

286
UNIVERSITÉ DE NANCY 1

Reçu C. 3. 1. 1. 237
U. E. R. DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Sc. N. 73/28

L'ALGORITHME HONGROIS

et son application à

L'AFFECTATION DU PERSONNEL AUXILIAIRE AU RECTORAT

THÈSE



présentée en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Dominique LIEGEY

Soutenue le 17 Mars 1973

JURY :	M. J. LEGRAS	Président
	M ^{me} C. ROLLAND	Examineur
	M. M. DEPAIX	Examineur

L'ALGORITHME HONGROIS
et son application à
L'AFFECTATION DU PERSONNEL AUXILIAIRE AU RECTORAT

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Dominique LIEGEY

Soutenue le 17 Mars 1973

JURY :	M. J. LEGRAS	Président
	M^{me} C. ROLLAND	Examineur
	M. M. DEPAIX	Examineur

NOM DE L'ETUDIANT : LIEGEY Dominique

Nature de la thèse : DOCTEUR INGENIEUR

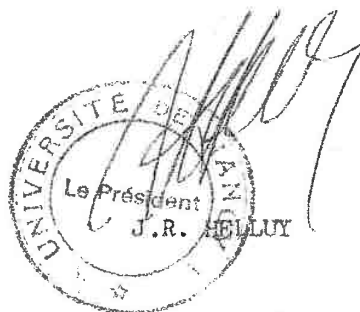
Vu, Approuvé

et permis d'imprimer

NANCY, le 26 Février 1973

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY I

Numéro C.N.R.S. : A.O. 6361



Qu'il me soit permis de témoigner à Monsieur le Professeur J. LEGRAS, mon profond respect et ma sincère gratitude pour l'enseignement qu'il m'a apporté, la bienveillance qu'il a accordé à mon travail et l'honneur qu'il me fait de présider le Jury.

Que Madame C. ROLLAND, Maître-assistant, dont les études sont à l'origine de cette recherche, soit vivement remerciée pour les conseils qu'elle a bien voulu me donner.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur le Professeur M. DEPAIX, Directeur de l'U.E.R. de Sciences Mathématiques de l'Université de Nancy I, de l'estime qu'il me porte en acceptant de juger mon travail.

Je remercie, avec gratitude, Madame GARNIER et Mademoiselle DESTABEAU pour leur dévouement et leur collaboration efficace lors de la réalisation matérielle de cette thèse.

Je remercie également tous les membres du service du personnel du Rectorat de l'Académie de Nancy pour l'aimable concours dont j'ai toujours bénéficié auprès d'eux.

Enfin, j'exprime ma sincère reconnaissance à ma femme pour l'aide précieuse qu'elle m'a apportée au cours de cette étude. Je lui dédie mon travail.

T A B L E D E S M A T I E R E S

<u>AVANT - PROPOS</u>	p. 1
<u>INTRODUCTION</u>	p. 2
<u>CHAPITRE 1 : LA METHODE HONGROISE : SA DEFINITION, SES APPLICATIONS</u>	p. 4
I - Présentation et définition du problème de l'affectation :	
1. Exposé général	
2. Exemple	
II - Formulation mathématique du problème de l'affectation :	
1. Sa représentation matricielle et la programmation linéaire	
2. La théorie des graphes et la méthode hongroise.	
A - Sa représentation sous forme de graphe	
B - Fondements mathématiques de la méthode hongroise :	
1re phase : Recherche des "affectations possibles" dans la	
matrice des coûts initiale.	
2e phase : Recherche d'un couplage maximal.	
3e phase : - Recherche du support minimal,	
- Recherche de nouvelles "affectations possibles"	
dans la matrice des coûts transformée.	
III - Problèmes résolubles par la méthode hongroise :	
a) les problèmes d'affectation	
b) les problèmes de transport	
IV - Extensions du domaine d'utilisation de la méthode hongroise	
<u>CHAPITRE 2 : UNE TECHNIQUE D'UTILISATION DE LA METHODE HONGROISE</u>	p. 34
I - Description de la méthode hongroise.	
1re étape : obtention des zéros dans les rangées	
2e étape : recherche d'une solution	

3e étape : recherche d'un couplage maximal

1. L'algorithme d'A. KAUFMANN
2. La méthode de recherche exhaustive du couplage maximal
3. L'algorithme de FORD et FULKERSON

4e étape : détermination d'un support minimal

5e étape : réduction de la matrice des coûts

II - Problème que pose la recherche d'un couplage maximal

1. Nécessité de cette recherche
2. Critique des méthodes de recherche du couplage maximal
 - A - Pas de recherche du couplage maximal
 - B - L'algorithme d'A. KAUFMANN
 - C - La méthode de recherche exhaustive du couplage maximal
 - D - L'algorithme de FORD et FULKERSON

III - Mise en parallèle de la formulation théorique de la méthode hongroise et de sa technique d'utilisation

CHAPITRE 3 : "LE PROGRAMME D'AFFECTION A.H."..... p. 59

I - Modifications apportées à la méthode de KUHN et son adaptation à l'ordinateur.

1. Représentation de la matrice des coûts en mémoire centrale .
 - A - Pour les matrices creuses.
 - B - Pour les matrices dont le taux de remplissage est très élevé.
2. Adaptation du programme au traitement par colonnes .
3. Modification de la seconde étape de la méthode hongroise : recherche d'une solution.
4. La représentation du couplage.
5. L'application de l'Algorithme de FORD et FULKERSON.
6. Calcul du coût d'affectation.

II - Présentation du "programme d'affectation A.H."

1. Description du programme
2. Les caractéristiques de l'exploitation du programme sur ordinateur
 - a) La configuration de l'ordinateur
 - 1/ Ses exigences en espace-mémoire
 - 2/ Les temps d'exécution.
 - b) La structure des entrées sur cartes
 - 1/ Adaptation du programme aux dimensions du problème
 - 2/ La structure des cartes de données.

CHAPITRE 4 : UNE APPLICATION : L'AFFECTATION DU PERSONNEL AUXILIAIRE AU RECTORAT .. p. 84

- I - Présentation du mouvement des maîtres-auxiliaires
 - 1. Le dossier de candidature et sa notation
 - 2. Chronologie des opérations du mouvement rectoral
- II - Application du "programme d'affectation A.H." au mouvement du personnel
 - 1. L'utilisation du "programme d'affectation A.H."
 - a) Présentation générale de l'application
 - b) Evaluation des coefficients de la "matrice des capacités"
 - Détermination de la valeur (bb)
 - Détermination du coefficient μ
 - Doit-on limiter les affectations réalisables aux postes cités dans la liste de vœux ?
 - c) L'introduction des données
 - d) L'exploitation des résultats
 - 2. Exécution d'une affectation à l'aide de données réelles
- III - La gestion automatique du personnel
 - 1. Etablissement d'une chaîne de traitement ?
 - 2. Insertion du "programme d'affectation A.H." dans une chaîne de traitement de la gestion du personnel.
- IV - Critique du projet d'automatisation de la gestion du personnel

CONCLUSION..... p. 131

ANNEXE : ORGANIGRAMME GENERAL DU "PROGRAMME D'AFFECTATION A.H."..... p. 132

BIBLIOGRAPHIE..... p. 135

A V A N T P R O P O S

Mettre au point une méthode susceptible, d'une part de faciliter la tâche du service du personnel du Rectorat de l'Académie de Nancy, et d'autre part de procéder rapidement à l'affectation des enseignants maîtres-auxiliaires aux postes laissés vacants après la nomination des titulaires par le Ministère de l'Education Nationale, tel fut notre objectif lors de cette étude.

Pour le réaliser, il s'agissait de trouver une méthode pouvant être automatisée qui effectuerait les affectations, et de l'appliquer aux conditions particulières de la désignation du personnel auxiliaire aux postes d'enseignement.

Cette seconde partie est présentée dans le dernier chapitre de cette thèse. Quant à la première, Monsieur le Professeur LEGRAS m'orienta en me conseillant l'étude de deux algorithmes d'affectation :

- la méthode de Séparation et d'Evaluation Progressive (Branch and bound method),
- la méthode hongroise.

Bien qu'il semble posséder un champ d'application plus vaste, l'algorithme S.E.P. fut abandonné à cause des difficultés que présentait sa programmation sur ordinateur. En effet, les bipartitions successives de l'ensemble des données initiales, auxquelles il donne lieu, peuvent engendrer un grand nombre de sous-ensembles dont l'importance pose le problème soit de leur rangement en mémoire centrale soit du temps d'accès nécessaire s'ils sont placés sur les mémoires auxiliaires.

En définitive, la méthode hongroise fut retenue et c'est sa présentation, la description des applications qu'elle permet de résoudre et son automatisation qui constituent la partie la plus importante de ce travail.

I N T R O D U C T I O N

La recherche opérationnelle est un ensemble de méthodes ayant pour but la préparation scientifique des décisions. Une de ces méthodes tend à faciliter la résolution des problèmes d'affectation. Ceux-ci se rencontrent souvent dans la pratique et constituent des actes de gestion fondamentaux dans l'entreprise ; d'une façon très générale, ils se présentent sous la forme suivante : il s'agit d'affecter n ressources à n emplois différents, en optimisant un critère objectif qui fait intervenir le coût ou la capacité de chaque ressource à satisfaire chaque emploi.

Devant l'intérêt pratique de ce problème, très tôt, de nombreux mathématiciens se penchèrent sur sa résolution. Dès 1916, D. KONIG proposait un théorème (1) permettant de l'aborder, et ensuite KUHN mit au point en 1954 une première solution : la méthode hongroise (2), qui fut améliorée et étendue par FORD et FULKERSON, FLOOD, VOTAW, ORDEN...

Ces mathématiciens nous ont, en définitive, fourni une méthode répétitive dont chaque itération est constituée d'une suite finie de calculs. Ces deux particularités permettaient alors d'envisager son automatisation intégrale. C'est cette adaptation à l'ordinateur et son utilisation dans le cadre d'une application pratique qui fait l'objet de cette étude.

Pour aboutir à la satisfaction de ces objectifs, il semble indispensable de définir tout d'abord ce qu'est la méthode hongroise et les problèmes d'affectation qu'elle permet de résoudre. Ceci sera l'objet du premier chapitre, au cours duquel nous préciserons également, en nous appuyant sur plusieurs exemples, les limites du champ d'application d'une telle méthode.

.../...

(1) Certains prétendent qu'ERGERSVARY avait mis en évidence ce théorème avant KONIG.

(2) En hommage à KONIG, qui était de nationalité hongroise.

Lors du deuxième chapitre, nous nous proposons de décrire la technique manuelle d'utilisation de la méthode hongroise et les variantes les plus remarquables que l'on peut introduire dans son cheminement. Nous insisterons également sur la fiabilité qu'il faut témoigner vis à vis de ces différents procédés de résolution, en particulier dans l'optique de leur utilisation sur calculateur.

Au début du chapitre 3, nous développerons les transformations que nous avons dû apporter à la méthode de KUHN, en vue de son adaptation informatique pour la construction du "programme d'affectation A.H.". Ensuite, nous procéderons à la description de celui-ci et des caractéristiques de son exploitation sur ordinateur.

Enfin, dans le quatrième chapitre, il s'agira d'utiliser ce programme automatisant la méthode hongroise, dans le cadre de l'application concrète qui nous intéresse : l'affectation du personnel auxiliaire au Rectorat de l'Académie de Nancy.

C H A P I T R E 1
LA METHODE HONGROISE :
SA DEFINITION ET SES APPLICATIONS

Nous nous proposons, dans ce premier chapitre, de situer la méthode hongroise en tant qu'instrument mathématique susceptible de trouver son utilisation dans un domaine d'application qu'il s'agira de cerner.

Pour cela, nous allons suivre le plan suivant :

- I - Présentation et définition du problème de l'affectation :
 - 1. exposé général,
 - 2. exemple.
- II - Formulation mathématique du problème de l'affectation :
 - 1. sa présentation matricielle et la programmation linéaire,
 - 2. la théorie des graphes et la méthode hongroise.
- III - Problèmes résolubles par la méthode hongroise :
 - 1. les problèmes d'affectation,
 - 2. les programmes de transport.
- IV - Extensions du domaine d'utilisation de la méthode hongroise.

I - PRESENTATION ET DEFINITION DU PROBLEME DE L'AFECTATION :

1. Exposé général :

Soit deux suites $\{X\}$ et $\{Y\}$ ayant chacune le même nombre n d'éléments :

$$\begin{aligned}\{X\} &= X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n \\ \{Y\} &= Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_j, \dots, Y_n\end{aligned}$$

Tout élément de chaque suite est lié à, au moins, un élément de l'autre par un coefficient α_{ij} non négatif, qui mesure la "capacité" (ou le "coût") de l'élément X_i par rapport à l'élément Y_j .

Il va s'agir de lier chaque élément X_i de $\{X\}$ à un élément Y_j , et un seul, de la suite $\{Y\}$, c'est-à-dire à AFFECTER à chaque Y_j un élément X_i , de manière à obtenir une "capacité" totale optimale (ou un coût total optimal).

2. Exemple :

Une application très classique de cette technique combinatoire est donnée par le problème de l'affectation du personnel qualifié à différents postes de travail :

on dispose de n ouvriers et de n machines. Chaque ouvrier fait fonctionner l'une quelconque de ces machines, mais son efficacité varie suivant chacune d'entre elles. En effet, l'ouvrier X_i effectue son travail sur la machine Y_j avec un coût non négatif α_{ij} :

$$0 \leq \alpha_{ij} \leq \infty$$

Le coût infini : $\alpha_{ij} = \infty$ (ou blanc) signifie que l'affectation correspondante est impossible.

Le problème revient à affecter à chaque ouvrier X_i , une machine Y_j et une seule, et ceci tout en minimisant les coûts globaux.

REMARQUE : Telle qu'elle nous est proposée, la méthode hongroise ne résout le problème de l'affectation que si les deux suites $\{X\}$ et $\{Y\}$ ont le même nombre d'éléments. En réalité, ceci n'exclut pas les cas pratiques où cette identité n'existe pas, et il suffit, en fait, de compléter la plus petite suite du nombre d'éléments fictifs nécessaire, pour établir l'égalité entre le nombre d'éléments $\{X\}$ et le nombre d'éléments $\{Y\}$.

.../...

II - FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME DE L'AFFECTATION :

1. Sa représentation matricielle et la programmation linéaire :

La représentation matricielle va nous permettre une illustration aisée de ce problème :

L'ensemble des coûts α_{ij} , va constituer une matrice carrée de dimension $n \times n$. Soit $[\alpha_{ij}]$ cette matrice des coûts.

$[\alpha_{ij}]$

	machines				
	1	2..... j..... n			
ouvriers	1	α_{11}	α_{12}	α_{1j}	α_{1n}
	2	α_{21}			
	...				
	i	α_{i1}		α_{ij}	α_{in}
	...				
n	n	α_{n1}		α_{nj}	α_{nn}

Considérons une autre matrice $[\bar{x}_{ij}]$, celle-ci booléenne (dont les éléments ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1), de dimensions identiques, où l'on ait :

$$\sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} \leq 1, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

condition qui traduit le fait qu'une machine ne peut être occupée que par un seul ouvrier ;

$$\text{et } \sum_{i=1}^n \bar{x}_{ij} \leq 1, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n$$

exprimant qu'un ouvrier ne peut travailler que sur une seule machine.

.../...

Cette matrice que l'on associe à $[x_{ij}]$ est appelée matrice d'affectation ou matrice de permutation.

La variable booléenne x_{ij} prendra la valeur 1 si l'ouvrier i est affecté à la machine j , et la valeur 0 dans le cas contraire.

$$\text{Lorsque } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} = n,$$

l'affectation sera dite saturante : toutes les machines seront occupées par les n ouvriers.

Le problème revient à trouver une matrice d'affectation saturante, ou matrice de permutation optimale, pour laquelle le coût total :

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij} \quad \text{soit minimal.}$$

Cette manière de présenter le problème met immédiatement en évidence un programme linéaire. L'ensemble des variables étant constitué par les couples de valeurs (x_i, y_j) pour i et j variant de 1 à n , il s'agit de minimiser la fonction objectif Z sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n$$

les deux particularités suivantes :

- les contraintes sont des égalités,
- les valeurs des x_{ij} ne peuvent être que 0 ou 1, permettent d'introduire ce type d'applications dans la catégorie particulière des problèmes, connue sous le nom de programmation linéaire en nombres entiers.

.../...

L'algorithme du simplexe de Dantzig est donc applicable, mais le nombre de variables principales, de l'ordre de n^2 , aboutit à des tableaux de très grandes dimensions pour lesquels le traitement devient trop lourd. Pour cette raison, on préfère utiliser la méthode hongroise qui semble plus adaptée à la résolution de ce genre de problèmes.

REMARQUE : Dans le cas de l'utilisation de la programmation linéaire, lorsque les deux suites $\{X\}$ et $\{Y\}$ sont d'inégale importance, il n'est pas utile d'ajouter des éléments fictifs à l'un, pour rétablir leur égalité.

2. La théorie des graphes et la méthode hongroise.

La théorie des graphes va nous permettre de formuler le problème de l'affectation et de lui donner un autre mode de résolution.

A - La représentation sous forme de graphe

Si nous reprenons les deux suites initiales $\{X\}$ et $\{Y\}$, interprétons-les comme deux ensembles disjoints constitués d'un certain nombre de "sommets".

α_{ij} est le "coût" de liaison du sommet i de $\{X\}$ au sommet j de $\{Y\}$

Par convention, nous dirons que :

- si $\alpha_{ij} \neq \infty$ (ou blanc), il existe une application ou une relation possible entre i et j , autrement dit, il existe un arc (X_i, Y_j) ;

- si $\alpha_{ij} = \infty$ (ou blanc), il n'existe pas l'arc (X_i, Y_j) .

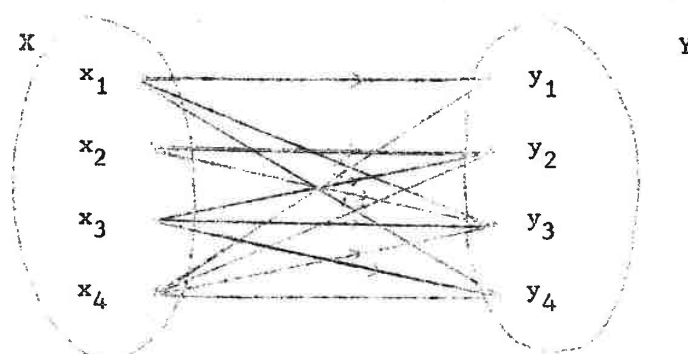
Il s'agit donc d'un graphe simple $G = (X, Y, \overline{\alpha})$ où l'on aura :

$Y_j = \bigcup X_i$ chaque fois que $\alpha_{ij} \neq \infty$ (ou blanc)

Par exemple, si $n = 4$ et si la matrice des coûts c_{ij} est la suivante :

		Y			
		1	2	3	4
X	1	3	4	1	5
	2	6	2	4	8
	3	7	4	3	1
	4	5	6	7	2

la représentation sagittale du graphe est alors :



telle que chaque arc supporte le coût c_{ij} correspondant.

La méthode hongroise va nous permettre d'extraire l'application bijective de l'ensemble X sur l'ensemble Y, qui minimisera le coût global.

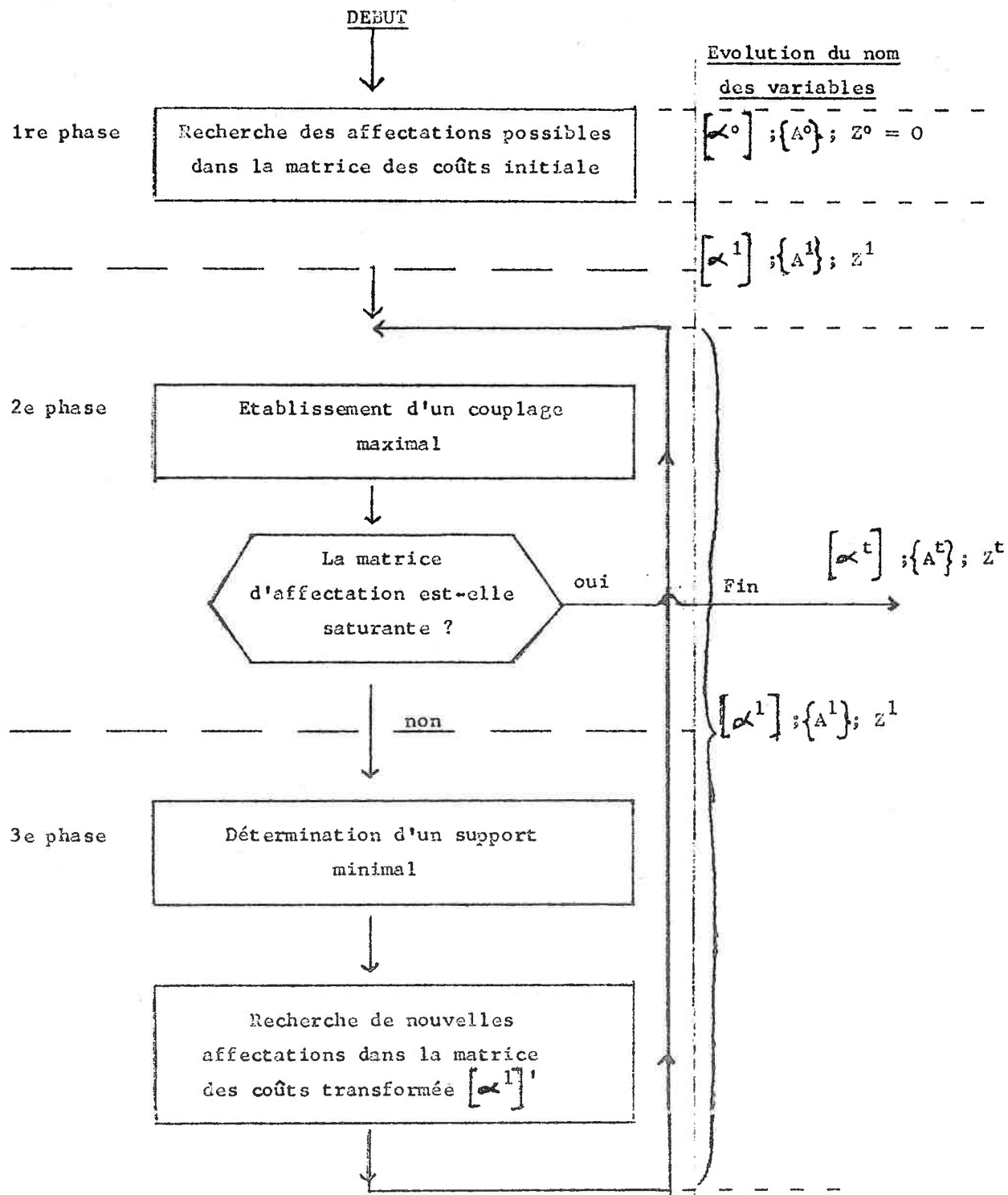
B - Fondements mathématiques de la méthode hongroise

La méthode hongroise est un processus itératif, s'appuyant sur un certain nombre de lemmes et théorèmes fondamentaux, dont nous allons expliquer l'enchaînement logique dans la suite des calculs, sans toutefois les démontrer (1).

La méthode hongroise peut se décomposer en trois phases : la première est relative à la recherche d'affectations "possibles", la seconde à la détermination d'un couplage maximal et la troisième, qui n'intervient que si la matrice d'affectation n'est pas saturée, à l'établissement d'un support minimal qui permet une transformation de la matrice des coûts de manière à obtenir de nouvelles affectations "possibles".

.../...

(1) Les démonstrations des théorèmes utilisés ne seront pas présentées dans ce travail. Elles sont toutes développées dans la plupart des ouvrages de recherche opérationnelle cités dans la bibliographie (en particulier A. KAUFMANN, C. BERGE).



.../...

Si $[C]$ est la matrice des coûts,
 $\{A\}$ l'ensemble des affectations (X_i, Y_j) réalisées dans $[C]$,
 Z le coût d'obtention de l'ensemble A : ou "coût d'affectation" de A ,
 l le numéro de la 1^{ière} itération,
 t le numéro de la t^{ière} itération pour laquelle la matrice d'affectation est saturante,
 $[C']$ la sous-matrice de $[C]$ dans laquelle on a supprimé toutes les rangées contenant des éléments nuls

1/ Première phase : Recherche des "affectations possibles" dans la matrice des coûts initiale.

Soit $[C]$ une matrice où apparaissent les différents coûts de l'affectation de n ouvriers sur n machines. On cherche à attribuer un poste Y_j à chaque ouvrier X_i , en minimisant le coût d'affectation global Z^t .

Cette minimisation ne sera obtenue que si les coûts correspondant aux affectations (X_i, Y_j) sont tels que leur somme soit minimale, c'est-à-dire qu'ils soient eux-mêmes les plus petits possible.

Pour satisfaire cet objectif, nous nous donnons une règle fondamentale, qui est :

de ne nous intéresser à une affectation (X_i, Y_j) , que si le coût c_{ij} est nul.

Aussi, appellerons-nous "affectation possible", toute affectation pour laquelle le coût sera nul.

Il s'agit donc de faire apparaître des zéros, c'est-à-dire des "affectations possibles" dans la matrice des coûts $[C]$.

Pour cela, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

L'addition ou la soustraction d'une même quantité à tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice des coûts, ne modifie pas la relation d'ordre existant entre les solutions saturantes du problème d'affectation correspondant, mais fait varier de la même quantité le coût d'affectation total de chacune de ces solutions.

.../...

En conséquence, pour mettre en évidence des "affectations possibles", il nous faut faire apparaître des éléments nuls dans la matrice des coûts. Nous pouvons opérer de la façon suivante dans chaque rangée (ligne ou colonne) :

- dans les lignes d'abord, on cherche le minimum $\bigvee_i$ de chacune d'entre elles, et on le retranche de l'ensemble de ses éléments :

$$\begin{aligned} \bigvee_i &= \min_j (\alpha_{ij}^0) &&) \\ \alpha_{ij}^{o1} &= \alpha_{ij}^0 - \bigvee_i &&) \text{ pour chaque } i \end{aligned}$$

- de même pour les colonnes, si μ_j est le minimum :

$$\begin{aligned} \mu_j &= \min_i (\alpha_{ij}^{o1}) = \min_i (\alpha_{ij}^0 - \bigvee_i) &&) \\ \alpha_{ij}^1 &= \alpha_{ij}^{o1} - \mu_j = \alpha_{ij}^0 - \bigvee_i - \mu_j &&) \text{ pour chaque } j \end{aligned}$$

Nous obtenons donc une matrice $[\alpha_{ij}^1]$, possédant au moins un élément nul par rangée.

Cet élément nul α_{ij}^1 rend possible l'affectation de l'ouvrier i sur la machine j . Ce résultat est devenu réalisable grâce à l'artifice qui vient d'être décrit.

$$\alpha_{ij}^1 = \alpha_{ij}^0 - (\bigvee_i + \mu_j) = 0$$

$(\bigvee_i + \mu_j)$ étant la quantité qu'il a été nécessaire de déduire de α_{ij}^0 pour obtenir une affectation possible (X_i, Y_j) ; on l'appellera le coût de l'affectation de X_i à Y_j .

