_i$$

... si bien que l'on a en considérant la relation (114) :

$$\left[ \psi_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i \in \Sigma \right.$$

Par contre, il se peut que  $\Sigma$  ne soit pas connexe et qu'une condition de type Dirichlet soit imposée en un point  $i$  du type de celui représenté sur la figure 18 ; on vérifie facilement que dans ce cas le flux  $\psi_i$  fourni par la relation (120) correspond au flux du vecteur  $\vec{V}$  entrant à travers un élément  $\delta\Omega$  infiniment petit de frontière  $\delta\Sigma$  entourant le point  $i$  car on a :

$$\int_{\Delta\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\delta\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds \quad \forall \quad \begin{cases} \delta\Sigma \subseteq \Delta\Sigma \\ i \in \delta\Omega \end{cases}$$

# E

 TEST DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

## CAS D'UN REGIME PERMANENT

### MODELE MATHEMATIQUE

Afin de tester la stabilité et la convergence de la méthode des éléments finis lorsque l'on fait varier la taille et le nombre des divers éléments  $\Omega_{ijk}$ , nous avons construit un modèle mathématique en utilisant pour potentiel et conductivité les fonctions suivantes dont on peut facilement vérifier qu'elles satisfont à l'équation de continuité  $\text{div}[-C.\text{grad}\varphi] = 0$  où la conductivité  $C(x,y)$  a été ici supposée isotrope et égale au scalaire  $C(x,y)$ .

$$\varphi(x,y) = \varphi_0 + \log \frac{C_0}{K.y + C_0}$$

$$C(x,y) = C_0 + K.y$$

$$\text{avec } \varphi_0 = C_0 = K = 1$$

Pour domaine d'étude, nous nous sommes limités au domaine  $\Omega$  (cf. fig. 19) défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq +1 \\ 0 \leq y \leq +2 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) \in \Omega$$

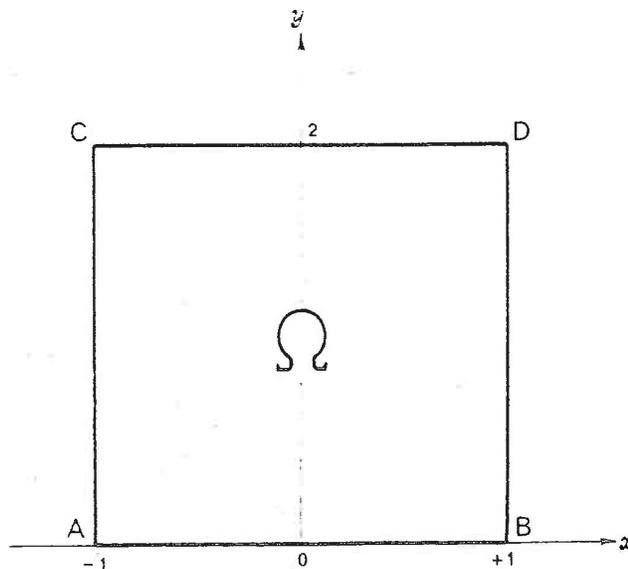


Figure 19

Remarquons que  $z = \varphi(x, y)$  et  $z = C(x, y)$  sont des surfaces cylindriques de génératrices parallèles à l'axe  $\vec{ox}$  ; il s'en suit qu'il nous suffira d'observer le potentiel  $\varphi^*$  calculé suivant l'axe  $\vec{oy}$  pour avoir une idée sur la stabilité de la méthode.

#### DISCRETISATION DU DOMAINE $\Omega$

Nous avons construit trois modèles d'éléments finis  $A$ ,  $B$  et  $C$  à partir du modèle mathématique décrit ci-dessus en discrétisant le domaine  $\Omega$  respectivement par  $N = 25$ ,  $81$  et  $289$  points répartis au sommet d'un réseau régulier à maille carrée comme l'indique la figure 20. Autrement dit, le modèle  $B$  est obtenu en doublant le maillage au modèle  $A$ , et le modèle  $C$  en doublant le maillage du modèle  $B$  :

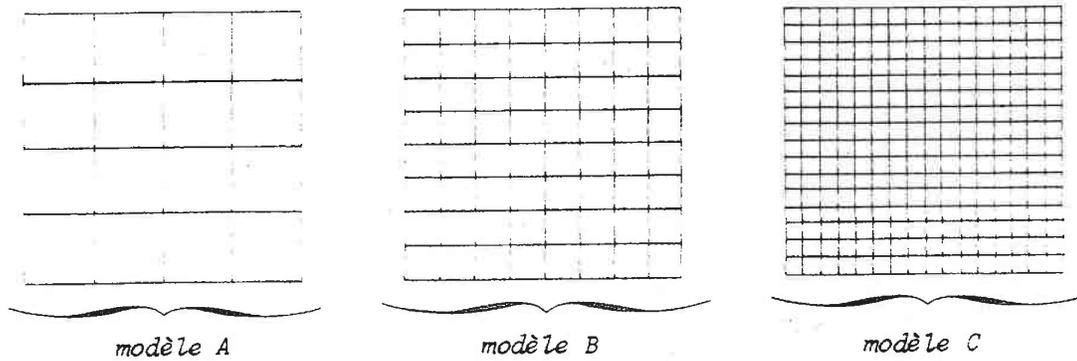


Figure 20

### RESULTATS OBTENUS

A l'aide du modèle mathématique décrit ci-dessus, nous avons étudié deux types de problèmes :

- a) un problème de type Dirichlet en nous donnant le potentiel sur la frontière  $ABCD$  du domaine  $\Omega$  (cf. fig. 19) ;
- b) un problème de type mixte en nous donnant le potentiel sur les côtés  $AB$  et  $CD$  du domaine  $\Omega$  et en nous donnant un flux nul du vecteur  $\vec{V}$  à travers les lignes de courant  $AC$  et  $BD$ .

Les résultats obtenus pour ces deux types de problèmes sont consignés respectivement dans les tableaux 1 et 2.

Potentiel $\varphi(x,y)$ sur la droite $x = 0$									
$x$	$y$	solution analytique	Modèle A maillage à 25 points		Modèle B maillage à 31 points		Modèle C maillage à 289 points		
			solution	écart	solution	écart	solution	écart	
0.000 000	0.000 000	0.306 853	0.306 853	0.000 000	0.306 853	0.000 000	0.306 853	0.000 000	
	0.125 000	0.246 229					0.246 229	0.000 000	
	0.250 000	0.189 070			0.189 107	0.000 037	0.189 074	0.000 004	
	0.375 000	0.135 002					0.135 012	0.000 010	
	0.500 000	0.083 709	0.083 900	0.000 191	0.083 758	0.000 049	0.083 720	0.000 011	
	0.625 000	0.034 920					0.034 929	0.000 009	
	0.750 000	-0.011 600			-0.011 554	0.000 046	-0.011 591	0.000 009	
	0.875 000	-0.056 052					-0.056 042	0.000 010	
	1.000 000	-0.098 612	-0.098 446	0.000 170	-0.098 571	0.000 041	-0.098 599	0.000 013	
	1.125 000	-0.139 434					-0.139 424	0.000 010	
	1.625 000	-0.178 655			-0.178 623	0.000 032	-0.178 645	0.000 010	
	1.375 000	-0.216 395					-0.216 385	0.000 010	
	1.500 000	-0.252 762	-0.252 671	0.000 091	-0.252 740	0.000 022	-0.252 754	0.000 008	
	1.625 000	-0.287 853					-0.287 846	0.000 007	
	1.750 000	-0.321 754			-0.321 742	0.000 012	-0.321 749	0.000 005	
	1.875 000	-0.354 545					-0.354 541	0.000 004	
	2.000 000	-0.386 293	-0.386 293	0.000 000	-0.386 293	0.000 000	-0.386 293	0.000 000	

TABLEAU 1

Résultats numériques obtenus sur les modèles A, B et C dans le cas de conditions aux limites du type Dirichlet.

Potentiel $\varphi(x, y)$ sur la droite $x=0$									
$x$	$y$	solution analytique	Modèle A maillage à 25 points		Modèle B maillage à 81 points		Modèle C maillage à 289 points		écart
			solution	écart	solution	écart	solution	écart	
0. 000 000	0. 000 000	0. 306 853	0. 306 853	0. 000 000	0. 306 853	0. 000 000	0. 306 853	0. 000 000	0. 000 000
	0. 125 000	0. 246 229					0. 246 242	0. 000 013	
	0. 250 000	0. 189 070			0. 189 120	0. 000 050	0. 189 090	0. 000 020	
	0. 375 000	0. 135 002					0. 135 024	0. 000 022	
	0. 500 000	0. 083 709	0. 084 008	0. 000 299	0. 083 783	0. 000 074	0. 083 731	0. 000 020	
	0. 625 000	0. 034 920					0. 034 943	0. 000 023	
	0. 750 000	-0. 011 600			-0. 011 523	0. 000 077	-0. 011 577	0. 000 023	
	0. 875 000	-0. 056 052					-0. 056 029	0. 000 023	
	0. 100 000	-0. 098 612	-0. 098 317	0. 000 294	-0. 098 538	0. 000 074	-0. 098 590	0. 000 022	
	1. 125 000	-0. 139 434					-0. 139 416	0. 000 018	
	1. 625 000	-0. 178 655			-0. 178 594	0. 000 061	-0. 178 639	0. 000 016	
	1. 375 000	-0. 216 395					-0. 216 381	0. 000 014	
	1. 500 000	-0. 252 762	-0. 252 591	0. 000 171	-0. 252 718	0. 000 044	-0. 252 752	0. 000 010	
	1. 625 000	-0. 287 853					-0. 287 845	0. 000 008	
	1. 750 000	-0. 321 754			-0. 321 732	0. 000 022	-0. 321 745	0. 000 009	
	1. 875 000	-0. 354 545					-0. 354 541	0. 000 004	
	2. 000 000	-0. 386 293	-0. 386 293	0. 000 000	-0. 386 293	0. 000 000	-0. 386 000	0. 000 000	0. 000 000

TABLEAU 2

Résultats numériques obtenus sur les modèles A, B et C dans le cas de conditions aux limites de type mixte.

## CAS D'UN REGIME TRANSITOIRE

MODELE MATHEMATIQUE

Soit  $\Omega$  le domaine rectangulaire (cf. fig. 21) de frontière  $OACB$  défini par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow (x,y) \in \Omega$$

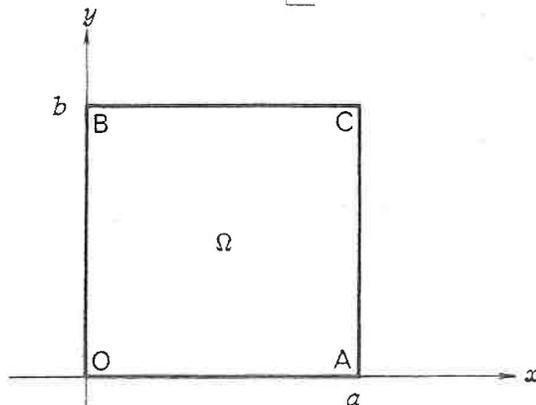


Figure 21

Pour modèle mathématique dans le domaine  $\Omega$ , nous avons les distributions de  $\varphi(x,y,t)$ ,  $C(x,y)$  et  $A(x,y)$  suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x,y,t) = \sin(a\pi x) \cdot \sin(b\pi y) \cdot \exp. \left\{ - (a^2 + b^2)\pi^2 \frac{t}{A} \right\} \\ C(x,y) = 1. \\ A(x,y) = 1. \end{array} \right.$$

avec  $a = b = 1$ .

Sachant que l'on s'impose des conditions aux limites sur la frontière  $OACB$  du type Dirichlet, et que l'on connaît la répartition  $\varphi^0 = \varphi(x,y,0)$  du potentiel dans  $\Omega$  à la date  $t_0 = 0$ , nous nous proposons de calculer numériquement la répartition du potentiel à la date  $t = t_0 + \Delta t$ .

Nous avons effectué deux séries d'essais, la première correspondant à des intervalles de temps  $\Delta t$  très petits (cf. tableau 3) et la seconde à des pas de temps assez grands pour permettre d'atteindre le régime stationnaire en 20 itérations (cf. fig. 22).

Evidemment, dans le second cas, le nombre de chiffres significatifs est beaucoup plus réduit (1, 2 ou 3), s'est pourquoi nous nous sommes contentés de tracer la courbe  $\varphi(t)$  au centre de  $OABC$  plutôt que de donner tous les résultats.

Potentiel $\varphi(x,y,t)$ sur la droite $x=0.5$				
$x$	$y$	Valeur initiale du potentiel à la date $t=0$	Potentiel à la date $t=5.32 \times 10^{-3}$ obtenu en 20 pas de temps avec un maillage de 289 points	
			Valeur exacte	Valeur calculée
0.500 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000
	0.062 500	0.195 090	0.175 632	0.175 558
	0.125 000	0.382 683	0.344 515	0.344 367
	0.187 500	0.555 570	0.500 159	0.499 941
	0.250 000	0.707 107	0.636 582	0.636 302
	0.312 500	0.831 470	0.748 541	0.748 210
	0.375 000	0.923 880	0.831 734	0.831 366
	0.437 500	0.980 785	0.882 965	0.882 573
	0.500 000	1.000 000	0.900 263	0.899 864
	0.562 500	0.980 785	0.882 965	0.882 573
	0.625 000	0.923 880	0.831 734	0.831 366
	0.687 500	0.831 470	0.748 541	0.748 211
	0.750 000	0.707 107	0.636 582	0.636 302
	0.812 500	0.555 570	0.500 159	0.499 941
	0.875 000	0.382 683	0.344 515	0.344 367
	0.937 500	0.195 090	0.175 632	0.175 557
	1.000 000	0.000 000	0.000 000	0.000 000

TABLEAU 3

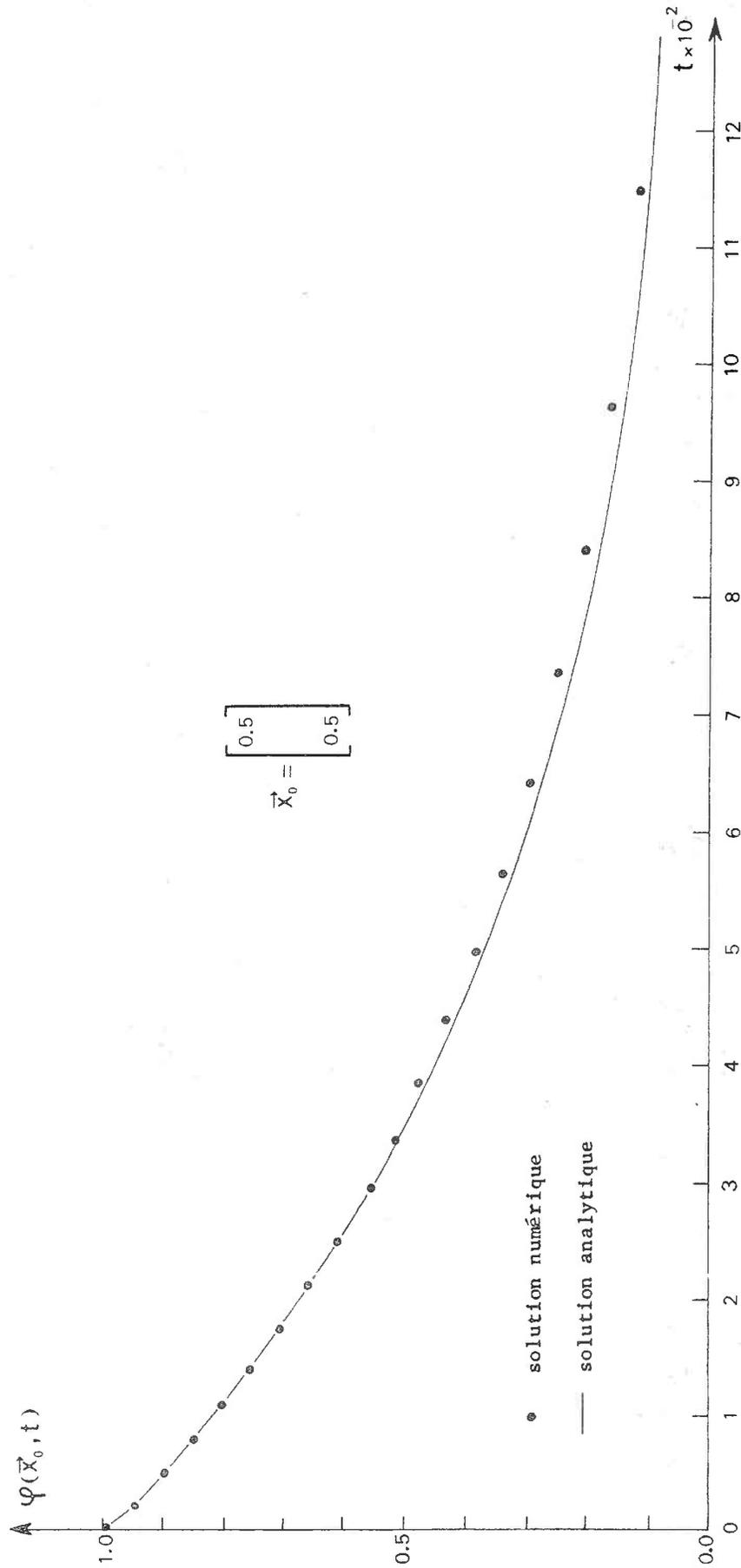


Figure 22

TROISIEME PARTIE

ETUDE NUMERIQUE DU PROBLEME INVERSE

# A APPROXIMATION EN $\mu$ -MOYENNE QUADRATIQUE

## PRESENTATION DE LA METHODE

### INTRODUCTION

- a) Soit  $\vec{z}$  le vecteur d'espace de composantes  $z^i$  appartenant à un domaine  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  et  $\mu$  une mesure positive bornée. Dans toute l'étude qui va suivre, nous désignerons par  $L^2(\Omega)$  l'espace vectoriel des fonctions réelles de carré  $\mu$ -intégrable sur  $\Omega$  :

$$\forall \varphi(\vec{z}) \in L^2(\Omega) \iff \int_{\Omega} |\varphi|^2 \cdot \mu(d\omega) < +\infty$$

On démontre que  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert si on le muni du produit scalaire classique :

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \psi \end{array} \right\} \in L^2(\Omega) \iff \langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \varphi \cdot \psi \cdot \mu(d\omega)$$

- b) soit  $H \subset L^2(\Omega)$  le sous-espace vectoriel fermé engendré par une suite finie de  $m$  fonctions  $\{u_i(\vec{z})\}$  appartenant à  $L^2(\Omega)$ . Nous supposons de plus que les  $m$  fonctions  $u_i$  sont  $\mu$ -linéairement indépendantes, c'est-à-dire que le déterminant de la matrice  $[G]$  des termes  $G_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$  est différent de zéro ; on dit dans ce cas que  $\{u_i, (\vec{z})\}$  est une base de l'espace  $H$  et que  $\{G_{ij}\}$  est le tenseur métrique fondamental associé à cette base.
- c) Nous désignerons par  $\{v_i(\vec{z})\}$  une base finie ou infinie dénombrable engendrant l'orthogonal  $H^\perp$  de l'espace  $H$ , de façon que l'ensemble des fonctions  $\{v_i\}$  et  $\{u_i\}$  forme une base pour l'espace  $L^2(\Omega)$ . Rappelons que  $L^2(\Omega)$  est la somme directe de  $H$  et  $H^\perp$

$$\boxed{L^2(\Omega) = H \oplus H^\perp}$$

APPROXIMATION DE  $\varphi(\vec{z})$  EN  $\mu$  - MOYENNE QUADRATIQUE SUR LA BASE  $\{u_i(\vec{z})\}$

Rappels

La théorie des espaces de Hilbert nous apprend que toute fonction  $\varphi(\vec{z})$  appartenant à  $L^2(\Omega)$  peut se décomposer sous la forme ...

$$(1) \quad \begin{array}{l} \varphi(\vec{z}) = \varphi^*(\vec{z}) + R(\vec{z}) \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\vec{z}) \in L^2(\Omega) \\ \varphi^*(\vec{z}) \in H \\ R(\vec{z}) \in H^\perp \end{array} \right. \end{array}$$

... où  $\varphi^*(\vec{z})$  est la projection orthogonale de  $\varphi(\vec{z})$  sur  $H$  et  $R(\vec{z})$  la projection orthogonale de  $\varphi(\vec{z})$  sur  $H^\perp$  ; on démontre que cette décomposition est l'unique décomposition qui réalise le minimum de la norme de  $R(\vec{z})$ . Par définition nous dirons que  $\varphi^*(\vec{z})$  approche  $\varphi(\vec{z})$  dans l'espace  $H \subset L^2(\Omega)$  et que  $R(\vec{z})$  est le résidu de cette approximation ; remarquons enfin que tout ce que nous venons de dire peut être représenté à l'aide d'un schéma comme cela a été fait sur la figure 1.

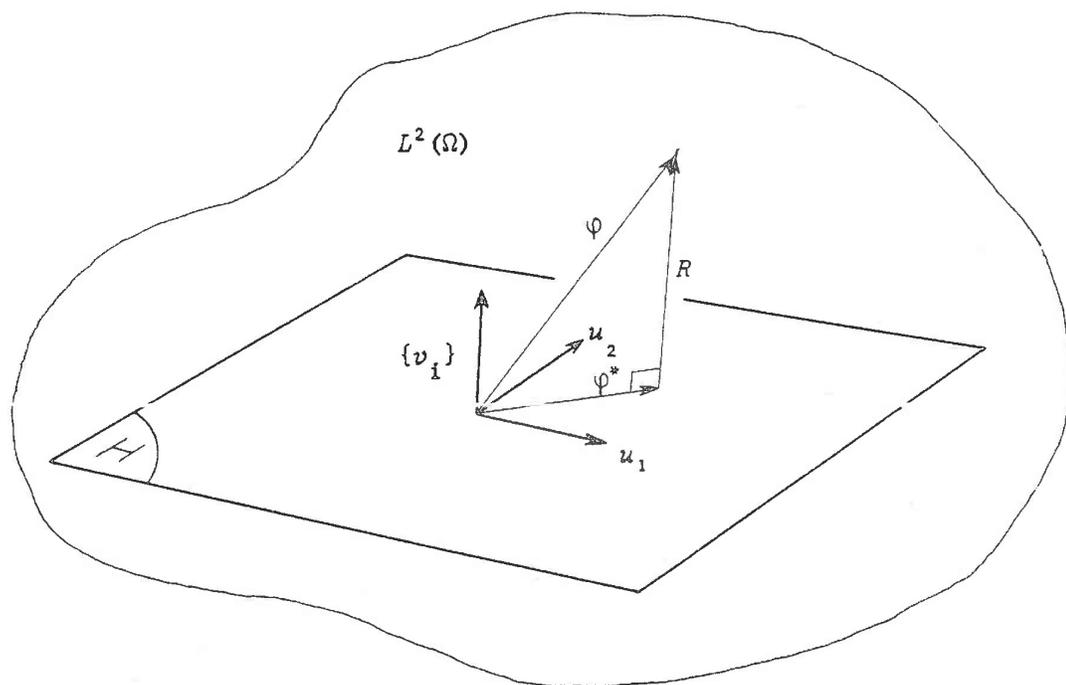


Figure 1

L'ensemble des fonctions  $\{v_i\}$  et  $\{u_i\}$  formant une base de  $L^2(\Omega)$ , il existe deux suites uniques de scalaires  $\{a^1, a^2, \dots, a^m\}$  et  $\{\alpha^1, \alpha^2, \dots\}$  telles que l'on puisse écrire :

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi^*(\vec{z}) = \sum_{i=1}^m a^i \cdot u_i(\vec{z}) \\ R(\vec{z}) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \cdot v_i(\vec{z}) \end{cases}$$

### Définition

Par définition, on dit que ...

$$\left[ \varphi^*(\vec{z}) = \sum_{i=1}^m a^i \cdot u_i(\vec{z}) \right]$$

... est l'approximation en  $\mu$ -moyenne quadratique de la fonction  $\varphi(\vec{z})$  sur la base  $\{u_i(\vec{z})\}$  pour la mesure  $\mu$  ; par ailleurs, les coefficients  $a^i$  sont appelés coefficients de Fourier de la fonction  $\varphi$  dans la base  $\{u_i\}$ .

