UNIVERSITÉ DE NANCY I U. E. R. DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

THÈSE

présentée par Pierre LESCANNE
pour obtenir
le titre de Docteur de Spécialité de Mathématiques

ÉTUDE DE QUELQUES THÉORIES DES LANGAGES ET GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE KLEENE

PRÉSENTÉE DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN le 22 JUIN 1971

Jury : M. J. LEGRAS Président
M. C. PAIR Examinateur
M. J.-L. OVAERT Examinateur

UNIVERSITÉ DE NANCY I — U.E.R. DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

THÈSE

présentée par Pierre LESCANNE
pour obtenir
le titre de Docteur de Spécialité de Mathématiques

ÉTUDE DE QUELQUES THÉORIES DES LANGAGES ET GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE KLEENE

PRÉSENTÉE DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN le 22 JUIN 1971

Jury :	M. J. LEGRAS	Président
	M. C. PAIR	Examinateur
	M. J.-L. OVAERT	Examinateur

*

La bouteille que nous entourons les linges de nos blessures ne résiste à aucune envie. Prenons les coeurs, les cerveaux, les muscles de la rage, prenons les fleurs invisibles des blêmes jeunes filles et des enfants noués, prenons la main de la mémoire, fermons les yeux du souvenir, une théorie d'arbres délivrés par les voleurs nous frappe et nous divise, tous les morceaux sont bons. Qui les rassemblera : la terreur, la souffrance ou le dégoût ?

*

Dormons, mes frères. Le chapitre inexplicable est devenu incompréhensible. Des géants passent en exhalant des plaintes terribles, des plaintes de géant, des plaintes comme l'aube veut en pousser, l'aube qui ne peut plus se plaindre, depuis le temps, mes frères, depuis le temps.

*

Paul ELUARD

Capitale de la douleur

T A B L E des M A T I E R E S

INTRODUCTION

Le but essentiel de ce travail est de donner une généralisation du théorème de Kleene. Le cadre le plus commode pour la présenter est celui des "théories" de Lawrere.

Dans la première partie, nous exposons la notion de "théorie" et celle d'algèbre (ensemble muni d'un certain nombre d'opérations). Puis dans ce cadre, nous introduisons la notion d'automate fini et d'ensemble reconnu par un automate, la notion du polynôme et d'ensemble algébrique. La fin du premier chapitre est consacrée à généraliser un théorème connu pour les K-langages qui s'énonce ainsi : "Un ensemble est reconnaissable si et seulement s'il est algébrique". Ce résultat est dû à Mezei et Wright.

Dans la deuxième partie, nous exhibons les différentes "théories" des langages, ainsi que celles intervenant dans les bilangages de M. Pair.

La dernière partie est consacrée à la généralisation du théorème de Kleene. Nous définissons d'abord les opérations qui vont nous servir et qui sont la substitution et la substitution itérée. Elles généralisent dans un certain sens, le produit et le produit itéré ainsi que la substitution dans le cas des langages. Nous formalisons la notion d'ensemble régulier. Le théorème affirme qu'un ensemble est algébrique si et seulement s'il est régulier.

Je remercie Monsieur le Professeur Legras, Directeur de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique qui m'a accueilli dans son Institut et me fait l'honneur de présider ce jury.

J'adresse toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Pair qui a inspiré ce travail. Les nombreuses personnes qui travaillent avec lui, connaissent sa grande gentillesse et ses qualités d'animateur ; elles sont toujours étonnées par sa polyvalence. Sachant diriger aussi bien la recherche appliquée que la recherche théorique, Monsieur Pair a suivi de près et même précédé notre travail.

Monsieur Ovaert a bien voulu participer au jury ; qu'il en soit remercié.

Je tiens aussi à adresser mes remerciements à tous les membres de l'équipe de recherche de théories des langages ; j'aimerais les nommer tous, mais la liste en serait bien longue. Ils m'ont souvent donné des conseils et ils ont toujours crée une ambiance d'amitié propice à la recherche. Néanmoins, je soulignerai l'aide importante que j'ai reçue de Monsieur A. Quéré et de Monsieur P. Marchand.

Enfin, il me faut remercier Mesdemoiselles Claudel et Tedesco qui ont assuré, avec le sourire, la réalisation matérielle de cette thèse.

CHAPITRE I

THEORIES, ENSEMBLES RECONNAISSABLES ET ENSEMBLES ALGEBRIQUES

La plupart des résultats de ce chapitre ne sont pas nouveaux, mais sont repris d'un article de S. Eilenberg et J.B. Wright "Automata in general algebra" Information and Control vol. 11 pages 462-470.

1.1. RAPPEL SUR LES CATEGORIES

Créée en 1945 par S. Eilenberg et S. Mac-Lane, la notion de catégorie joue un rôle important dans ce qui suit ; rappelons ce qu'elle veut formaliser.

Quand on étudie les ensembles, les monoïdes par exemple, ainsi que beaucoup de théories de l'algèbre et de l'analyse, on remarque de profondes ressemblances dans les définitions que l'on est amené à introduire, telles celles de morphisme : c'est-à-dire d'application qui conserve la structure, celles d'isomorphisme, de produit, de noyau d'un morphisme (quand cette notion existe!) etc... On peut penser pouvoir définir tout ceci indépendamment des théories particulières étudiées en ne gardant que ce qu'elles ont de commun : c'est-à-dire le fait qu'il y ait des "objets" entre lesquels il y a des "morphismes" ; on ajoutera certaines propriétés sur les morphismes telles la composition, l'associativité de la composition, l'existence d'un morphisme identité et nous appelerons ceci une "catégorie".

Comme le fait que les objets sont des ensembles et les morphismes des applications ne joue aucun rôle, on n'imposera pas cette restriction.
Cela permet de plus d'étudier les objets dans l'optique actuelle des mathématiques.

"On étudie les relations entre les objets et non plus la nature même de ces objets".

Très importante aussi et historiquement antérieure est la notion de foncteur : c'est-à-dire d'application d'une catégorie dans une autre, qui va nous permettre de formaliser des notions qui font intervenir deux catégories à la fois.

Tout cela nous amène à poser les définitions qui vont suivre.

1.11. Définition d'une catégorie.

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée

a) d'une classe $Ob(\mathcal{C})$ dont les éléments sont appelés objets.

b) d'un ensemble $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ (ou $Mor(A,B)$ s'il n'y a pas ambiguïté) pour chaque couple (A,B) d'objets de $Ob(\mathcal{C})$; les éléments de $Mor(A,B)$ sont appelés morphismes de source A, de but B. On les note $f : A \dashrightarrow B$ ou bien $A \xrightarrow{f} B$ ou bien simplement f quand il n'y a pas ambiguïté sur A et B.

c) On définit une application de $Mor(B,C) \times Mor(A,B)$ dans $Mor(A,C)$ appelée loi de composition des morphismes. On note gf ou $g\ f$ le composé de g et f.

De plus les axiomes suivants doivent être satisfaits.

CAT 1 Deux ensembles $Mor(A,B)$ et $Mor(A',B')$ sont disjoints si $A \neq A'$ ou $B \neq B$.

CAT 2 Pour chaque objet A de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme $1_A \in Mor(A,A)$ tel que $1_A\ f = f$ et $g\ 1_A = g$ quels que soient f de but A et g de source A.

CAT 3 Associativité. Pour tous objets A, B, C, D de $\mathcal{C}$, si $f \in Mor(A,B)$, $g \in Mor(B,C)$ et $h \in Mor(C,D)$, alors

$$(hg)f = h(gf) .$$

Remarque : CAT 3 entraîne l'unicité de 1_A.

Un morphisme $f : A \dashrightarrow B$ est appelé un isomorphisme s'il existe un morphisme $g : A \dashrightarrow B$ tel que $gf = 1_A$ et $fg = 1_B$; g est un unique d'après CAT 2 et CAT 3. On note $g = f^{-1}$; alors g est un isomorphisme et $g^{-1} = f$.

1.12. Objet initial et objet final.

Dans une catégorie, un objet A est dit initial si pour tout objet B, $Mor(A,B)$ admet un et un seul élément. A est dit final si pour tout objet C, $Mor(C,A)$ admet un et un seul élément.

Deux objets initiaux (resp. finaux) d'une même catégorie sont isomorphes. En effet, soient A et B deux objets initiaux, $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow A$ les uniques morphismes de A dans B et de B dans A, $fg \in Mor(B,B)$, donc $fg = 1_B$, de même $gf = 1_A$.

Le raisonnement est identique s'il s'agit d'objets finaux.

1.13. Exemples de catégories.

La catégorie E des ensembles.

La catégorie E dont les objets sont les ensembles, les morphismes sont les applications, est appelée catégories des ensembles ; elle admet $\emptyset$ comme objet initial et $I = \{1\}$ comme objet final.

Un ensemble A et un élément $a \in A$ déterminent un unique morphisme qui prend a comme valeur. Nous identifierons ce morphisme à l'élément a.

La catégorie E_o.

Pour chaque entier $n = 0, 1, \ldots$ notons $[n]$ l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Alors $[0] = \emptyset$ et $[1] = I$.

On note E_o la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n]$, $n = 0, 1, \ldots$ et les morphismes les applications de $[n]$ dans $[m]$ pour $n = 0, 1, \ldots$ et $m = 0, 1, \ldots$ On remarque que $Ob(E_o) \subset Ob(E)$ et $Mor_{E_o}([n],[m]) = Mor_E([n],[m])$.

Définition.- On dit qu'une catégorie $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}$ si $Ob(\mathcal{D})$ est inclus dans $Ob(\mathcal{C})$, si pour tout A appartenant à $Ob(\mathcal{D})$, $Mor_{\mathcal{D}}(A,B)$ et si pour tout A appartenant à $Ob(\mathcal{D})$ le morphisme identité de A dans la catégorie $\mathcal{D}$ est le morphisme identité de A dans la catégorie $\mathcal{C}$.

Définition.- On dit qu'une catégorie $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie pleine d'une catégorie $\mathcal{C}$, si $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ telle que pour tout A et B appartenant à $Ob(\mathcal{D})$, $Mor_{\mathcal{D}}(A,B) = Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$.

E_o est une sous-catégorie pleine de E.

Catégories associées aux monoïdes.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à un seul objet A. Les morphismes de $\mathcal{C}$ forment l'ensemble $\mathrm{Mor}(A,A)$; le composition des morphismes est une opération interne, associative dans $\mathrm{Mor}(A,A)$. Elle admet 1_A comme élément neutre. $\mathrm{Mor}(A,A)$ est un monoïde.

Inversement si M est un monoïde, on définit comme suit une catégorie $\tilde{M}$ qui est dite associée au monoïde M. $\mathrm{Ob}(\tilde{M})$ est un ensemble à un seul élément A. $\mathrm{Mor}(A,A) = M$; la composition des morphismes est la composition dans M. 1_A est l'élément unité de M. Il est clair que $\tilde{M}$ est une catégorie à un seul objet.

On appelle catégorie duale d'une catégorie $\mathcal{C}$ et on note $\mathcal{C}^o$ la catégorie (car il est immédiat que c'en est bien une) définie par les formules

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^o) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \qquad \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^o}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A)$$

et la loi de composition de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^o}(B,C) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^o}(A,B)$ dans $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^o}(A,C)$ est définie par celle de $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,B)$ dans $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C,A)$.

On dit que $\mathcal{C}^o$ est obtenue à partir de $\mathcal{C}$ en renversant les flèches.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux catégories. On appelle catégorie produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ la catégorie que l'on note $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ dont les objets sont les couples (A,B) où A est un objet de $\mathcal{A}$ et B un objet de $\mathcal{B}$ et les morphismes $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((A,B),(A',B'))$ sont les couples (u,v) où $u \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,A')$ et $v \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B,B')$.

1.14. Foncteur.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories. On définit un foncteur covariant ou simplement foncteur par :

a) une application F de $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$.

b) une application encore notée F, qui à chaque morphisme $f : A \longrightarrow B$ de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,B)$ associe un morphisme $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A),F(B))$ de manière que :

FONC 1 Pour tout A dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, on ait $F(1_A) = 1_{F(A)}$

FONC 2 Si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont deux morphismes de $\mathcal{A}$, alors $F(gf) = F(g)\,F(f)$.

Remarquons qu'un foncteur transforme un ~~isomorphisme en un isomorphisme~~ car si $fg = 1_A$, alors $F(f)\,F(g) = 1_{F(A)}$.

Etant donnée deux foncteurs F de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ et G de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$, ils induisent des applications sur les objets et les morphismes de ces catégories. En composant ces applications, on définit un foncteur noté FG de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$ appelé foncteur composé de F dans G .

Un foncteur d'une catégorie $\mathcal{A}$ dans la catégorie duale $\mathcal{B}^o$ de $\mathcal{B}$ est dit controvariant de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

Définition.- Un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est dit fidèle (resp. pleinement fidèle), si pour tout couple (A,B) d'objets de $\mathcal{A}$, l'application de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A,B)$ dans $\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A),F(B))$ induite par F est injective (resp. bijective).

Foncteur d'oubli :

Si $\underline{gr}$ est la catégorie des groupes et $\underline{\mathcal{M}}$ celle des monoïdes, tout groupe est un monoïde et tout morphisme de groupe est un morphisme de monoïde. Le foncteur envoyant tout groupe sur lui-même et tout morphisme sur lui-même est un foncteur fidèle de $\underline{gr}$ sur $\underline{\mathcal{M}}$. Un foncteur de ce type est appelé foncteur d'oubli.

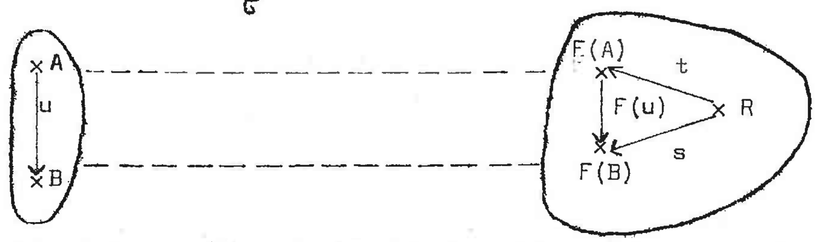
Foncteur Hom :

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Considérons le foncteur controvariant Hom de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}^o$ dans E , défini comme suit : si X et Y sont des objets de $\mathcal{C}$: $\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et si $(u,v) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}^o}((X,Y),(X',Y'))$, $\mathrm{Hom}(u,v)$ est l'application de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X',Y')$ dans $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ définie par $w \longmapsto v\,w\,u$.

1.15. Objets libres et problèmes universels.

Nous nous intéressons au problème suivant : soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ et R un objet de $\mathcal{D}$. Associons-lui une catégorie $S_F(R)$. Les objets de $S_F(R)$ sont les couples (A,t) où A est un objet de $\mathcal{C}$ et $t \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(R,F(A))$. Les morphismes de $S_F(R)$ de source (A,t) et but (B,s) sont les morphismes $u \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ tels que $F(u)t = s$. Le problème est l'existence d'un objet initial dans cette catégorie $S_F(R)$. Nous dirons qu'un tel objet est un objet attaché à R par F (ou parfois libre sur R quand $\mathcal{C}$ est la catégorie E des ensembles et qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur F) .

Dans le cas où $\mathfrak{D}$ est la catégorie E des ensembles, le problème peut s'exprimer ainsi : F envoie les objets de $\mathcal{C}$ sur des ensembles et les morphismes de $\mathcal{C}$ sur des applications. Un couple (A,t) est libre sur R si pour tout couple (B,s), il existe dans $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ un morphisme unique tel que $F(u)t = s$.



Unicité de la solution : Comme il s'agit d'un objet initial dans la catégorie $S_F(A)$, la solution du problème universel est unique à un isomorphisme près, c'est-à-dire que si (A,t) et (B,s) sont deux solutions, il existe un isomorphisme $u \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ tel que $F(v)t = s$.

L'existence est moins évidente ; elle caractérise le foncteur F choisi (cf. Mitchell : Theory of categories [7]).

1.16. Catégorie de catégories.

On peut définir une catégorie dont les objets sont les catégories d'une certaine classe U et les morphismes les foncteurs covariants que l'on appelle catégorie des U-catégories.

1.2. THEORIES ET π-ALGEBRES.

1.21. Introduction.

Quand nous étudions une théorie en algèbre, nous définissons sur un ensemble entrant dans le cadre de cette théorie, un certain nombre d'opérations. Par exemple dans le cas des espaces vectoriels sur un corps K, il y a une opération binaire notée +, autant d'opérations unaires que d'éléments de K et une opération 0-aire, c'est-à-dire sans arguments, qui détermine parmi les éléments d'un espace vectoriel, un élément neutre. La composition de ces opérations permet de définir des opérations n-aires, c'est-à-dire à n arguments; par exemple si λ et μ sont donnés

$\lambda(a+b) + \mu c + 0$ est une opération à 3 arguments.

Il va falloir composer des opérations n-aires ; dans ce but, il est intéressant d'introduire des opérations à n arguments et à m valeurs ; elles pourront se composer avec des opérations à m arguments. Si A est un ensemble muni des opérations de la théorie que nous appelerons algèbre, à une telle opération correspond une application de A^n dans A^m.