Si la matrice $[\alpha_{ij}^1]$ permet de réaliser l'ensemble des affectations : $\{A^1\}$, le coût Z^1 d'obtention d'un tel ensemble sera :

$$Z^1 = \sum_{\{A^1\}} \alpha_{ij}^0 = \sum_j \mu_j + \sum_i \bigvee_i$$

.../...

- (X_5, Y_1) ; (X_2, Y_2) ; (X_1, Y_3) ; (X_3, Y_5) : 4 affectations sont réalisées, or il s'avère impossible d'améliorer ce résultat.

Il s'agit donc d'un couplage maximal : C

Ce couplage peut ne pas être unique, en effet :

(X_5, Y_1) ; (X_2, Y_2) ; (X_1, Y_4) ; (X_3, Y_5) est également un couplage maximal

Le couplage maximal C est caractérisé par le nombre $|C|$ d'arcs qui le constitue. $|C|$ est appelé "indice de quadrillage".

Dans les matrices de grandes dimensions, l'obtention du couplage maximal est une opération parfois très délicate, c'est pourquoi il est intéressant de s'aider de méthodes systématiques, qui seront présentées dans le second chapitre :

- la méthode de recherche exhaustive du couplage maximal,
- l'algorithme d'A. KAUFMANN,
- l'algorithme de FORD et FULKERSON.

Une fois ce couplage maximal obtenu, la question est de savoir si l'on est parvenu à réaliser une matrice d'affectation saturante. Pour cela, il suffit de comparer l'indice de quadrillage $|C|$ et le nombre n d'ouvriers (ou de machines).

En cas d'égalité, chaque ouvrier étant affecté à une machine, le problème s'avère résolu.

Ce sera dans le cas d'une inégalité entre ces deux valeurs, que nous passerons à la troisième phase.

3/ Troisième phase :

Si la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix}$ ne permet pas de réaliser un couplage maximal saturant, il faut la transformer de manière à augmenter le nombre des "affectations possibles".

Ceci fait l'objet de cette troisième phase qui se subdivise en deux parties : la première permet d'isoler une sous-matrice de $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix}$ dans laquelle on fait apparaître, lors de la seconde partie, de nouvelles "affectations possibles".

.../...

a) Recherche du support minimal :

Le support d'un graphe (X, Y, Γ) est tout ensemble $S \subset X \cup Y$, tel que tout arc (X_i, Y_j) ait au moins une de ses extrémités dans S .

Puisque la règle (page 11) nous contraint à n'accepter une affectation (X_i, Y_j) que lorsque le coût α_{ij} est nul, le support du graphe sera constitué par l'ensemble des sommets, c'est-à-dire des rangées, contenant tous les éléments nuls de la matrice des coûts.

Par exemple, pour la matrice :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
X_1			0	0	
X_2	0	0			
X_3					0
X_4					0
X_5	0				

On peut établir plusieurs supports :

1. X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)
 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) 5 arcs : c'est le support maximal qui consiste à recouvrir toutes les lignes (ou toutes les colonnes)
2. X_1, X_2, Y_1, Y_5)
 X_1, Y_1, Y_2, Y_5) 4 arcs
-

En définitive, on choisit un support qui contient le minimum de sommets, et on définit ainsi le support minimal S , auquel on associe la valeur $|S|$ appelée "indice de dissémination".

Il peut y avoir plusieurs supports minimaux.

.../...

C'est à ce niveau qu'intervient le théorème fondamental à partir duquel a été construite la méthode hongroise : le théorème de KÖNIG (1) :

Soit $G = (X, Y, T)$, avec $|X| \leq |Y|$. Le nombre minimal de sommets d'un support de G est égal au nombre maximal d'arcs d'un couplage de X dans Y , c'est-à-dire :

$$|S| = |C|.$$

Autrement dit, dès que l'on a obtenu un couplage maximal C dans notre matrice des coûts, il faut rechercher par une méthode quelconque un support S , tel que l'indice de dissémination soit égal à l'indice de quadrillage :

$$|S| = |C|$$

Pour trouver ce support minimal, on peut s'aider d'une méthode qui sera exposée dans le second chapitre. Il s'agit de l'algorithme hongrois (différent de la méthode hongroise qui est l'ensemble des calculs et qui inclut donc l'algorithme hongrois).

Après avoir obtenu sur la matrice $[a^1]$ un couplage maximal et ayant constaté que celui-ci n'était pas saturant, nous avons recherché un support minimal. Cette dernière opération nous permet de repérer toutes les rangées, en nombre minimum, contenant l'ensemble des zéros et par conséquent d'isoler une sous-matrice $[a^1]'$ dans laquelle aucun couplage n'est réalisable, c'est-à-dire dont tous les éléments sont non nuls.

b) Recherche de nouvelles affectations possibles dans la matrice des coûts transformée.

La tâche de cette deuxième partie est de faire apparaître de nouvelles "affectations possibles" dans $[a^1]'$. Pour cela, nous procédons comme dans la première phase, avec cependant une différence : c'est qu'il est inutile de faire apparaître de nouveaux zéros dans toutes les rangées de $[a^1]'$,

.../...

(1) Ce théorème est démontré dans KAUFMANN : "introduction à la combinatorique en vue de ses applications" (pages 492 - 493 ; DUNOD 1968)

une telle mesure aurait en effet pour conséquence d'augmenter sensiblement la probabilité d'obtenir un couplage saturant, mais en contrepartie, risquerait de grèver trop lourdement le coût de l'affectation et de ne pas permettre de s'assurer sa valeur minimale.

Pour cette raison, on se contente de prendre le minimum ε_{ij} de la sous-matrice $[\alpha^1]'$:

$$\varepsilon_{ij} = \min_{ij} (\alpha^1_{ij})'$$

et de le soustraire de tous ses éléments :

$$(\alpha^2_{ij})' = (\alpha^1_{ij})' - \varepsilon_{ij}$$

Cette opération ne fait augmenter le nombre d'affectations possibles que progressivement, mais nous assure une convergence vers la valeur minimale du coût global de l'affectation.

Cette recherche de nouvelles affectations possibles n'exclut pas le respect du lemme cité page 11. La matrice des coûts sur laquelle nous travaillons étant en réalité toute la matrice $[\alpha^1]$, il est indispensable, si l'on veut diminuer les coûts de la sous-matrice $[\alpha^1]'$, en déduisant le minimum ε_{ij} de tous les éléments de chacune de ses h lignes (ou de chacune de ses k colonnes), de le soustraire également des α^1_{ij} de ces h lignes (ou de ces k colonnes) n'appartenant pas à $[\alpha^1]'$. Mais d'autre part, comme on s'interdit de diminuer ces coefficients appartenant au support, il est nécessaire d'additionner ε_{ij} aux (n-k) colonnes correspondantes (ou aux (n-h) lignes).

La matrice $[\alpha^1]$ ainsi transformée devient $[\alpha^2]$. Cependant, ces opérations font évoluer le coût des affectations Z^1 , qui devient :

$$\begin{aligned} \text{puisque } h - (n-k) &= k - (n-h) \\ Z^2 &= Z^1 + (h + k - n)\varepsilon_{ij} \end{aligned}$$

En fait, le coût Z^2 sera toujours strictement supérieur à Z^1 , en effet :

$$\begin{aligned} \text{- par hypothèse} \quad \alpha_{ij} > 0 &\implies \varepsilon_{ij} > 0 \\ &\text{puisque'il n'y a pas d'éléments nuls dans } [\alpha^1_{ij}]'. \\ &\dots/\dots \end{aligned}$$

- le nombre de sommets $|S|$ contenu dans le support minimal est toujours inférieur à n . (l'indice de dissémination $|S|$ n'étant égal à n que lors de l'obtention d'un couplage saturant : $|C| = |S| = n$)

$$\begin{aligned} |S| < n &\implies (n - h) + (n - k) < n \\ &2n - h - k < n \\ \text{donc } h + k - n &> 0 \end{aligned}$$

Le retour au début de la seconde phase va alors permettre la recherche d'un couplage maximal dans la nouvelle matrice $[\alpha^2]$

On généralise alors la présentation de cette méthode hongroise (voir organigramme page 10) : à la 1^{ière} itération, on établit un couplage maximal sur la matrice $[\alpha^1]$.

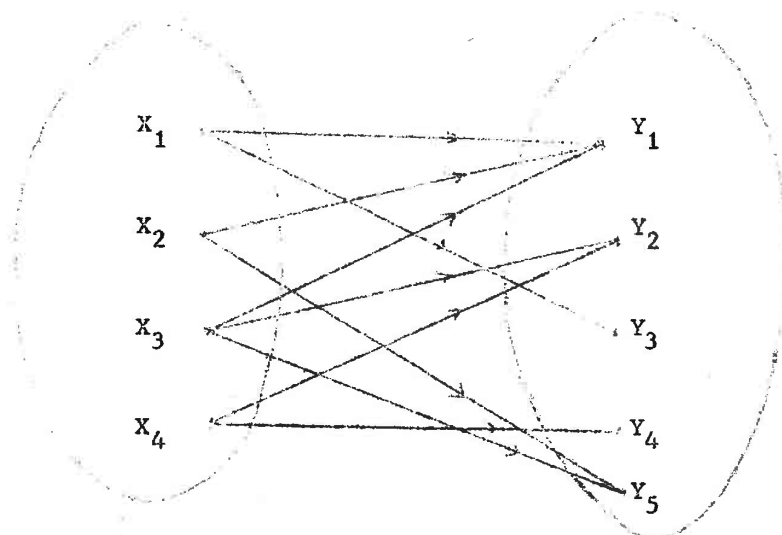
- si ce couplage est saturant, on a obtenu pour $t = 1$, une matrice $[\alpha^t]$ dans laquelle chaque machine j peut être conduite par un ouvrier i . Le coût global de cette affectation est Z^t .
- si ce couplage n'est pas saturant, on recherche un support minimal qui permet d'isoler une sous-matrice $[\alpha^1]$ dans laquelle on fait apparaître de nouvelles "affectations possibles". Cette transformation de $[\alpha^1]$ donne naissance à la matrice $[\alpha^{1+1}]$ sur laquelle on applique l'itération $1 + 1$. Le coût d'affectation devient alors Z^{1+1} .

III - PROBLEMES RESOLUBLES PAR LA METHODE HONGROISE.

Très généralement, ils s'énoncent de la manière suivante : soient deux ensembles disjoints X et Y ; les éléments de X sont liés à ceux de Y par un coût.

On cherche à associer chaque élément d'un ensemble à un et un seul élément de l'autre, en minimisant le coût global.

A de tels problèmes, il est particulièrement commode de donner la représentation sagittale suivante :



Chaque arc de ce graphe étant valué, on peut lui associer une matrice regroupant ces valeurs : la matrice des coûts.

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
X_1	5		7		
X_2	3				6
X_3	4	3			2
X_4		5		3	

Ce sera le cas de deux grandes catégories d'applications :

- les problèmes d'affectation,
- les programmes de transport.

a) Les problèmes d'affectation :

L'exemple le plus couramment proposé est celui de l'affectation de personnel à différents postes de travail, cette application a déjà été citée et commentée au cours de ce chapitre.

.../...

D'autres problèmes, très proches de cet exemple type, trouvent leur solution dans l'utilisation de la méthode hongroise.

C'est le cas du problème que se pose le propriétaire d'une écurie de quatre chevaux, qui désire aligner ceux-ci au départ de quatre courses. Il souhaite lancer un cheval dans chaque course, sachant qu'un animal ne peut faire qu'une seule course durant la réunion. Connaissant les prix offerts aux vainqueurs, et la probabilité que chacun de ses chevaux a de gagner, comment doit-il répartir ceux-ci de façon à maximiser son espérance de gain total ? (voir page 32 - recherche d'une solution maximale).

Probabilité de gagner	Course N° 1	Course N° 2	Course N° 3	Course N° 4
Cheval A	0,40	0,50	0,60	0,60
Cheval B	0,10	0,20	0,30	0,20
Cheval C	0,25	0,30	0,20	0,40
Cheval D	0,15	0,20	0,20	0

PRIX	1 000,00 F	2 000,00 F	1 000,00 F	2 000,00 F
------	------------	------------	------------	------------

Il s'avère indispensable de transformer cette matrice de probabilités en une matrice d'espérance de gains, sur laquelle on appliquera la méthode hongroise. L'espérance de gain qu'a le propriétaire lorsqu'il lance un cheval dans une course est le montant du prix offert au vainqueur de cette course, pondéré par la probabilité que son cheval a de l'emporter.

On établit donc cette matrice et on cherche à affecter chaque animal à une course de manière à optimiser l'espérance de gain totale.

.../...

		Courses			
		1	2	3	4
Chevaux	A	400	1 000	600	1 200
	B	100	400	300	200
	C	250	300	200	400
	D	150	400	200	

Si le propriétaire choisit la distribution suivante :

Cheval A —> 4^e course
 " " B —> 3^e " "
 " " C —> 1^{re} " "
 " " D —> 2^e " "

son espérance de gain est alors maximale, et s'élève à 2 350 F..

=====

Les changements apportés aux données de ce problème sont évidents et très simples à réaliser. Cependant, pour d'autres problèmes, la formulation de départ est telle que leur résolution nécessite des transformations plus profondes des données. C'est le cas de l'exemple suivant, qui traite du choix de la résidence des équipages d'avions de ligne.

=====

Une compagnie de navigation aérienne va desservir deux villes A et B suivant des horaires qui lui sont imposés par une étude de marché faite auprès de la clientèle. Le temps de parcours de A à B est de 6 heures.

<u>Départ de A</u>				<u>Départ de B</u>			
<u>Arrivée en B</u>				<u>Arrivée en A</u>			
Vol "1"	4 h	—>	10 h	Vol "a"	5 h	—>	11 h
Vol "2"	7 h	—>	13 h	Vol "b"	9 h	—>	15 h
Vol "3"	9 h	—>	15 h	Vol "c"	14 h	—>	20 h
Vol "4"	17 h	—>	23 h	Vol "d"	18 h	—>	24 h
				.../...			

La direction de cette compagnie, pour des raisons financières et sociales, cherche à recruter (ou à loger) des équipages, soit en A, soit en B et à leur attribuer un trajet aller-retour, tel que le temps total d'absence hors de leur domicile soit minimum.

En outre, une contrainte de sécurité est à observer : le repos des pilotes et le contrôle des appareils exigent au moins huit heures d'attente entre deux vols.

Notre but étant de minimiser un temps d'absence, nous allons faire apparaître dans deux tableaux, un pour chacune des deux villes, le temps passé par les équipages à l'extérieur de leur domicile.

Si les équipages sont logés en A :

	a	b	c	d
1	31	35	16	20
2	28	32	13	17
3	26	30	35	15
4	18	22	27	31

[A] =

Si les équipages sont logés en B :

	a	b	c	d
1	29	25	20	16
2	32	28	23	19
3	34	30	25	21
4	18	14	33	29

[B] =

Si le vol "a" est effectué après le vol "1", la durée totale d'absence des pilotes est de 31 heures.

Si au contraire, c'est le vol "1" qui suit le vol "a", cette durée n'est plus que de 29 heures.

Devant cette alternative, il semble évident que la seconde solution sera choisie puisqu'elle n'exige que 29 heures d'absence.

En suivant le même raisonnement pour toutes les combinaisons de vols, on établit un troisième tableau dont chaque élément sera le plus petit des nombres occupant la case correspondante dans les deux tableaux précédents.

.../...

Ce dernier tableau constitue la matrice des temps d'absence.

$M =$

	a	b	c	d
1	29	25	20	20
2	28	28	23	~~21~~
3	26	30	25	21
4	~~29~~	22	27	29

Elle a été construite en tenant compte de la contrainte de sécurité de huit heures, c'est-à-dire que, la durée du trajet aller-retour étant de 12 heures, le temps d'absence minimum doit être de 20 heures. C'est la raison qui nous a conduit en particulier, à éliminer les éléments (2, d) et (4, a), les coefficients correspondants des matrices A et B étant inférieurs à 20 heures ; ce qui signifie que les vols "2" et "4" ne peuvent ni être suivis, ni être précédés respectivement par les vols "d" et "a".

C'est sur cette matrice des temps d'absence, que nous appliquons la méthode hongroise, de manière à associer à chaque vol aller provenant de A (ou B), un vol retour partant de B (ou A).

La solution optimale s'obtient aisément, elle apparaît dans la matrice booléenne suivante :

	a	b	c	d
1	0	0	0	1
2	0	0	1	~~0~~
3	1	0	0	0
4	~~0~~	1	0	0

Le vol "3" est donc associé au vol "a" et le temps d'absence est de 26 heures (M_{3a}).

Pour connaître la ville où résidera l'équipage, il suffit de comparer l'élément M_{3a} aux coefficients correspondants des matrices $[A]$ et $[B]$.

$$\text{Ici, } M_{3a} = A_{3a}$$

L'équipage stationnera donc en A et aura la charge du vol "3" à l'aller et du vol "a" au retour.

(Vouloir que les pilotes résident en B, entraînerait un accroissement du temps d'absence de 8 heures, puisque $B_{3a} = 34$).

En appliquant le même raisonnement pour les autres équipages, la compagnie aérienne aboutit au tableau suivant, qui lui indique où elle a intérêt à recruter (ou à loger) ses pilotes et comment répartir les vols entre ceux-ci :

N° de l'équipage	lieu de résidence	Vols		heure du départ	heure du retour	temps d'absence
		aller	retour			
1	A	vol "3"	vol "a"	9 h	11 h (lende- main)	26 h
2	A	vol "4"	vol "b"	17 h	15 h (")	22 h
3	B	vol "c"	vol "2"	14 h	13 h (")	23 h
4	A	vol "1"	vol "d"	4 h	24 h	20 h

Temps total d'absence = 91 heures

Remarque : On ne peut appliquer cette méthode, si l'on part d'une situation à priori, par exemple : deux équipages habitent en A et deux en B, quels vols devra-t-on leur affecter pour minimiser le temps d'absence de leur domicile ?

.../...

Seul le cas, où les quatre équipages résident dans la même ville, permet d'obtenir une solution optimale ; on applique alors la méthode hongroise sur une des deux matrices A ou B suivant que les pilotes sont déjà logés en A ou en B.

Si, par hypothèse, tous les pilotes résident dans la ville A, la solution dans ce cas particulier est double :

- (1,d) ; (2,a) ; (3,b) ; (4,c) .
- (1,d) ; (2,b) ; (3,a) ; (4,c) .

le temps total d'absence est de 105 heures.

b) Les programmes de transport :

également appelés problèmes de transport,
problèmes d'Hitchcock,
ou problèmes de distribution.

L'énoncé de ce type de problèmes est le suivant : Supposons qu'il y ait d'une part m sources $s_1, s_2, \dots, s_m$, chaque source s_i disposant de $a(s_i)$ unités d'un certain bien et, d'autre part p destinations $d_1, d_2, \dots, d_p$, nécessitant chacune $b(d_j)$ unités de ce bien. Le coût de transport de s_i à d_j est $\alpha(s_i, d_j)$. Il s'agit de minimiser ce coût de transport tout en satisfaisant la demande de chaque d_j .

On peut dresser le tableau suivant :

Matrice des coûts		destinations				quantités disponibles
		d_1	d_2	d_j	d_p	
sources	s_1					$a(s_1)$
	s_2					$a(s_2)$
	s_i			$\alpha(s_i, d_j)$		$a(s_i)$
	s_m					$a(s_m)$
Quantités demandées		$b(d_1)$	$b(d_2)$	$b(d_j)$	$b(d_p)$	

.../...

La solution du problème est donnée par l'ensemble des nombres x_{ij} , non négatifs, qui représentent les quantités de biens transportées de s_i à d_j , tels que :

$$\sum_{j=1}^P x_{ij} = a(s_i) \quad \text{pour chaque } i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b(d_j) \quad \text{pour chaque } j$$

$$\sum_{j=1}^P b(d_j) = \sum_{i=1}^m a(s_i)$$

Dans la plupart des cas cette égalité existe.

Dans le cas contraire, il suffirait d'ajouter les rangées fictives pour la réaliser.

Il s'agit de minimiser la fonction Z :

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^P x_{ij} \cdot c(s_i, d_j)$$

Sous cette forme, on reconnaît une généralisation du problème d'affectation pour lequel

$$\begin{aligned} a(s_i) &= 1 && \text{pour chaque } i \\ b(d_j) &= 1 && \text{pour chaque } j \end{aligned}$$

On dispose actuellement de plusieurs techniques pour la recherche d'une solution d'un tel problème, par exemple :

pour une solution optimale :

- méthode du coût marginal ou méthode stepping-stone de Dantzig ;

pour une solution approchée :

- méthode de Houthakker.

.../...

Cependant, la grande similitude qui existe entre les programmes de transport et les problèmes d'affectation, permet d'envisager l'utilisation de la méthode de résolution de ceux-ci pour trouver la solution optimale de ceux-là. Une telle adaptation va cependant nécessiter une transformation importante de la matrice des coûts.

C'est ainsi que l'on doit remplacer chaque ligne s_i par $a(s_i)$ lignes ayant toutes les mêmes coûts unitaires. De même pour chaque colonne d_j .

Chaque ligne de la nouvelle matrice est une source produisant une unité de bien, chaque colonne est une destination exigeant une unité de bien.

Un exemple va nous permettre d'illustrer la validité d'une telle utilisation de la méthode hongroise.

Soient trois usines A,B,et C, desquelles on achemine un certain produit vers quatre entrepôts W,X,Y,Z. Les quantités offertes et demandées d'une part et les coûts de transport, exprimés en francs par unité de produit d'autre part, apparaissent dans le tableau suivant :

		Destinations :				Quantité produite par chaque usine
		W	X	Y	Z	
<u>Origines :</u>	A	180	720	700	950	80
	B	470	400	770	730	80
	C	1 140	220	530	150	60
Quantité. demandée par chaque destination		20	80	60	60	

La transformation de la matrice admet ici une simplification, car toutes les quantités exigées par les entrepôts ou fournies par les usines, sont divisibles par 20. On construit donc une matrice des coûts de :

- 11 lignes : 4 venant de A
4 " " B
3 " " C

.../...

- 11 colonnes : 1 allant vers W
 4 " " X
 3 " " Y
 3 " " Z

dont chaque coefficient mesurant le coût de transport de telle origine vers telle destination est précisé par le tableau précédent.

On établit ainsi une matrice des coûts :

		X				Y			Z			
		W	X1	X2	X3	X4	Y1	Y2	Y3	Z1	Z2	Z3
A	A1	180	720	720	720	720	700	700	700	950	950	950
	A2	180	720	720	720	720	700	700	700	950	950	950
	A3	180	720	720	720	720	700	700	700	950	950	950
	A4	180	720	720	720	720	700	700	700	950	950	950
B	B1	470	400	400	400	400	770	770	770	730	730	730
	B2	470	400	400	400	400	770	770	770	730	730	730
	B3	470	400	400	400	400	770	770	770	730	730	730
	B4	470	400	400	400	400	770	770	770	730	730	730
C	C1	1140	220	220	220	220	530	530	530	150	150	150
	C2	1140	220	220	220	220	530	530	530	150	150	150
	C3	1140	220	220	220	220	530	530	530	150	150	150

à laquelle on va appliquer la méthode hongroise, ce qui va nous permettre d'affecter à chaque origine (A1...A4, B1...B4, C1...C3) une destination (W, X1...X4, Y1...Y3, Z1...Z3). Chaque affectation correspondant au transport de 20 unités du produit.

Cependant, la détermination du coût réel de l'affectation va exiger :

- soit de multiplier chaque coefficient, qui est un coût unitaire de transport, par 20 et de n'appliquer l'algorithme qu'après cette transformation ;

.../...

- soit, plus simplement, d'effectuer les calculs avec la matrice telle qu'elle est présentée ci-dessus, et lors de l'interprétation des résultats, de multiplier par 20 le coût d'affectation obtenu.

C'est cette seconde solution que nous avons choisie. Elle est rendue possible grâce à une extension du théorème de la page 11 que l'on pourrait énoncer ainsi :

"On ne change pas l'ensemble des solutions d'un problème d'affectation en multipliant ou en divisant par une même quantité positive tous les éléments de la matrice des coûts".

En effet :

multiplier ou diviser tous les éléments de la matrice par un même nombre positif, revient à faire varier tous ses coefficients dans un même sens et une même proportion, de sorte que l'on ne change pas leurs valeurs relatives et dans ces conditions, la relation d'ordre existant entre les solutions saturantes du problème d'affectation est toujours respectée. L'effet de cette opération sur tous les éléments de la matrice, est de multiplier ou de diviser par le même nombre, le coût global de l'ensemble des solutions.

La résolution du problème nous donne le résultat suivant :

A1	affecté	à	W
A2	"	"	Y1
A3	"	"	Y2
A4	"	"	Y3
B1	"	"	X1
B2	"	"	X2
B3	"	"	X3
B4	"	"	X4
C1	"	"	Z1
C2	"	"	Z2
C3	"	"	Z3

Coût = 4 330

.../...

C'est-à-dire, en vertu de ce qui a été dit plus haut, on peut faire apparaître la solution optimale dans le tableau suivant :

	Entrepôts				Quantités produites par chaque usine
	W	K	Y	Z	
Usines	A	20		60	80
	B		30		90
	C			60	60
Quantités demandées par chaque entrepôt		20	30	60	60

Le coût total du transport est $4\ 330 \times 20 = 86\ 600$ F.

L'application de la méthode hongroise aux programmes de transport peut aboutir à des matrices de dimensions très importantes, dans lesquelles les coefficients initiaux sont répétés un grand nombre de fois. Ce dernier caractère va, en fait, faciliter les calculs, car il permet l'apparition simultanée de plusieurs "affectations possibles" et assure ainsi une grande rapidité d'exécution à de tels problèmes.

Pour nous convaincre du réalisme de cette application, il nous est apparu souhaitable d'utiliser la méthode hongroise en vue de la résolution d'un programme de transport complexe, qui nous a demandé plus de deux heures et demie de calculs en appliquant la méthode manuelle du coût marginal.

Voici, dans le premier tableau, les données de ce problème, et dans le second, les résultats obtenus après utilisation de la méthode hongroise :

	Destination :												Quantité fournie	
	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	par chaque origine	
Origines	A	15	64	13	40	35	57	85	88	24	48	14	93	161
	B	16	26	19	31	58	62	16	54	5	76	95	4	133
	C	53	35	24	13	22	19	23	42	14	94	35	24	63
	D	36	62	15	6	20	66	32	59	91	11	95	93	91
	E	54	10	40	59	67	37	93	65	72	46	55	67	175
	F	59	11	35	95	35	88	45	77	20	57	38	43	49
	G	19	86	29	2	28	16	9	6	72	35	95	86	70
Quantité exigée par chaque destination		63	56	112	49	77	21	49	84	28	42	91	70	

.../...

Une adaptation du programme à ce genre de problèmes a permis de limiter le nombre de cartes à perforer qui, en l'occurrence est de deux fois le nombre de colonnes, soit 24 cartes.

Après 10 itérations et 0,350 minute de traitement, l'ordinateur a fourni les résultats suivants :

	Destinations											
	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Origines	A	63		7							91	161
	B						49		14			70 133
	C				49			14				63
	D			49						42		91
	E		56 98			21						175
	F			7		23				14		49
	G							70				70
		63	56	112	49	77	21	49	84	23	42	91 70

Coût total du transport : 13 069 F.