### Détermination des $m$ coefficients $a^i$

On a la relation suivante pour toute fonction  $\varphi \in L^2(\Omega)$  :

$$\varphi(\vec{z}) = \sum_{i=1}^m a^i \cdot u_i(\vec{z}) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \cdot v_i(\vec{z})$$

Multiplions scalairement cette égalité par  $u_j(\vec{z})$  :

$$\langle \varphi, u_j \rangle = \sum_{i=1}^m a^i \cdot \langle u_i, u_j \rangle + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \cdot \langle v_i, u_j \rangle$$

mais  $\langle v_i, u_j \rangle = 0$  car  $v_i \in H^\perp$  et  $u_j \in H$ , si bien que l'on a :

$$\langle \varphi, u_j \rangle = \sum_{i=1}^m a^i \cdot \langle u_i, u_j \rangle$$

On conclut de ceci que les  $a^i$  solution de notre problème s'obtiennent en résolvant le système linéaire suivant :

$$\left[ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m a^i \cdot G_{ij} = f_j \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} G_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle \\ f_j = \langle \varphi, u_j \rangle \end{array} \right. \end{array} \right.$$

sous forme matricielle, ce système s'écrit ...

$$(3) \quad [G] \cdot [A] = [F]$$

... où l'on a posé :

$$[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1} & G_{m2} & \dots & G_{mm} \end{bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}; \quad [F] = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

On remarquera que ce système a toujours une solution (unique) du fait que la matrice  $[G]$  est inversible car on a supposé les fonctions  $\{u_i\}$   $\mu$ -linéairement indépendantes.

#### APPROXIMATION AU SENS DES MOINDRES CARRES

##### Rappel

Soit un système surdéterminé de  $N$  équations aux  $m$  inconnues  $a^i$  que l'on peut écrire sous la forme matricielle suivante ...

$$(4) \quad [g] \cdot [A] = [f]$$

... où  $[g]$  est une matrice rectangle donnée à  $N$  lignes et  $m$  colonnes

( $N \geq m$ ),  $[f]$  une matrice colonne donnée de taille  $N$  et  $[A]$  la matrice colonne des  $m$  inconnues  $a_i$ .

La solution  $[A]$  de l'équation (4) au sens des moindres carrés est celle qui, par définition, minimise la norme euclidienne de la différence  $[R]$  entre les vecteurs colonnes  $[g] \cdot [A]$  et  $[f]$  :

$$\|R\|^2 = \|[g] \cdot [A] - [f]\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|R\|^2 = \{[g] \cdot [A] - [f]\}^t \cdot \{[g] \cdot [A] - [f]\}$$

$$\Leftrightarrow \|R\|^2 = [A]^t \cdot [g]^t \cdot [g] \cdot [A] - 2 \cdot [f]^t \cdot [g] \cdot [A] + [f]^t \cdot [f]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \|R\|^2}{\partial [A]} = 2 \cdot [g]^t \cdot [g] \cdot [A] - 2 \cdot [g]^t \cdot [f]$$

$$\|R\|^2 \text{ optimum} \Leftarrow \frac{\partial \|R\|^2}{\partial [A]} = 0$$

$$\Leftrightarrow [g]^t \cdot [g] \cdot [A] = [g]^t \cdot [f]$$

Pour que l'optimum de  $\|R\|^2$  ainsi trouvé soit bien un minimum, il faut et il suffit que la matrice ...

$$\frac{\partial^2 \|R\|^2}{\partial [A] \partial [A]} = 2 \cdot [g]^t \cdot [g]$$

... soit définie positive, ce qui est bien le cas si  $\text{rang}(g) = m$ .

En définitive, nous voyons que la solution  $[A]$  de l'équation (4), au sens des moindres carrés, vérifie le système d'équations suivant encore appelé "équations normales" :

$$(5) \quad \left[ \begin{array}{l} [g]^t \cdot [g] \cdot [A] = [g]^t \cdot [f] \end{array} \right.$$

Remarquons que l'équation (5) s'obtient en multipliant à gauche l'équation (4) par  $[g]^t$  ; on a l'habitude d'appeler "transformation de Gauss" l'opération ainsi effectuée.

### Introduction

Soit à approcher sur un domaine  $\Omega$  une fonction  $\varphi(\vec{z})$  dont on connaît la valeur numérique  $\varphi_k = \varphi(\vec{z}_k)$  en  $N$  points  $\{\vec{z}_k\} = \{\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_N\}$  appartenant à  $\Omega$ .

### Mesure d'échantillonnage

Par définition, nous appellerons "mesure d'échantillonnage" la mesure  $\mu$  définie par ...

$$(6) \quad \mu = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \varpi_k \cdot \delta_k$$

... où  $\delta_k$  représente la mesure de Dirac au point  $\vec{z}_k \in \{\vec{z}_k\}$ ,  $\varpi_k = \varpi(\vec{z}_k)$  la valeur d'une fonction de poids  $\varpi$  au point  $\vec{z}_k \in \{\vec{z}_k\}$  positive ou nulle sur tout le domaine  $\Omega$  appartenant à l'espace  $\mathbb{R}^n$  considéré. Nous dirons que  $\{\vec{z}_k\}$  est le support de la mesure  $\mu$  ainsi définie.

### Définition

On appelle approximation de  $\varphi(\vec{z})$  au sens des moindres carrés généralisés sur la base  $\{u_i(\vec{z})\}$  pour l'échantillonnage  $\{\vec{z}_k\}$ , l'approximation en moyenne quadratique correspondant à la mesure d'échantillonnage pour le support  $\{\vec{z}_k\}$ .

### Construction des matrices $[G]$ et $[F]$

En utilisant la mesure  $\mu$  ainsi définie pour calculer les quantités  $G_{ij}$  et  $f_j$ , il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{ij} = \frac{1}{N} \int_{\Omega} u_i(\vec{z}) \cdot u_j(\vec{z}) \cdot \mu(d\omega) \\ f_j = \frac{1}{N} \int_{\Omega} \varphi(\vec{z}) \cdot u_j(\vec{z}) \cdot \mu(d\omega) \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$  (7)

$$\begin{array}{l} G_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_i(\vec{z}_k) \cdot u_j(\vec{z}_k) \cdot \varpi(\vec{z}_k) \\ f_j = \langle \varphi, u_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(\vec{z}_k) \cdot u_j(\vec{z}_k) \cdot \varpi(\vec{z}_k) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que l'on a dans ce cas ...

$$(8) \quad \begin{cases} [G] = \frac{1}{N} \cdot [g]^t \cdot [P] \cdot [g] \\ [F] = \frac{1}{N} \cdot [g]^t \cdot [P] \cdot [f] \end{cases}$$

... où l'on a posé :

$$[g] = \begin{bmatrix} u_1(\vec{z}_1) & \dots & u_m(\vec{z}_1) \\ u_1(\vec{z}_2) & \dots & u_m(\vec{z}_2) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(\vec{z}_k) & \dots & u_m(\vec{z}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(\vec{z}_N) & \dots & u_m(\vec{z}_N) \end{bmatrix} \quad [P] = \begin{bmatrix} \varpi(\vec{z}_1) & & & & \\ & \varpi(\vec{z}_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \varpi(\vec{z}_k) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \varpi(\vec{z}_N) \end{bmatrix} \quad [f] = \begin{bmatrix} \varphi(\vec{z}_1) \\ \varphi(\vec{z}_2) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{z}_k) \\ \vdots \\ \varphi(\vec{z}_N) \end{bmatrix}$$

$\xleftarrow{\quad m \quad}$ 
 $\xleftarrow{\quad N \quad}$ 
 $\xleftarrow{\quad N \quad}$

Par définition, nous dirons que  $[P]$  est une matrice de pondération. Dans le cas où la fonction de poids  $\varpi(\vec{z})$  est identique à 1 sur tout le domaine  $\Omega$ , alors la matrice  $[P]$  est une matrice unité de taille  $N \times N$ , si bien que les équations (8) s'écrivent :

$$\begin{cases} [G] = \frac{1}{N} \cdot [g]^t \cdot [g] \\ [F] = \frac{1}{N} \cdot [g]^t \cdot [f] \end{cases}$$

... et l'équation (3) devient ...

$$[g]^t \cdot [g] \cdot [A] = [g]^t \cdot [f]$$

... où l'on reconnaît le système des "équations normales" rencontrées dans l'approximation au sens des moindres carrés classique.

"COSINUS THETA" D'UNE APPROXIMATION EN  $\mu$  - MOYENNE QUADRATIQUE

Si on considère une fonction  $\varphi(\vec{z}) \in L^2(\Omega)$ , celle-ci oscille en général autour d'une valeur moyenne  $\mu(\varphi)$  pour la mesure  $\mu$  :

$$(9) \quad \left[ \mu(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi \cdot \mu(d\omega) = \langle 1, \varphi \rangle \right.$$

Il en découle que dans  $L^2(\Omega)$ , toute fonction  $\varphi$  peut être écrite sous la forme :

$$(10) \quad \left[ \begin{array}{l} \varphi(\vec{z}) = \mu(\varphi) + \psi(\vec{z}) \\ \text{avec } \mu(\psi) = 0 \end{array} \right.$$

Connaissant  $\mu(\varphi)$ , ce que l'on cherche en fait à approcher, ce sont les variations  $\psi(\vec{z})$  autour de cette valeur moyenne ; si on désigne par  $\psi^*(\vec{z})$  cette approximation de  $\psi(\vec{z})$  en  $\mu$ -moyenne quadratique, on a de façon évidente, en considérant la figure 2, les relations suivantes :

$$(11) \quad \left[ \begin{array}{l} \varphi^*(\vec{z}) = \mu(\varphi) + \psi^*(\vec{z}) \\ \psi(\vec{z}) = \psi^*(\vec{z}) + R(\vec{z}) \\ \varphi(\vec{z}) = \varphi^*(\vec{z}) + R(\vec{z}) \end{array} \right.$$

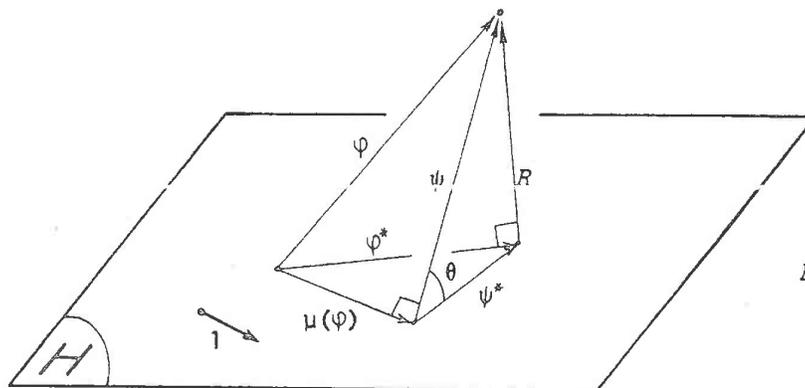


Figure 2

Si nous désignons par  $\theta$  "l'angle" compris entre les vecteurs (= fonctions)  $\psi$  et  $\psi^*$ , nous voyons que l'approximation de  $\psi$  par  $\psi^*$  (et donc de  $\varphi$  par  $\psi^*$ ) est d'autant meilleure que  $|\cos\theta|$  est voisin de 1. Nous voyons donc que le paramètre  $\rho = |\cos\theta|$  pourra être utilisé pour se faire une idée de la qualité de l'approximation en  $\mu$ -moyenne quadratique que l'on a pu effectuer.

Si nous désignons par  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$  le carré de la norme d'une fonction  $f \in L^2(\Omega)$ , on voit sur la figure 2 que le théorème de pythagore nous permet d'écrire :

$$\rho^2 = \frac{\|\psi^*\|^2}{\|\psi\|^2} = \frac{\|\psi\|^2 - \|R\|^2}{\|\psi\|^2}$$

$\Leftrightarrow$  (12)

$ \cos\theta ^2 = \frac{\ \psi\ ^2 - \ R\ ^2}{\ \psi\ ^2}$
avec $\ \psi\ ^2 = \begin{cases} \ \varphi - \mu(\varphi)\ ^2 \\ \ \varphi\ ^2 -  \mu(\varphi) ^2 \end{cases}$

Dans le cas d'une approximation au sens des moindres carrés, nous remarquerons que l'on a :

$$(13) \quad \left[ \begin{aligned} \mu(\varphi) &= \frac{1}{N} \sum_k \varphi(\vec{z}_k) \cdot \bar{\omega}_k \\ \|\psi\|^2 &= \frac{1}{N} \sum_k [\varphi(\vec{z}_k) - \mu(\varphi)]^2 \cdot \bar{\omega}_k \\ \|R\|^2 &= \frac{1}{N} \sum_k [\varphi(\vec{z}_k) - \psi^*(\vec{z}_k)]^2 \cdot \bar{\omega}_k \end{aligned} \right.$$

### CONSTRUCTION D'UNE BASE $\{u_i(\vec{z})\}$

#### Algorithme de construction

Il est souvent très commode de prendre pour base  $u_i(\vec{z}) = u_i(z^1, z^2, \dots, z^n)$  des fonctions du type ...

$$(14) \quad u_i(\vec{z}) = \psi_{p_i}(z^1) \cdot \psi_{q_i}(z^2) \cdot \dots \cdot \psi_{r_i}(z^n)$$

... où  $\psi_k(s)$  est une famille de fonctions dépendant d'un paramètre  $k$  ; par exemple on pourra prendre :

$$\psi_k(s) = \begin{cases} T_k(s) = \text{polynôme de Tchebycheff de degré } k \\ \sin(ks) \text{ ou } \cos(ks) \\ e^{ks} \\ s^k \\ \vdots \end{cases}$$

#### Notion de silhouette

Pour fixer les idées, supposons que l'on étudie un problème bidimensionnel pour lequel  $u_i(\vec{z})$  est de la forme :

$$u_i(\vec{z}) = \psi_{p_i}(z^1) \cdot \psi_{q_i}(z^2)$$

Les indices  $p_i$  et  $q_i$  étant choisis de façon arbitraire pour chaque indice  $i$ , il peut être intéressant de disposer d'un procédé graphique permettant de visualiser la structure des quantités  $u_i(\vec{z}) = u_i(z^1, z^2)$  en fonction de  $\psi_{p_i}(z^1)$  et  $\psi_{q_i}(z^2)$  ; ce procédé existe et constitue ce que l'on appelle la silhouette de la base  $u_i(\vec{z})$  :

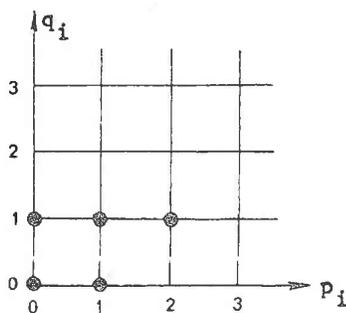


Figure 3

On commence par construire (cf. fig. 3) deux axes perpendiculaires représentant les quantités  $p_i$  en abscisse et  $q_i$  en ordonnée. On adjoint à ces deux axes un quadrillage régulier correspondant aux valeurs entières de  $p_i$  et  $q_i$  ; dans ce système de repérage, on visualise ensuite les termes

$u_i(\vec{z}) = \psi_{p_i}(z^1) \cdot \psi_{q_i}(z^2)$  par un gros point de coordonnées  $p_i$  et  $q_i$ .

Cette méthode de visualisation peut évidemment être étendue au cas où il y a plus de 2 variables.

## MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DES MOINDRES CARRES

### CHOIX DE LA BASE

#### Introduction

Nous utiliserons dans ce qui suit une base  $u_i(\vec{z})$  construite à partir de polynômes de Tchebycheff utilisés dans le domaine  $[-1, +1]$ .

Par exemple, pour un problème bidimensionnel, nous avons pris pour base  $u_i(z^1, z^2)$  des fonctions du type ...

$$(15) \quad \begin{cases} u_i(z^1, z^2) = T_{p_i}(s) \cdot T_{q_i}(t) \\ \text{avec :} \begin{cases} s = \frac{2z^1}{z_2^1 - z_1^1} - \frac{z_2^1 + z_1^1}{z_2^1 - z_1^1} \\ t = \frac{2z^2}{z_2^2 - z_1^2} - \frac{z_2^2 + z_1^2}{z_2^2 - z_1^2} \end{cases} \end{cases}$$

... où  $(z_1^1, z_2^1)$  et  $(z_1^2, z_2^2)$  sont les bornes en  $z^1$  et en  $z^2$  du domaine  $\Omega$  d'étude (cf. fig. 4) :

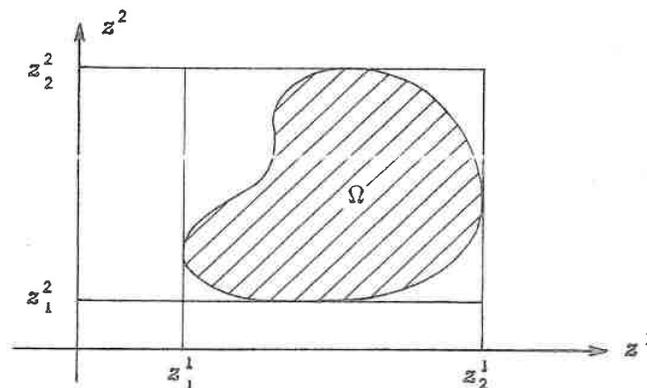


Figure 4

Rappel des principales propriétés des polynômes de Tchebycheff

Les polynômes de Tchebycheff sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$(16) \quad \left[ \begin{array}{l} T_{k+1}(z) = 2z \cdot T_k(z) - T_{k-1}(z) \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} T_0(z) = 1 \\ T_1(z) = 2z \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On peut obtenir la dérivée première d'un polynôme de Tchebycheff de la façon suivante :

$$(17) \quad \left[ \begin{array}{l} T'_k(z) = k \cdot U_{k-1}(z) \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} U_{k+1}(z) = 2z \cdot U_k(z) - U_{k-1}(z) \\ U_0(z) = 1 \\ U_1(z) = 2z \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Connaissant  $T_k(z)$  et  $T'_k(z)$ , on peut alors calculer la dérivée seconde  $T''_k(z)$  de la façon suivante :

$$(18) \quad \left[ \begin{array}{l} T''_k(z) = \frac{z \cdot T'_k(z) - k^2 \cdot T_k(z)}{1 - z^2} \dots \text{ si } z \neq \pm 1 \\ T''_k(z) = z^k \cdot \frac{k^4 - k^2}{3} \dots \text{ si } z = \pm 1 \end{array} \right.$$

On a également les 2 relations suivantes :

$$(19) \quad \left[ \begin{array}{l} T_p(z) \cdot T_q(z) = \frac{1}{2} \cdot \left[ T_{p+q}(z) + T_{|p-q|}(z) \right] \\ \int T_p(z) \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{T_{p+1}(z)}{p+1} - \frac{T_{p-1}(z)}{p-1} \right] \end{array} \right.$$

RESOLUTION DU SYSTEME  $[G] \cdot [A] = [F]$

Rang de la matrice  $[G]$

On démontre en calcul matriciel que l'on a la relation :

$$\text{rang}([M]^t \cdot [M]) = \text{rang}([M] \cdot [M]^t) = \text{rang}([M])$$

Les  $u_i(\vec{z})$  étant linéairement indépendants et les points d'échantillonnage  $\{\vec{z}_k\}$  étant distincts les uns des autres, on a :

$$\text{rang}(g) = \inf(m, N)$$

La matrice de pondération  $[P]$  étant diagonale, on peut toujours écrire ...

$$\left[ \begin{array}{l} [g]^t \cdot [P] \cdot [g] = [\gamma]^t \cdot [\gamma] \\ \text{avec : } [\gamma] = [P]^{1/2} \cdot [g] \end{array} \right.$$

... où  $[P]^{1/2}$  désigne une matrice diagonale de même dimension et même rang que  $[P]$ , et dont les éléments sont les racines carrées des éléments de  $[P]$ . Supposons que  $[P]$  soit de rang  $p$ , il en est de même de  $[P]^{1/2}$  et on a :

$$\text{rang}([\gamma]) = \inf(m, N, p)$$

Dans la pratique, on aura donc d'après l'équation (8) :

$$\begin{aligned} \text{rang}([G]) &= \text{rang}([\gamma]^t \cdot [\gamma]) \\ &= \text{rang}([\gamma]) \\ &= \inf(m, N, p) \\ &= \inf\{m, N, \text{rang}([P])\} \end{aligned}$$

Si on veut que la matrice carrée  $[G]$  de taille  $(m \times m)$  soit inversible, il faudra donc obligatoirement avoir :

(20)

$$m \leq \begin{cases} N \\ \text{rang}([P]) \end{cases}$$

### Résolution du système $[G].[A] = [F]$

La matrice  $[G] = [\gamma]^t . [\gamma]$  étant manifestement symétrique définie positive, il s'en suit que pour résoudre le système  $[G].[A] = [F]$ , on aura intérêt à utiliser une méthode adaptée mettant à profit ce caractère symétrique défini positif. En ce qui nous concerne, nous avons utilisé la méthode de Choleski dans laquelle on décompose la matrice  $[G]$  sous la forme ...

$$[G] = [R]^t . [R]$$

... où  $[R]$  est une matrice triangulaire inférieure de taille  $(m \times m)$  ; on résoud ensuite successivement les deux systèmes linéaires :

$$(I) \quad [R]^t . [B] = [F]$$

$$(II) \quad [R] . [A] = [B]$$

L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que les valeurs propres de  $[R]$  sont égales aux racines carrées des valeurs propres de  $[G]$ . Il s'en suit que le nombre de conditionnements de  $[R]$  (et de  $[R]^t$ ) est notablement plus faible que celui de  $[G]$ , ce qui permet d'espérer une résolution numérique plus franche pour les systèmes (I) et (II) que pour le système (3) ; cette dernière remarque n'est justifiée que dans la mesure où les erreurs introduites au cours de la résolution des systèmes (I) et (II) ne nous font pas perdre d'un côté ce que l'on avait gagné de l'autre.

