

82/234

Sc N 82 / 343

IMPLANTATION ET EVALUATION D'UNE NOUVELLE METHODE
DE RECONSTRUCTION D'IMAGE
EN TOMOGRAPHIE D'EMISSION

T H E S E

POUR L'OBTENTION DU

DOCTORAT DE 3ÈME CYCLE EN INFORMATIQUE

SOUTENUE LE 13 DECEMBRE 1982

PAR

GILLES KARCHER

MEMBRES DU JURY :

Président : M. J. LEGRAS

Examineurs : MM. J. MARTIN
C. GILORMINI
J.P. HATON



IMPLANTATION ET EVALUATION D'UNE NOUVELLE METHODE
DE RECONSTRUCTION D'IMAGE
EN TOMOGRAPHIE D'EMISSION

T H E S E

POUR L'OBTENTION DU

DOCTORAT DE 3ÈME CYCLE EN INFORMATIQUE

SOUTENUE LE 13 DECEMBRE 1982

PAR

GILLES KARCHER

MEMBRES DU JURY :

Président : M. J. LEGRAS

Examineurs : MM. J. MARTIN
C. GILORMINI
J.P. HATON



A Monsieur le Professeur J. LEGRAS

Vous nous avez proposé cette recherche et vous nous avez guidé avec bienveillance tout au long de sa réalisation. Que ce travail qui vous doit beaucoup soit le témoin de ma respectueuse reconnaissance.

A Monsieur le Professeur J. MARTIN

Vous nous avez accueilli dans votre Service depuis plusieurs années déjà et nous avez fait découvrir la Médecine Nucléaire et l'Informatique Médicale. Nous vous en exprimons ici notre profonde gratitude.

A Monsieur le Professeur C. GILORMINI

Nous vous remercions de l'attention que vous avez portée à ce travail et de l'honneur que vous nous faites en acceptant de le juger.

A Monsieur le Professeur J.P. HATON

Nous vous remercions de nous avoir suivis sur les chemins détournés qui ont mené à ce travail et de nous faire l'amitié de participer au jury de cette thèse.

Nous remercions les médecins et le tout le personnel du Service de Médecine Nucléaire du C.H.U. de NANCY-BRABOIS pour leur collaboration et la qualité de leur accueil.

Nous remercions également Mademoiselle BARIHEL et Mademoiselle BELLIER pour les heures passées à la dactylographie particulièrement difficile de cette thèse.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE I : PRESENTATION DE LA MEDECINE NUCLEAIRE ET DE
LA TOMOGRAPHIE D'EMISSION

PREMIERE PARTIE : ETUDE THEORIQUE

CHAPITRE II : MODELISATION DE LA TOMOGRAPHIE D'EMISSION

CHAPITRE III : ETABLISSEMENT ET RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE
DISCRET

CHAPITRE IV : AUTRE METHODE DE REDUCTION DES INSTABILITES

DEUXIEME PARTIE : MISE EN OEUVRE

CHAPITRE V : DESCRIPTION DU SYSTEME TOMOGRAPHIQUE ET
ORGANISATION GENERALE DES PROGRAMMES

CHAPITRE VI : CALCUL DES MATRICES PSEUDO-INVERSEES

CHAPITRE VII : PRE-TRAITEMENT DES DONNEES D'ACQUISITION

CHAPITRE VIII : LE TRAITEMENT PROPREMENT DIT

TROISIEME PARTIE : EVALUATION

CHAPITRE IX : SIMULATION DE LA GAMMA-CAMERA

CHAPITRE X : RESULTATS EXPERIMENTAUX

CONCLUSION

INTRODUCTION

x Il manque la bibliographie et les numéros
des références dans le texte.

La tomographie d'émission est une technique d'imagerie médicale qui est en Médecine Nucléaire l'analogue de la tomodensitométrie (ou scanner) en Radiologie. Il s'agit dans les deux cas de techniques de reconstruction d'images représentant des coupes planes d'un objet dont on connaît un certain nombre de projections.

Plusieurs méthodes ont été décrites pour reconstruire ces images, et elles peuvent schématiquement se classer en trois groupes :

- les méthodes itératives
- les méthodes par rétroprojection
- les méthodes analytiques.

Actuellement, les méthodes les plus employées tant en Médecine Nucléaire qu'en Radiologie sont celles utilisant la technique de rétroprojection.

Nous nous proposons dans ce travail de décrire, de mettre en oeuvre et d'évaluer en routine hospitalière une nouvelle méthode analytique de résolution de l'équation fondamentale de la tomographie d'émission qui permet de tenir compte, sous certaines hypothèses, de l'absorption radioactive.

Cette recherche qui a été proposée et dirigée par Monsieur le Professeur J. LEGRAS fait suite à plusieurs études théoriques dans ce domaine réalisées sous sa direction et notamment à la thèse de Madame F. ABD EL MONEIM () qui étudie l'instabilité des équations intégrales de la tomographie

X d'émission après transformation de Fourier et à la thèse de Monsieur L.R. OUDIN (()) qui formalise les conditions de compatibilité que doivent vérifier les données tomographiques.

Après avoir établi l'équation fondamentale de la tomographie d'émission, nous décrirons dans la première partie de ce travail la méthode de résolution numérique utilisée ainsi que les techniques de régularisation.

La deuxième partie est consacrée à la mise en oeuvre de cette méthode sur le système de traitement du Service de Médecine Nucléaire et d'Informatique Médicale du C.H.U. de NANCY-BRABOIS, dirigé par Monsieur le Professeur J. MARTIN.

Nous présentons ensuite dans la troisième partie quelques résultats expérimentaux obtenus avec cette méthode en les comparant en temps de calcul et en qualité à ceux obtenus par la méthode classique de retro-projection. Cette comparaison porte sur des simulations numériques dont nous décrivons la technique, sur des fantômes physiques et sur des cas réels.

A la lumière de ces premiers résultats, il est possible de conclure que la méthode proposée est, à qualité égale, environ trois fois plus rapide que la méthode par rétro-projection et qu'elle permet, au moins sur des simulations et des fantômes physiques, de corriger l'effet de l'absorption radio-active, la mise en oeuvre de la correction d'absorption sur des cas réels restant encore à étudier.

CHAPITRE 1

PRESENTATION DE LA MEDECINE NUCLEAIRE
ET DE LA TOMOGRAPHIE D'EMISSION

Il n'est pas possible en quelques pages de faire un exposé complet sur les différents aspects physiques et biologiques de la Médecine Nucléaire.

X Nous renvoyons pour cela le lecteur aux ouvrages cités en références () et nous ne présenterons que les quelques généralités indispensables pour comprendre dans quel contexte se situe la tomographie d'émission et en particulier comment sont obtenues les données à traiter.

I - GENERALITES SUR LA MEDECINE NUCLEAIRE

1) DEFINITION

La Médecine Nucléaire est la spécialité médicale destinée essentiellement à réaliser des explorations fonctionnelles à but diagnostique utilisant des éléments radio-actifs comme marqueurs de certaines molécules ou comme traceur du fonctionnement de certains organes.

Les examens de Médecine Nucléaire peuvent se classer en deux grands groupes.

Les examens "in vivo" ou scintigraphies

Ce sont des examens réalisés directement sur les patients en leur injectant un produit radio-actif choisi en fonction de l'organe à étudier.

A l'aide de détecteurs externes il est possible d'étudier la répartition du produit radio-actif dans l'organisme et d'en déduire des renseignements sur la morphologie et/ou le fonctionnement de l'organe étudié.

De même que les appareils de radiologie fournissent des images de la densité aux rayons X, les détecteurs utilisés en Médecine Nucléaire

fournissent des images de la répartition radio-active.

Les examens "in vitro"

Il s'agit de dosages dans des échantillons sanguins de différents produits biologiques par des techniques physico-chimiques dont la plus courante est la radio-immunologie.

2) LES PRODUITS UTILISES DANS LES EXAMENS "IN VIVO"

Ces produits sont plus souvent composés de molécules marquées par un atome radio-actif, les molécules étant choisies en fonction de l'organe à étudier.

Pour être utilisables chez l'homme, ces produits doivent satisfaire à un certain nombre de conditions :

Toxicité

Les molécules utilisées doivent évidemment ne pas être toxiques chez l'homme aux doses habituelles.

Irradiation

Les atomes radio-actifs servant à marquer les molécules injectées doivent être choisis pour limiter au maximum l'irradiation du sujet. Dans ce domaine, les doses délivrées aux cours des examens scintigraphiques sont actuellement du même ordre ou inférieures à celles délivrées par les examens radiologiques.

Schématiquement l'irradiation du patient dépend de trois paramètres :

- Le type de rayonnement

Seuls les rayonnements γ sont utilisables, les rayonnements α et β étant trop ionisants et de pénétration trop faible dans les tissus.

- L'élimination biologique

Plus l'organisme élimine rapidement le produit injecté (principalement par voie urinaire) plus l'irradiation est faible.

- La décroissance radio-active

L'activité d'une source radio-active donnée suit une loi de décroissance en fonction du temps du type :

$$A = A_0 e^{-\frac{\text{Log } 2}{T} t}$$

où T est dit "période radio-active" définie par le temps au bout duquel la radio-activité initiale est divisée par 2.

L'idéal est de choisir un isotope radio-actif qui a la période la plus courte possible compatible avec la durée pratique de l'examen. Les isotopes utilisés couramment ont des périodes comprises entre quelques secondes et quelques jours.

La conjugaison de l'élimination biologique et de la décroissance radio-active fait que la radio-activité présente dans l'organisme décroît en fonction du temps selon une loi assimilable à une exponentielle dont la période est appelée "période biologique".

- Métabolisme

Le devenir du produit dans l'organisme doit dépendre de l'organe à étudier de telle sorte que la mesure de la répartition du produit fournisse des renseignements utiles sur la morphologie et le fonctionnement de l'organe cible.

3) LES DETECTEURS DE RADIO-ACTIVITE

- Principes

Les détecteurs utilisés couramment en Médecine Nucléaire sont des détecteurs à scintillation dont le principe est le suivant : (cf figure 1.1) ..

Quand un photon gamma interagit avec le cristal de Iodure de Sodium (NaI), il se produit une scintillation qui est détectée par un photo-multiplicateur et transformée en impulsion électrique.

- Le scintigraphe à balayage (cf figure 1.2)

Il s'agit d'une sonde à scintillation qui effectue un balayage lent et régulier au-dessus de la zone à explorer.

La sonde est reliée mécaniquement à une tête traçante qui imprime sur papier des points dont la couleur et la densité dépendent de la radio-activité mesurée.

L'avantage de ce système est de fournir une "carte" grandeur nature de la répartition de la radio-activité (donc du produit injecté) mais la durée du balayage est longue (de l'ordre de 20 minutes pour une zone de 20 cm x 20 cm).

- Les gamma-caméras (cf figure 1.3)

Ce sont de loin les détecteurs les plus utilisés en pratique. Elles comportent :

. un collimateur

C'est un "nid d'abeille" en plomb dont le rôle est de ne laisser passer que les rayons gamma parallèles à l'axe du détecteur et de faire en sorte que l'"image" sur le cristal d'une source radio-active ponctuelle soit un point.

. un cristal de Iodure de Sodium

Il constitue le détecteur proprement dit en transformant les rayons gamma en scintillation. Son épaisseur est de l'ordre du centimètre et son diamètre de 20 à 40 cm.

. un réseau de photomultiplicateurs

Les photo-multiplicateurs (de 19 à 91) sont disposés régulièrement au-dessus du cristal.

Chaque scintillation produite par le cristal est "vue" par tous les photo-multiplificateurs qui délivrent chacun une impulsion électrique dont l'amplitude dépend de la position relative de la scintillation (donc du rayon gamma) et du photo-multiplificateur.

. un calculateur analogique

En analysant les amplitudes des impulsions électriques fournies par les photomultiplificateurs, il calcule les coordonnées X, Y et l'énergie Z du photon qui a donné naissance à la scintillation et génère sur un écran cathodique un point à l'endroit correspondant.

L'ensemble de ces points mémorisés par un appareil photographique en pose forme une image en noir et blanc de la répartition de la radio-activité.

Les examens réalisés à la gamma-caméra sont beaucoup plus rapides que ceux réalisés au scintigraphe : 1 à 2 minutes au lieu de 10 à 20 minutes.

4) LES ERREURS DE MESURE

Les mesures de radio-activité sont entachées d'un certain nombre d'erreurs liées à la nature physique du phénomène étudié et à la technologie des détecteurs. Les principales erreurs sont dues à la fluctuation statistique, au défaut de résolution des collimateurs et à la diffusion des rayonnements par effet Compton.

La fluctuation statistique

La radio-activité est un phénomène aléatoire : la probabilité de désintégration d'un atome instable pendant un intervalle de temps élémentaire est constante, ce qui fait que le nombre de désintégrations pendant un temps fixé suit une loi de Poisson qui peut être approchée par une loi de Gauss si le nombre de désintégrations mesuré est supérieur à 10 ou 20.

Autrement dit, si l'on mesure un grand nombre de fois la radioactivité émise par une source supposée constante, l'ensemble des mesures se répartit suivant une loi de Gauss de moyenne m et d'écart type $\Pi = \sqrt{m}$.

La précision statistique de la mesure peut être estimée par la quantité.

$$P = \frac{\Pi}{m} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

si n = 25	P = 20 %
si n = 100	P = 10 %
si n = 10 000	P = 1 %

La qualité de la mesure est d'autant meilleure que le nombre de "coups" mesurés est grand, c'est-à-dire que la source est active et/ou que le temps de mesure est long.

En pratique, on est limité par le fait que la radio-activité injectée est très faible et que le temps de mesure ne peut raisonnablement pas dépasser quelques minutes.

L'effet de collimateur (cf figure 1.4)

Le rôle du collimateur est de ne laisser passer que les rayons parallèles à l'axe du détecteur.

En fait, les trous du collimateur ont un diamètre non-nul et les septa entre les trous sont très minces et n'absorbent donc pas tous les rayons obliques.

L'image d'une source ponctuelle sur le cristal ne sera donc pas un point mais une tache d'aspect gaussien dont la "largeur à mi-hauteur" est de quelques millimètres, ce qui limite la résolution des gamma-caméras.

En pratique, le choix d'un collimateur sera un compromis entre les deux extrêmes suivantes :

Petits trous - septa épais : bonne résolution, mauvaise sensibilité

Gros trous - septa fins : mauvaise résolution, bonne sensibilité

L'effet Compton

Avant d'atteindre le cristal, les photons gamma en provenance de l'organisme doivent traverser une certaine épaisseur de matière et peuvent donc interagir avec cette matière notamment par effet Compton.

Lorsqu'un photon incident entre en collision avec un électron du milieu, il transfère une partie de son énergie à l'électron sous forme d'énergie cinétique et donne naissance à un photon résultant d'énergie inférieure à celle du photon incident et de direction différente.

L'ensemble de ces photons résultants forme un rayonnement "diffusé" qui contribue à dégrader l'image.

Pour limiter l'effet néfaste du rayonnement diffusé sur la qualité de l'image, les gamma-caméras disposent d'un système dit de "spectrométrie" qui ne prend en compte que les impulsions comprises dans une "fenêtre d'énergie" correspondant au rayonnement utilisé.

Ces erreurs de mesures font que le contraste et la résolution spatiale des images scintigraphiques sont médiocres comparés à ceux des images radiologiques. Ceci est compensé par le fait que, grâce à des marqueurs spécifiques les images scintigraphiques fournissent sur le fonctionnement des organes des renseignements inaccessibles aux examens radiologiques.

5) LES SYSTEMES DE TRAITEMENT DE DONNEES

Si les gamma-caméras permettent de réaliser facilement et rapidement des images représentant la répartition de la radio-activité dans l'organisme, elles présentent cependant deux insuffisances majeures : en effet, elles ne peuvent réaliser que des examens :

Statiques

Elles sont incapables de rendre compte d'un phénomène qui

varie rapidement au cours du temps comme la contraction cardiaque, les mouvements respiratoires, la circulation sanguine, ...

Qualitatifs

L'interprétation des examens se fait par analyse visuelle d'une image, c'est-à-dire de façon purement qualitative et subjective.

Pour compenser cela et permettre ainsi de réaliser des examens quantitatifs et dynamiques, il est possible de connecter aux gamma-caméras un système informatique dont le but est d'enregistrer sous forme numérique les données fournies par la gamma-caméra et de réaliser tous les calculs permettant d'extraire de ces données l'information recherchée.

Structure de base (cf figure 1.5)

Les différents systèmes proposés par les constructeurs ont le plus souvent la structure décrite figure .

- une unité centrale
- une interface d'acquisition
- une mémoire de masse
- une unité de visualisation d'image
- une console de commande

Les principales fonctions

Quelles que soient leurs performances, les systèmes disponibles sur le marché réalisent les grandes fonctions suivantes :

Acquisition

Après digitalisation, les données provenant de la gamma-caméra sont stockées en mémoire de masse généralement sous forme de matrices dont la taille varie de 32 x 32 à 1 024 x 1 024.

Chaque matrice représente une image scintigraphique dont la durée varie de 1/100 de seconde à plusieurs minutes. Chaque point de la matrice contient un nombre représentant le nombre de coups détectés au point correspondant.

Traitement d'image

Sur les "matrices-images" stockées en mémoire de masse il est possible de réaliser tous les traitements d'images classiques :

- . opérations arithmétiques
- . lissages
- . filtrages...

Visualisations

Les matrices peuvent être visualisées, c'est-à-dire transformées en images en associant à chaque nombre soit un niveau de gris, soit une couleur.

Détermination de zones d'intérêt

Très souvent l'utilisateur ne s'intéresse qu'à une partie de l'image, celle représentant l'organe à étudier par exemple, et ne désire faire des calculs que sur cette partie. Il doit donc être possible de définir cette zone (par un curseur ou un light pen) et de la mémoriser.

Calculs de courbes

Il est possible de calculer la courbe de radio-activité sur une zone donnée en fonction du temps (c'est-à-dire sur une série d'images consécutives de durée connue) puis de mémoriser, traiter, visualiser ces courbes.

II - LA TOMOGRAPHIE D'EMISSION

Les examens scintigraphiques classiques fournissent des images qui sont en fait la projection sur un plan d'un volume radio-actif.

Ceci présente deux inconvénients majeurs :

- . Imprécision dans la localisation d'une lésion ;
plusieurs incidences sont alors nécessaires

- . Diminution du contraste ;

si une lésion de petite taille (hypo ou hyper active) est environnée par un volume radio-actif important, cette lésion risque de ne pas être détectable sur une projection car elle sera masquée par l'activité environnante.

C'est pourquoi pour certains types d'examens, il est intéressant de reconstruire des "coupes" représentant la répartition de la radio-activité sur un plan isolé du volume à étudier, la description complète du volume se faisant en reconstituant une série de coupes adjacentes.

LES DIFFERENTES TECHNIQUES DE TOMOGRAPHIE

Plusieurs techniques ont été proposées pour reconstruire des coupes tomographiques.

* Reconstruction de coupes longitudinales

On appelle coupes longitudinales des coupes parallèles au plan du détecteur. Le but de ces techniques est de "mettre au point" le détecteur sur le plan à reconstruire en rendant flou tout ce qui est en dehors du plan. Citons par exemple la technique à balayage, la technique à ouverture codée.

* Reconstruction de coupes transverses

Il existe deux grands types de techniques dépendant du type de rayonnement émis par le produit radio-actif utilisé.

→ La tomographie par position

Les produits utilisés sont des émetteurs de positrons (électron positif). Les positrons, lorsqu'ils sont émis se recombinent immédiatement

avec un électron du milieu en donnant naissance à 2 photons d'énergie 0,51 Mev et de directions opposées. Les mesures se font par deux détecteurs en coïncidence avec ou sans évaluation du temps de vol.

X Cette technique est très intéressante parce qu'elle permet d'utiliser des isotopes d'atomes très courants en biologie comme l'azote, l'oxygène ou le carbone. Malheureusement, son développement pratique est limité par l'importance de l'infrastructure nécessaire surtout pour la génération des produits qui ont une demie-vie très courte (de quelques secondes à quelques minutes), ce qui nécessite de disposer d'un ~~cyclotron~~ *cyclotron* à proximité.

→ La tomographie à photon unique (SPECT*)

Les produits utilisés ici sont des émetteurs de rayon γ comme pour les examens conventionnels de Médecine Nucléaire.

Les mesures consistent à enregistrer la projection du volume radio-actif selon plusieurs incidences en faisant tourner le détecteur autour de l'objet ou ce qui est équivalent en faisant tourner l'objet devant le détecteur.

La reconstruction d'une coupe transverse, c'est à dire la détermination de la radio-activité en chaque point d'un plan perpendiculaire à l'axe de rotation se fait par calcul à partir des projections de ce plan suivant les différentes incidences.

Il s'agit de la technique de tomographie d'émission de loin la plus utilisée en pratique, car elle utilise le matériel d'un service de Médecine Nucléaire standard (gamma caméra + système de traitement), la seule modification à apporter étant le système mécanique permettant de faire tourner la gamma caméra autour du patient.

LES ALGORITHMES DE RECONSTRUCTION EN TOMOGRAPHIE D'EMISSION

De nombreux algorithmes de reconstruction ont été décrits. Ils peuvent schématiquement se classer en trois groupes :

* SPECT : Single Photon Emission Computed Tomography

1 - Les méthodes analytiques

Elles consistent à établir les équations liant les inconnues aux données et à résoudre ces équations. C'est ce type de méthode que nous développerons dans la suite.

2 - Les méthodes itératives

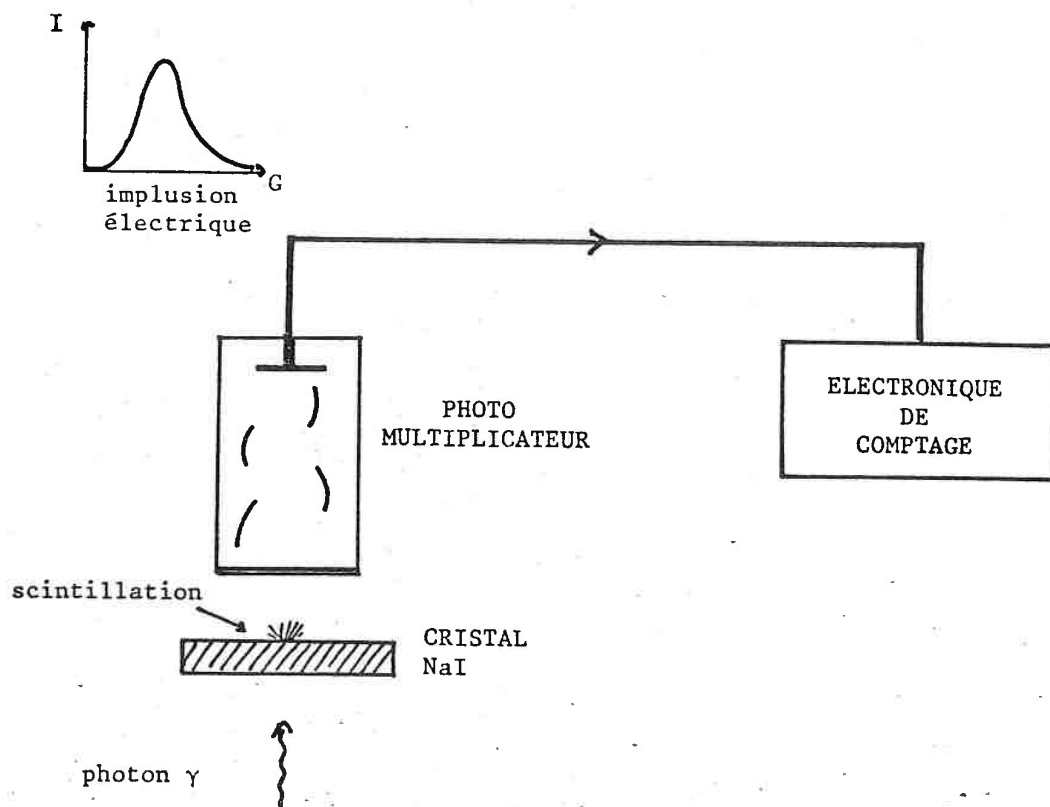
Elles consistent à proposer a priori une solution, à en calculer les différentes projections, à comparer les projections obtenues et les mesures réelles, et à modifier la solution en fonction des écarts observés, ceci jusqu'à obtenir des écarts acceptables.