La méthode hongroise apparaît comme un instrument intéressant de résolution des problèmes de transport.

IV - EXTENSIONS DU DOMAINE D'UTILISATION DE LA METHODE HONGROISE.

Ce sont les exigences particulières du problème à traiter qui nécessitent une adaptation des données aux conditions requises pour l'application de la méthode hongroise.

1. Les matrices rectangulaires :

Comme nous l'avons déjà précisé (page 5), il est possible de travailler sur des matrices de coûts rectangulaires, en complétant la suite la plus petite par autant de rangées nécessaires pour établir l'égalité entre les deux ensembles $\{X\}$ et $\{Y\}$.

.../...

Après traitement, ces arcs fictifs permettent d'aboutir à une matrice carrée d'affectation saturante et de manière à ce qu'ils n'interviennent pas sur le coût d'affectation global, on donne une valeur nulle à tous leurs coefficients.

2. La recherche d'une solution maximale :

La méthode hongroise recherche le minimum de la fonction objectif.

Dans certains cas, au contraire, il est nécessaire de trouver la valeur maximale M d'un critère quelconque. Pour cela, on procède comme suit :

- Recherche parmi tous les éléments significatifs de $\left[\alpha_{ij} \right]$ de celui ayant la valeur maximale, soit ω_0 cet élément.

Pour éviter de parcourir toute la matrice à la recherche de ce maximum, on peut affecter à ω_0 une valeur quelconque, dont on est sûr qu'elle soit supérieure à tous les α_{ij}

$$\omega_0 \geq \max_{i,j} (\alpha_{ij})$$

On transforme $\left[\alpha_{ij} \right]$ en une matrice $\left[\alpha'_{ij} \right]$, telle que

$$\alpha'_{ij} = \omega_0 - \alpha_{ij} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n$$

On applique la méthode hongroise sur $\left[\alpha'_{ij} \right]$, et la valeur de M sera donnée par :

$$M = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x_{ij} \\ M = \omega_0 * n - \sum_i \sum_j \alpha'_{ij} x_{ij}$$

3. Les coefficients négatifs :

Lors de la présentation de la méthode hongroise, il a été dit que tous les éléments α_{ij} de la matrice des coûts devraient être positifs ou nuls

$$0 \leq \alpha_{ij} < \infty$$

.../...

Cependant, certains problèmes réels peuvent faire intervenir des éléments négatifs.

Parfois, ceux-ci sont disséminés dans la matrice parmi des coefficients positifs ; on prend alors dans chaque rangée, l'élément négatif le plus grand en valeur absolue et on additionne celle-ci à tous les coefficients de la rangée (ligne ou colonne).

D'autres fois, la matrice ne contient que des éléments négatifs, on l'appelle alors "matrice des regrets" et le plus généralement, on cherche à minimiser ces "regrets". Dans ce cas, on a le choix entre deux manières d'opérer :

- On repère l'élément le plus grand en valeur absolue et on ajoute celle-ci à tous les coefficients de la matrice, puis on recherche la solution maximale du tableau ainsi obtenu ;
- On multiplie tous les coefficients par (-1) et on cherche le minimum de la nouvelle matrice qui ne contient alors que des éléments positifs.

.../...

C H A P I T R E 2

UNE TECHNIQUE D'UTILISATION DE LA METHODE HONGROISE

Dans ce second chapitre, nous allons présenter la technique manuelle d'application de la méthode hongroise, telle qu'elle est décrite dans la plupart des ouvrages de recherche opérationnelle.

Cette présentation nous semble nécessaire pour deux raisons :

- d'une part parcequ'elle permet de mieux comprendre la méthode, ce sont, en effet, ces exposés qui nous ont initiés au modèle et qui ont servi de base à l'élaboration du programme de traitement sur ordinateur,
 - d'autre part, parcequ'elle nous donne le moyen d'insister sur certains points, à notre avis importants, qui ont été omis chez certains auteurs ou présentés d'une manière peu satisfaisante chez d'autres.
- Nous nous proposons donc :
- dans un premier paragraphe, de décrire le déroulement de la méthode comme il est présenté dans la plupart des manuels,
 - dans le deuxième paragraphe, d'exposer les difficultés que l'on peut rencontrer lors de la recherche du couplage maximal,
 - et enfin, de relier la logique de cette technique d'utilisation avec celle exposée lors du premier chapitre.

I - DESCRIPTION DE LA METHODE HONGROISE

La technique d'application de la méthode hongroise est découpée généralement en 5 étapes principales. Nous allons procéder à l'énoncé de chacune d'elles en l'illustrant d'un exemple qui aidera à sa compréhension.

On dispose d'une matrice des coûts, de dimensions $n \times n$, dans laquelle on doit déterminer une affectation saturante de coût minimal.

Si $n = 6$

$$\begin{bmatrix} C_0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline a & 15 & 13 & 7 & 3 & 12 & 9 \\ b & 14 & 15 & 8 & 2 & 6 & 13 \\ c & 9 & 11 & 12 & 16 & 18 & 7 \\ d & 0 & 5 & 11 & 0 & 9 & 12 \\ e & 4 & 23 & 4 & 15 & 7 & 13 \\ f & 14 & 17 & 22 & 6 & 12 & 5 \end{array}$$

1re étape : Obtention des zéros dans les rangées

Dans chaque rangée ne disposant pas d'au moins un élément nul,

- repérer le coefficient minimum
- le soustraire de tous les éléments de cette rangée.

Cette opération réalisée, chacune des lignes et des colonnes de la matrice des coûts doit posséder au moins un élément nul.

Dans notre exemple, la matrice devient :

Après obtention des zéros

dans les lignes :

$$[L^0] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 12 & 10 & 4 & 0 & 9 & 6 & - 3 \\ \hline 12 & 13 & 6 & 0 & 4 & 11 & - 2 \\ \hline 2 & 4 & 5 & 9 & 11 & 0 & - 7 \\ \hline 0 & 3 & 9 & 0 & 7 & 10 & \\ \hline 0 & 19 & 0 & 11 & 3 & 9 & - 4 \\ \hline 9 & 12 & 17 & 3 & 7 & 0 & - 5 \\ \hline \end{array}$$

Après obtention des zéros

dans les colonnes :

$$[L^1] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 12 & 7 & 4 & 0 & 6 & 6 & \\ \hline 12 & 10 & 6 & 0 & 1 & 11 & \\ \hline 2 & 1 & 5 & 9 & 8 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 9 & 0 & 4 & 10 & \\ \hline 0 & 16 & 0 & 11 & 0 & 9 & \\ \hline 9 & 9 & 17 & 3 & 4 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

→ -3 -3

2e étape : Recherche d'une solution

Seuls les éléments nuls permettent de réaliser une affectation de valeur nulle.

Pour obtenir une telle affectation de valeur nulle :

- rechercher une des lignes contenant le moins d'éléments nuls
- encadrer l'un de ces zéros (1)
- puis, barrer tous les zéros contenus dans la même ligne et la même colonne que le zéro encadré.

On procède ainsi sur toutes les lignes, en choisissant d'abord celles qui ont le moins de zéros non barrés.

Quand on ne peut plus encadrer de zéros, on passe à l'étape suivante.

- (1) Par convention, on admettra qu'un zéro encadré correspond à une affectation. Tous ces zéros encadrés doivent être indépendants, c'est à dire que deux ou plusieurs d'entre eux ne peuvent appartenir à une même rangée.

.../...

A droite de la matrice $[L^1]$, le tableau donne l'évolution du nombre de zéros non barrés après chaque affectation.

	1	2	3	4	5	6			
a	12	7	4	0	6	6			
b	12	10	6	X	1	11			
c	2	1	5	9	8	0			
d	0	X	9	X	4	10			
e	X	16	0	11	X	9			
f	9	9	17	3	4	X			

Initia- lement	Après l'affectation de la ligne :			
	a	c	d	e
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
3	2	2	0	0
3	3	3	2	0
1	1	0	0	0

3e étape : Recherche d'un couplage maximal

C'est une phase essentielle de la méthode hongroise, et cependant chez de nombreux auteurs, elle est soit totalement ignorée, soit insuffisamment efficace.

Lors du prochain paragraphe nous insisterons sur le caractère indispensable de cette recherche et nous ferons une étude critique des méthodes qui permettent d'aboutir à un couplage maximal.

Il existe, en effet, trois processus pour réaliser un tel résultat :

- 1 - l'algorithme d'A. KAUFMANN (1)
- 2 - la méthode de recherche exhaustive du couplage maximal
- 3 - l'algorithme de Ford et Fulkerson

(1) Voir page 487 : "Introduction à la combinatoire en vue de ses applications"
André Kaufmann DUNOD (PARIS 1968)

1. L'algorithme d'A. Kaufmann

"- marquer d'une croix toute ligne et toute colonne contenant un zéro encadré.

- Dans toute colonne non marquée chercher un zéro non encadré qui soit dans une ligne marquée.

- A partir du zéro encadré de cette ligne marquée, chercher un zéro dans une ligne non marquée auquel cas on a trouvé un cheminement permettant d'augmenter le nombre de zéros encadrés. Sinon rechercher un zéro non encadré dans une ligne marquée tel que dans cette ligne il y ait un zéro encadré.

- A partir du zéro encadré de cette ligne marquée, chercher

Si par cette procédure on ne peut plus trouver une colonne à partir de laquelle un cheminement permettrait d'augmenter le nombre de zéros encadrés, on a trouvé un couplage maximal".

Reproduisons la matrice $[A]$ de notre exemple en ne faisant apparaître que les éléments nuls et appliquons cet algorithme :

	1	2	3	4	5	6	
a				0			x
b				0			
c						0	x
d	0	0		0			x
e	0		0		0		x
f						0	
	x	↑	↓	x	↑	x	

.../...

4/ La colonne 2 n'est pas marquée d'une croix et le zéro (d, 2) n'est pas encadré. Le zéro encadré de la ligne d se trouve en colonne 1.

Dans cette colonne, en ligne e nous disposons d'un élément nul non encadré, auquel correspond le zéro encadré de la case (e, 3).

La colonne 3 ne contient pas de zéro non encadré, nous ne pouvons donc aller plus loin.

5/ La colonne 5 n'est également pas marquée. Au zéro (e, 5) correspond la ligne e et le zéro encadré de la colonne 3. Comme précédemment, cette colonne ne contenant pas de zéro encadré, il nous est impossible de poursuivre notre cheminement.

Le couplage est donc maximal.

2. La méthode de recherche exhaustive du couplage maximal

Cette méthode empirique exclut la 2e étape : "recherche d'une solution", son principe étant précisément de rechercher toutes les solutions par un balayage systématique de l'ensemble de la matrice. Cette dernière caractéristique rend évidemment impossible dans la plupart des cas une exploration manuelle et exige l'utilisation d'un ordinateur.

Les avantages et les inconvénients de la méthode seront étudiés plus tard, en attendant nous allons effectuer une présentation analytique de la procédure que nous avons utilisée.

Elle nécessite d'associer à la matrice des coûts, une "matrice de marquage" où seules les cases correspondant aux zéros de la matrice des coûts, contiendront des éléments significatifs (1). Assignons la valeur "1" à chacune de ces cases.

(1) Ces éléments sont choisis non pas en fonction de leur valeur intrinsèque, mais comme des images représentatives d'un état dans la "matrice de marquage".

C'est ainsi, qu'à la place de 1, 2, 3, 4 nous aurions pu préférer les caractères A, B, C, D.

.../...

En commençant par la première ligne, et ensuite pour toutes les lignes de la matrice en les prenant successivement et dans l'ordre :

- (a) {
- repérer dans la ligne k , la première case marquée "1", soit $(k, 1)$ cette case. La marquer "2", on réalise ainsi une affectation de k à 1.
 - marquer "4" tous les éléments unité de cette ligne, compris entre $(k, 1 + 1)$ et (k, n)
 - marquer "3" tous ceux de la colonne correspondante compris entre $(k + 1, 1)$ et $(n, 1)$

Lors de la première itération, cette phase terminée, toutes les cases significatives de la matrice de marquage doivent contenir un nombre différent de 1.

- (b) {
- dénombrer les cases marquées "2"
 - relever les affectations $(k, 1)$ correspondantes.

(c) En se déplaçant dans la matrice, ligne par ligne, de gauche à droite et de bas en haut, rechercher les cases marquées "2" jusqu'à la rencontre de la première case marquée "4".

- à chaque case marquée "2", lui affecter la valeur "1" ainsi qu'aux cases marquées "3" de la même colonne ;

- à la case marquée "4", la marquer "2" et assigner la valeur "3" aux cases marquées "1" de la colonne correspondante.

Si la case marquée "4", se trouve à la i ème ligne, répéter les phases (a) , (b) et (c) à partir de la ligne $i + 1$.

A la phase (b) , ne relever les affectations que si leur nombre est supérieur à celui des passages précédents.

.../...

On stoppe le processus, lorsque pour la dernière case marquée "4", située la plus en haut et à droite de la matrice, on a procédé à la recherche exhaustive des affectations (c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus de case marquée "4").

Les affectations notées durant la phase (b), nous fournissent alors un couplage maximal.

Reprenons notre exemple et associons à $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, une "matrice de marquage" (Figure 1).

L'application de la phase (a) nous donne la matrice de droite :

	1	2	3	4	5	6
a				1		
b				1		
c						1
d	1	1		1		
e	1		1		1	
f						1

Figure 1

	1	2	3	4	5	6
a				2		
b				3		
c						2
d	2	4		3		
e	3		2		4	
f						3

Figure 2

On compte 4 cases marquées "2", correspondant aux affectations :

(a, 4) ; (c, 6) ; (d, 1) ; (e, 3)

.../...

La phase (c) transforme la matrice comme le montre la figure 3 :

	1	2	3	4	5	6
a				2		
b				3		
c						2
d	2	4		3		
e	3		1		2	
f						3

Figure 3

Nous abordons la seconde itération, la ligne f ne contenant aucun "1", et le nombre d'affectations réalisées n'ayant pas varié, on passe alors à la phase (c) dont résulte la matrice de la figure 4.

	1	2	3	4	5	6
a				2		
b				3		
c						2
d	1	2		3		
e	1		1		1	
f						3

Figure 4

	1	2	3	4	5	6
a				2		
b				3		
c						2
d	1	2		3		
e	2		4		4	
f						3

Figure 5

.../...

	1	2	3	4	5	6
a				2		
b				3		
c						2
d	1	2		3		
e	1		2		4	
f						3

Figure 6

	1	2	3	4	5	6
a				2		
b				3		
c						2
d	1	2		3		
e	1		1		2	
f						3

Figure 7

Les 3 itérations suivantes donnent respectivement lieu à la construction des matrices des figures 5, 6 et 7, le nombre d'affectation réalisées ne variant pas et étant toujours 4.

Dans la figure 7, il n'y a plus de cases marquées "4", la procédure est donc terminée.

L'indice de quadrillage $|c|$ de la matrice est 4.

En réalité cette méthode ne recherche pas toutes les combinaisons possibles dans la matrice. C'est ainsi que dans notre exemple, au cours des 5 itérations, les affectations successivement réalisées ont été les suivantes :

itération 1 : (a, 4) ; (c, 6) ; (d, 1) ; (e, 3)	figure 2
itération 2 : (a, 4) ; (c, 6) ; (d, 1) ; (e, 5)	figure 3
itération 3 : (a, 4) ; (c, 6) ; (d, 2) ; (e, 1)	figure 5
itération 4 : (a, 4) ; (c, 6) ; (d, 2) ; (e, 3)	figure 6
itération 5 : (a, 4) ; (c, 6) ; (d, 2) ; (e, 5)	figure 7

Or nous aurions pu en effectuer de nombreuses autres presque identiques, dans lesquelles nous substituons (b, 4) à (a, 4) ou encore (f, 6) à (c, 6) ...

.../...

Cependant, il est certain qu'en faisant correspondre des affectations aux cases marquées "3", il est impossible d'obtenir un indice de quadrillage supérieur. Il peut au mieux être identique, c'est le cas lorsqu'on affecte b à 4 ou f à 6 ; mais il peut être également inférieur par exemple lorsqu'on réalise l'affectation (d , 4).

Le couplage obtenu est donc maximal.

3. L'algorithme de Ford et Fulkerson

Après la deuxième étape, l'ensemble des zéros encadrés constitue une solution réalisable. Pour ce nouvel algorithme, il est nécessaire d'indiquer de 1 à n chacune des lignes et chacune des colonnes.

- (a) - marquer d'un tiret par exemple toutes les lignes non affectées
- (b) - choisir la $i^{\text{ème}}$ ligne marquée et y rechercher tous les zéros barrés. Marquer pour chacun d'entre eux, la colonne correspondante, du numéro de la ligne examinée, ici i.

Répéter cette phase pour toutes les lignes marquées. Il ne faut jamais marquer de nouveau une colonne déjà marquée.

- (c) - dans chaque colonne j marquée, rechercher, s'il existe, le zéro encadré et marquer la ligne correspondante de l'indice j de la colonne étudiée.

Recommencer les phases (b) et (c) respectivement pour les lignes et les colonnes marquées non encore examinées.

Le processus se poursuit alternativement à partir des lignes et à partir des colonnes jusqu'au moment où :

1/ soit qu'il n'est plus possible de poursuivre le marquage, toutes les rangées marquées ayant été examinées. Dans ce cas, le couplage est maximal.

.../...

2/ soit qu'une colonne marquée ne contient aucun zéro encadré, dans ce cas il est possible d'améliorer le couplage de la manière suivante :

λ - soit k la marque de cette colonne,
affecter celle-ci à la k ème ligne

λ - soit h la marque de la ligne k ,
supprimer l'affectation (k, h) .

Puis on recommence en λ avec la colonne h .

On aboutit finalement à une ligne marquée d'un tiret. Le cheminement s'arrête, on a alors augmenté l'indice de quadrillage d'une unité.

Répéter l'algorithme sur la nouvelle affectation réalisée.

Reprenons la matrice $[\lambda^1]$

$[\lambda^1] =$

Indices		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
		1	2	3	4	5	6	
(1)	a	12	7	4	0	6	6	(4)
(2)	b	12	10	6	~~0~~	1	11	
(3)	c	2	1	5	9	8	0	(6)
(4)	d	0	~~0~~	9	~~0~~	4	10	
(5)	e	~~0~~	16	0	11	~~0~~	9	
(6)	f	9	9	17	3	4	~~0~~	

(2) (6)

On marque les lignes b et f.

La ligne b possède un zéro barré dans la 4e colonne, on marque celle-ci de l'indice (2) de la ligne b.

.../...

La ligne f possède un zéro barré dans la colonne 6, on marque celle-ci de l'indice (6).

Les 4e et 6e colonnes contiennent un zéro encadré respectivement en ligne a, que l'on marque de l'indice (4) et en ligne c, que l'on marque (6).

Ces deux dernières lignes ne contiennent aucun zéro barré, le marquage n'est plus possible et on ne peut pas améliorer le nombre d'affectations.

Le couplage maximal est donc réalisé.

Quelque soit la méthode utilisée, à la fin de cette recherche, comparer l'indice de quadrillage maximal à n , dimension de la matrice des coûts. Une égalité signifierait qu'une affectation saturante a été trouvée, le problème serait alors terminé.

Dans notre exemple, ce n'est pas le cas puisque :

$$\begin{aligned}n &= 6 \\ |c| &= 4\end{aligned}$$

4e étape : Détermination d'un support minimal

On recherche les lignes et les colonnes, en nombre minimal, contenant tous les éléments nuls. Pour cela on applique pas à pas, l'algorithme hongrois qui se déroule comme suit :

(a) marquer d'une croix toutes les lignes ne contenant aucun zéro encadré ;

(b) marquer toute colonne qui a un zéro barré dans une ou plusieurs lignes marquées

(c) marquer toute ligne qui a un zéro encadré dans une colonne marquée

répéter les phases (b) et (c) jusqu'à ce que le marquage de nouvelles rangées ne soit plus possible.

.../...

Soit la matrice $[A]$ où apparaissent les affectations correspondant à un couplage maximal.

$[A] =$

	1	2	3	4	5	6	
a	12	7	4	0	6	6	x
b	12	10	6	0	1	11	x
c	2	1	5	9	8	0	x
d	0	0	9	~~0~~	4	10	
e	0	16	0	11	~~0~~	9	
f	9	9	17	3	4	~~0~~	x
				x		x	

Figure 3

- (a) On marque tout d'abord les lignes b et f
- (b) On marque également la colonne 4 qui a un zéro barré dans la ligne b
6 qui a un zéro barré dans la ligne f
- (c) les lignes a et c, contenant un zéro encadré respectivement dans les colonnes 4 et 6, sont marquées.

Ces deux lignes a et c, ne possèdent pas de zéro barré, le marquage est donc terminé.

Le support minimal est ainsi repéré. Pour le mettre en évidence il suffit de tracer un trait pointillé sur toutes les lignes non marquées et sur toutes les colonnes marquées (cf figure 3).

On passe ensuite à la 5e étape.

5e étape : Réduction de la matrice des coûts

Prendre le plus petit élément de la sous matrice constituée par les cases non traversées d'un trait.

- le soustraire des cases qui ne sont traversées par aucun trait,
 - l'ajouter à celles se trouvant à l'intersection de deux traits.
- Laisser le reste invariable.

.../...

Appliquons cette procédure à la matrice de la figure 8.

Le minimum de valeur 1 apparaît dans les cases (c, 2) ou (b, 5).

La réduction de la matrice des coûts donne le résultat suivant :

$\begin{bmatrix} L^2 \end{bmatrix} =$

	1	2	3	4	5	6
a	11	6	3	0	5	6
b	11	9	5	~~0~~	0	11
c	1	0	4	9	7	~~0~~
d	0	~~0~~	9	1	4	11
e	~~0~~	16	0	12	~~0~~	10
f	8	0	16	3	3	0

Figure 9

Ce tableau constitue la matrice des coûts transformée $\begin{bmatrix} L^2 \end{bmatrix}$ sur laquelle, au cours d'une nouvelle itération, on applique les opérations des étapes 2 à 5, et ce, tant que l'on n'aboutit pas à une solution optimale.

La "recherche d'une solution" (étape 2) nous assure les affectations qui apparaissent sur la figure 9, soient :

(a, 4) ; (b, 5) ; (c, 2) ; (d, 1) ; (e, 3) ; (f, 6)

L'indice de quadrillage est égal à 6, on a donc l'égalité :

$$|cl| = n$$

Le couplage ainsi obtenu est par conséquent optimum et constitue la solution, qui ici est unique, de notre problème d'affectation.

L'apparition d'affectations possibles a nécessité des transformations de la matrice des coûts. C'est en tenant compte de celles-ci que l'on peut déterminer le COUT de l'affectation optimale.

.../...

La solution la plus simple pour l'obtenir est de se référer à la matrice initiale $[A^0]$ et de faire la somme des coefficients des cases correspondant à celles contenant les zéros encadrés de la figure 9.

$$\text{COUT} = 0 + 11 + 4 + 3 + 6 + 5 = 29$$

L'affectation saturante a donc été obtenue au prix d'une réduction de la matrice des coûts de 29, ce qui correspond au coût total de l'affectation.

L'organisation générale de cette méthode est attribuée au mathématicien KUHN, des améliorations partielles y ayant été adaptées par la suite.

* * *

Une autre technique de résolution, la méthode de FLOOD, apparaît parfois dans les manuels de recherche opérationnelle, elle se présente ainsi en 4 étapes :

1ère étape : obtention des zéros dans les rangées de la matrice des coûts de dimensions $n \times n$ (idem méth. de KUHN)

2e étape : détermination d'un support minimal : trouver par tâtonnement le nombre minimal de rangées contenant tous les éléments nuls.

Soit $|S|$ l'indice de dissémination correspondant

$$\text{Si } |S| = n$$

alors nous avons un ensemble de n zéros indépendants, aller à la 4e étape ; sinon passer à l'étape suivante.

3e étape : Réduction de la matrice des coûts (idem méth. de KUHN)

Répéter les étapes 2 et 3 jusqu'à obtention d'un support optimal.

.../...

4e étape : Recherche d'un couplage saturant

Comme dans la méthode de Kuhn, on établit d'abord une solution puis on recherche un couplage maximal. Celui-ci constitue alors la solution optimale.

A notre avis, la faiblesse de cette technique se situe lors de la seconde étape pour la détermination d'un support minimal : procéder par tâtonnement devient rapidement inefficace dès que les dimensions de la matrice augmentent.

Cette remarque va dans le même sens que celle faite à propos des auteurs qui "court-circuitent" la recherche du couplage maximal. Nous allons nous expliquer à ce sujet, dans le paragraphe suivant.

II - PROBLEME QUE POSE LA RECHERCHE DU COUPLAGE MAXIMAL

Dans un premier temps nous allons apporter la preuve de l'existence de ce problème avant de présenter nos critiques sur ses méthodes de résolution.

1. Nécessité de cette recherche

Celle-ci tient au fait que sans un couplage maximal, on n'est pas certain d'aboutir à un support minimal et cela a pour conséquence de nous faire procéder à des itérations inutiles, voir même dans certains cas à nous empêcher d'aboutir à la solution optimale.

Illustrons cette réalité par un petit exemple très simple.

Soit une matrice des coûts où l'on ne fait apparaître que les éléments nuls correspondant à des affectations possibles. Cette matrice admet un couplage maximal tel que le montre la figure 10.

.../...

	1	2	3	4	5	6
a	0		X			
b		0				
c				X	0	X
d	X					
e			X	0		
f			0	X		

$|C| = 5$

Figure 10

$|C| = 4$

	1	2	3	4	5	6
a	0		X			
b		0				
c				0	X	X
d	X					
e			0	X		
f			X	X		

Figure 11

Une recherche irrationnelle du couplage peut nous amener à construire celui de la figure 11. Cette solution n'étant pas optimale, on essaie néanmoins de déterminer le support minimal correspondant avec l'aide de l'algorithme hongrois :

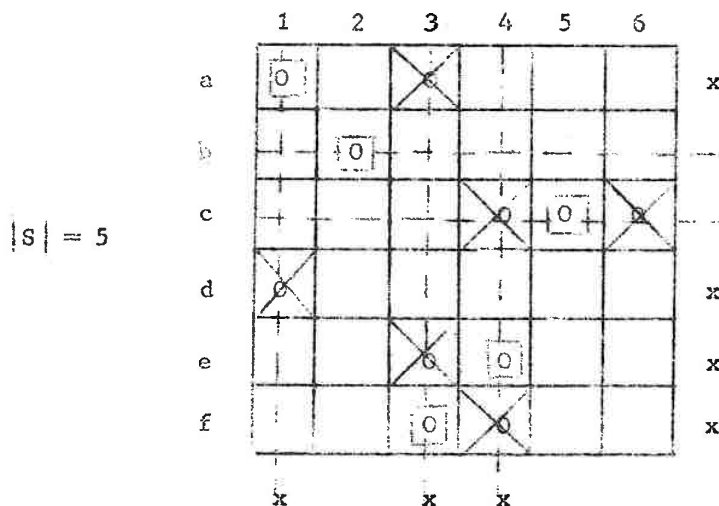
	1	2	3	4	5	6	
a	0		X				x
b		0					
c				0	X	X	x
d	X						x
e			0	X			x
f			X	X			x
	x		x	x	x		

$|S| = 6$

Manifestement, la réduction de la matrice des coûts (0) l'on soustrait aux éléments de la colonne 2, une valeur que l'on ajoute ensuite à ceux de la ligne b) n'améliore pas le tableau en vue de l'obtention d'une solution optimale, puisqu'en fait, cette opération ne fait pas apparaître de nouveaux éléments nuls dans les colonnes 5 ou 6 ; celles-ci étant actuellement en concurrence pour être affectées à la ligne c.