### INFLUENCE DU RAPPORT N/m

#### Introduction

Afin de tester l'influence du rapport N/m, nous avons approché le polynôme...

$$\left[ \begin{array}{l} P^3(x,y) = x^3 + x^2.y + x.y^2 + y^3 \\ \text{avec } \begin{cases} z^1 \equiv x \\ z^2 \equiv y \end{cases} \end{array} \right.$$

... sur une base  $u_i(x,y)$  de taille  $m = 21$  construite à partir de polynômes de Tchebycheff suivant la silhouette représentée sur la figure 5 :

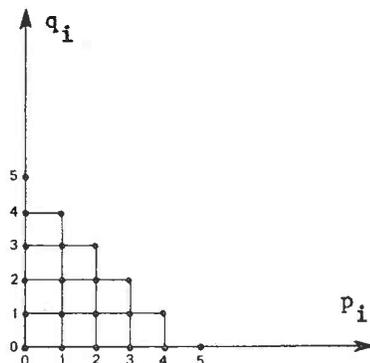


Figure 5

Pour domaine d'approximation de  $P^3(x,y)$  nous avons pris le carré  $\Omega$  défini par :

$$\Omega \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq +1 \\ -1 \leq y \leq +1 \end{array} \right.$$

Pour points  $\{\vec{z}_k\} = \{(x_k, y_k)\}$  d'échantillonnage de la fonction  $P^3(x,y)$  dans le domaine  $\Omega$ , nous avons pris les noeuds des deux maillages réguliers représentés sur la figure 6 :

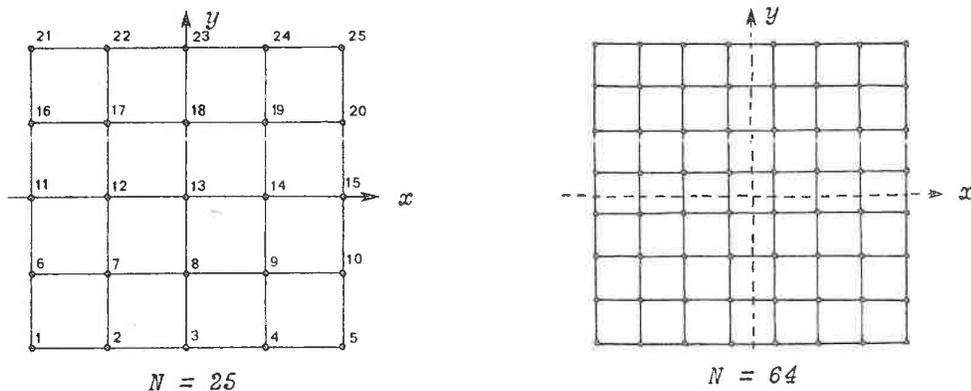


Figure 6

Coefficients $a^i$ de $\psi^*(x,y)$ pour $m = 21$			
	solution stricte	solution pour $N = 25$	solution pour $N = 64$
$a^1$	0,000	0,00000024	0,00000053
$a^2$	1,250	2,35306400	1,25000000
$a^3$	1,250	0,10704883	1,24999000
$a^4$	0,000	0,00000005	0,00000026
$a^5$	0,000	0,00000047	0,00000075
$a^6$	0,000	0,00000013	0,00000033
$a^7$	0,250	0,25000236	0,24999901
$a^8$	0,500	0,49999982	0,49999904
$a^9$	0,500	0,49999970	0,50000012
$a^{10}$	0,250	0,24999997	0,24999901
$a^{11}$	0,000	0,00000001	0,00000006
$a^{12}$	0,000	0,00000005	0,00000013
$a^{13}$	0,000	0,00000000	0,00000025
$a^{14}$	0,000	0,00000005	0,00000001
$a^{15}$	0,000	0,00000032	0,00000035
$a^{16}$	0,000	1,10306800	0,00000500
$a^{17}$	0,000	0,00000024	0,00000037
$a^{18}$	0,000	0,00000036	0,00000010
$a^{19}$	0,000	0,00000000	0,00000009
$a^{20}$	0,000	0,00000030	0,00000042
$a^{21}$	0,000	1,14295000	0,00000025

TABLEAU 1

Résultats obtenus pour  $\begin{cases} m = 21 \\ N = 25 \end{cases}$

Pour la numérotation des points, cf. la partie gauche de la figure 4

point numéro	$P_3(x, y)$	$\psi^*(x, y)$	$\partial P_3 / \partial x$	$\partial \psi^* / \partial x$	$\delta P_3 / \delta x$	$\delta \psi^* / \delta x^2$
1	4.0000090	3.99999470	6.0000090	20.4735600	8.0000190	216.61312
2	1.8750020	1.8749900	2.7500040	9.3683891	5.0000090	27.06134
3	1.0000020	0.9999976	1.0000020	3.4122757	2.0000040	1.99999
4	0.6250012	0.6250050	0.7500012	7.3683929	1.0000020	23.06134
5	0.0000000	0.00000381	2.0000040	24.4735680	4.0000090	216.61312
6	1.8750020	1.87499570	4.2500090	22.2235640	7.0000090	215.61315
7	0.5000012	0.49999540	1.5000020	8.1183910	4.0000090	26.06133
8	0.1250003	0.1249983	0.2500006	4.1622274	1.0000002	0.99999
9	0.0000000	0.00000405	0.5000012	7.1183939	2.0000004	24.06133
10	0.6250012	0.62499749	2.2500040	24.2235640	5.0000090	215.61315
11	1.0000020	0.99999737	3.0000040	23.4735680	6.0000009	214.61315
12	0.1250003	0.12499627	0.7500012	7.3683929	3.0000004	25.06133
13	0.0000000	0.0000015	0.0000000	4.4122715	0.0000000	0.00000
14	0.1250003	0.12499615	0.7500012	7.3683929	3.0000000	25.06133
15	1.0000020	0.99999737	3.0000040	23.4735680	6.0000090	214.61315
16	0.6250012	0.62499606	2.2250004	24.2235640	5.0000050	213.61312
17	0.0000000	0.00000524	0.5000012	7.1183929	2.0000040	24.06133
18	0.1250003	0.12500062	0.2500006	4.1622734	1.0000002	0.99999
19	0.5000012	0.49999959	1.5000020	8.1183910	4.0000090	26.06134
20	1.8750020	1.87499610	4.2500090	22.2235640	7.0000090	213.61312
21	0.0000000	0.00000333	2.0000040	24.4735680	4.0000009	212.61309
22	0.6250012	0.62500572	0.7500012	7.3683939	1.0000002	23.061348
23	1.0000002	1.00000002	1.0000002	3.4122762	2.0000040	1.99999
24	1.8750020	1.87499330	2.7500040	9.3683872	5.0000090	27.061344
25	4.0000090	3.99999520	6.0000090	20.4735600	8.0000018	212.61309

TABEAU 2

Résultats obtenus pour  $\left\{ \begin{matrix} n = 21 \\ N = 64 \end{matrix} \right.$

Pour la numérotation des points, cf. la partie gauche de la figure 4

point numéro	$F_3(x, y)$	$\psi(x, y)$	$\partial P_3 / \partial x$	$\partial \psi / \partial x$	$\delta^2 P_3 / \delta x^2$	$\delta^2 \psi / \delta x^2$
1	4.00000090	3.99998140	6.00000090	5.99999710	8.00000190	8.00009920
2	1.87500020	1.87498800	2.75000040	2.74998900	5.00000090	4.99997140
3	1.00000020	0.99998986	1.00000020	1.00000350	2.00000040	1.99998590
4	0.62500012	0.62498760	0.75000012	0.75000071	1.00000020	0.99997985
5	0.00000000	0.00001094	2.00000040	1.99999920	4.00000090	4.00004380
6	1.87500020	1.87499180	4.25000090	4.25000190	7.00000090	7.00008770
7	0.50000012	0.49999636	1.50000020	1.49999400	4.00000090	3.99997470
8	0.12500003	0.12499634	0.25000006	0.25000554	1.00000020	0.99999356
9	0.00000000	0.00000538	0.50000012	0.49999898	2.00000040	1.99997540
10	0.62500012	0.62500286	2.25000040	2.24999800	5.00000090	5.00005240
11	1.00000020	0.99999809	3.00000040	3.00000280	6.00000090	6.00007820
12	0.12500003	0.12500071	0.75000012	0.749996420	3.00000040	2.99997660
13	0.00000000	0.00000006	0.00000000	0.00000538	0.00000000	0.00000113
14	0.12500003	0.12500110	0.75000012	0.74999714	3.00000040	2.99997470
15	1.00000020	0.99999845	3.00000040	3.00000000	6.00000009	6.00006670
16	0.62500012	0.62500262	2.25000040	2.25000140	5.00000090	5.00006480
17	0.00000000	0.00000489	0.50000012	0.49999839	2.00000040	1.99997750
18	0.12500003	0.12499663	0.25000006	0.25000578	1.00000020	0.99999670
19	0.50000012	0.49999737	1.50000020	1.49999570	4.00000090	3.99997520
20	1.87500020	1.87499400	4.25000090	4.25000090	7.00000090	7.00008100
21	0.00000000	0.00001009	2.00000040	2.00000140	4.00000090	4.00005720
22	0.62500012	0.62498796	0.75000012	0.74999864	1.00000020	0.99998033
23	1.00000020	0.99999022	1.00000020	1.00000470	2.00000040	1.99999230
24	1.87500020	1.87499020	2.75000040	2.74999420	5.00000090	4.99997800
25	4.00000090	3.99998570	6.00000090	6.00000470	8.00000190	8.00009920

TABLEAU }

### Résultats obtenus

Les résultats obtenus sont consignés dans les tableaux (1), (2) et (3). On constate que dans les deux cas ( $N = 25$ ) et ( $N = 64$ ), l'approximation de  $P^3(x, y)$  par  $\varphi^*(x, y)$  au sens des moindres carrés sans pondération ( $[P] = [I]$ ) est acceptable, mais il en va tout autrement des dérivées partielles de  $\varphi^*(x, y)$  qui n'approchent les dérivées partielles de  $P^3(x, y)$  que dans le cas où  $N = 64$  comme on peut le voir sur les tableaux (2) et (3). Ces résultats sont tout à fait en accord avec l'expérience qu'a acquis le Centre de Calcul de Nancy sur l'approximation au sens des moindres carrés, expérience qui a montré que l'utilisation de polynômes de Tchebycheff dans le domaine  $[-1, +1]$  est stable si on prend le rapport  $N/m$  de l'ordre de 2 ou 3 au moins.

## APPLICATION AU PROBLEME INVERSE

### INTRODUCTION

#### Position du problème

Dans l'étude du problème inverse bidimensionnel, on suppose que l'on connaît parfaitement le potentiel  $\varphi(z^1, z^2)$ , ou plus exactement son approximation  $\varphi^*(z^1, z^2)$  construite au sens des moindres carrés sur le domaine  $\Omega$  à partir d'un échantillonnage  $\{\vec{z}_k\}$ .

En fait, nous aurons besoin non seulement d'une approximation de  $\varphi(z^1, z^2)$  mais aussi de ses dérivées partielles  $\partial\varphi/\partial z^1$ ,  $\partial\varphi/\partial z^2$ ,  $\partial^2\varphi/\partial(z^1)^2$  et  $\partial^2\varphi/\partial(z^2)^2$ , aussi est-il très important de vérifier si dans le cas d'une fonction  $\varphi(z^1, z^2)$  qui n'est pas un polynôme, on peut encore raisonnablement écrire :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial z^1} \approx \frac{\partial\varphi^*}{\partial z^1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z^2} \approx \frac{\partial\varphi^*}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2\varphi}{\partial(z^1)^2} \approx \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial(z^1)^2} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial(z^2)^2} \approx \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial(z^2)^2} \end{array} \right.$$

### Intérêt d'un modèle mathématique

Supposons que nous sachions résoudre le problème inverse de façon numérique en utilisant les approximations (21), il est intéressant de pouvoir comparer le résultat  $\hat{C}(z^1, z^2)$  ainsi obtenu avec le résultat théorique  $C(z^1, z^2)$ . Pour cela, il suffit par exemple de tester la méthode proposée sur un modèle mathématique pour lequel on connaît strictement la solution analytique  $C(z^1, z^2)$ .

### MODELE MATHEMATIQUE TEST POUR L'ETUDE DU PROBLEME INVERSE

#### Définition

Nous prendrons comme modèle, les deux fonctions  $C(z^1, z^2)$  et  $\varphi(z^1, z^2)$  suivantes ...

$$(22) \quad \begin{aligned} \varphi(z^1, z^2) &= \alpha + \text{Log} \frac{\beta}{\gamma \cdot v(z^1, z^2) + \beta} \\ C(z^1, z^2) &= \frac{\gamma \cdot v(z^1, z^2) + \beta}{\gamma \cdot a'(x) \cdot b'(y)} \cdot v(z^1, z^2) \end{aligned}$$


---


$$\text{avec } v(z^1, z^2) = \sqrt{a(z^1) + b(z^2)}$$

... où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des constantes,  $a(z^1)$  et  $b(z^2)$ , des fonctions positives. Dans ce modèle,  $\varphi(z^1, z^2)$  représente la fonction potentiel et  $C(z^1, z^2)$  une conductivité scalaire ; en fait nous avons choisi ce modèle où le tenseur des conductivités  $\mathcal{C}(z^1, z^2)$  est isotrope et se réduit au produit du tenseur métrique fondamental  $g^{ij}$  par un scalaire  $C(z^1, z^2)$  car c'est le seul cas que nous envisagerons dans l'étude du problème inverse.

#### Repère utilisé

Nous nous proposons d'étudier l'équation de continuité relative au modèle que nous venons de définir ; pour cela, il convient de préciser dans quel repère  $\{\vec{\alpha}_i, z^i\}$  sont écrites les équations. Par convention, nous prendrons

le repère suivant ...

$$\{\vec{\alpha}_i, z^i\} \equiv \{\vec{u}_i, x^i\}$$

... où, rappelons-le,  $\{\vec{u}_i, x^i\}$  désigne un repère orthonormé de vecteurs unitaires  $\vec{u}_i$  et d'axes  $(x^i)$  comme cela a été précisé dans le chapitre introductif. En fait, conformément à l'habitude, nous noterons  $x^1 = x$  et  $x^2 = y$  comme on le fait généralement dans le cas d'un repérage dans  $\mathbb{R}^2$ , si bien qu'en définitive, on a :

$$\begin{cases} z^1 \equiv x^1 \equiv x \\ z^2 \equiv x^2 \equiv y \end{cases}$$

Dans ce repère orthonormé, les composantes  $C^{ij}$  du tenseur isotrope  $C$  sont évidemment de la forme :

$$C^{ij}(x, y) = \delta^{ij} \cdot C(x, y)$$

Gradient de  $\varphi(x, y)$

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \text{Log} [\gamma \cdot v + \beta] \\ &= -\frac{\gamma \cdot v'_x}{\gamma \cdot v + \beta} \\ v'_x &= \frac{1}{2} \cdot [\alpha(x) + b(y)]^{-1/2} \cdot a'_x \\ &= \frac{a'_x}{2 \cdot v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \varphi'_x &= -\frac{\gamma \cdot a'_x}{2 \cdot v \cdot (\gamma \cdot v + \beta)} \\ \varphi'_y &= -\frac{\gamma \cdot b'_y}{2 \cdot v \cdot (\gamma \cdot v + \beta)} \end{aligned}} \quad (23)$$

Equation de continuité

On peut facilement vérifier que l'équation de continuité  $\text{div}[-C \cdot \text{grad} \varphi] = 0$  est satisfaite :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}[-C.\operatorname{grad}\varphi] &= \frac{\partial}{\partial x} [-C.\varphi'_x] + \frac{\partial}{\partial y} [-C.\varphi'_y] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(\gamma.v + \beta)v}{\gamma.a'_x.b'_y} \cdot \frac{\gamma.a'_x}{2(\gamma.v + \beta).u} \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{(\gamma.v + \beta)v}{\gamma.a'_x.b'_y} \cdot \frac{\gamma.b'_y}{2(\gamma.v + \beta).v} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2.b'_y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2.a'_x} \right]
\end{aligned}$$

Comme par construction,  $a'_x$  n'est fonction que de  $x$  et  $b'_y$  n'est fonction que de  $y$ , on en déduit que l'on a :

$$\operatorname{div}[-C.\operatorname{grad}\varphi] = 0$$

#### APPROXIMATION DU POTENTIEL $\varphi(x,y)$ DU MODELE MATHEMATIQUE

##### Caractéristiques du modèle

A partir de maintenant, nous prendrons pour  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $a(x)$  et  $b(y)$  les quantités suivantes ...

$$(24) \quad \left[ \begin{array}{l} \alpha = 10. \\ \beta = 1. \\ \gamma = 1000. \\ a(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \\ b(y) = 1 + y + y^2 \end{array} \right.$$

... et nous nous limiterons au domaine d'étude  $\Omega$  défini par :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} \in \Omega \iff \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 21 \\ 1 \leq y \leq 21 \end{array} \right\}$$

### Echantillonnage de $\varphi(x,y)$ dans $\Omega$

Afin de pouvoir utiliser la méthode des moindres carrés, nous nous sommes donnés les valeurs  $\varphi(x_k, y_k)$  de la fonction  $\varphi$  aux noeuds  $(x_k, y_k)$  d'un réseau régulier à maille carrée comportant  $N = 17^2 = 289$  points régulièrement répartis sur le domaine  $\Omega$  (cf. fig. 7) :

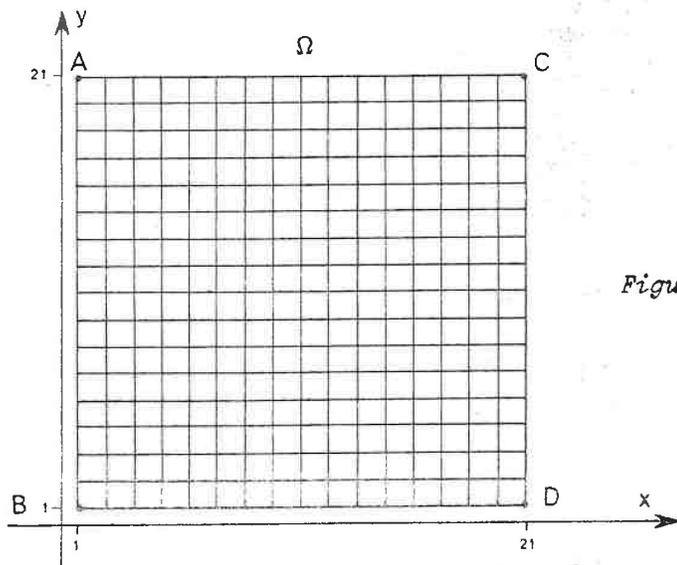


Figure 7

### Base utilisée

La base utilisée est une base du type de celle définie par les équations (15) et comportant  $m = 100$  éléments. La silhouette de cette base est complète, en ce sens que l'on y trouve toutes les combinaisons possibles pour  $p_i$  et  $q_j$  variant entre 0 et 9.

### Résultats obtenus

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau 4 où l'on a représenté la valeur exacte du potentiel  $\varphi$  et de son approximation  $\varphi^*$  ainsi que leurs dérivées partielles en 17 points régulièrement répartis sur la diagonale  $BC$  du domaine  $\Omega$  (cf. fig. 7) et correspondent à un "cosinus theta" sensiblement égal à 1. En fait, lorsque l'on considère les valeurs numériques des  $\alpha^1$ , on constate qu'il n'y a guère que les 40 premiers coefficients qui sont nettement différents de zéro, ce qui prouve que notre technique de moindres carrés basée sur l'utilisation de polynômes de Tchebycheff est stable, même si on prend une valeur trop grande pour  $m$ , à condition toutefois d'avoir un rapport  $N/m$  supérieur à 2 ou 3.

TABLEAU 4

RÉSULTATS obtenus pour  $\left\{ \begin{array}{l} m=100 \\ N=289 \end{array} \right.$

Les résultats obtenus sont présentés en 17 points régulièrement répartis sur la diagonale BC du domaine étudié (cf. figure 7).

Point N°	$\psi$	$\psi^*$	$\partial\psi/\partial x$	$\partial\psi^*/\partial x$	$\partial\psi/\partial y$	$\partial\psi^*/\partial y$	$\partial^2\psi/\partial x^2$	$\partial^2\psi^*/\partial x^2$	$\partial^2\psi/\partial y^2$	$\partial^2\psi^*/\partial y^2$
1	2.11890	2.11900	0.42841	0.47597	0.21420	0.22120	0.20407	0.03585	0.051018	0.025896
2	1.42570	1.42530	0.36914	0.36380	0.09814	0.09826	0.00401	0.00742	0.016422	0.016009
3	0.92430	0.92463	0.29293	0.29274	0.05236	0.05318	0.02106	0.01945	0.007608	0.007440
4	0.54285	0.54334	0.23865	0.23870	0.03204	0.03168	0.02082	0.01972	0.004050	0.004311
5	0.23697	0.23721	0.20032	0.20113	0.02152	0.02137	0.01734	0.01733	0.002384	0.002471
6	0.01779	0.01828	0.17225	0.17255	0.01541	0.01536	0.01408	0.01486	0.001513	0.001444
7	0.23591	0.23622	0.15093	0.15056	0.01157	0.01154	0.01148	0.01182	0.001018	0.000984
8	0.42651	0.42635	0.13425	0.13395	0.00900	0.00907	0.00947	0.00928	0.000716	0.000709
9	0.59572	0.59553	0.12085	0.12087	0.00720	0.00727	0.00791	0.00769	0.000522	0.000513
10	0.74784	0.74778	0.10986	0.10996	0.00588	0.00588	0.00670	0.00664	0.000392	0.000400
11	0.88599	0.88590	0.10069	0.10075	0.00490	0.00485	0.00573	0.00576	0.000302	0.000316
12	1.01250	1.01250	0.09293	0.09296	0.00414	0.00413	0.00496	0.00499	0.000237	0.000242
13	1.12920	1.12920	0.08627	0.08628	0.00355	0.00357	0.00433	0.00440	0.000190	0.000187
14	1.23750	1.23750	0.08050	0.08040	0.00307	0.00308	0.00381	0.00386	0.000154	0.000148
15	1.33850	1.33840	0.07545	0.07544	0.00269	0.00269	0.00337	0.00315	0.000127	0.000135
16	1.43320	1.43320	0.07100	0.07128	0.00237	0.00235	0.00301	0.00296	0.000106	0.000064
17	1.52220	1.52220	0.06704	0.06616	0.00211	0.00210	0.00270	0.002534	0.000089	0.000145

B ETUDE DU PROBLEME INVERSE BIDIMENSIONNEL  
DANS LE REPERE ORTHONORME  $\{\vec{u}_i, x^i\}$

INTRODUCTION

PRESENTATION DU PROBLEME

Soit un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  limité par une frontière  $\Sigma$  et repéré par rapport à un système orthonormé  $x^1 \equiv x$  et  $x^2 \equiv y$  de vecteurs unitaires  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ .

Soit d'autre part un champ de vecteurs  $\vec{V}$  défini par les relations ...

$$(26) \quad \left[ \begin{array}{l} \vec{V} = -C \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \\ \text{grad}^i \varphi = \delta^{ij} \cdot \partial_j \varphi \end{array} \right.$$

... où  $C(x,y)$  et  $\varphi(x,y)$  sont des fonctions scalaires de  $\vec{x}$  définies sur  $\bar{\Omega}$ . En fait, cela revient à dire que les composantes  $V^i$  du vecteur  $\vec{V}$  sont de la forme ...

$$(27) \quad \left[ \begin{array}{l} V^i = -C^{ij} \cdot \partial_j \varphi \\ C^{ij} = \delta^{ij} \cdot C \end{array} \right.$$

... où  $C^{ij}$  est un tenseur isotrope de conductivité.

Connaissant d'une part  $\varphi(x,y)$  ainsi que ses dérivées partielles d'ordre un et deux dans  $\Omega$ , et d'autre part  $C_0 = C(x_0, y_0)$  en un point  $\vec{x}_0$  de  $\Omega$ , on se propose de calculer  $C(x,y)$  partout où on le pourra de façon que dans  $\Omega$ , le champ de vecteurs  $\vec{V}$  satisfasse à l'équation de continuité ...

$$(28) \quad \left[ \text{div}(\vec{V}) = -A \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B \right.$$

... où  $A(x,y) \geq 0$  et  $B(x,y)$  sont des fonctions supposées connues. On peut montrer que le problème ainsi défini est du type hyperbolique.

NOTION DE DERIVEE SUIVANT UNE DIRECTION  $\vec{u}$

Définition

Considérons une fonction de deux variables qui à tout point  $M$  de coordonnées  $(x,y)$  associe la valeur  $f(M) = f(x,y)$  et soit  $(D)$  une direction définie par le vecteur unitaire  $\vec{u}$ . Par définition, on appelle dérivée de  $f(M)$  au point  $M$  suivant la direction  $(D)$ , la limite  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial |\vec{u}|} \right\}_M$  si elle existe telle que :

$$(29) \quad \left[ \begin{array}{l} \left\{ \frac{\partial f}{\partial |\vec{u}|} \right\}_M = \lim_{M' \rightarrow M} \left\{ \frac{f(M') - f(M)}{MM'} \right\} \\ \text{avec } \vec{MM'} = \lambda \cdot \vec{u} \end{array} \right.$$

Calcul explicite

Dans ce qui suit, nous adopterons les notations suivantes:

$$\left\{ f'_z = \frac{\partial f}{\partial z} \right\} ; \left\{ \vec{W} \approx \begin{bmatrix} W^1 \\ W^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{W} = W^i \cdot \vec{u}_i \right\}$$

Ceci dit, essayons d'expliciter la dérivée  $\partial f / \partial |\vec{u}|$  en un point  $M$  :

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \approx \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ \vec{MM'} = \lambda \cdot \vec{u} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{OM'} = \vec{OM} + \lambda \cdot \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(M') &= f(x + \alpha \cdot \lambda, y + \beta \cdot \lambda) \\ &= f(x,y) + \lambda \alpha \cdot f'_x(x,y) + \lambda \beta \cdot f'_y(x,y) + \varepsilon_2(\lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{f(M') - f(M)}{MM'} &= \frac{\lambda \alpha \cdot f'_x(x,y) + \lambda \beta \cdot f'_y(x,y) + \varepsilon_2(\lambda^2)}{\lambda} \\ &= \alpha \cdot f'_x(x,y) + \beta \cdot f'_y(x,y) + \varepsilon_1(\lambda) \end{aligned}$$

→ Si  $f'_x(x,y)$  et  $f'_y(x,y)$  existent, alors la limite  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial |\vec{u}|} \right\}$  existe et vaut :

$$(30) \quad \left[ \frac{\partial f}{\partial |\vec{u}|} = \alpha \cdot f'_x + \beta \cdot f'_y \right]$$

En remarquant que ...

$$(31) \quad \left[ \text{grad}^i f = \gamma^{ij} \cdot \partial_j f \right]$$

... où  $\gamma^{ij} = \delta^{ij}$  sont les composantes du tenseur métrique fondamental au point  $M$ , et que ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1 f = f'_x \\ \partial_2 f = f'_y \end{array} \right.$$

... alors on peut écrire la relation (30) sous forme plus condensée en posant :

$$(32) \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial |\vec{u}|} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad} f}}$$

PROBLEME RECIPROQUE : RESOLUTION DE  $a \cdot f'_x + b \cdot f'_y = c$

#### Normalisation

Nous remarquons que ...

$$(33) \quad \left[ c = a \cdot f'_x + b \cdot f'_y \right]$$

... n'est pas en général la dérivée de  $f(x,y)$  suivant une direction  $\vec{\ell} \approx \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  car les coefficients  $a$  et  $b$  ne sont pas forcément tels que  $\vec{\ell}$  soit unitaire. En conséquence, pour que  $c$  soit bien la dérivée de  $f(x,y)$  suivant une direction, il nous faudra préalablement diviser les deux membres de l'équation (33) par  $a^2 + b^2$  ; posons ...

$$(34) \quad \left[ \begin{array}{l} \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right.$$

... on peut alors écrire ...

$$(35) \quad \left[ \alpha \cdot f'_x + \beta \cdot f'_y = \gamma \right.$$

... et dans ce cas,  $\gamma$  est bien la dérivée de  $f(x,y)$  suivant la direction  $(D)$  définie par le vecteur unitaire  $\vec{u} \approx \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ .

#### Courbes caractéristiques $\Gamma$

On appelle courbes caractéristiques de l'équation différentielle ...

$$(36) \quad \left[ \begin{array}{l} \alpha \cdot f'_x + \beta \cdot f'_y = \gamma \\ \text{avec } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{array} \right.$$

... les courbes  $\Gamma$  qui en chaque point  $M$  sont tangentes au vecteur unitaire  $\vec{u}$  de composantes  $\alpha$  et  $\beta$ . Ces courbes sont donc définies par l'équation différentielle :

$$(37) \quad \boxed{\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta}}$$

FORME CANONIQUE DU PROBLEME INVERSE

INTRODUCTIONForme développée de l'équation de continuité

En développant l'équation (28) compte tenu des expressions (26) et (27), il vient :

$$-\frac{\partial C}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - C \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - C \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B$$

ce qui s'écrit ...

$$(38) \quad \left[ \begin{array}{l} a \cdot C'_x + b \cdot C'_y = c \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ b = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ c = -C \cdot \Delta \varphi + A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - B \end{array} \right. \end{array} \right.$$

... où  $\Delta \varphi = \partial^2 \varphi / \partial x^2 + \partial^2 \varphi / \partial y^2$  représente le laplacien de la fonction  $\varphi$ .

Remarque

On peut remarquer que l'on a ...

$$\text{grad}^i \varphi = \delta^{ij} \cdot \partial_j \varphi$$

... ce qui permet d'écrire :

$$(39) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{grad } \varphi \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

FORME CANONIQUE

En divisant les deux membres de l'équation (38) par la quantité

$\sqrt{a^2 + b^2} = \|\overrightarrow{\text{grad } \varphi}\|$ , il vient ...

$$(40) \quad \begin{array}{l} \alpha \cdot C'_x + \beta \cdot C'_y = \gamma \\ \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = a/\sqrt{a^2 + b^2} \\ \beta = b/\sqrt{a^2 + b^2} \\ \gamma = c/\sqrt{a^2 + b^2} \end{array} \right. \end{array}$$

... ce qui constitue la forme canonique du problème inverse. En effet, on a bien ...

$$\vec{u} \approx \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \text{vecteur unitaire}$$

... ce qui entraîne que  $\gamma$  est la dérivée de  $C(x;y)$  suivant la direction  $\vec{u}$ .

NATURE DES COURBES CARACTERISTIQUES  $\Gamma$ Lignes de courant

Par définition, on appelle ligne de courant, toute ligne constamment tangente au vecteur  $\vec{V}$ .

Comme par hypothèse, le tenseur des conductivités est supposé isotrope, il s'en suit d'après la relation (26) que les lignes de courant sont aussi constamment tangentes au vecteur  $\overrightarrow{\text{grad } \varphi}$  avec :

$$\overrightarrow{\text{grad } \varphi} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

⇒ L'équation différentielle des lignes de courant s'écrit :

$$(41) \quad \boxed{\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}}$$

### Courbes caractéristiques $\Gamma$

En multipliant les deux membres de l'équation (41) par  $\|\overrightarrow{\text{grad}\varphi}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , et en se souvenant que ...

$$\begin{cases} \alpha = a/\sqrt{a^2 + b^2} \\ \beta = b/\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

... il vient :

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta}$$

En comparant cette dernière équation avec l'équation (37), on en déduit que les courbes caractéristiques  $\Gamma$  sont identiques aux lignes de courant.

## REDUCTION DE LA FORME CANONIQUE A UNE SEULE VARIABLE

### Introduction

On se propose de transformer l'équation différentielle (40) de façon à ce qu'elle ne soit plus fonction que d'une seule variable,  $x$  par exemple :

### Méthode utilisée

Soit  $y = f(x)$  l'équation de la courbe caractéristique  $\Gamma_0$  passant par le point  $M_0$  de coordonnées  $x_0$  et  $y_0$  ; l'équation différentielle de cette courbe caractéristique s'écrit comme nous l'avons vu sous la forme suivante :

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow (42) \quad \left[ \frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} \right]$$

Le long de la courbe  $\Gamma_0$ ,  $C(x,y)$  n'est plus fonction que de  $x$ , et on pose ...

$$(43) \quad \left[ \psi(x) = C[x, f(x)] \right]$$

... où  $y = f(x)$  est la solution de l'équation différentielle (42) telle que  $y_0 = f(x_0)$ .

En dérivant l'équation (43) par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\psi'(x) = C'_x + f'(x) \cdot C'_y$$

En portant  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha}$  dans cette équation, il vient :

$$\psi'(x) = C'_x + \frac{\beta}{\alpha} \cdot C'_y$$

$$\Leftrightarrow \psi'(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot [\alpha \cdot C'_x + \beta \cdot C'_y]$$

En comparant cette dernière équation avec l'équation (40), on obtient :

$$(44) \quad \left[ \psi'(x) = \frac{\gamma}{\alpha} \right]$$

En conclusion, on a obtenu un système différentiel sous forme résolue, formé des équations (42) et (44). La connaissance de  $(x_0, y_0)$  et de  $\psi_0 = C(x_0, y_0)$  en permet la résolution numérique par n'importe quelle méthode d'intégration numérique à valeurs initiales.

#### Conséquence fondamentale

Nous venons de montrer que la connaissance de la conductivité  $C_0$  en un point  $M_0$  ne permettait de calculer la conductivité  $C(x,y)$  que le long de la ligne de courant  $\Gamma_0$  passant par ce point. En conséquence, pour pouvoir

calculer la conductivité partout dans le domaine  $\Omega$ , il suffit de connaître la conductivité le long d'une courbe coupant toutes les lignes de courant.

#### Remarque

Il se peut que  $\alpha$  soit nul sur certaines parties de  $\Gamma_0 \cap \bar{\Omega}$  ; un calcul analogue à celui que nous avons fait montrerait que dans ce cas il suffit sur ces portions de courbes d'exprimer l'équation (40) en fonction de la variable  $y$  pour que ce que nous avons dit soit encore valable.

### PREMIERE METHODE D'INTEGRATION DU PROBLEME INVERSE

#### SYSTEME DIFFERENTIEL D'INTEGRATION DE $C$ LE LONG DES COURBES $\Gamma$

##### Introduction

On peut en principe utiliser le système différentiel formé de (42) et de (44) pour résoudre le problème posé, mais il pourra alors y avoir des difficultés si  $\alpha$  devient nul dans le domaine de travail. Cette éventualité se présente chaque fois qu'une ligne de courant  $\Gamma$  a en un point une tangente parallèle à l'axe des  $y$ .

Afin d'éviter cet inconvénient, on introduit une représentation paramétrique des courbes caractéristiques  $\Gamma$  :

##### Représentation paramétrique des courbes caractéristiques $\Gamma$

Une représentation paramétrique des courbes caractéristiques  $\Gamma$  peut être définie par :

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = dt$$

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} dx = \alpha \cdot dt \\ dy = \beta \cdot dt \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow dx^2 + dy^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \cdot dt^2$$

Or on sait que  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , on a alors en appelant  $s$  l'abscisse curviligne le long d'une ligne de courant :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dt^2$$

$$\Leftrightarrow ds^2 = dt^2$$

En conclusion, nous dirons que l'on définit une représentation paramétrique différentielle des courbes caractéristiques  $\Gamma$  par les équations ...

(45)

$$dx = \epsilon \cdot \alpha \cdot ds$$

$$dy = \epsilon \cdot \beta \cdot ds$$

... où  $s$  est l'abscisse curviligne sur la courbe caractéristique  $\Gamma$  et  $\epsilon$  une constante égale à  $\pm 1$  suivant l'orientation de  $\Gamma$ .

#### Abscisse curviligne : orientation des courbes caractéristiques

Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire colinéaire à  $\overrightarrow{\text{grad}\varphi}$  et de composantes :

$$\vec{u} \approx \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \epsilon \cdot \begin{bmatrix} dx/ds \\ dy/ds \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot dy$$

$$\Leftrightarrow \epsilon \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \beta$$

$$\Leftrightarrow \epsilon \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\varphi}$$

$$\Leftrightarrow$$

(46)

$$\frac{d\varphi}{ds} = \epsilon \cdot \|\overrightarrow{\text{grad}\varphi}\|$$

Par convention dans ce qui suit, nous orienterons positivement ( $ds > 0$ ) les courbes caractéristiques  $\Gamma$  dans le sens des  $\varphi$  croissants ; comme  $\|\overrightarrow{\text{grad}\varphi}\|$  est toujours positif ou nul, la relation (46) nous indique que pour cela il suffit de prendre  $\varepsilon = + 1$ .

### Système différentiel

L'intégration du système différentiel (45) fournit pour les courbes caractéristiques  $\Gamma$ , la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$$

posons alors :

$$C(s) = C[x(s), y(s)]$$

en dérivant cette dernière expression par rapport à  $s$ , il vient alors :

$$\frac{dC}{ds} = \frac{\partial C}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dC}{ds} = C'_x \cdot \alpha + C'_y \cdot \beta$$

En comparant cette dernière équation avec la relation (40), on obtient :

$$\frac{dC}{ds} = \gamma$$

En utilisant les relations (38), (39) et (40), ce dernier résultat s'écrit :

$$(47) \quad \frac{dC}{ds} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\text{grad}\varphi}\|} \cdot \left[ -C \cdot \Delta\varphi + A \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z} - B \right]$$

En conclusion, nous avons le système ...

$$(48) \quad \begin{cases} dx = \alpha \cdot ds \\ dy = \beta \cdot ds \\ dC = \gamma \cdot ds \end{cases}$$

... mis sous forme résolue, dont la résolution numérique ne présente aucune difficulté si  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  restent finis dans le domaine étudié.

#### Forme matricielle du système (48)

Dans ce qui suit, il est intéressant d'écrire le système (48) sous la forme matricielle suivante :

$$(49) \quad \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} x \\ y \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \\ \gamma(x, y, C, A, B, \frac{\partial \phi}{\partial t}) \end{bmatrix}$$

#### METHODES D'INTEGRATION NUMERIQUE PROPOSEES

##### Introduction

Le système (49) est de la forme ...

$$\frac{d\vec{V}}{ds} = \vec{F}(s, \vec{V})$$

... où l'on a posé :

$$\vec{V} \approx \begin{bmatrix} x \\ y \\ C \end{bmatrix}, \quad \frac{d\vec{V}}{ds} \approx \begin{bmatrix} x'_s \\ y'_s \\ C'_s \end{bmatrix}, \quad \vec{F}(s, \vec{V}) \approx \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

On sait que ce type de problème à valeur initiale se résoud par exemple par une méthode d'Euler ou une méthode de Runge-Kutta d'ordre  $n$  ; connaissant  $C_0$  en un point  $M_0$  de la courbe caractéristique  $\Gamma_0$ , on peut alors déduire  $C$  par intégration numérique tout le long de la courbe  $\Gamma_0$  pour un pas d'intégration  $h = \delta s$  donné.

Afin de ne pas alourdir des notations dans ce qui suit, nous poserons :

$$(50) \quad Q = -A \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + B$$

### Formules d'Euler

Les formules d'Euler consistent à écrire que l'on a :

$$(51) \quad \begin{bmatrix} x(s+h) \\ y(s+h) \\ C(s+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ C(s) \end{bmatrix} + h \cdot \begin{bmatrix} \alpha[x(s), y(s)] \\ \beta[x(s), y(s)] \\ \gamma[x(s), y(s), C(s), Q(s)] \end{bmatrix}$$

Connaissant  $C(s)$  en un point  $M(s)$  de coordonnées  $x(s)$  et  $y(s)$  sur une courbe caractéristique  $\Gamma$ , on peut en déduire par les formules (51) une approximation des coordonnées  $x(s+h)$ ,  $y(s+h)$  du point  $M(s+h)$  de cette même courbe  $\Gamma$  ainsi qu'une approximation de la valeur cherchée  $C(s+h)$  en ce point  $M(s+h)$ . Ce faisant, on montre que l'on commet une erreur par pas de l'ordre de  $h^2$ .

### Formules de Runge-Kutta d'ordre 4

On peut également intégrer numériquement le système (49) par une méthode de Runge-Kutta d'ordre  $n$  ; on peut montrer que l'on commet alors une erreur par pas de l'ordre de  $h^{n+1}$  si  $h$  est le pas d'intégration sur  $\Gamma$ .

Par exemple pour des formules de Runge-Kutta d'ordre 4, on pose :

$$(52) \quad \left. \begin{aligned} \vec{K}_1 &= \begin{bmatrix} k_1 \\ l_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = h \cdot \begin{bmatrix} \alpha[x, y] \\ \beta[x, y] \\ \gamma[x, y, C, Q] \end{bmatrix} \\ \vec{K}_2 &= \begin{bmatrix} k_2 \\ l_2 \\ m_2 \end{bmatrix} = h \cdot \begin{bmatrix} \alpha[x + k_1/2, y + l_1/2] \\ \beta[x + k_1/2, y + l_1/2] \\ \gamma[x + k_1/2, y + l_1/2, C + m_1/2, Q] \end{bmatrix} \\ \vec{K}_3 &= \begin{bmatrix} k_3 \\ l_3 \\ m_3 \end{bmatrix} = h \cdot \begin{bmatrix} \alpha[x + k_2/2, y + l_2/2] \\ \beta[x + k_2/2, y + l_2/2] \\ \gamma[x + k_2/2, y + l_2/2, C + m_2/2, Q] \end{bmatrix} \\ \vec{K}_4 &= \begin{bmatrix} k_4 \\ l_4 \\ m_4 \end{bmatrix} = h \cdot \begin{bmatrix} \alpha[x + k_3, y + l_3] \\ \beta[x + k_3, y + l_3] \\ \gamma[x + k_3, y + l_3, C + m_3, Q] \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

On a alors les formules d'intégration suivantes :

$$(53) \quad \begin{bmatrix} x(s+h) \\ y(s+h) \\ C(s+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ C(s) \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} k_1 + 2.k_2 + 2.k_3 + k_4 \\ l_1 + 2.l_2 + 2.l_3 + l_4 \\ m_1 + 2.m_2 + 2.m_3 + m_4 \end{bmatrix}$$

## DEUXIEME METHODE D'INTEGRATION DU PROBLEME INVERSE

### INTRODUCTION

#### Remarque fondamentale

Considérons un élément de surface infiniment petit  $\Delta\Omega$  limité par une frontière  $\Delta\Sigma$  constituée de deux équipotentiels  $\varphi_1$  et  $\varphi_2 = \varphi_1 + \delta\varphi$  et de deux lignes de courant infiniment voisines  $\psi_1$  et  $\psi_2$  comme l'indique la figure 8 :

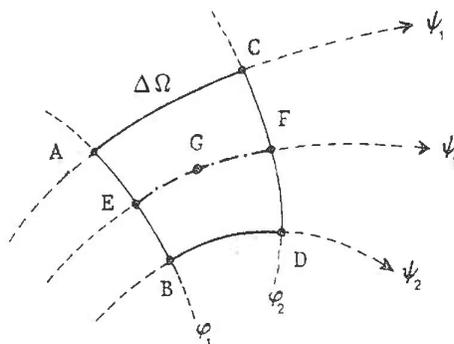


Figure 8

D'après la formule de Green, on a toujours le droit d'écrire la relation suivante ...

$$\int_{\Delta\Omega} \text{div}(\vec{V}) \cdot d\omega = \int_{\Delta\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$$

... où  $d\omega$  représente l'élément différentiel de  $\Delta\Omega$ ,  $d\sigma$  l'élément différentiel

de  $\Delta\Sigma$  et  $\vec{n}$  la normale unitaire en un point de  $\Delta\Sigma$ , orientée vers l'extérieur de  $\Delta\Omega$ .

Comme le flux du vecteur  $\vec{V}$  à travers les portions de ligne de courant AC et BD est par définition nul, on a la relation suivante :

$$(54) \quad \left[ \int_{\Delta\Omega} \operatorname{div}(\vec{V}) \cdot d\omega = \int_{AB} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma + \int_{CD} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \right.$$

D'après les propriétés des intégrales, on sait qu'il existe deux points e et f situés sur  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  respectivement entre AB et CD tels que ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{AB} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = AB \cdot \vec{V}_e \cdot \vec{n}_e = -\varepsilon \cdot \|\vec{V}_e\| \cdot AB \\ \int_{CD} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = CD \cdot \vec{V}_f \cdot \vec{n}_f = \varepsilon \cdot \|\vec{V}_f\| \cdot CD \end{array} \right.$$

... où AB et CD désignent les longueurs des arcs AB et CD,  $\varepsilon$  une constante telle que ...

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi_e > \varphi_f \\ -1 & \text{si } \varphi_e < \varphi_f \end{cases}$$

... et  $\vec{V}_p$  la valeur du vecteur  $\vec{V}$  en un point p.

Pour la même raison, il existe un point g sur le domaine  $\Delta\Omega$  tel que l'on ait ...

$$\int_{\Delta\Omega} \operatorname{div}(\vec{V}) \cdot d\omega = \operatorname{div}(\vec{V}_g) \cdot \Delta S$$

... où  $\Delta S$  désigne, au second membre de cette expression, la surface de l'élément  $\Delta\Omega$ .

#### Application au problème inverse

Soit  $\psi_E$  la ligne de courant passant par le point E milieu de AB et qui coupe CD en un point F ; soit d'autre part G le milieu de l'arc EF.