Dans la suite, on veut faire abstraction des algèbres pour ne s'intéresser, dans un premier temps, qu'aux schémas des opérations sans référence, aux applications qu'elles peuvent définir sur telle ou telle algèbre. Nous ne voulons évidemment pas, dans cette introduction, donner une définition formelle de cette notion de schémas; cependant, examinons quelques-unes de leurs propriétés.

Notons $\mathbb{T}([n], [m])$ l'ensemble des schémas d'opérations à m arguments et n valeurs; soient $\varphi \in \mathbb{T}([n], [m])$ et $\psi \in \mathbb{T}([\ell], [n])$. La composition de φ et ψ donne le schéma d'une opération à m arguments et ℓ valeurs, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{T}([\ell], [n])$. On définit ainsi une application de $\mathbb{T}([n], [m]) \times \mathbb{T}([\ell], [n])$ dans $\mathbb{T}([\ell], [n])$. Cela nous conduit donc à définir une catégorie dont les objets sont les ensembles $[n]$ et dont les morphismes sont les schémas d'opérations. Enfin, pour conserver l'ordre dans les compositions, nous adapterons sur les algèbres une notation postfixée.

1.22. <u>Théorie</u>.

Une théorie $\mathbb{T}$ est une catégorie telle que

T 1 Les objets de $\mathbb{T}$ sont les $[n]$ pour $n = 0, 1, \dots$

T 2 E_0 est une sous-catégorie de $\mathbb{T}$.

T 3 Si $(\varphi_i : I \longrightarrow [p])$, $1 \leqslant i \leqslant n$ est une famille de morphismes, il existe un morphisme φ unique $[n] \longrightarrow [p]$ tel que $\varphi_i = \varphi \circ i$ pour $i \in Mor_{E_0}(I, [n])$.

Remarque 1.- On note $\varphi = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ le morphisme défini en T 3. Alors pour chaque morphisme $\varphi : [n] \longrightarrow [p]$ dans $\mathbb{T}$, nous avons $\varphi = \langle \varphi^1, \dots, \varphi^n \rangle$ (où φi note la composition des morphismes φ et i).

Remarque 2.- D'après l'axiome T 3, on voit qu'il existe un morphisme unique $0_n : \emptyset \longrightarrow [n]$ comme c'était déjà le cas pour E_o, mais il peut exister dans $\mathbb{T}$ des morphismes $\varphi : I \longrightarrow \emptyset$. Ils représenteront les opérations 0-aires dont nous avons parlé dans l'introduction.

Notation : à $\mathrm{Mor}_{\mathbb{T}}([n], [m])$ nous substituerons $\mathbb{T}([n], [m])$.

Les théories forment une catégorie $\mathfrak{J}$ dont les objets sont les théories et les morphismes sont les foncteurs F qui se réduisent à l'identité sur E_o, c'est-à-dire telle que

$$F([n]) = [n]$$

$$F(\varphi) = \varphi \text{ si } \varphi \text{ est un morphisme de } E_o$$

$$\text{et } F(\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle) = \langle F\varphi_1, \dots, F\varphi_n \rangle$$

Nous les appelerons projection.

E_o est un objet initial dans cette catégorie.

Si le foncteur F est fidèle, la projection est dite fidèle.

1.23. $\mathbb{T}$-algèbres.

Soit $\mathbb{T}$ une théorie. Une $\mathbb{T}$-algèbre est constituée par un ensemble A et pour chaque n et p d'une application de $\mathbb{T}([n], [p])$ dans l'ensemble des applications de A^p dans A^n. Si $\varphi \in \mathbb{T}([n], [p])$ et si $x = (x_1, \dots, x_p)$, l'application de A^p dans A^n est notée $(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1, \dots, x_p)\varphi$ ou encore $x\varphi$. De plus les axiomes suivants sont satisfaits.

TA 1 Si φ est un morphisme de E_o, $x'_i = x_{\varphi i}$.
TA 2 Si $\psi : [q] \longrightarrow [n]$ est un morphisme de $\mathbb{T}$, alors $(x\varphi)\psi = \mathscr{X}(\varphi\psi)$.

1.23.1. Morphisme de $\mathbb{T}$-algèbre.

Un morphisme de $\mathbb{T}$-algèbre $f : A \longrightarrow B$ est une application de A dans B telle que pour tout morphisme φ de $\mathbb{T}$

$$f[(x_1 ,\dots, x_p)\varphi] = (f\, x_1 ,\dots, f\, x_p)\varphi$$

ou plus brièvement

$$f(x\varphi) = (fx)\varphi \quad \text{où} \quad fx = (f\, x_1 ,\dots, f\, x_p) \quad .$$

C'est exactement la notion de morphisme de structure algèbrique que nous connaissons : morphisme de groupe, de monoïde, etc... Nous les appelerons aussi $\mathbb{T}$-morphismes.

1.22.2. La catégorie $\mathbb{T}^b$ des algèbres.

$\mathbb{T}^b$ est la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{T}$-algèbres et dont les morphismes ont été définis ci-dessus ; la loi de composition est celle des applications.

Remarque.- Les opérations p-aires dans les $\mathbb{T}$-algèbres sont représentées par les morphismes de $\mathbb{T}(I, [p])$. L'axiome T 3 montre que tous les autres morphismes s'y ramènent.

En particulier si $p = 1$, $\mathbb{T}(I,I)$ forme une famille opérant à droite sur les $\mathbb{T}$-algèbres ou encore une loi de composition externe. Si $p = 0$, $\varphi \in \mathbb{T}(I,\emptyset)$ définit une application $(\ )\varphi$ sur une $\mathbb{T}$-algèbre A qui détermine un élément de A que nous noterons φ_A .

Des exemples de théories et de $\mathbb{T}$-algèbres seront donnés dans le chapitre 2 consacré à l'étude des applications aux langages. Regardons cependant le cas limite, où la théorie $\mathbb{T}$ est réduite à E_o . Etant donnée une E_o-algèbre A , les applications $\varphi : A^n \longrightarrow A^m$ sont les seules projections, les E_o-algèbres sont tout simplement les ensembles et les morphismes de E_o-algèbres les applications. On a donc $E_o^b = E$.

1.23.3.- <u>Algèbres libres.</u>

Soit $A_k = \mathbb{T}(I, [k])$. On peut munir A_k d'une structure de $\mathbb{T}$-algèbre comme suit : soit $\varphi \in \mathbb{T}([n], [p])$ et $x_1, \dots, x_p$ des éléments de A_k ; $\langle x_1, \dots, x_p \rangle$ appartient à $\mathbb{T}([p], [k])$ et $\langle x_1, \dots, x_p \rangle \varphi = \gamma$ appartient à $\mathbb{T}([n], [k])$. Donc $\gamma = \langle \gamma^1, \dots, \gamma^n) \rangle$ s'identifie à un élément de A_k^n et φ définit une application de A_k^p dans A_k^n.

<u>Proposition</u>.- A_k^n est ainsi muni d'une structure de $\mathbb{T}$-algèbre.

Axiome T 1 Soit $\varphi \in \mathbb{T}([n], [p])$ un morphisme de E_o

$\gamma = \langle x_1, \dots, x_p \rangle \varphi = \langle \langle x_1, \dots, x_p \rangle \varphi_1, \dots, \langle x_1, \dots, x_p \rangle \varphi_i, \dots, \langle x_1, \dots, x_n \rangle \varphi_n \rangle$

On s'aperçoit que :

$$\gamma_i = \langle x_1, \dots, x_p \rangle \varphi_i = x_{\varphi_i}$$

Axiome T 2 Si $\psi \in \mathbb{T}([k], [n])$:

$(x_1, \dots, x_p)(\varphi \psi)$ est défini par $\langle x_1, \dots, x_p \rangle (\varphi \psi)$.

D'après l'associativité dans $\mathbb{T}$, on obtient

$$\langle x_1, \dots, x_p \rangle (\varphi \psi) = (\langle x_1, \dots, x_p \rangle \varphi) \psi \quad .$$

Chaque application $i : I \longrightarrow [k]$, $i = 1, \dots, n$ appartient à E_o et à A_k. On peut donc définir une application canonique K de $[k]$ dans A_k.

Considérons le foncteur $F : \mathbb{T}^b \longrightarrow E$, appelé foncteur d'oubli, de $\mathbb{T}^b$ dans E et défini ainsi : si $A \in \mathrm{Ob}(\mathbb{T}^b)$, $F(A)$ est l'ensemble sous-jacent à A. Et si $g \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{T}^b}(A,B)$, $F(g)$ est l'application de $F(A)$ dans $F(B)$ induite par le morphisme de $\mathbb{T}$-algèbre g. (cf. 1.27.) (A_k, K) est un objet de $\mathbb{T}^b$ attaché à $[k]$ par F, où par abus de langage A_k est libre sur $[k]$.

Nous traduisons cela dans la proposition suivante :

<u>Proposition</u>.- Toute application $f : [k] \longrightarrow A$ se prolonge de manière unique en un morphisme de $\mathbb{T}$-algèbre $\bar{f} : A_k \longrightarrow A$.

Démonstration : <u>existence</u>: l'application $\bar{f}$ définie par $\bar{f}\varphi = (f_1, \dots, f_k)\varphi$ est un morphisme de $\mathbb{T}$-algèbre qui prolonge f.

<u>unicité</u>: Soit g un tel morphisme prolongeant f.

Remarquons que $\varphi = \langle 1, \dots, k \rangle \varphi$ si $\varphi \in A_k$ et $\langle 1, \dots, k \rangle$ représente l'identité de $[k]$ dans $[k]$. On a alors

$$g(\varphi) = g(\langle 1, \ldots, k \rangle \varphi) = g(\langle 1, \ldots, k \rangle)\varphi$$

$$= (g1, \ldots, gk)\varphi$$

Or comme $gi = fi$, on a $g\varphi = f\varphi$.

1.23.4.- Algèbre initiale.

A_o est la Π-algèbre libre sur l'ensemble vide et la proposition affirme qu'il existe un morphisme unique $\xi_A : A_o \longrightarrow A$, c'est-à-dire que A_o est l'objet initial de la catégorie Π^b.

1.23. Théories libres.

On construit les théories par "générateurs" et "relations", c'est-à-dire par "quotient" de théories "libres".

Définissons donc d'abord ce qu'est une théorie libre :

soit $\Omega = (\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles et posons

a) $\Pi(0, [n], [p]) = E_o([n], [p])$

b) si $k > 0$

$$\Pi(k, [1], [p]) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Pi(k-1, [n], [p]) \times \Omega_n$$

$$\Pi(k, [n], [p]) = \bigoplus_{i_1 + \ldots + i_n = k} \Pi(i_1, [1], [p]) \times \ldots \times \Pi(i_n, [1], [p]) .$$

On écrit alors

$$\Pi([n], [p]) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \Pi(k, [n], [p]) .$$

Le signe $\oplus$ note la somme directe ou réunion disjointe dans la catégorie des ensembles.

Si $\varphi \in \Pi(k, [n], [p])$, on dit que φ est de degré k et on écrit $d\varphi = k$. Remarquons que si $n \neq n'$ ou $p \neq p'$, $\Pi([n], [p])$ est disjoint de $\Pi([n'], [p'])$. Afin de pouvoir considérer une catégorie, définissons une application $\Pi([n], [p]) \times \Pi([q], [n]) \longrightarrow \Pi([q], [p])$.

Soit $\varphi \in \Pi([n], [p])$ tel que $d\varphi = k$ et $\psi \in \Pi([q], [n])$ tel que $d\psi = h$; l'image de (φ, ψ) sera notée $\varphi\,\psi$. Puisque $\varphi \in \Pi(k, [n], [p])$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ où $\varphi_j \in \Pi(i_j, [1], [n])$ et $i_1 + \ldots + i_n = k$.

On définit $\varphi\psi$ par récurrence sur le degré de ψ .

1) $d\psi = 0$, c'est-à-dire $\psi \in E_o([q],[n])$. On pose alors $\varphi\psi = (\varphi_{\psi_1}, \dots, \varphi_{\psi_q})$. Si l'on pose $\ell = i_{\psi_1} + \dots + i_{\psi_q}$, d'après les notations ci-dessus, on a $\varphi\psi \in \Pi(\ell, [q], [p]) \subset \Pi([q],[p])$.

2) $d\psi \neq 0$ et $q \neq 1$, $\psi \in \Pi([q],[n])$ et $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_q)$ puisque $d\psi_1 < d\psi \dots d\psi_q < d\varphi$. On sait définir $\psi_i \in \Pi([1],[p])$ pour $1 \leq i \leq q$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on définit alors

$$\varphi\psi = (\varphi\psi_1, \dots, \varphi\psi_q) \in \Pi([q],[p]) .$$

3) $d\psi \neq 0$ et $q = 1$, $\psi \in \Pi(k,[1],[n])$. Alors il existe m tel que $\omega \in \Omega_m$, $\psi = (\psi', \omega)$ où $\psi' \in \Pi(k-1, [m], [n])$. On note $\psi = \psi'\omega$. On sait définir $\varphi\psi' \in \Pi([m],[n])$. On pose $\varphi\psi = (\varphi\psi', \omega) \in \Pi([1],[p])$.

<u>Associativité</u> : Montrons que l'application ci-dessus définie est associative. Soit $\varphi \in \Pi([n],[p])$, $\chi \in \Pi([q],[n])$ et $\psi \in \Pi([r],[q])$. Montrons que $(\varphi\chi)\psi = \varphi(\chi\psi)$ par récurrence sur $d\psi$.

1) $d\psi = 0$. Si on écrit $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_q)$ et $\varphi\chi = ((\varphi\chi)_1, \dots, (\varphi\chi)_q)$ on a par définition (cf. 2 ci-dessus) pour $1 \leq i \leq q$, $(\varphi\chi)_i = \varphi(\chi_i)$. Donc

$$(\varphi\chi)\psi = ((\varphi\chi)_{\psi_1}, \dots, (\varphi\chi)_{\psi_r}) = (\varphi(\chi_{\psi_1}), \dots, \varphi(\chi_{\psi_r}))$$

$$= \varphi(\chi_{\psi_1}, \dots, \chi_{\psi_r}) = \varphi(\chi\psi) .$$

2) $d\psi > 0$ et $r \neq 1$. $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)$ et $d\psi_i < d\psi$ pour $1 \leq i \leq r$

$$(\varphi\chi)\psi = ((\varphi\chi)\psi_1, \dots, (\varphi\chi)\psi_r) = (\varphi(\chi\psi_1), \dots, \varphi(\chi\psi_r))$$

$$= \varphi(\chi\psi) .$$

3) $d\psi > 0$ et $q = 1$. Compte tenu du n° 3 ci-dessus dans le cas particulier où $\psi = \omega$. On obtient

$\varphi(\chi\omega) = (\varphi\chi)\omega$ et si l'on pose $\psi = \psi'\omega$

$(\varphi\chi)\psi = (\varphi\chi)(\varphi'\omega) = \varphi(\chi(\psi'\omega)) = \varphi(\chi\psi)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

La catégorie Π dont les objets sont les ensembles $[n]$ pour $n = 0, 1, \ldots$ où $Mor_{\Pi}([n], [p]) = \Pi([n], [p])$ dont la loi de composition a été définie ci-dessus est une théorie. On l'appelle théorie libre sur Ω et on la note $E_o[\Omega]$. Elle vérifie la propriété suivante :

<u>Proposition</u>.- Si l'on se donne une théorie Π' et une famille de fonctions

$\Omega_n \xrightarrow{f_n} \Pi'(I, [n])$ pour $n = 0, 1, \ldots,$

Il y a une et une seule projection F de $E_o[\Omega]$ dans Π' prolongeant ces applications.

<u>Unicité</u> : soient G et F deux morphismes de $E_o[\Omega]$ dans Π' prolongeant les f_n. Montrons que $F = G$. L'égalité sur les objets est certaine. Voyons pour les morphismes si $d\varphi = 0$, alors φ est un morphisme de E_o et $F\varphi = G\varphi = \varphi$.

Supposons que $F\psi = G\psi$ pour $d\psi \leq n$ et soit φ tel que $d\varphi = n + 1$, φ se factorise de manière unique $\varphi = \psi\omega$ et $d\varphi = d\varphi+1$. Donc $d\psi = n$ et $F\psi = G\psi$, d'où :

$$F(\varphi) = F(\psi\,\omega) = F(\psi)\,F(\omega) = F(\psi)\,f_k(\omega) = G(\psi)\,G(\omega)$$
$$= G(\psi\,\omega) = G(\varphi) .$$

<u>Existence</u> : $F\varphi$ se définit par récurrence sur le degré de φ.

<u>Remarque</u>.- Si Π' est libre et les $f_n : \Omega_n \longrightarrow \Omega'_n$, on dira que F est une "transcription".

1.24. <u>Taille</u>.