3 - Les méthodes par rétro-projection

Ce sont de loin les méthodes les plus utilisées en raison de leur relative simplicité et des bons résultats obtenus. Chaque ligne-projection de la coupe à reconstruire est "rétro-projetée", c'est à dire transformée en un plan formé d'une infinité de lignes parallèles et identiques à la ligne-projection. La superposition de toutes les rétro-projections après un filtrage convenable permet de reconstruire la coupe-transverse.

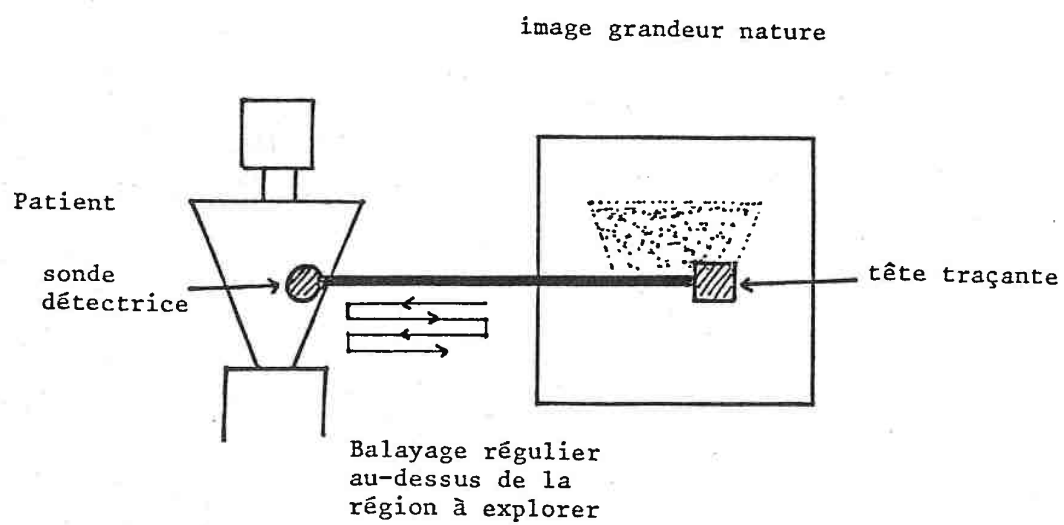
Malheureusement, cette méthode ne permet pas en tomographie d'émission de tenir compte de l'absorption de la radio-activité par les tissus traversés.

La méthode que nous décrirons dans la suite est une méthode analytique qui permet de prendre en compte l'absorption radio-active sous certaines hypothèses.



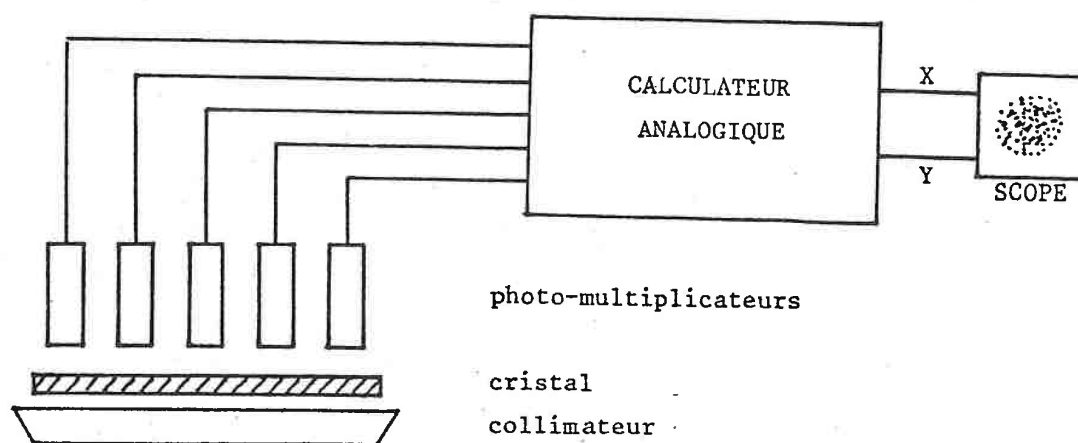
PRINCIPE DES DETECTEURS A SCINTILLATION

Figure 1.1



PRINCIPE DE SCINTIGRAPHIE A BALAYAGE

Figure 1.2



PRINCIPE DE LA GAMMA CAMERA

Figure 1.3

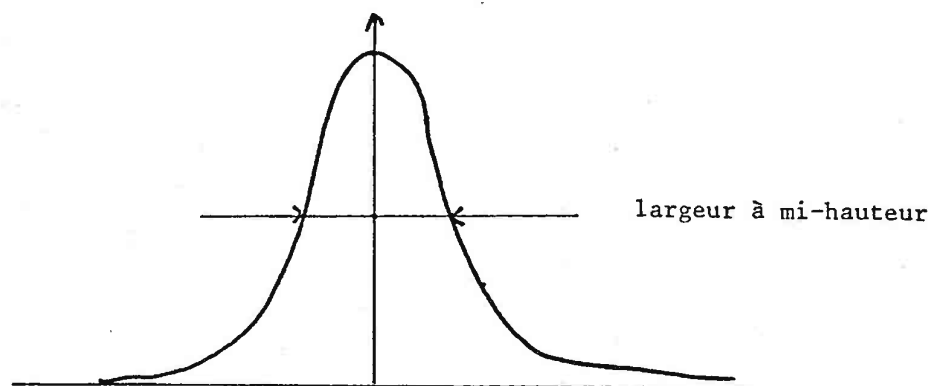


image de la source ponctuelle sur le cristal

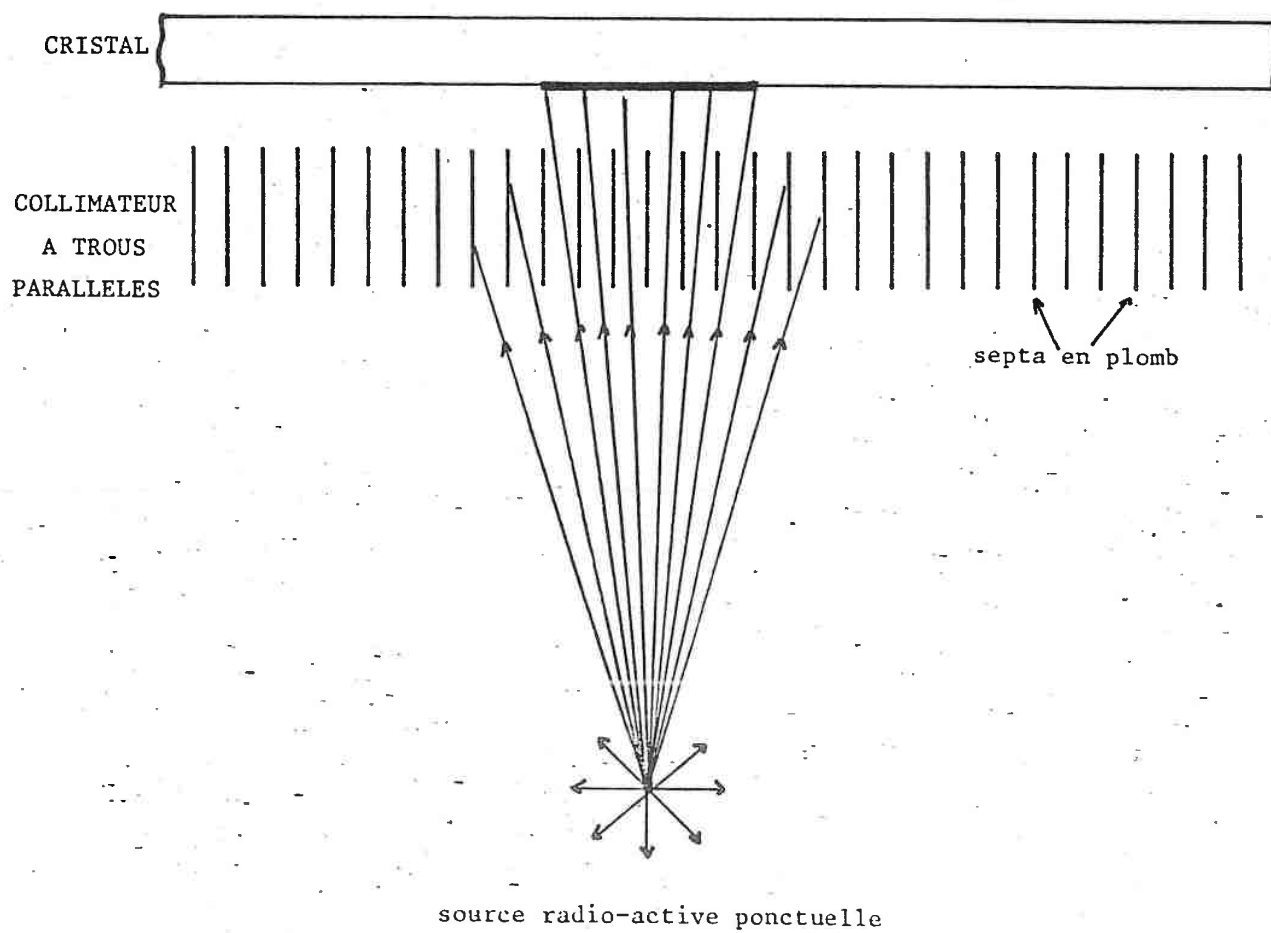
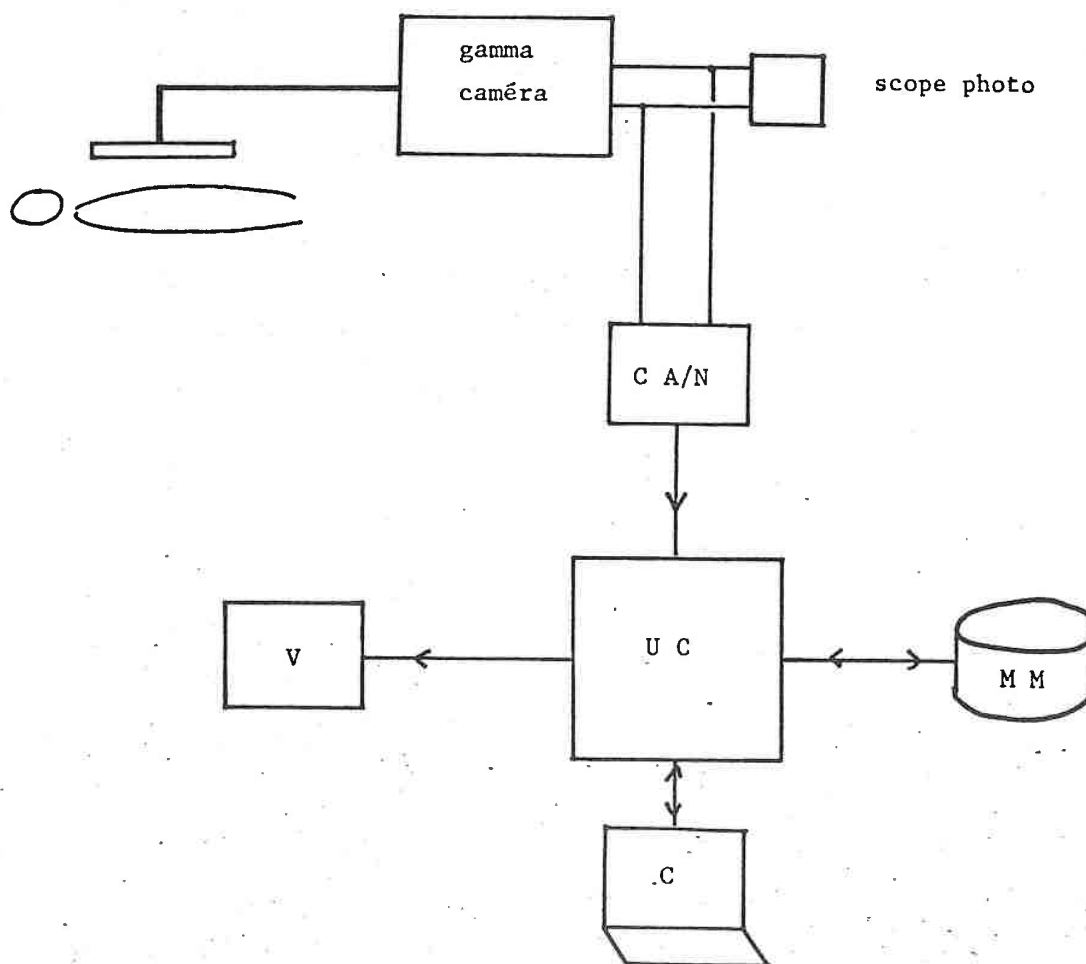


Figure 1.4



- U C : unité centrale
- M M : Mémoire de masse
- C : console de commande
- V : unité de visualisation d'images
- C A/N : convertisseur analogique - numérique

STRUCTURE SCHEMATIQUE DES SYSTEMES DE TRAITEMENT EN MEDECINE NUCLEAIRE

Figure 1.5

CHAPITRE 2

MODELISATION DE LA TOMOGRAPHIE D'EMISSION

- I- NOTATIONS, HYPOTHESES
- II- ECRITURE DE L'EQUATION FONDAMENTALE
- III- DECOMPOSITION DE L'EQUATION FONDAMENTALE DANS L'ESPACE DES FREQUENCES
PAR TRANSFORMATION DE FOURIER
- IV- PROPRIETE DES FONCTIONS $f_n(r)$ ET $g_n(x)$ DANS LE CAS OU $\mu = 0$

Le problème posé est de calculer la radio-activité en tous les points d'un volume dont on connaît une série de projections mesurées par une gamma-caméra qui effectue une rotation autour du volume à étudier, la surface du détecteur restant parallèle à l'axe de rotation.

Le problème peut se ramener à la reconstruction d'une coupe plane de ce volume, le volume entier pouvant être considéré comme une succession de coupes adjacentes.

Nous prendrons dans la suite comme plan de travail, le plan d'une coupe transverse c'est-à-dire un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du détecteur.

I - NOTATIONS - HYPOTHESES

1) GEOMETRIE DU SYSTEME

X Dans le plan d'une coupe transverse, nous prendrons les notations suivantes (cf figure 2,1) : page 2, 14

O : trace de l'axe de rotation

R : moitié de la largeur utile du détecteur

C : cercle de centre O et de rayon R qui représente le cercle de balayage

D : le domaine à étudier (la coupe transverse d'un patient en pratique) que l'on suppose convexe et entièrement incluse dans C

OX : axe origine des angles

T_1, T_2 : traces de la face du détecteur dans deux positions diamétralement opposées

OXY : le repère mobile lié au détecteur (cx est parallèle à la face du détecteur)

w : l'angle entre ox et oX caractérisant la position du détecteur

2) DONNEES - INCONNUES

Les données sont les mesures physiques, c'est-à-dire la valeur de la radioactivité mesurée pendant un temps donné en chaque point du détecteur et pour chaque position de celui-ci autour de l'objet à examiner. Nous les noterons : $h(x, w)$.

Les inconnues sont les valeurs de la densité de radio-activité en chaque point du domaine à étudier D . Nous les noterons en nous référant à un système de coordonnées polaires centré en o :

$$f(r, \theta)$$

Nous supposerons que la densité radio-active est nulle en tous points extérieurs à D .

3) REMARQUES

Le système réel est discrétisé, c'est-à-dire que les valeurs $g(x, w)$ et $f(r, \theta)$ ne seront connues que pour un certain nombre de valeurs de x, w, r, θ en général 32 ou 64.

II - ETABLISSEMENT DE L'EQUATION FONDAMENTALE DE LA TOMOGRAPHIE D'EMISSION

1) NOTATIONS

Soit $M_1(x, w)$, un point de coordonnées sur le détecteur en position $T_1(w)$ et M_2 , le point du détecteur en position T_2 symétrique de M_1 par rapport à ox .

Grâce au système de collimation, les points M_1 et M_2 ne reçoivent que la radio-activité en provenance de la droite $M_1 M_2$ que nous noterons $\Delta(x, w)$.

Sur la droite $\Delta(x, w)$ nous prendrons les notations suivantes :

N_1, N_2 l'intersection de Δ et C

P_1, P_2 l'intersection de Δ et D
 $H(x, w)$ la projection de O sur Δ
 $h_1(x, w)$ la radioactivité mesurée en M_1
 $h_2(x, w)$ la radioactivité mesurée en M_2
 $P(r, \theta)$ le point courant de Δ
 $f(r, \theta)$ la densité de radioactivité au point P
 $f(r, \theta) dl$ la radioactivité émise par une source de longueur dl centrée en P

2) RAPPEL SUR L'ABSORPTION RADIOACTIVE

La décroissance de la radioactivité due à l'absorption d'un rayonnement par la matière se fait dans un milieu homogène selon la loi.

$$A = A_0 e^{-\mu l}$$

où

A_0 est l'activité initiale

A est l'activité résiduelle

l est l'épaisseur du milieu transverse

μ est le coefficient d'absorption qui dépend du milieu et du type de rayonnement

En pratique, on utilise souvent la notion de "couche de demi-absorption" qui est l'épaisseur du milieu qui absorbe la moitié du rayonnement initial

$$C.D.A. = \frac{\text{Log } 2}{\mu}$$

Par exemple, pour les tissus mous de l'organisme et pour le rayonnement de 140 Kev du Technecium 99m qui est le plus utilisé en Médecine Nucléaire, la couche de demi-absorption est de l'ordre de 6 cm.

3) CALCUL DE LA RADIOACTIVITE MESUREE EN M_1 et M_2

Si l'on suppose le coefficient d'absorption μ constant sur D et nul en dehors de D, la radioactivité due à la source élémentaire de

longueur dl mesurée en M_1 et M_2 sera :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \text{en } M_1 : dh_1(x, w) &= f(r, \theta) e^{-\mu P_1} dl \\ \text{en } M_2 : dh_2(x, w) &= f(r, \theta) e^{-\mu P_2} dl \end{aligned}$$

La radioactivité mesurée en M_1 et M_2 est due à la contribution de toutes les sources élémentaires du segment $P_1 P_2$ et sera donc obtenue en intégrant les équations :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} h_1(x, w) &= \int_{P_1 P_2} f(r, \theta) e^{-\mu P_1} dl \\ h_2(x, w) &= \int_{P_1 P_2} f(r, \theta) e^{-\mu P_2} dl \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} l_1(x, w) &= \overline{HP_1} \\ l_2(x, w) &= \overline{HP_2} \\ l &= \overline{HP} \end{aligned} \quad \text{mesurées sur l'axe } \overrightarrow{HM_2}$$

Remarque : si l'on suppose le contour D connu et convexe, les fonctions $l_1(x, w)$ et $l_2(x, w)$ sont connues c'est-à-dire que l'on sait calculer l_1 et l_2 pour toutes valeurs de x et w .

Sur la droite orientée HM_2 nous avons les inégalités suivantes :

$$l_1 < l < l_2$$

d'où

$$\begin{aligned} |P P_1| &= |l_1 - l| = l - l_1 \\ |P P_2| &= |l_2 - l| = l_2 - l \end{aligned}$$

Les équations (2.2) se transforment en

$$\int_{l_1(x,w)}^{l_2(x,w)} f(r, \theta) e^{-\mu (1 - l_1(x,w))} dl = h_1(x,w)$$

$$\int_{l_1(x,w)}^{l_2(x,w)} f(r, \theta) e^{-\mu (l_2(x,w) - 1)} dl = h_2(x,w)$$

où r et θ sont des fonctions de l définies par

$$r = \sqrt{x^2 + l^2} \quad \theta = w + \alpha \quad \text{tg } \alpha = l/x \quad \text{cf figure}$$

4) TRANSFORMATION DES EQUATIONS DE BASE

Dans les expressions précédentes, développons les exponentielles en sortant du signe $\int$ les termes indépendants de l

$$e^{\mu l_1(x,w)} \int_{l_1(x,w)}^{l_2(x,w)} f(r, \theta) e^{-\mu l} dl = h_1(x,w)$$

$$e^{-\mu l_2(x,w)} \int_{l_1(x,w)}^{l_2(x,w)} f(r, \theta) e^{+\mu l} dl = h_2(x,w)$$

d'où:

$$(2.3) \int_{l_1(x,w)}^{l_2(x,w)} f(r, \theta) e^{-\mu l} dl = h_1(x,w) e^{-\mu l_1(x,w)}$$

$$(2.4) \int_{l_1(x,w)}^{l_2(x,w)} f(r, \theta) e^{-\mu l} dl = h_2(x,w) e^{\mu l_2(x,w)}$$

Au lieu de chercher à résoudre séparément chacune de ces deux équations, nous choisissons de résoudre l'équation obtenue en les additionnant membre à membre.

Remarques :

- ce choix est justifié par les simplifications qui en résultent dans la suite des calculs grâce à la parité des cosinus hyperboliques introduits.
- si l'on suppose que le coefficient d'absorption μ est nul :
 - . l'activité mesurée en deux points opposés est alors égale d'où $h_1(x, w) = h_2(x, w)$
 - . $e^{-\mu l} = e^{+\mu l} = 1$

Les deux équations (2.3) et (2.4) sont donc équivalentes.

En additionnant les équations (2.3) et (2.4) membre à membre nous obtenons :

$$\int_{l_1(x,w)}^{l_2(x,w)} f(r, \theta) (e^{-\mu l} + e^{+\mu l}) dl = h_1(x, w) e^{-\mu l_1(x, w)} + h_2(x, w) e^{+\mu l_2(x, w)}$$

or :

$$e^{-\mu l} + e^{+\mu l} = 2 \operatorname{ch}(\mu l)$$

d'où :

$$\int_{l_1(x,w)}^{l_2(x,w)} f(r, \theta) \operatorname{ch}(\mu l) dl = \frac{1}{2} \left[h_1(x, w) e^{-\mu l_1(x, w)} + h_2(x, w) e^{+\mu l_2(x, w)} \right]$$

$r(r, \theta)$ est nulle par hypothèse en dehors de D. On ne modifie donc pas la valeur de l'intégrale en remplaçant les bornes

$l_1(x, w)$ et $l_2(x, w)$ (qui correspondent à P_1 et P_2) par $-\sqrt{R^2 - x^2}$ et $\sqrt{R^2 - x^2}$ qui correspondent à N_1 et N_2

En effet dans le triangle rectangle OHN_1 :

$$OH^2 + HN_1^2 = ON_1^2$$

$$x^2 + HN_1^2 = R^2$$

$$HN_1^2 = R^2 - x^2$$

L'équation fondamentale de la tomographie d'émission devient donc :

$$(2.5) \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(r, \theta) \operatorname{ch}(\mu l) dl = g(x, w)$$

avec :

$$g(x, w) = \frac{1}{2} \left[h_1(x, w) e^{-\mu l_1(x, w)} + h_2(x, w) e^{\mu l_2(x, w)} \right]$$

$$r = \sqrt{x^2 + l^2} \quad \theta = w + \alpha \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{x}$$

Soit en remplaçant les variables r et θ par leur expression en fonction de la variable d'intégration l

$$\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f\left(\sqrt{x^2 + l^2}, w + \operatorname{Arctg} \frac{l}{x}\right) \operatorname{ch}(\mu l) dl = g(x, w)$$

Rappelons les hypothèses et les notations utilisées pour établir cette équation :

$f(r, \theta)$: inconnues

$g(x, w)$: données auxiliaires calculées à partir des mesures $h_1(x, w)$ et $h_2(x, w)$

D : domaine de mesure supposé connu et convexe à l'extérieur duquel $f(r, \theta)$ est nul

μ : coefficient d'absorption supposé constant à l'intérieur de D et nul en dehors

III - DECOMPOSITION DE L'EQUATION FONDAMENTALE DANS L'ESPACE DES FREQUENCES PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

L'équation à résoudre est :

$$(2.5) \quad \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(r, \theta) \operatorname{ch}(\mu l) dl = g(x, w)$$

Les fonctions $g(x, w)$ et $f(r, \theta)$ sont des fonctions réelles périodiques de période 2π respectivement en w et θ .