.../...

La figure suivante, réalisée à partir d'un couplage maximal nous permet d'apprécier la différence d'efficacité existant entre les deux supports.



Ce type de difficulté peut être aisément levé lorsque l'on pratique manuellement la méthode hongroise sur de petites matrices, la visualisation aidant considérablement pour l'obtention d'un couplage maximal. Il n'en est plus de même dès que l'on travaille sur des tableaux de grandes dimensions ou à l'aide d'un ordinateur. On doit en effet dans ces cas, abandonner toute approche visuelle et y substituer des opérations systématiques.

C'est ceci qui nous fait dire que parmi les méthodes de recherche d'un couplage maximal, certaines sont plus fiables que d'autres.

2. Critique des méthodes de recherche du couplage maximal

Ce sont les trois méthodes que nous avons présentées lors du précédent paragraphe. Auparavant nous voudrions rapidement apporter quelques précisions sur une quatrième méthode, la plus courante, semble-t-il, qui ignore cette recherche du couplage maximal.

A/ Pas de recherche du couplage maximal

Il est simple de montrer sur un exemple que la "Recherche d'une solution" telle qu'elle est présentée à la seconde étape de la méthode hongroise (affecter d'abord les lignes contenant le moins d'éléments nuls) est insuffisante pour aboutir à un couplage maximal.

Faisons apparaître dans le tableau de droite l'évolution du nombre de zéros non barrés, au fur et à mesure des nouvelles affectations :

Règle : lorsque deux lignes ont le même nombre d'éléments nuls non barrés, on commence à traiter celle ayant le plus petit indice.

									Ini- tia- lement	Après affectation de la ligne :						
	1	2	3	4	5	6	7	8		f	h	a	c	d	e	b
a		0		X					2	2	2	0	0	0	0	0
b				0				X	2	2	2	2	2	2	2	0
c		X	0						2	2	2	1	0	0	0	0
d	0	X	X						3	3	3	2	1	0	0	0
e			X		0				2	2	2	2	1	1	0	0
f							0		1	0	0	0	0	0	0	0
g	X				X	X	X		4	3	2	2	2	1	0	0
h						0			1	1	0	0	0	0	0	0

Figure 12

.../...

L'indice de quadrillage est 7, or cette matrice permet en fait d'établir des affectations saturantes, par exemple celle qui apparaît ici :

	1	2	3	4	5	6	7	8
a		0		0				
b				0				0
c		0	0					
d	0	0	0					
e			0		0			
f							0	
g	0				0	0	0	
h						0		

Figure 13

Cette méthode, en omettant la recherche du couplage maximal, conduit aux inconvénients que nous avons exposés précédemment.

B/ L'algorithme d'A. KAUFMANN

Appliquons le à la matrice de la figure 12 :

	1	2	3	4	5	6	7	8	
a		0		0					x
b				0				0	x
c		0	0						x
d	0	0	0						x
e			0		0				x
f							0		x
g	0				0	0	0		x
h						0			x
	x	x	x	x	x	x	x		

Colonne 3 non marquée

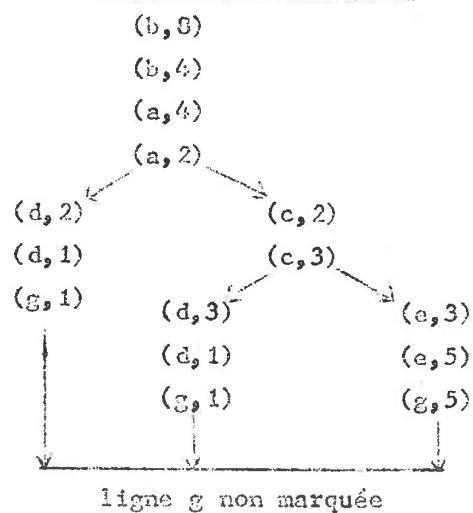


Figure 14

.../...

La colonne 2 n'est pas marquée. En (b,8), il existe un zéro barré correspondant au zéro encadré de la colonne 4. Celle-ci dispose d'un zéro barré sur la ligne a, correspondant au zéro encadré de la case (a,2). La colonne 2 contient deux zéros barrés :

- le zéro (d,2) appartient à la même ligne que le zéro encadré (d,1), lui-même est en rapport avec le zéro non barré (g,1) de la ligne non marquée g. (*)

- le zéro (c,2) est lié au zéro encadré (c,3). Dans la colonne 3 apparaissent deux zéros barrés :

- (d,3) qui correspond à (d,1), lui-même appartenant à la même colonne que le zéro non barré de la ligne g. (*)

- (e,3) de la même ligne que (e,5), celui-ci correspondant au zéro non barré (g,5) de la ligne g. (*)

Dans les trois cas marqués (*), on aboutit à un cheminement qui permet d'augmenter le nombre d'affectations réalisées. Si nous choisissons d'encadrer (g,1), nous obtenons le couplage maximal de la figure 13.

La progression que nous venons de suivre apparaît sur la figure 14, une matrice de plus grandes dimensions aurait abouti à une arborescence beaucoup plus complexe dont l'exploration deviendrait vite très délicate. En effet, chaque chemin à explorer correspond à un zéro barré dans une colonne marquée. Or le nombre de zéros barrés dans une colonne peut aller de 0 à $n - 1$ (cas des rangées fictives ajoutées, lorsque la matrice des coûts initiale est rectangulaire), l'approche du couplage maximal par l'algorithme d'A. KAUFMANN devient donc impossible manuellement. Sur ordinateur, sa programmation ne trouve pas de solution satisfaisante surtout quant au rangement en mémoire des chemins déjà explorés. Ceux-ci doivent être conservés, au cas où l'on trouverait un passage permettant l'augmentation du nombre des affectations, de manière à pouvoir "rebrousser chemin" pour réaliser l'amélioration à apporter au couplage.

C/ La méthode de recherche exhaustive du couplage maximal

C'est ce caractère exhaustif de la recherche qui nous permet d'apprécier la méthode :

a) ses inconvénients :

- elle est exclue de toute recherche manuelle,
- sa programmation sur ordinateur exige :
 - . beaucoup de place en mémoire centrale
 - . un temps d'exécution-machine important

La place mémoire supplémentaire nécessaire est fonction du nombre d'éléments nuls contenus dans la matrice, soit de quelques pour cent à 50-60 % de l'espace-mémoire utilisé par les autres méthodes.

Le temps d'exécution machine sur ordinateur 10070 de la CII est de :

- 0,213 mn pour un tableau 20 x 20 - coefficient de remplissage 60 %
- ≥ 10 mn pour une matrice 88 x 88 remplie à 30 % et contenant de nombreux zéros.

b) son avantage :

Elle fournit tous les couplages et aboutit certainement au couplage maximal.

Cet élément positif, permet malgré tout le passif de la méthode, de lui témoigner quelque intérêt, en particulier pour les problèmes de dimensions réduites. En effet, fournissant toutes les solutions optimales et, si on le désire, des solutions sous-optimales, elle va pouvoir aider l'utilisateur pour la résolution de son problème pratique, en lui procurant des données permettant d'établir la solidité et la sensibilité de l'affectation choisie par rapport aux autres solutions possibles.

.../...

D/ L'algorithme de FORD et FULKERSON

Utilisable manuellement et sur ordinateur, il conduit lui aussi de façon certaine au couplage maximal.

En outre, il s'avère très performant. Pour les mêmes matrices que celles employées pour la méthode précédente, les temps d'exécution sont tombés à :

- 0,066 mn pour la matrice 20 x 20 (60 %)
- 0,312 mn pour le tableau 32 x 32 (30 %)

Il faut remarquer que le principe sur lequel se base cette méthode est identique à celui utilisé par l'algorithme d'A. KAUFMANN. C'est la numérotation des lignes et des colonnes au fur et à mesure de l'étude d'un passage, qui avantage l'algorithme de FORD et FULKERSON, car elle permet de "baliser" le chemin que l'on suit et par conséquent d'éviter de parcourir plusieurs fois une même portion de ce chemin.

De ces trois méthodes, qui ont été programmées, seule la dernière peut être valablement retenue pour toutes les utilisations. Ceci n'exclut pas de tirer parti des deux autres soit à titre principal pour la résolution de problèmes adaptés, soit à titre secondaire par exemple, pour compléter une recherche effectuée par l'algorithme de FORD et FULKERSON, on peut employer la seconde méthode qui, à partir de la matrice de la dernière itération, peut nous fournir toutes les solutions optimales (ou sous-optimales).

C'est l'algorithme de FORD et FULKERSON qui a été intégré dans le 'programme d'affectation A.H.', que nous nous proposons de décrire dans le chapitre suivant.

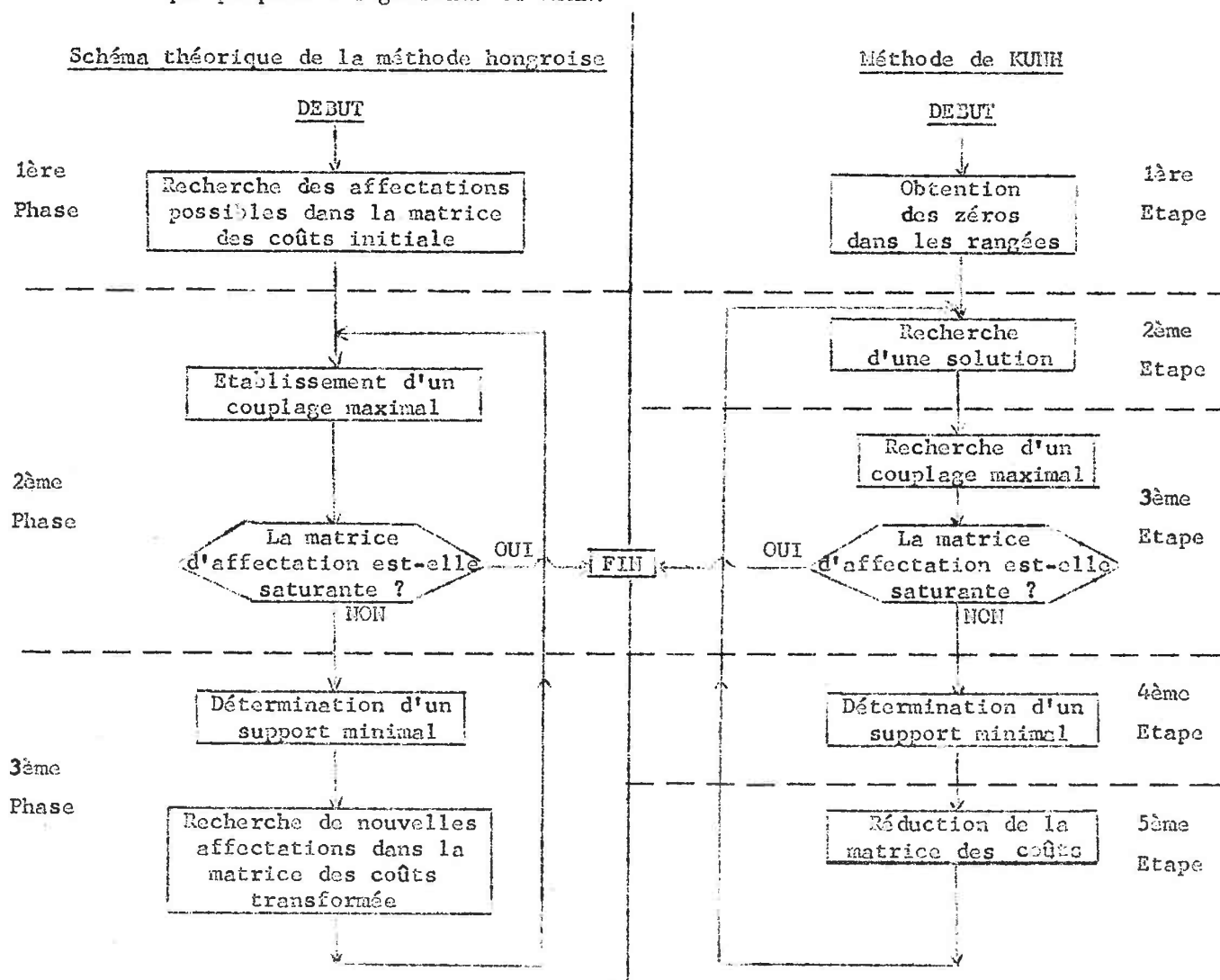
Auparavant, il s'agit de relier la logique de cette technique d'utilisation de la méthode hongroise à la formulation qui en a été donné lors du premier chapitre.

III - MISE EN PARALLELE DE LA FORMULATION THEORIQUE DE LA METHODE HONGROISE ET DE SA TECHNIQUE D'UTILISATION

Le rapprochement du schéma analytique présenté page 10 et de l'organigramme de la méthode, telle qu'elle a été décrite dans les paragraphes

.../...

précédents, va nous permettre de comparer la logique du premier à l'organisation que propose l'algorithme de KUHN.



Hormis son découpage plus détaillé, la méthode de Kuhn possède une logique dans son organisation parfaitement conforme à celle de l'enchaînement des phases tel qu'il apparaît dans la formulation théorique de la méthode hongroise.

Aussi, est-ce en nous inspirant de cette organisation que nous avons établi le 'programme d'affectation A.H.'

CHAPITRE 3

"LE PROGRAMME D'AFFECTION A.H." (1)

Bien que nous y ayons déjà fait allusion lors de la présentation de la technique manuelle d'application de la méthode hongroise, c'est essentiellement dans ce chapitre que nous nous proposons de développer les problèmes que nous a posés l'adaptation informatique de cette méthode qui a abouti à la constitution du "programme d'affectation A.H."

C'est la méthode de KUHN, telle qu'elle a été décrite précédemment, qui nous a inspirés pour l'organisation générale du programme. Cependant, certaines phases ont dû être adaptées, transformées ou supprimées ; c'est lors du premier paragraphe de ce chapitre que nous allons présenter les modifications que nous avons dues apporter à la méthode.

Ensuite, dans le second paragraphe, lors de la présentation du "programme d'affectation A.H.", nous le décrirons et préciserons les caractéristiques de son exploitation sur ordinateur.

- I - Modifications apportées à la méthode de KUHN et son adaptation à l'ordinateur.
- II - Présentation du programme d'affectation A.H.
 - 1. Sa description
 - 2. Les caractéristiques de son exploitation sur ordinateur.

.../...

(1) Programme d'affectation utilisant l'Algorithme Hongrois.

I - MODIFICATIONS APPORTEES A LA METHODE DE KUHN ET SON ADAPTATION A L'ORDINATEUR

Nous allons décrire successivement ces transformations et ces adaptations tout en précisant leurs causes qui, d'une manière générale, trouvent leurs origines :

- soit dans les remarques que nous avons présentées lors du chapitre précédent,
- soit dans l'absence de visualisation ; celle-ci étant une aide fondamentale pour la réalisation des méthodes manuelles que propose la plupart des auteurs,
- soit dans un souci plus technique de gain de place en mémoire centrale et de diminution du temps de traitement sur ordinateur.

1. Représentation de la matrice des coûts en mémoire centrale :

Elle s'est avérée délicate, car pour des raisons de rapidité de traitement, nous nous sommes efforcés de maintenir toutes les données en mémoire centrale. Or, dans certains cas, la dimension de la matrice et son taux de remplissage, exigent beaucoup de place ; à titre d'exemple, la matrice des coûts correspondant au problème de transport de la page 23 était constituée de 106 lignes et 106 colonnes, remplies à 100 %, soient 11 236 coefficients.

D'autre part, comme nous l'avons vu, la méthode hongroise nécessite l'accès à tous les coefficients, lignes par lignes et colonnes par colonnes.

Voici des méthodes réalisables qui satisfont à ces exigences.

Auparavant, convenons que la matrice des coûts de dimensions $N \times N$, contient R coefficients significatifs.

A - Pour les matrices creuses :

On peut envisager à notre avis, deux formules, qui toutes deux ne font intervenir que les éléments significatifs de la matrice des coûts.

.../...

Une formule exigeante en espace - mémoire :

La matrice des coûts $[M]$ est représentée sous la forme d'un tableau T
de 4 colonnes,
et de : $(R + 1)$ lignes

dans lequel tous les coefficients significatifs, chacun disposant de 4 mots -
mémoires, soit une ligne du tableau T, soit rangés colonnes après colonnes.

Si i est le numéro d'une ligne du tableau T, dans chaque colonne de
ce tableau, on trouve pour le coefficient $M_{k,1}$

- dans T (i,1) :

Le numéro de la case dans laquelle se situe le coefficient au sein de $[M]$
Ce numéro est celui que l'on attribue à chaque case au fur et à mesure d'un
comptage colonne par colonne. Par exemple, pour une matrice 4×4 , les numé-
ros seront respectivement pour chaque case :

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Connaissant la ligne k et la colonne l dans lesquelles se trouve
un élément quelconque, il est aisé de retrouver le numéro de la case à laquelle
il appartient :

$$\text{Numéro} = M \times (l - 1) + k$$

Inversement, le numéro de la case donne immédiatement les numéros
des ligne et colonne dont elle est l'intersection.

.../...

a) pour le calcul de I :

$$A = \text{partie entière} \left(\frac{\text{Numéro}}{N} \right)$$

$$\text{si } A = \frac{\text{Numéro}}{N} \longrightarrow i = A$$

$$\text{si } A \neq \frac{\text{Numéro}}{N} \longrightarrow i = A + 1$$

b) pour le calcul de k :

$$B = \text{reste de la division entière} \left(\frac{\text{Numéro}}{N} \right)$$

$$\text{si } B = 0 \longrightarrow k = N$$

$$\text{si } B \neq 0 \longrightarrow k = B$$

- dans T (i,2) :

La valeur du coefficient $M_{k,1}$

- dans T (i,3) :

Le numéro de la ligne du tableau T, correspondant au coefficient suivant $M_{k,1}$ dans la ligne k de la matrice $[M]$. Cette disposition permet de lire une ligne de la matrice des coûts, de la gauche vers la droite. Pour le dernier coefficient de la ligne, T (i,3) a une valeur nulle.

- dans T (i,4) :

On dispose d'une mémoire de travail attenante à chaque coefficient significatif de la matrice.

On complète cette organisation en établissant deux autres tableaux LIG (k) et COL (l), donnant respectivement le numéro dans le tableau T du premier coefficient de la ligne k et de la colonne l. (1)

Cette formule de représentation en mémoire centrale de la matrice des coûts est très avantageuse quant au temps nécessaire au traitement ; elle autorise en effet d'accéder séquentiellement à tous les éléments d'une même colonne (et d'ailleurs à tous ceux de la matrice) et de traiter successivement, grâce à une simple opération d'adressage, tous ceux d'une même ligne.

.../...

(1) LIG (k,1) et COL (l,1) dans le "programme d'affectation A.H."

Par contre, l'existence de quatre mots - mémoire par coefficient, la rend très exigeante en mémoire centrale. C'est cette raison qui nous a amenés à réfléchir sur une seconde méthode :

Une formule économique en espace - mémoire :

Elle dérive de la précédente où l'on dispose d'un tableau T de dimensions $R \times 4$. Peut-on réduire ce tableau en supprimant quelques rangées ?

Il n'est pas question de diminuer le nombre de lignes, chacune correspondant à un coefficient significatif de la matrice, dont la suppression aboutirait à la modification du problème que l'on a à traiter.

Quant aux colonnes, on constate qu'il n'est également pas possible de supprimer :

- . ni T (i,2) qui donne la valeur du coefficient,
- . ni T (i,4) qui est une mémoire de travail dont on a nécessairement besoin pour l'application du programme .
- . ni T (i,1) dont le contenu est essentiel pour situer ou repérer un coefficient quelconque soit dans la matrice $[M]$ soit dans le tableau T.

Finalement, seule la suppression de T (i,3) semble possible.

En effet, si on désire accéder à la ligne du tableau T, correspondant au coefficient qui suit l'élément $M_{k,1}$ dans la ligne k de la matrice $[M]$, il suffit :

- . de calculer le numéro de la case de $[M]$ ayant pour coordonnées k et (1 + 1),
- . puis de chercher parmi les coefficients de la colonne (1 + 1), celui dont le numéro de case (colonne 1 de T) est identique au nombre que l'on vient de calculer.

Si on ne met pas en évidence une telle égalité, cela signifie qu'il n'existe pas de coefficient significatif $M_{k,1+1}$, dans ce cas, on recommence la même opération avec la colonne 1 + 2 ; et ainsi de suite.

.../...

Cette exploration, permettant de relier les éléments d'une même ligne, est évidemment très coûteuse en temps de traitement. Cependant, il est possible de l'améliorer sensiblement en utilisant une technique de recherche rationnelle d'un élément dans une liste.

Appliqués à une matrice de coûts 20 * 20 remplie à 60 %,

- un programme procédant à une recherche séquentielle du numéro de case, à nécessité près de 50 % de temps supplémentaire par rapport à la méthode exigeante en espace - mémoire précédemment décrite.
- un autre programme recherchant le numéro de case par la méthode dichotomique, n'a exigé que 20 % de plus.

Cet écart entre les recherches séquentielle et dichotomique va sans doute en s'accroissant à mesure que la dimension de la matrice croît.

La seconde de ces deux méthodes peut devenir intéressante si l'on s'accorde de négliger l'importance du temps de traitement qu'elle nécessite par rapport à la formule exigeante en taille - mémoire, en égard au fait qu'elle permet de restituer 25 % de la mémoire centrale et autorise ainsi à augmenter de 33 % le nombre de coefficients significatifs.

Malheureusement, il s'avère que pour des raisons pratiques, il n'est pas possible d'appliquer une telle méthode.

En effet, la recherche dichotomique exige que les coefficients se rapportant à une colonne, aient leurs numéros de case (colonne 1 du tableau T) disposés dans l'ordre. Ceci implique que lors de la construction du tableau T, on ait présenté dans l'ordre croissant des lignes, les coefficients d'une même colonne. L'expérience de problèmes réels, nous a montré que cette contrainte était très difficile, voire dans certains cas impossible, à respecter.

Bien qu'intéressante, la recherche dichotomique s'avère donc inutilisable et tout bien considéré, c'est la formule exigeante en espace - mémoire, mais à exécution beaucoup plus rapide, que nous avons retenue pour la forme définitive du "programme d'affectation A.H."

.../...

Nous nous proposons maintenant d'étudier rapidement une méthode applicable aux matrices de dimensions moyennes, dont le taux de remplissage est très élevé.

B - Pour les matrices dont le taux de remplissage est très élevé :

Cette formule n'ayant pas été programmée, nous ne pouvons pas donner les performances de son exécution, mais elle peut sans doute constituer une solution avantageuse pour placer en mémoire centrale des matrices de dimensions moyennes pour lesquelles R est très proche de N^2 .

Il suffit pour cela de disposer d'un tableau à deux dimensions :

$$G(N, N)$$

dans lequel nous introduisons les données de la matrice des coûts.

Cette représentation bi-dimensionnelle autorise un accès très rapide à tous les coefficients d'une ligne ou d'une colonne et permet de situer très facilement un élément de la matrice. Dès lors il n'est plus utile de disposer des renseignements que nous fournissaient les colonnes $T(i,1)$ et $T(i,3)$ et, même $T(i,4)$ peut être supprimée grâce à une adaptation du programme.

La capacité actuelle de l'ordinateur C.I.I. - 10070 de l'I.U.C.A. de Nancy, limite pour une telle représentation, les dimensions de la matrice des coûts à environ 250 lignes sur 250 colonnes.

Cette méthode ne peut être envisagée que pour des matrices à taux de remplissage très élevé, car en fait, quelque soit ce taux, le temps d'exécution du traitement sera celui d'une matrice remplie à 100 %.

2. Adaptation du programme au traitement par colonnes :

Notre mode de représentation des données de la matrice des coûts en mémoire centrale nécessite l'introduction des coefficients, colonnes par colonnes. Or, l'accès séquentiel à tous les éléments d'une même colonne s'avère plus rapide que l'accès par adressage à tous ceux d'une même ligne.

Il semble donc préférable d'opérer les traitements sur les colonnes plutôt que sur les lignes. Cependant, dans la méthode hongroise, telle que nous l'avons présentée, la plupart des opérations sont effectuées à partir des lignes.

Dès lors, il est intéressant de faire la remarque suivante :

Une solution vraie pour une matrice M l'est également pour la matrice transformée M^T .

De cette manière, si l'affectation (X_i, Y_j) apparaît dans une solution de M , alors (Y_j, X_i) appartiendra à une solution de même coût de M^T .

On peut justifier cette affirmation par le raisonnement suivant :

Si (X_i, Y_j) était le coefficient de la ligne i et de la colonne j de M , le mieux placé, relativement aux autres éléments de M , pour figurer dans la solution optimale, alors le coefficient (Y_j, X_i) de la matrice transformée M^T , sera lui aussi obligatoirement le mieux placé des éléments de la ligne j et de la colonne i pour apparaître dans l'affectation optimale de M^T .

Cette remarque permet d'aboutir à deux conclusions :

- a) Dans notre représentation actuelle, les coefficients étant introduits par colonnes, on a intérêt à appliquer la méthode hongroise en effectuant les opérations à partir des colonnes. Cette adaptation de l'algorithme est rendue possible, car elle revient à appliquer le programme à la matrice transformée (1).

.../...

- (1) Bien que le "programme d'affectation A.H." réalise les opérations à partir des colonnes, nous continuerons jusqu'au terme de ce paragraphe I, pour assurer la clarté du texte, à considérer qu'il les effectue à partir des lignes, de manière à rester conforme à notre présentation de la méthode hongroise.

- b) l'utilisateur, suivant sa convenance, pourra travailler sur M ou M^T
c'est-à-dire qu'il introduira indifféremment les coefficients de la
matrice des coûts, lignes par lignes ou colonnes par colonnes.

3. Modification de la seconde étape de la méthode hongroise : Recherche
d'une solution (cf page 36)

Cette recherche proposait de procéder aux affectations, en choisissant d'abord les lignes disposant du plus petit nombre de zéros non barrés.

Cette méthode n'a pas été retenue pour deux raisons :

- du point de vue informatique, elle est difficile à mettre en place, car la gestion des zéros non barrés est une procédure réalisable, mais très exigeante en temps d'exécution,
- du point de vue logique, comme nous l'avons vu, même si cette méthode améliore le couplage, elle n'aboutit pas toujours à un couplage maximal.

En définitive, dans le "programme d'affectation A.H.", lors de cette étape, nous nous contentons, en prenant successivement chaque colonne, d'encadrer le premier zéro non barré.

L'algorithme de FORD et FULKERSON nous établit ensuite, d'une manière certaine, un couplage maximal.