Posons :

$$(55) \quad \begin{cases} \phi_{AB} = \|\vec{V}_E\| \cdot AB \\ \phi_{CD} = \|\vec{V}_F\| \cdot CD \\ Q_G = \text{div}(\vec{V}_G) \end{cases}$$

Comme par construction,  $AB, CD$  et  $\Delta S$  sont des infiniments petits du premier ordre, nous commettrons une erreur du second ordre en posant ...

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{AB} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \approx -\epsilon \cdot \phi_{AB} \\ \int_{CD} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma \approx \phi_{CD} \\ \int_{\Delta\Omega} \text{div}(\vec{V}) \cdot d\omega \approx Q_G \cdot \Delta S \end{array} \right.$$

... où  $\epsilon = +1$  si  $\varphi_E > \varphi_F$  et  $-1$  si  $\varphi_E < \varphi_F$ .

En combinant les équations (54) et (56), on en déduit que l'on a sensiblement :

$$(57) \quad \begin{aligned} Q_G &\approx -\epsilon \cdot \phi_{AB} + \epsilon \phi_{CD} \\ \Leftrightarrow \phi_{CD} &\approx \phi_{AB} + \epsilon \cdot Q_G \cdot \Delta S \end{aligned}$$

D'autre part, si on désigne par  $C_P$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_P$  la conductivité et le gradient de  $\varphi$  en un point P, on a les relations suivantes :

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{V}_E\| = C_E \cdot \|\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_E\| \\ \|\vec{V}_F\| = C_F \cdot \|\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_F\| \end{array} \right.$$

En combinant les équations (55), (57) et (58) on a :

$$C_F \cdot \|\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_F\| \cdot CD \approx C_E \cdot \|\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_E\| \cdot AB + \epsilon \cdot Q_G \cdot \Delta S$$

En définitive, on a ...

(59)

$$C_F^* = C_E \cdot \frac{\|\overrightarrow{\text{grad } \varphi_E}\| \cdot AB}{\|\overrightarrow{\text{grad } \varphi_F}\| \cdot CD} + \varepsilon \cdot \frac{Q_G \cdot \Delta S}{\|\overrightarrow{\text{grad } \varphi_F}\| \cdot CD}$$

$$\text{avec } \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi_E > \varphi_F \\ -1 & \text{si } \varphi_E < \varphi_F \end{cases}$$

$$Q_G = \text{div}(\vec{V}_G) = \left[ -A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B \right]_G$$

... où  $C_F^*$  représente une valeur approchée de  $C_F$  qui peut être calculée connaissant  $C_E$  et la distribution  $\varphi(x,y)$  du potentiel.

#### METHODE NUMERIQUE PROPOSEE

##### Introduction

Si nous considérons l'équation (59), nous constatons que en fait nous ne connaissons pas de façon explicite les quantités  $AB$ ,  $CD$  et  $\Delta S$  ainsi que les coordonnées du point  $F$  ; il s'en suit que nous allons être obligés de construire une approximation  $\Delta\Omega^* = (E, A^*, C^*, F^*, D^*, B^*)$  du domaine  $\Delta\Omega = (E, A, C, F, D, B)$  et ceci à partir de la seule connaissance du potentiel  $\varphi(x,y)$  et de ses dérivées partielles.

##### Discrétisation du domaine $\Delta\Omega$

Considérons un point  $E$  du domaine étudié. Nous nous proposons de construire un domaine trapézoïdal  $\Delta\Omega^*$  approchant le domaine  $\Delta\Omega = (E, A, C, F, D, B)$ .

Par des dérivations partielles sur  $\varphi(x,y)$  au point  $E$ , on peut obtenir les vecteurs tangente  $\vec{T}_E$  et normale  $\vec{N}_E$  unitaires au point  $E$  à l'équipotentielle  $\varphi_E$  passant par ce point (cf. fig. 9).

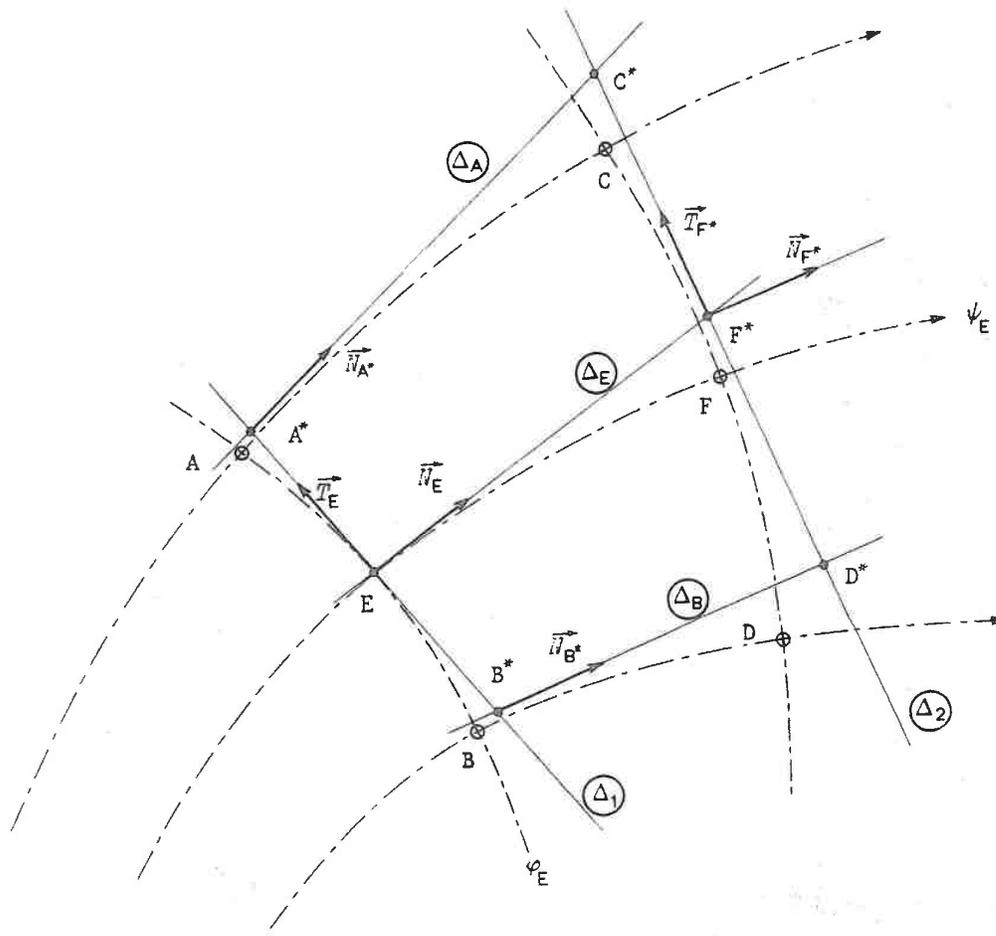


Figure 9

Supposons que la longueur de l'arc AB et de l'arc EF soient égales à  $h$  :

(60)

$$AB = h$$

$$EF = h$$

Dans ce qui suit, nous désignerons par  $P^*$  un point quelconque du domaine élémentaire  $\Delta\Omega^*$  correspondant à un point  $P$  du domaine  $\Delta\Omega$  de départ.

Posons  $E \equiv E^*$ , on peut alors obtenir  $A^*$ ,  $B^*$  et  $F^*$  de la façon suivante (cf. fig. 9) :

- a)  $A^*$  et  $B^*$  sont situés de part et d'autre de  $E$  sur la tangente  $(\Delta_1)$  en  $E$  à l'équipotentielle  $\varphi_E$ , et à une distance  $h/2$  du point  $E$ .

- b)  $F^*$  est situé sur la droite  $(\Delta_E)$  normale en  $E$  à l'équipotentielle  $\varphi_E$  et à une distance égale à  $h$  du point  $E$ .

Soient  $(\Delta_A)$  et  $(\Delta_B)$  les droites normales en  $A^*$  et  $B^*$  aux équipotentielles passant par ces points ; on obtient alors  $C^*$  et  $D^*$  de la façon suivante :

- a)  $C^*$  est l'intersection de  $(\Delta_A)$  avec la tangente  $(\Delta_2)$  en  $F^*$  à l'équipotentielle passant par  $F^*$ .
- b)  $D^*$  est l'intersection de  $(\Delta_B)$  avec la même droite  $(\Delta_2)$ .

Calcul des coordonnées de  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $F^*$

On se propose de trouver les coordonnées ...

$$\begin{bmatrix} x_{A^*} \\ y_{A^*} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{B^*} \\ y_{B^*} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{F^*} \\ y_{F^*} \end{bmatrix}$$

... des points  $A^*$ ,  $B^*$  et  $F^*$ . Soient  $\vec{N}_E$  et  $\vec{T}_E$  les vecteurs normale et tangente unitaire au point  $E$  à l'équipotentielle  $\varphi_E$  passant par ce point :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{N}_E \approx \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_E^2} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_E \\ V_E \end{bmatrix} \\ \vec{T}_E \approx \frac{1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_E^2} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_E \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_E \\ U_E \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Si on appelle  $O$  l'origine du repère  $(x, y)$ , on a ...

$$\begin{cases} \vec{OA}^* = \vec{OE} + (h/2) \cdot \vec{T}_E \\ \vec{OB}^* = \vec{OE} - (h/2) \cdot \vec{T}_E \\ \vec{OF}^* = \vec{OE} + h \cdot \vec{N}_E \end{cases}$$

... ce qui nous donne les relations cherchées :

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x_{A^*} \\ y_{A^*} \end{cases} = \begin{cases} x_E - (h/2) \cdot V_E \\ y_E + (h/2) \cdot U_E \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_{B^*} \\ y_{B^*} \end{cases} = \begin{cases} x_E + (h/2) \cdot V_E \\ y_E - (h/2) \cdot U_E \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x_{F^*} \\ y_{F^*} \end{cases} = \begin{cases} x_E + h \cdot U_E \\ y_E + h \cdot V_E \end{cases} \end{array} \right.$$

#### Calcul des coordonnées de C\* et D\*

On se propose de trouver les coordonnées ...

$$\begin{bmatrix} x_{C^*} \\ y_{C^*} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x_{D^*} \\ y_{D^*} \end{bmatrix}$$

... des points C\* et D\* .

Soit d'une part  $\vec{T}_{F^*}$  le vecteur tangente unitaire en  $F^*$  à l'équipotentielle  $\varphi_{F^*}$  passant par  $F^*$  ; soient d'autre part  $\vec{N}_{A^*}$  et  $\vec{N}_{B^*}$  les vecteurs normales unitaires en  $A^*$  et  $B^*$  aux équipotentiels  $\varphi_{A^*}$  et  $\varphi_{B^*}$  passant par ces points :

$$\left. \begin{aligned} \vec{T}_{F^*} &\approx \frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{F^*}^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{F^*}^2} \cdot \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{F^*} \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{F^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{F^*} \\ U_{F^*} \end{bmatrix} \\ \vec{N}_{A^*} &\approx \frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{A^*}^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{A^*}^2} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{A^*} \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{A^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{A^*} \\ V_{A^*} \end{bmatrix} \\ \vec{N}_{B^*} &\approx \frac{1}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{B^*}^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{B^*}^2} \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{B^*} \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{B^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{B^*} \\ V_{B^*} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Soient  $(\Delta_A)$ ,  $(\Delta_B)$ ,  $(\Delta_2)$  les droites passant respectivement par  $A^*$ ,  $B^*$  et  $F^*$  (cf. fig. 9) et de vecteurs directeurs  $\vec{N}_{A^*}$ ,  $\vec{N}_{B^*}$ , et  $\vec{T}_{F^*}$ ; ces droites ont pour équations :

$$(\Delta_A) : \frac{x - x_{A^*}}{U_{A^*}} = \frac{y - y_{A^*}}{V_{A^*}}$$

$$(\Delta_B) : \frac{x - x_{B^*}}{U_{B^*}} = \frac{y - y_{B^*}}{V_{B^*}}$$

$$(\Delta_2) : \frac{x - x_{F^*}}{-V_{F^*}} = \frac{y - y_{F^*}}{U_{F^*}}$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer les coordonnées du point  $C^*$  intersection des droites  $(\Delta_A)$  et  $(\Delta_2)$ ; en ce point on a :

$$(\Delta_A) : \frac{x_{C^*} - x_{A^*}}{U_{A^*}} = \frac{y_{C^*} - y_{A^*}}{V_{A^*}} \quad (I)$$

$$(\Delta_2) : \frac{x_{C^*} - x_{F^*}}{-V_{F^*}} = \frac{y_{C^*} - y_{F^*}}{U_{F^*}} \quad (II)$$

De la première équation on tire :

$$x_{C^*} = x_{A^*} + \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} \cdot (y_{C^*} - y_{A^*}) \quad (\text{III})$$

De la deuxième équation on tire :

$$x_{C^*} = x_{F^*} - \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \cdot (y_{C^*} - y_{F^*}) \quad (\text{IV})$$

en égalant les expressions (III) et (IV) on obtient :

$$\begin{aligned} x_{A^*} + \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} \cdot (y_{C^*} - y_{A^*}) &= x_{F^*} - \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \cdot (y_{C^*} - y_{F^*}) \\ \Leftrightarrow y_{C^*} \cdot \left( \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} + \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \right) &= (x_{F^*} - x_{A^*}) + \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} \cdot y_{A^*} + \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \cdot y_{F^*} \\ \Leftrightarrow \left[ y_{C^*} = \frac{1}{\left( \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} + \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \right)} \cdot \left\{ (x_{F^*} - x_{A^*}) + \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} \cdot y_{A^*} + \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \cdot y_{F^*} \right\} \right] & \quad (\text{V}) \end{aligned}$$

Pour obtenir  $x_{C^*}$ , on porte l'expression (V) dans l'équation (I) et on obtient :

$$\left[ x_{C^*} = x_{A^*} + \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} \cdot (y_{C^*} - y_{A^*}) \right] \quad (\text{VI})$$

Par un calcul analogue, on peut calculer les coordonnées  $x_{D^*}$  et  $y_{D^*}$  du point  $D^*$  intersection des droites  $(\Delta_B)$  et  $(\Delta_2)$ , si bien qu'en définitive, on obtient :

$$(62) \left\{ \begin{aligned} y_{C^*} &= \frac{1}{\left( \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} + \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \right)} \cdot \left\{ (x_{F^*} - x_{A^*}) + \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} \cdot y_{A^*} + \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \cdot y_{F^*} \right\} \\ x_{C^*} &= x_{A^*} + \frac{U_{A^*}}{V_{A^*}} \cdot (y_{C^*} - y_{A^*}) \\ y_{D^*} &= \frac{1}{\left( \frac{U_{B^*}}{V_{B^*}} + \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \right)} \cdot \left\{ (x_{F^*} - x_{B^*}) + \frac{U_{B^*}}{V_{B^*}} \cdot y_{B^*} + \frac{V_{F^*}}{U_{F^*}} \cdot y_{F^*} \right\} \\ x_{D^*} &= x_{B^*} + \frac{U_{B^*}}{V_{B^*}} \cdot (y_{D^*} - y_{B^*}) \end{aligned} \right.$$

### Conclusion

En se souvenant que l'on a ...

$$AB = A^* B^* = \hbar$$

... et en posant que l'on a sensiblement ...

$$\Delta S \approx \hbar^2$$

... on obtient la formule d'intégration approchée suivante ...

(63)

$$C_{F^*}^* = C_E \cdot \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_E\| \cdot \hbar}{\|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_{F^*}\| \cdot C^* D^*} + \varepsilon \cdot \frac{Q_G \cdot \hbar^2}{\|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_{F^*}\| \cdot C^* D^*}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi_E > \varphi_{F^*} \\ -1 & \text{si } \varphi_E < \varphi_{F^*} \end{cases} \\ Q_G = \left[ -A \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B \right]_G \end{array} \right.$$

... où la longueur  $C^* D^*$  est calculée à l'aide des relations (61) et (62)

## RESULTATS NUMERIQUES

### INTRODUCTION

#### Remarque

Tout ce que nous venons de dire suppose que l'on connaisse la répartition du potentiel  $\varphi(x, y)$  et de ses dérivées partielles d'ordre un et deux par rapport à  $x$  et à  $y$ . En fait, la plupart du temps on ne dispose que d'une carte des équipotentielles  $\varphi = C^{1e}$  dans le domaine  $\Omega$  et l'on devra alors

construire un échantillonnage  $\{\vec{x}_k\} = \{x_k, y_k\}$  afin de pouvoir construire une approximation  $\check{\varphi}(x, y)$  de  $\varphi(x, y)$  au sens des moindres carrés dans le domaine  $\Omega$  ; on procède alors avec  $\check{\varphi}(x, y)$  comme il aurait été fait avec  $\varphi(x, y)$ .

#### Modèles mathématiques test (A) et (B)

Afin de tester nos techniques numériques d'intégration, nous avons utilisé deux modèles mathématiques :

- a) le premier modèle que nous désignerons par (A) correspond strictement au modèle mathématique que nous avons construit dans la partie A du présent exposé et correspondant aux relations (22) et (24).
- b) le modèle (A) tel qu'il a été construit ne permet pas de se faire une idée de l'influence des discontinuités de  $C(x, y)$  sur l'intégration numérique des conductivités le long des lignes de courant ce qui nous a amenés à élaborer un modèle (B). Ce deuxième modèle a été construit numériquement de la façon suivante : nous avons repris le modèle (A) en introduisant une discontinuité au niveau de la diagonale  $AD$  (cf. fig. 7) de  $\Omega$  en augmentant les conductivités ...

$$C(x, y) = \frac{\gamma \cdot v(z^1, z^2) + \beta}{\gamma \cdot a'(x) \cdot b'(y)} \cdot v(z^1, z^2)$$

... d'une quantité  $\sigma$  sur le triangle  $ABD$  et en laissant telles qu'elles les conductivités sur le triangle  $ACD$ . Nous avons ensuite calculé une distribution approchée  $\check{\varphi}(x, y)$  du potentiel sur  $\Omega$  à l'aide de la méthode des éléments finis pour des conditions aux limites identiques à celles du modèle (A), puis nous avons approché  $\check{\varphi}(x, y)$  au sens des moindres carrés par un polynôme  $\check{\varphi}^*(x, y)$  dans les mêmes conditions expérimentales qui nous avaient servi à construire le modèle (A).

## RESULTATS OBTENUS

### Introduction

Nous avons effectué des essais de la première et de la deuxième méthode sur les modèles (A) et (B) pour des valeurs de  $h$  et de  $\sigma$  variables. Cela représente un volume considérable de résultats numériques dont nous ne donnons que quelques extraits correspondant au cas où l'on a :

$$\begin{cases} h = 1. \text{ et } 2. \\ \sigma = 0.5 \end{cases}$$

Les résultats sont présentés sous forme de tableaux où la valeur initiale de la conductivité  $C_0$  est repérée par un encadrement du type ...

0.1714

0.1756

0.1798

0.1841

... et où le niveau de discontinuité pour le modèle (B) est marqué par un symbole du type :

0.1714

0.1756

0.2798

0.2841

### Résultats obtenus

Nous présentons quelques résultats obtenus dans les conditions que nous venons de décrire sur les tableaux 5, 6 et 7.

D'une façon générale, on constate sur ces tableaux que pour un pas  $h$  donné, la méthode 1 avec formule de Runge-Kutta et la deuxième méthode sont supérieures à la méthode d'Euler tant en ce qui concerne le modèle (A) que le modèle (B) ; d'autre part, la méthode d'Euler paraît plus sensible au choix de  $h$  que les deux autres techniques d'intégration.

En ce qui concerne le modèle (B) on constate que l'intégration numérique introduit un certain lissage de la discontinuité et il nous est impossible de dire si ce lissage provient de la technique d'intégration du problème inverse où bien de la méthode des éléments finis qui a servi à construire le modèle.

MODELE (A)							
$h = 1$				$h = 2$			
$x$	$y$	$C^*$	$C$	$x$	$y$	$C^*$	$C$
19.99	16.14	0.2105	0.2105	19.99	16.14	0.2100	0.2104
17.99	16.07	0.1923	0.1928	17.99	16.08	0.1920	0.1927
16.00	16.00	0.1756	0.1756	16.00	16.00	0.1756	0.1756
15.00	15.95	0.1673	0.1673	14.00	15.91	0.1591	0.1592
13.00	15.85	0.1513	0.1516	12.00	15.80	0.1433	0.1443
11.00	15.72	0.1372	0.1380	10.00	15.66	0.1300	0.1323
9.01	15.53	0.1266	0.1283	8.00	15.46	0.1206	0.1260
7.03	15.26	0.1225	0.1270	6.00	15.16	0.1191	0.1328
5.08	14.82	0.1344	0.1467	4.10	14.66	0.1364	0.1775
3.24	14.05	0.1858	0.2298	2.32	13.75	0.1972	0.3661
1.81	12.67	0.3302	0.4891	1.13	12.14	0.3389	0.9119

MODELE (B) $\sigma = 0,5$							
$h = 1$				$h = 2$			
$x$	$y$	$C^*$	$C$	$x$	$y$	$C^*$	$C$
19.95	16.57	0.2085	0.2052	19.94	16.65	0.2026	0.2042
17.96	16.38	0.1816	0.1892	17.95	16.41	0.1711	0.1889
16.00	16.00	0.1756	0.1756	16.00	16.00	0.1756	0.1756
15.02	15.79	0.1778	0.1689	14.04	15.38	0.1800	0.1622
13.06	15.36	0.1703	0.1559	12.09	15.13	0.1608	0.1497
11.16	14.76	0.1384	0.1452	10.20	14.48	0.1324	0.1402
9.29	14.04	0.1698	0.1371	8.34	13.75	0.1822	0.1337
7.35	13.57	0.3512	0.6315	6.37	13.39	0.3639	0.6328
5.36	13.38	0.5349	0.6406	4.38	13.18	0.4060	0.6608
3.53	12.59	0.4329	0.6953	2.64	12.18	0.3623	0.7751
2.04	11.27	0.6644	0.8729	1.33	10.68	0.5806	1.1561

TABLEAU 5

Résultats obtenus par la première méthode en utilisant une formule d'Euler.  
 $C$  et  $C^*$  représentent respectivement la conductivité exacte et la conductivité  
calculée le long de la ligne de courant passant par le point de coordon-  
née  $x=16$  et  $y=16$ .