Nous appelerons taille sur une théorie libre, une fonction δ à valeurs entières vérifiant les conditions ci-dessous

* $\delta\varphi = 0$ si et seulement si φ est un morphisme de E_o
* $\delta\varphi \geqslant \operatorname{Max}_i \delta\varphi_i$
* $\delta\varphi\omega > \delta\varphi$ si $\omega \in \Omega^*_n$

Exemples : le degré est une taille ; il vérifie

$d\varphi = d\varphi_1 + \ldots + d\varphi_n$

$d\varphi\omega = d\varphi + 1$ si $\omega \in \Omega_n$

Par récurrence sur $d\varphi$, on peut définir ce que nous appelerons la hauteur

$$h\varphi = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} \; h\,\varphi_i$$

$$h\varphi\omega = h\,\varphi + 1$$

Nous avons adopté pour construire les théories libres des méthodes classiques ; mais on aurait pu les définir, soit par les schémas fonctionnels, soit comme un bilangage algébrique d'un binoïde sur $V = \bigcup_{n \geqslant 0} \Omega_n$ (cf. [8]) . Les théories libres sont à rapprocher des ensembles holomorphes libres de R. Peter [11] . (cf. [16]p.121)

1.24.2.- Multiplicité de k dans φ .

Si Π est une théorie libre, on appelle multiplicité de k entier dans $\varphi \in \Pi([q])$, le nombre $m_k(\varphi)$ vérifiant les propriétés suivantes :

M 1 $m_k(k) = 1$ et $m_k(h) = 0$ si $h \neq k$ où h et k représentent des applications de I dans $[p]$.

M 2 $m_k(\varphi\omega) = m_k(\varphi)$.

M 3 $m_k(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=q} m_k(\varphi_i)$ si $\varphi \in \Pi([q] , [p])$.

La proposition suivante est immédiate.

Proposition.- m_k existe et est unique.

On peut interpréter $m_k(\varphi)$ comme le nombre de fois qu'apparaît le morphisme k dans la décomposition de φ en morphismes des Ω_i et de $E_o(I, [n])$. La proposition suivante permet de calculer le degré du composé de deux morphismes.

Proposition.- $d(\varphi\,\psi) = d\,\psi + \sum_{i=1}^{q} m_k(\psi)\, d(\varphi k)$.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur le degré de ψ et compte tenu de D 2 et M 3 , il suffit de prouver la proposition dans le cas où $\psi \in \Pi([n] , [q])$ et $n = 1$.

Si $d\psi = 0$, alors $\psi \in E_o$. $m_k(\psi) = 0$ si $k \neq \psi$ et $m_k(\psi) = 1$ si $k = \psi$. Le résultat est immédiat.

Supposons le résultat vérifié jusqu'à l'ordre $n - 1$; il existe k et $\omega \in \Omega_k$, $\psi' \in \Pi([k] , [q])$ tels que $\psi = \psi'\omega$.

$$d(\varphi\,\psi'\omega) = d(\varphi\,\psi') + 1 = (d\,\psi' + 1) + \sum_{k=1}^{q} m_k(\psi')\, d(\varphi k)$$

et, compte tenu de M 2

$$d(\varphi\,\psi'\omega) = d\psi + \sum_{k=1}^{h=q} m_k(\psi')\, d(\varphi k) .$$

1.25. Congruence dans les Π-algèbres.

Une congruence dans une Π-algèbre est une relation d'équivalence stable pour les opérations de A, c'est-à-dire si $a_i \sim a_i'$, alors $(a_1, \ldots, a_p)\varphi \sim (a_1', \ldots, a_p')\varphi$ pour chaque $\varphi \in \Pi(I, [p])$.

Le quotient A/Q a donc une structure de Π-algèbre et l'application canonique $A \longrightarrow A/Q$ est un morphisme de Π-algèbre.

1.26. Congruence dans les théories.

C'est la donnée d'une relation d'équivalence pour chaque ensemble $\Pi([n], [p])$ satisfaisant les conditions suivantes :

CO 1 Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \Pi([n], [p])$ et $\varphi_1 \sim \varphi_2$, alors pour chaque $\psi \in \Pi([q], [n])$ et chaque $\gamma \in \Pi([p], [q])$, on a $\varphi_1\psi \sim \varphi_2\psi$ et $\gamma\varphi_1 \sim \gamma\varphi_2$.

CO 2 Si $\varphi_1 \in \Pi([n], [p])$ et $\varphi_2 \in \Pi([n], [p])$ et $\varphi_1 i \sim \varphi_2 i$ pour $i = 1, \ldots, n$, alors $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

CO 3 Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \Pi(I, [p])$ sont des morphismes de E_o et si $\varphi_1 \sim \varphi_2$, alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

La condition CO 1 permet de définir une catégorie Π/Q dont les morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes.

La condition CO 3 montre que Π/Q contient E_o et la condition CO 2 montre que Π/Q vérifie l'axiome T 3 de la définition d'une théorie.

Π/Q est donc une théorie appelée la théorie quotient de Π par Q.

Si $\Pi = E_o[\Omega]$ et si Q est une congruence sur Π, on dira que Π/Q est une théorie engendrée par Ω.

Une Π/Q-algèbre est une Π-algèbre telle que

$$(a_1, \ldots, a_p)\varphi_1 = (a_1, \ldots, a_p)\varphi_2 \quad \text{chaque fois que} \quad \varphi_1 \sim \varphi_2 .$$

$(\Pi/Q)^b$ apparaît donc comme une sous-catégorie de Π^b ; les objets sont les Π-algèbres qui sont "compatibles" avec Q .

Si δ est une taille sur Π, on définit sur Π/Q une fonction à valeurs entières δ' . Si Φ est une classe modulo Q

$$\delta'\Phi = \inf_{\varphi \in \Phi} \delta\varphi$$

δ' vérifie les propriétés suivantes :

1) $\delta'\Phi = 0$ si et seulement si $\Phi \in E$.

2) $\delta'\Phi \geqslant \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} \ \delta'\Phi_i$ si $\Phi \in \Pi(Q([n], [p])$ (En particulier

$d'\Phi = d'\Phi_1 + \dots + d'\Phi_n$

$h'\Phi = h' \ _1 + \dots + h'\Phi_n$

3) Si $\delta'\Phi \neq 0$, il existe un entier $\omega \in \Omega_n$, $\Psi \in \Pi/Q([n], [p])$ tels que $\Phi = \Psi\bar{\omega}$ ($\bar{\omega}$ est classe modulo de ω) et $\delta'\Psi < \delta'\Phi$.

A partir de maintenant, nous avons tout ce qu'il faut pour définir les théories algébriques.

1.27. Congruences particulières.

Certains théorèmes sur les théories ne sont valables qu'au cas où la congruence ne bouleverse pas trop le nombre d'opérations de base à effectuer, en particulier n'identifie pas des opérations non triviales et des projections.

Pourtant, des exemples de telles relations sont fréquents

* existence d'un élément neutre : $\varepsilon \in \Omega_0$, $\pi \in \Omega_2$

$$\langle 1 , \varepsilon \rangle \pi = 1 = \langle \varepsilon , 1 \rangle \pi$$

* idempotence

$$\langle 1 , 1 \rangle \pi = 1$$

Par contre, on s'autorisera des relations telles que l'associativité

$$\langle\langle 1 , 2 \rangle \omega_1 , 3 \rangle \omega_2 = \langle 1 , (2,3) \omega_2 \rangle \omega_1 \quad \text{pour } \omega_1 \in \Omega_2 \text{ et } \omega_2 \in \Omega_2 .$$

δ-congruence.

On appelle δ-congruence sur $E_0[\Omega]$ où δ est une taille, une congruence telle que $\varphi_1 \sim \varphi_2$ implique $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$. Si Φ est une classe de congruence,

$\delta\,\overline{\Phi}$ sera la valeur commune de $\delta\,\varphi$ pour $\varphi \in \overline{\Phi}$. La proposition suivante est alors immédiate.

Proposition.- Si Q est une δ-congruence

1) $\overline{\delta}\,\overline{\Phi} = 0$ si et seulement si $\overline{\Phi}$ est un morphisme de E_o.

2) $\overline{\delta}\overline{\Phi} \geqslant \max\limits_{1 \leq i \leq n} \overline{\delta}\,\overline{\Phi}_i$.

3) si $\omega \in \Omega_n$, alors $\overline{\delta}(\overline{\Phi}\omega) = \overline{\delta}\,\overline{\Phi} + 1$.

Remarque.- Si Q est une δ-congruence, $\overline{\delta}$ vérifie les mêmes propriétés qu'une taille sur $E_o[\Omega]$ Q. Nous dirons par abus de langage que $\overline{\delta}$ est une taille sur $E_o[\Omega]/Q$.

1.28. Foncteur sémantique.

Considérons le foncteur controvariant $\mathfrak{S}$ de la catégorie $\mathcal{J}$ des théories dans une catégorie $\mathcal{H}$ dont les objets sont les catégories $\mathbb{T}^b$, et défini comme suit

$$\mathfrak{S}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}^b .$$

Si A est une $\mathbb{T}'$-algèbre et F une transcription de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}'$, on munit A d'une structure de $\mathbb{T}$-algèbre de la manière suivante : pour $\varphi \in \mathbb{T}(I, [p])$ et $(a_1, \dots, a_p) \in A^p$

$$(a_1, \dots, a_p)\varphi = (a_1, \dots, a_p)\ F(\varphi)$$

où $(a_1, \dots, a_p)\ F(\varphi)$ est défini sur A grâce à sa structure de $\mathbb{T}'$-algèbre.

Soit f un $\mathbb{T}'$-morphisme

$$f((a_1, \dots, a_p)\varphi) = f((a_1, \dots, a_p)\ F(\varphi)) = (f\,a_1, \dots, f\,a_p)\ F(\varphi)$$
$$= (f\,a_1, \dots, f\,a_p)\varphi$$

f est donc un $\mathbb{T}$-morphisme.

En conséquence, si $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$, $\mathfrak{S}(F)$ sera le foncteur envoyant une $\mathbb{T}'$-algèbre A sur elle-même, munie de la structure de $\mathbb{T}$-algèbre comme ci-dessus et les $\mathbb{T}'$-morphismes sur eux-mêmes en tant que $\mathbb{T}$-morphisme.

$\mathfrak{S}$ est appelé foncteur "sémantique". (cf. [5]). En particulier $\mathfrak{S}$ envoie l'unique projection $E_o \longrightarrow \mathbb{T}$ sur le foncteur d'oubli $\mathbb{T}^b \longrightarrow E$, 1.29. <u>Opérations sur les théories.</u>

Nous avons parfois à considérer une théorie notée $\mathbb{T}[\Omega]$ obtenue en ajoutant librement les éléments de Ω à $\mathbb{T}$. Pour la construire, on procède comme pour les théories libres (cf. 1.23.), mais en remplaçant $E_o([n], [p])$ par $\mathbb{T}([n], [p])$ dans la première étape.

En particulier, si $\Omega_o = S$, $\Omega_i = \emptyset$ (pour $i \neq 0$) on obtient une théorie que nous noterons $\mathbb{T}[S]$; l'algèbre initiale de $\mathbb{T}[S]^b$ est $\mathbb{T}$-algèbre libre sur S.

1.3. $\mathbb{T}$ -AUTOMATES ET ENSEMBLES RECONNAISSABLES

1.31. <u>Ensemble reconnaissable.</u>

Soient A une $\mathbb{T}$-algèbre et Q une congruence dans A. Q est dite finie si elle ne définit qu'un nombre fini de classes de congruence ou, ce qui est équivalent, si A/Q ne contient qu'un nombre fini d'éléments.

Un ensemble est reconnaissable s'il est réunion de classes de congruence relativement à une congruence finie.

1.32. <u>Automate.</u>

Pour une théorie $\mathbb{T}$, un $\mathbb{T}$-automate fini est un couple (A,t) où A est une $\mathbb{T}$-algèbre finie et t un sous-ensemble de A. Les $\mathbb{T}$-automates forment une catégorie ; les morphismes $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ pour $\mathbb{B} = (B,s)$ sont les $\mathbb{T}$-morphismes tels que $f^{-1} s = t$.

Le comportement $\mathcal{B}\,\mathbb{A}$ est défini comme un sous-ensemble de la $\mathbb{T}$-algèbre initiale A_o comme suit. Soit $\xi_A : A_o \longrightarrow A$ l'unique $\mathbb{T}$-morphisme.
Alors $\mathcal{B}\,\mathbb{A} = \xi_A^{-1}\, t$.

<u>Proposition</u>.- Dans l'algèbre initiale, les comportements d'automates et les ensembles reconnaissables coïncident.

<u>Démonstration</u> : Le morphisme ξ_A définit une congruence dans A, en posant $a_1 \sim a_2$ si $\xi_A\, a_1 = \xi_A\, a_2$. La congruence est finie ; de plus $\mathcal{B}\,A$ est fermée pour Q.

Soit un sous-ensemble reconnaissable de A_o relativement à une congruence Q ; alors nous poserons $A = A_o/Q$ qui est une Π-algèbre finie, ξ_A est l'application canonique $A_o \dashrightarrow A/Q$ et posons $t : \xi_1(X)$, $A\backslash = (A,t)$; alors $X = \xi_A^{-1}\ t = \mathcal{B}\ A\backslash$.

1.33. Ensemble reconnaissable d'une algèbre libre sur S .

Soit A une Π-algèbre libre sur S . Les sous-ensembles reconnaissables de cette algèbre seront les comportements d'un automate de la théorie $\Pi[S]$. A est alors $\Pi[S]$-algèbre initialement comme nous l'avons dit.

1.4. ALGEBRES RELATIONNELLES.

Il est intéressant de généraliser la notion d'algèbre pour introduire les automates indéterministes et les ensembles algébriques.

1.41. Cas des théories libres.

Soit $\Omega = (\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille d'ensembles, soit $E_o[\Omega]$ la théorie libre sur Ω . Si A est un ensemble, notons $\bar{A}$ l'ensemble de ses parties.

Définition.- On appelle $E_o[\Omega]$-algèbre relationnelle un ensemble muni d'applications :

$$\omega : A^n \dashrightarrow \bar{A} \quad \text{pour tout} \quad \omega \in \Omega_n .$$

Si $(X_1,\ldots,X_n)$ est un n-uplet de sous-ensembles de A , on pose

$$(X_1,\ldots,X_n)\omega = \bigcup_{x_i \in X_i} (x_1,\ldots,x_n)\omega .$$

Pour tous les morphismes de la théorie $E_o[\Omega]$, on peut définir $(X_1,\ldots,X_n)\varphi$ par récurrence sur le degré de φ et ainsi munir $\bar{A}$ d'une structure d'algèbre.

Inversement si sur $\bar{A}$ il y a une structure d'algèbre satisfaisant sur les $\omega \in \Omega_n$ la loi de distributivité ci-dessus, alors la restriction à A des $\omega \in \Omega_n$ confère à A une structure d'algèbre relationnelle.

Remarque 1 : Les algèbres sont des cas particuliers d'algèbres relationnelles ; $(x_1,\ldots,x_n)\omega$ est un ensemble à un seul élément.

Remarque 2 : On notera bien que si $\varphi \notin \Omega_n$, alors φ ne vérifie pas toujours la relation d'associativité.

Examinons le cas où $\Omega_0 = \{a,b\}$, $\Omega_2 = \{\pi\}$ et $\Omega_i = \emptyset$ pour $i \neq 0$ et $i \neq 2$, considérons sur l'algèbre initiale les ensembles $X_1 = \{a,b\}$, $X_2 = \{b\}$, $\varphi = (1,(1,2)\pi)\pi$.

$$\bigcup_{x_i \in X_i} (x_1,x_2)\varphi = \{(a,(a,b)\pi)\pi \ , \ (b,(b,b)\pi)\pi\}$$

alors que $(X_1,X_2)\varphi = (X_1,(X_1,X_2)\pi)\pi$

$$= \{(a,(a,b)\pi)\pi \ , \ (a,(b,b)\pi)\pi, \ (b,(a,b)\pi)\pi, \ (b,(b,b)\pi)\pi .$$

En fait pour que $\varphi \in E_0[\Omega]$, $(I, [n])$ vérifie la propriété d'associativité, il faut et il suffit que pour tout k , $1 \leq k \leq n$, $m_k(\varphi) = 0$ ou 1 .

1.42. Cas général.

Soit $\mathbb{T}$ une théorie engendrée par une famille Ω . $\mathbb{T} = E_0[\Omega]/Q$.

Définition.- Une $\mathbb{T}$-algèbre relationnelle est une $E_0[\Omega]$-algèbre relationnelle telle que $\bar{A}$ soit une $\mathbb{T}$-algèbre.

Notons que cette définition dépend de la congruence Q considérée ; de plus toute algèbre n'est pas forcément une algèbre relationnelle.

Mais si Q est telle que $\varphi_1 \sim \varphi_2$ implique que pour tout k , $m_k(\varphi_1) = m_k(\varphi_2)$ on évite les deux inconvénients ci-dessus. Désormais, nous ne considérerons que de telles congruences.