Il est donc possible de les décomposer en série de Fourier et de les écrire sous la forme

$$f(r, \theta) = \sum f_n(r) e^{in\theta}$$

$$g(x, w) = \sum g_n(x) e^{inw}$$

*1/ c'est une des séries en cosinus et sinus
2/ indispensable : donner la formule permettant de calculer $g_n(x)$*

Or dans l'équation (2.5), r et θ sont des fonctions de l définies par :

$$r = \sqrt{x^2 + l^2} \quad \theta = w + \alpha \quad \operatorname{tg} \alpha = l/r$$

d'où :

$$(2.6) \quad \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sum f_n(r) e^{in(w + \alpha)} \operatorname{ch} \mu l dl = \sum g_n(x, w) e^{inw}$$

Soit en permettant les signes $\sum$ et $\int$ et en sortant le terme e^{inw} en facteur de l'intégrale :

$$\sum e^{inw} \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f_n(r) \operatorname{ch} \mu l e^{-in\alpha} dl = \sum e^{inw} g_n(x)$$

⊗ après de justifier la transformation Fourier après évaluer page 3-12

Or:

$$f_n(r) \cdot \text{ch } \mu l \cdot e^{i n \alpha} = f_n(r) \cdot \text{ch } \mu l \cdot \cos n \alpha + i \cdot f_n(r) \cdot \text{ch } \mu l \cdot \sin n \alpha$$

$$r = x^2 + l^2 \quad \text{fonction paire de } l \quad f_n(r) \quad \text{fonction paire de } l$$

$$\text{ch } \mu l = \text{fonction paire de } l$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{r} \quad \text{fonction impaire de } l \quad \begin{array}{l} \cos n \alpha \text{ fonction paire de } l \\ \sin n \alpha \text{ fonction impaire de } l \end{array}$$

donc:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} f_n(r) \text{ch } \mu l e^{i n \alpha} dl &= \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} f_n(r) \text{ch } \mu l \cos n \alpha dl \\ &+ i \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} f_n(r) \text{ch } \mu l \sin n \alpha dl \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f_n(r) \text{ch } \mu l \cos n \alpha dl \end{aligned}$$

Soit en remplaçant dans l'équation (2.6)

$$\sum e^{i n w} \cdot 2 \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f_n(r) \text{ch } \mu l \cos(\alpha) dl = \sum e^{i n w} g_n(x)$$

Soit en identifiant les termes en $e^{i n w}$

$$2 \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f_n(r) \text{ch } \mu l \cos n \alpha dl = g_n(x)$$

Prenons comme variable d'intégration r

$$l = \sqrt{r^2 - x^2} \implies dl = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{x} \implies \alpha = \text{Ar. tg. } \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{x} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$\cos n\alpha = T_n(\cos \alpha) = T_n\left(\frac{x}{r}\right)$ où T_n = Polynôme de Tchebycheff de degré n

$$\text{borne 1} = 0 \quad r = x$$

$$\text{borne 1} = \sqrt{r^2 - x^2} \quad r = R$$

d'où

$$2 \int_x^R f_n(r) \operatorname{ch}(\mu \sqrt{r^2 - x^2}) T_n\left(\frac{x}{r}\right) \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr = g_n(x)$$

Soit en posant:

$$K_n(x, r) = \frac{2r T_n(x/r)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(2.7) \quad \int_0^R f_n(r) \cdot \operatorname{ch}(\mu \sqrt{r^2 - x^2}) K_n(x, r) dr = g_n(x)$$

pour n de 0 à ∞

Nous avons donc transformé l'équation fondamentale (2.5) en un système de m équations intégrales, m étant le nombre d'harmoniques que l'on désire prendre en compte.

IV - PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS $f_n(r)$ ET $g_n(x)$ DANS LE CAS OU $\mu = 0$

L'étude théorique des fonctions $f_n(r)$ et $g_n(x)$ si $\mu = 0$ est développée en détail dans la thèse d'état de OUDIN ()

Nous nous bornerons à rappeler et à démontrer rapidement les propriétés utilisées dans la suite pour établir la méthode de reconstruction tomographique.

1) PROPRIETES DE $f_n(r)$

La fonction $f(r, \theta)$ ou $\bar{F}(x, y)$ représente la répartition de la radioactivité en tous les points du domaine de mesure D. Il s'agit d'une grandeur physique donc réelle et finie en tous point de D.

En particulier le point 0, introduit par la méthode de mesure n'est pas un point singulier pour $f(r, \theta)$.

Supposons que $\bar{F}(x, y)$ soit la partie réelle d'une fonction complexe de la variable $z = x + iy$ admettant au voisinage de 0 le développement

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

où tous les a_n sont complexes et finis.

En repoussant en coordonnées polaires et en posant $z = re^{i\theta}$ le développement précédent devient :

$$a_0 + a_1 r e^{i\theta} + a_2 r^2 e^{2i\theta} + \dots + a_n r^n e^{ni\theta} + \dots$$

$f(r, \theta)$ étant finie quand r tend vers 0 et $f(r, \theta)$ étant la partie réelle du développement précédent il faut que $f_n(r)/r^n$ admette une limite finie quand r tend vers 0.

2) PROPRIETES DES $g_n(x)$

Formons à priori l'intégrale

$$I = \int_0^R x^k g_n(x) dx$$

Soit en remplaçant $g_n(x)$ par sa valeur donnée par l'équation fondamentale :

$$I = \int_0^R x^k dx \int_x^R f_n(r) \frac{2r T_n\left(\frac{x}{r}\right)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr$$

Comme $f_n(r)$ est fini nous pouvons permuter les signes

$$I = \int_0^R f_n(r) dr \int_0^R \frac{x^k T_n\left(\frac{x}{r}\right)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

Posons $J = \int_0^R \frac{x^k}{\sqrt{r^2 - x^2}} T_n\left(\frac{x}{r}\right) dx$

L'intégrale I devient :

$$I = \int_0^R x^k g_n(x) dx = \int_0^R f_n(r) J dr$$

Calculons l'intégrale en x

$$J = \int_0^R \frac{x^k}{\sqrt{r^2 - x^2}} T_n\left(\frac{x}{r}\right) dx$$

Faisons le changement de variable $x = r \cos \phi$

$$dx = -r \sin \phi d\phi$$

$$\sqrt{r^2 - x^2} = r \sin \phi$$

$$x^k = r^k \cos^k \phi$$

$$T_n\left(\frac{x}{r}\right) = T_n(\cos \phi) = \cos n\phi$$

borne inf : $x = 0 \quad \phi = \frac{\pi}{2}$

borne-sup : $x = r \quad \phi = 0$

d'où:

$$J = r^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k \phi \cos n\phi d\phi$$

Nous allons vérifier que $J = 0$ si $\begin{cases} k < n \\ k \text{ et } n \text{ de même parité} \end{cases}$

Remarquons d'abord que si k et n sont de même parité, $\cos^k \phi \cos n \phi$ est invariant pour le changement de ϕ en $\pi - \phi$:
 Si k et n sont pairs $\cos^k \phi$ et $\cos n \phi$ sont tous les 2 invariants .
 Si k et n sont impairs $\cos^k \phi$ et $\cos n \phi$ changent tous les 2 de signe.

Donc :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k \phi \cos n \phi d\phi = r^k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^k \phi \cdot \cos n \phi d\phi = \frac{r^k}{2} \int_0^{\pi} \cos^k \phi \cdot \cos n \phi \cdot d\phi$$

Or $\cos^k \phi$ peut se mettre sous la forme d'une somme du type :

$$\cos^k \phi = \sum_{l=0}^k a_l \cos l \phi$$

d'où

$$J = \frac{r^k}{2} \int_0^{\pi} \sum_{l=0}^k a_l \cos l \phi \cos n \phi d\phi$$

Soit en permutant les signes $\int$ et $\sum$

$$J = \frac{r^k}{2} \sum_{l=0}^k a_l \int_0^{\pi} \cos l \phi \cos n \phi d\phi$$

Or nous avons supposé $k < n$. comme $l \leq k$ nous avons donc en particulier $l \neq n$

Par suite des propriétés d'orthogonalité des cosinus, toutes les intégrales du type $\int_0^{\pi} \cos l \phi \cos n \phi d\phi$ sont nulles, donc :

$$J = 0$$

et par suite;

$$(2.8) \quad I = \int_0^R x^k g_n(x) dx = 0 \quad \begin{matrix} k < n \\ k \text{ et } n \text{ de même parité} \end{matrix}$$

Ce qui impose à la fonction $g_n(x)$ P conditions P étant la partie entière de n/r .

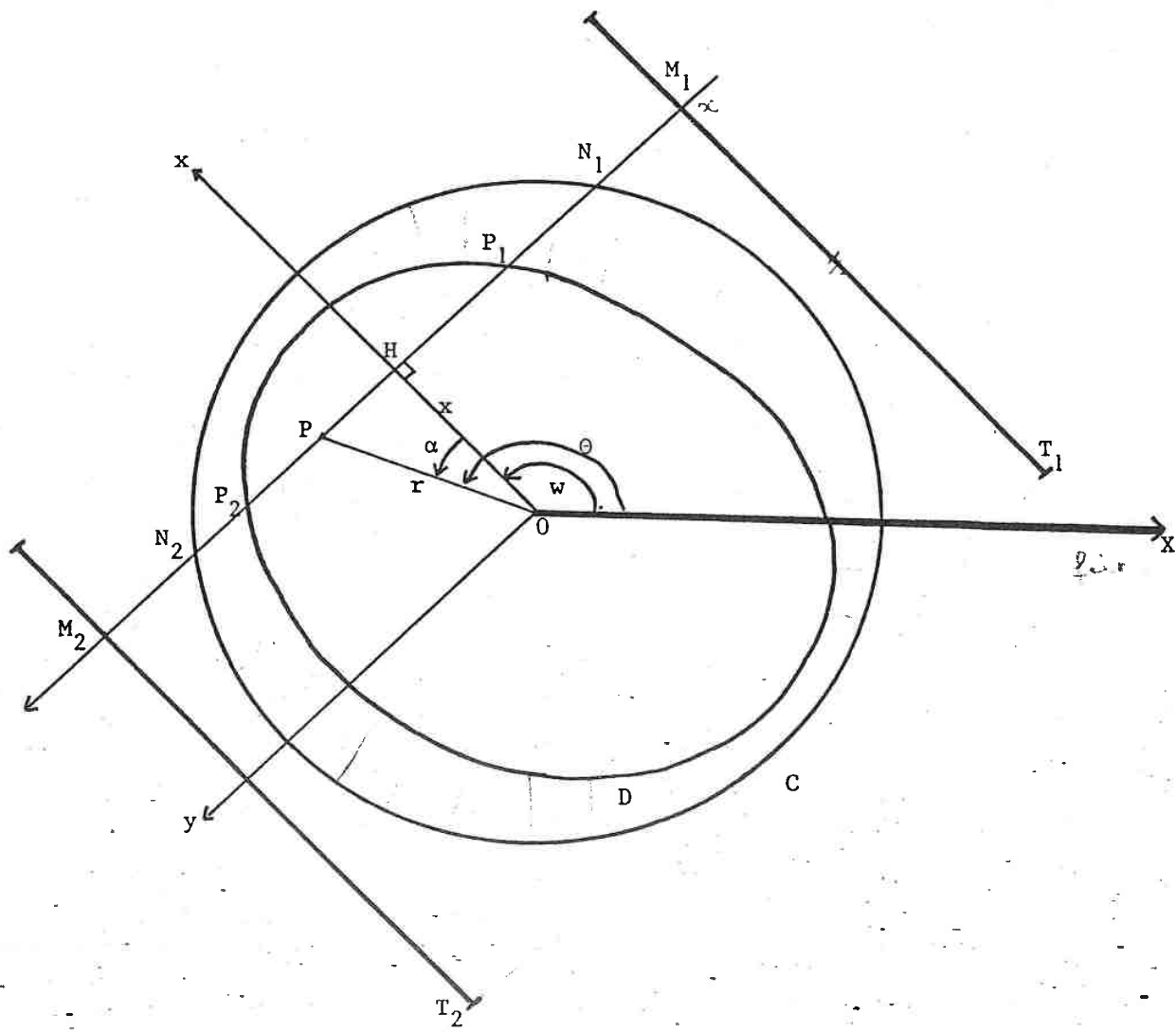


FIGURE 2.1

CHAPITRE 3

ETABLISSEMENT ET RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE DISCRET

I- DISCRETISATION DES EQUATIONS INTEGRALES EN $f_n(r)$

II- METHODE DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

ANNEXE : CALCUL DES COEFFICIENT DES SYSTEMES LINEAIRES

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment il est possible d'approcher chacune des équations intégrales du système (2.7) par un système linéaire dont nous proposerons une méthode de résolution.

I- DISCRETISATION DES EQUATIONS INTEGRALES EN $f_n(r)$

Le système de mesure étant discret, x ne peut prendre qu'un certain nombre de valeurs, que nous supposerons régulièrement réparties sur l'intervalle $0, R$

Soit h la distance entre deux points de mesure et $2s$ le nombre de points de mesure sur un détecteur. Si l'on numérote les points de mesure à partir de l'extérieur les valeurs des x_i sont (cf figure 3.1) : [page 3.126]

$$x_i = R - i \cdot h \quad \text{avec } R = \left(\frac{2s+1}{2}\right) h$$

De même la solution $f_n(r)$ ne sera calculée que pour s valeur de r

$$r_j = R - j \cdot h$$

Chacune des équations du système (2.7) se transforme en un système de s équations, une pour chaque valeur x_i de x

pour $i = 1$ à s :

$$\int_{x_i}^R f_n(r) \operatorname{ch} \mu \sqrt{r^2 - x_i^2} \cdot K_n(x_i, r) dr = g_n(x_i)$$

$$\text{avec } K_n(x_i, r) = \frac{2r \operatorname{Tn}\left(\frac{x_i}{r}\right)}{\sqrt{r^2 - x_i^2}}$$

Posons:

$$I_i^n = \int_{x_i}^R f_n(r) \operatorname{ch} \mu \sqrt{r^2 - x_i^2} \cdot K_n(x_i, r) dr$$

Le calcul numérique des intégrales $\int_i^n$ doit être fait avec soin, d'une part à cause du caractère oscillant des polynômes de Tchebycheff $T_n(x_i/r)$, d'autre part à cause de la singularité $\frac{1}{\sqrt{r^2 - x_i^2}}$

Les intégrales seront évaluées par la méthode des trapèzes généralisée qui consistera à garder pour $K_n(x_i, r)$ sa formulation mathématique stricte et à approcher les quantités $f_n(r)$ par une interpolation linéaire sur chaque intervalle du type $[x_j, x_{j-1}]$ pour $j < i$.

Chaque intégrale $\int_i^n$ peut alors être approchée par une combinaison linéaire des $f_n(x_j)$ avec $j < i$ dont les coefficients $k_{i,j}^n$ sont calculés en annexe.

Le système de s équations intégrales se transforme alors en un système linéaire de s équations à s inconnues :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} k_{11}^n f_1^n &= g_1^n \\ k_{21}^n f_1^n + k_{22}^n f_2^n &= g_2^n \\ \vdots &\vdots \\ k_{s1}^n f_1^n + k_{s2}^n f_2^n + \dots + k_{ss}^n f_s^n &= g_s^n \end{aligned}$$

avec $f_i^n = f_n(r_i)$ qui sont les inconnues

$h_i^n = h_n(x_i)$ qui sont les données

Soit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} K^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^n \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} f^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^n \\ \vdots \\ f_s^n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} g^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^n \\ \vdots \\ g_s^n \end{bmatrix} \quad [K^n] = \begin{bmatrix} k_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ k_{21}^n & k_{22}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{s1}^n & \dots & \dots & \dots & k_{ss}^n \end{bmatrix}$$

L'équation fondamentale (2.5) a donc été approchée par un ensemble de m système linéaire de s équations à s inconnues

$$\left(\begin{array}{l} \sqrt{R^2 - x^2} \\ -\sqrt{R^2 - x^2} \end{array} \right) f(r, \theta) \operatorname{ch}(\mu l) dl = g(x, w) \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} K^0 \\ K^1 \\ \vdots \\ K^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^0 \\ f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^0 \\ g^1 \\ \vdots \\ g^n \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

II - METHODE DE RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

1) - INTRODUCTION

L'équation fondamentale de la tomographie d'émission

$$\left(\begin{array}{l} + \sqrt{R^2 - x^2} \\ - \sqrt{R^2 - x^2} \end{array} \right) f(r, \theta) \operatorname{ch}(\mu l) dl = g(x, w)$$

a été remplacée, après développement de $g(x, w)$ et de $f(r, \theta)$ en série de Fourier, par le système à m équations intégrales suivant où m est le nombre d'harmoniques que l'on prendra en compte

$$2 \int_x^R f_n(r) \operatorname{ch}(\mu \sqrt{r^2 - x^2}) K_n(x, r) dr = g_n(x)$$

Chacune des équations intégrales du système (2.7) peut être approchée par un système linéaire de s équations à s inconnues où s est le nombre de points de mesures sur un rayon.

$$\begin{bmatrix} K^n \\ F^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^n \end{bmatrix}$$

Nous avons d'autre part montré au chapitre 2 que les équations du système () n'avaient de solution acceptable physiquement dans le cas où $\mu = 0$ que si :

$$\int_0^R x^k g_n(x) dx = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} k < n \\ k \text{ et } n \text{ de même parité} \end{matrix}$$

Ce qui impose aux seconds membres de chaque système p conditions avec $P = \text{partie entière de } \frac{n}{2} = E\left(\frac{n}{2}\right)$

Remarque : si $n = 0$ ou 1 $P = 0$

2) TRONCATURE DU SYSTEME LINEAIRE DANS LE CAS OU $\mu = 0$

Le système linéaire (3.1) étant une approximation de l'équation intégrale (2.7) nous supposons qu'il vérifie également les P conditions de compatibilité (2.8) au moins de façon approximative.

Or, dire qu'un système linéaire de s équations n'est soluble que si les seconds membres vérifient P conditions, entraîne que le système est d'ordre $m_p = s - P$ c'est-à-dire qu'il ne comporte que $s - P$ équations indépendantes (les P équations restantes étant combinaisons linéaires des précédentes) et qu'il ne peut donc définir que m_p variables.

Il a été d'autre part montré au chapitre (2) que

$$\frac{f_n(r)}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \text{limite fixe finie}$$

c'est-à-dire qu'au voisinage de l'origine $f_n(r)$ se comporte comme r^n .

Le système ne pouvant définir que $m_p = s - P$ inconnues, il est alors naturel de penser que les f_j^n relatives aux valeurs les plus proches de l'origine sont nulles.

Nous admettrons donc que :

$$f_j^n = 0 \quad \text{pour } m_p < j < s$$

ce qui fait que le système (3.1) se transforme en un système de s équations à m_p $s - P$ inconnues,

$$(3.2) \quad [\bar{K}^n] [\bar{f}^n] = [\bar{g}^n]$$

où $[\bar{K}^n]$ est formé des m_p premières colonnes de ${}_{12n}[K^n]$
 $[\bar{f}^n]$ est formé des m_p premiers éléments de f^n

$$\bar{f}^n = \begin{bmatrix} f_1^n \\ \vdots \\ f_{m_p}^n \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}^n = \begin{bmatrix} k_{11}^n & 0 & \dots & 0 \\ k_{21}^n & k_{22}^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{s1}^n & \dots & \dots & \dots & k_{m_p}^n \end{bmatrix}$$

3) RESOLUTION DU SYSTEME TRONQUE

Le système tronqué (3.2) est un système surdéterminé de s équations à $m_p = s - P$ inconnues (sauf si $n = 0$ ou 1 car alors $P = 0$). P équations sont donc combinaisons linéaires des autres et peuvent donc théoriquement être supprimées.

Nous avons préféré conserver toutes les équations et rechercher la "pseudo-solution" au sens des moindres carrés du système tronqué.

Introduisons le système auxiliaire suivant :

$$\begin{array}{rcl}
k_{11} f_1^n & & - g_1^n = e_1 \\
k_{21} f_1^n + k_{22} f_2^n & & - g_2^n = e_2 \\
k_{31} f_1^n + k_{32} f_2^n + k_{33} f_3^n & & - g_3^n = e_3 \\
\\
k_{s1} f_1^n + k_{s2} f_2^n + \dots + k_{s,me} f_{np}^n & & - g_s^n = e_s
\end{array}$$

soit sous forme matricielle

$$[\bar{K}_n] [F_n] - [G_n] = [E]$$

La pseudo-solution du système (3.2) au sens des moindres carrés est définie par l'ensemble des valeurs f_j^n qui minimisent la norme de la matrice-résidus

$$\|E\| = \sum_{j=1}^s e_j^2$$

La détermination de la "pseudo solution" se fera par la méthode de GOLUB qui est une méthode de triangulation décrite dans les références

Shématiquement la méthode de GOLUB est basée sur le théorème suivant :

La multiplication des deux membres d'un système linéaire surdéterminé par une matrice orthogonale transforme le système en un système équivalent c'est-à-dire qui possède la même "pseudo-solution" (une matrice orthogonale est une matrice dont la matrice transposée est égale à sa matrice inverse : $[Q^t] = [Q^{-1}]$).

La méthode consiste à multiplier le système linéaire à résoudre par une série de matrices orthogonales convenablement choisies pour le transformer en un système linéaire dont la matrice des coefficients est triangulaire et dont la solution est alors immédiate.

↳ diagonale ?

L'intérêt de cette méthode est qu'il existe une matrice dite matrice "pseudo-inverse" telle que

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_n \end{bmatrix}$$

est la pseudo-solution du système (3.2)

$\begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix}$ est une matrice de m_p lignes et s colonnes qui ne dépend que de $\begin{bmatrix} K_n \end{bmatrix}$ et peut donc être calculée une fois pour toutes et stockée sur disque.

4) REGULARISATION DE LA SOLUTION

Les résultats fournis par la technique précédente présentent expérimentalement des instabilités gênantes.

Afin d'éviter un traitement supplémentaire du type lissage ou filtrage, nous allons régulariser la solution en ajoutant au système (3.2) des équations dites "conditions de régularisations" :

L'instabilité numérique se traduit par des fortes oscillations locales qui correspondent à des points où la dérivée de la solution prend des valeurs anormalement grandes en valeur absolue.

Pour réduire les instabilités, nous chercherons donc à réduire l'ensemble des valeurs absolues des dérivées aux points de discrétisation. Comme ces points sont équipartis il suffira de minimiser la somme des carrés des écarts :

$$\delta_j = f_j^n - f_{j+1}^n$$

En effet, sur chacun des intervalles r_j, r_{j+1} la valeur de δ_j divisée par le pas de discrétisation représente une approximation de la dérivée de la fonction $f^n(r)$.

Pour moduler l'efficacité de cette régulation nous pondérerons tous ces écarts par un même paramètre ε (dont la valeur sera fixée

expérimentalement) et compléterons le système tronqué (3.2) par les $m_p - 1$ conditions de régularisation :

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad & \varepsilon f_1^n - \varepsilon f_2^n = 0 \\
 & \varepsilon f_2^n - \varepsilon f_3^n = 0 \\
 & \vdots \\
 & \varepsilon f_{m_p-1}^n - \varepsilon f_{m_p}^n = 0
 \end{aligned}$$

Ce système n'est évidemment pas soluble strictement car les m_p équations de régularisation imposent en fait que toutes les f_j^n soient égales.