MODELE (A)							
$h = 1$				$h = 2$			
$x$	$y$	$C^*$	$C$	$x$	$y$	$C^*$	$C$
19.99	16.13	0.2108	0.2106	19.99	16.13	0.2108	0.2106
17.99	16.07	0.1927	0.1928	17.99	16.07	0.1927	0.1928
16.00	16.00	0.1756	0.1756	16.00	16.00	0.1756	0.1756
15.00	15.95	0.1674	0.1673	14.00	15.90	0.1594	0.1593
13.00	15.84	0.1517	0.1517	12.00	15.78	0.1446	0.1445
11.00	15.70	0.1382	0.1381	10.00	15.61	0.1328	0.1326
9.01	15.50	0.1287	0.1285	8.02	15.36	0.1265	0.1263
7.04	15.19	0.1273	0.1271	6.06	14.98	0.1331	0.1326
8.10	14.70	0.1470	0.1460	4.18	14.32	0.1743	0.1725
3.32	13.81	0.2247	0.2210	2.57	13.15	0.3124	0.3020
2.57	13.15	0.3130	0.3023	1.52	11.46	0.6353	0.5757

MODELE (B) $\sigma = 0,5$							
$h = 1$				$h = 2$			
$x$	$y$	$C^*$	$C$	$x$	$y$	$C^*$	$C$
19.99	16.50	0.2122	0.2060	19.96	16.50	0.2124	0.2060
17.96	16.34	0.1920	0.1897	17.96	16.34	0.1920	0.1897
16.00	16.00	0.1756	0.1756	16.00	16.00	0.1756	0.1756
15.02	15.79	0.1790	0.1689	14.04	15.57	0.1760	0.1623
13.07	15.33	0.1611	0.1562	12.12	15.03	0.1448	0.1507
11.18	14.68	0.1402	0.1459	10.24	14.33	0.1571	0.1415
9.30	14.00	0.2109	0.1374	8.33	13.76	0.3298	0.1336
7.34	13.63	0.5348	0.6313	6.34	13.55	0.6982	0.6326
5.36	13.35	0.6690	0.6406	4.45	12.95	0.5796	0.6581
3.60	12.42	0.6301	0.6904	2.83	11.79	0.7913	0.7469
2.15	11.05	0.9965	0.8413	1.56	10.25	1.1355	1.0071

TABLEAU 6

Résultats obtenus par la première méthode en utilisant une formule de Runge-Kutta d'ordre 4.  $C$  et  $C^*$  représentent respectivement la conductivité exacte et la conductivité calculée le long de la ligne de courant passant par le point de coordon-

MODELE (A)							
$h = 1$				$h = 2$			
$x$	$y$	$C^*$	$C$	$x$	$y$	$C^*$	$C$
19.99	16.14	0.2107	0.2105	19.99	16.14	0.2105	0.2104
17.99	16.07	0.1926	0.1928	17.99	16.08	0.1925	0.1927
16.00	16.00	0.1756	0.1756	16.00	16.00	0.1756	0.1756
15.00	15.95	0.1674	0.1673	14.00	15.91	0.1592	0.1592
13.00	15.85	0.1516	0.1516	12.00	15.80	0.1442	0.1443
11.00	15.72	0.1380	0.1380	10.00	15.66	0.1322	0.1323
9.01	15.53	0.1283	0.1283	8.02	15.46	0.1253	0.1260
7.03	15.26	0.1264	0.1270	6.04	15.16	0.1305	0.1328
5.08	14.82	0.1444	0.1467	4.10	14.66	0.1636	0.1775
3.24	14.05	0.2116	0.2298	2.32	13.75	0.2467	0.3611
1.81	12.67	0.4144	0.4891	1.13	12.14	0.5837	0.9119

MODELE (B) $\sigma = 0,5$							
$h = 1$				$h = 2$			
$x$	$y$	$C^*$	$C$	$x$	$y$	$C^*$	$C$
19.95	16.57	0.2078	0.2052	19.94	16.15	0.2042	0.2042
17.96	16.38	0.1891	0.1892	17.95	16.41	0.1870	0.1889
16.00	16.00	0.1756	0.1756	16.00	16.00	0.1756	0.1756
15.02	15.79	0.1787	0.1689	14.04	15.58	0.1769	0.1622
13.06	15.36	0.1634	0.1559	12.09	15.13	0.1478	0.1497
11.16	14.74	0.1394	0.1452	10.20	14.48	0.1498	0.1402
9.28	14.04	0.2009	0.1371	8.34	13.75	0.2861	0.1337
7.35	13.57	0.5052	0.6315	6.37	13.39	0.6825	0.6328
5.36	13.38	0.6639	0.6406	4.38	13.18	0.5348	0.6608
3.53	12.59	0.6035	0.6953	2.64	12.18	0.7095	0.7751
2.04	11.27	0.9718	0.8729	1.33	10.68	1.1917	1.1561

TABLEAU 7

Résultats obtenus par la deuxième méthode.  $C$  et  $C^*$  représentent respectivement la conductivité exacte et la conductivité calculée le long de la ligne de courant passant par le point de coordonnée  $x = 16$  et  $y = 16$ .

# C ETUDE INTRINSEQUE DU PROBLEME INVERSE ISOTROPE BIDIMENSIONNEL

## PRESENTATION DU PROBLEME

### INTRODUCTION

L'expérience montre qu'il n'est pas indifférent, pour résoudre un problème où interviennent des variables d'espace, de choisir tel ou tel système de coordonnées. Ainsi, il est beaucoup plus facile d'étudier un problème à symétrie axiale en se référant par rapport à un système de coordonnées curvilignes semi-polaires, plutôt que par rapport à un repère cartésien car les équations écrites y sont généralement plus simples.

Guidés par cette idée, nous allons essayer dans le cas du problème qui nous préoccupe, de trouver un système de coordonnées curvilignes  $\{\vec{e}_i, y^i\}$  approprié :

### CHOIX D'UN SYSTEME DE COORDONNEES CURVILIGNES

#### Introduction

Rappelons que le champ de vecteur  $\vec{V}$  que nous étudions est défini par ...

$$(64) \quad \left[ \begin{array}{l} \vec{V} = \vec{e}_i \cdot V^i \\ V^i = -C^{ij} \cdot \partial_j \varphi \\ C^{ij} = g^{ij} \cdot C \\ g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j \end{array} \right.$$

... et obéit à l'équation de continuité :

$$(65) \quad \left[ \operatorname{div}(\vec{V}) = -A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B = Q \right.$$

Remarquons alors que du fait que le tenseur  $C(x, y)$  de composantes contravariantes  $C^{ij}$  est isotrope, il s'en suit que les équipotentielles  $\psi = C^{ie}$  et les lignes de courant  $\Psi = C^{ie}$  forment un réseau de courbes orthogonales.

Dans ce qui suit, nous adopterons pour système de coordonnées curvilignes, le système constitué par les lignes de courant ( $y^1$ ) et les équipotentielles ( $y^2$ ) ; ce système étant orthogonal, il s'en suit que les calculs seront singulièrement simplifiés.

#### Repère naturel en un point $M$

Les vecteurs de base covariants  $\{\vec{e}_i\}$  du repère naturel associé aux coordonnées  $\{y^i\}$  en un point  $M$  sont définis par les relations classiques suivantes ...

$$(66) \quad \begin{cases} \vec{e}_i = \partial_i \vec{OM} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y^1} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial y^1} \\ \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial y^2} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial y^2} \end{cases} \end{cases}$$

... où  $s_1$  (respectivement  $s_2$ ) représente la longueur algébrique d'un arc de courbe pris sur  $y^1$  (respectivement  $y^2$ ) et orienté dans le sens des  $y^1$  (respectivement  $y^2$ ) croissants. Il s'en suit que les vecteurs  $\vec{e}_i$  sont alors tangents en  $M$  aux courbes  $y^i$  comme l'indique la figure 10.

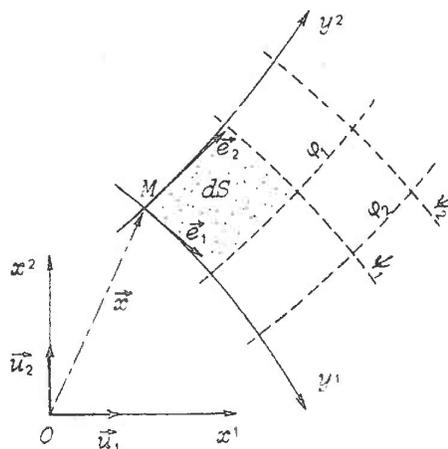


Figure 10

Par ailleurs, on a toujours la relation ...

$$\left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial s} \right| = 1 \quad \forall s$$

... si bien que l'on peut écrire :

$$(67) \quad \begin{cases} |\vec{e}_1| = e_1 = \left| \frac{\partial s_1}{\partial y^1} \right| = \frac{\partial s_1}{\partial y^1} \\ |\vec{e}_2| = e_2 = \left| \frac{\partial s_2}{\partial y^2} \right| = \frac{\partial s_2}{\partial y^2} \end{cases}$$

### Tenseurs métriques fondamentaux au point M

a) Tenseur métrique covariant  $\{g_{ij}\}$

$$\{g_{ij}\} = \{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\} = \begin{pmatrix} (e_1)^2 & 0 \\ 0 & (e_2)^2 \end{pmatrix}$$

b) Tenseur métrique contravariant  $\{g^{ij}\}$

$$\{g^{ij}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(e_1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(e_2)^2} \end{pmatrix}$$

c) Densité scalaire  $\sqrt{g}$

$$g = \det(g_{ij})$$

$$\sqrt{g} = e_1 \cdot e_2$$

d) Elément d'aire  $dS$

$$dS = \sqrt{g} \cdot dy^1 \cdot dy^2$$

Graduation sur la ligne de courant  $y^1$

Considérons la figure 11 ; nous dirons qu'un point courant  $M_0$  a une abscisse curviligne constante  $y^1 = y_0^1$  s'il se déplace sur l'équipotentielle  $\varphi(y^1, y^2, t) = y_0^1$ .

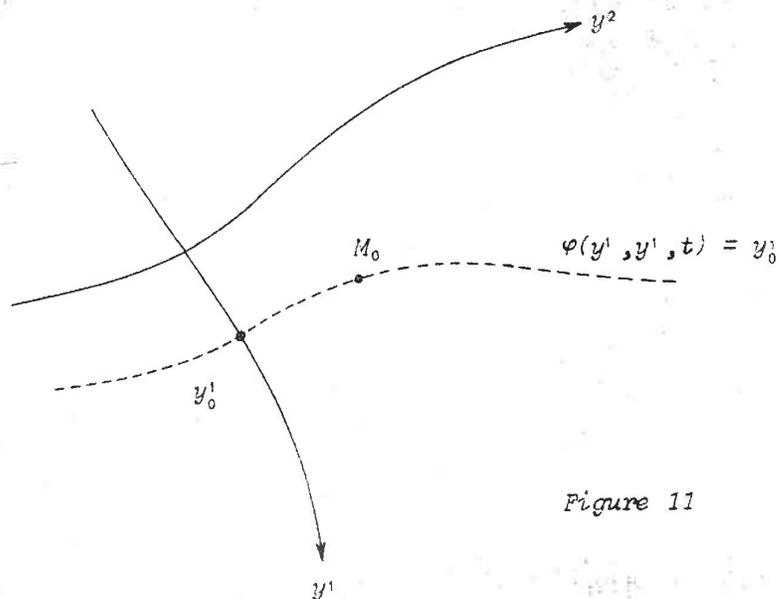


Figure 11

Graduations sur l'équipotentielle  $y^2$

Considérons comme l'indique la figure 12 une ligne de courant et une équipotentielle de référence d'équations :

$$(68) \quad \left[ \begin{array}{l} \psi(y^1, y^2, t) = \psi_0 \\ \varphi(y^1, y^2, t) = \varphi_0 \end{array} \right.$$

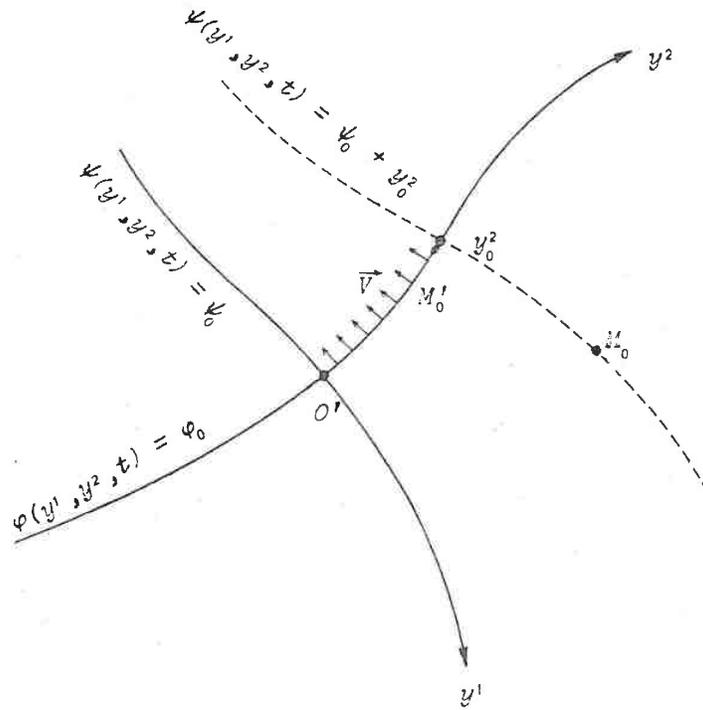


Figure 12

Soit un point  $M_0$  de coordonnées  $(y_0^1, y_0^2)$  ; par définition, nous dirons que  $y_0^2$  représente le flux du vecteur  $\vec{V}$  à travers le segment  $C_0$  de l'équipotentielle de référence  $\varphi_0$  compris entre la ligne de courant  $\psi_0$  et la ligne de courant passant par  $M_0$  et d'équation  $\psi(y^1, y^2, t) = \psi_0 + y_0^2$ . On a donc ...

$$(69) \quad \left[ \begin{array}{l} y_0^2 = \int_{C_0} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds_2 \\ \text{avec } C_0 = \widehat{O' M'_0} \end{array} \right.$$

... où  $O'$  et  $M'_0$  sont respectivement les intersections de la ligne de courant de référence  $\psi_0$  et de la ligne de courant  $\psi_0 + y_0^2$  passant par  $M_0$  avec l'équipotentielle de référence  $\varphi_0$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la courbe coordonnée  $y^2$  orienté dans le sens contraire à  $y^1$ .

ETUDE DU PROBLEME INVERSE DANS LE REPERE  $\{\vec{e}_i, y^i\}$ 
INTRODUCTION

On montre en calcul tensoriel que l'on peut exprimer la divergence d'un vecteur à l'aide de la formule suivante ...

$$(70) \quad \left[ \operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_1 (\sqrt{g} \cdot V^1) \right]$$

... où les quantités  $V^i$  sont les composantes contravariantes du vecteur  $\vec{V} = \vec{e}_i \cdot V^i$  ; dans le cas du problème qui nous intéresse, nous avons d'après les relations (64) :

$$(71) \quad V^i = -C \cdot g^{ij} \cdot \partial_j \varphi$$

Mais comme par construction, l'abscisse  $y^1$  d'un point courant  $M_0$  est égale au potentiel  $\varphi$  en ce point, on a ...

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 \varphi = \partial_1 y^1 = 1 \\ \partial_2 \varphi = \partial_2 y^1 = 0 \end{array} \right.$$

... si bien que l'on peut écrire ...

$$(73) \quad g^{ij} \cdot \partial_j \varphi = \begin{cases} g^{11} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

... car  $g^{ij} = 0$  si  $i$  est différent de  $j$ .

En portant les relations (71) et (73) dans l'équation (70), il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{V}) &= \frac{-1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_1 (C \cdot \sqrt{g} \cdot g^{11}) \\ \Leftrightarrow (74) \quad \left[ \operatorname{div}(\vec{V}) &= \frac{-1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_1 \left( C \cdot \frac{e_2}{e_1} \right) \right] \end{aligned}$$

En portant cette dernière expression dans l'équation de continuité (65), on obtient :

$$\frac{-1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_1 \left( C \cdot \frac{e_2}{e_1} \right) = Q$$

$$\Leftrightarrow \quad (75) \quad \partial_1 \left( C \cdot \frac{e_2}{e_1} \right) = -Q \cdot \sqrt{g}$$

avec	$Q = -A \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B$
------	--

#### FORME DEVELOPPEE DE L'EQUATION (75)

Développons le premier membre de l'équation (75) ; on obtient :

$$(76) \quad \frac{e_2}{e_1} \cdot \partial_1 C + C \cdot \partial_1 \left( \frac{e_2}{e_1} \right) = -Q \cdot \sqrt{g}$$

On démontre par ailleurs en calcul tensoriel que le laplacien d'une fonction  $\varphi$  s'exprime sous la forme suivante :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_i (\sqrt{g} \cdot g^{ij} \cdot \partial_j \varphi)$$

Dans le cas présent, comme  $g^{ij} = 0$  si  $i \neq j$ , on a :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_i (\sqrt{g} \cdot g^{ii} \cdot \partial_i \varphi)$$

Comme enfin, d'après les relations (72),  $\partial_1 \varphi = 1$  et  $\partial_2 \varphi = 0$ , on peut écrire :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_1 (\sqrt{g} \cdot g^{11})$$

mais  $\sqrt{g} \cdot g^{11} = (e_1 \cdot e_2) \cdot \frac{1}{(e_1)^2} = \frac{e_2}{e_1}$  si bien que l'on trouve :

$$(77) \quad \left[ \Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_1 \left( \frac{e_2}{e_1} \right) \right]$$

Remarquons enfin que l'on a :

$$\frac{(e_1)^2}{\sqrt{g}} = \frac{(e_1)^2}{e_1 \cdot e_2}$$

$$\Leftrightarrow (78) \quad \left[ \frac{(e_1)^2}{\sqrt{g}} = \frac{e_1}{e_2} \right]$$

En portant les résultats (77) et (78) dans l'équation (76), on obtient :

$$\frac{\sqrt{g}}{(e_1)^2} \cdot \partial_1 C + C \cdot \sqrt{g} \cdot \Delta \varphi = - Q \cdot \sqrt{g}$$

multiplions les deux membres de cette équation par  $\frac{(e_1)^2}{\sqrt{g}}$ , on a :

$$\Leftrightarrow (79) \quad \left[ \partial_1 C = (e_1)^2 \cdot [-C \cdot \Delta \varphi - Q] \right]$$

$$\text{mais } \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 C = \frac{\partial C}{\partial y^1} = \frac{\partial C}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial y^1} \\ e_1 = \frac{\partial s_1}{\partial y^1} = \frac{\partial s_1}{\partial \varphi} = \frac{1}{\|\text{grad} \varphi\|} \end{array} \right.$$

En définitive, on a :

$$(80) \quad \boxed{\frac{\partial C}{\partial s_1} = \frac{1}{\|\text{grad} \varphi\|} \cdot \left[ -C \cdot \Delta \varphi + A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - B \right]}$$

### FORME INTEGRALE DE L'EQUATION (75)

#### Introduction

Intégrons l'équation (75) le long d'une ligne de courant  $y^2 = \psi$  entre  $y^1 = \varphi_0$  et  $y^1 = \varphi$  ; on a alors ...

$$\Leftrightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} \partial_1 \left( C \cdot \frac{e_2}{e_1} \right) \cdot dy^1 = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} Q \cdot \sqrt{g} \cdot dy^1$$

$$\left\{ C \cdot \frac{e_2}{e_1} \right\}_{\varphi_0, \psi} - \left\{ C \cdot \frac{e_2}{e_1} \right\}_{\varphi, \psi} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} Q \cdot \sqrt{g} \cdot dy^1$$

... où l'expression  $\{f\}_{\varphi,\psi}$  représente la valeur de la fonction  $f$  prise au point d'abscisse  $y^1 = \varphi$  sur la ligne de courant  $\psi$ .

### Forme intégrale

En conclusion, nous dirons que dans le système de coordonnées curvilignes choisies, la conductivité  $C$  est reliée aux propriétés des équipotentielles et des lignes de courant par la relation fondamentale suivante :

$$(81) \quad \left\{ C \right\}_{\varphi,\psi} = I(\varphi,\psi) \cdot \left\{ \frac{e_1}{e_2} \right\}_{\varphi,\psi}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} I(\varphi,\psi) = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} Q \cdot \sqrt{g} \cdot dy^1 + \left\{ C \cdot \frac{e_2}{e_1} \right\}_{\varphi_0,\psi} \\ e_1 = \frac{\partial s_1}{\partial \varphi} = \frac{1}{\|\text{grad}\varphi\|} \\ e_2 = \frac{\partial s_2}{\partial \psi} \end{cases}$$

### FORME EXPLICITE DE L'EQUATION (81) POUR UN FILET DE COURANT

#### Filet de courant : définition

Soit  $\psi_E$  une ligne de courant passant par un point  $E$  et d'équation :

$$\psi(y^1, y^2, t) = \psi_E$$

On appelle filet de courant  $\{\psi_E\}$  passant par le point  $E$ , le tube de courant (cf. fig. 13) limité par deux lignes de courant infiniment voisines et d'équation :

$$\begin{cases} \psi(y^1, y^2, t) = \psi_E + \frac{1}{2} \cdot d\psi \\ \psi(y^1, y^2, t) = \psi_E - \frac{1}{2} \cdot d\psi \end{cases}$$

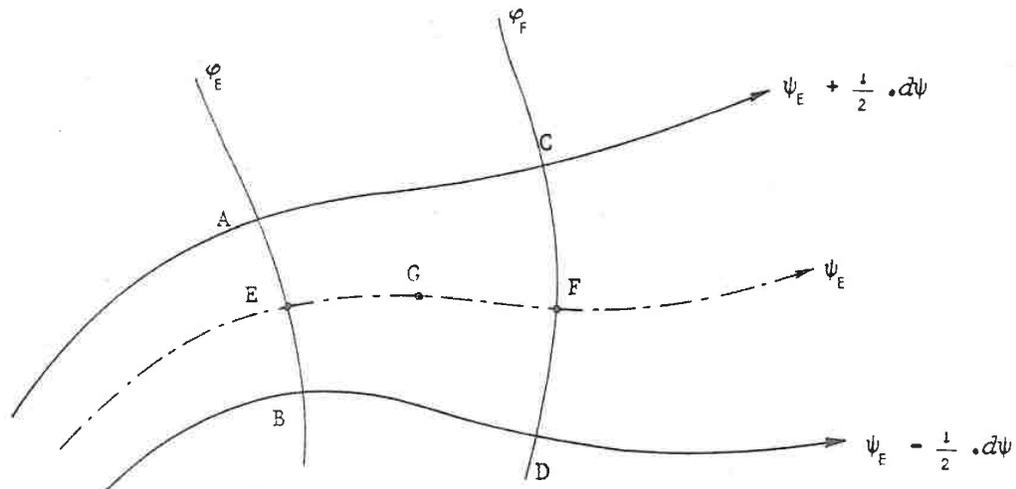


Figure 13

Soit  $F$  un point distinct de  $E$  situé sur la ligne de courant  $\psi_E$ , et soient  $\varphi_E$  et  $\varphi_F$  les équipotentielle passant par  $E$  et  $F$  et d'équations :

$$\begin{cases} \varphi(y^1, y^2, t) = \varphi_E \\ \varphi(y^1, y^2, t) = \varphi_F \end{cases}$$

Soient  $AB$  et  $CD$  les morceaux d'équipotentielles  $\varphi_E$  et  $\varphi_F$  de longueur  $AB$  et  $CD$  compris entre les lignes de courant  $\psi_E + \frac{1}{2} \cdot d\psi$  et  $\psi_E - \frac{1}{2} \cdot d\psi$  comme l'indique la figure 13.