1.43. Morphismes de $\mathbb{T}$-algèbres relationnelles et catégories des $\mathbb{T}$-algèbres relationnelles.

Un morphisme de $\mathbb{T}$-algèbre relationnelle est $\mathbb{T}$-morphisme, $f : \bar{A} \longrightarrow \bar{B}$ tel que $fX = \bigcup_{x \in X} fx$ c'est une relation R de $A \times B$ telle que $\bar{R} = \{(a,b) \mid b \in f_a\}$.

Les Π-algèbres relationnelles forment une catégorie notée $\Pi^{\natural}$ dont $\Pi^{\flat}$ est une sous-catégorie. De plus le passage de A à $\bar{A}$ définit un foncteur $\Phi : \Pi^{\natural} \longrightarrow \Pi^{\flat}$; l'objet initial A_o de $\Pi^{\flat}$ est aussi celui de $\Pi^{\natural}$. En effet, soit A une Π-algèbre relationnelle, comme $\bar{A}$ est une Π-algèbre, il existe un morphisme unique $\xi_{\bar{A}} : A_o \longrightarrow \bar{A}$, il se prolonge en un morphisme unique satisfaisant la loi de distributivité, $\xi_A : \bar{A}_o \longrightarrow \bar{A}$.

On a ainsi défini un morphisme unique la Π-algèbre relationnelle A_o dans A, nous le noterons encore ξ_A.

1.43. <u>Automate relationnel.</u>

C'est un couple $\mathbb{A} = (A,t)$ où A est une Π-algèbre relationnelle et t un sous-ensemble de A.

<u>Définition.</u>- <u>Comportement.</u>

$$\mathfrak{B}(A) = \xi_A^{-1}\, t = \{x \mid x \in A_o \ ,\ \xi_A\, x \cap t \neq \emptyset\} .$$

N.B. La notation ξ_A^{-1} est prise au sens des relations.

On y associe facilement un automate

$$\overline{\mathbb{A}} = (\overline{A}, t') \quad \text{où} \quad t' = \{X \mid X \subset A\ ,\ X \cap t \neq \emptyset\} .$$

Alors $\mathcal{B}\,\mathbb{A} = \mathcal{B}\,\overline{\mathbb{A}}$. On retrouve ici la généralisation du fait bien connu que les automates indéterministes reconnaissent les mêmes langages que les automates indéterministes. (Voir "Theory of context free languages" [4] p. 49 et 50) .

1.5. ENSEMBLES ALGEBRIQUES

1.51.- Polynômes.

Soit Π une théorie quotient d'une théorie libre.

Un polynôme $P : [n] \longrightarrow [p]$ est un n-uplet $P = (P_1 , \dots , P_n)$ où $P_1 , \dots , P_n$ sont des sous-ensembles finis de $\Pi(I, [p])$. Les éléments de P_i sont appelés les constituants de P . Si chaque P_i est réduit à un seul élément, P est dit monomial.

Soient A une Π-algèbre relationnelle et $(X_1 , \dots , X_n)$ un p-uple de sous-ensembles de A . Nous définissons

$$X\,P_i = \bigcup_{\varphi \in P_i} (X_1 , \dots , X_p)\varphi$$

$$X\,P = (X\,P_1 , \dots , X\,P_n)$$

Alors $X\,P$ est un n-uplet de sous-ensembles de A . P définit une fonction $P_A : \hat{A}^p \longrightarrow \hat{A}^n$.

Dans $\hat{A}^p$, nous définissons l'inclusion et la réunion coordonnée par coordonnée ; c'est-à-dire si

$$X = (X_1 , \dots , X_p) \quad \text{et} \quad Y = (Y_1 , \dots , Y_p)$$

$$X \cup Y = (X_1 \cup Y_1 , \dots , X_n \cup Y_n)$$

et $\quad X \subset Y$ si et seulement si $X_i \subset Y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$.

La proposition suivante montre que P_A est croissante pour la relation d'inclusion.

Proposition.- Si $X^o \subset X^1 \subset \dots \subset X^k \subset \dots$ est une suite dénombrable croissante d'ensembles, alors $\left(\bigcup_k X^k \right) P_A = \bigcup_k (X^k\, P_A)$.

<u>Démonstration</u> : Si l'on démontre l'égalité pour un polynôme P monomial et réduit à P_1, elle se conservera si P_1 est une réunion de morphisme et si P est un n-uplet $(P_1, \dots, P_n)$. Mettons-nous dans ces conditions ; il s'agit de montrer alors que

$$(\bigcup_k X^k)\varphi = \bigcup_k (X^k \varphi) \quad .$$

Raisonnons par récurrence sur la taille de φ. Si $\delta\varphi = 0$, φ est un morphisme de E_o et alors

$$(X_1^k, \dots, X_p^k)\varphi = (X_{\varphi_1}^k, \dots, X_{\varphi_p}^k)$$

d'où

$$(\bigcup_k X^k)\varphi = (\bigcup_k X_{\varphi_1}^k, \dots, \bigcup_k X_{\varphi_p}^k)$$

$$= \bigcup_k (X_{\varphi_1}^k, \dots, X_{\varphi_p}^k) = \bigcup_k (X^k \varphi)$$

Soit $\delta\varphi > 0$. Alors il existe k, $\omega \in \Omega_k$ et un morphisme ψ de Π tels que $\varphi = \psi\omega$ et donc $\delta\varphi > \delta\psi$

$$(\bigcup_k X^k)\psi\omega = \bigcup_k (X^k \psi_1, \dots, X^k \psi_k)\omega$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence à ψ

$$= \bigcup_k (X^k \psi_1, \dots, X^k \psi_k)\omega$$

et la définition 1.41. nous donne

$$(\bigcup_k X^k)\psi\omega = \bigcup_k (X^k \psi\,\omega) = \bigcup_k (X^k \varphi)$$

Considérons maintenant les polynômes $P : [n] \longrightarrow [n]$, l'application $P_A = \bar{A}^n \longrightarrow \bar{A}^n$ peut être itérée, et donne des applications $P_A^k : \bar{A}_n^n \longrightarrow \bar{A}^n$ pour lesquelles la proposition ci-dessus reste valable. En particulier si l'on conserve la notation $\emptyset$ pour le n-uplet $(\emptyset, \dots, \emptyset)$ de $\bar{A}^n$.

$$\emptyset \subset \emptyset\, P_A \subset \emptyset\, P_A^2 \subset \dots \subset \emptyset\, P_A^k \subset \dots$$

et si l'on pose $\overline{P_A} = \bigcup_k \emptyset\, P_A^k$, on obtient la proposition suivante bien connue.

Proposition.- $\overline{P_A}$ est le plus petit sous-ensemble de A vérifiant l'équation $X\, P_A = X$ pour $X \in \bar{A}^n$, ainsi que le plus petit vérifiant l'inégalité $X\, P_A \subset X$.

En effet $\overline{P_A} = \bigcup\limits_{k \geqslant 0} (\phi\, P_A^k) = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} \phi\, P_A^k = (\bigcup\limits_{k \geqslant 1} \phi\, P_A^k) P_A = \overline{P_A}\, P_A$.

$\overline{P_A}$ est une solution de l'équation $X = X\, P_A$ et de l'inégalité $X \subset X\, P_A$.

Soit B une autre solution vérifiant $B\, P_A \subset B$.

$\phi \subset B$ implique $\phi\, P_A \subset B\, P_A \subset B$ et si $\phi\, P_A^{n-1} \subset B$, alors $\phi\, P_A^n \subset B\, P_A^n \subset B$. Donc $\phi\, P_A^n \subset B$ pour tout $n \geqslant 0$ et $\overline{P_A} = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} \phi\, P_A^n \subset B$.

Dans le cas particulier où A est l'algèbre initiale A_o de Π^b , nous écrirons $\bar{P}$ au lieu de $\overline{P_{A_o}}$

La proposition suivante montre le rôle très important joué par l'ensemble $\bar{P}$.

Proposition.- Si $\xi_A : A_o \longrightarrow A$, alors $\overline{P_A} = \xi_A\, \bar{P}$ où $\xi_A : \hat{A}_o^n \longrightarrow \hat{A}^n$ est l'unique application déduite de $\xi_A : A_o \longrightarrow A$ en passant par $\xi_A : \hat{A}_o \longrightarrow \hat{A}$.

Cela provient du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}_o^n & \xrightarrow{P_{A_o}} & \hat{A}_o^n \\ \downarrow{\scriptstyle \xi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_A} \\ \hat{A}^n & \xrightarrow{P_A} & \hat{A}_n \end{array}$$

et du fait que $\xi_A\, \phi = \phi$

et $\xi_A \bigcup\limits_k X^k = \bigcup\limits_k \xi_A\, X^k$.

1.52. Un théorème d'unicité.

Théorème.- Soit Π une théorie libre et Q une δ-congruence. Si P est un polynôme de Π/Q n'ayant aucun constituant dans E_o ; alors il existe dans la Π/Q-algèbre initiale, une solution unique à l'équation $X\, P_A = X$.

Démonstration : C'est la même que celle employée pour les langages et les bilangages (cf. [12] 4.23.).

Posons : $\operatorname{ord}(P_i) = \min\limits_{\varphi \in P_i} \bar{\delta}\varphi$

$\operatorname{ord}(X_i) = \min\limits_{x \in X} \delta x$ pour $X \subset A$ et l'on pose $\operatorname{ord}(\quad) = +\infty$

$\operatorname{ord}(X_1, \ldots, X_n) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \operatorname{ord} X_i$.

On note $X \Delta Y = (X-Y) \cup (Y-X)$ la différence symétrique de X et Y et on note, si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = (Y_2, \ldots, Y_n)$:

$$X \Delta Y = (X_1 \Delta Y_1, \ldots, X_n \Delta Y_n) .$$

Lemme.- Sous les hypothèses du théorème, si $X \in \bar{A}_o^n$, $Y \in \bar{A}_o^n$ et $X \neq Y$ $\operatorname{ord}(X P \Delta Y P) > \operatorname{ord}(X \Delta Y)$.

Démonstration : Montrons, ce qui est équivalent, que pour tout $x \in X P_i \Delta Y P_i$ il existe j et $t \in X_j \Delta Y_j$ tels que $\delta x > \delta t$; si x est tel que $\delta x = \operatorname{ord}(X P \Delta Y P)$, on aura le résultat. Sans nuire à la généralité, supposons que $x \in X P_i$ et $x \notin Y P_i$; il existe alors $\varphi \in P_i$ tel que $x \in (X_1, \ldots, X_n)\varphi$ et $x \notin (Y_1, \ldots, Y_n)\varphi$.

Puisque $\delta\varphi > 1$, il existe $k > 0$ (le cas $k = 0$ est exclu car $(X_1, \ldots, X_n)\varphi \neq (Y_1, \ldots, Y_n)\varphi$, $\omega \in \Omega_k$ et $\varphi' = \langle \varphi'_1, \ldots, \varphi'_k \rangle$ tels que $\varphi = \langle \varphi'_1, \ldots, \varphi'_k \rangle \omega$.

$$x \in \bigcup_{y_j \in (X_1, \ldots, X_n)\varphi'_j} (y_1, \ldots, y_m)\omega$$

$$x \notin \bigcup_{y_j \in (Y_1, \ldots, Y_n)\varphi'_j} (y_1, \ldots, y_m)\omega .$$

Donc il existe $y_k \in (X_1, \ldots, X_n)\varphi'_k$ et $y_k \notin (Y_1, \ldots, Y_n)\varphi'_k$ tels que $x = (y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_m)\omega$. D'où $\delta x > \delta y_k$.

Si $\delta\varphi'_k > 0$, alors (y_k, φ'_k) possède les mêmes propriétés que (x, φ) et l'on peut recommencer jusqu'à ce que l'on trouve un morphisme $\varphi_j^{(h)}$ de taille 0 et un élément t vérifiant les propriétés (le nombre d'étapes est fini car $\delta\varphi > \delta\varphi'_k$) .

$\delta\varphi_j^{(h)} = 0$ implique que $(X_1, \ldots, X_n)\varphi_j^{(h)}$ est l'un des X_j . On aura donc $t \in X_j$ et $t \notin Y_j$; soit $t \in X_j \Delta Y_j$ et $\delta x > \delta y_k > \ldots > \delta t$, d'où le résultat.

Revenons à la démonstration du théorème. Si X et Y sont deux solutions distinctes telles que $X P = X$ et $Y P = Y$, on a $X P \triangle Y P = X \triangle Y$; ce qui contredit le lemme.

A partir de ce théorème, on tire un second théorème d'unicité que s'énonce comme suit :

Théorème.- Soit P un polynôme $P : [n] \dashrightarrow [n]$. Munissons l'ensemble $[n]$ de la relation binaire Γ définie par $i \Gamma k$ si et seulement si $k \in P_i$. Si le graphe $([n], \Gamma)$ est sans circuit, il existe X unique tel que $X P = X$.

La démonstration est la même que dans le cas des langages.

1.53. Ensembles algèbriques.

Un ensemble X de l'algèbre initiale A_o pour une théorie Π est dit algébrique, s'il existe un entier n et un polynôme $P : [n] \dashrightarrow [n]$ tel que $X = \overline{P_i}$; c'est-à-dire que X est la première coordonnée de la plus petite solution de l'équation $Y P_{A_o} = Y$ pour $Y \in \hat{A}_o^n$.

On a les propriétés suivantes :

1) chaque élément x de A_o est un ensemble algébrique.

2) l'ensemble vide est algébrique.

3) si X_1 et X_2 sont algébriques, alors il en est de même de $X_1 \cup X_2$.

4) si $\varphi \in \Pi(I, [p])$ et si $(X_1, \ldots, X_p)$ sont algébriques, alors $(X_1, \ldots, X_p)\varphi$ l'est aussi.

Voici maintenant les théorèmes démontrés par Mezei et Wright et repris par Eilenberg et Wright.

1.54. Théorème de Mezei-Wright.

$$\boxed{\text{1.54. Théorème.- Si } \Pi = E_o[\Omega] \text{ est une théorie libre de base finie (c'est-à-dire que } \bigcup_k \Omega_k \text{ est fini), alors dans la } \Pi\text{-algèbre initiale } A_o \text{, les ensembles reconnaissables et algébriques coïncident.}}$$

Pour démontrer ce théorème, on démontre d'abord les propositions et théorèmes qui suivent.

<u>Proposition</u>.- Etant donné un polynôme $P : [n] \dashrightarrow [n]$ dans une théorie $\pi = E_o [\Omega]/Q$ où Q est une δ-congruence, il existe un polynôme $Q : [n] \longrightarrow [n]$ tel que

i) les constituants de Q sont les constituants de P de taille strictement positive.

ii) $\overline{Q} = \overline{P}$.

En d'autres termes, tout ensemble algébrique est solution d'un polynôme qui vérifie le premier théorème d'unicité donné en 1.42.

<u>Proposition</u>.- Etant donné un polynôme $P : [n] \dashrightarrow [n]$, il existe un polynôme $Q\ [m] \dashrightarrow [m]$, $n \leqslant m$ tel que :

(i) tous les constituants de Q ont une taille $\leqslant 1$.

(ii) Q_i a les mêmes constituants de taille nulle que P_i, $i = 1, \dots, n$.

(iii) Q_i, $n < i < m$ n'a aucun constituant de degré 0.

(iv) $\overline{Q_i} = \overline{P_i}$ pour $i = 1, \dots, n$.

Théorème I.- Etant donnée une théorie libre $E_o [\Omega]$ et une δ-congruence Q sur $E_o [\Omega]$, si $\pi = E_o [\Omega]/Q$ et X est un ensemble algébrique, il existe un entier $n > 0$ et un polynôme $P : [n] \dashrightarrow [n]$ de taille 1 tel que $X = \overline{P_1}$.

Maintenant supposons que $\pi = E_o [\Omega]$ est une théorie libre de base finie.

Soit A une π-algèbre relationnelle avec $[n]$ comme ensemble sous-jacent. Nous associons à A un polynôme $A^P : [n] \dashrightarrow [n]$ de degré 1 comme suit : un morphisme $\varphi : I \longrightarrow [n]$ de degré 1 est de la forme $I \xrightarrow{\omega} [p] \xrightarrow{x} [n]$ où $\omega \in \Omega_p$ et $x = (x_1, \dots, x_p)$ est un p-uplet d'éléments de $[n]$, c'est-à-dire de A. Nous dirons que $x\omega \in P_i$ si et seulement si $i \in (x_1, \dots, x_p)\omega$ pour la structure de π-algèbre sur A.

Il est clair que cela définit une bijection entre la structure de π-algèbre relationnelle A sur $[n]$ et un polynôme $P : [n] \dashrightarrow [n]$ de degré 1.

<u>Théorème</u> 2.- Si une π-algèbre relationnelle A sur $[n]$ est associée à un polynôme $P : [n] \dashrightarrow [n]$ de degré 1 comme ci-dessus, alors

$$\overline{P_i} = \xi_A^{-1}\ i .$$

Démontrons aussi le théorème suivant :

Théorème.- Soit $\Pi = E_o[\Omega]$ une théorie libre de base finie et soit Q une congruence sur Π. Posons $\Pi' = \Pi/Q$. Les ensembles reconnaissables par les Π'-automates sont algébriques pour la théorie Π'.