Cependant la "pseudo solution" du système sera un compromis entre la vérification "au mieux" des m_p conditions (3.3) et la vérification "au mieux" des $m_p - 1$ conditions de régularisation. En effet le système complet à résoudre est :

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \begin{matrix} k_{11} & f_1^n & & & \\ & k_{21} & f_1^n & + & k_{22} & f_2^n & & \\ & \vdots & & & & & & \\ & k_{s1} & f_1^n & + & k_{s2} & f_2^n & + & \dots + k_{s,m_p} & f_{m_p}^n \end{matrix} & \begin{matrix} = g_1^n \\ = g_2^n \\ \vdots \\ = g_s^n \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \varepsilon f_1^n - \varepsilon f_2^n \\ \vdots \\ \varepsilon f_{m_p-1}^n - \varepsilon f_{m_p}^n \end{matrix} & \begin{matrix} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

La recherche de sa pseudo solution consiste à minimiser la norme de la matrice des résidus E définie par:

$$-g_1^n = e_1$$

$$-g_2^n = e_2$$

$$-g_s^n = e_s$$

$$= e_{s+1}$$

$$= 2 \text{ cm}$$

$$\|E\| = \sum_{i=1}^s e_i^2 + \sum_{i=s+1}^{s+mp} e_i^2$$

Minimiser $\|E\|$ revient bien à trouver un compromis entre la minimisation de A (c'est-à-dire vérifier "au mieux" les s premières équations) et la minimisation de B (c'est-à-dire vérifier "au mieux" les conditions de régularisation).

La recherche de la pseudo-solution avec régularisation se fera par la méthode de triangulation de GOLUB qui consistera à calculer

$$[F_n] \quad \text{par :}$$

$$[F_n] = [R_n] \cdot [G_n]$$

oú

$[R_n]$ est une matrice indépendante de $[G_n]$ qui ne dépend que de ϵ et de k_{ij} et qui peut être calculée une fois pour toutes et stockée sur disque.

Remarques :

Les conditions de régulation

$$\epsilon f_i - \epsilon f_{i+1} = 0$$

sont d'autant plus sévères que ϵ est grand.

Il est donc intuitif de penser que plus ϵ augmente,

- plus la régularisation sera efficace
c'est-à-dire que les effets dus à l'instabilité des
calculs seront atténués
- plus les risques d'effacer des variations brusques réelles
augmentent

La valeur de ϵ sera donc un compromis à trouver entre régularisation et fidélité.

5) CAS OU $\mu \neq 0$

Dans le cas où μ est non nul, il n'a pas été possible de démontrer des conditions de comptabilité analogues aux conditions (3.8).

Cependant, par analogie, nous choisissons de stabiliser et de résoudre les systèmes linéaires par la même technique que lorsque μ est nul.

6) CONCLUSIONS

Reprenons les étapes des calculs :

L'équation fondamentale de la tomographie d'émission

$$\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}} f(r, \theta) \operatorname{ch}(\mu l) dl = g(x, w)$$

a été remplacée après développement de $g(x,w)$ et $f(r, \theta)$ en série de Fourier par le système de m équations intégrales (m étant le nombre d'harmoniques que l'on prendra en compte) :

$$2 \int_x^R f_n(r) \operatorname{ch}(\mu \sqrt{r^2 - x^2}) K_n(x,r) dr = g_n(x)$$

chacune des équations intégrales précédentes est approchée par le système linéaire

$$\begin{bmatrix} K^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^n \end{bmatrix}$$

dont la "pseudo solution" régularisée est donnée par

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^n \end{bmatrix}$$

où R_n est une matrice qui dépend de ϵ coefficient de régularisation et μ coefficient d'absorption mais qui est indépendante des données et peut donc être pré-calculée et stockée sur disque.

Pratiquement la reconstruction d'une coupe tomographique comportera les étapes suivantes :

- une fois pour toutes :

calcul et stockage sur disque des matrices

$\begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix}$ pour n de 0 à n max.

- Pour chaque coupe :

1) extraction des données : construction du tableau

$$g(x_i, w_j) = \frac{1}{2} \left[h_1(x_i, w_j) e^{-\mu l_1(x_i, w_j)} + h_2(x_i, w_j) e^{-\mu l_2(x_i, w_j)} \right]$$

2) transformation de Fourier rapide : calcul du tableau

$$\begin{bmatrix} g_n^i \end{bmatrix}$$

3) multiplication par R_n : calcul du tableau

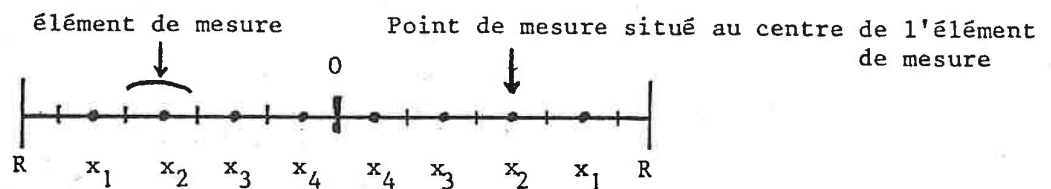
$$\begin{bmatrix} f_n^i \end{bmatrix}$$

4) transformation de Fourier inverse : calcul du tableau

$$\begin{bmatrix} f(r_i, \theta_j) \end{bmatrix}$$

5) passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes

$$\begin{bmatrix} f(r_i, \theta_j) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} f(x_k, y_i) \end{bmatrix}$$



Si s est le nombre de points de mesure sur $0 R$ et h l'intervalle entre 2 points de mesure :

$$2R = (2s + 1) h$$

$$R = \frac{2s + 1}{2} h$$

$$x_i = R - i h$$

Exemple : si $s = 4$

sur un diamètre, il y a 9 intervalles d'où :

$$2R = 9 h \rightarrow R = \frac{9 h}{2}$$

Figure 3.1

ANNEXE AU CHAPITRE 3 : CALCUL DES COEFFICIENTS $k_{i,j}$

Il s'agit d'approcher par la méthode des trapèzes généralisée les intégrales du type :

$$I_i^n = \int_{x_i}^R f_n(r) \operatorname{chp} \sqrt{r^2 - x_i^2} K_n(x_i, r) dr$$

Cette méthode consiste à :

1) - diviser l'intervalle d'intégration x_i, R en i intervalles :

$$[x_i, x_{i-1}] , [x_{i-1}, x_{i-2}] \dots [x_{j+1}, x_j] , \dots [x_1, R]$$

2) - approcher sur chaque intervalle $[x_{j+1}, x_j]$ la fonction $f_n(r) \operatorname{chp} \sqrt{r^2 - x_i^2}$ par interpolation linéaire entre x_{j+1} et x_j

3) - garder pour $K_n(x_i, r)$ sa formulation mathématique stricte

Les indices utilisés ont la signification suivante :

n = numéro de l'harmonique considéré

i = indice de x_i borne inférieure de l'intégrale

j : indice de x_j valeur courante des bornes des différents intervalles d'intégration ($j < i$)

INTERPELLATION LINEAIRE

Rappelons que sur un intervalle $[a, b]$ la fonction $f(x)$ supposée définie et contenue sur a, b peut être approchée par

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

ou sous une autre forme équivalente

$$f(x) \approx f(a) \frac{b-x}{b-a} + f(b) \frac{a-x}{a-b}$$

Donc sur l'intervalle $[x_{j+1}, x_j]$

$$f_n(r) \operatorname{ch} \sqrt{r^2 - x_i^2} \approx f(x_{j+1}) \operatorname{ch} \sqrt{x_{j+1}^2 - x_i^2} \cdot \frac{x_j - r}{x_j - x_{j+1}} + f(x_j) \operatorname{ch} \sqrt{x_j^2 - x_i^2} \cdot \frac{x_{j+1} - r}{x_{j+1} - x_j}$$

Posons pour simplifier l'écriture

$$f_n(x_j) = f_j^n$$

$$\operatorname{ch} \sqrt{x_j^2 - x_i^2} = \operatorname{ch}_j^i$$

$x_j - x_{j+1} = h$ indépendant de j puisque les x_j sont régulièrement répartis

La formule d'interpellation devient sur x_{j+1}, x_j

$$f_n(r) \operatorname{ch} \sqrt{r^2 - x_i^2} \approx f_{j+1}^n \operatorname{ch}_{j+1}^i \frac{x_j - r}{h} - f_j^n \operatorname{ch}_j^i \frac{x_{j+1} - r}{h}$$

CALCUL DE L'INTEGRALE $\int_1^n$

Lorsque $i = 1$; l'intégrale $\int_1^n$ devient :

$$\int_1^n = \int_{x_1}^R f_n(r) \operatorname{ch}_1^1 \sqrt{r^2 - x_1^2} K_n(x_1, r) dr$$

Par hypothèse, $f_n(r)$ est nul pour $r = R$, c'est à dire que

$$f_0^n = 0.$$

La formule d'interpellation se simplifie en :

$$f_n(r) \operatorname{ch} \sqrt{r^2 - x_1^2} \approx f_1^n \operatorname{ch}_1^1 \frac{R-r}{h}$$

L'intégrale sera donc approchée par :

$$I_1^n \approx \int_{x_1}^R f_1^n \operatorname{ch}_1^1 \frac{R-r}{h} K_n(x_1, r) dr$$

Soit, en développant et en sortant du signe $\int$ la quantité $f_1^n \operatorname{ch}_1^1$ indépendante de r

$$I_1^n \approx f_1^n \operatorname{ch}_1^1 \left[\frac{R}{h} \int_{x_1}^R K_n(x_1, r) dr - \frac{1}{h} \int_{x_1}^R r K_n(x_1, r) dr \right]$$

d'où

$$I_1^n = k_{11}^n f_1^n$$

avec

$$k_{11}^n = \frac{\operatorname{ch}_1^1}{h} \left[R \int_{x_1}^R K_n(x_1, r) dr - \int_{x_1}^R r K_n(x_1, r) dr \right]$$

Le calcul des intégrales $\int_{x_1}^R K_n(x_1, r) dr$ et $\int_{x_1}^R r K_n(x_1, r) dr$ sera explicité ultérieurement.

CALCUL DE L'INTEGRALE $\int_i^n$ AVEC $i \neq 1$

INTERPOLATION

Si i est différent de 1, l'intégrale à approcher est :

$$\int_i^n = \int_{x_i}^R f_n(r) \operatorname{ch} \mu \sqrt{r^2 - x_i^2} \cdot K_n(x_i, r) dr$$

soit, en séparant l'intervalle d'intégration en

$$[x_i, x_{i-1}], \dots, [x_1, R]$$

$$\int_i^n = \sum_{j=i}^1 \int_{x_j}^{x_{j-1}} f_n(r) \operatorname{ch} \mu \sqrt{r^2 - x_i^2} K_n(x_i, r) dr$$

Posons :

$$J_{j,i}^{n,i} = \int_{x_j}^{x_{j-1}} f_n(r) \operatorname{ch} \mu \sqrt{r^2 - x_i^2} K_n(x_i, r) dr$$

Alors,

$$\int_i^n = \sum_{j=i}^1 J_j^{ni}$$

Sur l'intervalle $[x_{j+1}, x_j]$ la formule d'extrapolation

donne :

$$f_n(r) \operatorname{ch} \mu \sqrt{r^2 - x_i^2} \approx f_{j+1}^n \operatorname{ch}_{j+1}^i \frac{x_j - r}{h} - f_j^n \operatorname{ch}_j^i \frac{x_{j+1} - r}{h}$$

D'où :

$$J_{j+1,i}^{n,i} \approx \int_{x_{j+1}}^{x_j} \left[f_{j+1}^n \operatorname{ch}_{j+1}^i \frac{x_j - r}{h} - f_j^n \operatorname{ch}_j^i \frac{x_{j+1} - r}{h} \right] K_n(x_i, r) dr$$

Soit, en développant et en sortant du signe } les termes
f ch indépendants de r :

$$J_{j+1}^{n,i} = f_{j+1}^n ch_{j+1}^i \left[\frac{x_j}{h} \int_{x_{j+1}}^{x_j} Kn(x_i, r) dr - \frac{1}{h} \int_{x_{j+1}}^{x_j} r Kn(x_i, r) dr \right] \\ - f_j^n ch_j^i \left[\frac{x_{j+1}}{h} \int_{x_{j+1}}^{x_j} Kn(x_i, r) dr - \frac{1}{h} \int_{x_{j+1}}^{x_j} r Kn(x_i, r) dr \right]$$

Posons pour alléger l'écriture :

$$X_{j+1}^{n,i} = \int_{x_{j+1}}^{x_j} Kn(x_i, r) dr \\ Y_{j+1}^{n,i} = \int_{x_{j+1}}^{x_j} r Kn(x_i, r) dr$$

L'expression précédente devient :

$$(3.9) \quad J_{j+1}^{n,i} = f_{j+1}^n ch_{j+1}^i \left[\frac{x_j}{h} X_{j+1}^{n,i} - \frac{1}{h} Y_{j+1}^{n,i} \right] \\ - f_j^n ch_j^i \left[\frac{x_{j+1}}{h} X_{j+1}^{n,i} - \frac{1}{h} Y_{j+1}^{n,i} \right]$$

MISE EN FACTEUR DES TERMES $f_j^n ch_j^i$ si $j < i$

Dans la somme

$$I_i^n = \sum_{j=i}^1 J_j^{n,i}$$

La quantité $f_j^n ch_j^i$ intervient dans $J_{j+1}^{n,i}$ et dans $J_j^{n,i}$

En effet, par analogie à la formule ()

$$J_j^{n,i} = f_j^n \operatorname{ch}_j^i \left[\frac{x_j - 1}{h} X_j^{n,i} - Y_j^{n,i} \right] - f_{j-1}^n \operatorname{ch}_{j-1}^i \left[\frac{x_j}{h} X_j^{n,i} - Y_j^{n,i} \right]$$

Donc, en mettant $f_j^n \operatorname{ch}_j^i$ en facteur dans la somme (), on obtient :

$$f_j^n \operatorname{ch}_j^i \left[-\frac{x_j + 1}{h} X_{j+1}^{n,i} - \frac{1}{h} Y_{j+1}^{n,i} + \frac{x_j - 1}{h} X_j^{n,i} - \frac{1}{h} Y_j^{n,i} \right]$$

Posons :

$$k_{i,j}^n = \frac{\operatorname{ch}_j^i}{h} \left[-x_{j+1} X_{j+1}^{n,i} + Y_{j+1}^{n,i} + x_{j-1} X_j^{n,i} - Y_j^{n,i} \right]$$

MISE EN FACTEUR DU TERME $f_i^n \operatorname{ch}_i^i$ ($j = i$)

Dans la somme :

$$I_i^n = \sum_{j=i}^l J_j^{n,i}$$

la quantité $f_i^n \operatorname{ch}_i^i$ n'intervient que dans $J_i^{n,i}$

d'où

$$k_{ii}^n = \frac{\operatorname{ch}_i^i}{h} \left[x_{j-1} X_i^{n,i} - Y_i^{n,i} \right]$$

L'intégrale $\int_i^n$ peut donc être approchée par :

$$\int_i^n \approx \sum_{j=i}^l k_{ij}^n f_j^n$$

avec :

$$k_{11}^n = \frac{ch_1^i}{h} \left[R \chi_1^{n,i} - Y_1^{n,i} \right]$$

$$(3.10) \quad 1 > 2 \quad k_{ii}^n = \frac{ch_i^i}{h} \left[x_{i-1} \chi_i^{n,i} - Y_i^{n,i} \right]$$

$$j < i \quad k_{i,j}^n = \frac{ch_j^i}{h} \left[-x_{j+1} \chi_{j+1}^{n,i} + Y_{j+1}^{n,i} + x_{j-1} \chi_j^{n,i} - Y_j^{n,i} \right]$$

Pour calculer les k_{ij}^n , il reste à évaluer les intégrales

$$\chi_\ell^{n,i} = \int_{x_\ell}^{x_{\ell-1}} Kn(x_{i,r}) dr \quad \text{et} \quad Y_\ell^{n,i} = \int_{x_\ell}^{x_{\ell-1}} r Kn(x_{i,r}) dr$$

CALCUL DES INTEGRALES $\chi_\ell^{n,i}$ ET $Y_\ell^{n,i}$

Calculs préliminaires

$$\chi_\ell^{n,i} = \int_{x_\ell}^{x_{\ell-1}} Kn(x_{i,r}) dr \quad Y_\ell^{n,i} = \int_{x_\ell}^{x_{\ell-1}} r Kn(x_{i,r}) dr$$

avec :

$$Kn(x_{i,r}) = \frac{2r T_n\left(\frac{x_i}{r}\right)}{\sqrt{r^2 - x_i^2}}$$

$T_n\left(\frac{x_i}{r}\right)$ = Polynôme de Tchebycheff de degrés n

d'où :

$$X_{\ell}^{n,i} = \int_{x_{\ell}}^{x_{\ell-1}} \frac{2r \operatorname{Tn}\left(\frac{x_i}{r}\right)}{r^2 - x_i^2} dr \quad Y_{\ell}^{n,i} = \int_{x_{\ell}}^{x_{\ell-1}} \frac{2r \operatorname{Tn}\left(\frac{x_i}{r}\right)}{r^2 - x_i^2} dr$$

X

Prenons comme variable d'intégration l'angle ϕ défini par :

$$\cos \phi = \frac{x_i}{r} \iff r = \frac{x_i}{\cos \phi}$$

d'où :

$$* \quad r = \frac{x_i}{\cos \phi} \implies dr = \frac{x_i \sin \phi d\phi}{\cos^2 \phi}$$

$$* \quad \sqrt{r^2 - x_i^2} = \sqrt{\frac{x_i^2}{\cos^2 \phi} - x_i^2} = x_i \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi}} = x_i \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$$

$$* \quad \frac{dr}{\sqrt{r^2 - x_i^2}} = \frac{x_i \sin \phi d\phi}{\cos^2 \phi} \therefore \frac{\cos \phi}{x_i \sin \phi} = \frac{d\phi}{\cos \phi}$$

$$* \quad \operatorname{Tn}\left(\frac{x_i}{r}\right) = \operatorname{Tn}(\cos \phi) = \cos n \phi$$

$$* \quad 2r \operatorname{Tn}\left(\frac{x_i}{r}\right) = 2x_i \frac{\cos n \phi}{\cos \phi}$$

$$* \quad \text{Borne inférieure : } x_{\ell} \rightarrow a_i = \arccos \frac{x_i}{x_{\ell}}$$

$$* \quad \text{Borne supérieure : } x_{\ell-1} \rightarrow b_{i\ell} = \arccos \frac{x_i}{x_{\ell-1}}$$

Soit, en remplaçant $X_{\ell}^{n,i}$ et $Y_{\ell}^{n,i}$:

$$X_{l,n,i} = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{2x_i}{\cos \phi} \cos n\phi \frac{d\phi}{\cos \phi} = 2 x_i \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{\cos n\phi}{\cos^2 \phi} d\phi$$

$$Y_{l,n,i} = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{2x_i^2}{\cos^2 \phi} \cos n\phi \frac{d\phi}{\cos \phi} = 2 x_i^2 \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{\cos n\phi}{\cos^3 \phi} d\phi$$

CALCUL DES INTEGRALES $\int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{\cos n\phi}{\cos^2 \phi} d\phi$ et $\int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{\cos n\phi}{\cos^3 \phi} d\phi$

Posons :

$$A_{i,l}^n = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{\cos n\phi}{\cos \phi} d\phi \quad B_{i,l}^n = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{\cos n\phi}{\cos^2 \phi} d\phi \quad C_{i,l}^n = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{\cos n\phi}{\cos^3 \phi} d\phi$$

→ calcul de $A_{i,l}^0$, $B_{i,l}^0$, $C_{i,l}^0$

$$A_{i,l}^0 = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{d\phi}{\cos \phi} = \left[\text{Log} \frac{1 + \text{tg} \frac{\phi}{2}}{1 - \text{tg} \frac{\phi}{2}} \right]_{a_{i,l}}^{b_{i,l}}$$

$$B_{i,l}^0 = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} = \left[\text{tg} \phi \right]_{a_{i,l}}^{b_{i,l}}$$

$$C_{i,l}^0 = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{d\phi}{\cos^3 \phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{tg} \phi}{\cos \phi} + \text{Log} \frac{1 + \text{tg} \frac{\phi}{2}}{1 - \text{tg} \frac{\phi}{2}} \right]_{a_{i,l}}^{b_{i,l}}$$

→ calcul de $A_{i,l}^1$, $B_{i,l}^1$, $C_{i,l}^1$

$$A_{i,l}^1 = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} d\phi = \left[\phi \right]_{a_{i,l}}^{b_{i,l}}$$

$$B_{i,l}^1 = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{d\phi}{\cos \phi} = A_{i,l}^0$$

$$C_{i,l}^1 = \int \frac{b_{i,l}}{a_{i,l}} \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} = B_{i,l}^0$$

→ calcul par récurrence de $A_{i,\ell}^n$, $B_{i,\ell}^n$, $C_{i,\ell}^n$ pour $n > 2$. Pour $n > 2$, nous avons la relation classique :

$$\cos n \phi = 2 \cos \phi \cos(n-1)\phi - \cos(n-2)\phi$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos n \phi}{\cos \phi} d\phi &= 2 \int \cos(n-1)\phi d\phi - \int \frac{\cos(n-2)\phi}{\cos \phi} d\phi \\ \int \frac{\cos n \phi}{\cos^2 \phi} d\phi &= 2 \int \frac{\cos(n-1)\phi d\phi}{\cos \phi} - \int \frac{\cos(n-2)\phi}{\cos^2 \phi} d\phi \\ \int \frac{\cos n \phi}{\cos^3 \phi} d\phi &= 2 \int \frac{\cos(n-1)\phi d\phi}{\cos^2 \phi} - \int \frac{\cos(n-2)\phi d\phi}{\cos^3 \phi} d\phi \end{aligned}$$

D'où :

$$A_{i,\ell}^n = \frac{2}{n-1} \left[\sin(n-1)\phi \right]_{a_{i,\ell}}^{b_{i,\ell}} - A_{i,\ell}^{n-2}$$

$$(3.11) \quad B_{i,\ell}^n = 2 A_{i,\ell}^{n-1} - B_{i,\ell}^{n-2}$$

$$C_{i,\ell}^n = 2 B_{i,\ell}^{n-1} - C_{i,\ell}^{n-2}$$

Ces relations permettent donc de calculer numériquement tous les $A_{i,\ell}^n$, $B_{i,\ell}^n$, $C_{i,\ell}^n$ pour n de 1 à NHM , i de 1 à s et ℓ de 1 à i .

CONCLUSION

$$(3.12) \quad \begin{aligned} X_{\ell}^{n,i} &= \int_{x_{\ell}}^{x_{\ell-1}} K_n(x_{i,r}) dr = 2 x_i^n B_{i,\ell}^n \\ Y_{\ell}^{n,i} &= \int_{x_{\ell}}^{x_{\ell-1}} r K_n(x_{i,r}) dr = 2 x_i^{n+2} C_{i,\ell}^n \end{aligned}$$

où les valeurs $B_{i,\ell}^n$ et $C_{i,\ell}^n$ sont calculables par les formules de récurrence ci-dessus.