Il s'en suit que les longueurs  $AB$  et  $CD$  devront être des infiniments petits du premier ordre, c'est pourquoi dans ce qui suit nous poserons :

$$(82) \quad \begin{cases} AB = |ds_2|_E \\ CD = |ds_2|_F \end{cases}$$

Forme explicite de l'équation (81)

Désignons par  $C_M^M, e_1^M, e_2^M, I^M, \varphi_M$  les quantités  $C, e_1, e_2, I$  et  $\varphi$  calculées en un point  $M$  quelconque de la ligne de courant  $\psi_E$  ; les relations (81) nous permettent d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} C_E \cdot \frac{e_2^E}{e_1^E} &= I^E \\ C_F \cdot \frac{e_2^F}{e_1^F} &= I^F \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} I^F &= I^E + J_E^F \\ J_E^F &= - \int_{\phi_E}^{\phi_F} Q \cdot \sqrt{g} \cdot dy^1 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow C_E \cdot \frac{e_2^E}{e_1^E} = C_F \cdot \frac{e_2^F}{e_1^F} - J_E^F = I^E$$

$$\Leftrightarrow C_F \cdot \frac{e_2^F}{e_1^F} = C_E \cdot \frac{e_2^E}{e_1^E} + J_E^F$$

$$\Leftrightarrow C_F = C_E \cdot \frac{e_2^E}{e_1^E} \cdot \frac{e_1^F}{e_2^F} + \frac{e_1^F}{e_2^F} \cdot J_E^F$$

$$\Leftrightarrow (83) \quad \left[ C_F = C_E \cdot \frac{e_1^F}{e_1^E} \cdot \frac{e_2^E}{e_2^F} + J_E^F \cdot \frac{e_1^F}{e_2^F} \right.$$

Par ailleurs, on a par définition :

$$\frac{e_2^E}{e_2^F} = \frac{\left( \frac{\partial y^2}{\partial s_2} \right)_E}{\left( \frac{\partial y^2}{\partial s_2} \right)_F}$$

$$\text{mais : } (84) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy^2}{ds_2} &= \frac{\partial y^2}{\partial s_1} \cdot \frac{ds_1}{ds_2} + \frac{\partial y^2}{\partial s_2} \cdot \frac{ds_2}{ds_2} \\ \frac{ds_1}{ds_2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial y^2}{\partial s_2} = \frac{dy^2}{ds_2}$$

En remarquant que par définition, on a ...

$$(dy^2)_E = (dy^2)_F = d\psi$$

... il vient alors en tenant compte des relations (82) et du fait que  $\varphi_E$  et  $\varphi_F$  sont orientées dans le même sens :

$$(85) \quad \left[ \frac{e_2^E}{e_2^F} = \frac{(ds_2)_F}{(ds_2)_E} = \frac{CD}{AB} \right.$$

Comme d'autre part on a ....

$$e_1^M = \frac{1}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_M\|}$$

... il vient en regroupant les équations (83) et (84) :

$$(86) \quad \left[ \begin{array}{l} c_F = c_E \cdot \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_E\| \cdot AB}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_F\| \cdot CD} + K_E^F \\ \text{avec } K_E^F = - \frac{e_1^F}{e_2^F} \cdot \int_{\varphi_E}^{\varphi_F} Q \cdot \sqrt{g} \cdot dy^1 \end{array} \right.$$

Cette équation (86) représente la forme explicitée de l'équation (81) pour le filet de courant ABCD (cf. fig. 13) où AB et CD sont supposés être des infiniment petits du premier ordre.

Calcul de  $K_E^F$  lorsque  $\varphi_F - \varphi_E$  est un infiniment petit du premier ordre

Soit G le milieu de l'arc EF (cf. fig. 13) ;  $\varphi_F - \varphi_E$  étant un infiniment petit du premier ordre, on peut écrire :

$$(87) \quad \left[ \begin{array}{l} (dy^1)_G = \varepsilon \cdot (\varphi_F - \varphi_E) \\ (dy^2)_G = (dy^2)_E = (dy^2)_F = d\psi \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi_F > \varphi_E \\ -1 & \text{si } \varphi_F < \varphi_E \end{cases}$$

Par ailleurs, on a :

$$(88) \quad \left[ \begin{aligned} e_1^F &= \frac{1}{\|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_F\|} \\ e_2^F &= \frac{(ds_2)_F}{(dy^2)_F} = \frac{CD}{(dy^2)_G} \end{aligned} \right.$$

On peut alors écrire ...

$$(89) \quad K_E^F = - \frac{(dy^2)_G}{\|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_F\| \cdot CD} \cdot (Q \cdot \sqrt{g})_G \cdot (\varphi_F - \varphi_E) + E(dy^1)_G^2$$

... où  $E(dy^1)_G^2$  est un infiniment petit du second ordre en  $(dy^1)_G$ . D'autre part, l'élément de surface  $dS$  au point  $G$  s'écrit :

$$(dS)_G = (\sqrt{g})_G \cdot (dy^1)_G \cdot (dy^2)_G$$

Compte tenu de (87), cette dernière expression s'écrit encore :

$$(90) \quad (dS)_G = \varepsilon \cdot (\sqrt{g})_G \cdot (\varphi_F - \varphi_E) \cdot (dy^2)_G$$

En combinant les relations (89) et (90), on obtient en négligeant les infiniment petits du second ordre ...

$$(91) \quad \boxed{K_E^F = -\varepsilon \cdot \frac{Q_G \cdot (dS)_G}{\|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_F\| \cdot CD}}$$

$$\text{avec } \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } \varphi_F > \varphi_E \\ -1 & \text{si } \varphi_F < \varphi_E \end{cases}$$

... où  $(dS)_G$  représente l'aire du trapèze curviligne ABCD.

CONSEQUENCES
--------------

COMPARAISON DES DEUX METHODES DE RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE

Identité des formules (47) et (80)

Comme on peut le constater facilement, la formule fondamentale (47), obtenue pour la première méthode de résolution du problème inverse est strictement identique à la formule (80) obtenue au cours de l'étude intrinsèque du problème inverse, à condition toutefois que dans le premier cas on se déplace sur une ligne de courant.

Identité des formules (59) et (86)

Lorsque  $AB$ ,  $CD$  et  $EF$  sont des infiniment petits du premier ordre,  $K_E^F$  peut s'exprimer à l'aide de la relation (91) et on constate alors que la relation (86) prend strictement la même forme que la formule fondamentale (59) obtenue pour la deuxième méthode de résolution du problème inverse.

Conséquence

En conséquence, et en se référant à l'étude intrinsèque, nous voyons qu'il existe un lien étroit entre les deux méthodes présentées pour la résolution du problème inverse, à savoir que la seconde n'est qu'une forme intégrale de la première.

ETUDE DE L'ERREUR  $\delta C/C$

Introduction

Nous nous proposons dans ce qui va suivre de déterminer l'erreur relative  $\delta C/C$  qui s'introduit dans l'étude du problème inverse. Pour fixer les

idées, supposons que l'on connaisse dans le domaine d'étude un point  $M_0$  de conductivité  $C_0$  et que l'on se propose de calculer les conductivités  $C(s)$  en tout point d'abscisse curviligne  $s$  sur la ligne de courant  $\psi_0$  passant par le point  $M_0$ .

Dans ce cas, les sources d'erreur sont de trois natures différentes :

#### Erreur initiale

Supposons que la valeur initiale  $C_0$  soit connue avec une erreur relative  $\delta C_0/C_0$  ; cette erreur initiale va engendrer une erreur relative  $\delta C(s)/C(s)$  tout le long de la ligne  $\psi_0$ .

Si on se réfère à la formule (86), on voit qu'une erreur  $\delta C_E$  sur  $C_E$  engendre une erreur  $\delta C_F$  sur  $C_F$  (cf. fig. 13), telle que :

$$C_F + \delta C_F = (C_E + \delta C_E) \cdot \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}\phi_E}\|_{AB}}{\|\overrightarrow{\text{grad}\phi_F}\|_{CD}} + K_E^F$$

$$\text{or} \quad C_F = C_E \cdot \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}\phi_E}\|_{AB}}{\|\overrightarrow{\text{grad}\phi_F}\|_{CD}} + K_E^F$$

$\Rightarrow$  il s'en suit que l'on a :

$$\delta C_F = \delta C_E \cdot \frac{\|\overrightarrow{\text{grad}\phi_E}\|_{AB}}{\|\overrightarrow{\text{grad}\phi_F}\|_{CD}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\delta C_F}{C_F} \simeq \frac{\delta C_E}{C_E} \quad \text{si on néglige } K_E^F$$

On en déduit que pour le problème qui nous intéresse, on a conservation de l'erreur relative  $\delta C_0/C_0$  tout le long de la ligne de courant  $\psi_0$  :

(92)

$$\frac{\delta C(s)}{C(s)} \simeq \frac{\delta C_0}{C_0} = \text{cte}$$

### Erreur d'intégration

Supposons que l'on ait commis une erreur  $\delta\varphi(x,y)$  dans l'approximation du potentiel  $\varphi(x,y)$  ; cette erreur induit une erreur  $\delta C/C$  en tout point du domaine d'étude.

En remarquant que  $e_1 = 1/\|\overrightarrow{\text{grad}\varphi}\|$ , et que  $y^1 \equiv \varphi$ , l'équation (79) peut s'écrire ...

$$\frac{\partial C}{\partial \varphi} = \frac{-C \cdot \Delta\varphi - Q}{\|\overrightarrow{\text{grad}\varphi}\|^2}$$

... soit, en passant aux incertitudes ...

$$\delta C = \frac{1}{\|\overrightarrow{\text{grad}\varphi}\|^2} \cdot [-C \cdot \Delta\varphi - Q] \cdot \delta\varphi$$

... d'où l'on tire :

$$(93) \quad \boxed{\frac{\delta C}{C} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\text{grad}\varphi}\|^2} \cdot \left| -\Delta\varphi - \frac{Q}{C} \right| \cdot \delta\varphi}$$

### Erreur systématique

Cette dernière erreur est l'erreur introduite par la méthode numérique de résolution du problème inverse, c'est aussi la plus difficile à étudier, tout au plus peut-on dire qu'elle est directement liée aux pas d'intégration  $h$ .

### Conséquences pratiques

Nous voyons que l'erreur initiale n'est pas catastrophique en elle-même, en ce sens que l'erreur relative sur  $C$  reste constante tout le long d'une ligne de courant. Par contre, l'erreur d'intégration nous semble plus dangereuse car nous voyons que l'erreur relative sur  $C$  est directement liée à l'erreur absolue sur  $\varphi$  ce qui peut être très gênant pour peu que  $\|\overrightarrow{\text{grad}\varphi}\|^2$  soit suffisamment petit.

ETUDE DU POTENTIEL  $\varphi$

Bien souvent le potentiel n'est connu qu'en un certain nombre de points expérimentaux  $(x_k, y_k)$  à partir desquels on interpole une carte  $\varphi(x, y)$ . La formule (93) nous suggère alors qu'il peut être intéressant d'avoir localement une information d'autant plus dense sur  $\varphi(x, y)$  que la valeur absolue de la fonction ...

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{\|\text{grad } \varphi\|^2} \cdot \left[ -\Delta\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

... est élevée, ceci afin de minimiser les risques d'erreur d'intégration.

A titre d'exemple, nous donnons sur les figures (14) et (15), les cartes des fonctions  $\varphi(x, y)$  et  $\gamma(x, y)$  approchées au sens des moindres carrés pour le modèle (B) ; on constate en particulier que  $|\gamma(x, y)|$  présente un maximum au niveau de la ligne de discontinuité AD, c'est-à-dire précisément à l'endroit où les méthodes numériques donnent les moins bons résultats.

LE CARACTERE S	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.86765	-1.83085
LE CARACTERE A	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.79405	-1.75725
LE CARACTERE I	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.72045	-1.68365
LE CARACTERE V	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.64685	-1.61005
LE CARACTERE U	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.57325	-1.53645
LE CARACTERE Y	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.49965	-1.46285
LE CARACTERE Z	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.42605	-1.38925
LE CARACTERE B	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.35245	-1.31565
LE CARACTERE C	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.27885	-1.24205
LE CARACTERE D	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.20525	-1.16845
LE CARACTERE E	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.13165	-1.09485
LE CARACTERE F	CORESPOND A L'INTERVALLE	-1.05805	-1.02125
LE CARACTERE G	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.98445	-.94765
LE CARACTERE H	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.91085	-.87405
LE CARACTERE J	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.83725	-.80045
LE CARACTERE K	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.76365	-.72685
LE CARACTERE L	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.69005	-.65325
LE CARACTERE M	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.61645	-.57965
LE CARACTERE N	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.54285	-.50605
LE CARACTERE O	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.46925	-.43245
LE CARACTERE P	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.39565	-.35885
LE CARACTERE Q	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.32205	-.28525
LE CARACTERE R	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.24845	-.21165
LE CARACTERE T	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.17485	-.13805
LE CARACTERE X	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.10125	-.06445
LE CARACTERE Y	CORESPOND A L'INTERVALLE	-.02765	-.00911
LE CARACTERE Z	CORESPOND A L'INTERVALLE	.04590	.08270
LE CARACTERE A	CORESPOND A L'INTERVALLE	.11950	.15630
LE CARACTERE I	CORESPOND A L'INTERVALLE	.19310	.22990
LE CARACTERE V	CORESPOND A L'INTERVALLE	.26670	.30350
LE CARACTERE U	CORESPOND A L'INTERVALLE	.34030	.37710
LE CARACTERE Y	CORESPOND A L'INTERVALLE	.41389	.45069
LE CARACTERE Z	CORESPOND A L'INTERVALLE	.48749	.52429
LE CARACTERE B	CORESPOND A L'INTERVALLE	.56109	.59789
LE CARACTERE C	CORESPOND A L'INTERVALLE	.63469	.67149
LE CARACTERE D	CORESPOND A L'INTERVALLE	.70829	.74509
LE CARACTERE E	CORESPOND A L'INTERVALLE	.78189	.81869
LE CARACTERE F	CORESPOND A L'INTERVALLE	.85548	.89228
LE CARACTERE G	CORESPOND A L'INTERVALLE	.92908	.96588
LE CARACTERE H	CORESPOND A L'INTERVALLE	1.00268	1.03948
LE CARACTERE J	CORESPOND A L'INTERVALLE	1.07628	1.11308

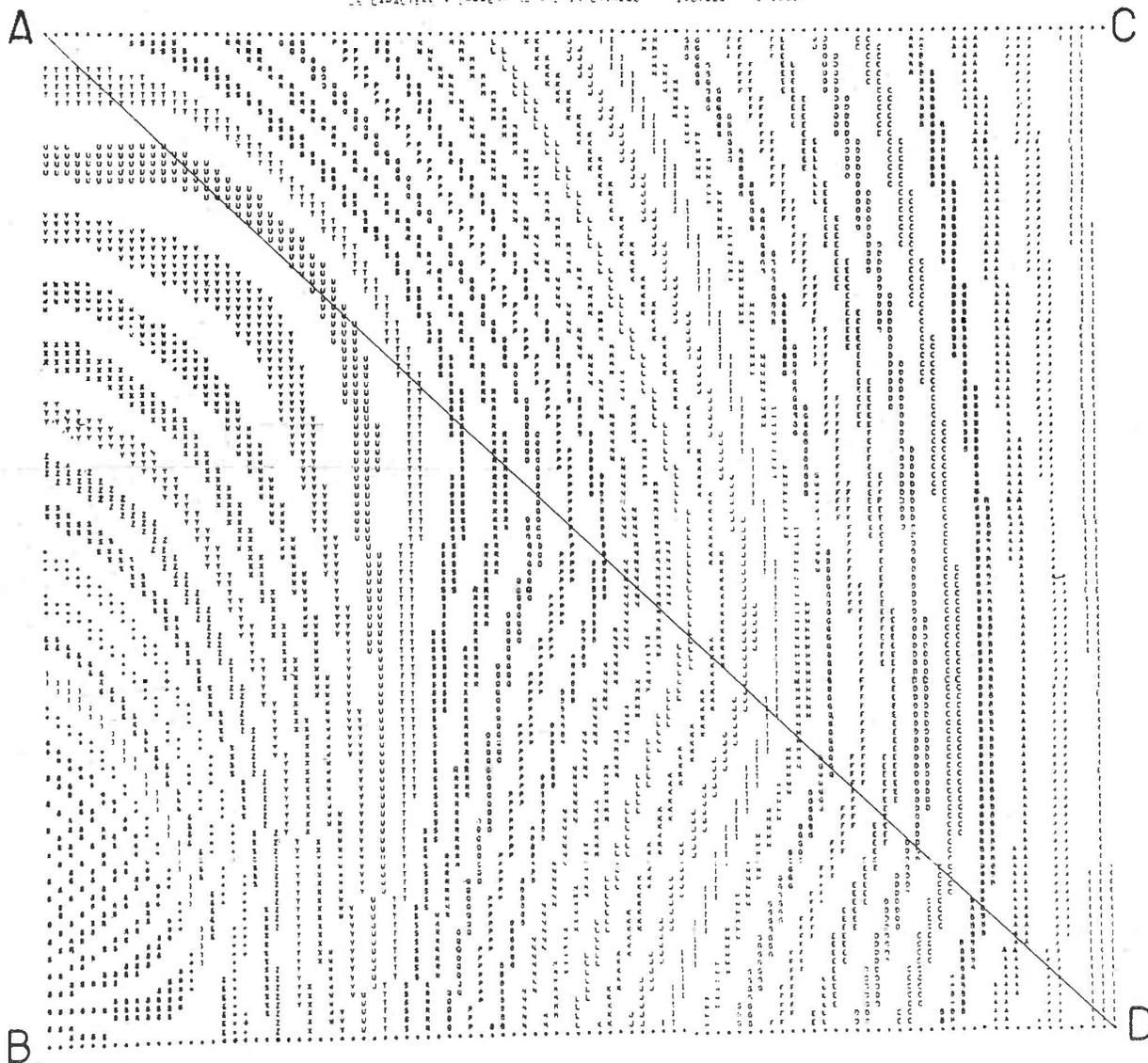


Figure 14 - Carte des potentiels  $\phi^*(x,y)$  approchés au sens des moindres carrés et correspondant au modèle B.

LE CARACTERE	b	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-7.86837	*7.66117
LE CARACTERE	a	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-7.45398	-7.24679
LE CARACTERE	z	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-7.03959	*6.83640
LE CARACTERE	y	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-6.62521	*6.41802
LE CARACTERE	x	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-6.21082	*6.00363
LE CARACTERE	w	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-5.79644	*5.58924
LE CARACTERE	v	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-5.38205	*5.17485
LE CARACTERE	u	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-4.96767	*4.76047
LE CARACTERE	t	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-4.55328	*4.34609
LE CARACTERE	s	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-4.13889	*3.93170
LE CARACTERE	r	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-3.72451	*3.51731
LE CARACTERE	q	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-3.31012	*3.10293
LE CARACTERE	p	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-2.89574	*2.68854
LE CARACTERE	o	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-2.48135	*2.27416
LE CARACTERE	n	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-2.06697	*1.85977
LE CARACTERE	m	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-1.65258	*1.44539
LE CARACTERE	l	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-1.23819	*1.03100
LE CARACTERE	k	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-.82381	*.61661
LE CARACTERE	j	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	-.40942	*.20223
LE CARACTERE	i	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	.00496	*.21216
LE CARACTERE	h	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	.41935	*.62654
LE CARACTERE	g	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	.83373	*1.04093
LE CARACTERE	f	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	1.24812	*1.45531
LE CARACTERE	e	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	1.66251	*1.86970
LE CARACTERE	d	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	2.07689	*2.28408
LE CARACTERE	c	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	2.49128	*2.69847
LE CARACTERE	b	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	2.90566	*3.11286
LE CARACTERE	a	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	3.32005	*3.52724
LE CARACTERE	z	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	3.73444	*3.94163
LE CARACTERE	y	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	4.14882	*4.35601
LE CARACTERE	x	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	4.56321	*4.77040
LE CARACTERE	w	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	4.97759	*5.18478
LE CARACTERE	v	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	5.39198	*5.59917
LE CARACTERE	u	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	5.80636	*6.01356
LE CARACTERE	t	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	6.22075	*6.42794
LE CARACTERE	s	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	6.63513	*6.84233
LE CARACTERE	r	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	7.04952	*7.25671
LE CARACTERE	q	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	7.46391	*7.67110
LE CARACTERE	p	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	7.87829	*8.08548
LE CARACTERE	o	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	8.29268	*8.49987
LE CARACTERE	n	CORRESPOND	A	L'INTERVALLE	8.70706	*8.91425

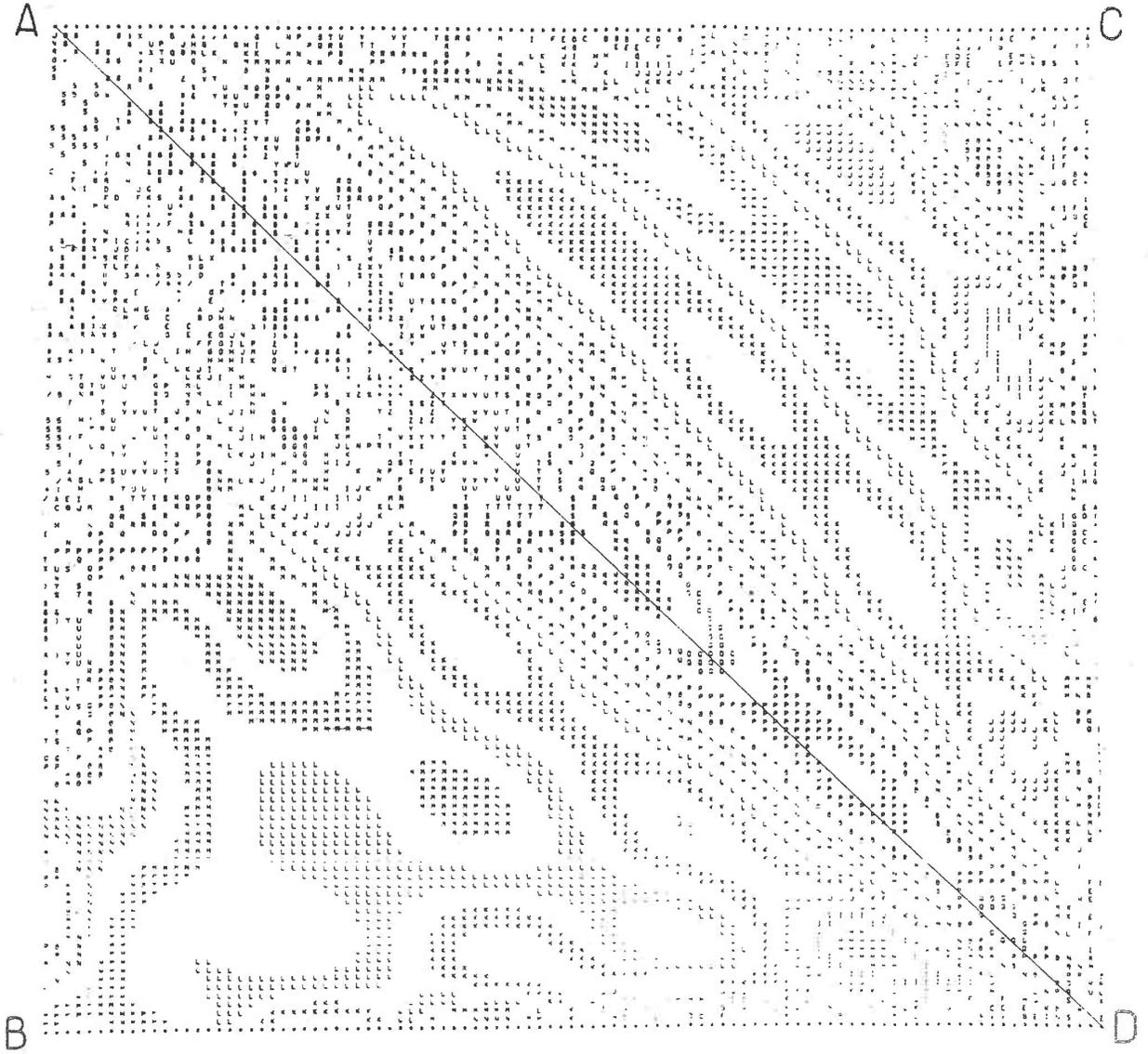


Figure 15 - Carte de la fonction  $\gamma(x,y) = - \Delta\phi / \|\overrightarrow{\text{grad}\phi}\|^2$  relative au modèle B.