Démonstration : Soit A_o (resp. A'_o) l'algèbre initiale dans Π^b (resp. Π'^b) et ξ_A (resp. ξ'_A) l'unique Π-morphisme (resp. Π'-morphisme) de A_o (resp. A'_o) dans une Π-algèbre (resp. Π'-algèbre) A.

Si A est une Π'-algèbre, c'est aussi une Π-algèbre et $\xi_A = \xi'_A \; \xi_{A'_o}$.

Soit X un sous-ensemble de A'_o reconnu par un Π'-automate $\mathcal{A} = (A,t)$. Appelons Y le sous-ensemble de A_o reconnu par $\mathcal{A}$. Puisque Y est algébrique, appelons P un polynôme tel que $\overline{P_1} = Y$.

Si l'on pose P' le polynôme de la théorie Π' déduite de P par passage au quotient, la proposition démontrée dans la section 1.51. donne

$$X = \xi_{A'_o} \; Y = (\overline{P_{A'_o}})_1 = \overline{P'_1} .$$

Donc X est algébrique.

1.55. Quelques théorèmes sur les ensembles algébriques.

Théorème.- L'image par la restriction d'une projection à l'algèbre initiale d'un ensemble algébrique est algébrique.

Démonstration : Soient $F : \Pi \longrightarrow \Pi'$ et A_o (resp. A'_o) l'algèbre initiale de la théorie Π (resp. Π'). L'application F/A_o, $A_o \longrightarrow A'_o$, restriction de F à A_o est l'unique Π-morphisme de A_o dans A'_o muni de la structure de Π-algèbre créée par $\circledS F$ comme indiqué en 1.27. Il suffit pour cela de voir que F/A_o est un Π-morphisme de A_o dans A'_o. En effet :

$$F((a_1 ,\dots, a_n)\varphi) = F(\langle a_1 ,\dots, a_n \rangle \varphi) = F(\langle a_1 ,\dots, a_n \rangle)\, F(\varphi)$$
$$= \langle F a_1 ,\dots, F a_n \rangle F(\varphi)$$

car F est une projection

$$F((a_1 ,\dots, a_n)\varphi) = (F a_1 ,\dots, F a_n)\varphi$$

d'après la structure de Π-algèbre dans A'_o.

L'image d'un ensemble algébrique X de A_o est donc un ensemble algébrique Y de la Π-algèbre A'_o d'après lun théorème de la section 1.51. Il existe donc un polynôme P tel que $\overline{P_1} = Y$. Soit $F\,P$ le polynôme dont les constituants sont les images par F des constituants de P. Sur A'_o, $\emptyset P^k$ coïncident avec $\emptyset (F\,P)^k$, donc aussi $\bigcup_{k>0} \emptyset P^k = \bigcup_{k>0} \emptyset (F\,P)^k$, et par conséquent $Y = \overline{(F\,P)_1}$.
Y est algébrique pour la théorie Π'.

<u>Corollaire</u>.- Si $F : \Pi \longrightarrow \Pi'$ est une projection d'une théorie Π dans une théorie Π' libre sur un ensemble fini, l'image par la restriction de F à A_o d'un ensemble algébrique est reconnaissable.

La démonstration découle du théorème précédent et du fait qu'un ensemble algébrique est reconnaissable si Π' est libre sur un ensemble fini.

<u>Corollaire</u>.- Si l'on est dans les conditions du corollaire ci-dessus et que de plus Π est quotient d'une théorie libre de base finie, alors l'image d'un ensemble reconnaissable est reconnaissable.

La démonstration provient du fait que pour la théorie Π, un ensemble reconnaissable est algébrique.

<u>Théorème</u>.- L'image inverse par une transcription d'un ensemble reconnaissable est reconnaissable.

<u>Démonstration</u> : Soient $F : \Pi \longrightarrow \Pi'$; $F/A_o : A_o \longrightarrow A'_o$ et Q' une congruence finie sur A'_o. Définissons sur A_o la congruence Q, $x \sim y\,(Q) \Longleftrightarrow F(x) \sim F(y)\,(Q')$. Q est une congruence finie.

Montrons que Q est compatible avec la structure de Π-algèbre sur Q. Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des éléments de A_o tels que $x_i \sim y_i$. On a alors

$$(F\,x_1, \ldots, F\,x_n)F\varphi \sim (F\,y_1, \ldots, F\,y_n)\,F\varphi$$
$$F(x_1, \ldots, x_n)\varphi) \sim F((y_1, \ldots, y_n)\varphi)$$

et donc

$$(x_1, \ldots, x_n)\varphi \quad (y_1, \ldots, y_n)\varphi\,.$$

Si X est réunion finie de classe modulo Q', alors $Y = F^{-1}(X)$ est réunion finie de classe modulo Q.

CHAPITRE II

ETUDES DE QUELQUES APPLICATIONS AUX LANGAGES

Dans ce qui suit nous appelerons du même nom les ensembles algébriques d'une théorie $\mathbb{T}$ et ceux de la théorie $\mathbb{T}(V)$ obtenus en adjoignant librement les éléments de V comme opérations 0-aires (cf. 1.29.) . Nous préciserons si nécessaire de quelle théorie il s'agit.

2.1. QUELQUES STRUCTURES SUR V^* ET LES LANGAGES ASSOCIES.

On appelle V^* l'ensemble des suites finies d'éléments de V où V est un ensemble fini appelé alphabet. Les éléments de V sont appelés les lettres et les éléments de V^* sont appelés les mots. La suite vide est notée Λ et appelée mot vide. Un sous-ensemble de V^* est appelé un langage.

2.11. Théorie des V-mémoires pointées et K-langages de Kleene.

2.1.1. Définition d'une V-mémoire pointée.

On appelle V-mémoire pointée un ensemble muni de (card V) opérations unaires notées $s \rightsquigarrow a.s$ et d'une opération 0-aire notée s_o .

Cette définition suscite la définition d'une théorie libre appelée théorie des mémoires pointées. (Elle sera libre car nous n'imposons pas de relations entre les opérations).

2.11.2. Définition d'une théorie des V-mémoires pointées.

On appelle t éorie des V-mémoires pointées et l'on note $\mathcal{M}_V$ la théorie libre engendrée par la famille $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où

$$\Omega_o = \{s_o\}$$

$$\Omega_1 = V$$

$$\text{et} \qquad \Omega_i = \emptyset \quad \text{pour} \quad i \geqslant 2 .$$

L'algèbre initiale de cette théorie s'identifie à V dans lequel Λ estl'opérateur 0-aire et les opérations unaires sont de la forme $a_1(a_1 \dots a_n) = a\, a_1 \dots a_n$.

Degré et hauteur coïncident.

Si $\alpha \in V^*$ $\quad d(\alpha) = h(\alpha) = |\alpha| + 1$

où $|\alpha|$ désigne la longueur du mot α .

Nous noterons $V^*(T)$ la mémoire pointée libre sur T.
Outre ceux qui appartiennent à V^*, ses éléments sont de la forme αA où $\alpha \in V^*$ et $A \in T$.

Les automates de cette théorie sont connus sons le nom d'automates finis.

Si V est fini, les ensembles algébriques de cette théorie sont appelés K-langages, langages de Kleene (ou langages réguliers cf. 3.31.).

2.1.2. Théorie des monoïdes sur V et langage de Chomsky.

2.12.1. Définition d'un semi-groupe sur V.

On appelle semi-groupe sur V un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et de (card V) opérations 0-aires.

Si de plus on suppose l'existence d'un élément neutre pour la loi de composition interne on dira que l'on a affaire à un monoïde.

Considérons la théorie $\mathcal{P}_{\pi}$ appelée théorie des magmas engendrée par

$$(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \qquad \Omega_2 = \{\pi\}$$
$$\Omega_i = \emptyset \quad \text{si } i \neq 2$$

2.12.2.- Définition d'une théorie des semi-groupes.

On appelle thèorie des semi-groupes la théorie notée $\mathcal{S}$ quotient de $\mathcal{P}_{\pi}$ par la plus fine relation de congruence telle que

$$\langle\langle 1,2\rangle\pi,3\rangle\pi \sim \langle 1,\langle 2,3\rangle\pi\rangle\pi .$$

Cette congruence est une d-congruence et une h-congruence.

La théorie des monoïdes notée $\mathcal{M}$ est obtenue par quotient de $\mathcal{P}_{\pi}[\Lambda]$, Λ étant adjoint comme opérateur 0-aire, par la plus fine congruence telle que

$$\langle\langle 1,2\rangle\pi,3\rangle\pi \sim \langle 1,\langle 2,3\rangle\pi\rangle\pi$$

et $$\langle\Lambda,1\rangle\pi \sim 1 \sim \langle 1,\Lambda\rangle\pi .$$

On s'intéressera souvent à $\mathcal{S}[V]$ et $\mathcal{M}[V]$.
L'algèbre initiale de $\mathcal{S}[V]$ est $V^* - \{\Lambda\}$; celle de $\mathcal{M}[V]$ est V^*.

Les ensembles algébriques de $\mathcal{M}[V]^{\flat}$ sont appelés langages de Chomsky ou C-langages.

2.12.3. Définition d'une projection de $\mathcal{M}_V$ dans $\mathbb{M}[V]$.

On peut définir une projection f de $\mathcal{M}_V$ dans $\mathbb{M}[V]$ comme suit

$$f(\Lambda) = \Lambda$$

$$f(\langle 1 \rangle a) = \langle 1,a \rangle \pi \quad \text{pour tout } a \in V .$$

Selon la définition du foncteur sémantique donné au paragraphe 1.28. , $\mathfrak{S}(f)$ est un foncteur de $\mathbb{M}[V]^{\flat}$ dans $\mathcal{M}_V^{\flat}$. Etant donné un monoïde M, $\mathfrak{S}f(M)$ est muni de la structure de mémoire suivante :

si $x \in M$ et $a \in V$ $\qquad a.x = ax$.

La restriction de f à V^* est une bijection.

2.13. Théorie $\mathcal{L}$.

Nous avons vu l'intérêt d'introduire les théories $\mathcal{M}_V$ et $\mathcal{S}[V]$ sur V^*. En effet on pouvait attacher à ces théories des ensembles algébriques qui étaient les langages réguliers et les langages de Chomsky. Posons-nous le problème inverse : quelle structure faut-il mettre sur V^* pour que les elsembles algébriques forment une famille de langages donnée.

Nous prendrons ici les langages linéaires ou quasi-rationnels, c'est-à-dire ceux qui sont solutions de systèmes du type

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \alpha_j$$

où α_j contient au plus un nom terminal.

2.13.1. Théorie libre $\mathcal{L}_1$.

Soit la théorie libre $\mathcal{L}_1$ engendrée par

$\Omega_0 = \{\Lambda\}$

$\Omega_1 = V \cup \bar{V}$ où $\bar{V}$ est un ensemble en bijection avec V

(Si $a \in V$, on notera $\bar{a}$ l'élément correspondant de $\bar{V}$) .

$\Omega_i = \emptyset$ si $i \geqslant 2$

Si $\varphi_a \in \Omega_1$ et x un élément d'une $\mathcal{L}_1$-algèbre, on notera

$$\langle x \rangle a = a \times x \qquad \text{si } a \in V$$

$$\langle x \rangle \bar{a} = x \times a \qquad \text{si } \bar{a} \in \bar{V} .$$

Considérons sur $\mathcal{L}_1$ la congruence la plus fine contenant pour tout a et pour tout b dans V

$$(a \times 1) \times b \sim a \times (1 \times b) \qquad (1)$$

et pour tout a dans V

$$a \times \Lambda \sim \Lambda \times a \qquad (2)$$

Nous noterons $\mathcal{L}$ la théorie quotient de $\mathcal{L}_1$ par cette congruence.

Proposition.- Dans la $\mathcal{L}$-algèbre initiale toute classe d'équivalence contient un et un seul élément de la forme

$(\ldots(\Lambda \times a_1 \times a_2) \times \ldots) \times a_n)$ dite forme normale.

En effet raisonnons par récurrence sur le degré :

si $dr = 1$, $r = \Lambda$, le résultat est vrai.

Supposons qu'il le soit pour s tel que $ds \leq n$ et soit r tel que $dr = n + 1$, alors

ou bien $r = s \times a$ où $a \in V$ et $ds \leq n$.

Soit s' l'unique élément sous forme normale congru à s , alors $s' \times a \sim s \times a$ et $s \times a$ est sous forme normale ; si $s \neq s'$, $s \times a$ n'est certainement pas sous forme normale, il y a donc unicité.

ou bien $r = a \times s$ où $a \in V$ et $ds \leq n$, et notons encore s' l'unique élément sous forme normale congru à s , alors

$$a \times s \sim a \times s'$$

$$s' = (\ldots(\Lambda \times a_1) \times a_2)\ldots) \times a_{n-1})$$

$$a \times s' = a \times (\ldots(\Lambda \times a_1) \times a_2)\ldots) \times a_{n-1})$$

en appliquant $(n-1)$ fois la relation (1) on obtient

$$a \times s' \sim (\ldots(a \times \Lambda) \times a_i)\ldots) \times a_{n-1})$$

mais comme

$$a \times \Lambda \sim \Lambda \times a$$

et puisqu'il s'agit d'une congruence compatible avec les opérations de $\mathcal{L}_1$

$$a \times s' \sim (\ldots(\Lambda \times a) \times a_1)\ldots) \times a_{n-1} = s'' .$$

Or à chaque étape l'élément construit est unique, s" l'est donc aussi.

Remarque : Dans la forme normale les parenthèses sont inutiles et nous écrirons alors $\wedge \times a_1 \times \ldots \times a_n$.

2.13.2. Ensembles algébriques.

D'après la proposition ci-dessus tout élément de la $\mathcal{L}$-algèbre initiale est la donnée d'une suite finie d'éléments de V ; celle-ci s'identifie donc à V^* .

La relation (1) permet d'effectuer indifféremment les opérations à droite avant les opérations à gauche ou vice-versa. Un élément de la $\mathcal{L}$-algèbre libre sur $[n]$ s'identifie donc à un mot de la forme

$$a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n\ j\ a_{n+1} \ldots a_m \ .$$

Les ensemble $\mathcal{L}$-algébriques de V^* sont donc solutions de systèmes de la forme

$$(1, \ldots, n)\ P_i = \bigcup_{j=1}^{r_j} \varphi_j$$

où φ_j est soit de la forme $\wedge a_1 \ldots a_{m_j}$

soit de la forme $a_1 \ldots a_{n_j}\ k\ a_{n_j+1} \ldots a_{m_j}$.

Ce sont donc les langages linéaires.

2.2. RAMIFICATIONS ET BILANGAGES.

La notion de ramifications a été introduite par Pair (cf. [8] : Sur les notions algébriques liées à l'analyse syntaxique) afin de formaliser les "structures arborescentes" rencontrées dans de nombreux domaines du traitement de l'information (fig. 1) . Celles-ci ont parfois plusieurs racines et sont orientées de "gauche à droite". Chaque noeud est étiqueté par une lettre appartenant à un certain alphabet, et parfois les étiquettes des feuilles appartiennent à un alphabet différent.

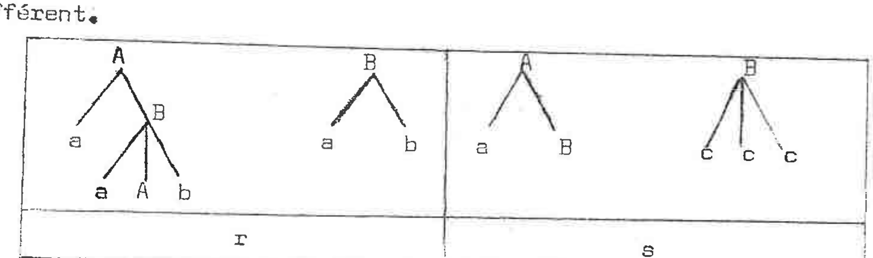


fig. 1 - Ramifications

Pour en donner une définition algébrique on est amené à se donner deux opérations.

① une loi de composition interne associative à élément neutre que nous appelerons somme et noterons + (fig. 2) .

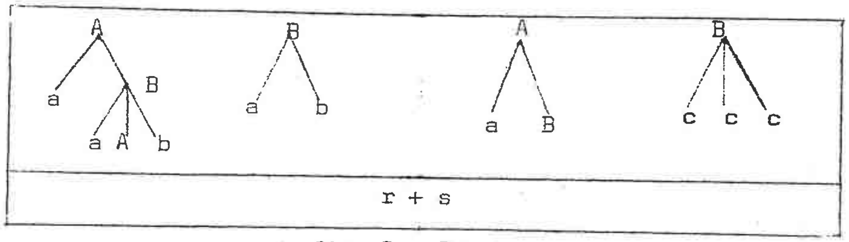


fig. 2 - Somme de ramifications

② une loi de composition externe à opérateurs dans N que nous appelerons enracinement et noterons x (fig. 3) .