EXPRESSION DEFINITIVE DES $k_{i,j}^n$

En remplaçant dans les expressions (3.10) les intégrales du type $X_{\ell}^{n,i}$ et $Y_{\ell}^{n,i}$ par leur valeur (3.12) avec les indices convenables, nous obtenons :

(3.13)

$$\begin{aligned} k_{1,1}^n &= \frac{2 \operatorname{ch}_1^1}{h} \left[R x_1 B_{1,1}^n - x_1^2 C_{1,1}^n \right] \\ i > 2 \quad k_{i,i}^n &= \frac{2 \operatorname{ch}_i^i}{h} \left[x_{i-1} x_1 B_{i,i}^n - x_i^2 C_{i,i}^n \right] \\ j < i \quad k_{i,j}^n &= \frac{2 \operatorname{ch}_j^j}{h} \left[-x_{j+1} x_i B_{i,j+1}^n + x_i^2 C_{i,j+1}^n + x_{j+1} x_i B_{i,j}^n - x_i^2 C_{i,j}^n \right] \end{aligned}$$

avec :

n de 0 à NHM

i de 1 à s

j de 1 à i

$$\operatorname{ch}_j^j = \operatorname{ch} \mu \sqrt{x_j^2 - x_i^2}$$

$B_{i,j}^n, C_{i,j}^n$ calculables par récurrence selon n

et

$$I_i^n = \int_{x_i}^R f_n(r) \operatorname{ch} \sqrt{r^2 - x_i^2} K_n(x_{i,r}) dr \approx \sum_{j=i}^r k_{i,j}^n f_n(x_j)$$

CHAPITRE 4

REDUCTION DES INSTABILITES

INTRODUCTION

RAPPEL SUR LES PROPRIETES DES DONNEES TOMOGRAPHIQUES

DEVELOPPEMENTS THEORIQUES

APPLICATIONS NUMERIQUES

SCHEMA DE LA PROGRAMMATION

ANNEXES

I - INTRODUCTION

La réduction des instabilités est un problème très important dans les techniques de reconstruction d'images numériques particulièrement en Médecine Nucléaire à cause de la médiocre qualité des données expérimentales.

Dans le chapitre précédent nous avons présenté une technique de réduction des instabilités qui consiste à compléter le système linéaire à résoudre par des équations dites "conditions de régularisation". C'est une méthode qui à priori est "aveugle" puisqu'elle ne tient pas compte des propriétés des données à traiter.

Or nous savons (cf chapitre 2) que les données tomographiques doivent vérifier un certain nombre de conditions dites "conditions de compatibilité".

Le but de la technique que nous allons développer est d'exploiter les conditions de compatibilité pour réduire les instabilités liées aux erreurs de mesure et de réaliser ainsi un "lissage intelligent", c'est-à-dire qui tienne compte de la nature même du système à résoudre.

Nous allons d'abord démontrer que, si une fonction $\bar{g}_n(x)$ vérifie les conditions de compatibilité, les P ($P = E(n/r)$) premiers termes de son développement en série de polynômes de Legendre de même parité que n sont nuls. $\frac{n}{2}$

Schématiquement, la méthode consiste à approcher les données expérimentales $g_n(x)$ par $g_n^*(x)$ obtenues en supprimant les p premiers termes du développement de $g_n(x)$ en série de polynômes de Legendre. $g_n^*(x)$ qui vérifie, par construction, les conditions de compatibilité est alors considérée comme une approximation de $g_n(x)$ réduisant l'effet des erreurs de mesure.

II - RAPPEL SUR LES PROPRIETES DES DONNEES TOMOGRAPHIQUES

1) NOTATIONS

Nous utiliserons les mêmes notations qu'au chapitre
c'est-à-dire :

w	=	l'angle d'incidence
x	=	la distance à l'axe de projection
$g(x, w)$		les mesures physiques
$g_n(x)$		les coefficients de la décomposition en série de Fourier
$u = \frac{x}{R}$		où R est le rayon du domaine d'étude

2) PROPRIETES DES $g_n(x)$

Il a été démontré au chapitre que les données $g_n(x)$
devaient vérifier les conditions suivantes :

$$\int_0^R x^k g_n(x) dx = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} k \text{ entier} < n \\ k \text{ et } n \text{ de même parité} \end{cases}$$

soit P conditions $P = E(n/r) = \text{partie entière de } n/r$

Si l'on fait le changement de variable $u \rightarrow \frac{x}{R}$, nous obtenons
les p conditions suivantes :

$$\int_0^1 u^k g_n(Ru) du = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} k \text{ entier} < n \\ k \text{ et } n \text{ de même parité} \end{cases}$$

Notons : $\tilde{g}_n(u) = g_n(Ru)$

Les p conditions deviennent :

$$\int_0^1 u^k \tilde{g}_n(u) du = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} k \text{ entier} < n \\ k \text{ et } n \text{ de même parité} \end{cases}$$

3) EXEMPLE

$n = 0$ ou 1 : pas de condition

$n = 7 \quad P = E \quad \frac{(n)}{r} = 3 \quad \tilde{g}_7(u) \text{ doit vérifier}$
 3 conditions

$$\int_0^1 u \tilde{g}_7(u) du = 0 \quad \int_0^1 u^3 \tilde{g}_7(u) du = 0 \quad \int_0^1 u^5 \tilde{g}_7(u) du = 0$$

III - DEVELOPPEMENTS THEORIQUES

1) NOTATIONS

Soit $\bar{g}_n(u)$ une fonction vérifiant les conditions de compatibilité (1)

$X_0(u), X_1(u), X_2(u), \dots, X_n(u), \dots$ la suite des polynômes de Legendre

$L_p : X_0(u), X_2(u), X_4(u), \dots, X_{rn}(u), \dots$ la suite des polynômes de Legendre de degré pair

$L_i : X_1(u), X_3(u), X_5(u), \dots, X_{rn+1}(u), \dots$ la suite des polynômes de Legendre de degré impair

En annexe 1 on trouvera un rappel de la définition et des propriétés principales des polynômes de Legendre.

2) CAS où n EST PAIR ≥ 2

La suite L_p des polynômes de Legendre de degré pair est une suite orthogonale sur $[0, 1]$ (cf démonstration en annexe i).

Il est donc possible de décomposer $\bar{g}_n(u)$ en série de L_p

$$\bar{g}_n(u) = C_0 X_0(u) + C_2 X_2(u) + \dots + C_{2k} X_{2k}(u) + \dots$$

$$(4.1) \quad C_{2k} = \frac{\int_0^1 X_{2k}(u) \bar{g}_n(u) du}{\int_0^1 X_{2k}(u) \cdot X_{2k}(u) du} \quad (\text{cf démonstration en annexe 2})$$

Les polynômes de Legendre de degré pair $X_{2k}(u)$ sont des polynômes qui ne contiennent que des termes de degrés pair, ils sont donc de la forme :

$$X_{2k}(u) = a_0 + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \dots + a_{2k} u^{2k}$$

soit A le numérateur de C_{2k} dans l'expression

$$A = \int_0^1 (a_0 + a_2 u^2 + \dots + a_{2k} u^{2k}) \bar{g}_n(u) du$$

$$A = a_0 \int_0^1 \bar{g}_n(u) du + a_2 \int_0^1 u^2 \bar{g}_n(u) du + \dots + a_{2k} \int_0^1 u^{2k} \bar{g}_n(u) du$$

Les propriétés de $\bar{g}_n(u)$ imposent que toutes les intégrales $\int_0^1 u^{2k} \bar{g}_n(u) du$ soient nulles pour $2k < n$ ce qui entraîne que tous les coefficients C_{2k} soient nuls si $2k < n$ c'est-à-dire que

$n/2$

si n est pair, les P ($P = E(n/r)$) premiers termes du développement de $\bar{g}_n(u)$ en série des polynômes de Legendre de degré pair sont tous nuls

Soit $\bar{g}_n(u)$ les données résultant des mesures expérimentales. Si les mesures étaient parfaites, $\bar{g}_n(u)$ vérifieraient les propriétés démontrées ci-dessus. Or les données réelles sont entachées d'un certain nombre d'erreurs (fluctuations statistiques de la radio-activité, imprécision du positionnement du détecteur, digitalisation...) ce qui fait qu'elles ne vérifient pas les conditions de compatibilité.

Nous aurons

$$\tilde{g}_n(u) = C_0 + C_2 X_2(u) + \dots + C_{n-2} X_{n-2}(u) + C_n X_n(u) + \dots$$

P termes

Posons

$$g_n^*(u) = \tilde{g}_n(u) - C_0 - C_2 X_2(u) - \dots - C_{n-2} X_{n-2}(u)$$

$$g_n^*(u) = C_n X_n(u) + C_{n+2} X_{n+2}(u) + \dots$$

Par construction $g_n^*(u)$ vérifie les conditions de compatibilité et peut donc être considéré comme une approximation de $\tilde{g}_n(u)$ qui réduira l'effet des erreurs de mesure. La méthode de réduction des erreurs consistera donc à calculer $g_n^*(u)$ à partir de $\tilde{g}_n(u)$ et à appliquer le processus de reconstruction sur $g_n^*(u)$

3) CAS où n EST IMPAIR ≥ 3

Le raisonnement est identique à celui dans le cas où n est pair à ceci près que $\tilde{g}_n(u)$ est développé en série des polynômes de Legendre de degrés impairs, la suite L_1 étant aussi orthogonale sur (0, 1)

$$\tilde{g}_n(u) = C_1 X_1(u) + C_3 X_3(u) + \dots + C_{2k+1} X_{2k+1}(u) + \dots$$

avec

$$(4.2) \quad C_{2k+1} = \frac{\int_0^1 X_{2k+1}(u) \tilde{g}_n(u) du}{\int_0^1 X_{2k+1}(u) \cdot X_{2k+1}(u) du}$$

Or X_{2k+1} peut s'écrire sous la forme :

$$X_{2k+1}(u) = a_1 u + a_3 u^3 + \dots + a_{2k+1} u^{2k+1}$$

donc A le numérateur de C_{2k+1} se développe en :

$$A = a_1 \int_0^1 u \bar{g}_n(u) du + a_3 \int_0^1 u^3 \bar{g}_n(u) du + \dots + a_{2k+1} \int_0^1 u^{2k+1} \bar{g}_n(u) du$$

Les conditions de compatibilité imposent que

$$\int_0^1 u^{2k+1} \bar{g}_n(u) du = 0 \quad \text{si } 2k+1 < n$$

donc que :

$$C_{2k+1} = 0 \quad \text{si } 2k+1 < m$$

ce qui peut s'énoncer :

$n/2$

si n est impair, les P ($P = E(n/r)$) premiers termes du développement de $\bar{g}_n(u)$ en série des polynômes de Legendre de degrés impairs sont tous nuls.

En réalité les $\bar{g}_n(u)$ résultant des mesures expérimentales ne vérifient pas ces propriétés à cause des erreurs de mesure et :

$$\bar{g}_n(u) = C_1 X_1(u) + C_3 X_3(u) + \dots + C_{n-2} X_{n-2}(u) + C_n X_n(u) + \dots$$

Posons :

$$g_n^*(u) = \bar{g}_n(u) - C_1 X_1(u) - C_3 X_3(u) - \dots - C_{n-2} X_{n-2}(u)$$

Par construction g_n^* vérifie les propriétés théoriques et peut donc être considéré comme une "bonne" approximation de $\bar{g}_n(u)$.

4) CONCLUSION

La méthode de réduction de l'effet des erreurs de mesure consistera donc à approcher $\bar{g}_n(u)$ par $g_n^*(u)$ et à appliquer à $g_n^*(u)$ le processus de reconstruction tomographique en considérant que $g_n^*(u)$ est une "bonne" approximation de $\bar{g}_n(u)$ puisqu'elle satisfait aux conditions théoriques.

Le calcul de $g_n^*(u)$ se fera de deux manières différentes selon la parité de n .

Pour $n = 0$ ou 1 $g_n(u)$ n'a pas de condition à remplir donc on prendra $g_n^*(u) = g_n(u)$

IV - APPLICATIONS NUMERIQUES

1) NOTATIONS, APPROXIMATIONS

$g_n(x)$ n'est connu que pour les 32 valeurs de x suivantes :

$$x_i = R - i h \quad \text{avec } i = 1, 32$$

donc $\tilde{g}_n(u)$ n'est connu que pour les 32 valeurs de u suivantes :

$$u_i = \frac{x_i}{R}$$

Les intégrales seront approchées de la manière suivante :

$$\int_0^1 \tilde{g}_n(u) X_k(u) du \approx \frac{1}{32} \sum_{i=1}^{32} \tilde{g}_n(u_i) X_k(u_i)$$

$$\int_0^1 X_k(u) \cdot X_k(u) du \approx \frac{1}{32} \sum_{i=1}^{32} X_k^2(u_i) \frac{1}{2k+1}$$

d'où la valeur approchée des coefficients C_k d'après les relations (4.1) et (4.2)

$$(4.3) \quad C_k = \frac{\sum_{i=1}^{32} \tilde{g}_n(u_i) X_k(u_i)}{\sum_{i=1}^{32} X_k^2(u_i) \frac{1}{2k+1}}$$

Posons pour alléger l'écriture

$$d_k = \sum_{i=1}^{32} X_k^2(u_i) \frac{1}{2k+1}$$

et

$$\bar{X}_k(u) = \frac{X_k(u)}{dk}$$

Avec ces nouvelles notations la relation () devient :

$$(4.4) \quad C_k = \sum_{i=1}^{32} \tilde{g}_n(u_i) \frac{\bar{X}_k(u_i)}{dk}$$

2) CALCUL DE $g_n^*(u)$ POUR n PAIR 2

Par définition de $g_n^*(u)$ nous avons

$$g_n^*(u) = \tilde{g}_n(u) - C_0 X_0(u) + C_2 X_2(u) + \dots + C_{n-2} X_{n-2}(u)$$

Or $\tilde{g}_n(u)$ et donc $g_n^*(u)$ ne sont connus que pour 32 valeurs discrètes de u : $u_j = \frac{65 - 2j}{63} \quad j = 1, 32$

$$g_n^*(u_j) = \tilde{g}_n(u_j) - \left[C_0 X_0(u_j) + C_2 X_2(u_j) + \dots + C_{n-2} X_{n-2}(u_j) \right]$$

pour $j = 1, 32$

Remplaçons dans l'expression précédente les C_k par leur valeur donnée par la formule (4.4)

$$\begin{aligned} g_n^*(u_j) &= \tilde{g}_n(u_j) \\ &- X_0(u_j) \cdot \sum_{i=1}^{32} \tilde{g}_n(u_i) \frac{\bar{X}_0(u_i)}{d_0} \\ &- X_2(u_j) \cdot \sum_{i=1}^{32} \tilde{g}_n(u_i) \frac{\bar{X}_2(u_i)}{d_2} \\ &\vdots \\ &- X_{n-2}(u_j) \cdot \sum_{i=1}^{32} \tilde{g}_n(u_i) \frac{\bar{X}_{n-2}(u_i)}{d_{n-2}} \end{aligned}$$

Les termes X_k étant indépendants de i , il est possible de les faire passer sous le signe $\sum_{i=1}^{32}$ d'où :

$$\begin{aligned} g_n^* (u_j) &= g_n (u) \\ &- \sum_{i=1}^{32} \bar{X}_0 (u_j) \bar{X}_0 (u_i) \tilde{g}_n (u_i) \\ &- \sum_{i=1}^{32} \bar{X}_2 (u_j) \bar{X}_2 (u_i) \tilde{g}_n (u_i) \\ &- \sum_{i=1}^{32} \bar{X}_{n-2} (u_j) \bar{X}_{n-2} (u_i) \tilde{g}_n (u_i) \end{aligned}$$

Soit en regroupant les signes :

$$\begin{aligned} (4.5) \quad g_n^* (u_j) &= \tilde{g}_n (u_j) - \sum_{i=1}^{32} \tilde{g}_n (u_i) \bar{X}_0 (u_i) \bar{X}_0 (u_j) + \\ &\bar{X}_2 (u_i) \bar{X}_2 (u_j) + \dots \bar{X}_{n-2} (u_i) \bar{X}_{n-2} (u_j) \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} (4.6) \quad U_n (i, j) &= \bar{X}_0 (u_i) \bar{X}_0 (u_j) + \bar{X}_2 (u_i) \bar{X}_2 (u_j) + \dots \\ &\bar{X}_{n-2} (u_i) \bar{X}_{n-2} (u_j) \end{aligned}$$

La relation (4.5) devient :

$$(4.7) \quad g_n^* (u_j) = \tilde{g}_n (u_j) - \sum_{i=1}^{32} U_n (i, j) \tilde{g}_n (u_i)$$

Ecrivons la relation (4.7) sous forme matricielle, pour cela posons :

$$G_n^* = \begin{bmatrix} g_n^* (u_1) \\ \\ g_n^* (u_{32}) \end{bmatrix} \quad \tilde{G}_n = \begin{bmatrix} \tilde{g}_n (u_i) \\ \\ \tilde{g}_n (u_{32}) \end{bmatrix}$$

$$U_n = \begin{bmatrix} U_n (1,1) & U_n (1,2) & \dots & U_n (1,32) \\ U_n (2,1) & \dots & & \\ \\ U_n (32, 1) & & & U_n (32, 32) \end{bmatrix}$$

La relation (4.7) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} [G_n^*] &= [\tilde{G}_n] - [U_n][\tilde{G}_n] \\ (4.8) \quad [G_n^*] &= [I - U_n] \times [\tilde{G}_n] \end{aligned}$$

3) CALCUL DE $g_n^* (u)$ POUR n IMPAIR > 3

Les calculs sont les mêmes que pour n pair à ceci près que tous les polynômes de Legendre utilisés seront impairs.

En particulier la relation (4.6) devient

$$U_n (i, j) = \bar{X}_1 (u_i) \bar{X}_1 (u_j) + \bar{X}_1 (u_i) \bar{X}_3 (u_j) + \dots + \bar{X}_{n-2} (u_i) \bar{X}_{n-2} (u_j)$$

La relation matricielle (4.8) reste :

$$\begin{bmatrix} G_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & - & U_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \tilde{G}_n \end{bmatrix}$$

4) CONCLUSION

Pour toutes les harmoniques de 0 à l'infini du développement en série de Fourier de données tomographiques $g_n(x, w)$, la relation matricielle suivante permet de calculer l'approximation des $\tilde{g}_n(u)$ qui vérifie les propriétés théoriques.

$$\begin{bmatrix} G_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & - & U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{G}_n \end{bmatrix}$$

avec

$$\text{si } n = 0 \text{ ou } 1 \quad \begin{bmatrix} U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} G_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{si } n \text{ pair } > 2 \quad U_n(i, j) = \bar{X}_0(u_i) \bar{X}_0(u_j) + \dots + \bar{X}_{n-2}(u_i) \bar{X}_{n-2}(u_j)$$

$$\text{si } n \text{ impair } > 3 \quad U_n(i, j) = \bar{X}_1(u_i) \bar{X}_1(u_j) + \dots + \bar{X}_{n-2}(u_i) \bar{X}_{n-2}(u_j)$$

Le processus de reconstruction tomographique sera appliqué à $\begin{bmatrix} G_n^* \end{bmatrix}$ et dans le cas du processus décrit au chapitre (3), nous avons :

$$\begin{bmatrix} F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_n^* \end{bmatrix}$$

soit en remplaçant $\begin{bmatrix} G_n^* \end{bmatrix}$ par sa valeur

$$\begin{bmatrix} F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & - U_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{G}_n \end{bmatrix}$$

Si on pose

$$\begin{bmatrix} R_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & - U_p \end{bmatrix}$$

On obtient

$$\begin{bmatrix} F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{G}_n \end{bmatrix}$$

Cette expression est très intéressante en pratique car comme les R_n , les R_n^* sont indépendantes des données et peuvent donc être calculées une fois pour toutes et stockées sur disque.

Cette méthode de régularisation ne consommera donc aucun temps de calcul supplémentaire.

V - SCHEMA DE LA PROGRAMMATION

1) CALCUL DU TABLEAU DES $X_n(u_i)$

Il se fera en utilisant la formule de récurrence

$$X_0(u_i) = 1$$

$$X_1(u_i) = u_i$$

$$X_n(u_i) = \frac{2n-1}{n} u_i \cdot X_{n-1}(u_i) - \frac{n-1}{n} X_{n-2}(u_i)$$

pour n de 0 à 13

$$u_i = \frac{R - i h}{R} \quad i \text{ de } 1 \text{ à } 32$$

2) CALCUL DU TABLEAU DES $\bar{X}_n(u_i)$

Les $\bar{X}_n(u_i)$ sont calculés à partir des $X_n(u_i)$ en utilisant la formule de définition des $\bar{X}_n$

$$\bar{X}_n(u_i) = \frac{X_n(u_i)}{\sum_{j=1}^{32} \frac{X_n^2(u_j)}{2n+1}} \quad \begin{array}{l} n \text{ de } 0 \text{ à } 13 \\ u_i = \frac{65 - r_i}{63} \\ i \text{ de } 1 \text{ à } 32 \end{array}$$

3) CALCUL DES 16 MATRICES U_n POUR n de 0 à 15

Si $n = 0$ ou 1

$$[U_n] = 0$$

Si n pair > 2

$$U_n(i, j) = \bar{X}_0(u_i) \bar{X}_0(u_j) + \bar{X}_2(u_i) \bar{X}_2(u_j) + \dots + \bar{X}_{n-2}(u_i) \bar{X}_{n-2}(u_j)$$

Soit en utilisant la formule de récurrence évidente :

$$U_n(i, j) = U_{n-2}(i, j) + \bar{X}_{n-2}(u_i) \bar{X}_{n-2}(u_j)$$

Si n impair > 3

$$U_n(i, j) = \bar{X}_1(u_i) \bar{X}_1(u_j) + \bar{X}_3(u_i) \bar{X}_3(u_j) + \dots + \bar{X}_{n-2}(u_i) \bar{X}_{n-2}(u_j)$$

Soit par récurrence :

$$U_n(i, j) = U_{n-2}(i, j) + \bar{X}_{n-2}(u_i) \bar{X}_{n-2}(u_j)$$

4) CALCUL DES 16 MATRICES $[I - U_n]$ POUR $n = 0$ à 15

$$\rightarrow \text{si } i = j \quad U(i, j) \rightarrow 1 - U(i, j)$$

$$\rightarrow \text{si } i \neq j \quad U(i, j) \rightarrow -U(i, j)$$

Ces 16 matrices $\begin{bmatrix} I & - & U_n \end{bmatrix}$ seront stockées sur disque

5) CALCUL DES 16 MATRICES $\begin{bmatrix} R_n^* \end{bmatrix}$ POUR $n = 0$ à 15

Si $n = 0$ ou 1:

$$\begin{bmatrix} R_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix}$$

Pour n de 2 à 15 :

- lecture sur disque de $\begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix}$
- lecture sur disque de $\begin{bmatrix} I & - & U_n \end{bmatrix}$
- multiplication de matrices $\begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & - & U_n \end{bmatrix}$
- écriture de $\begin{bmatrix} R_n^* \end{bmatrix}$ sur disque

ANNEXE 1 : RAPPEL SUR LES POLYNÔMES DE LEGENDRE

DEFINITION

Les polynômes de Legendre sont définis par

$$X_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Les premiers polynômes de Legendre sont

$$X_0(x) = 1$$

$$X_1(x) = x$$

$$X_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$X_3(x) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

PRINCIPALES PROPRIETES

1) Les polynômes de Legendre forment une suite de polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{+1} X_n(x) X_p(x) dx = 0 \quad \text{si } n \neq p$$

2) Les polynômes de Legendre vérifient la relation de récurrence suivante :

$$X_n(x) = \frac{2n-1}{n} x X_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} X_{n-2}(x)$$

3) Cette relation de récurrence et le fait que $X_0 = 1$ et $X_1(x) = x$ imposent que

- tous les polynômes de Legendre de degré pair sont pairs
- tous les polynômes de Legendre de degré impair sont impairs