4. La représentation du couplage :

Au cours du traitement, il faut pouvoir discerner parmi les coefficients nuls :

- ceux qui sont "encadrés",)
- ceux qui sont "barrés",) (1)
- ceux qui sont "libres" (c'est-à-dire ni encadrés, ni barrés).

.../...

(1) Terminologie déjà utilisée dans le chapitre précédent page 36 .

L'utilisation de la mémoire de travail attenante à chaque coefficient, en y plaçant un signe particularisant chacune des catégories, aurait permis de distinguer l'état dans lequel se trouve chaque élément nul.

Une autre méthode nous a semblé préférable, car elle améliorerait la rapidité d'exécution.

Soient deux tableaux COUPLE et $LIG^{(1)}$ de N éléments initialisés à "0", N étant la dimension de la matrice des coûts.

Chaque fois que nous couplons une ligne i à une colonne j, nous affectons j à $LIG(i)$ et
i à $COUPLE(j)$

Dans LIG on trouvera pour la ligne i le numéro de la colonne j qui lui est affectée.

De même, dans $COUPLE$, pour chaque colonne j, on trouvera le numéro de la ligne i à laquelle elle est couplée.

Ainsi un élément nul, de coordonnées (k,l) sera :

- libre si $LIG(k) = 0$
et $COUPLE(l) = 0$
- barré ou encadré si $LIG(k) \neq 0$ ou $COUPLE(l) \neq 0$
il sera encadré
si $LIG(k) = 1$ ou $COUPLE(l) = k$

.../...

(1) Dans le "programme d'affectation A.H.", il s'agit du tableau $LIG(l,2)$

5. L'application de l'algorithme de FORD et FULKERSON :

Les mêmes exigences qui nous ont fait choisir cet algorithme en raison de son efficacité, nous poussent à la prudence lors de son utilisation,

En effet, les auteurs de cette méthode proposent (cf page 44) :

- de marquer d'un tiret toutes les lignes non affectées,
- de choisir la $i^{\text{ème}}$ ligne marquée et d'y chercher tous les zéros barrés, de marquer la colonne correspondante et de répéter cette phase pour toutes les lignes marquées, sans marquer de nouveau une colonne qui l'est déjà.

Or, nous pensons qu'il faut procéder plus lentement en ne marquant d'un tiret qu'une ligne à la fois et non toutes les lignes non affectées, de manière à éviter un piège dans lequel on risque d'aboutir et dont nous allons décrire un des aspects :

Soit une matrice, pour laquelle on a trouvé un couplage :

	1	2	3	4	5	6	
1	0					0	1
2	0		0				3
3		0		0			2
4		0	0				-
5				0	0		4
6		0					-
	2	4	4	3	5	1	↑ Marques

On recherche alors un couplage maximal par l'algorithme de FORD et FULKERSON. Si l'on marque toutes les lignes non affectées (lignes 4 et 6) et que l'on fait progresser simultanément les marquages, on parvient à marquer les colonnes 5 et 6 qui n'étaient pas jusqu'alors affectées.

.../...

De ces colonnes on peut rechercher un chemin qui doit nous faire apparaître de nouveaux zéros encadrés. C'est ainsi qu'en appliquant l'algorithme on aboutit à un couplage nouveau, mais incorrect, dans lequel les affectations ne sont pas indépendantes (figure N° 15).

	1	2	3	4	5	6
1	0					0
2	0		0			
3		0		0		
4		0	0			
5				0	0	
6		0				

figure N° 15

	1	2	3	4	5	6
1	0					0
2	0		0			
3		0		0		
4		0	0			
5				0	0	
6		0				

figure N° 16

Au contraire, les explorations successives à partir de la ligne 4, puis de la ligne 6, nous assurent un couplage maximal (et même optimal) correct, tel que celui qui apparaît sur la figure N° 16.

Remarquons qu'une telle erreur provient de la suppression de l'aide visuelle à laquelle nous contraint l'automatisation.

6. Calcul du coût d'affectation :

Dans la méthode hongroise telle qu'elle est décrite chez la plupart des auteurs, on calcule le coût de l'affectation une fois que le couplage saturant a été trouvé. On est alors obligé de se référer à la matrice des coûts initiale. (cf page 49)

L'automatisation exclut cette méthode, car il n'est pas intéressant de conserver la matrice initiale en mémoire. En effet, il est préférable d'utiliser le processus que nous proposons dans le paragraphe -2- du premier chapitre. C'est-à-dire qu'au fur et à mesure des itérations, on prend en compte les variations de coûts qu'engendrent les recherches d'"affectations possibles". (Voir supra, l'évolution du coût d'affectation : Z^i pages 10 à 13)

.../...

L'ensemble de ces six sections constitue les principales modifications que nous avons apportées à la méthode hongroise, en vue de son automatisation et donc, de la réalisation du "programme d'affectation A.H."

L'objet du paragraphe suivant va être de le décrire et d'étudier les caractéristiques de son exploitation sur ordinateur.

II - PRESENTATION DU 'PROGRAMME D'AFFECTION A.H.'

Cette présentation introduit et complète le dossier d'exploitation (listing et notice) du "programme d'affectation A.H." qui sera diffusé par le laboratoire d'informatique de gestion de l'U.E.R. de sciences mathématiques de Nancy I (Case officielle 140 - 54037 Nancy CEDEX).

Nous nous proposons tout d'abord dans ce paragraphe, de procéder à la description du programme, ce qui nous permettra de mieux saisir les possibilités et les limites qu'offre cet instrument, que nous emploierons dans le cadre d'une application concrète qui sera développée lors du chapitre suivant. Ensuite, dans une seconde partie, nous préciserons les conditions d'utilisation de ce programme.

1. Description du programme :

Le "programme d'affectation A.H." est divisé en six modules, eux-mêmes subdivisés en sous-modules de traitement.

Les six principaux modules sont :

- 1 - Déclaration des tableaux et estimation des constantes.
- 2 - Initialisation des variables et construction des tableaux.
- 3 - Obtention des zéros dans les rangées.
- 4 - Recherche d'un couplage maximal.
- 5 - Transformation de la matrice des coûts.
- 6 - Impression du résultat optimum.

Les trois modules : N° 3, 4, et 5 sont les unités de traitement qui correspondent à la méthode hongroise, alors que les autres modules : N° 1, 2 et 6 sont plutôt des "unités de service" qui permettent la prise en compte des données et l'impression des résultats.

.../...

Nous allons parcourir le programme en décrivant chacun de ces modules, nous insisterons davantage sur les "unités de service", les autres ayant été largement développées dans le chapitre précédent et le premier paragraphe de celui-ci.

Il est souhaitable de lire cette description en suivant sa progression sur l'organigramme général donné en annexe.

Module 1 : Déclaration des tableaux et estimation des constantes

Cette "unité de service" introduit les données qui permettent d'adapter le programme aux dimensions et à la nature du problème que l'on a à traiter.

Constituée de quelques cartes qui sont à modifier chaque fois que l'on utilise le programme pour un nouveau problème, elle sert à définir la dimension des tableaux et à évaluer les constantes.

Nous reviendrons ultérieurement sur l'établissement de ces cartes, lorsque nous développerons la "structure des entrées sur cartes".

Module 2 : Initialisation des variables et construction des tableaux

Il est partagé en deux sous-unités :

- Initialisation et construction des tableaux,
- Transformation de la matrice dans le cas d'une maximisation.

Module 2 A : Initialisation et construction de tableaux

C'est lors de cette phase que l'on procède à la lecture des cartes de données (et à leur écriture sur imprimante pour vérification), en vue de la construction des tableaux : T, COL et LIG.

Deux problèmes sont apparus lors de son analyse :

- la multiplicité des coefficients dans les matrices des coûts,
- la "mise au carré" des matrices rectangulaires.

.../...

a) La multiplicité des coefficients :

Pour introduire un coefficient, il faut connaître les numéros de la ligne et de la colonne auxquels il appartient.

Puisque nous devons ranger les éléments, colonnes par colonnes, dans le tableau T, il est logique de proposer une structure de carte où l'on précise une seule fois le numéro de la colonne et pour chaque coefficient, le numéro de la ligne correspondante.

Mais, le nombre d'éléments de la matrice des coûts peut s'élever très rapidement et ainsi, la préparation des bordereaux de perforation peut devenir fort longue et fastidieuse et la perforation, elle même, très coûteuse.

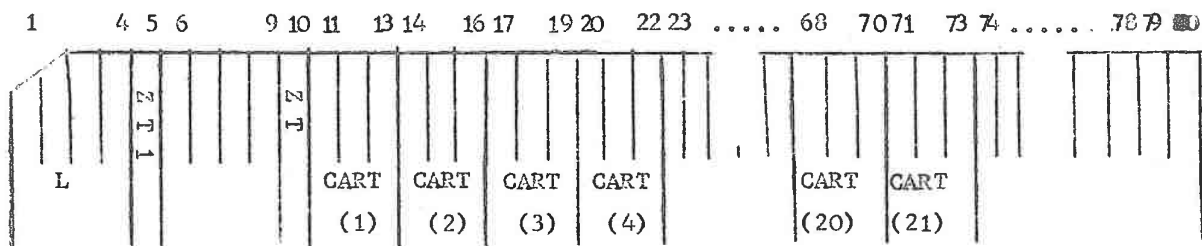
Or, dans le cadre de l'application du chapitre 4, nous avons été amenés à constater que dans chaque colonne, de nombreux coefficients avaient des valeurs identiques.

C'est le cas des candidats maîtres-auxiliaires pour lesquels il est indifférent d'aller dans un quelconque établissement d'une région donnée. La même valeur pour tous les lycées et collèges exprimera donc le souhait du candidat de se voir affecté n'importe où dans la région.

Nous avons lieu de croire que cette remarque est vraie pour beaucoup de problèmes de grande taille, c'est ce qui nous a poussés à présenter ici une solution réduisant considérablement le nombre de cartes à perforer.

Une condition est cependant nécessaire : il faut regrouper toutes les lignes pour lesquelles la probabilité d'avoir le même coefficient est très forte. (Dans notre application, on rassemble tous les lycées et collèges d'une même ville, d'une même région, d'un même département)

On donne aux cartes la structure suivante :



L = Numéro de la colonne

CART = tableau de 21 zones de 3 colonnes chacune.

.../...

- Si tous les coefficients d'une colonne ont une valeur différente : pour chacun d'entre eux, on doit préciser sa valeur et le numéro de la ligne à laquelle il appartient.

Dans ce cas, on pose : $ZT = 0$

et on affecte : (au maximum 10 fois par cartes)

aux "CART (impair)" le numéro de la ligne,

aux "CART (pair)" la valeur du coefficient.

- Si les coefficients ayant des valeurs identiques constituent une "suite", on aura : $ZT = 1$

et dans CART (1) on affecte le numéro de la première ligne de la "suite".

dans CART (2) : le numéro de la dernière ligne de la "suite".

dans CART (3) : la valeur commune de toutes ces cases.

- Si une même colonne contient plusieurs "suites" :

$ZT =$ nombre de "suites" apparaissant sur la carte.

(si on a 3 colonnes par zone $\Rightarrow ZT \leq 7$)

on aura alors,

dans CART $((i \div 3) + 1)$ = le numéro de la première ligne de la $(i + 1)^{\text{ième}}$ suite

dans CART $((i \div 3) + 2)$ = le numéro de la dernière ligne

dans CART $((i \div 3) + 3)$ = la valeur des coefficients de cette $(i + 1)^{\text{ième}}$ suite.

Cette méthode bien qu'assurant une importante simplification pour la préparation de bordereaux et la perforation, n'est cependant pas satisfaisante car elle exclut toute souplesse dans l'introduction des données.

En effet, dans notre exemple, les candidats à l'intérieur même d'une ville, d'une région..., ont souvent une préférence plus importante pour un établissement ou pour une ville..., or ces choix, très aléatoires, rendent impossible des regroupements comme le préconise la méthode. La multiplication de tels cas risque de compliquer son utilisation et de réduire sensiblement l'avantage qu'elle procurait.

Pour éviter cela, nous avons introduit une catégorie particulière de cartes ayant la même structure que les précédentes, mais pour lesquelles ZT_1 est égal à 1, et qui s'adresse nécessairement à des coefficients existant déjà dans le tableau T.

.../...

La seule opération engendrée par une telle carte est que la "valeur" apparaissant sur la carte s'additionne à la zone $T(i,2)$ du coefficient correspondant.

b) La "mise au carré" des matrices rectangulaires :

Soient SC le nombre de colonnes de la matrice des coûts et SL le nombre de lignes.

Si SC est différent de SL, la théorie de la méthode hongroise exige que l'on ajoute des rangées fictives de manière à construire une matrice carrée.

C'est ce qu'on réalise :

- d'une part, lorsque $SL < SC$, en complétant chaque colonne avec $(SC - SL)$ cases, auxquelles on affecte des éléments nuls,
- d'autre part, lorsque $SC < SL$, on joint à la matrice $(SL - SC)$ colonnes de SL éléments nuls.

Module 2 B : Transformation de la matrice dans le cas d'une maximisation
cf. supra page 32 Recherche d'une solution maximale

Plutôt que de parcourir la matrice à la recherche de l'élément de valeur maximale, nous avons préféré donner à une constante, une valeur certainement supérieure à celle de tous les coefficients de la matrice.

La transformation consiste alors à remplacer chaque coefficient par la différence entre MAX et sa valeur.

Module 3 : Obtention des zéros dans les rangées

Il correspond à la première phase de la présentation théorique de la méthode hongroise (page 11) : recherche des "affectations possibles" dans la matrice des coûts initiale.

On recherche le minimum de chaque rangée que l'on soustrait de tous les éléments de cette rangée. On procède à cette opération sur les colonnes puis sur les lignes. D'où deux parties :

Module 3A : obtention des zéros dans les colonnes

Module 3B : obtention des zéros dans les lignes.

..../...

Module 4 : Recherche d'un couplage maximal

Ce module correspond à la seconde phase de la formulation théorique (page 13) qui porte d'ailleurs le même nom.

Les opérations qui y sont programmées sont celles qui sont décrites dans le chapitre II aux 2e et 3e étapes, éventuellement modifiées comme le précisent les remarques du paragraphe précédent.

C'est ainsi que l'on trouvera successivement trois sous-unités :

- Recherche d'une solution (module 4A),
- Obtention d'un couplage maximal (module 4B),
- A-t-on une solution optimale ? (module 4C).

Si la réponse à cette dernière question est positive, on transfère le contrôle au module 6 qui édite la solution optimale.

Si elle est négative, le programme offre la possibilité d'imprimer les résultats intermédiaires de chaque itération. On autorise cette impression en donnant la valeur 1 à IMPRIM dans le module 1.

Il n'est pas question de demander cette impression, lors du traitement de grands modèles exigeant plusieurs dizaines d'itérations ; de tels documents devenant rapidement inexploitable. Par contre, elle s'avère très intéressante pour des matrices plus réduites, d'autant que nous pensons que ces modèles restreints exigent, mais aussi, autorisent une plus grande précision dans les données, donc dans les résultats. Par conséquent, l'utilisateur est susceptible d'affiner sa solution finale en tenant compte des résultats intermédiaires et sous optimaux que lui fournit cette impression.

En outre, N étant la dimension de la matrice carrée des coûts, si le nombre d'affectations réalisées est égal à $(N - 1)$, on recherche les indices i et j de la ligne et de la colonne non affectées, et on les imprime ainsi que, s'il existe, le coût supplémentaire qu'occasionne l'affectation de i à j .

.../...

Module 5 : Transformation de la matrice des coûts

C'est la fonction de la troisième phase du développement théorique du premier chapitre (page 14) qui est programmée dans ce module.

Comme elle, il se divise en deux parties :

- module 5A : obtention du support minimal et marquage de ce support (= Recherche du support minimal),
- module 5B : réduction de la matrice des coûts (= Recherche de nouvelles affectations possibles dans la matrice des coûts transformée).

Au terme de cette modification de la matrice des coûts, on effectue un branchement au début du module 4 afin de tenter d'établir un couplage maximal sur la nouvelle matrice.

Module 6 : Impression du résultat optimum

Cette édition se présente actuellement sous la forme suivante :

indice de		indice de
la colonne	AFFECTE A	la ligne

2. Les caractéristiques de l'exploitation du programme sur ordinateur

Il s'agit, d'une part, des exigences du programme quant à la configuration de l'ordinateur, et d'autre part, de celles relatives à la structure des cartes.

a) La configuration de l'ordinateur :

Le programme a été écrit en FORTRAN IV CII - 10070 sous BPM, en vue de son utilisation sur l'ordinateur CII - 10070 de l'I.U.C.A. de Nancy.

Dans sa forme actuelle, il n'emploie comme organes d'entrées / sorties qu'un lecteur de carte et une imprimante.

Il est intéressant d'étudier les possibilités qu'il offre au point de vue de la taille des problèmes qu'il permet de traiter et du temps d'exécution - machine qu'il nécessite.

.../...

1 - Ses exigences en espace-mémoire :

Tel qu'il est actuellement conçu, le programme, qui travaille sur des variables entières, et l'ensemble des données sont contenus en mémoire centrale. La place nécessaire s'avère donc essentiellement fonction de la dimension du problème traité.

Pour évaluer cette dimension, il s'agit de recenser les variables utilisées dans le programme d'affectation.

On compte 37 variables scalaires, auxquelles s'ajoutent les tableaux pour chacun desquels on fait apparaître ici la place-mémoire nécessaire :

si n est l'ordre de la matrice carrée des coûts et p son taux de remplissage (1)

IDENTIFICATEUR DU TABLEAU (et ses dimensions)	PLACE NECESSAIRE (en mots-mémoire ₁₀)
$T \left(\frac{n^2 \cdot p}{100} + 1,4 \right)$	$4 \left(\frac{n^2 \cdot p}{100} \right) + 4$
LIG _i (n, 4)	4n
COL (n + 1, 2)	2n + 2
COUPLE (n)	n
CART (21)	21

.../...

(1) p est le taux de remplissage de la matrice carrée $n \times n$, il tient compte des éléments nuls des rangées fictives que l'on a dû ajouter aux matrices rectangulaires.

Ainsi, si p' est le taux de remplissage d'une matrice rectangulaire de SL lignes et SC colonnes, on aura alors :

$$p = \frac{SC \times SL \times p' + (|SL - SC|) n}{n^2} \times 100$$

Soit un total :

$$4 \left(\frac{n^2 \cdot p}{100} \right) + 4 + 4n + 2n + 2 + n + 21 + 37$$

$\frac{n^2 \cdot p}{25} + 7n + 64$

Cette relation est fondamentale et va autoriser le calcul de la dimension maximale du problème que l'on pourra traiter. Exprimée avec les valeurs réelles de n et de p, elle doit rester inférieure à la capacité de la mémoire disponible pour l'utilisateur.

Actuellement, sur l'ordinateur de l'I.U.C.A., la place-mémoire susceptible de recevoir les données est de l'ordre de 62 300 mots.

$$\frac{n^2 \cdot p}{25} + 7n + 64 \leq 62\,300$$

Ainsi une matrice remplie à 100 % (p = 100) ne doit pas dépasser 124 lignes sur 124 colonnes.

2 - Les temps d'exécution :

Le temps nécessaire pour le traitement est également fonction de la dimension du problème. Nous allons récapituler dans un tableau les performances réalisées par le "programme d'affectation A.H." pour quelques matrices dont nous préciserons les caractéristiques n et p.

.../...

Nature de l'optimisation	Dimensions de la matrice		Taux de remplissage	en minutes			Remarques
	Lignes	Colonnes		Temps d'exécution	Temps global du JOB	Nombre d'itérations	
maximisation	20	20	58,5	0,066	1,110	13	} Problèmes de transports. } Nombreux coefficients identiques
minimisation	20	20	58,5	0,049	1,087	5	
maximisation	20	18	63	0,063	1,643	18	
minimisation	20	18	63	0,055	1,098	13	
maximisation	17	20	63,5	0,054	1,131	15	
minimisation	17	20	63,5	0,049	1,074	9	
maximisation	70	88	≈30	0,312	1,455	22	
maximisation	121	167	41,5	4,203	5,398	133	
minimisation	106	106	100	0,823	1,936	10	
minimisation	51	51	100	0,071	1,216	2	

b) La structure des entrées sur cartes

Ce paragraphe doit pouvoir répondre à deux questions :

- Comment adapter le programme aux dimensions du problème à traiter ?
- Quelle est la structure des cartes de données ?

1 - Adaptation du programme aux dimensions du problème :

Celle-ci constitue l'objet du module 1 du programme : "déclaration des tableaux et estimation des constantes". Elle porte sur 8 cartes qui permettent de définir la taille des tableaux et d'initialiser les paramètres :

n x n étant les dimensions de la matrice des coûts,
p son taux de remplissage,
les cartes à modifier se présentent ainsi :

- COMMON T $\left(\frac{n^2 \cdot p}{100} + 1, 4 \right)$, LIG (n,4) , COL (n + 1,2) , COUPLE (n)
- DIMENSION CART (21)
- MAXIM = 0 si on recherche un minimum
1 si on recherche un maximum

.../...

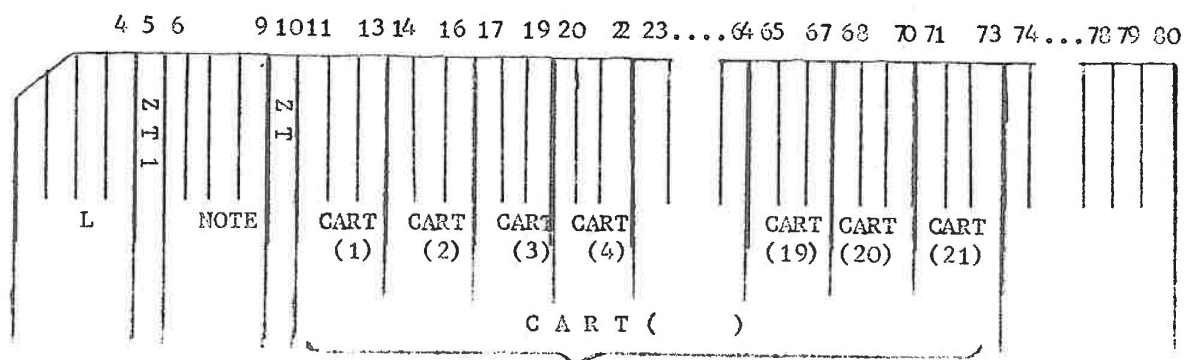
- MAX = un nombre tel qu'il soit supérieur à tous les éléments de la matrice des coûts.
- IMPR = 1 si on désire éditer les résultats intermédiaires,
0 dans le cas contraire.
- R = $\frac{n^2}{100} p + 1$
- SL = nombre de lignes dans la matrice des données
- SC = nombre de colonnes dans cette même matrice.

2 - La structure des cartes de données :

Le programme prévoit que les rangées recevront un numéro d'ordre allant de 1 à SL pour les lignes et de 1 à SC pour les colonnes.

Les coefficients de la matrice des coûts sont introduits par colonne, une carte ne pouvant contenir que des données appartenant à une même colonne.

Reproduisons à nouveau le dessin d'une carte de données :



- L est le numéro de la colonne dont on introduit les coefficients
- ZT1 peut prendre les valeurs 0 ou 1

Si ZT1 = 0 , les coefficients de cette carte sont placés dans le tableau T à raison d'un coefficient par ligne.

Si ZT1 = 1 , les coefficients traités sur cette carte existent déjà dans T ; l'opération n'a alors pour but que de modifier leur valeur en leur additionnant une certaine quantité apparaissant dans la zone CART.

.../...

- **NOTE** = on fera apparaître dans cette zone une quantité qui sera systématiquement ajoutée à la valeur de tous les coefficients de la carte.

L'intérêt de cette zone nous est apparu dans le cadre de l'application que nous développerons ultérieurement. En effet, pour chaque candidat maître-auxiliaire, on dispose de deux éléments pour lui attribuer tel ou tel poste : d'une part une note fixe et d'autre part une grandeur qui exprime la hiérarchie de ses vœux. On mesurera la qualité du candidat à être affecté à un poste en combinant ces deux valeurs (dans le programme, il s'agit d'une addition).

C'est cette note fixe qui occupe la zone NOTE.

- **ZT** = Comme nous l'avons déjà précisé antérieurement (voir supra pages 73 et 74), cette zone exprime la manière dont les informations sont disposées dans la zone CART.
- **CART** = Contient des coefficients appartenant à la colonne L et les indices des lignes correspondantes.

La structure de ces données varie suivant la valeur de ZT :

- si $ZT = 0$ alors : CART (indice impair) = indice de ligne,
CART (indice pair) = valeur du coefficient.

Dans ce cas, le nombre maximum de coefficients introduits est limité à 10 par carte.

- si $ZT = i$ $1 \leq i \leq 7$

la colonne L contient i "suites", chacune d'entre elles étant composée de plusieurs coefficients de même valeur.

Alors : CART $\left((i - 1) \times 3^2 + 1 \right)$ contient l'indice de la ligne du premier coefficient de la $i^{\text{ème}}$ suite,

CART $\left((i - 1) \times 3^2 + 2 \right)$ contient celui du dernier coefficient,

et CART $\left((i - 1) \times 3^2 + 3 \right)$ renferme la valeur à donner aux coefficients de la suite i .

.../...

Pour la prise en compte des données, deux remarques s'imposent :

- il est impératif de respecter l'ordre dans lequel les colonnes sont numérotées ;
- par contre, dans une même colonne, l'introduction des coefficients peut se faire au hasard. Cette facilité nous a semblé indispensable pour simplifier au maximum l'élaboration des bordereaux de programmation.

Lors de ce chapitre, nous nous sommes efforcés d'automatiser une méthode de résolution des problèmes d'affectation. Il s'agit maintenant de l'utiliser dans le cadre de l'application pratique qui nous intéresse : l'affectation des enseignants maîtres-auxiliaires au Rectorat de l'académie de Nancy.

.../...

CHAPITRE 4

UNE APPLICATION : L'AFFECTATION DU PERSONNEL AUXILIAIRE AU RECTORAT

Chaque année avant la rentrée scolaire, le Rectorat de l'Académie de Nancy doit procéder à l'affectation des maîtres-auxiliaires sur les postes laissés vacants après la nomination, par le ministère de l'Education Nationale, des titulaires dans les lycées, les collèges d'enseignements secondaires et techniques.

Le "programme d'affectation A.H." peut-il aider à la réalisation d'une telle tâche ? C'est la question à laquelle nous répondrons lors du second paragraphe de ce chapitre. Ensuite nous essayerons de dépasser le cadre étroit de la procédure automatique de l'affectation pour l'intégrer dans un ensemble plus vaste que constituent le mouvement (1), d'une part, et la gestion d'autre part, du personnel d'enseignement. Enfin, dans le quatrième paragraphe nous développerons quelques considérations sur un tel projet. Auparavant nous allons introduire ce chapitre en présentant et situant le problème de l'affectation des auxiliaires, tel qu'il est traité actuellement au Rectorat de l'Académie de Nancy.

.../...

- (1) Le "mouvement rectoral du personnel" est l'ensemble des opérations se rapportant à l'affectation des enseignants auxiliaires depuis le dépôt des dossiers de candidatures jusqu'à l'envoi du procès verbal d'installation par le chef d'établissement où ils sont nommés.