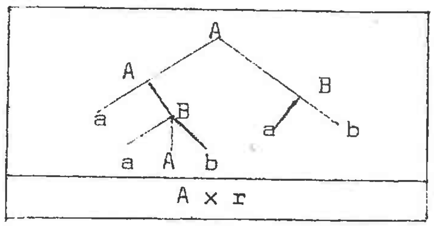


fig. 3 - Enracinement

2.21. N-binoïdes et N-semi-binoïdes.

2.21.1. Définition d'un N-semi-bonoïde.

On appelle N-semi-binoïde un ensemble muni d'une loi de composition interne associative appelée somme et notée + et de (card N) opérations unaires notées (Ax) pour A appartenant à N .

2.21.2. Définition d'un N-binoïde.

On appelle N-binoïde un N-semi-binoïde dont la loi + possède un élément neutre (notée souvent Λ) .

2.21.3. Théorie des N-binoïdes et des N-semi-binoïdes.

Considérons les théories libres

$\mathbb{T}_1$ engendrée par $\{\Omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\text{où } \Omega_0 = \{\Lambda\}$$
$$\Omega_1 = N \qquad\qquad \Omega_i = \emptyset \text{ si } i \geqslant 2$$
$$\Omega_2 = \{\pi\}$$

$\mathbb{T}_2$ engendrée par $\{\Omega'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\text{où } \Omega'_1 = \{N\}$$
$$\Omega'_i = \emptyset \text{ si } i = 0 \text{ et } i \geqslant 2$$
$$\Omega'_2 = \{\pi\}$$

Sur $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ considérons les congruences Q_1 et Q_2 les plus fines, contenant les relations

$$\begin{cases} \langle\langle 1,2\rangle\pi ,3\rangle\pi \sim \langle 1, \langle 2,3\rangle\pi\rangle\pi & (\text{mod } Q_1) \text{ et } \text{mod}(Q_2) \\ \langle\Lambda ,1\rangle\pi \sim 1 \sim \langle 1,\Lambda\rangle\pi & (\text{mod } Q_2)\,. \end{cases}$$

La théorie $\mathcal{B}_N = \mathbb{T}_1/Q_1$ sera appelée théorie des N-binoïdes et $\mathfrak{s}\mathcal{B}_N = \mathbb{T}_2/Q_2$ celle des N-semi-binoïdes.

L'algèbre initiale de $(\mathfrak{s}\mathcal{B}_N)^\flat$ est vide mais celle de $(\mathcal{B}_N)^\flat$ ne l'est pas. Celle-ci sera notée $\hat{N}$ et appelée N-binoïde initial. Si T est un ensemble, nous noterons $\hat{N}(T)$ le N-binoïde libre sur T. Les sous-ensembles de $\hat{N}(T)$ sont appelés bilangages.

Soit $\hat{N}(T)$ le plus petit sous-ensemble contenant T qui est stable par la somme et les enracinements, c'est un semi-binoïde engendré par T. Montrons que $\hat{N}(T)$ est libre sur T. Soit S un N-semi-binoïde et soit B le N-semi-binoïde obtenu en ajoutant une unité e à S telle que :

$$r + e = e + r = r$$
$$\text{et} \qquad \hat{N}(T) \times e = e\,.$$

Si f est une application de T dans B, il existe un morphisme de N-binoïde unique de $\hat{N}(T)$ dans B prolongeant f, dont la restriction à $\hat{N}(T)$ est un morphisme de N-semi-binoïde.

D'autre part si g est un morphisme de N-semi-binoïde de $\hat{N}(T)$ dans S, il se prolonge de manière unique en un morphisme $\bar{g}$ de N-binoïde de $N(T)$ dans B.

Il existe donc un morphisme de N-semi-binoïde unique $\hat{N}(T)$ dans S .

$\hat{N}(T)$ est donc un N-semi-binoïde libre sur T .

Les sous-ensembles de $\hat{N}(T)$ sont appelés bilangages.

22.2. N-pépinières.

Pour pouvoir appliquer les résultats du chapitre 1, il est intéressant d'étudier $\hat{N}$ à l'aide d'une théorie libre. Pour tout $A \in N$, nous poserons

$$f_A(r,s) = r + A \times s \text{ .}$$

Dans l'article "Définition et études des bilangages réguliers" [9] , Pair et Quéré ont montré que toute ramification de $\hat{N}$ se décompose de manière unique par rapport à ces opérations. En effet, soit $r \neq \Lambda \in \hat{N}$, il existe s et r' tels que :

$$r = s + r'$$

r' ne se décompose plus en somme de ramifications ;

r' est différent de Λ . Il existe alors A unique tel que :

$$r' = A \times t \text{ .}$$

On peut donc écrire r sous la forme

$$r = s + A \times t \text{ .}$$

La décomposition ainsi construite est unique. Cela conduit à poser la définition suivante :

2.22.1. Définition d'une N-pépinière.

On appelle N-pépinière un ensemble muni de card(N) lois de composition interne notées f_A pour $A \in N$.

2.22.2. Théorie des N-pépinières.

On appelle théorie des N-pépinières la théorie libre notée $\mathcal{P}_N$ engendrée par $\Omega = \{\Omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

telle que $\Omega_2 = N$

$$\Omega_i = \emptyset \text{ pour } i = 0 \text{ , } i = 1 \text{ , } i > 2 \text{ .}$$

L'algèbre initiale de $(\mathcal{P}_N)^\flat$ est vide, mais la N-pépinière libre sur Λ s'identifie à $\hat{N}$, où $f_A(r,s) = r + A \times s$.

Remarque 1 : Si $N = \{\P\}$, on retrouve la théorie $\mathcal{P}_{\P}$ des magmas introduite au paragraphe 1.2. du précédent chapitre.

Remarque 2 : Si l'on pose $f'_A(r,s) = A \times r + s$, toute ramification de $\hat{N}$ se décompose aussi de manière unique par rapport aux opérations de f'_A et $\hat{N}$ peut ainsi être considéré comme N-pépinière initiale pour cette structure.

2.23. Quelques projections liées à $\hat{N}$.

Pour faire passer certains résultats connus sur N^* dans $\hat{N}$ et réciproquement, on introduit différentes projections de théories liées à $\hat{N}$ et N^* . Nous définissons ces projections sur les générateurs des théories et nous nous intéressons à leur sémantique au sens de Lawrere (cf. § 128)

2.23.1. Plongements de N^* dans $\hat{N}$.

Il y a deux manières de plonger N^* dans $\hat{N}$ suivant que l'on munit N^* d'une structure de monoïde sur N ou d'une structure de N-mémoire.

① p_1 de $\mathcal{M}[N]$ dans $\mathcal{B}_N$

$$p_1(A) = A \times A$$

$$p_1(\P) = \P .$$

φ_1 définit une application injective de N^* dans $\hat{N}$ et plus généralement de $(N \cup T)^*$ dans $\hat{N}(T)$ qui permet d'identifier N^* (resp$(N \cup T)^*$) avec un sous-ensemble de $\hat{N}$ (resp. $\hat{N}(T)$) .

$\mathfrak{S}(p_1)$ envoie tout N-binoïde B sur lui-même. $\mathfrak{S}(p_1)(B)$ est muni d'une structure de monoïde sur N . Ainsi on conserve la loi de composition et on prend comme opérateur 0-aire correspondant à A , l'élément $A \times A$.

② p_2 de $\mathcal{M}_N$ dans $\mathcal{P}_N[\Lambda]$

$$p_2(\Lambda) = \Lambda$$

$$p_2(A) = \langle 1, \Lambda \rangle A .$$

p_2 définit une application injective de N^* dans $\hat{N}$.

$\mathfrak{S}(p_2)$ envoie toute pépinière P sur elle-même. $\mathfrak{S}(p_2)(P)$ est muni d'une structure de N-mémoire. Ainsi, si $A \in N$ et si r est un élément de la pépinière

$$A \times r = f_A(r, \Lambda) .$$

2.23.2.- Mot des feuilles.

La projection φ est définie de $\mathfrak{B}_N$ dans $\mathfrak{M}[N]$

$$\varphi(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$$

$$\varphi(\langle 1 \rangle A) = \langle 1 \rangle$$

φ définit une application surjective de $\hat{N}(T)$ sur T^* .

(φ) envoie tout monoïde M sur N sur lui-même. $\mathcal{G}(\varphi)(M)$ est muni d'une structure de N binoïde définie comme suit : la loi de composition est la même, N opère trivialement sur le monoïde (i.e. $A \times r = r$) .

2.23.3. Mot des racines.

On définit deux projections différentes, l'une correspond au N-binoïde, l'autre correspond à la N-pépinière. Mais elles ont même effet sur $\hat{N}$.

① φ_1 est une projection de $\mathfrak{B}_N$ dans $\mathfrak{M}[N]$ définie par :

$$\varphi_1(\mathfrak{T}) = \mathfrak{T}$$

$$\varphi_1(\langle 1 \rangle A) = A \quad \text{si} \quad A \in N$$

② φ_2 est une projection de $\mathfrak{P}_N$ dans $\mathcal{M}_N$ définie par :

$$\varphi_2(\langle 1,2 \rangle A) = \langle 1 \rangle A \quad \text{si} \quad A \in N .$$

Restreint à $\hat{N}$, les deux projections coïncident et envoient toute ramification sur un mot de N^* appelé "mot des racines".

$\mathcal{G}(\varphi_1)$ munit tout monoïde d'une structure de N-binoïde en gardant la même loi de composition interne, la loi externe étant la loi définie par :

$$A \times r = A .$$

$\mathcal{G}(\varphi_2)$ munit toute mémoire d'une structure de N-pépinière de la façon suivante : si r et s sont des éléments de la mémoire

$$f_A(r,s) = A \times s .$$

2.23.4. Projection pour l'analyse ascendante de gauche à droite.

Dans [8] ("Sur des notions algébriques liées à l'analyse syntaxique"), Pair introduit une projection de la théorie $\mathfrak{B}_N$ dans $\mathfrak{M}_{N \cup \bar{N}}$ ($\bar{N}$ étant un ensemble en bijection avec N ; si $A \in N$, on note $\bar{A}$ l'élément correspondant de $\bar{N}$) .

On définit la projection $\mathcal{A}$ ainsi :

$$\mathcal{A}(\langle 1 \rangle\ A) = \langle\langle A,1 \rangle \P\ ;\ \bar{A} \rangle \P$$

$$\mathcal{A}(\P) = \P\ .$$

En particulier, $\mathcal{A}$ envoie $\hat{N}(T)$ dans $(N \cup \bar{N} \cup T)^*$.

Cette projection envoie les bilangages grammaticaux de $\hat{N}$ (cf. Pair et Quéré [9]) sur les "bracketed languages" de Ginsburg et Harrison [3] .

$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ permet de munir tout monoïde M sur $N \cup \bar{N}$ d'une structure de N-binoïde en conservant la loi de composition interne. Si α et β appartiennent à M

$$A \times \alpha = A\,\alpha\,\bar{A}\ .$$

2.23.5. <u>Projection pour l'analyse descendante.</u>

Ces projections vont de $\mathcal{P}_{[N]}$ dans $\mathcal{M}_{N \cup \bar{N}}$.

a) Pour l'analyse descendante gauche

$$dg(\Lambda) = \Lambda$$

$$dg(\langle 1,2 \rangle\ A) = \langle\langle\langle A,1 \rangle \P\ ,\bar{A} \rangle \P\ ,2 \rangle \P$$

ce qui donne pour r et s appartenant à $\hat{N}$

$$dg(f_A(r,s)) = A\ dg(r)\ \bar{A}\ dg(s)\ .$$

On obtient donc une application injective de $\hat{N}$ dans $(N \cup \bar{N})^*$.

b) Pour l'analyse descendante droite

$$dd(\Lambda) = \Lambda$$

$$dd(\langle 1,2 \rangle\ A) = \langle\langle\langle A,2 \rangle \P\ ,\bar{A} \rangle \P\ ,1 \rangle \P$$

ce qui donne pour r et s appartenant à $\hat{N}$

$$dd(f'_A(r,s)) = A\ dd(s)\ \bar{A}\ dd(r)\ .$$

La sémantique de ces projections permet de munir tout monoïde M sur $N \cup \bar{N}$ d'une structure de N-pépinière.

Si α et β appartiennent à M ,

pour $\mathfrak{S}(dg) : f_A(\alpha,\beta) = A\alpha\,\bar{A}\,\beta$

pour $\mathfrak{S}(dd) : f_A(\alpha,\beta) = A\beta\,\bar{A}\alpha$

2.23. Bilangages réguliers.

Les ensembles algébriques associés aux deux structures de N-pépinière sur $\hat{N}$ coïncident et sont appelés bilangages réguliers. Ils sont donc reconnus par les N-pépinières finies mais aussi (cf. [9]) par les binoïdes finis et les dioïdes finis (cf. 2.25). Une étude complète en est faite dans [9] et [12].

Signalons cependant le théorème suivant comme conséquence des théorèmes du paragraphe 1.55.

Théorème.– Les langages de Kleene sont les mots des racines des bilangages réguliers et eux seuls.

En appliquant la projection φ_2 "mot des racines" il résulte que les mots des racines d'un bilangage régulier forment un langage régulier.

La réciproque se déduit de la proposition suivante :

Proposition.– Les langages réguliers sont des bilangages réguliers.

On applique la projection φ_2 et on remarque qu'un langage régulier est stable par la projection "mot des racines".

2.24. Bilangages binoïdaux et semi-binoïdaux.

Nous appelerons bilangages binoïdaux (resp. semi-binoïdaux) les bilangages algébriques de $\hat{N}$ ou de $\hat{N}(T)$ (resp. $\hat{N}(T)$) associés à la structure de binoïde (resp. de semi-binoïde).

On peut leur appliquer les théorèmes d'unicité et de réduction.

– En utilisant la projection p_1 et en assimilant N^* à son image dans $\hat{N}$ par p_1 on obtient la proposition suivante, conséquence du théorème du chapitre 1.

Proposition.– Les langages de Chomsky sont des bilangages binoïdaux.

– En utilisant les projections φ_1 et φ, on obtient le résultat suivant :

Proposition.– Pour les bilangages binoïdaux, les langages de Chomsky sont les mots des feuilles et les mots des racines et eux seuls.

Définition d'un ensemble de chemins.

Nous définissons $\mathcal{C}$ l'application de $\hat{N}(T)$ dans $\mathcal{P}(N^*(T))$ par :

$$\mathcal{C}(a) = a \quad \text{si} \quad a \in T$$

$$\mathcal{C}(A \times r) = \mathcal{C}(r).A$$

$$\mathcal{C}(r + s) = \mathcal{C}(r) \cup \mathcal{C}(s) .$$

Si $\alpha \in \mathcal{C}(r)$, on dira que α est un chemin dans la ramification r.

Si r est la ramification de la figure 1 :

$$\mathcal{C}(r) = \{aA , aBA , ABA , bBA , aB , bB\} .$$

Si L est un bilangage, $\mathcal{C}(L) = \bigcup\limits_{r \in L} \mathcal{C}(r)$ est appelé ensemble des chemins du bilangage L.

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition.- Les langages réguliers de $N^*(T)$ sont les ensembles de chemins des bilangages binoïdaux de $\hat{N}(T)$ et eux seuls.

Démonstration : Soit L un bilangage régulier solution du polynôme

$$P = (P_1 ,\ldots, P_n) \text{ de degré } 1$$

Associons lui le polynôme Q.

Si $\varphi \in P_i$ et $\varphi = a$ alors $\varphi' = a$ et $\varphi' \in Q_i$

Si $\varphi \in P_i$ et $\varphi = j.A$ alors $\varphi' = A \times j$ et $\varphi' \in Q_i$.

On étend $\mathcal{C}$ à un n-uplet d'ensemble de la manière suivante :

$$\mathcal{C}(X_1 ,\ldots, X_n) = (\mathcal{C}(X_1) ,\ldots, \mathcal{C}(X_n)) .$$

La définition de Q donne immédiatement

$$\mathcal{C}(X\, Q) = \mathcal{C}(X)\, P .$$

Puisque $\mathcal{C}(\phi) = \phi$ en remplaçant X par ϕ, on obtient

$$\mathcal{C}(\phi\, Q) = \phi\, P$$

et donc $\mathcal{C}(\phi\, Q^k) = \phi\, P^k$ par récurrence sur k

$$\mathcal{C}\Big(\bigcup_{k \geqslant 0} (\phi\, Q^k)\Big) = \bigcup_{k \geqslant 0} \phi\, P^k .$$

Donc L est l'ensemble des chemins d'un bilangage binoïdal.

Soit maintenant un bilangage binoïdal $\mathcal{L}$, solution minimale d'un polynôme Q de degré 1 .

Associons-lui le polynôme P comme suit :

$$\text{Si } \varphi \in Q_i \quad \begin{array}{lll} \varphi = A \times j & \Longrightarrow & \varphi = j.A \in P_i \\ \varphi = j + k & \Longrightarrow & j \in P_i \text{ et } k \in P_i \\ \varphi = a & \Longrightarrow & a \in P_i \end{array}$$

D'après la définition de P

$$\mathcal{C}(XQ) = \mathcal{C}(X)\, P .$$

Or $\mathcal{C}(\phi) = \emptyset$, on obtient donc

$$(\phi\ Q)\,\mathcal{C} = \phi\, P ,$$

et de même

$$\mathcal{C}(\phi\ Q^k) = \phi\ P^k$$

donc $\mathcal{C}\left(\bigcup_{k \geqslant 0} \phi\ Q^k\right) = \bigcup_{k \geqslant 0} \phi\ P^k$.