⊗ ajouter $\int_{-1}^{+1} X_n(x) X_n(x) dx = \frac{1}{2n+1}$

4) Si $n \neq p$ et si n et p sont de même parité, alors $X_n(u)$ et $X_p(u)$ sont de même parité donc $X_n(u) X_p(u)$ est une fonction paire de u d'où :

$$\int_{-1}^1 X_n(u) X_p(u) du = 2 \int_0^1 X_n(u) X_p(u) du$$

Les polynômes de Legendre formant une suite orthogonale :

$$\int_{-1}^1 X_n(u) X_p(u) du = 0 \quad \text{si } n \neq p$$

donc;

$$\int_{-1}^1 X_n(u) X_p(u) du = 0 \quad \text{si } \begin{array}{l} n \neq p \\ n \text{ et } p \text{ de même parité} \end{array}$$

c'est-à-dire que:

$$L_p : X_0, X_2, \dots, X_{2k}, \dots$$

$$L_i : X_1, X_3, \dots, X_{2k+1}, \dots$$

sont deux suites orthogonales sur $0, 1$

ANNEXE 2 : CALCUL DES COEFFICIENTS DU DEVELOPPEMENT D'UNE FONCTION
EN SERIE L_p OU L_i

DEVELOPPEMENT EN SERIE L_p

Soit une fonction $g(u)$ définie sur $[0,1]$

La suite L_p des polynômes de Legendre de degré pair étant orthogonale sur $0,1$, la fonction $g(u)$ peut se développer en :

$$g(u) = C_0 X_0(u) + C_1 X_2(u) + \dots + C_{2k} X_{2k}(u) + \dots$$

Multiplions les 2 membres de l'égalité précédente par $X_{2k}(u)$

$$g(u) \cdot X_{2k}(u) = C_0 X_0(u) X_{2k}(u) + C_{2k} X_{2k}(u) X_{2k}(u) + \dots$$

d'où en intégrant entre 0 et 1:

$$\int_0^1 g(u) X_{2k}(u) du = \int_0^1 C_0 X_0(u) X_{2k}(u) du + \int_0^1 C_2 X_2(u) X_{2k}(u) du + \dots + \int_0^1 C_{2k} X_{2k}(u) X_{2k}(u) du + \dots$$

Or toutes les intégrales du type

$$\int_0^1 X_p(u) X_q(u) du \quad \text{avec } p \neq q$$

sont nulles car L_p est une suite orthogonale sur $[0, 1]$ donc l'expression s'écrit

$$\int_0^1 g(u) X_{2k}(u) du = C_{2k} \int_0^1 X_{2k}(u) X_{2k}(u) du$$

d'où :

$$C_{2k} = \frac{\int_0^1 X_{2k}(u) g(u) du}{\int_0^1 X_{2k}(u) X_{2k}(u) du}$$

DEVELOPPEMENT EN SERIE L_i

L_i est également orthogonale sur $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

donc :

$$g(u) = C_1 X_1(u) + C_3 X_3(u) + \dots + C_{2k+1} X_{2k+1}(u) + \dots$$

En multipliant par $X_{2k+1}(u)$ et en intégrant entre 0 et 1 on obtient :

$$\int_0^1 g(u) X_{2k+1}(u) du = C_1 \int_0^1 X_1(u) X_{2k+1}(u) du + \dots$$

$$C_{2k+1} \int_0^1 X_{2k+1}(u) X_{2k+1}(u) du$$

d'où:

$$C_{2k+1} = \frac{\int_0^1 X_{2k+1}(u) g(u) du}{\int_0^1 X_{2k+1}(u) X_{2k+1}(u) du}$$

CHAPITRE 5

DESCRIPTION DU SYSTEME TOMOGRAPHIQUE ET ORGANISATION GENERALE DES PROGRAMMES

LA GAMMA CAMERA

LE SYSTEME INFORMATIQUE

LES DONNEES TOMOGRAPHIQUES

CALCULS A PREVOIR POUR LA RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE

GENERALITES SUR LA REALISATION PRATIQUE DES PROGRAMMES

Le matériel disponible au Service de Médecine Nucléaire du CHU de NANCY-BRABOIS pour réaliser des tomographies d'émission se compose d'une gamma-caméra tournante Général-Electric 400T avec sa table d'examen spécialement conçue pour la tomographie, et d'un système INFORMATEK SIMIS IV pour l'acquisition, le traitement et la visualisation des données.

I- DESCRIPTION DE LA GAMMA-CAMERA

1) DESCRIPTION PHYSIQUE (voir figure 5.1)

La gamma-caméra utilisée se compose d'une tête de détection montée sur deux bras mobiles et équilibrée par un contrepoids.

L'ensemble est articulé sur un cercle mobile pouvant tourner à l'intérieur d'un cercle fixe, entraînant ainsi la rotation de la tête de détection autour du patient, le rayon du cercle de rotation étant fixé par l'inclinaison des bras mobiles.

La tête de détection est reliée à la console de commande qui contient toute l'électronique nécessaire à la formation de l'image scintigraphique.

2) PERFORMANCES

Le champ utile de la gamma-caméra est un cercle de 40 cm de diamètre.

Le taux de comptage maximum est de l'ordre de 50 000 coups par seconde.

La résolution est de 6 mm.

La rotation de la tête de détection se fait pas à pas autour du patient en 32,64 ou 128 positions sur 360°.

II - DESCRIPTION DU SYSTEME INFORMATIQUE RELIE A LA GAMMA-CAMERA

Il s'agit d'un système de marque INFORMATEK SIMIS IV dont le rôle est d'acquérir, de traiter et de visualiser les données scintigraphiques fournies par la gamma-caméra. Ce système est organisé autour d'une unité centrale de la classe des "Mini-ordinateurs".

1) LE MATERIEL (voir figure 5.2)

L'unité centrale

Elle comporte une mémoire centrale à semi-conducteurs de 64 K mots de 16 bits.

Le cycle machine est de 960 ns.

Elle dispose d'une virgule flottante câblée.

Les périphériques

L'interface d'acquisition

Elle digitalise les données fournies par la gamma-caméra sur 8 bits, ce qui autorise une définition d'image de 256 x 256 au maximum.

L'unité de disques CMD

D'une capacité de 96 Mega-octets répartis sur 4 plateaux dont une cartouche amovible.

L'unité de bandes magnétiques

Pour les stockages des acquisitions et des résultats.

Deux consoles alphanumériques

Comportant un clavier standard et un écran de visualisation.

L'imprimante DRI

L'unité de visualisation couleurs

Elle dispose d'une "mémoire image" de 256 x 256 octets et

d'une "mémoire couleurs" de 256 mots de 12 bits entièrement programmables : chaque point de la "mémoire image" fait référence à une des 256 couleurs, chaque couleur étant codée sur 12 bits : 4 bits pour chacune des 3 couleurs fondamentales : rouge, vert, bleu.

2) LE LOGICIEL

Avec le système résident, les logiciels fournis par le constructeur comprennent des programmes scintigraphiques standard , des sous-programmes standard , des programmes utilitaires et un système de "macro fonctions".

Les programmes standard

De nombreux programmes sont proposés, chacun réalisant une tâche précise et comportant un dialogue important, citons par exemple :

- les programmes d'acquisition : statiques, dynamiques,...
- les programmes de traitement d'images : lissages, filtrages,...
- les programmes de visualisation : avec choix du format, de la mise à l'échelle, de l'échelle de couleurs...

Les sous-programmes standard

Ils réalisent les tâches fréquemment utilisées par les programmes standard :

- gestion du dialogue
- gestion des entrées-sorties sur disque, bande, unité de visualisation
- calculs courants sur une image.

Les programmes utilitaires

Ils permettent à l'utilisateur de développer et de gérer son propre logiciel.

Citons-en particulier :

- un assembleur

- un compilateur FORTRAN IV
- un éditeur de texte
- un programme bibliothécaire

Les macro-fonctions

Un examen complet fait appel à de nombreux programmes (acquisition, traitement, visualisation, stockage, ...) et chaque programme nécessite un dialogue important, ce qui rend l'utilisation du système très souple mais très lourde.

Pour compenser cela, le constructeur a développé un macro-assembleur qui permet d'écrire des "programmes de programmes" en chainant les programmes selon une séquence établie par l'utilisateur (avec possibilité de boucles de tests, de branchements...) et en gérant le dialogue c'est-à-dire en ne posant à l'utilisateur que les questions indispensables et en répondant de façon automatique chaque fois que cela est possible.

Ceci permet d'écrire pour chaque type d'examen des procédures très faciles à utiliser sans amputer la souplesse du système.

III - LES DONNEES TOMOGRAPHIQUES

1) ACQUISITIONS

Les données de départ fournies par la procédure d'acquisition sont constituées par une série de 32, 64 ou 128 matrices 64 x 64 dites "matrices-acquisition" chacune de ces matrices représentant l'image de la projection du volume radio-actif sur une incidence.

2) DONNEES INTERMEDIAIRES

Chacune des images de la série acquisition comportant 64 lignes, il est possible de reconstruire 64 coupes.

Pour chaque coupe à reconstruire il faut extraire de chaque "matrice-acquisition" la ligne correspondante.

Le regroupement des données correspondant à une coupe constitue le "pré-traitement" qui génère sur disque une matrice dite "matrice donnée" par coupe à reconstruire.

3) RESULTATS

En appliquant le processus de reconstruction à chaque "matrice donnée" on obtient une "matrice-coupe" qui sera stockée sur disque pour être ensuite visualisée.

4) TABLES

Chaque fois que cela est possible, les calculs indépendants des données seront effectués une fois pour toutes et leurs résultats stockés sur disques sous forme de tables ou matrices 64 x 64 au besoin partiellement remplies.

C'est le cas en particulier pour les matrices "pseudo-inverses".

IV - CALCULS A PREVOIR POUR LA RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE (cf. Figure 5.3)

Nous avons montré au chapitre (3) que le processus de reconstruction tomographique revient à calculer :

$$\begin{bmatrix} F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_n \end{bmatrix}$$

où

$\begin{bmatrix} G_n \end{bmatrix}$ est la $n^{\text{ième}}$ harmonique de la transformation de Fourier des données

$\begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix}$ est une matrice pré-calculée

$\begin{bmatrix} F_n \end{bmatrix}$ est la $n^{\text{ième}}$ harmonique de la transformation Fourier des résultats

Les étapes du calcul seront donc :

- Calculs à faire une fois pour toutes

Construction des matrices R_n ou R_n^* pour des valeurs choisies de ϵ et μ et pour n de 0 à N_{HM} , N_{HM} étant le nombre maximum d'harmoniques dont on tiendra compte.

- Pré-traitement pour chaque acquisition

. Visualisation d'une incidence (par exemple la face antérieure) et détermination des coupes à reconstruire.

. Pour chaque coupe, extraction de la ligne correspondante dans chacune des "matrices-acquisition", création et écriture sur disque des "matrices données" avec ou sans correction d'absorption.

- Traitement pour chaque coupe:

. Lecture sur disque de la "matrice-donnée"

. Transformation de Fourier rapide

. Multiplication de chaque harmonique par la matrice $[R_n]$ à chercher sur disque

. Transformation de Fourier inverse

. Transformation des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes

. Ecriture sur disque des résultats

V - GENERALITE SUR LA REALISATION PRATIQUE DES PROGRAMMES

1) PROGRAMMATION

Tous les programmes et sous-programmes ont été écrits en FORTRAN IV.

Les programmes sources sont entrés directement au clavier sous le contrôle d'un éditeur de texte qui permet une mise au point facile grâce à ses fonctions d'insertion, d'effacement, de recherche de chaîne de caractères... Les programmes sources peuvent être sauvegardés sur disque et/ou sur bande magnétique par le programme bibliothécaire.

Les programmes-objets sont générés à partir des programmes sources par le compilateur FORTRAN et peuvent également être sauvegardés sur disque et/ou sur bande.

2) COMPATIBILITE AVEC LE SYSTEME

Pour que les programmes soient compatibles avec l'ensemble des programmes standard, il importe de prendre quelques précautions.

- Le dialogue

Si les programmes sont destinés à être utilisés en routine, il faut qu'ils soient compatibles avec le système des "macro-fonctions".

Pour cela, tout le dialogue doit être géré à l'aide des sous-programmes standard qui réalisent les fonctions suivantes :

- édition du message sur la console appelante
- lecture de la réponse sur le clavier
- test si la réponse est du type attendu : numérique, alpha-numérique

- Structure logique des données sur disques

La zone donnée du disque est divisée fictivement en "fichiers" de 4 216 mots, chaque fichier portant un numéro de 1 à n, n dépendant de la place disponible sur le disque.

Par convention, chaque fichier est structuré de la manière suivante :

- Les mots de 1 à 120 représentent l'identification du fichier qui contient : le type de fichier, la date, le nom du patient,...
- Les mots de 121 à 4 216 représentent les données, soit une matrice 64 x 64 rangée ligne par ligne.

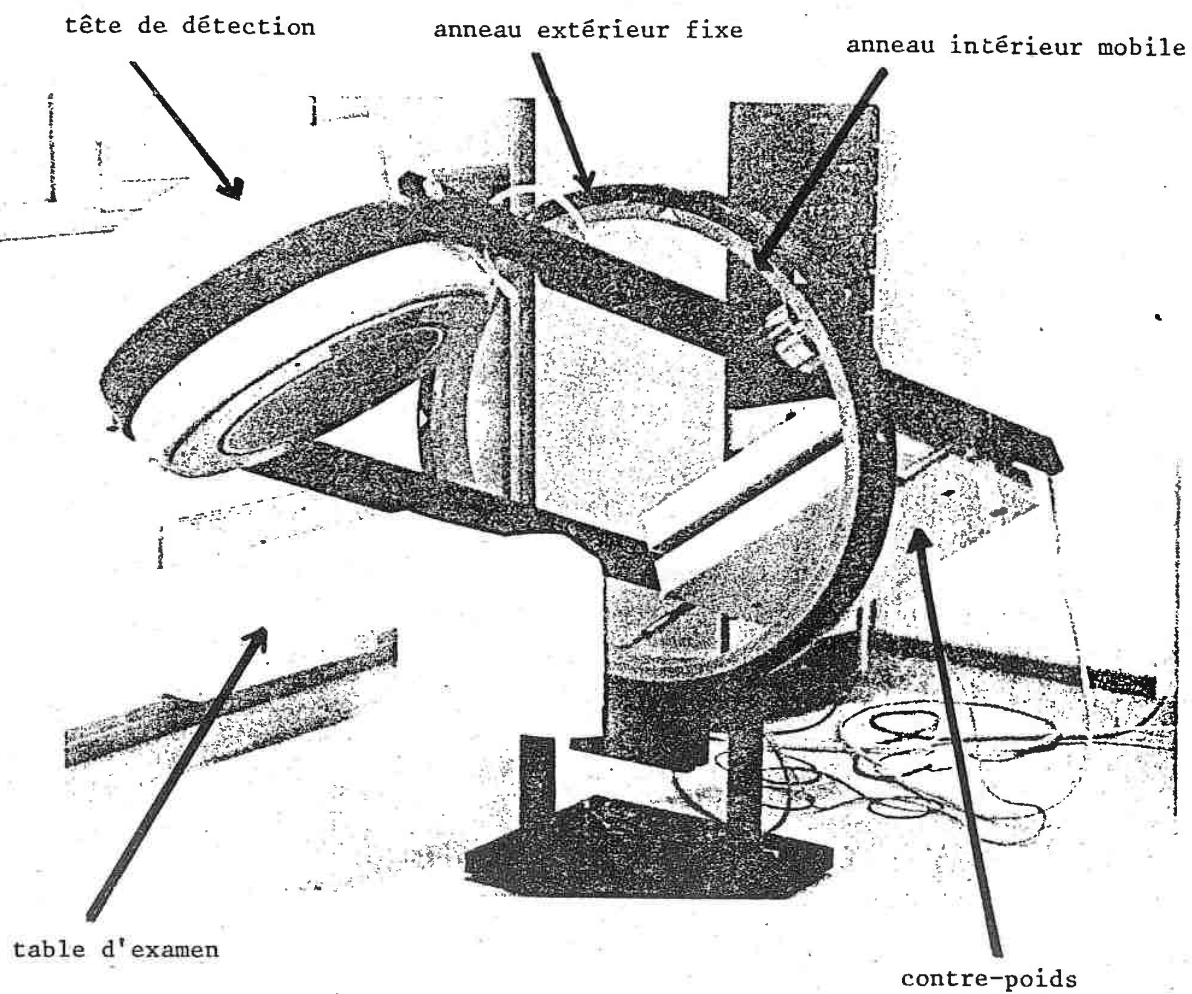
Les matrices de dimensions supérieures à 64 x 64 sont écrites sur plusieurs fichiers consécutifs.

L'accès aux fichiers est réalisé par un sous-programme standard qui permet de lire ou d'écrire sur n'importe quel fichier repéré par son numéro.

Il est bien sûr toujours possible d'écrire ou de lire n'importe où sur le disque par adressage en surface, piste et secteur mais au risque de rentrer en conflit avec le système standard.

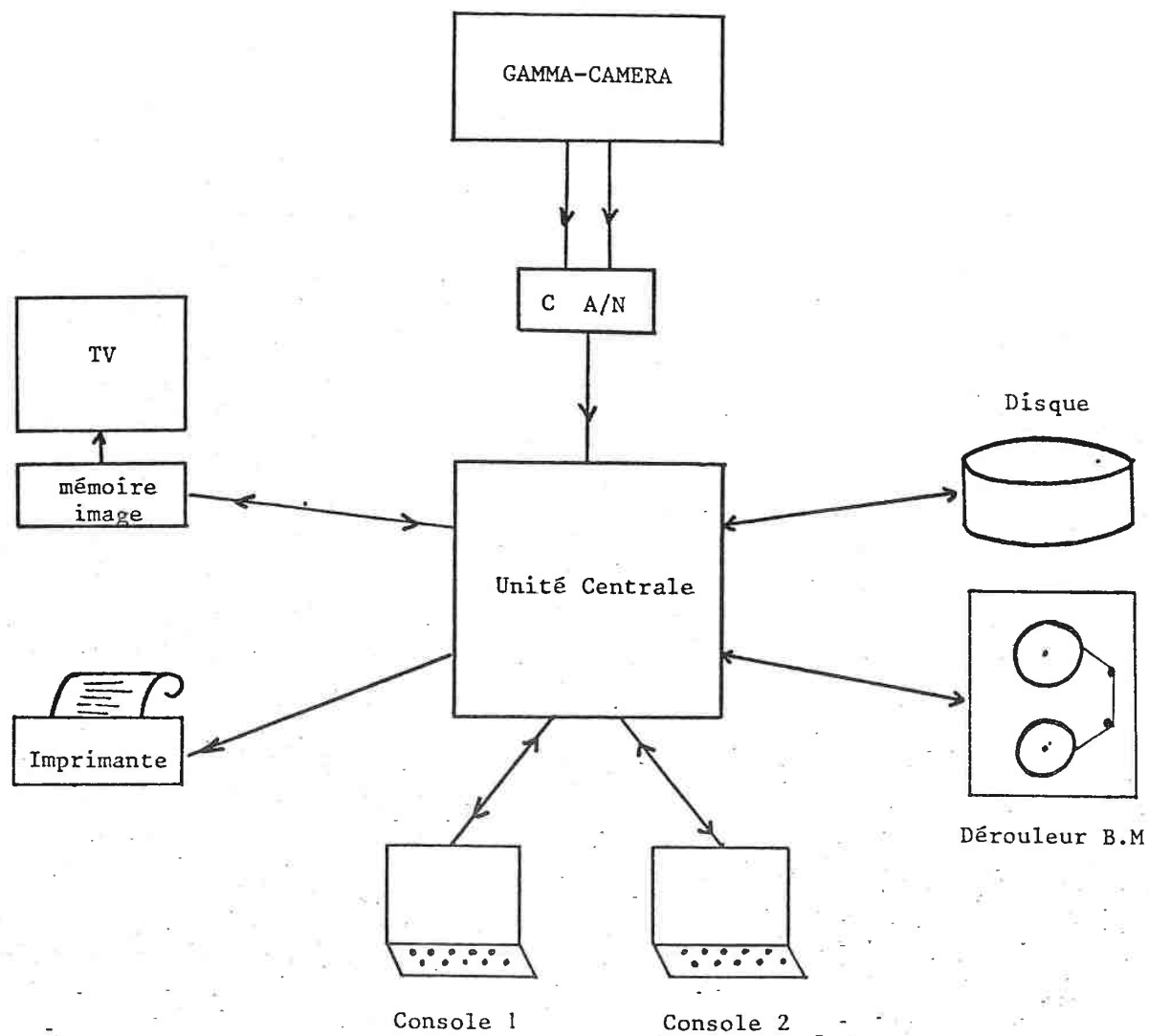
C'est pourquoi nous avons choisi de stocker toutes les matrices et les tables selon le format standard 64 x 64 en veillant à mettre à jour correctement les identificateurs qui sont testés par tous les programmes standard .

Ces quelques précautions permettent de rendre les nouveaux programmes et les données qu'ils génèrent entièrement compatibles avec le reste du système.