LE CARACTERE S	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-2.01701	-1.9788.
LE CARACTERE A	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.94074	-1.90261
LE CARACTERE P	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.86447	-1.82634
LE CARACTERE Z	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.78820	-1.75007
LE CARACTERE I	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.71193	-1.67381
LE CARACTERE C	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.63567	-1.59755
LE CARACTERE L	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.55940	-1.52128
LE CARACTERE B	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.48313	-1.44501
LE CARACTERE O	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.40687	-1.36874
LE CARACTERE D	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.33059	-1.29244
LE CARACTERE N	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.25432	-1.21611
LE CARACTERE E	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.17806	-1.14189
LE CARACTERE F	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.10179	-1.06562
LE CARACTERE G	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-1.02552	-0.98935
LE CARACTERE H	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.94925	-0.91301
LE CARACTERE J	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.87298	-0.83678
LE CARACTERE K	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.79672	-0.76045
LE CARACTERE X	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.72045	-0.68418
LE CARACTERE M	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.64418	-0.60791
LE CARACTERE R	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.56791	-0.53164
LE CARACTERE Q	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.49164	-0.45537
LE CARACTERE U	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.41538	-0.37911
LE CARACTERE V	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.33911	-0.30284
LE CARACTERE W	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.26284	-0.22657
LE CARACTERE Y	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.18657	-0.15030
LE CARACTERE T	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.11030	-0.07403
LE CARACTERE S	CORRESPOND A L'INTERVALLE	-0.03403	0.00223
LE CARACTERE Z	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.04223	0.07846
LE CARACTERE I	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.11850	0.15473
LE CARACTERE C	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.19477	0.23100
LE CARACTERE L	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.27104	0.30727
LE CARACTERE B	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.34731	0.38354
LE CARACTERE O	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.42357	0.45980
LE CARACTERE D	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.49984	0.53607
LE CARACTERE N	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.57611	0.61234
LE CARACTERE E	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.65238	0.68861
LE CARACTERE F	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.72865	0.76484
LE CARACTERE G	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.80492	0.84107
LE CARACTERE H	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.88118	0.91730
LE CARACTERE J	CORRESPOND A L'INTERVALLE	0.95745	0.99353
LE CARACTERE K	CORRESPOND A L'INTERVALLE	1.03372	1.06981

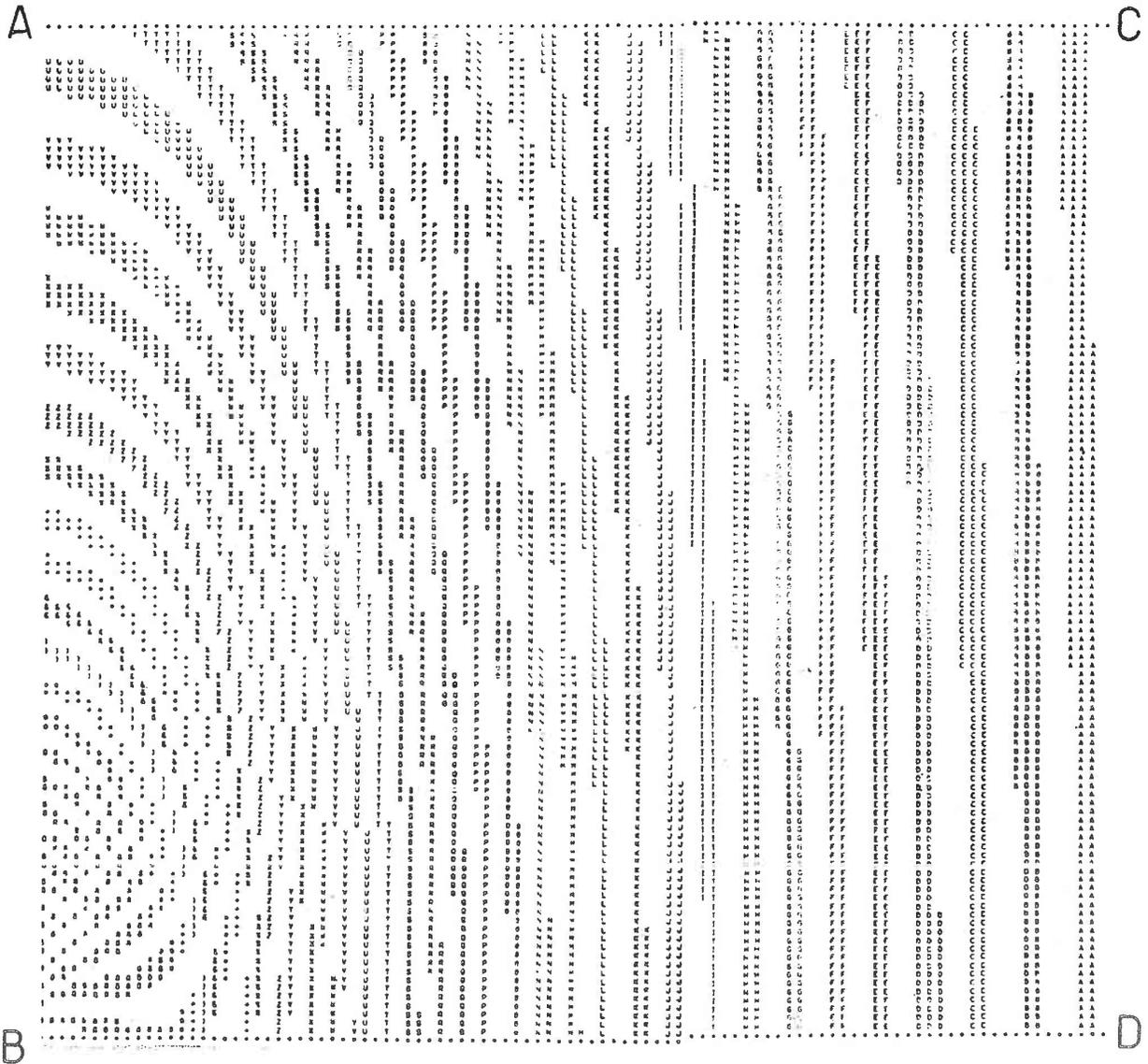


Figure 16 - Carte des potentiels  $\varphi^*(x,y)$  approchés au sens des moindres carrés et correspondant au modèle A.

LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+3.0452	-3.03852
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+2.9781	-2.88931
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+2.7697	-2.69010
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+2.61050	-2.53089
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+2.46129	-2.37169
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+2.29208	-2.21248
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+2.14287	-2.05327
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+1.97367	-1.89406
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+1.81446	-1.73485
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+1.65525	-1.57565
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+1.49604	-1.41644
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+1.33683	-1.25723
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+1.17763	-1.09802
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+1.01842	-0.93881
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+0.85921	-0.77961
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+0.70000	-0.62040
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+0.54079	-0.46119
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+0.38159	-0.30198
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+0.22238	-0.14277
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+0.06317	-0.01643
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+0.96004	-1.7564
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+25525	+33485
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+11145	+49406
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+57386	+65327
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+173287	+81247
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+89208	+97168
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+05129	+13089
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+21119	+29010
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+134970	+44930
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+58991	+60851
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+68812	+78772
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+8733	+92491
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+00453	+08614
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+11574	+24535
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+32995	+60455
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+14816	+246276
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+44337	+72297
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+80257	+88218
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+96178	+04138
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+117099	+0089
LE CARACTERE	A	INTERVALLE	+240020	+35980

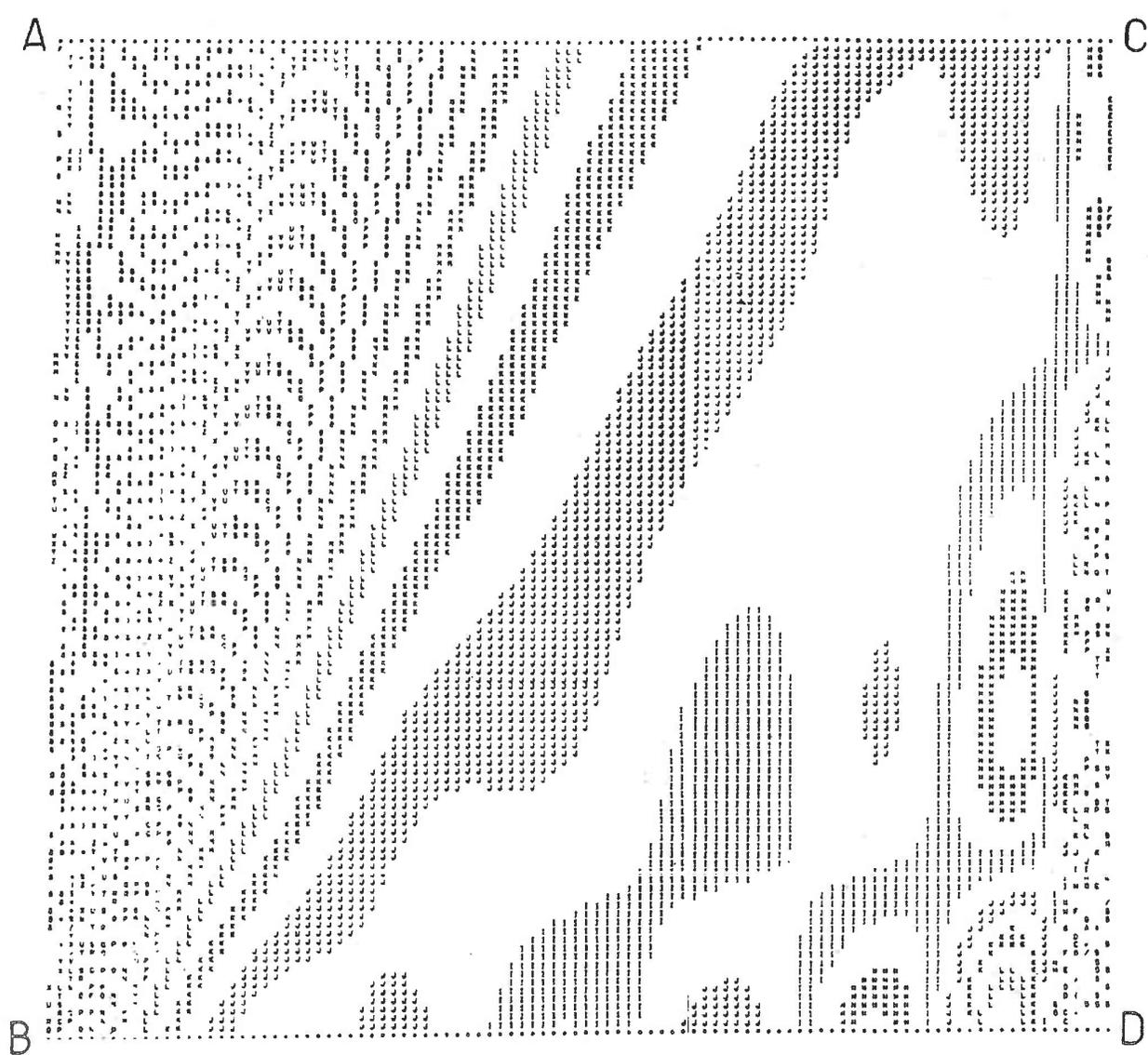


Figure 17 - Carte de la fonction  $\gamma(x,y) = - \Delta\phi / \|\overrightarrow{\text{grad}\phi}\|^2$  relative au modèle A

LE CARACTERE S CORRESPOND A L'INTERVALLE	+34011	+346137
LE CARACTERE A CORRESPOND A L'INTERVALLE	+34263	+32590
LE CARACTERE I CORRESPOND A L'INTERVALLE	+30516	+28642
LE CARACTERE U CORRESPOND A L'INTERVALLE	+27659	+24986
LE CARACTERE / CORRESPOND A L'INTERVALLE	+23021	+21147
LE CARACTERE C CORRESPOND A L'INTERVALLE	+19274	+17400
LE CARACTERE P CORRESPOND A L'INTERVALLE	+15226	+13653
LE CARACTERE A CORRESPOND A L'INTERVALLE	+11779	+9920
LE CARACTERE O CORRESPOND A L'INTERVALLE	+40032	+40158
LE CARACTERE C CORRESPOND A L'INTERVALLE	+04284	+02211
LE CARACTERE D CORRESPOND A L'INTERVALLE	+00537	+01337
LE CARACTERE E CORRESPOND A L'INTERVALLE	+03210	+0484
LE CARACTERE F CORRESPOND A L'INTERVALLE	+06958	+0831
LE CARACTERE G CORRESPOND A L'INTERVALLE	+10705	+12579
LE CARACTERE H CORRESPOND A L'INTERVALLE	+14452	+14026
LE CARACTERE I CORRESPOND A L'INTERVALLE	+18200	+20073
LE CARACTERE J CORRESPOND A L'INTERVALLE	+21947	+23221
LE CARACTERE K CORRESPOND A L'INTERVALLE	+25694	+27568
LE CARACTERE L CORRESPOND A L'INTERVALLE	+29442	+31216
LE CARACTERE M CORRESPOND A L'INTERVALLE	+33189	+35463
LE CARACTERE N CORRESPOND A L'INTERVALLE	+36937	+38410
LE CARACTERE O CORRESPOND A L'INTERVALLE	+40684	+42558
LE CARACTERE P CORRESPOND A L'INTERVALLE	+44431	+46305
LE CARACTERE Q CORRESPOND A L'INTERVALLE	+48179	+50052
LE CARACTERE R CORRESPOND A L'INTERVALLE	+51926	+53800
LE CARACTERE S CORRESPOND A L'INTERVALLE	+55673	+57547
LE CARACTERE T CORRESPOND A L'INTERVALLE	+59421	+61194
LE CARACTERE U CORRESPOND A L'INTERVALLE	+63168	+65442
LE CARACTERE V CORRESPOND A L'INTERVALLE	+66915	+68799
LE CARACTERE W CORRESPOND A L'INTERVALLE	+70662	+72336
LE CARACTERE X CORRESPOND A L'INTERVALLE	+74410	+76244
LE CARACTERE Y CORRESPOND A L'INTERVALLE	+78157	+8031
LE CARACTERE Z CORRESPOND A L'INTERVALLE	+81905	+83774
LE CARACTERE 0 CORRESPOND A L'INTERVALLE	+85652	+87226
LE CARACTERE 1 CORRESPOND A L'INTERVALLE	+89400	+91273
LE CARACTERE 2 CORRESPOND A L'INTERVALLE	+93147	+9521
LE CARACTERE 3 CORRESPOND A L'INTERVALLE	+96894	+98769
LE CARACTERE 4 CORRESPOND A L'INTERVALLE	+100642	+102119
LE CARACTERE 5 CORRESPOND A L'INTERVALLE	+104389	+10667
LE CARACTERE 6 CORRESPOND A L'INTERVALLE	+108136	+11111
LE CARACTERE 7 CORRESPOND A L'INTERVALLE	+111884	+11555

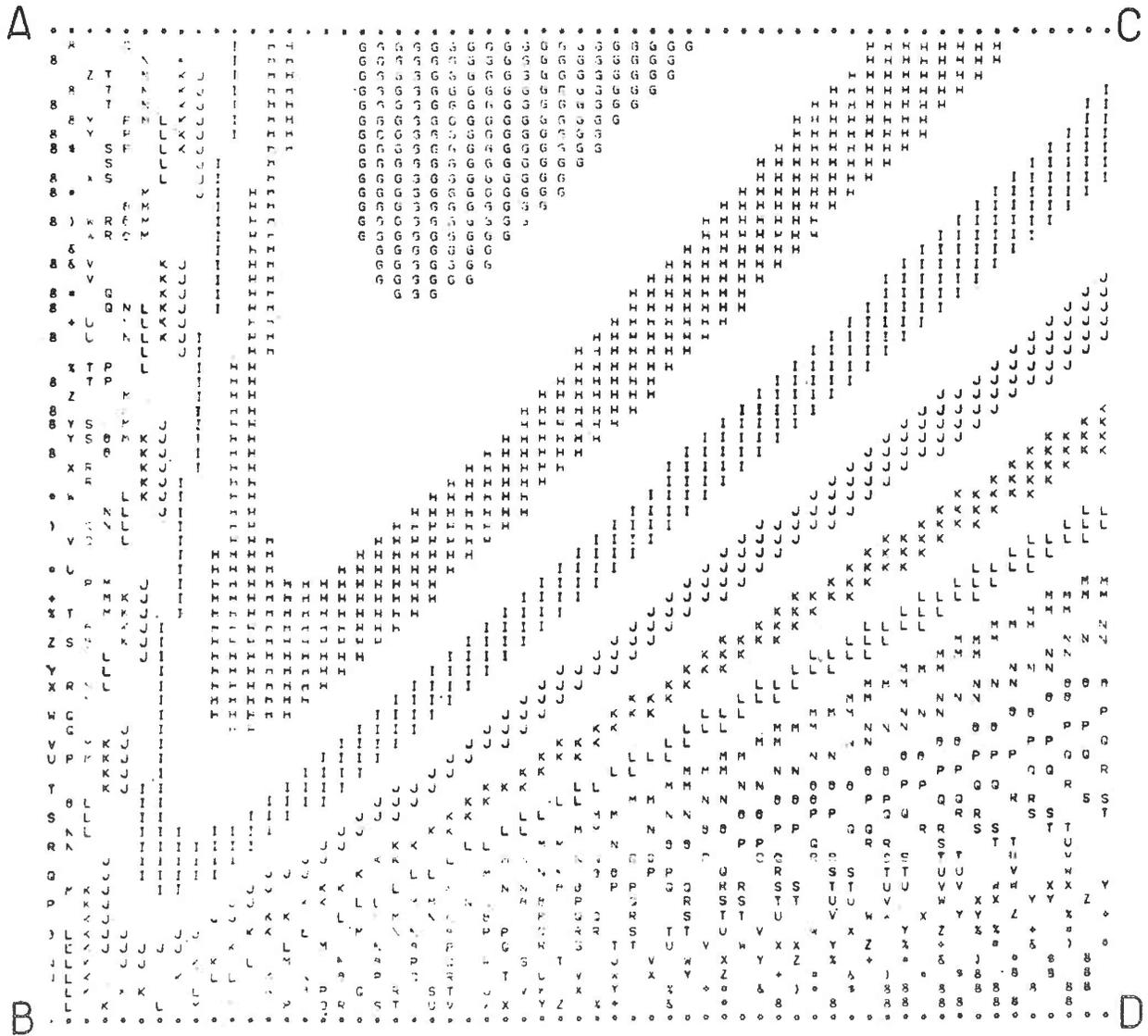


Figure 18 - Carte de la fonction  $C(x,y)$  correspondant au modèle A.

QUATRIEME PARTIE

CONCLUSION ET BIBLIOGRAPHIE



**CONCLUSION**

Nous ne prétendons pas avoir fait une étude exhaustive des problèmes différentiels rencontrés dans la loi de la diffusion et nous avons en particulier cité la méthode des différences finies qui est très utilisée dans la résolution du problème direct.

En ce qui nous concerne, nous avons, en dehors des techniques présentées, tenté d'utiliser des méthodes variationnelles du type moindres carrés (encore appelées méthode de collocation généralisée) que nous avons testées aussi bien sur le problème direct que sur le problème inverse ; si les résultats obtenus pour le problème direct se sont avérés excellents, il n'en a pas été de même en ce qui concerne le problème inverse pour lequel les résultats nous ont paru très inférieurs à ceux obtenus par intégration le long des lignes de courant.

Nous concluons donc en disant que la méthode des éléments finis et la méthode des caractéristiques ne sont peut-être pas les seules techniques d'étude numérique de la loi de la diffusion, mais elles sont sans doute parmi les plus stables et les plus simples d'emploi, ce qui est probablement le plus important aux yeux des Physiciens susceptibles d'employer ces techniques.

## BIBLIOGRAPHIE

- ENSELLEM, Y. et de MARSILLY, G. (1969).- Restitution automatique des perméabilités d'une nappe ; le problème inverse et la déconvolution. Communication présentée au Comité Technique de la Société Hydro-technique de France.
- LEGRAS, J. (1971).- Méthodes et techniques de l'analyse numérique. Dunod, Paris.
- LEMONIER, P. (1971).- Application de l'analyse fonctionnelle à la résolution de problèmes d'identification linéaire et non linéaire. Colloque d'Analyse Numérique, Anglet (ronéo).
- LIONS, J.L. (1961).- Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Springer.
- LIONS, J.L. (1968).- Contrôle optimal de systèmes gouvernés, par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris.
- MIKHLIN, S.G. (1964).- Variational Methods in Mathematical Physics. Pergamon Press.
- MIKHLIN, S.G. and SMOLITSKIY, K.L.(1967).- Approximate Methods for solution of differential and integral equations. American Elsevier Publishing Company inc., New-York.
- ZIENKIEWICZ, O.C. and CHEUNG, Y.K. (1967).- The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill Ed., London.
- ZLAMAL, M. (1968).- On the finite element Method. Numerische Mathematik, band 12, Helft 5.
- ZLAMAL, M. (1969).- On some finite element Procedures for solving second order Boundary Value Problem. Numerische Mathematik, band 14, Helft 1.

NOM DE L'ETUDIANT : MALLET J.Laurent

Nature de la thèse : Thèse, de Spécialité en Mathématiques

Vu, Approuvé



et permis d'imprimer

NANCY, le 2 juin 1971

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY I

J.R. HELLUY