2.25. La notion de dioïde.

Cette notion a été introduite par Quéré.

2.25.1. Définition d'un dioïde.

Un dioïde est un ensemble muni de deux lois de composition interne associatives. On les note $+$ et $\times$ et on suppose qu'elles vérifient la propriété d'associativité mixte ci-dessous :

$$(r+s) \times t = r + (s \times t) .$$

On suppose de plus qu'il existe un élément neutre pour la loi $+$.

2.25.2. Théorie des dioïdes.

Soit la théorie libre engendrée par

$$\Omega_o = \{\Lambda\}$$

$$\Omega_2 = \{\pi\ ,\varphi\}$$

$$\Omega_i = \phi \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } i > 2 .$$

On obtient la théorie des dioïdes par passage au quotient de cette théorie par la plus petite relation vérifiant

CO 1 et CO 2 (cf. 1.26.)

et les congruences suivantes :

$$(\Lambda,1)\P \sim 1 \sim (1,\Lambda)\P$$

$$(1,(2,3)\P)\P \sim ((1,2)\P,3)\P$$

$$(1,(2,3)\ \varphi)\varphi \sim ((1,2)\ \varphi,3)\ \varphi$$

$$\text{et}\quad ((1,2)\P,3)\ \varphi \sim (1,(2,3)\ \varphi)\P\ .$$

Nous noterons cette théorie $\mathfrak{D}$.

La $\mathfrak{D}$-algèbre initiale est réduite à $\{\Lambda\}$. Nous étudierons donc souvent la théorie $\mathfrak{D}(N)$ des N-dioïdes dont l'algèbre initiale s'identifie à $\hat{N}$, en définissant $r + s$ comme la somme des deux ramifications, $r \times s$ consistant à accrocher s à la dernière feuille de r (cf. [1.2]). Les N-dioïdes libres sur T s'identifient alors à $\widehat{N \cup T}$.

2.25.3. <u>Bilangages algébriques.</u>

Les bilangages de $\hat{V}$ associés à la théorie des dioïdes ont été étudiés par Quéré sous le nom de bilangages algébriques. Les fonctions polynômiales qu'il introduit sont effectivement les éléments du dioïde $\widehat{V \cup [n]}$.

2.26. <u>Inclusion des trois familles de bilangages.</u>

1) Dans $\hat{N}(T)$ il y a inclusion de la famille des bilangages réguliers de $\mathcal{P}_N(T)$ dans celle des bilangages demi-binoïdaux.

Remarquons en effet, que $\varphi_A(r,s) = r + A \times s$.

Donc chaque opération de la pépinière se décompose en deux opérations du demi-binoïde Il en résulte qu'à tout polynôme de la théorie des pépinières correspond un polynôme de la théorie des semi-binoïdes ayant même solution minimale.

Notons cependant que l'inclusion est stricte car les langages de Chomsky de T^* sont des bilangages semi-binoïdaux de $\hat{N}(T)$ mais ne sont pas des bilangages réguliers.

2) Dans le cas de N, il y a inclusion de la famille des bilangages réguliers dans celle des bilangages binoïdaux, elle-même incluse dans celle des bilangages algébriques d'après la définition des opérations.

Deux contre-exemples montreront que les inclusions sont strictes.

① Soit le polynôme

$$P_1 = \{A + 1 + B\ ,\ \Lambda\}\ .$$

La solution minimale de ce polynôme est le bilangage binoïdal $L = \{nA + nB \, , \, n \geqslant 0\}$ (où $nA = A + \ldots + A$, n fois) qui n'est pas un bilangage régulier (cf. [9] n° 4.11.).

② Soit le polynôme

$$P_1 = \{A \times 1 \times B \, , \, A \times B\} \, .$$

La solution minimale de ce polynôme est le bilangage algébrique $L' = \{A^n \times B^n\}$ (où $A^n = A \times \ldots \times A$, n fois), dont les chemins forment le langage de Chomsky $A^n B^n$ qui n'est pas régulier ; donc L' n'est pas binoïdal.

CHAPITRE III

GENERALISATION DU THEOREME DE KLEENE

Les théories que nous considérerons dans ce chapitre sont engendrées par une famille $\Omega = \{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donc de la forme $E_o [\Omega]/Q$ où Q est une relation qui vérifie la propriété du paragraphe 1.42.

Etant donnée une théorie $\mathbb{T}$, nous noterons $A[V]$ la $\mathbb{T}$-algèbre libre sur V ; si $V \subset V'$, nous supposerons que $A[V] \subset A[V']$. L'idée maîtresse de ce chapitre consiste à considérer $A[V]$ tantôt comme $\mathbb{T}[V]$-algèbre initiale, tantôt, si $S \subset V$, comme $\mathbb{T}[V - S]$ algèbre libre sur S. Les éléments de V seront donc tantôt considérés comme des constantes, tantôt comme des notations de variables dans les morphismes. Dans ce qui va suivre, nous verrons l'intérêt de passer de l'un à l'autre de ces aspects.

3.1. SUBSTITUTION.

3.11. Substitution en A d'un ensemble dans un élément d'une algèbre

Nous nous plaçons dans $A[V]$ et nous considérons un élément A de V. Si $r \in A[V]$ et $L \subset A[V]$, on appelle substitution de L en A dans r, une opération définie par récurrence sur la taille de r et notée $s_A(r,L)$.

* Pour tout $B \in V$

$$s_A(B,L) = \text{si } B \neq A \text{ alors } B \text{ sinon } L$$

* Pour tout $\omega \in \Omega_n$

$$s_A((r_1,\dots,r_n)\omega,L) = ((s_A(r,L),\dots,s_A(r_n,L))\omega$$

en particulier si $\omega \in \Omega_o$

$$s_A(\omega,L) = \omega .$$

Remarque 1 : Si $r \in A[V]$, il peut être identifié à un morphisme φ de la théorie $\mathbb{T}[V - \{A\}]$, $\varphi : I \dashrightarrow I$. La définition ci-dessus coïncide alors avec celle donnée au chapitre 1, § 1.40. pour la $\mathbb{T}[V - \{A\}]$ algèbre relationnelle $A[V]$.

Remarque 2 : Si $\varphi \in \mathbb{T}(I, [p])$ on a alors

$$s_A((r_1,\dots,r_p)\varphi,L) = (s_A(r_1,L),\dots, s_A(r_p,L))\varphi .$$

3.12. Substitution en A d'un ensemble dans un autre.

$$s_A(L',L) = \bigcup_{r \in L'} s_A(r,L) .$$

Remarque 3: Si $M \subset \Pi(I, [p])$

$$s_A((r_1,\dots,r_n)\ M,L) = (\ s_A(r_1,L)\ ,\dots,\ s_A(r_p,L))\ M .$$

3.13. Substitution itérée d'un ensemble.

Cette opération envoie un sous-ensemble L de $A[V]$ sur un sous-ensemble noté $s^*_A(L)$ de la $A[V - \{A\}]$.

Elle est définie par

$$s^*_A(L) = \bigcup_{p=0}^{\infty} s^p_A(L)$$

et $s^p_A(L)$ est définie par récurrence sur p comme suit

$$s^0_A(L) = \emptyset$$

et $s^p_A(L) = s_A(L,\ s^{p-1}_A(L))$.

Montrons que pour tout p , $s^p_A(L) \subset A[V - \{A\}]$.

En effet $s^0_A(L) = \emptyset \subset A\ [V - \{A\}]$ et d'autre part, si l'on suppose

$$s^p_A(L) \subset A\ [V - \{A\}],\ s^p_A(L) = s_A(L;\ s^{p-1}_A(L)) = \bigcup_{r \in L} s_A(r,\ s^{p-1}_A(L)) .$$

La remarque 1 ci-dessus et le fait que $s^{p-1}_A(L)$ est inclus dans $A\ [V - \{A\}]$ montre immédiatement que $s_A(r,\ s^{p-1}_A(L))$ est inclus dans $A\ [V - \{A\}]$.

Dans l'article de Thatcher and Wright "Generalized Automata theory with an application to a decision problem of second order logic" [15] , on trouve une définition de la substitution itérée qui diffère de la nôtre par $s^0_A(L)$. Les auteurs y posent $s^0_A(L) = A$ au lieu de $s^0_A(L) = \emptyset$. Il nous a semblé préférable de faire en sorte qu'après substitution itérée, il n'y ait plus de traces de la variable par rapport à laquelle la substitution a été faite.

3.2. ENSEMBLES REGULIERS.

3.21. Définition.- Un sous-ensemble d'une Π-algèbre libre sera dit Π-régulier (ou simplement régulier s'il n'y a pas ambiguïté) s'il est obtenu à partir des ensembles finis d'une Π-algèbre libre par un nombre fini de substitutions et substitutions itérées.

Cette définition généralise la notion de langage régulier au sens du théorème de Kleene (cf. 3.31.) . Notons cependant que nous n'utilisons pas la réunion dans la définition, car celle-ci peut être obtenue par substitution ; en effet, si L_1 et L_2 sont des sous-ensembles d'une Π-algèbre libre sur V et $L_3 = \{A,B\}$ où A et B n'appartiennent pas à V .

$$L_1 \cup L_2 = s_B(s_A(L_3,L_1) , L_2) .$$

3.3. GENERALISATION DU THEOREME DE KLEENE.

3.31. Enoncé du théorème.- Un ensemble est régulier si et seulement s'il est algébrique.

Thatcher et Wright (cf. [15]) ont démontré un théorème proche dans le cas d'une théorie libre de base finie. Cependant, comme nous l'avons dit, ils donnent une définition légèrement différente de la substitution itérée ; ils admettent la réunion et surtout leur énoncé affirme l'équivalence entre ensemble régulier et ensemble reconnaissable. Or, nous savons que, dans le cas qu'ils considèrent, ensemble reconnaissable et ensemble algébrique coïncident.

La démonstration de l'équivalence entre ensemble régulier et ensemble algébrique est plus générale, car elle sort du cadre des théories libres de base finie. Même dans ce dernier cas, elle met en évidence les liens entre l'algébricité et la régularité.

Notation : si $P = (P_1 , \ldots , P_m)$ est un polynôme, nous allons poser

$$p_j = \emptyset$$

$$p_j^k = (p_1^{k-1}, \ldots, p_m^{k-1})\, P_j \quad \text{pour tout } j,\ 1 \leq j \leq m.$$

3.32. Stabilité des ensembles algébriques par substitution.

Proposition.- Les ensembles algébriques sont stables par substitution.

Soit $L = \overline{P_1}$ où $P = (P_1, \ldots, P_m)$ et $L' = \overline{Q_1}$ où $Q = (Q_1, \ldots, Q_m)$ deux ensembles algébriques.

Montrons que $s_A(L,L')$ est solution minimale du polynôme construit ainsi :

* si $1 \leq j \leq n$, $R_j = s_A(P_j, m+1)$. Intuitivement cela revient à substituer $m+1$ à toute occurrence de A dans P_j.

* si $1 \leq j \leq \ell$, $R_{j+m} = f(Q_j)$ où f désigne l'unique prolongement de A_n dans $A_{\ell+m}$ de l'application $j \rightsquigarrow j+m$.

Remarquons que si $\ell + m \geq j > e$, $(\emptyset, \ldots, \emptyset, X_1, \ldots, X_e)\, R_{j+m} = (X_1, \ldots, X_e)\, R_j$

donc $\overline{R_{m+1}} = \overline{Q_1} = L'$.

Première partie : $s_A(L,L') \subset \overline{R_1}$.

Considérons la suite d'ensembles définie par $r_j^{k+1} = (r_1^k, \ldots, r_{m+1}^k)\, R_j$

et $r_j = \emptyset$ si $1 \leq j \leq m$

$r_j = \overline{R_j}$ si $m < j \leq \ell + m$.

On voit facilement que pour tout k, $r_j^k \subset \overline{R_j}$; en particulier $r_j^k = \overline{R_j}$ si $j > m$. Montrons que si $1 \leq j \leq m$

$$r_j^k = s_A(p_j^k, L').$$

C'est immédiat si $k = 0$; supposons le résultat vrai pour $k-1$

$$\begin{aligned} r_j^k &= (r_1^{k-1}, \ldots, r_m^{k-1}, \overline{R}_{m+1}, \ldots, \overline{R}_{e+m})\, R_j \\ &= (r_1^{k-1}, \ldots, r_m^{k-1}, \overline{R}_{m+1})\, (s_A(P_j, m+1)) \\ &= (s_A(p_1^{k-1}, L'), \ldots, s_A(p_m^{k-1}, L'), L')\, s_A(P_j, m+1) \\ &= s_A((p_1^{k-1}, \ldots, p_m^{k-1})\, P_j, L') = s_A(p_j^k, L'). \end{aligned}$$

De ce résultat on tire

$$\bigcup_{k \geqslant 0} r_j^k = \bigcup_{k \geqslant 0} s_A(p_j^k , L') = s_A \bigcup_{k \geqslant 0} p_j^k , L')$$

$$= s_A(\overline{P_j} , L') \subset \overline{R_j}$$

en particulier $s_A(L,L') \subset \overline{R_1}$.

Deuxième partie : Montrons que $\overline{R_1} \subset s_A(L,L')$ en montrant que

$(s_A(\overline{P_1},L') ,\ldots, s_A(\overline{P_k},L') , \overline{R_{e+1}} ,\ldots, \overline{R_{e+m}})$ est une solution du polynôme R .

* si $m < j \leq \ell + m$ on a immédiatement

$$(s_A(\overline{P_1},L') ,\ldots, s_A(\overline{P_m},L') , \overline{R_{m+1}} ,\ldots, \overline{R_{e+m}}) R_j = \overline{R_j} .$$

* si $0 \leq j \leq \ell$

$$(s_A(\overline{P_1},L') ,\ldots, s_A(\overline{P_m},L') , \overline{R_{m+1}} ,\ldots, \overline{R_{e+m}}) R_j$$

$$= (s_A(\overline{P_1},L') ,\ldots, s_A(\overline{P_e},L') , L') s_A(P_j , m + 1)$$

$$= s_A((\overline{P_1} ,\ldots, \overline{P_e}) P_j , L') = s_A(\overline{P_j},L') .$$

3.33. Stabilité des ensembles algébriques par substitution itérée.

Proposition.- les ensembles algébriques sont stables par substitution itérée.

Soit $L = \overline{P_1}$ ou $P = (P_1 ,\ldots, P_n)$.

En posant $Q_j = s_A(P_j,1)$, on obtient un polynôme $Q = (Q_1 ,\ldots, Q_m)$ obtenu en remplaçant toute occurrence de A par 1 .

Lemme 1 : Si $X \subset Q_1$, alors $s_A(P_j^k ,X) \subset \overline{Q_j}$.

Si $k = 0$ on a $s_A(\emptyset ,X) = \emptyset \subset \overline{Q_1}$.

Si la propriété est vraie pour $k - 1$, on obtient

$$s_A(P_j^{k-1},X) \subset \overline{Q_j} \quad \text{pour tout } j$$

et donc

$$s_A((P_1^{k-1},\ldots, P_m^{k-1}) P_j , X)$$

$$\subset (P_1^{k-1} \cup X ,\ldots, P_m^{k-1}) Q_j \subset \overline{Q_j}$$

or $\overline{P_j} = \bigcup_{k \geq 0} P_j^k$, on obtient donc

$$s_A(\overline{P_j},X) = s_A\left(\bigcup_{k \geq 0} {}_j^k,X\right) = \bigcup_{k \geq 0} s_A(p_j^k,X) \subset \overline{Q_j}$$

En particulier si $X \subset \overline{Q_1}$, on a $s_A(L,X) \subset Q_1$, ce qui va nous servir à démontrer le lemme suivant.

Lemme 2 : $s_A^*(L) \subset \overline{Q_1}$.

Il est immédiat que $s_A^0(L) = \phi \subset \overline{Q_1}$.

Supposons $s_A^{n-1}(L) \subset \overline{Q_1}$ et donc

$$s_A^n(L) = s_A(L , s_A^{n-1}(L)) \subset \overline{Q_1} .$$

Réciproquement, montrons que $\overline{Q_1} \subset s_A^*(L)$; pour cela montrons que $s_A^*(L)$ est la première composante d'une solution du polynôme Q , choisissons là ainsi :

$$L_1 = s_A^*(L) = s_A(\overline{P_1},s_A^*(L))$$

$$L_j = s_A(\overline{P_j},s_A^*(L)) .$$

On a alors

$$(L_1 ,\ldots L_j)\ Q_j = (s_A(\overline{P_1},s_A^*(L)) ,\ldots, s_A(\overline{P_m},s_A^*(L))\ Q_j)$$

$$= s_A((\overline{P_1} ,\ldots, \overline{P_m})\ Q_j,s_A^*(L)) .$$

Or, par définition de Q_j

$$(\overline{P_1} ,\ldots, \overline{P_m})\ Q_j = s_A((\overline{P_1} ,\ldots, \overline{P_m})\ P_j,\overline{P_1}) = s_A(\overline{P_j},L)$$

donc

$$(L_1 ,\ldots, L_j)\ Q_j = s_A(s_1(\overline{P_j},L),s_A^*(L))$$

$$= s_A(\overline{P_j},s_A(L,s_A^*(L))$$

$$= s_A(\overline{P_j},s_A^*(L)) = L_j$$

3.34. Proposition.- Tout ensemble régulier est algébrique.

C'est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes et du fait que les ensembles finis sont algébriques.