GAMMA-CAMERA TOURNANTE POUR LA TOMOGRAPHIE

Figure 5.1



SCHEMA DU MATERIEL DISPONIBLE

Figure 5.2

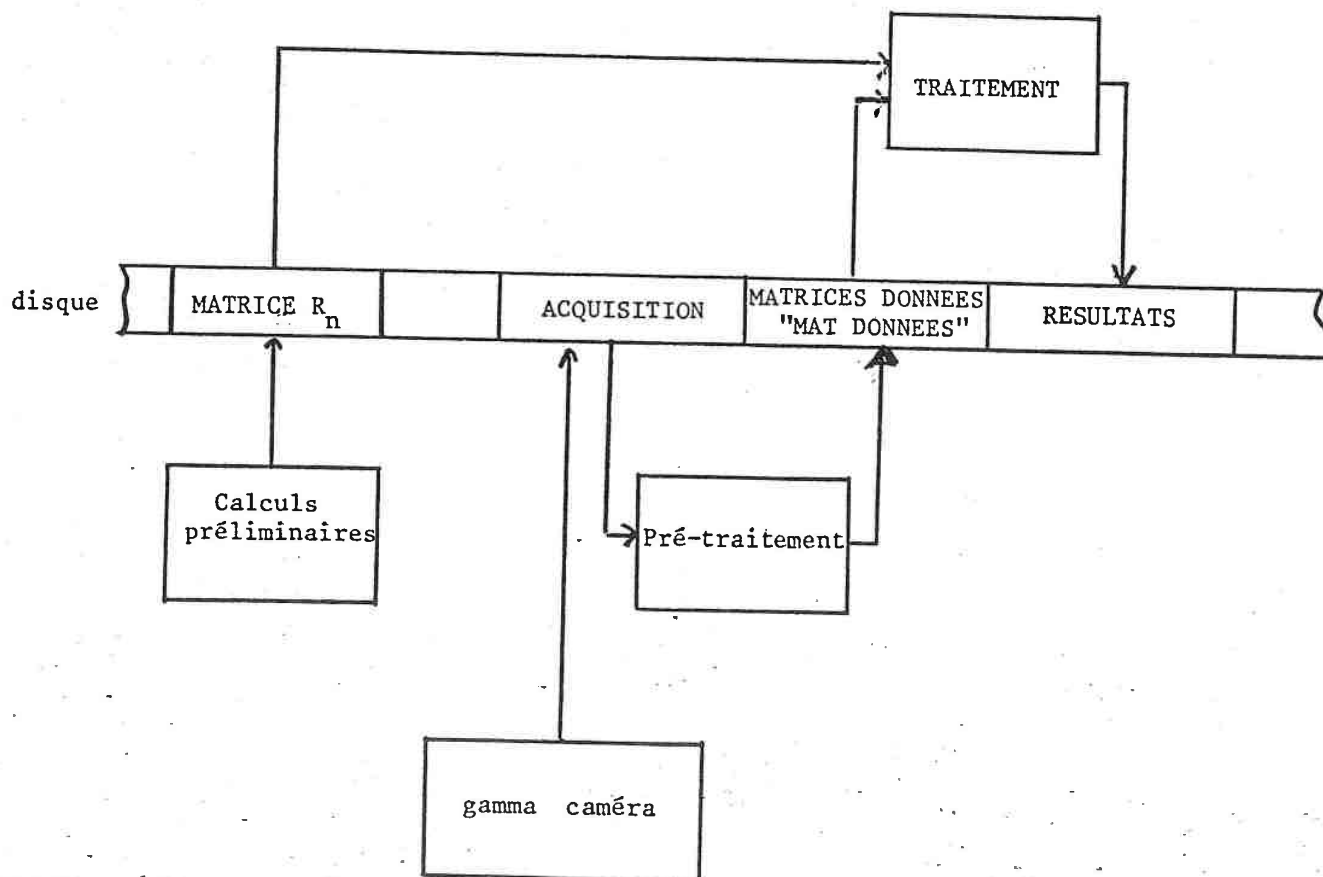


Figure 5.3

CHAPITRE 6

CALCUL DES MATRICES "PSEUDO-INVERSEES" $[R]$ ET $[R_n]$

I - INTRODUCTION

Nous avons montré au chapitre 3 que l'équation fondamentale de la tomographie d'émission peut être approchée par un ensemble de m systèmes linéaires de s équations à s inconnues

$$\begin{bmatrix} K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_n \end{bmatrix} \quad \text{pour } n = 0 \text{ à } m - 1$$

où

s = nombre de points de mesures sur un rayon

n = indice de l'harmonique considéré

m = nombre maximum d'harmoniques dont on tient compte

$\begin{bmatrix} G_n \end{bmatrix}$ = matrice colonne à s éléments représentant le $n^{\text{ième}}$ harmonique du développement en série de Fourier des données $g(x, w)$

$\begin{bmatrix} F_n \end{bmatrix}$ = matrice colonne à s éléments représentant le $n^{\text{ième}}$ harmonique du développement en série de Fourier des inconnues $f(r, \theta)$

$\begin{bmatrix} K_n \end{bmatrix}$ = matrice carrée $s \times s$ triangulaire inférieure

Les propriétés de $g(x, w)$ et $f(r, \theta)$ permettent de tronquer le système :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_n \end{bmatrix}$$

où

$\begin{bmatrix} \bar{F}_n \end{bmatrix}$ = matrice colonne composée des m_p premiers éléments de F_n

$\begin{bmatrix} \bar{K}_n \end{bmatrix}$ = matrice rectangulaire à s ligne et m_p colonne composée des m_p premières colonnes de K_n

$m_p = s - P$ avec P = partie entière de n/r $1/2$

Pour rendre le système plus stable, on y adjoint m_{p-1} équations de régularisations suivantes :

$$\varepsilon f_1^n - \varepsilon f_2^n = 0$$

$$\varepsilon f_2^n - \varepsilon f_2^n = 0$$

$$\varepsilon f_{m_{p-1}}^n - \varepsilon f_{m_p}^n = 0$$

Le système à résoudre devient donc :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_n \end{bmatrix}$$

où :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_n \end{bmatrix} \text{ complétée par les } m_{p-1} \text{ lignes } \begin{bmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

il s'agit donc d'une matrice à $s + m_{p-1}$ ligne et m_p colonnes

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_n \end{bmatrix} \text{ complétée par } m_{p-1} \text{ } 0$$

La résolution de ce système surdéterminé se fera en recherchant la "pseudo solution" au sens des moindres carrés par la méthode de GOLUB qui consiste à calculer les matrices R_n "pseudo-inverses" des $\bar{K}_n$

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_n \end{bmatrix}$$

où $\begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix}$ est une matrice de m_p lignes et s colonnes

D'autre part, on a montré au chapitre que, en exploitant les conditions de compatibilités que doivent vérifier les données, il est possible de calculer des matrices $\begin{bmatrix} R^*_n \end{bmatrix}$ à partir des $\begin{bmatrix} R_n \end{bmatrix}$ qui réduisent l'effet des erreurs de mesures.

On a alors :

$$\begin{bmatrix} \bar{F}^*_{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\mathbf{n}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{\mathbf{n}} \end{bmatrix}$$

Les étapes des calculs à réaliser sont donc :

- calcul des $\begin{bmatrix} K_{\mathbf{n}} \end{bmatrix}$ à l'aide de formules données au chapitre 3
- calcul des $\begin{bmatrix} K_{\mathbf{n}} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \bar{K}_{\mathbf{n}} \end{bmatrix}$
- calcul des $R_{\mathbf{n}}$ en "inversant" les $\bar{K}_{\mathbf{n}}$ par la méthode de GOLUB
- calcul des $\begin{bmatrix} R_{\mathbf{n}}^* \end{bmatrix}$

Le calcul des matrices $R_{\mathbf{n}}$ doit être refait pour chaque nouvelle valeur des paramètres μ (coefficient d'absorption) et ϵ (coefficient de régularisation). L'ensemble de ces calculs étant très long, il faut essayer de réaliser au préalable le maximum de calculs indépendants de μ et ϵ .

Le coefficient d'absorption μ n'intervient dans le calcul des matrices $K_{\mathbf{n}}$ que par le facteur multiplicatif

$$\text{ch } \mu \sqrt{x_j^2 - x_i^2}$$

devant chaque élément k_{ji}

Appelons $K^{\circ}_{\mathbf{n}}$ les matrices $K_{\mathbf{n}}$ calculées avec $\mu = 0$ c'est-à-dire pour $\text{ch } \mu \sqrt{x_j^2 - x_i^2} = 1$

Les matrices $K^{\circ}_{\mathbf{n}}$ sont indépendantes de μ et ϵ .

X Il est donc possible de les pré-calculer et d'en déduire très simplement les matrices K_n en multipliant les k_{ji}^0 par le facteur $\text{ch } \mu \sqrt{x_j^2 - x_i^2}$

Les étapes du calcul deviennent donc :

- 1) Calcul des $[K_n^0]$ indépendantes de ε et μ
- 2) Calcul des $[K_n]$, $[\bar{K}_n]$, $[\overline{\bar{K}}_n]$ en fonction de μ et ε
- 3) Calcul des $[R_n]$
- 4) Calcul de $[K_n^*]$

II CALCUL DES MATRICES $[K_n^0]$

Rappelons que les matrices K_n sont des matrices carrées de $s \times s$ éléments triangulaires inférieurs c'est-à-dire dont tous les éléments $k_{i,j}$ avec $i < j$ sont nuls.

Les éléments des matrices K_n^0 se calculent à l'aide des formules (3.13) du chapitre (3) dans lesquelles on donne à μ la valeur 0.

Ces formules deviennent :

$$k_{i,j}^0 = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$k_{i,i}^0 = \frac{2}{h} \left[x_{i-1} x_i B_{i,i}^n - x_i^2 C_{i,i}^n \right]$$

Les quantités $B_{i,j}^n$ et $C_{i,j}^n$ étant calculables par récurrence selon n d'après les formules (3.11) du chapitre (3) c'est-à-dire

$$a_{i,l} = \arccos \frac{x_i}{x_l}$$

$$b_{i,l} = \arccos \frac{x_i}{x_{l-1}} = a_{i,l-1}$$

$$A^{\circ}_{i,l} = \begin{bmatrix} \log \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{i,l} \\ b_{i,l} \end{matrix}$$

$$B^{\circ}_{i,l} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} \phi \end{bmatrix} \begin{matrix} b_{i,l} \\ a_{i,l} \end{matrix}$$

$$C^{\circ}_{i,l} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{tg} \phi}{\cos \phi} + \operatorname{Log} \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{i,l} \\ b_{i,l} \end{matrix}$$

$$A^1_{i,l} = \begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix} \begin{matrix} b_{i,l} \\ a_{i,l} \end{matrix}$$

$$B^1_{i,l} = A^{\circ}_{i,l}$$

$$C^1_{i,l} = B^{\circ}_{i,l}$$

$$A^n_{i,l} = \frac{2}{n-1} \begin{bmatrix} \sin (n-1)\phi \end{bmatrix} \begin{matrix} b_{i,l} \\ a_{i,l} \end{matrix} - A^{n-2}_{i,l}$$

$$B^n_{i,l} = 2 A^{n-1}_{i,l} - B^{n-1}_{i,l}$$

$$C^n_{i,l} = 2 B^{n-1}_{i,l} - C^{n-2}_{i,l}$$

III - CALCUL DES MATRICES $[R_n]$

Les matrices sont obtenues en calculant les matrices "pseudo-inverses" des matrices $[\bar{R}_n]$ par la méthode de GOLUB.

Les calculs sont effectués selon la séquence suivante :

Pour $n = 0$ à $n_{\max}$:

- lecture sur disque de la matrice $[K^n]$

- calcul de $\bar{K}^n$ en multipliant les k_{ji}^0 par $\text{Ch } \mu \sqrt{x_j^2 - x_i^2}$
- calcul de $\bar{K}^n$ en supprimant les m_p dernières colonnes
- calcul du $\bar{\bar{K}}$ en ajoutant m_{p-1} lignes de régularisation
- "pseudo-inversion" de $\bar{\bar{K}}$ n (cf références)
- écriture sur disque de la matrice $[R_n]$

REALISATION PRATIQUE

Le calcul des matrices $[R_n]$ est fait par le programme KGMR

La "pseudo inversion" est réalisée par le sous-programme GOLUB dont on trouvera la description dans la référence

Tous les calculs sont effectués en "réels double précision" mais les résultats sont stockés sur disque sous forme de "réels simple précision".

Le dialogue est le suivant :

- Premier fichier K ? numéro du fichier disque ou lire la première matrice K
- Premier fichier R ? numéro du fichier disque ou écrire la première matrice R
- Epsilon ? coefficient de régularisation
- MU ABSORPTION ? coefficient d'absorption en cm^{-1}

Le temps de calcul est très long : environ 10 heures pour calculer 16 matrices $[R_n]$

Il serait sans doute possible en soignant la programmation de gagner du temps, mais ces programmes étant destinés à être utilisés très rarement, ce travail n'a pas été fait.

IV - CALCUL DES MATRICES $[R^*_n]$

Rappelons que les matrices $[R^*_n]$ se calculent à partir des matrices R_n par les formules :

$$[R^*_n] = [R_n] [I - U_n]$$

Les étapes du calcul ont été décrites au chapitre Pratiquement, le calcul des matrices $[R^*_n]$ se fera à l'aide de deux programmes :

1) PROGRAMME DE GENERATION DES MATRICES $[I - U_n]$: KGUN

Les calculs réalisés sont les suivants :

Génération du tableau $X_n(u_i)$ par récurrence :

$$X_0(u_i) = 1 \quad \text{avec } n \text{ de } 0 \text{ à } 13$$

$$X_1(u_i) = u_i \quad u_i = \frac{R - (i-1)h}{R}$$

$$i \text{ de } 1 \text{ à } 32$$

$$X_n(u_i) = \frac{2}{n} \frac{n-1}{n} u_i X_{n-1}(u_i) - \frac{n-1}{n} X_{n-2}(u_i)$$

Normalisation de $X_n(u_i)$

$$\bar{X}_n(u_i) = \frac{X_n(u_i)}{\sum_{j=1}^{32} X_n^2(u_j)} \quad 1/2n+1$$

Calcul par récurrence de $[U_n]$ puis de $[I - U_n]$ pour n de 0 à 15

$$n = 0 \text{ ou } 1 \quad [U_n] = 0$$

$$n = 2 \quad U_n(i,j) = \bar{X}_0(u_i) \cdot \bar{X}_0(u_j) \quad \begin{matrix} i \text{ de } 1 \text{ à } 32 \\ j \text{ de } 1 \text{ à } 32 \end{matrix}$$

$$n = 3 \quad U_3(i,j) = \bar{X}_1(u,i) \cdot \bar{X}_1(u,i)$$

$$n > 4 \quad U_n(i,j) = U_{n-2}(i,j) + \bar{X}_{n-2}(u,i) \bar{X}_{n-2}(u,i)$$

$$\text{si } i = j \quad U_n(i,j) = 1 - U_n(i,j)$$

$$\text{si } i \neq j \quad U_n(i,j) = -U_n(i,j)$$

Ecriture sur disque des matrices $[I - U_n]$

selon le format standard 64 x 64

2) PROGRAMME DE MULTIPLICATION DES MATRICES $[R_n]$ PAR LES MATRICES $[I - U_n]$

Il réalise simplement les calculs suivants :

Pour n de 0 à 15:

lecture sur disque de $[R_n]$

lecture sur disque de $[I - U_n]$

multiplication de ces deux matrices 32 x 32

écriture sur disque de $[R_n^*]$

Le dialogue est :

premier fichier R ? (où lire les matrices $[R]$) ?

premier fichier I - UN ? (où lire les matrices $[I - U]$?

premier fichier R* ? (où écrire les matrices $[R_n^*]$?)

V - REMARQUES

On constate expérimentalement que les matrices $[R_n]$ et $[R^*n]$ comportent de nombreux éléments négligeables.

Un grand nombre d'opérations pendant les multiplications matricielles seront donc pratiquement inutiles et il serait intéressant pour gagner du temps de les supprimer.

Pour cela nous allons, dans chaque colonne des matrices $[R_n]$ et $[R^*n]$, rechercher les limites supérieures et inférieures à l'extérieur desquelles tous les éléments sont considérés comme négligeables. (On considérera comme négligeables les éléments inférieurs à, par exemple, $\frac{1}{10\ 000}$ de l'élément maximum de la série de matrices).

Les matrices $[R_n]$ et $[R^*n]$ sont des matrices de dimensions maximales 32 x 32 réels. Elles n'occupent donc que partiellement les matrices standard 64 x 64 entières, ce qui permet de ranger la valeur des limites supérieures et inférieures pour chacune des colonnes dans le même fichier disque que la matrice R

Le travail de "bornage" est réalisé par le programme KBMR qui sur une série de matrices $[R_n]$, recherche l'élément maximum, détermine pour chaque colonne le premier et le dernier élément à prendre en compte et range ces limites dans le fichier disque avec la matrice $[R]$

Ces limites seront exploitées par le sous-programme de multiplication matricielle.

CHAPITRE 7

LE PRE-TRAITEMENT DES DONNEES D'ACQUISITION

GENERALITES

CAS OU $\mu = 0$

CAS OU $\mu \neq 0$

I - INTRODUCTION

Une acquisition tomographique standard se compose de 64 matrices 64 x 64, chacune de ces matrices représentant la projection du volume radio-actif selon une incidence perpendiculaire à l'axe de rotation du détecteur.

La première étape du processus de reconstruction que l'on appellera "pré-traitement" consiste à extraire de la série des "matrices acquisitions" les données correspondant à la coupe à reconstruire (c'est-à-dire les 64 ⁿième lignes des "matrices-acquisitions") et à les ordonner selon les conventions choisies lors de l'établissement de l'équation fondamentale de la tomographie d'émission (cf chapitre 2).

Il s'agit donc de calculer à partir de l'acquisition tomographique le tableau

$$(7.1) \quad g(x_i, w_j) = \frac{1}{2} \left[h_1(x_i, w_j) e^{-\mu l_1(x_i, w_j)} + h_2(x_i, w_j) e^{-\mu l_2(x_i, w_j)} \right]$$

x_i $i = 1$ à s représentant les s points de mesure sur un rayon
(en pratique $s = 32$)

w_j $j = 1$ à NI représentant les NI angles d'incidence en pratique $NI = 64$

$h_1(x_i, w_j)$ représente la mesure de la radio-activité au point x_j de la j ième incidence (point M_1 de la figure 7.1)

$h_2(x_i, w_j)$ représente la mesure de la radio-activité au point opposé au point de mesure de $h_1(x_i, w_j)$ (point M_2 de la figure 7.1)

$l_1(x_i, w_j)$ représente la valeur algébrique $\overline{H P_1}$ sur la figure (7.1)

$l_2(x_i, w_j)$ représente la valeur algébrique $\overline{H P_2}$ sur la figure (7.1)

μ représente le coefficient d'absorption

II - CALCULS DANS LE CAS OU μ EST NUL

Si l'on suppose $\mu = 0$ la relation (7.1) devient :

$$g(x_i, w_j) = \frac{1}{2} \left[h_1(x_i, w_j) + h_2(x_i, w_j) \right]$$

Le problème consiste à retrouver la valeur $h_1(x_i, w_j)$ et $h_2(x_i, w_j)$ dans la série des "matrices-acquisitions" c'est-à-dire à établir la correspondance entre les indices i et j et les indices des éléments dans les "matrices-acquisitions" (cf figure).

Supposons que la coupe à reconstruire soit la coupe numéro n c'est-à-dire située au niveau de la $n^{\text{ième}}$ ligne des "matrices-acquisitions".

Le point $M_1(x_i, w_j)$ est donc situé sur la $n^{\text{ième}}$ ligne de la "matrice-acquisition" numéro j et le point $M_2(x_i, w_j)$ est situé sur la $n^{\text{ième}}$ ligne de la "matrice-acquisition" opposée c'est-à-dire la matrice numéro k avec $k = j + 32$ si $j < 32$ et $j - 32$ si $j > 32$.

Par convention, l'indiçage des x_i se fait de l'extérieur vers le centre c'est-à-dire que le point x_1 est le point de mesure le plus externe et le point x_{32} est le point de mesure le plus près du centre. D'autre part, les 64 éléments d'une ligne acquisition sont numérotés de 1 à 64, le centre de la ligne étant situé entre les points 32 et 33. Tous ces éléments sont représentés sur la figure

Le point de mesure $M_1(x_i, w_j)$ est le $65 - i^{\text{ième}}$ élément de la $n^{\text{ième}}$ ligne de la "matrice-acquisition" numéro k .

Le calcul de $G(x_i, w_j)$ pour i de 1 à 32 nécessite donc de lire les deux "matrices-acquisitions" opposées, à partir desquelles il est également possible de calculer $G(x_i, w_{j+32})$ pour $i = 1$ à 32.

i de 1 à 32 j de 1 à 32	Matrices acquisitions		N° ligne	Indice M ₁	Indice M ₂
G (x _i , w _j)	j	j + 32	N	i	65 - i
G (x _i , w _{j+32})	j	j + 32	N	65 - i	i

REALISATION PRATIQUE : programme KPT1

Séquence des calculs

Pour NC de NC1 à NC2 (NC = N° de la coupe à reconstruire)

Pour j de 1 à 32 :

lire les "matrices-acquisitions" numéro j et j + 32
pour i = 1,32

$$G(I, J) = \frac{1}{2} H_1(I, NC) + H_2(65 - I, NC)$$

$$G(I, J+32) = \frac{1}{2} H_1(65-I, NC) + H_2(I, NC)$$

Ecrire sur disque la matrice G

Format des données

Les matrices acquisitions sont des matrices 64 x 64 nombres entiers.

Les calculs sont effectués en variables entiers et les résultats sont convertis en variables réels, simple précision avant

d'être recopiés sur disques sous forme d'une matrice 32 x 64 nombres réels qui occupe la même place qu'une matrice 64 x 64 nombres entiers.

Pour gagner du temps dans les calculs d'adresses, les tableaux manipulés seront des tableaux à 1 dimension, les indices étant calculés par des incrémentations adaptées.

Dialogue

Numéro coupe haute ?

Numéro coupe basse ?

Premier fichier acquisition ?

Premier fichier résultat ?

III - CALCUL DANS LE CAS OU μ EST NON NUL

Si μ est non nul, le pré-traitement consiste à calculer pour chaque coupe à reconstruire :

$$g(x_i, w_j) = \frac{1}{2} \left[h_1(x_i, w_j) e^{-\mu l_1(x_i, w_j)} + h_2(x_i, w_j) e^{+\mu l_2(x_i, w_j)} \right]$$

La correspondance entre les indices étant la même que dans le cas où $\mu = 0$, il suffit de modifier l'algorithme précédent en introduisant les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 de la manière suivante :

$$G(I, J) = \frac{1}{2} \left[A_1 \times H_1(I, NC) + A_2 \times H_2(65-I, NC) \right]$$

$$G(I, J+32) = \frac{1}{2} \left[A_3 \times H_1(65-I, NC) + A_4 \times H_2(I, NC) \right]$$

où :

$$A_1 = e^{-\mu l_1(x_i, w_j)}$$

$$A_2 = e^{+\mu l_2(x_i, w_j)}$$

$$A_3 = e^{+i l_2} (x_i, w_{j+32})$$

$$A_4 = e^{-i l_1} (x_i, w_{j+32})$$

Les valeurs l_1 et l_2 sont des mesures algébriques de $\overline{MA_1}$ et $\overline{MA_2}$ la droite $M_1 M_2$ étant orientée de M_1 vers M_2 (cf figure 7.1).

Pour calculer $l_1 (x_i, w_j)$ et $l_2 (x_i, w_j)$ il est nécessaire de connaître le contour du domaine de mesure D.

La détermination de D peut se faire par mesure directe par reconstruction de la coupe en supposant $\rho = 0$ ou par tout autre moyen.

Nous supposerons D connu et mémorisé sur disque sous la forme d'une matrice 64 x 64 dont chaque élément vaut 1 si le point appartient à D et 0 si il n'appartient pas à D.

1) CALCUL DES l_1 et $l_2 (x_i, w_j)$

Le calcul de $l_1 (x_i, w_j)$ et $l_2 (x_i, w_j)$ sera fait par un programme indépendant et les résultats seront stockés sur disque. Ainsi, si plusieurs coupes à reconstruire ont le même contour, il suffira de ne réaliser le calcul de l_1 et l_2 qu'une seule fois.

Principe du calcul

Il s'agit de calculer pour chaque angle d'incidence w_j et chaque valeur de x_i les longueurs HP_1 et HP_2 et pour cela de déterminer les coordonnées des points H, P_1 et P_2 dans le repère O, X, Y.

Les coordonnées du point H sont données par :

$$x_o = x_i \cos (w_j)$$

$$y_o = x_i \sin (w_j)$$

La recherche de P_1 et P_2 se fera en se déplaçant pas à pas à partir de H sur la droite de projection Δ c'est-à-dire en incrémentant les coordonnées de H des quantités

$$\delta_x = \sin w_j$$

$$\delta_y = -\cos w_j$$

Pour chaque nouveau point, le passage de la frontière de D sera recherché en testant le passage de 0 à 1 ou de 1 à 0 du point correspondant dans la matrice représentant le contour D.

Une fois P_1 et P_2 reconnus, les quantités l_1 et l_2 sont calculées et recopiées dans le tableau résultat.

L'ensemble des résultats est ensuite recopié sur disque sous la forme d'une matrice 64 x 64 entiers appelée matrice L.

Structure du programme KCML

Entrée des paramètres (cf dialogue)

Lecture sur disque de la matrice du domaine D

Pour chaque angle w_j

 Pour chaque x_i

 Calcul des coordonnées de H

 Recherche des points P_1 et P_2

 Calcul de l_1 et l_2

Ecriture sur disque des résultats.

Dialogue

- Numéro de fichier du domaine D
- Angle origine
- Nombre d'incidences
- Numéro de fichier de la table résultat.

2) PRE-TRAITEMENT PROPREMENT DIT

Les coefficients de correction d'absorption A_1, A_2, A_3 et A_4 sont déterminés en recherchant dans la matrice L les valeurs de $l_1(x_i, w_j)$ et $l_2(x_i, w_j)$ et en calculant les exponentielles correspondantes.

Structure du programme KPT2

-Entrée des paramètres (cf dialogue)

-Pour NC de NC1 à NC2 (NC = n° de la coupe à reconstruire) :

.Lecture sur disque de la matrice L

.Pour j de 1 à 32

Lecture sur disque des matrices acquisitions J et J +

Pour i = 1 à 32

Recherche de $l_1(x_i, w_j)$ $l_2(x_i, w_j)$,
 $l_1(x_i, w_{j+32})$ $l_2(x_i, w_{j+32})$

calcul de A_1, A_2, A_3, A_4

$$G(I, J) = \frac{1}{2} A_1 H_1(I, NC) + A_2 H_2(65 - I, NC)$$

$$G(I, J+32) = \frac{1}{2} A_3 H_1(65 - I, NC) + A_4 H_2(I, NC)$$

-Ecriture sur disque de la matrice G

matrice 32 x 64 réels simples précisions

Dialogue

Numéro coupe haute ?