I - PRESENTATION DU MOUVEMENT DES MAITRES-AUXILIAIRES (1)

Il s'agit de décrire le processus d'affectation et les opérations annexes nécessaires à son aboutissement. Nous nous proposons de présenter la chronologie de celles-ci, mais auparavant, il est indispensable d'insister sur ce qui permet de rassembler les éléments sur lesquels repose l'affectation : le dossier de candidature et sa notation.

1. Le dossier de candidature et sa notation :

Ce dossier doit être parvenu avant le mois de mai pour l'année scolaire suivante, au service du personnel du Rectorat.

Tous les candidats doivent présenter un dossier, mais celui-ci sera différent suivant qu'il s'agit d'un nouveau postulant ou d'un ancien, actuellement en fonction dans un établissement, la délégation rectorale ne lui étant accordée que pour une année scolaire au plus. Dans ce second cas, le dossier appelé "notice de vœux" est constitué de trois parties ; alors que la "demande d'emploi" du nouveau candidat n'en contient que deux, similaires aux deux premières de la notice de vœux.

Voyons succinctement le contenu de ces trois parties :

1ère partie : renseignements généraux sur le candidat où sont précisés outre son état civil et sa situation familiale et militaire, la discipline qu'il désire enseigner, les diplômes universitaires qu'il a obtenus, ainsi que les emplois antérieurs qu'il a occupés que ce soit dans un établissement public ou ailleurs.

(1) Appelés aussi délégués rectoraux.

2ème partie : on demande au candidat d'établir la liste des villes ou des régions de l'académie, classées par ordre préférentiel dans lesquelles il souhaiterait enseigner. Depuis cette année, pour les notices de voeux, le Rectorat a organisé cette partie en demandant au postulant d'étendre ses voeux à six villes et six districts scolaires et de préciser s'il accepterait une affectation quelconque au cas où tous ces postes seraient indisponibles.

3ème partie elle est en fait réservée à l'administration académique qui fournira des notes et des appréciations sanctionnant les qualités professionnelles de l'enseignant. C'est ainsi que l'inspecteur d'académie fournira une note établie sur 20 et que la note pédagogique, sur 40, sera donnée par l'inspecteur pédagogique régional (ou inspecteur de l'enseignement technique pour les C.E.T.) ...

Afin de prendre plus objectivement en compte les renseignements non directement mesurables, qui figurent dans les deux premières parties du dossier, il a été décidé de donner à chacun d'entre eux une note découlant de l'application d'un barème élaboré par l'administration et les représentants du personnel.

C'est ainsi que des critères sociaux (situation de famille), universitaires (diplômes) et professionnels (ancienneté, éloignement des postes précédents) donnent lieu à des évaluations qui s'ajoutent aux notes pédagogique et administrative pour donner une note finale qui constituera, du point de vue du service du personnel du Rectorat, la valeur objective, quant aux critères retenus, de chaque candidat.

Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter la succession des étapes qui contribuent à l'affectation et à la nomination des maîtres auxiliaires et nous verrons comment est utilisée la note qui vient d'être estimée.

.../...

2. Chronologie des opérations du mouvement rectoral

Avant de l'aborder, il est utile de rappeler un élément important que confère le statut de délégué. Contrairement au titulaire, le candidat maître-auxiliaire peut toujours refuser le poste qui lui est proposé si celui-ci ne lui convient pas. Ceci peut provoquer des difficultés au niveau du service du personnel qui est alors obligé de refaire un mouvement uniquement pour cette catégorie de postes jusqu'au moment où chacun d'entre eux sera enfin occupé. Pour essayer d'y remédier, le Rectorat a décidé d'accompagner l'avis de nomination de l'auxiliaire, d'une note précisant que le candidat qui refuse un poste, ne pourra pas être nommé sur un autre poste dans l'académie. Cependant, il faut remarquer qu'une telle mesure ne sera efficace que dans les cas où le nombre de candidats sera supérieur au nombre de postes vacants, c'est-à-dire chaque fois qu'une défection pourra être solutionnée par la nomination d'un autre postulant non encore affecté.

Cette précision étant donnée, énumérons les étapes du mouvement rectoral en vue de la nomination de maîtres-auxiliaires pour assurer la rentrée des classes de l'année scolaire (t, t+1) :

1. Jusqu'au mois de mai de l'année t, dépôt des dossiers de candidature au service du personnel du Rectorat. Ce dernier se charge durant le mois de juin, d'établir en appliquant le barème, une note pour chaque postulant.

2. A la fin du mois de Juin, le Rectorat reçoit du Ministère la liste des postes budgétaires pour les établissements du second degré de l'académie et, celle des postes laissés vacants après la nomination des enseignants titulaires.

3. Au cours du mois de Juillet, le service du personnel, avec l'aide des inspecteurs pédagogiques, établit les listes des affectations par matières, uniquement pour les anciens candidats.

C'est cette phase que le "programme d'affectation A.H." permettrait d'automatiser, aussi est-il souhaitable d'analyser plus en détail, la procédure effectivement suivie pour l'élaboration de ces listes.

On classe les candidats en fonction de leur note, et, en commençant par les plus favorablement notés, on les affecte aux postes restés vacants en essayant de contenter au mieux l'ensemble des postulants, eu égard à la priorité qu'ils ont introduite dans leurs vœux.

Si certains postes n'apparaissent dans aucune liste de vœux, ils sont alors attribués aux candidats les moins bien notés.

Connaissant personnellement les candidats et les caractéristiques des postes à pourvoir, l'inspecteur pédagogique intervient pour modifier une affectation lorsque celle-ci revêt des particularités non quantifiées.

Enfin signalons que la liste issue de cette troisième étape est consultative et n'est conçue que comme un document de travail en vue de l'étape suivante.

4. Fin Juillet, sur proposition du service du personnel, une commission paritaire, constituée de représentants de l'administration et du personnel, décide des affectations définitives.

La grande majorité des affectations proposées par le service du personnel est entérinée par la commission.

Les arrêtés rectoraux de nomination d'auxiliaires sont alors émis et transmis aux intéressés. Chacun de ceux-ci doit immédiatement retourner un accusé de réception au Rectorat pour lui signifier sa décision et aviser son futur chef d'établissement en cas d'acceptation.

Les postes explicitement refusés et ceux pour lesquels aucune réponse n'est parvenue au Rectorat avant la mi-août, sont alors considérés comme vacants.

5. Vers le 10 Août, une nouvelle dotation de postes, par matières, parvient au service du personnel. Elle a pour origine soit l'attribution de crédits ministériels pour la création de nouveaux postes budgétaires, soit la modification de la carte scolaire.

Cette dotation représentant près de 10 % de l'ensemble des postes, ajoutée aux avis de refus explicites ou non de la première série d'affectation, constitue une nouvelle liste de postes vacants qu'il s'agit de pourvoir (soit, au total, 15 à 20 % des postes).

6. A partir du 20 Août, le service du personnel va affecter ces postes à des anciens, et éventuellement si cela est nécessaire, à de nouveaux candidats. Ceux-ci sont prévenus par arrêtés rectoraux de leurs nominations et doivent en accuser réception dans les huit jours. Au-delà de ce délai, ou si la réponse est négative, le poste est déclaré vacant et on y effectue immédiatement une nouvelle nomination.

Il s'agit donc de pourvoir tous les postes le plus rapidement possible. En réalité, certains d'entre eux, géographiquement très éloignés des centres d'attraction de l'académie, exigent jusqu'à dix nominations successives avant de trouver des candidats décidés à l'accepter.

7. A la rentrée des classes, le Chef d'établissement doit envoyer au Rectorat le procès-verbal d'installation du maître-auxiliaire.

Le mouvement est alors terminé.

Pour donner une idée de son importance, voici un tableau qui nous a été communiqué par le Rectorat de Nancy, donnant pour 1972 la répartition par groupes de matières, des différentes catégories de personnels pour les lycées et C.E.S. de toute l'académie (Meurthe et Moselle, Vosges, Meuse et Moselle)

<u>Disciplines Scientifiques - Langues vivantes :</u>		Titulaires	Auxiliaires	Total
Mathématiques	}	829	530	1.359
Physique - technologie				
Sciences Naturelles				
Allemand	}	703	360	1.063
Anglais				
Autres langues				
<u>Total :</u>		1.532	890	2.422
<u>Disciplines littéraires et artistiques :</u>				
Philosophie	}	1.001	683	1.684
Histoire - Géographie				
Lettres				
Dessin	}	132	221	353
Education musicale				
T.M.E.				
Sciences économiques et sociales		2	5	7
<u>Total :</u>		1.135	909	2.044
<u>Total général :</u>		2.667	1.799	4.466

Les problèmes que pose le mouvement au service du personnel, varient évidemment suivant les disciplines, les candidats dans chacune d'elles, étant plus ou moins nombreux.

Actuellement, il semble que ce soit dans les matières suivantes que les affectations s'avèrent les plus difficiles à réaliser, le nombre de candidats valables étant inférieur à celui des postes vacants : lettres classiques, mathématiques, anglais, allemand et quelques disciplines professionnelles.

Remarquons enfin qu'une catégorie de personnel bénéficie d'un régime particulier : ce sont les adjoints d'enseignement qui, bien que n'étant pas titulaires, sont nommés par le Ministère à un poste mais peuvent être déplacés, sur leur demande, par le Rectorat. Celui-ci est alors tenu de les affecter en priorité, aussi doivent-ils, comme les maîtres-auxiliaires, remplir un dossier de candidature où apparaîtront leurs vœux.

Nous venons de présenter le mouvement des délégués rectoraux, tel qu'il est réalisé dans l'académie de Nancy. Il s'agit maintenant de voir dans quelle mesure le "programme d'affectation A.H." peut être utilisé pour faciliter ou améliorer cette affectation de personnel.

II - APPLICATION DU "PROGRAMME D'AFECTATION A.H." AU MOUVEMENT DU PERSONNEL

Dans ce paragraphe, nous limiterons cette approche informatique, à l'affectation du personnel proprement dite, c'est à dire à la démarche permettant de choisir le candidat susceptible de satisfaire au mieux un poste vacant, tout en optimisant l'ensemble des affectations. Ceci correspond aux opérations des étapes 3 et 6 que l'on vient de décrire.

L'utilisation du "programme d'affectation A.H." va exiger l'élaboration d'une matrice de données et va nous fournir une série de résultats qu'il s'agit d'exploiter de la manière la plus rationnelle. Les problèmes que soulève cette utilisation dans le cadre d'une application pratique, feront l'objet de la première partie de ce paragraphe ; la seconde étant consacrée à l'analyse d'un exemple établi à partir de données réelles.

1. L'utilisation du "programme d'affectation A.H."

Nous allons présenter ici la manière dont nous avons procédé pour appliquer le programme au mouvement du personnel. Cependant il est certain que dans le cas d'une utilisation réelle, l'importance des problèmes traités exigerait une adaptation des conditions d'exploitation du programme, en particulier au niveau de l'introduction des données et de l'édition des résultats. Aussi nous proposons nous de faire quelques suggestions à ce sujet, au cours de ce paragraphe, où nous aborderons successivement :

- La présentation générale de l'application
- L'évaluation des coefficients de la "matrice des capacités"
- L'introduction des données
- L'exploitation des résultats

a) La présentation générale de l'application

Au moment de procéder à l'affectation du personnel, nous disposons pour chaque matière, d'une liste de candidats et d'une liste de postes à pourvoir. Chaque candidat ayant une "capacité" (1) à satisfaire chacun des postes, nous pouvons la faire figurer dans une matrice [M] où les candidats apparaissent en colonnes et les postes disponibles en lignes. Pour simplifier l'introduction des données, nous faisons correspondre un code compris entre 1 et SC à chaque candidat et entre 1 et SL à chacun des postes.

Disposant de cette "matrice des capacités" nous nous trouvons dans les conditions d'utilisation du "programme d'affectation A.H." dont on se servira pour MAXIMISER l'affectation globale. Ainsi on optimise l'attribution de chacun des postes aux candidats maîtres-auxiliaires en fonction d'une part de la hiérarchie de leurs vœux et d'autre part la note établie par l'administration.

En réalité, cette optimisation dépend essentiellement du contenu des coefficients de la "matrice des capacités".

.../...

(1) Combinaison de la Note de l'administration et des vœux du candidat.

b) Evaluation des coefficients de la "matrice des capacités"

Il s'agit du calcul des coefficients significatifs qui sera effectué lors de l'exécution du module 2 A du "programme d'affectation A.H."

Dans le calcul des coefficients, deux éléments interviennent :

- d'une part la note établie par les services du Rectorat, tenant compte des titres universitaires, des antécédents professionnels, des critères sociaux ... qui sont pondérés et combinés suivant un barème élaboré en commun par les représentants du personnel et de l'administration et qu'il est hors de propos de critiquer ici.

L'application du barème aboutit à des notes toujours inférieures à 99, parfois constituées d'un demi-point (1).

- d'autre part les voeux des candidats. Ces derniers ont actuellement la possibilité d'étendre leurs voeux à six villes et à six districts scolaires et de les classer par ordre préférentiel. Les désirs du candidat portant sur des villes ou des districts, il se peut qu'un de ceux-ci ne corresponde à aucun poste vacant, il sera alors inutile de le prendre en compte. Dans d'autres cas au contraire, plusieurs postes disponibles se rapportent à un même vœu, il est alors normal d'étendre les souhaits du candidat à tous ces postes.

Le candidat ayant droit d'émettre 12 voeux, nous devons établir une notation à 12 niveaux, la note la plus élevée revenant au poste préféré par le candidat.

Si nous analysons le processus de l'affectation au Rectorat, nous constatons que la note établie par l'administration est prépondérante, en effet le candidat qui dispose de la meilleure note devient normalement prioritaire quant à la satisfaction de ses voeux.

.../...

(1) Aux adjoints d'enseignement devant être nommé en priorité, on attribue systématiquement la note la plus élevée = 99.

Le respect de cette règle, nous a amené à donner à cette note une pondération telle que, quelque soient les vœux du candidat, les coefficients qui leur correspondent dans la matrice, soient toujours plus grands que ceux d'un autre postulant ayant une note immédiatement inférieure.

De sorte que, si pour un candidat c :

- (1) $\begin{cases} \text{aa est la note de l'administration} \\ \text{bb est une grandeur exprimant son souhait d'être nommé sur un} \end{cases}$

poste p, (2)

on peut mesurer sa "capacité" à satisfaire ce poste p =

$$M_{p,c} = (aa \times 100) + (\mu \times bb)$$

μ est une pondération quelconque qu'il s'agira de définir.

Dans cette relation, puisque la note de l'administration peut apparaître sous la forme décimale : (aa, 5), l'opérande ($\mu \times bb$) doit être au plus égal à 50. Autrement dit, pour chaque candidat, la notation correspondant à la hiérarchie de ses vœux, peut s'étendre sur une plage de 50 points.

Dans son état actuel le "programme d'affectation A.H." exige que l'on introduise sur cartes perforées pour chaque candidat, sa note aa, les codes de chacun des postes désirés et les valeurs correspondantes.

**Détermination de la grandeur (bb) =

Il s'agit donc d'établir ici un mode de notation respectant la hiérarchie des souhaits du candidat.

.../...

(1) a et b représentant un chiffre

(2) Cette grandeur doit être composée d'au moins 2 chiffres puisque le candidat émet jusqu'à douze préférences.

1. La méthode théoriquement la plus simple est celle où (étant compris entre 1 et 4) on fait correspondre à chaque voeu une valeur bb allant de 1 à 12. La valeur la plus élevée se rapportant au premier souhait de la liste.

Cette méthode s'avère en réalité difficilement applicable. Il est nécessaire pour expliquer ceci de rappeler la façon dont on procède pour introduire les données :

Dans une liste de voeux apparaissent des codes de districts et de villes ; ces dernières peuvent faire partie d'un des districts cités ; ceci veut dire que le candidat est attiré par ce district mais plus particulièrement par une ou plusieurs villes de celui-ci. Cette situation se rencontre très fréquemment dans la réalité.

Dans de telles conditions, comme il a été dit lors du précédent chapitre, la note du district sera d'abord affectée comme "note de base" à tous les postes de celui-ci et ensuite on n'introduira pour les villes citées dans la liste que la différence entre leur note et la note de base : la "note complémentaire".

Prenons un exemple pour nous aider à décrire cette démarche :

Si A, B, C, D, E, F sont six districts
et A1, A2, A3 sont des villes du district A
B1, B2 des villes du district B
et C1 une ville du district C
notre liste de voeux peut se présenter ainsi :
A1, A2, A3, A, B1, B2, B, C1, C, D, E, F

On doit attribuer à tous les postes disponibles

en : A1	la note	12	en : B	la note	6
A2	"	11	C1	"	5
A3	"	10	C	"	4
A	"	9	D	"	3
B1	"	8	E	"	2
B2	"	7	F	"	1

.../...

Comme nous l'avons dit plus haut dans la procédure d'introduction des données, nous avons choisi d'affecter d'abord les notes à tous les postes des districts cités :

"notes de base" :	9	pour les postes de	A
	6	"	B
	4	"	C
	3	"	D
	2	"	E
	1	"	F

et ensuite d'ajouter à chaque ville sa "note complémentaire".

Ainsi puisque A à la note 9, il faudra augmenter

A1 de 3

A2 de 2

A3 de 1

puisque B à la note 6, il faudra augmenter

B1 de 2

B2 de 1

En fait, lors de l'établissement des bordereaux de perforation, la sujétion qui consiste à se souvenir pour chaque ville de la "note de base" du district correspondant, devient rapidement très contraignante et difficile à respecter.

C'est pourquoi nous avons préféré une seconde méthode.

2. Elle consiste à attribuer à chaque district choisi une note pré-établie fonction de sa position dans la hiérarchie des souhaits.

Si on analyse la distribution d'une liste de vœux, on constate que les six villes peuvent y être tantôt dispersées, tantôt regroupées soit aux extrémités, soit à l'intérieur. Ceci nous oblige à respecter un intervalle minimum de six points entre les notes des districts.

.../...

Cette condition est respectée si on affecte aux postes du

1er district une "note de base"	=	42
2e " " "	=	35
3e " " "	=	28
4e " " "	=	21
5e " " "	=	14
6e " " "	=	7

Il suffit alors d'ajouter systématiquement aux villes citées dans les voeux une "note complémentaire" comprise entre + 6 et + 1 suivant leur situation respective dans la liste.

Dans notre exemple, on distribue aux postes du district :

A	la note	42
B	"	35
C	"	28
D	"	21
E	"	14
F	"	7

et pour la ville A1 on ajoutera +6 d'où la note définitive = 48

A2	"	+5	"	"	=	47
A3	"	+4	"	"	=	46
B1	"	+3	"	"	=	38
B2	"	+2	"	"	=	37
C1	"	+1	"	"	=	29

Cependant cette méthode n'est plus immédiatement applicable lorsque le code d'une ville et celui du district auquel elle appartient sont séparés dans la liste par le code d'un autre district.

.../...

C'est la cas d'une catégorie de listes de voeux que l'on rencontre parfois :

A1, A2, A3, B1, C1, A, B2, B, C, D, E, F

le 1er district A, dispose toujours de la note 42

B, " " " 35

C, " " " 28

...

Quant aux villes, on procède comme précédemment :

à A1, on ajoute + 6

à A2, " + 5

à A3, " + 4

à B1, " + 3 $\Rightarrow$ B1 est noté 38

à C1, " + 2 C1 " 30

à B2, " + 1

En fait, cette notation ne respecte pas la hiérarchie de la liste de voeux puisque les deux villes B1 et C1 sont préférées aux districts A et B.

Il suffit alors de satisfaire une règle qui veut que chaque fois que le code d'une ville et celui du district auquel elle appartient sont séparés par un nombre p de codes d'autres districts, on doit ajouter à la note de cette ville un montant égal à $(7 \times p)$. (1)

Cette méthode apparemment plus complexe que la précédente s'avère en fait plus facile à appliquer car lors de l'établissement des bordereaux de perforation, on ne tient plus compte de la note de chaque district mais simplement de sa place dans la hiérarchie des voeux.

.../...

(1) Dans le cas théorique où une ville se situe après le district auquel elle appartient, il suffit alors de soustraire à sa note un montant égal à :

$$(7 \times (p + 1))$$

Dans la relation $M_{p,c} = (aa \times 100) + (\mu \times bb)$
un dernier élément reste à évaluer, c'est le coefficient de
pondération : μ

**Détermination du coefficient μ

La méthode la plus immédiate est celle qui consiste à donner à μ
une valeur neutre, c'est à dire $\mu = 1$.

Ainsi, un postulant, auquel l'administration aura donné la note 20,
aura une "capacité" à pourvoir les postes de sa liste de vœux comprise entre :

$$\begin{aligned} (100 \times 20) + (1 \times 1) &= 2001 \text{ pour le dernier souhait} \\ \text{et } (100 \times 20) + (1 \times 48) &= 2048 \text{ pour le premier vœu.} \end{aligned}$$

Lorsque l'on applique le "programme d'affectation A.H." cette
méthode assure certes l'optimum de la fonction-objectif, mais certains résultats
ne seront guère satisfaisants.

En effet, pour exprimer cette anomalie, prenons un exemple simple :

Soient deux villes A et B, la première est un centre d'attraction
apparaissant en tête de la plupart des listes de vœux. La seconde, ville B,
au contraire est très peu convoitée par les maîtres-auxiliaires.

Supposons qu'un candidat I, bien noté par l'administration = 85
points, place A et B dans sa liste de vœux de sorte que les notes (bb) respec-
tives soient 48 et 14.

Un autre postulant II, moins bien noté = 20 points, souhaite égale-
ment ces deux villes ; son appréciation légèrement différente donne 48 à A,
et seulement 7 à B.

.../...

Etablissons la "matrice des capacités" $[M]$ correspondante :

Candidat I :

$$M_{A,I} = (100 \times 85) + (1 \times 48) = 8548$$

$$M_{B,I} = (100 \times 85) + (1 \times 14) = 8514$$

Candidat II :

$$M_{A,II} = (100 \times 20) + (1 \times 48) = 2048$$

$$M_{B,II} = (100 \times 20) + (1 \times 7) = 2007$$

$$[M] =$$

	I	II
A	8548	2048
B	8514	2007

$$M_{A,I} + M_{B,II} = 10555$$

$$M_{A,II} + M_{B,I} = 10562$$

L'optimum que nous fournirait la méthode hongroise, est donnée par la deuxième solution. C'est à dire que

I serait affecté à B

II " " à A

Ce résultat anormal aboutit à donner au candidat le moins bien noté le poste A apparaissant en tête des deux listes de vœux, car la valeur marginale de son souhait d'aller en B est inférieure à celle de l'autre postulant.

Pour limiter de telles situations, il suffit de pondérer les notes de vœux par la note de l'administration, de sorte que le poids d'un souhait sera d'autant plus important que la note du candidat sera élevée.

Etablissons la "matrice des capacités" $[M]$ correspondante :

Candidat I :

$$M_{A,I} = (100 \times 85) + (1 \times 48) = 8548$$

$$M_{B,I} = (100 \times 85) + (1 \times 14) = 8514$$

Candidat II :

$$M_{A,II} = (100 \times 20) + (1 \times 48) = 2048$$

$$M_{B,II} = (100 \times 20) + (1 \times 7) = 2007$$

$$[M] =$$

	I	II
A	8548	2048
B	8514	2007

$$M_{A,I} + M_{B,II} = 10555$$

$$M_{A,II} + M_{B,I} = 10562$$

L'optimum que nous fournirait la méthode hongroise, est donnée par la deuxième solution. C'est à dire que

I serait affecté à B

II " " à A

Ce résultat anormal aboutit à donner au candidat le moins bien noté le poste A apparaissant en tête des deux listes de vœux, car la valeur marginale de son souhait d'aller en B est inférieure à celle de l'autre postulant.

Pour limiter de telles situations, il suffit de pondérer les notes de vœux par la note de l'administration, de sorte que le poids d'un souhait sera d'autant plus important que la note du candidat sera élevée.

.../...

Dans notre exemple, si l'on donne à μ la valeur $\frac{aa}{100}$ la matrice des "capacités" devient :

$$M_{A,I} = (100 \times 85) + \left(\frac{85}{100} \times 48\right) = 8541$$

$$M_{B,I} = (100 \times 85) + \left(\frac{85}{100} \times 14\right) = 8512$$

$$M_{A,II} = (100 \times 20) + \left(\frac{20}{100} \times 48\right) = 2010$$

$$M_{B,II} = (100 \times 20) + \left(\frac{20}{100} \times 7\right) = 2001$$

		I	II
[M] =	A	8541	2010
	B	8512	2001

$$M_{A,I} + M_{B,II} = 10542$$

$$M_{A,II} + M_{B,I} = 10522$$

Ainsi le candidat I sera affecté en A et II en B.

Cette solution beaucoup plus satisfaisante n'a cependant pas été retenue pour l'application pratique qui sera présentée lors du paragraphe suivant : les résultats étant similaires quelque soit la méthode employée. Ceci est dû au fait que dans le cas particulier que nous avons traité, la dispersion des notes autour de la moyenne est faible.

Le "programme d'affectation A.H." utilise donc actuellement la méthode pour laquelle $\mu = 1$; ceci n'exclut évidemment pas une transformation dans le cas où le problème traité l'exigerait (1).

.../...

(1) En fait le choix d'une méthode relève d'une décision de caractère politique, suivant l'importance relative que l'on voudra donner à l'un ou l'autre des deux critères :

- liste de voeux
- note de l'administration

Lors de la présentation du dossier de candidature (page 85), il a été précisé que le Rectorat demandait au candidat maître-auxiliaire, s'il accepterait une affectation quelconque au cas où tous les postes de sa liste de vœux seraient indisponibles.

Cette remarque nous permet d'aborder un dernier problème concernant l'évaluation des coefficients de la "matrice des capacités".

** Doit-on limiter les affectations réalisables aux postes cités dans la liste de vœux ?

C'est à dire, doit-on, dans la "matrice des capacités" ne placer des coefficients, que dans les cases correspondant aux vœux du candidat, sachant qu'au niveau d'une case vide, l'affectation est impossible ?

Cette question est suscitée par deux observations très importantes :

- La première est celle que nous venons d'évoquer : le candidat accepte-t-il d'être affecté sur un poste ne correspondant pas à ses vœux ?

- La seconde est beaucoup plus technique : le "programme d'affectation A.H." fournit des solutions telles que tous les candidats soient affectés à un poste. Cependant si, pour l'un d'entre eux, les villes et les districts de sa liste de vœux ne disposent que de peu de postes, la colonne à laquelle il se rapporte dans la matrice ne contiendra que quelques coefficients parmi lesquels sera choisie l'affectation.

Dans l'hypothèse, où ces quelques postes sont très convoités, le candidat sera néanmoins affecté sur l'un d'eux, même si ses notes sont très faibles.

Le candidat, dont la liste de vœux correspond à peu de postes, est donc favorisé.

Des solutions peuvent-elles être trouvées pour répondre à ces observations ?

.../...