3.35. Proposition.- Tout ensemble algébrique est régulier.

Remarques préliminaires.

On a déjà vu que $L_1 \cup L_2$ est obtenu par substitution, d'autre part si $L_1, \ldots, L_n$ sont des ensembles et $\varphi \in \mathbb{T}(I, [n])$, $L = (L_1, \ldots, L_n)\,\varphi$ est obtenu par substitution ; en effet si $L' = (A_1, \ldots, A_n)\,\varphi$,
$L = s_{A_n}(s_{A_{n-1}}(\ldots(s_{A_1}(L', L_1), L_2) \ldots L_{n-1})\, L_n)$.

Démonstration de la proposition.

Soit L un ensemble algébrique et $P = (P_1, \ldots, P_n)$ un polynôme tel que $L = \overline{P_n}$.

Nous allons raisonner par récurrence sur n :

1) Cas $n = 1$. $P = \bigcup_{i=1}^{q} \varphi_i$ où $\varphi_i \in \mathbb{T}(I,I)$

$$\overline{P} = s_1^*(P).$$

Cela provient immédiatement de la définition de $\overline{P}$ et de celle de $s_1^*(P)$.

2) Cas général.

Avant de démontrer le cas général, posons quelques notations.

Notations :

* $\mathbb{T}' = \mathbb{T}[\{n\}]$, c'est-à-dire la théorie obtenue à partir de la théorie $\mathbb{T}$ en adjoignant librement l'élément n.

* $Q = (Q_1, \ldots, Q_{n-1})$ est le polynôme de la théorie $\mathbb{T}'$ construit à partir de P en enlevant P_n et où Q_i (pour $1 \leq i \leq n-1$) a les mêmes constituants que P_i, mais considéré sous l'angle de la théorie $\mathbb{T}'$.

* $Y = (\overline{Q_1}, \ldots, \overline{Q}_{n-1}, n)\, P_n$

* $L_j = s_n(\overline{Q}_j, s_n^*(Y))$ pour $1 \leq j \leq n-1$

$L_n = s_n^*(Y)$.

Remarquons que Y est obtenu à partir des $\overline{Q}_j$ par substitution.

Démonstration :

Nous allons montrer que $L_n = \overline{P_n}$. Les $\overline{Q_j}$ sont réguliers, Y est obtenu par substitution et L_n par substitution itérée à partir d'eux ; par conséquent P_n sera régulier.

Première étape : $\overline{P_n} \subset L_n$.

Pour cela, il suffit de montrer que

$$(L_1, \dots, L_n)\, P = (L_1, \dots, L_n)\,.$$

Or

$$(L_1, \dots, L_{n-1}, L_n)\, P_j = (s_n(\overline{Q_1}, s_n^*(Y)), \dots, s_n(\overline{Q_{n-1}}, s_n^*(Y)), s_n(n, s_n^*(Y)))\, P_j\,.$$

D'après la remarque 3 , § 3,12. , on obtient

$$(L_1, \dots, L_{n-1}, L_n) P_j = s_n((\overline{Q_1}, \dots, \overline{Q_{n-1}}, n)\, P_j\,,\ s_n^*(Y))\,.$$

* si $1 \leqslant j \leqslant n-1$ d'après la définition de Q , on a

$$(\overline{Q_1}, \dots, \overline{Q_{n-1}}, n)\, P_j = (\overline{Q_1}, \dots, \overline{Q_{n-1}})\, Q_j = \overline{Q_j}$$

ce qui donne donc :

$$(L_1, \dots, L_{n-1}, L_n)\, P_j = s_n(\overline{Q_j}, s_n^*(Y)) = L_j\,.$$

* si $j = n$

$$(\overline{Q_1}, \dots, \overline{Q_{n-1}}, n)\, P_n = Y$$

ce qui donne

$$(L_1, \dots, L_{n-1}, L_n)\, P_n = s_n(Y, s_n^*(Y)) = s_n^*(Y)$$

Deuxième étape : $L_n \subset \overline{P_n}$.

Nous avons besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 1 : Pour tout $k \geqslant 0$, tout i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ $X \subset \overline{P_n}$ implique $s_n(\emptyset\, Q^k\, Q_i\,, X) \subset \overline{P_i}$.

On démontre cela par récurrence sur k.

Si $k = 0$

$$s_n(\emptyset\, Q_i, X) = \bigcup_{\varphi \in Q_i} s_n((\emptyset, \dots, \emptyset)\, \varphi\,, X)$$

$$= \bigcup s_n(\varphi, X)\,.$$

La dernière réunion est prise sur les $\varphi \in A\ [\{n\}] \cap Q_i$ car si $\varphi \notin A\ [\{n\}] \cap Q_i$, $(\emptyset, \dots, \emptyset)\ \varphi = \emptyset$

donc

$$s_n(\emptyset\ Q_i, X) = \bigcup_{\varphi \in P_i} (\emptyset, \dots, \emptyset, X)\ \varphi$$

or

$$(\emptyset, \dots, \emptyset, X) \subset \overline{P} \quad \text{et} \quad \varphi \in P_i \quad \text{donc}$$

$$\bigcup_{\varphi \in P_i} (\emptyset, \dots, \emptyset, X)\ \varphi \subset \overline{P_i} .$$

La propriété est vraie pour $k-1$; alors

$$s_n(\emptyset\ Q^k\ Q_i\ , X) = (s_n(\emptyset\ Q^{k-1}\ Q_1, X)\ , \dots,\ s_n(\emptyset\ Q^{k-1}\ , Q_{n-1}, X)\ , X)\ P_i .$$

Or chaque ensemble qui intervient ici est inclus dans $\overline{P_i}$, donc

$$s_n(\emptyset\ Q^k\ Q_i\ , X) \subset \overline{P_1} .$$

<u>Lemme</u> 2 : Si $X \subset \overline{P_n}$, alors $s_n(\overline{Q_i}\ , X) \subset \overline{P_i}$.

En effet

$$s_n(\overline{Q_1}\ , X) = s_n\ (\bigcup_{k \geq 0} \emptyset\ Q^k\ Q_i\ , X) = \bigcup_{k \geq 0} s_n(\emptyset\ Q^k\ Q_i\ , X) .$$

Or d'après le lemme 1 , chaque terme de la réunion est inclus dans $\overline{P}_i$.

<u>Lemme</u> 3 : Si $X \subset \overline{P_n}$, alors $s_n(Y,X) \subseteq \overline{P_n}$.

En effet $s_n(Y,X) = s_n((\overline{Q_1}\ , \dots,\ \overline{Q}_{n-1}, n)\ P_n\ , X) = (s_n(\overline{Q}_1, X)\ , \dots,\ s_n(\overline{Q}_{n-1}, X)\ , X)\ P_n$.

Or d'après le lemme 2 , chaque terme de ce n-uplet est inclus dans $\overline{P_i}$.

<u>Lemme</u> 4 : Pour tout $k \geq 0$, $s_n^k(Y) \subset \overline{P_n}$.

Si $k = 0$, c'est évident en appliquant le lemme 3 pour $X = \emptyset$.

Si $k \geq 1$ et si le résultat est vrai pour $k-1$, on obtient alors :

$s_n^k(Y) = s_n(Y\ , s_n^{k-1}(Y))$ et on applique le lemme 3 et l'hypothèse de récurrence.

<u>Démonstration de la 2ème étape</u> :

Elle nous est donnée par le lemme 5 .

<u>Lemme</u> 5 : $s_n^*(Y) \subset \overline{P_n}$

$s_n^*(Y) = \bigcup_{k \geq 0} s_n^k(Y)$, or chaque $s_n^k(Y)$ est inclus dans $\overline{P}_n$ d'après le lemme 4 , donc $s_n^*(Y) = L_n \subset \overline{P_n}$.

3.4. APPLICATIONS A QUELQUES THEORIES.

3.41. Application à la théorie des V-mémoires pointées.

3.41.1. Cas où V est fini.

Ici les ensembles algébriques sont les K-langages. Nous allons examiner comment notre énoncé généralise le théorème de Kleene si V est fini. Rappelons-en un énoncé.

"Tout K-langage est obtenu à partir des langages finis par un nombre fini de réunions, produits et produits itérés".

Nous avons vu (§ 3.21.) pourquoi l'on pouvait se passer de la réunion.

Voyons maintenant les liens qu'il y a d'une part entre produit et substitution et d'autre part entre produit itéré et substitution itérée.

Si L est un langage de $V^*(T)$ et A appartient à T, associons à L trois langages.

$L_1 = L \cap V^*(T - \{A\})$ est l'ensemble des mots de L ne se terminant pas par A.

$L_2 = L - L_1$ est l'ensemble des mots de L se terminant par A ; associons à L_2 le langage L_3 de V^* tel que $L_2 = L_3 A$.

Produit et substitution.

Si L' est un autre langage de $V^*(T)$, on obtient

$$\boxed{s_A(L,L') = L_1 \cup L_3 L'}$$

en effet si $\alpha \in L_1$

$$s_A(\alpha,L') = \alpha$$

et si $\alpha \in L_2$ $\quad \alpha = \beta A$ où $\beta \in L_3$

$$s_A(\alpha,L') = \beta L'.$$

Produit itéré et substitution itérée.

$$\boxed{s_A^*(L) = L_3^* L_1}$$

On sait que

$$s_A^0(L) = \emptyset \quad \text{et donc} \quad s_A^1(L) = L_1$$

Si $p \geqslant 1$ et $s_A^p(L) = \bigcup_{k=0}^{p-1} L_3^k \; L_1$

$$s_A^{p+1}(L) = s_A(L_1 \; s_A^p(L)) = L_1 \cup L_3 \, . \, s_A^p(L)$$

$$= L_1 \cup L_3 \circ \bigcup_{k=0}^{p-1} L_3^k \; L_1 = \bigcup_{k=0}^{p} L_3^k \; L_1 \; .$$

On voit donc que

$$s_A^*(L) = \bigcup_{p=0}^{\infty} s_A^p(L) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \; \bigcup_{k=0}^{p-1} L_3^k \; L_1$$

$$= \bigcup_{k=0}^{\infty} L_3^k \; L_1 = L_3^* \; L_1 \; .$$

Ces deux formules montrent clairement que le théorème que nous donnons est une variété du théorème de Kleene.

3.4.12. Cas où V est infini.

Dans ce cas, les ensembles reconnaissables ne sont pas réguliers. Pourtant, les ensembles réguliers sont les ensembles algébriques et eux seuls, ce qui montre l'utilité de la généralisation.

3.42. Application à la théorie des monoïdes.

Ici les ensembles algébriques sont les C-langages ; la substitution est celle que l'on rencontre ordinairement dans le monoïde libre (cf. [4] P. 36) ; elle nous permet de construire tout C-langage de T^* à partir des langages finis de $(N \cup T)^*$. Nous l'illustrerons par un exemple

3.4.21. Construction du langage $L = \{a^n \, b^n \mid n \geqslant 1\} \cup \{b^n \, a^n \mid n \geqslant 1\}$.

$L_1 = \{a \, A \, b \; , \, ab\}$ est un langage fini de $\{a,b,A\}^*$.

$L_2 = s_A^*(L_1) = \{a^n \, b^n \mid n \geqslant 1\}$.

$L_3 = \{b \, A \, b \; , \, ab\}$ est un langage fini de $\{a,b,A\}^*$.

$L_4 = s_A^*(L_3) = \{a^n \, b^n \mid n \geqslant 1\}$.

$L_5 = \{A,B\}$ est un langage fini de $\{a,b,A,B\}^*$.

$L_6 = s_A\ (s_B(L_5,L_2)\ ,\ L_4 = L$.

Pour les C-langages le résultat s'énonce donc ainsi :

Théorème.- Tout C-langage de T^* est obtenu à partir des langages finis de $(N \cup T)^*$ pour un certain ensemble N par un nombre fini de substitution et de substitutions itérées.

3.43. Application aux théories de $\hat{V}(T)$.

On peut par substitution construire les bilangages réguliers ainsi que les bilangages binoïdaux et les bilangages algébriques.

CONCLUSION

La notion de "théorie" se révèle commode pour l'étude des langages ; elle met en évidence la structure algébrique intervenant dans chaque problème ; elle permet de généraliser considérablement des théorèmes connus sur des familles particulières de langages.

Par exemple pour une théorie donnée, des équivalences entre trois familles de langages ont pu être démontrées ; elles se résument dans le schéma suivant

$$\begin{tikzcd} & \text{Algébrique} \arrow[dl, Leftrightarrow, "1"'] \arrow[dr, Leftrightarrow, "2"] & \\ \text{Reconnaissable} \arrow[rr, Leftrightarrow, "3"'] & & \text{Régulier} \end{tikzcd}$$

Les équivalences (1) (Mezei et Wright) et (3) (Tatcher et Wright) ne sont vraies que dans le cas des théories libres de base finie ; en effet des contre-exemples sont donnés : le cas des V-mémoires où V est infinie (3.4.12.) pour la finitude de la base, le cas de C-langages pour la liberté de la théorie. L'équivalence (2) est plus générale puisqu'elle est satisfaite dans les deux exemples ci-dessus.

Des prolongements de cette étude sont possibles :

1) Nous n'avons pas examiné les conséquences dans chaque théorie particulière des théorèmes généraux énoncés ici.

2) Nous n'avons donné ici que les généralisations de quelques théorèmes déjà connus pour les langages. Il est certain que d'autres théorèmes sont susceptibles d'avoir des généralisations semblables.

3) Il faudrait mettre en évidence des théories adaptées à d'autres familles de langages : langages à peignes, langages contextuels, etc..., mais aussi à des problèmes de traitement de l'information : structure de listes, description d'images, etc...

INDEX

BIBLIOGRAPHIE

[1] EILENBERG S. et WRIGHT J.B. (1967)
Automata in general algebras. Inf. and control. Volume II p. 452 à 470

[2] FREYD P. (1964)
Abelian Categories. Harper International Edition

[3] GINSBURG S. et HARISSON (1967)
Bracketed context free languages. Journal of Computer and System Science. P. 1 à 23

[4] GINSBURG S.
"The Mathematical Theory of context-free languages" .
Mac Grow-Hill Book Co. New-York 1966

[5] LAWVERE F.W. (1963)
Functorials semantics of algebraic theories. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. Volume 50. P. 869 à 872.

[6] MEZEI J. et WRIGHT J.B. (1965)
Algebraic automata and context-free sets. Inf. and Control.
Volume II. P. 3 à 29

[7] MITCHELL B. (1965)
Theory of categories. Academic Press. New-York

[8] PAIR C. (1970)
Sur des notions algébriques liées à l'analyse syntaxique. Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines (1969) et Rev. F. Inf. et RO. R/3 (1970)

[9] PAIR C. et QUERE A. (1968)
Définition et étude des bilangages réguliers
Inf. and Control. Volume 13, P. 565 à 593

[10] PETER R. (1962)
Uber die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitions bereiche.
Acta Mathematica Scientarum Hungaricae. Tomus XII Fasc. 3-4 (1961)
Tomus XIII Fasc. 1-2 (1962)

[11] PETER R. (1970)
Die Pair-schen freien Binoïden als spezial fälle der angeordneten freien holomorphen Mengen. Acta Math. Acad. Sci. Hung. Tome 21. P. 297 à 313.

[12] QUERE A. (1969)

Etude des ramifications et des bilangages. Thèse de 3ème cycle.
Faculté des Sciences de Nancy.

[13] THATCHER J.W.

Characterizing derivation trees of context-free grammars through a generalization of finite automa theory.
Journal of Comp. System Sci. Volume 1. P. 317 à 322

[14] THATCHER J.W. (1970)

Generaliezd^2 Sequential Machine Maps. Journal of Computer and System Sciences Vol. p. 339 à 367.

[15] THATCHER J.W. et WRIGHT J.B. (1966)

Generalized automata theory with an application to a decision problem of second-order logic. I.B.M. Research Report R.C. 1713

Nous signalons aussi un livre dont nous avons connaissance au moment de l'impression. Il traite des catégories et foncteurs et son chapitre 3 est consacré aux théories algébriques.

[16] PAREIGIS B. (1970)

"Catégories and Functors". Academic Press. New-York
Traduction de l'édition allemande
"Kategorien und Funktoren - Eine Einführung" verlag B.G. Teubner Stuttgart.

Vu, Approuvé

et permis d'imprimer

NANCY, le 18 juin 1971

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY I

J.R. HELLUY