Pour satisfaire la première remarque, on peut avoir tendance à distinguer, lors de la construction de la matrice, deux catégories de candidats :

- ceux qui refusent d'être nommés en dehors des zones distinguées dans leur liste de vœux. Seules les cases correspondantes seront alors remplies à l'aide d'un coefficient calculé comme nous l'avons décrit plus haut.

- ceux qui au contraire, acceptent d'être nommés sur un autre poste. Dans ce cas, de la même manière que précédemment, on remplira les cases en rapport avec leurs vœux, mais en outre on rendra possible les affectations sur tous les postes, en disposant dans les autres cases de la colonne un même coefficient pouvant par exemple être calculé en ne tenant compte que de la note de l'administration ($bb = 0$).

Cette solution dont les résultats sont conformes au but recherché, a l'inconvénient majeur de tomber dans le travers décrit lors de notre seconde observation : les candidats refusant d'être affectés sur un poste n'apparaissant pas dans leur zone de vœux ont peu de coefficients dans leur colonne et sont donc certainement favorisés par rapport à leurs concurrents.

Une autre solution qui, cette fois, satisfait la seconde remarque serait de généraliser à tous les candidats ce que l'on avait adopté précédemment pour une partie d'entre eux, à savoir de placer dans toutes leurs cases une note minimum et de n'introduire une bonification que pour les postes apparaissant sur la liste de vœux.

Cette méthode sans doute plus équitable présente deux inconvénients. D'une part de ne plus satisfaire à la première remarque : tous les candidats pouvant être affectés à tous les postes. D'autre part d'exiger une place importante en mémoire centrale puisque l'on travaille sur une matrice dont le coefficient de remplissage est maximum.

En définitive, pour l'application pratique qui nous intéresse, nous avons préféré conserver la solution qui consiste à ne donner une note qu'aux postes apparaissant dans la liste des vœux. En dehors des caractéristiques informatiques de cette méthode (elle nécessite moins de place en mémoire centrale, mais du fait du nombre réduit des coefficients, on converge sans doute moins rapidement vers le résultat optimum), deux raisons nous ont poussé à la retenir pour le "programme d'affectation A.H." :

- Le résultat final de l'affectation n'est qu'un outil de travail à la disposition du service du personnel et de l'inspecteur pédagogique en vue de l'établissement d'une liste qui sera elle-même étudiée en commission paritaire. Ces contrôles successifs nous assurent que toutes les anomalies seront supprimées.

- La seconde raison, la plus importante à notre avis, est la conséquence de l'initiative du Rectorat d'imposer au candidat de citer parmi ses douze vœux, six districts scolaires. Ainsi, sommes nous assurés de disposer d'un nombre de postes suffisant, de manière à éviter, dans la grande majorité des cas, les inconvénients que nous avons cités plus haut.

Ayant décrit la technique d'évaluation des coefficients de la "matrice des capacités" il s'agit maintenant d'insister sur la méthode à adopter pour introduire les éléments nécessaires à cette évaluation.

c) L'introduction des données

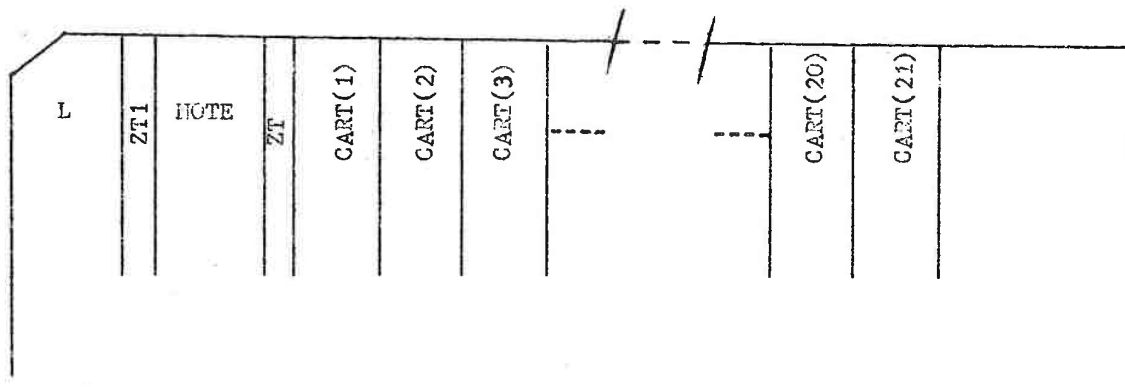
Le paragraphe précédent nous a permis d'estimer les éléments indispensables à l'application du "programme d'affectation A.H." au mouvement du personnel auxiliaire. A savoir :

- Le code de chaque candidat (de 1 à SC)
- Le code de chaque poste vacant (de 1 à SL)
- La note du postulant, établie par l'administration
- une bonification que chaque candidat a implicitement associée à chaque poste de sa liste de vœux. Celle-ci se partageant elle-même en :
 - o "note de base" pour chacun des districts cités
 - o "note complémentaire" pour chacune des villes.

.../...

L'introduction de ces données sur cartes ne présente en fait aucune difficulté, mais c'est plutôt l'établissement des bordereaux de perforation pouvant rapidement devenir insurmontable dès que les dimensions du problème traité croissent, qui va retenir notre attention dans ce paragraphe.

Rappelons tout d'abord la structure des cartes de données que nous avons définie lors du chapitre précédent :



L est le code du candidat,
 NOTE est sa note établie par l'administration,
 CART(i) est soit le code d'un poste apparaissant dans sa liste de vœux, soit la bonification qu'il lui est attribuée.

Ces derniers éléments peuvent être introduits: poste après poste, c'est à dire qu'à chacun d'eux, on associe une note différente ;

Dans ce cas : $ZT = 0$

CART(impair) = le code du poste

CART(pair) = la bonification correspondante

par liste de postes,
 tous les postes de cette suite bénéficiant de la même note :

$ZT =$ le nombre de suites sur la carte

et pour la (j+1)ième suite de cette carte :

CART ((j*3) +1) = le code du premier poste de la suite

CART ((j*3) +2) = le code du dernier poste de la suite

CART ((j*3) +3) = la bonification commune à tous ces postes.

.../...

Cependant, cette note introduite dans la zone CART peut être : soit une "note de base", elle aboutit alors à la création d'une ligne dans le tableau T ; soit une "note complémentaire" pour laquelle on ne crée pas de nouvelle ligne dans T, mais que l'on se contente d'ajouter à la "note de base" d'un coefficient existant dans le tableau.

Aussi est-il indispensable de séparer ces deux catégories de notes, la première sera introduite sur des cartes pour lesquelles $ZT1 = 0$; les "notes complémentaires" apparaîtront sur des cartes où $ZT1 = 1$ (la zone NOTE est alors nulle).

Ainsi fait, il se dégage que l'on dispose de 4 types de cartes :

- type A : $ZT1 = 0$, $ZT = 0$

On introduit les données poste par poste, et, à chaque fois, on crée une nouvelle ligne dans T ;

- type B : $ZT1 = 0$, $ZT \neq 0$

On traite des ~~suites~~ de postes et on crée, également, une nouvelle ligne dans T pour chaque poste.

Dans les deux types suivants, on ne crée pas de nouvelles lignes dans T, on se contente d'ajouter une "note complémentaire" à un coefficient existant.

- type C : $ZT1 = 1$, $ZT = 0$

Cette "note complémentaire" est donnée poste par poste ;

- type D : $ZT1 = 1$, $ZT \neq 0$

Elle est donnée ici pour tous les postes de chaque suite.

Une telle multiplication des diverses catégories de cartes et la vive attention nécessaire pour les remplir, peuvent rendre complexe l'établissement des bordereaux de perforation. Aussi paraît-il indispensable pour le service chargé de ce travail, d'établir une méthode logique et systématique qui facilitera l'élaboration de ces bordereaux et qui diminuera les risques d'erreurs.

.../...

Nous nous proposons de présenter ici le cheminement que nous avons, nous-mêmes, suivi dans le cadre de notre application réelle.

Rappelons que nous disposons initialement :

- d'une liste de postes vacants (regroupés par districts) (1)
- d'un dossier par candidat sur lequel on trouve :
 - . une note provenant de l'administration
 - . une série de vœux où apparaissent les noms de six villes et de six districts.

.../...

(1) Signalons le bien fondé du choix du Rectorat de Nancy, de n'autoriser les candidats à n'exprimer que des noms de villes et de districts dans leurs listes de vœux et non pas des noms d'établissements scolaires, comme c'est le cas dans d'autres académies. Cette mesure aurait eu pour conséquences, d'accroître les difficultés d'élaboration des bordereaux de perforation mais également de réduire la probabilité de trouver des postes vacants dans les vœux des candidats. On a effectivement moins de chance d'avoir un poste vacant dans un établissement d'une ville plutôt que dans cette ville toute entière.

Cependant il semble nécessaire que le Rectorat procède à une modification du découpage de ses districts scolaires. En effet cette carte a été établie sans tenir suffisamment compte des contours réels des zones d'attraction, ce qui gêne les candidats dans l'établissement de leur liste de vœux.

POUR CHAQUE POSTE VACANT :

lui affecter un code compris entre 1 et SL.

POUR CHAQUE CANDIDAT :

1. lui affecter un code compris entre 1 et SC ;
2. Préparer une carte de chacun des types A, B, C et D ;
3. POUR CHAQUE DISTRICT DE LA LISTE DE VOEUX :

31 - Noter sa place dans la liste et lui assigner la "note de base" correspondante :

pour le 1er district		"note de base" = 42
2e	"	" = 35
3e	"	" = 28
4e	"	" = 21
5e	"	" = 14
6e	"	" = 7

Existe-t-il un ou plusieurs postes vacants dans ce district ?	O	N
S'agit-il d'une suite de postes ?	O	N
32 - Avancer d'une place les districts suivants dans la hiérarchie des voeux		1
33 - Sur la carte du type A, CART(impair) = code du poste CART(pair) = "Note de base"	1	

34 - Sur la carte du type B,
 CART ((j~~2~~3) +1) = code du 1er poste
 de la **suite**
 CART ((j~~2~~3) +2) = code du dernier
 poste de la **suite**
 CART ((j~~2~~3) +3) = "note de base"

35 - Passer au district suivant s'il
 existe, SINON aller en 4

1

2

2

2

4. POUR CHAQUE VILLE DE LA LISTE DE VOEUX :

41 - Noter sa place dans la liste et lui affecter la
 "note complémentaire" correspondante :

soit + 6 pour la 1ère ville

+ 5	"	2ème	"
+ 4	"	3ème	"
+ 3	"	4ème	"
+ 2	"	5ème	"
+ 1	"	6ème	"

Existe-t-il un ou des postes vacants dans cette ville ?	O				N
S'agit-il d'une suite de postes?	N		O		
Cette ville appartient-elle à un district cité dans la liste ?	N (1)	O	N (1)	O	
42 - Avancer d'une place les villes suivantes dans la hiérarchie des vœux					1
43 - Calcul de la note bb (1)	1		1		
44 - Sur la carte de type A : CART(impair) = code du poste CART(pair) = bb (1)	2				
45 - Sur la carte de type C : CART(impair) = code du poste CART(pair) = "Note complémentaire"		1			
46 - Sur la carte de type B : CART ((jx3) +1) = code du 1er poste CART ((jx3) +2) = code du dernier poste CART ((jx3) +3) = bb (1)			2		

.../...

(1) Dans ce cas particulier, la note bb correspondant à cette ville peut être calculée ainsi :

si p est le nombre de codes de districts qui la précède dans la liste

$$bb = 42 - (p \times 7) + \text{"note complémentaire"}$$

CART ((jx3) +2) = code du dernier poste

48 - Passer à la ville suivante si elle existe, SINON aller en 5.

3

2

3

3

2

- Préciser dans la zone ZT, le nombre de ~~lignes~~ de postes traitées par carte.

Malgré cela, l'expérience montre que l'établissement des bordereaux de perforation reste un travail laborieux parcequ'il faut, chaque fois que le code d'un poste est à écrire, se référer à une table donnant, en face de son nom en clair, le code qu'on lui associe. C'est cette dernière opération qu'il s'avère indispensable d'améliorer si l'on désire que la phase d'introduction des données devienne satisfaisante.

La seule solution, semble-t-il, permettant d'éviter cette référence constante à une table de correspondance, est de faire apparaître le code du poste sur le dossier de candidature et c'est alors par lecture directe que l'opérateur remplit le bordereau.

Or ce code ne peut être déterminé qu'à partir du moment où l'on connaît la liste précise des postes vacants, c'est à dire bien après l'établissement des dossiers de candidature.

On peut surmonter cette difficulté en modifiant légèrement ces dossiers de candidature, en particulier, la partie réservée aux vœux.

Celle-ci peut en effet se présenter sur une page complète où apparaîtrait, sur plusieurs colonnes, les noms des 165 villes de l'académie (CEG et CET compris) que l'on regroupera le plus judicieusement possible en fonction des zones d'attraction, derrière le nom du district dont elles dépendent.

En outre, devant chaque nom de ville et de district, on réserve un emplacement, à la disposition du candidat, qui lors de l'établissement de sa liste de vœux fera apparaître, dans douze de ceux-ci, un numéro (de 1 à 12) exprimant la hiérarchie de ses vœux.

Par ailleurs, on dispose d'une grille aux dimensions identiques à celles de la feuille des vœux. Cette grille est ajourée au niveau des cases réservées à la numérotation de ses souhaits par le candidat.

Dès réception de la liste des postes laissés vacants, on procède à leur codification (de 1 à SL) et on reporte sur la grille les codes de chaque ville et de chaque district à l'endroit correspondant, sur la feuille de vœux, aux noms de cette ville ou de ce district. Lorsqu'une ville contient plusieurs postes vacants, on se contente d'inscrire les codes extrêmes de cette suite de postes.

Ainsi, lors de l'établissement des bordereaux de perforation, il suffira à la personne qui en est chargé, de poser la grille sur la feuille de vœux pour connaître, par lecture directe, la hiérarchie que le candidat a introduite dans ses vœux et les codes des postes correspondants.

L'insistance avec laquelle nous avons traité le problème de l'élaboration des bordereaux de perforation, peut sembler excessive eu égard à la nature plutôt théorique de notre travail. Cependant, il nous est apparu indispensable de nous attarder sur ce sujet, car il constitue, à notre avis, certainement une des qualités essentielles pour un programme appelé à devenir opérationnel.

Remarquons enfin que, quelque soit la méthode de retenue pour l'introduction des données, il est indispensable, afin d'assurer une meilleure fiabilité aux résultats, de procéder à des tests de vraisemblance sur celles-là.

Pour clore ce paragraphe sur les conditions d'utilisation du "programme d'affectation A.H." dans le cadre du mouvement du personnel, abordons la dernière section traitant de :

d) L'exploitation des résultats

Pour tirer au mieux partie de ces résultats, il faut d'une part soigner leur présentation et d'autre part disposer de suffisamment d'éléments permettant de s'assurer de leur qualité.

1/ leur présentation

Dans son état actuel, le "programme d'affectation A.H." sort sur imprimante la liste des candidats maîtres-auxiliaires et les postes auxquels ils sont affectés dans une solution optimale.

Dans ces résultats, les noms des candidats et ceux des postes se présentent sous la forme de codes, ce qui rend difficile leur interprétation. C'est pourquoi, il est indispensable de constituer un sous-programme de sortie qui, à partir d'une table de correspondance, permettra d'éditer les résultats en clair.

.../...

Chaque table de correspondance créée dans le courant du mois de Juillet pour l'établissement de la première liste d'affectation, sera nécessairement mise à jour avant chacun des passages ultérieurs du programme d'affectation. Ceci, en vue d'en éliminer les candidats déjà nommés et les postes définitivement occupés.

2/ leur qualité

Le "programme d'affectation A.H." nous fournit une des solutions optimales, la première que l'ordinateur ait déterminée. Or il est très fréquent que dans la matrice d'affectation saturante, on puisse relever plusieurs solutions optimales de même "capacité".

Ces résultats s'avèrent intéressants pour le service du personnel qui, par comparaison des listes, pourra discerner les permutations réalisables entre les candidats et ainsi améliorer l'ensemble des affectations en tenant compte d'éléments subjectifs que l'on n'a pas pu introduire dans la "matrice des capacités".

Cette aide précieuse, mais non indispensable pour l'exploitation des résultats, nécessite la conception d'un programme de recherche des solutions optimales dans la matrice d'affectation, du type de celui que proposait la "méthode de recherche exhaustive du couplage maximal" (Chapitre II).

Cette dernière extension mise à part, nous avons abordé dans ce paragraphe : d'une part la façon dont nous avons utilisé le "programme d'affectation A.H." et d'autre part les améliorations indispensables à apporter pour rendre ce programme opérationnel. Il s'agit du minimum de transformations nécessaires pour faciliter l'exploitation dans le cadre d'une application pratique.

Ce sont d'ailleurs les résultats d'une telle application que nous allons aborder dans la section suivante, consacrée à l'analyse d'un exemple établi à partir de données réelles.

2. Exécution d'une affectation à l'aide de données réelles

Il s'agissait pour nous, d'utiliser le "programme d'affectation A.H." dans le cadre de l'application concrète qui nous intéresse. Nous nous sommes cependant limités à l'étude d'une seule matière : les sciences naturelles, pour laquelle il importait d'établir la liste d'affectation optimale des candidats maîtres-auxiliaires aux postes déclarés vacants par le ministère.

Ce travail a été mené ~~parallèlement~~ à celui du service du personnel du Rectorat, dans le courant du mois de Juillet 1972, ce qui nous a permis de confronter nos résultats à ceux qu'il avait établis manuellement.

Initialement on dispose :

- d'un catalogue de noms d'établissements et du nombre de postes libres que chacun possède (121 postes)

- des dossiers de 167 candidats avec leurs notes et leurs vœux.

La première phase de notre travail a été de structurer la liste des postes à pourvoir.

a) Constitution de la liste des postes

En fait, c'est sur la liste des villes que l'on travaille, en ordonnant celles-ci au sein de chaque district, de manière à respecter les zones d'attraction, et à constituer ainsi des regroupements géographiques de localités, tels que ceux ci correspondent, le plus finement possible, à l'expression des vœux des candidats. Plus le district est vaste, plus cette organisation doit être faite avec précision.

En outre, on associe à chaque ville un ou plusieurs codes (de 1 à SL). Chaque code correspondant à un poste disponible.

Ensuite, il s'agit d'établir des bordereaux de perforation.

.../...

b) Etablissement des bordereaux de perforation

Nous ne reviendrons pas sur la difficulté que représentait la consultation, très fréquemment répétée, de la liste des postes.

Près de six heures, nous ont été nécessaires pour la rédaction des bordereaux, représentant exactement 309 cartes, soit 1,85 carte par postulant.

Ce dernier chiffre semble faible ; en effet à chaque candidat devrait correspondre au moins 2 cartes, l'une se rapportant aux districts, l'autre aux villes apparaissant dans la liste de voeux.

Or quelques candidats se sont contentés de n'énoncer que des noms de districts, sans profiter de l'avantage qui leur était offert de préciser leurs souhaits en donnant des noms de villes. Une seule carte suffisait alors.

Ce phénomène, résultant d'ignorance ou de négligence de la part des postulants, devrait pouvoir être supprimé par une amélioration et, en particulier, une clarification de la fiche de voeux. Le nombre moyen de cartes par candidat devrait alors être légèrement supérieur à 2.

Le taux moyen de remplissage des cartes est d'environ 60 %.

Une fois la perforation terminée et vérifiée, nous pouvions introduire le programme en ordinateur.

c) Passage sur ordinateur

La matrice carrée (167 x 167) sur laquelle l'ordinateur travaille contient 11.580 éléments significatifs (soit un coefficient de remplissage de 41,52 %.

.../...

Quant au taux d'occupation de la mémoire centrale disponible pour les données, il est précisé par la relation de la page 79 pour laquelle :

$$4 \left(\frac{n^2 \times p}{100} \right) + 7n + 64 \leq 62300$$

si $n = 167$

et $p = 41,52$

alors $47553 < 62300$

Notre problème occupe environ 76 % de la mémoire disponible. C'est après 133 itérations que l'ordinateur a déterminé et édité une solution optimale saturante. Le temps d'unité centrale s'est élevé à 4,203 minutes, le temps total d'exécution étant de 5,398 minutes.

d) Les résultats

Ne pouvant présenter ici les listes de résultats fournies par le service du personnel du Rectorat d'une part, et par l'ordinateur d'autre part, il s'avère difficile d'émettre un avis sur la valeur respective de chacune d'elles, les différences mises en évidence n'étant fréquemment l'expression que de simples nuances. C'est le cas, par exemple, du maître-auxiliaire affecté par l'ordinateur dans une ville voisine de celle où le Rectorat l'a nommé et entre lesquelles il ne marquait aucune préférence dans ses vœux.

Nous pouvons cependant indiquer les observations que nous a inspirées le collationnement des deux listes.

Dans chacune d'elles, tous les candidats ont été nommés sur des postes correspondant à leurs vœux.

Néanmoins, sur 167 postulants :

- les affectations de 143 d'entre eux s'avèrent pratiquement identiques :

- . 96 ont reçu la même affectation
- . 33 ont été désignés dans une ville très proche de celle proposée par le Rectorat,
- . 14 ont été affectés dans un district voisin ;

.../...

- pour les 24 autres candidats, des solutions assez dissemblables apparaissent dans les deux listes :

- . 11 se voient affectés dans un district éloigné,
- . et 13 d'entre eux, sont nommés sur un poste dans la liste émise par l'ordinateur, alors qu'ils sont absents de celle du Rectorat.

Ces différences se répercutent sur la fonction-objectif (somme de toutes les "capacités") qui passe, si l'on utilise le même système de notation, de 852.908 pour la solution du Rectorat, à 859.786 pour celle du calculateur.

Dans cet écart de 6.878, intervient pour une grande partie (6.100) l'apparition des 13 nouveaux maîtres-auxiliaires (+ 80.400) en remplacement d'autres candidats moins bien notés (+ 74.300) de la liste rectorale.

Le reste (778) provient exclusivement des améliorations que l'ordinateur a apportées dans la sélection des postes d'affectation pour chacun des postulants, de manière à satisfaire au mieux les vœux qu'ils ont exprimés.

De tels résultats semblent à l'avantage de la solution automatique par rapport à la méthode traditionnelle.

Cependant cette constatation doit être assortie d'une importante réserve. En effet, dans le calcul de la "capacité" de chaque candidat à satisfaire chaque poste, sont ignorés tous les éléments non quantifiables, le plus souvent d'ordre psychologique, qui sont pourtant essentiels pour la prise de décision finale.

C'est pourquoi, à notre avis, une utilisation effective de la méthode hongroise, nécessiterait une étude approfondie, d'une part de tous les éléments devant intervenir dans l'évaluation des coefficients de la matrice et d'autre part de la manière de les pondérer et de les combiner entre eux. Ainsi, pourrait-on certainement améliorer la qualité objective des solutions, mais quoiqu'il en soit, il ne faudrait jamais les considérer comme des résultats définitifs, mais seulement comme une base de travail pour l'inspection pédagogique et le service du personnel du Rectorat.

.../...

L'intérêt de l'utilisation du "programme d'affectation A.H." réside dans la sensible amélioration qu'il apporte aux solutions proposées pour le mouvement du personnel, en particulier dès que le nombre de candidats ou de postes dépasse quelques dizaines (1). Mais par ailleurs, il présente l'inconvénient de nécessiter un temps de préparation trop lourd qui élimine l'avantage de la rapidité du traitement sur ordinateur.

C'est pourquoi, nous semble-t-il, son utilisation ne peut devenir vraiment rationnelle, qu'à partir du moment où il sera intégré dans une chaîne de traitements plus vaste, dans les fichiers de laquelle il pourra puiser directement ses informations d'entrée.

C'est l'approche d'un tel projet que nous nous proposons de présenter dans le paragraphe suivant.

III - LA GESTION AUTOMATIQUE DU PERSONNEL

Dans la première partie de ce paragraphe, il s'agit de s'assurer que, dans le cadre du service du personnel, la création d'une chaîne de traitement est une opération réalisable.

1. Etablissement d'une chaîne de traitement ?

Le mouvement du personnel, bien qu'une des plus lourdes tâches du service, ne constitue en fait qu'une partie de la mission de celui-ci ; ainsi peut-on répartir ses fonctions en trois catégories :

- La nomination et la promotion du personnel auxiliaire,

.../...

(1) La dimension du problème à partir de laquelle on a intérêt à automatiser le traitement, est difficile à apprécier et est essentiellement fonction du taux de remplissage de la matrice des coûts (ou des capacités).

- La constitution de statistiques diverses à l'adresse du Ministère de l'Education Nationale,

- et, également à l'intention de ce dernier, l'établissement des listes de mérites pour la nomination et la promotion du personnel titulaire.

La nomination du personnel auxiliaire est l'essentiel du "mouvement des délégués rectoraux" sur lequel nous allons revenir.

La promotion du personnel titulaire ou auxiliaire est une opération automatique, puisque périodiquement (tous les 3 ans) chaque enseignant bénéficie d'un avancement "à l'ancienneté". Cependant, après deux ans et demi, il existe une promotion "au choix", c'est à dire que l'on classe les gens par échelons suivant des critères fournis par un barème et l'on choisit 20 % des auxiliaires parmi les mieux notés, pour les faire accéder à l'échelon supérieur.

Dans le cadre du reclassement du personnel, le service a également la charge de ranger par ordre de mérite les adjoints d'enseignement et les maîtres-auxiliaires ayant exercé au moins 5 ans, en vue de leur inscription sur les listes d'aptitude aux fonctions de professeurs certifiés stagiaires.

De par leur nature (décompte d'années de travail, application de barèmes ...) ces opérations s'avèrent aisément automatisables.

Il en est de même pour l'établissement de statistiques que le Ministère demande au Rectorat chaque année. Le plus souvent celles-ci portent soit sur la composition du corps professoral, soit sur la répartition et l'occupation des postes d'enseignement dans l'académie.

Quant à la nomination des titulaires, elle donne lieu à l'envoi, à Paris, de listes établies par ordre préférentiel, à partir de critères similaires à ceux utilisés pour les maîtres-auxiliaires. Là encore, on a affaire à un travail très compatible avec l'ordinateur.

De tout ceci, il ressort que la mission du service, aussi bien au niveau de la gestion des délégués rectoraux, qu'à celui de ses relations avec le Ministère, est constituée de tâches dont le caractère systématique permet d'envisager une automatisation aisée, rendue d'autant plus nécessaire que le nombre de cas à traiter s'avère très important (par exemple pour 1972 : 4.466 enseignants et autant de postes).

La réalisation de ce projet nécessite l'organisation de ces différentes tâches au sein d'une chaîne de traitement qui puiserait tous les renseignements concernant chaque enseignant et chaque poste dans une série de fichiers. On peut ainsi envisager la création de trois fichiers fondamentaux :

- le fichier des enseignants titulaires
- le fichier des délégués rectoraux
- le fichier des postes d'enseignement

qui d'ailleurs, peuvent constituer l'ébauche d'une banque de données utilisables par plusieurs autres services du Rectorat (service de la comptabilité, service de la carte scolaire ...).

Devant l'intérêt qu'elle semble présenter une telle automatisation, nous pouvons envisager d'y intégrer le mouvement des délégués rectoraux et de bénéficier ainsi des informations disponibles dans chacun de ces fichiers.

2. Insertion du "programme d'affectation A.H." dans une chaîne de traitement de la gestion du personnel

Où se situerait la phase de l'affectation au sein de cette chaîne ?

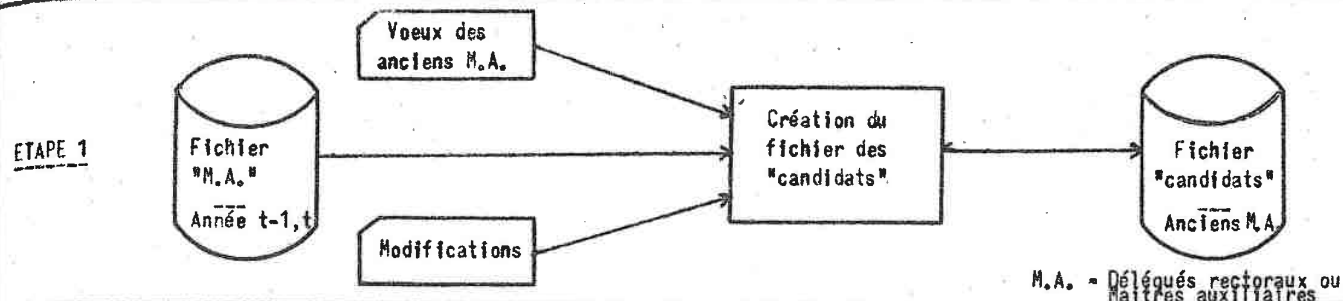
Sa fonction étant de déterminer, pour chaque candidat, le poste qu'il aura à pourvoir et, pour chaque poste, l'enseignant qui s'y trouvera affecté, le programme va donc se situer en tête de la chaîne : lors de la création des fichiers de l'année scolaire (t , $t + 1$).

L'organigramme suivant nous montre comment pourraient être organisées les opérations du mouvement du personnel.

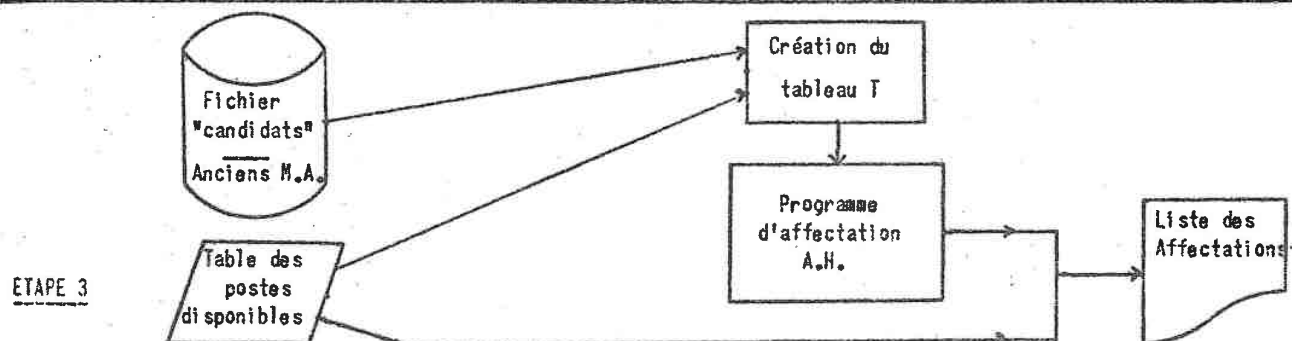
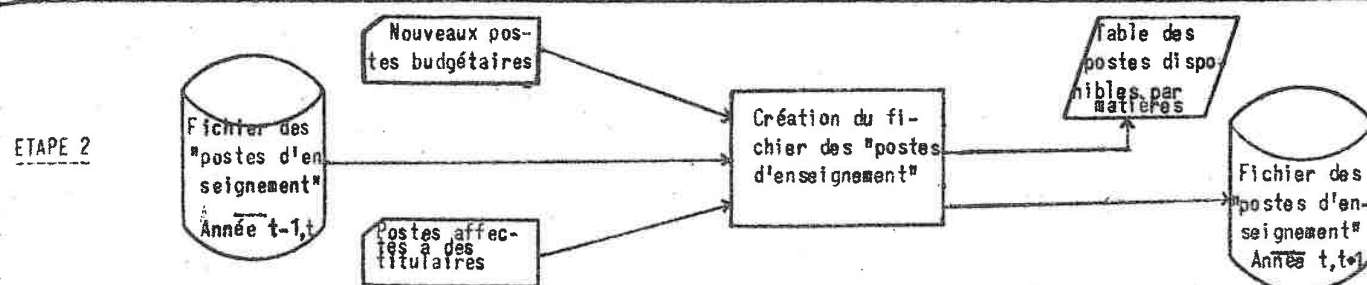
.../...

{ t = numéro de l'année civile durant laquelle s'effectue la rentrée scolaire qui nous intéresse
{ $t + 1$ = numéro de l'année civile suivante.

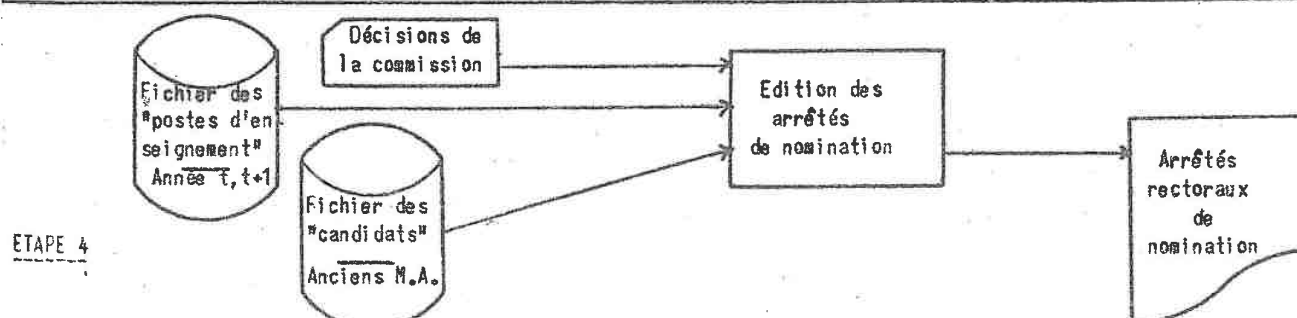
RECEPTION DES DOSSIERS DE CANDIDATURE



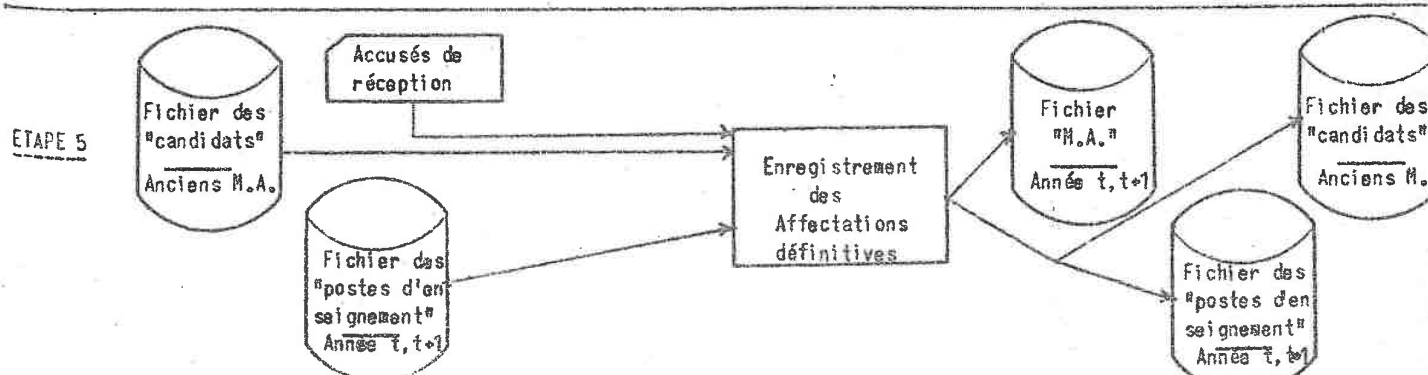
RECEPTION DES LISTES DE POSTES D'ENSEIGNEMENT POUR L'ANNEE SCOLAIRE (t, t+1)



REUNION DE LA COMMISSION PARITAIRE



ENVOI DES ARRETES DE NOMINATION



Les deux premières étapes procèdent à l'organisation de l'information en provenance des dossiers de candidature et des listes de postes qu'envoie le Ministère. Celle-ci est utilisée lors de la 3ème étape durant laquelle s'effectue l'opération d'affectation proprement dite, dont les résultats serviront à la commission paritaire qui arrêtera la liste des nominations. Les intéressés seront informés par les arrêtés rectoraux de nomination édités au cours de la 4ème étape et dont ils devront accuser réception. Leur décision est prise en compte dans les fichiers de postes et d'enseignants de l'année (t, t + 1), lors de la dernière étape.

Reprenons ces étapes en précisant le rôle et la nature de chacune d'entre elles ainsi que l'information dont elle doit disposer et celle qu'elle doit fournir.

Auparavant, précisons que le fichier des enseignants (fichier "M.A.", fichier "candidats") et celui des postes disposeront d'une structure très simple où apparaîtront principalement dans chaque enregistrement (un par enseignant et par poste) :

- un numéro de code caractéristique de chacun :
 - pour chaque enseignant : le numéro INSEE
 - pour chaque poste : un numéro tel qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes : d'une part les postes géographiquement proches les uns des autres ont un numéro voisin, et d'autre part, il sera toujours possible d'insérer de nouveaux postes dans l'ordre numérique existant.

Une solution qui respecte ces deux exigences est de disposer d'un numéro de code de 8 chiffres :

D	T	V	V	E	E	P	P
---	---	---	---	---	---	---	---

où

D = chiffre caractéristique du département
T = " " district (maximum 8 districts en Moselle)
VV = nombre caractéristique de la ville
EE = " " de l'établissement
PP = " " du poste.

Avec cette codification, l'introduction des voeux d'un candidat, nécessitera au maximum 48 caractères :

6 districts = 6 x "D T" = 12 caractères

6 villes = 6 x "D T V V" = 24 caractères

12 caractères séparateurs.

- des renseignements généraux concernant :

• l'enseignant : état civil, diplômes, antécédants professionnels, matière enseignée ... ;

• le poste : matière, caractéristiques de l'enseignant, importance des effectifs

- des informations nécessaires pour les statistiques et le reclassement du personnel.

* Dans les fichiers "candidats" une zone supplémentaire de 48 caractères sera réservée pour les voeux.

Analysons chacune des cinq étapes de l'organigramme du mouvement du personnel en vue de la rentrée de l'année scolaire (t, t + 1).

Première étape : Création du fichier des candidats

Le Rectorat a réceptionné jusqu'en Mai de l'année t les dossiers de candidature. Dans le courant du mois de Juin pour les anciens maîtres-auxiliaires seulement, on crée un fichier "candidats" à partir du fichier "M.A." de l'année scolaire (t - 1, t). N'apparaîtront dans le nouveau fichier que les anciens maîtres-auxiliaires ayant fait acte de candidature, c'est à dire ceux pour lesquels on dispose d'une liste de voeux.

Lors de cette étape, on prendra en compte les éventuelles modifications intervenues depuis la dernière mise à jour du fichier "M.A." et on calculera la note de chaque candidat par application du barème (il s'agit de la note actuellement établie par l'administration).

.../...

Deuxième étape : Création du fichier des postes d'enseignement

Vers la fin Juin, le Ministère adresse au Rectorat la liste des postes budgétaires pour l'année scolaire (t, t + 1) en précisant ceux laissés vacants après la nomination des titulaires.

A partir de ces listes et du fichier de l'année précédente où l'on puise les renseignements concernant les anciens postes, on crée d'une part le fichier des "postes d'enseignement" et d'autre part, pour chaque matière, une table des postes disponibles numérotés de 1 à SL. Rappelons que dans le "programme d'affectation A.H." il est nécessaire que les codes utilisés, soient consécutifs, le premier étant l'unité.

Troisième étape : "Le programme d'affectation A.H."

A l'issue de cette étape l'ordinateur propose une liste d'affectations optimales qui sera d'abord soumise à la critique du service du personnel et de l'inspecteur pédagogique avant d'être discutée et entérinée lors de la commission paritaire qui se réunit à la fin du mois de Juillet.

Cependant avant d'utiliser le "programme d'affectation A.H." il est nécessaire d'organiser les informations d'une manière compatible avec la structure retenue pour les entrées lors de sa programmation. C'est à dire qu'il faut procéder à la construction des tableaux T, COL et LIG tels que nous les avons définis précédemment (cf supra page 72).

Pour cela nous disposons :

- d'un fichier "candidats" où se trouvent les renseignements issus des dossiers de candidature de tous les postulants, chacun étant affecté d'un numéro d'ordre compris entre 1 et SC ;

- de la table des postes disponibles également numérotés de 1 à SL.

Il s'agit là des éléments dont nous nous sommes servis lors de l'élaboration des bordereaux de perforation lorsque les conditions d'exploitation étaient celles du paragraphe précédent, où seul le processus de l'affectation était automatisé.

Dès lors cette lourde tâche pourra être exécutée par l'ordinateur, en lui faisant suivre une démarche qui s'inspirerait de celle que nous avons décrite p. 108 et suivantes.

Quatrième étape : Edition des arrêtés de nomination

Immédiatement après la réunion de la commission paritaire, ses décisions sont transmises aux intéressés et aux services académiques par envoi des "arrêtés rectoraux de nomination d'auxiliaires". Les renseignements nécessaires à l'édition de ces états figurent dans les fichiers des "candidats" et des "postes d'enseignement".

Cinquième étape : Enregistrement des affectations définitives

Vers le 15 Août, on crée le fichier des "M.A." et on met à jour celui des "postes d'enseignement" de l'année (t , $t + 1$) à partir des réponses positives parvenues au Rectorat. Dans le même temps, on supprime du fichier "candidats" les enregistrements de tous ces enseignants définitivement nommés.

Si on désire appliquer la règle qui veut que le candidat ayant refusé un poste ne pourra plus être de nouveau nommé dans l'académie, on doit éliminer du fichier "candidats" les enregistrements de tous les postulants auxquels une affectation a été proposée.

Ce fichier "candidats" sera utilisé dans l'hypothèse où l'application de la procédure d'affectation s'avèrerait à nouveau nécessaire. C'est souvent le cas lorsqu'une nouvelle dotation de postes en provenance du Ministère, parvient au Rectorat (vers le 10 Août).

Il s'agit alors de recommencer le chemin que nous venons de parcourir en introduisant lors de la 1ère étape les nouveaux candidats maîtres-auxiliaires dans le fichier "candidats" et au cours de la seconde étape les nouveaux postes dans le fichier correspondant. Puis de la même manière que précédemment on déroule le processus jusqu'à la dernière étape.

.../...

Eventuellement dans le cas où les refus seraient très nombreux, on pourrait recommencer le cycle plusieurs fois jusqu'au moment où tous les postes seraient occupés.

Cependant dans l'hypothèse où le nombre de candidats à nommer ou de postes à pourvoir, est réduit, il n'est plus intéressant d'utiliser le "programme d'affectation A.H.". C'est par exemple la situation dans laquelle se trouve le service du personnel lorsque pour occuper un poste peu convoité, il doit procéder à plusieurs nominations successives avant de trouver un candidat qui accepte cette affectation. Aussi serait-il judicieux de substituer aux traitements de la troisième étape un simple programme d'édition. Celui-ci imprimerait d'une part les postes disponibles, en accompagnant chacun d'eux de la liste, établie par ordre de mérite décroissant, des candidats, non affectés, les ayant fait apparaître dans leurs vœux et, d'autre part la liste des postulants non encore satisfaits, auxquels on joindrait leurs souhaits et leurs notes.

Cette chaîne que nous venons de décrire possède donc un double rôle :

- d'une part elle crée des fichiers fondamentaux ("M.A." et "postes d'enseignement") qui seront exploités pour exécuter les fonctions à caractère systématique dont a la charge le service du personnel ;

- d'autre part elle propose un projet d'affectation des candidats maîtres-auxiliaires aux postes restant disponibles dans l'académie.

Dès le moment où, dans le cadre d'une automatisation du service du personnel, on a accepté les charges (assez lourdes) de perforation qu'implique l'accomplissement de la première tâche, on s'aperçoit alors que le "programme d'affectation A.H." constitue un instrument utilisable pour le mouvement du personnel, d'autant plus appréciable que sa mise en oeuvre n'exige plus un investissement très important (perforation et établissement des bordereaux) comme cela était le cas dans les conditions d'exploitation du paragraphe précédent.

Il nous semble utile, avant de clore ce chapitre, d'établir le bilan qui résulterait de la réalisation d'un tel projet.

IV - CRITIQUE DU PROJET D'AUTOMATISATION DE LA GESTION DU PERSONNEL

Notre objectif était de mettre au point un programme qui, facilitant la tâche du service du personnel du Rectorat, serait susceptible de procéder rapidement à l'affectation des candidats maîtres-auxiliaires aux postes d'enseignements disponibles dans l'académie.

L'automatisation de la seule opération d'affectation ne permet pas, à notre avis, d'atteindre cet objectif.

En effet, face à quelques avantages, ses inconvénients sont trop lourds.

Les avantages tout d'abord :

- Le service du personnel et l'inspection pédagogique disposent d'une série d'affectations qui constitue une base de travail et facilite ainsi leur tâche ;

- recherchant une solution optimale, l'ordinateur procure à l'ensemble des candidats un niveau de satisfaction moyen sans doute plus élevé que celui fourni par l'affectation manuelle.

Quant aux inconvénients on en dénombre au moins trois :

- l'imperfection des coefficients de la matrice des "capacités" à laquelle nous avons déjà fait allusion et qui nécessiterait une remise en cause de leur mode de calcul dans le cas d'une application réelle ;

- la charge importante que représente l'établissement des bordereaux de perforation. Elle compromet, certainement, la rentabilité globale de l'opération ;

- enfin, la réticence avec laquelle le service du personnel pourrait accueillir un tel projet, qui nécessiterait plus de travail de sa part, et ne lui fournirait en compensation qu'un avantage d'ailleurs guère apparent puisqu'il n'en bénéficierait qu'en partie. Cette réaction serait d'autant plus violente que les employés du service auraient l'impression que l'ordinateur se "substituerait" à eux pour l'activité qu'ils considèrent, actuellement, comme la plus intéressante, car elle nécessite un certain travail de réflexion dont sont dépouillés leurs autres fonctions, à savoir l'établissement des statistiques et le reclassement des enseignants.

Dès lors, l'intégration du "programme d'affectation A.H." dans une chaîne de gestion du personnel, sans nuire aux avantages que nous venons de citer, va permettre d'en réduire les inconvénients :

- en évitant la réaction négative que le service du personnel lui témoignait car l'ordinateur devient un instrument qui, d'une part, supprime les tâches routinières et fastidieuses et, d'autre part, aide à l'établissement des listes d'affectation ;

- en répartissant les charges de perforation sur tous les traitements de la chaîne. Ainsi, les coûts d'exploitation du "programme d'affectation A.H." s'amenuiseraient et son utilisation deviendrait économiquement plus rentable.

En outre, à une automatisation intégrale de la gestion du personnel au Rectorat, nous attribuons quelques autres intérêts non négligeables :

- disposant de tous les renseignements dans les fichiers, l'ordinateur imprime très rapidement les états de sortie. C'est un fait important. Ces éditions posent, en effet, de graves problèmes d'organisation au service car, leur dactylographie engendre des pointes de travail, en particulier, durant la période des vacances d'été ;

- présentement, les décisions de la première commission paritaire parviennent aux intéressés entre le 8 et le 15 Août, et celles de la seconde commission, au début du mois de Septembre. Ce sont les représentants du personnel enseignant qui exigent ce double mouvement, car, disent-ils, la nouvelle dotation de postes étant connue aux alentours du 10 Août, les nominations seraient décidées beaucoup trop tard, vers le début du mois de Septembre. Or, il est certain que, dans de bonnes conditions d'organisation, on doit pouvoir procéder à un mouvement unique et adresser leurs nominations aux intéressés après seulement 8 jours ouvrables. C'est à dire que les candidats seraient prévenus au plus tard le 20 Août, ce qui pourrait être accepté par les syndicats du fait qu'en contrepartie, on supprimerait une anomalie du système actuel qui interdit aux anciens délégués, nommés dès la première commission, de bénéficier des nouveaux postes créés par la dotation du 10 Août.

.../...

Pour procéder à l'affectation des maîtres-auxiliaires, les autorités académiques disposent donc d'un instrument techniquement opérationnel.

Cependant, n'ayant pas effectué une étude approfondie sur l'incidence économique et les répercussions sociales d'un tel projet d'automatisation, il nous est impossible de conclure qu'il est souhaitable de l'introduire dans le cadre du service du personnel du Rectorat.

CONCLUSION

Nous disposons donc pour résoudre les problèmes d'affectation, d'une méthode qui nous assure la convergence vers une solution optimale, et du programme informatique correspondant qui nous permet d'accéder à cette solution.

Cependant, l'extension de son emploi dans le cadre d'applications pratiques se heurte à notre avis à deux obstacles principaux :

D'une part, bien que dans sa forme actuelle le "programme d'affectation A.H." soit opérationnel et rapide pour les problèmes dont les dimensions restent dans une certaine limite, une difficulté apparaîtrait dès que nous devrions soit traiter des applications plus vastes, soit l'utiliser sur un ordinateur de moindre capacité en mémoire centrale.

Dans de telles conditions, nous serions amenés à ranger les tableaux de données sur un support périphérique et, par conséquent, à procéder à une adaptation du programme qui devrait gérer les échanges d'informations d'une mémoire à l'autre en les limitant le plus possible. Cette modification s'avère réalisable, mais se traduira probablement par un temps de traitement supérieur.

D'autre part, l'intérêt que l'on accorde au programme d'affectation est conditionné par la fiabilité que l'on peut attribuer à ses résultats. Or, celle-ci est liée non seulement à la validité des données que l'on introduit en ordinateur, mais également à la qualité de la fonction - objectif. Comme nous l'avons remarqué au cours de notre étude, la définition du contenu de cette dernière est très complexe, en particulier lorsqu'il s'agit d'applications mettant en présence des critères sociaux et humains. Aussi, il nous semble que l'établissement des coefficients de la "matrice des coûts" constituera, dans de nombreux cas, la difficulté la plus délicate à surmonter.

A N N E X E

O R G A N I G R A M M E G E N E R A L

D U

" P R O G R A M M E D ' A F F E C T A T I O N A . H . "

MODULE 1 :

DEBUT

- Déclaration des tableaux
- Estimation des constantes

MODULE 2 A :

Initialisation des variables

12

Lecture (et écriture) des données

Cartes de données

Edition des données pour vérification

Fin de la lecture ?

SC > SL

Ajouter (SC-SL) éléments nuls à chaque colonne

ZT1 = 1
Les coefficients de la carte existent-ils dans

ZT ≠ 0
s'agit-il de suites?

Construction des tableaux T, COL, LIG à partir des suites apparaissant sur la carte

Construction des tableaux T, COL, LIG à partir des coefficients "isolés" de la carte

Fin de la carte ?

Fin de la carte ?

Pour chaque coefficient de la suite, ajouter la valeur indiquée

Pour chaque coefficient "isolé" ajouter la valeur indiquée

Fin de la carte ?

Fin de la carte ?

14

Ajouter (SL-SC) colonnes d'éléments nuls à la matrice

SL > SC

MODULE 2 B :

225

S'agit-il d'une maximisation ?

Transformation de la matrice des coûts pour la recherche d'un maximum

MODULE 3 A :

Recherche du minimum dans chaque colonne

Soustraire cette valeur des éléments de la colonne

MODULE 3 :

MODULE 3 B :

Recherche du minimum dans chaque ligne

Soustraire cette valeur des éléments de la ligne

SUITE

SUITE

300

Initialisa-
tion des
variablesRecherche
d'une
solution

MODULE 4 B :

L = 1

La colonne
est-elle
affectée ?Contient-
elle des zé-
ros barrésLa ligne cor-
respondant à cha-
que zéro barré
est-elle affectée

L = L + 1

Un passage est
trouvé, on modi-
fie les affecta-
tions

L = N

MODULE 4 C :

Recherche du
nombre (TEST 2)
de colonnes non
affectées

TEST 2 = N

IMPRIM = 0

TEST 2 = N - 1

Recherche du
coût supplé-
mentaireImpression des
résultats in-
termédiairesRésultats
intermé-
diaires

MODULE 5 A :

Etablissement d'un chaînage reliant
toutes les colonnes non affectées.
Soit L une de ces colonnes.Marquage
de LL contient
des zéros
barrés ?Pour chaque zé-
ro barré : mar-
quer la ligne k
correspondanteLa ligne k
est-elle
affectée ?Soit L la
colonne
suivanteLe chaî-
nage est-il
épui-
sé ?Introduction
de la colonne
correspondante
dans le chaîna-
ge

MODULE 5 B :

Recherche du minimum dans les cases
correspondantes aux colonnes marquées ET
aux lignes non marquées.Déplacement
de certains
zérosCalcul
du coût
de l'itérationImpression de la solu-
tion optimale

FIN

MODULE 4 :

MODULE 5 :

MODULE 6 :

B I B L I O G R A P H I E

- (1) A. KAUFMANN - Introduction à la combinatoire en vue de ses applications DUNOD 1968
- (2) Cl. BERGE - Théorie des graphes et ses applications DUNOD 1967
Collection universitaire de mathématiques
- (3) B. ROY - Algèbre moderne et théorie des graphes (Tomes 1 et 2)
DUNOD 1970 - Collection finances et économie appliquée
- (4) S. VAJDA - Leçons sur la programmation mathématique traduit par
M. NOZET - DUNOD 1965
- (5) E. VENTURA et P. GORDON - La drogue - miracle du professeur Kashinawa
Collection : les clés de l'économie 1968
- (6) R. FAURE - Eléments de la recherche opérationnelle
Ed : GAUTHIER - VILLARS PARIS 1968
- (7) G. CULLMANN - Recherche opérationnelle - Théorie et pratique
Ed : MASSON et EYROLLES PARIS 1970
- (8) A. KAUFMANN - Méthodes et Modèles de la recherche opérationnelle
(Tomes 1 et 2) DUNOD 1964 - Collection : l'économie d'entreprise
- (9) C. BERGE - Sur le couplage maximum d'un graphe
Compte rendu à l'académie des sciences 1958
- (10) D. KONIG - Théorie der Endlichen and Unendlichen Graphen
Chelsea - New York 1950
- (11) L.R. FORD et D.R. FULKERSON - Flots dans les graphes - traduit par J.C. ARINAL.
GAUTHIER - VILLARS - Editeur PARIS 1967
- (12) C.W. CHURCHMAN - Eléments de recherche opérationnelle
R.L. ACKOFF
E.L. ARNOFF
DUNOD PARIS 1961
- (13) J. AGARD - Automatisation du planning mensuel du personnel navigant commercial - Revue Française d'information et de recherche opérationnelle - N° V-2 JUIN 1970
- (14) G. DESBAZEILLE - Exercices et problèmes de recherche opérationnelle
DUNOD PARIS 1964