Numéro coupe basse ?

Premier fichier acquisition ?

Premier fichier résultat ?

Coefficient d'absorption MV ?

Fichier de la matrice L ?

IV - CONCLUSION

La procédure de pré-traitement des données tomographiques est réalisée à l'aide de trois programmes.

si N = 0 programme KPT1

si N = 0 programme KCML : création de la matrice L

KPT2 : pré-traitement proprement dit

Les programmes KPT1 et KPT2 peuvent être regroupés en un programme unique KPTT.

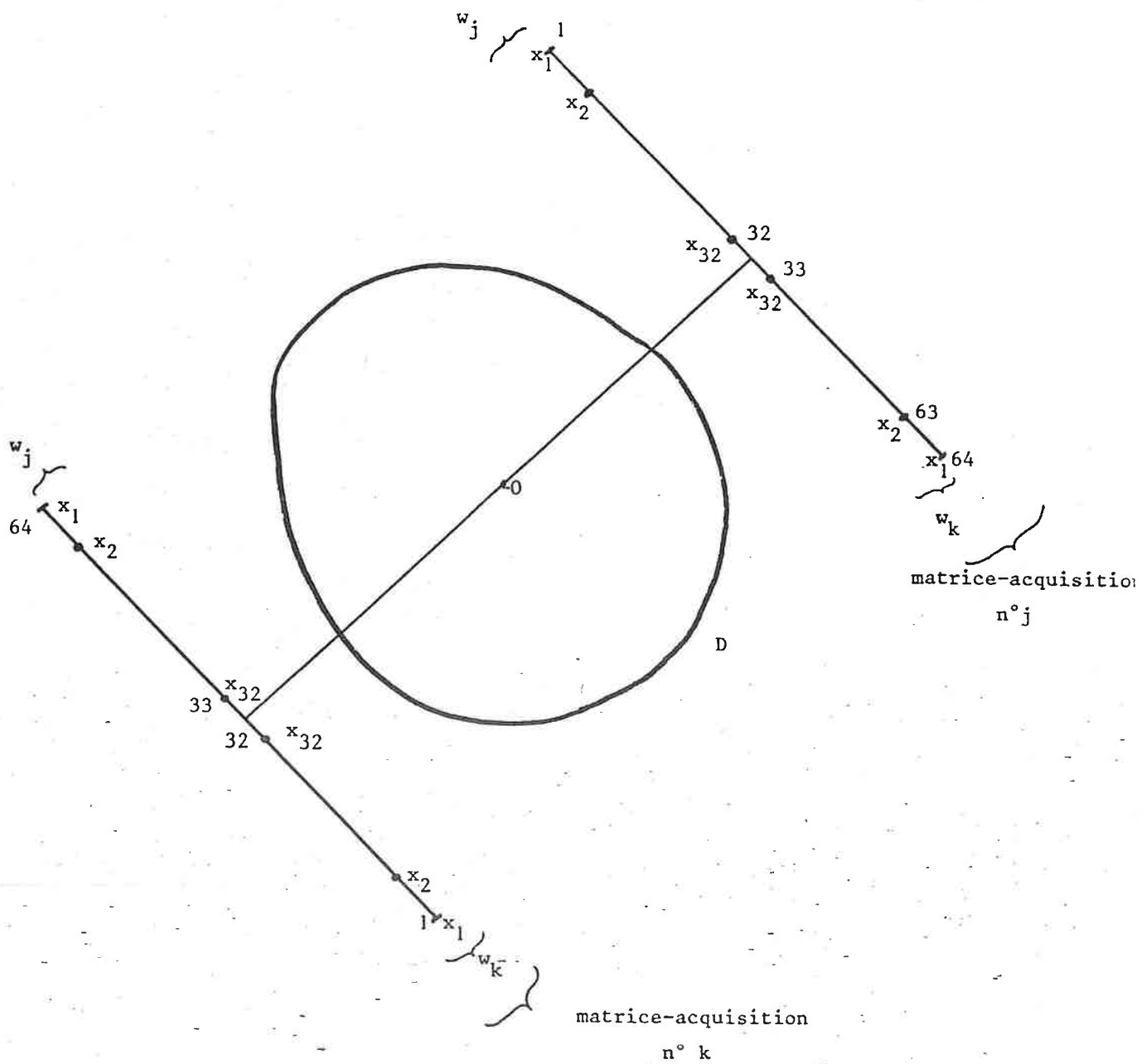
Après le pré-traitement, on dispose sur le disque d'une matrice dite "matrice-donnée" par coupe à reconstruire.

Chaque "matrice-données" est une matrice 32 x 64 réels simple précision qui représente le second membre de l'équation fondamentale c'est-à-dire les

$$G(x_i, w_j) \quad \text{pour} \quad \begin{array}{l} i \text{ de } 1 \text{ à } 32 \\ j \text{ de } 1 \text{ à } 64 \end{array}$$



FIGURE 7 .1



$$k = j + 32 \text{ si } j \leq 32$$

$$k = j - 32 \text{ si } j \geq 33$$

Figure 7.2

CHAPITRE 8

LE TRAITEMENT

INTRODUCTION

TRANSFORMATION DE FOURIER DIRECTE /

MULTIPLICATION PAR LES MATRICES "PSEUDO-INVERSEES" /

TRANSFORMATION DE FOURIER INVERSE /

CONVERSION COORDONNEES CARTESIENNES/COORDONNEES POLAIRES /

ORGANISATION GENERALE DU PROGRAMME

I - INTRODUCTION

La phase de traitement proprement dit consiste à reconstruire les coupes tomographiques à partir des "matrices-données" générées sur disque par le "pré-traitement".

Rappelons que les étapes de traitement sont les suivantes :

- 1) Transformation de Fourier des données .
- 2) Multiplication par les matrices pseudo-inverses .
- 3) Transformation de Fourier inverse .
- 4) Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes .

Chacune de ces étapes sera réalisée par un sous-programme et la structure du programme principal KTTO sera :

Entrée des paramètres

Pour chaque coupe à reconstruire :

- lecture sur disque "matrice-données"
- Appel S.P transformation de Fourier directe
- Appel S.P multiplication par matrice "pseudo-inverse"
- Appel S.P transformation de Fourier inverse
- Appel S.P passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes

Ecriture sur disque matrice_résultat.

Les "matrices-données" seront lues sur disque et transférées par le programme principal dans un tableau 32 x 64 variables réelles simple précision appelé G (I, J). Ce tableau sera déclaré un COMMON

et servira à la transmission des données principales entre les différents sous-programmes.

En fait, pour gagner du temps dans les calculs d'adresses, tous les tableaux seront déclarés à une dimension et les indices calculés par des incrémentations convenables.

Tous les calculs seront réalisés en "réel simple précision" à l'aide de la virgule flottante câblée disponible sur le système.

II - TRANSFORMATION DE FOURIER DIRECTE : SOUS PROGRAMME KDFT

Il s'agit de calculer pour chaque rayon x_i les coefficients du développement en série de Fourier selon w_j des données $G(x_i, w_j)$ c'est-à-dire de réaliser la transformation de Fourier de chacune des 32 colonnes du tableau $G(I, J)$.

Pour gagner du temps, les colonnes du tableau $G(I, J)$ seront traitées deux par deux et considérées comme une série de 64 variables complexes.

La transformation rapide de Fourier sera réalisée en utilisant l'algorithme de Sande avec reclassement des indices, dérivé de l'algorithme de base de Cooley et Tukey.

La transformation des 32 colonnes à 64 éléments du tableau $G(I, J)$ nécessitera donc 16 transformations de Fourier rapides de 64 variables complexes.

Les résultats sont recopiés au fur et à mesure dans les colonnes d'origine du tableau $G(I, J)$ selon l'ordre suivant :

$$a_0, \quad , a_1, b_1, a_2, b_2 \dots$$

Les a_i représentant les coefficients réels et les b_i les coefficients imaginaires.

Remarques :

Les tables de sinus et cosinus nécessaires à la transformation de Fourier rapide seront calculées à l'avance par le programme principal et rangées dans des tableaux déclarés en COMMON.

Etant donné la nature des images à traiter et en particulier le fort bruit dont elles sont entachées, il est vraisemblable qu'il ne sera ni utile ni même souhaitable de conserver toutes les harmoniques. C'est pourquoi le nombre maximal d'harmoniques NHM que l'utilisateur désire conserver sera entré en paramètres dans le programme principal.

La structure du sous-programme est alors la suivante :

-Pour N impair de 1 à 31

.Transfert des colonnes N et N_{+1} de G (I, J) dans les tableaux tampon X et Y

.Transformation de Fourier rapide de X et Y

.Transfert des résultats limités à NHM harmoniques dans les colonnes N et N_{+1} de G (I, J)

-Retour

Au retour de ce sous-programme les coefficients de l'harmonique n pour chacun des rayons x_i se trouvent dans le tableau G (I, J) sur la ligne $2n + 1$, en ce qui concerne les coefficients réels, et sur la ligne $2n + 2$ en ce qui concerne les coefficients imaginaires.

III - MULTIPLICATION PAR LES MATRICES "PSEUDO-INVERSES" : SOUS PROGRAMME KMMR

Le but de ce sous-programme est de réaliser les multiplications matricielles suivantes :

$$F_n = R_n G_n$$

où :

n est le numéro de l'harmonique de 0 à NHM

R_n est la matrice "pseudo inverse" pour l'harmonique n .
Cette matrice de dimensions $32, m P$ ($m P = 32 -$ partie entière de $\frac{n}{2}$) est pré-calculée et stockée sur disque.

G_n est la matrice des coefficients de l'harmonique n des données pour chacun des rayons x_i et représente deux lignes de 32 éléments du tableau $G(I, J)$:

- la ligne $2n + 1$ pour les coefficients réels
- la ligne $2n + 2$ pour les coefficients imaginaires

F_n est la matrice des coefficients de l'harmonique n des résultats et sera rangée sur deux lignes dans le tableau $G(I, J)$ à la place des G_n .

Comme nous l'avons décrit au chapitre 6 les matrices R_n comportent de nombreux éléments négligeables et pour chaque colonne, seuls les éléments compris entre les limites calculées par le programme KBMR seront pris en considération, ce qui permet de diminuer le nombre des opérations, donc de gagner du temps.

La structure du sous-programme KMMR est alors la suivante :

- Pour chaque harmonique n de 0 à NHM
 - Transfert des lignes $2n + 1$ et $2n + 2$ du tableau $G(I, J)$ respectivement dans les tableaux tampons X et Y
- Lecture sur disque de la matrice R_n
 - Pour chaque colonne de R_n de 1 à m
 - Lecture des bornes supérieures et inférieures
 - Multiplications par X , transfert du résultat dans G
 - Multiplications par Y , transfert du résultat dans G
- Retour

IV - TRANSFORMATION DE FOURIER INVERSE : SOUS PROGRAMME KIFT

Le sous-programme est analogue au sous-programme de transformation de Fourier directe KDFT.

Les colonnes de $G(I, J)$ sont traitées deux par deux et considérées comme des variables complexes.

La structure de ce sous-programme est la suivante :

Pour N impair de 1 à 31

Transfert des colonnes N et N+1 de G (I, J) dans les
tableaux tampon X et Y

Transformation de Fourier inverse de X et Y

Transfert des résultats dans les colonnes N et N+1 de
G (I, J)

Retour

V - PASSAGE DES COORDONNEES POLAIRES AUX COORDONNEES CARTESIENNES :

SOUS PROGRAMME KTPC

A ce stade du traitement, le tableau G (I, J) contient les valeurs de "l'image solution" aux noeuds d'un réseau polaire comportant 64 angles et 32 rayons c'est-à-dire que :

$$G(I, J) = f(r_i, \theta_j) \quad \begin{array}{l} i = 1, 32 \\ j = 1, 64 \end{array}$$

Or tous les programmes standards de visualisation et de traitement d'image travaillent en coordonnées cartésiennes. Il est donc indispensable de transformer l'image de la coupe en coordonnées cartésiennes.

Cette transformation est faite en recherchant pour chaque point d'une image 64 x 64 en coordonnées cartésiennes x, y quel est le point du réseau polaire r_i, θ_j qui lui est le plus proche.

Pour gagner du temps, cette recherche sera faite une fois pour toutes et le résultat stocké sur disque sous la forme d'une matrice 64 x 64 dite "table de conversion".

1) CREATION DE LA MATRICE "TABLE DE CONVERSION" : PROGRAMME KPOC

Pour chaque point d'une matrice 64 x 64 en coordonnées cartésiennes x, y, on calcule les coordonnées polaires r et θ par rapport au centre de l'image, puis on les approche par les valeurs r_i et θ_j

du réseau polaire les plus voisines.

X On range ensuite en chaque point de la matrice 64×64 la valeur de l'indice K du tableau à une dimension $G1(K)$ équivalent à $G(I, J)$ correspondant au point de coordonnée r_i et j .

La matrice de 64×64 nombres entiers ainsi obtenue est stockée sur disque.

Structure du programme KPOC

Entrée des paramètres

Pour x de 1 à 64 et y de 1 à 64

calcul de r, θ

approximation par r_i et θ_i

calcul de l'indice K correspondant à r_i, θ_i dans le tableau $G1(K)$ ($K = 0$ si $r > r_{\max}$)

écriture de K au point x, y

Ecriture sur disque de la table de conversion.

Dialogue

Numéro de fichier de la table de conversion ?

Nombre de points sur un rayon du réseau polaire ?

Nombre d'angles du réseau polaire ?

2) CONVERSION COORDONNEES POLAIRES / COORDONNEES CARTESIENNES : SOUS PROGRAMME KTPC

La matrice de conversion est lue sur le disque et chaque élément de cette matrice est remplacé par la valeur de l'élément correspondant dans le réseau polaire.

Lecture sur disque de la table de conversion IM

Pour chaque point X, Y de la matrice IM

$K = IM(X, Y)$

si $K = 0$ $IM(X, Y) = 0$

si $K \neq 0$ $IM(X, Y) = G1(K)$

Ecriture sur disque de la matrice résultat.

VI - ORGANISATION GENERALE DU PROGRAMME PRINCIPAL KTTO

STRUCTURE DES DONNEES

Le bilan des tableaux nécessaires aux différents sous-programmes est le suivant :

Tableau des données principales G (I, J)

C'est un tableau de dimension 32×64 soit 2 048 variables réelles qui sert de lien entre les différents sous-programmes.

Tableau annexe ITC

C'est un tableau de 64×64 , soit 4 096 variables entières qui sera utilisé par les sous-programmes.

KMMR pour y stocker les matrices R_n qui ont pour dimensions maximales 32×32 soit 1 024 variables réelles qui occupent la place de 2 048 variables entières.

KTPC pour y stocker la matrice de conversion et la matrice résultat qui sont des matrices de 64×64 variables entières.

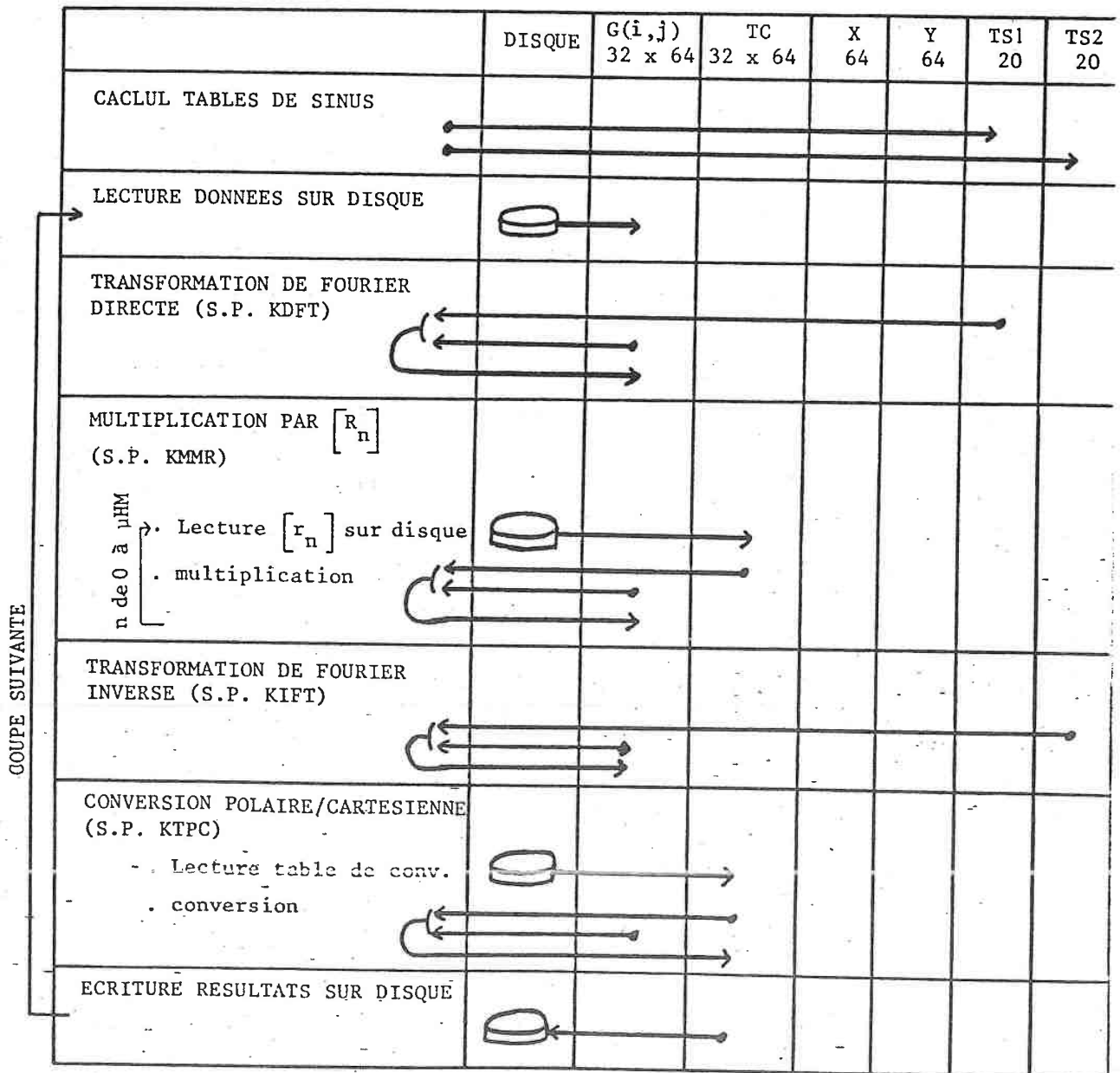
Tables de sinus pour les transformations de Fourier TS1 TS2

Ce sont deux tableaux de 32 variables réelles utilisés l'un par KDFT, l'autre par KIFT.

Tableaux tampon X et Y

Ce sont deux tableaux de 64 variables réelles utilisés comme "mémoire-tampon" par les sous-programmes KDFT, KMMR, KIFT.

SCHEMA DU PROGRAMME KTTO ET DE L'UTILISATION DES TABLEAUX



CHAPITRE 9

SIMULATION DE LA GAMMA - CAMERA

PROJECTION EN SUPPOSANT L'ABSORPTION NULLE

SIMULATION DE L'ABSORPTION RADIO-ACTIVE

SIMULATION DES DEFAUTS DE COLLIMATION

SIMULATION DE LA FLUCTUATION STATISTIQUE

CONCLUSION

La comparaison en qualité de deux méthodes de reconstruction d'image est a priori un problème difficile. En effet, chaque méthode résulte d'un compromis entre régularisation et résolution spatiale et donc la valeur relative de deux méthodes peut dépendre de nombreux facteurs : conditions expérimentales (rapport signal/bruit), allure de l'image à reconstruire, type d'information recherchée (détection de discontinuité, de valeurs moyennes ...).

Nous avons choisi de comparer les deux méthodes en les testant sur trois types de données :

1 - Des données réelles

On se place alors dans les mêmes conditions expérimentales que dans l'utilisation pratique mais on ne connaît pas la coupe réelle. En cas de discordance entre les deux méthodes, il est donc impossible de savoir laquelle est la meilleure.

2 - Des fantômes physiques

Il s'agit de volumes radio-actifs expérimentaux connus généralement réalisés à l'aide de récipients divers remplis de liquides de concentration radio-active variable.

L'enregistrement des différentes incidences se fait selon la même procédure que pour un cas réel. Les conditions de mesures sont alors proches de la réalité, la coupe à reconstruire est connue mais peu réaliste puisqu'il s'agit en fait d'une image constante par morceaux.

3 - Des simulations numériques

La coupe à reconstruire est connue et peut être quelconque y compris des coupes reconstruites à partir de cas réels. Les projections selon les différents angles d'incidence sont obtenues par calcul.

Cette méthode est très souple car elle permet d'étudier facilement l'influence de nombreux paramètres : type d'image à reconstruire, conditions expérimentales...

C'est pourquoi nous avons écrit un programme de simulation des acquisitions tomographiques qui calcule les projections d'une image représentant la coupe réelle selon 32, 64 ou 128 incidences avec les options suivantes :

- prise en compte de l'absorption radio-active
- simulation des défauts de collimation
- simulation de la fluctuation statistique

I - PROJECTION EN SUPPOSANT L'ABSORPTION NULLE

Le détecteur est supposé tourner autour de l'image et pour chaque incidence la projection de l'image 64 x 64 se fera sur une ligne de 64 éléments.

Pour réaliser la projection de l'image sur une ligne il faut, pour chaque élément de la ligne de projection calculer la somme de tous les éléments de l'image ou pixel qui s'y projettent. Ceci peut aussi être réalisé en déterminant pour chaque pixel en quel point de la ligne il se projette et en incrémentant l'élément de la ligne de projection correspondant à la valeur du pixel.

Les pixels qui représentent un carré élémentaire de l'image ne se projettent sur un seul élément de la ligne de projection que pour les angles 0, 90, 180, 270 degrés. Pour les autres angles, chaque pixel se projette sur 2 ou 3 éléments (voir figure 9.1).

Si l'on se contente de projeter le centre du pixel pour déterminer où projeter le pixel entier, cela peut conduire à des oscillations très importantes dans la ligne de projection surtout pour des angles voisins de 45, 135, 225, 315 degrés (voir figure 9.2).

Or les programmes de reconstruction tomographique sont en général très sensibles aux artéfacts. Il est donc nécessaire de réaliser une simulation réaliste et pour ce faire chaque pixel doit être affecté à 1, 2 ou 3 éléments de la ligne de projection proportionnellement à la surface qui s'y projette. Cela peut être approché en divisant chaque pixel en 10 x 10 "sous pixels" et en projetant séparément chacun des sous-pixels en lui associant le 1/100e de la valeur du pixel.

Les calculs seront évidemment longs mais une grande partie est indépendante de l'image à projeter et peut donc être réalisée une fois pour toutes, les résultats étant stockés sur disque sous forme de tables.

1) CREATION DES TABLES DE PROJECTION : PROGRAMME KCTP

Il s'agit de créer une série de tables (1 table par angle d'incidence) indiquant à quels éléments de la ligne de projection et dans quelles proportions affecter chacun des pixels d'une image 64 x 64.

La ligne de projection est une ligne de 64 éléments supposée tourner autour du centre de l'image donc :

- seuls les pixels situés à l'intérieur du cercle centré au centre de l'image et de rayon 32 pixels pourront être projetés

- il suffit de déterminer la projection des pixels de la moitié supérieure de l'image, la projection des autres pixels se déduisant facilement par symétrie.

Les tables auront le format standard 64 x 64 et seule la moitié des pixels sera projetée : on dispose donc de deux mots de la table pour coder la projection d'un pixel. Ces deux mots seront utilisés de la manière suivante :

- 1er mot : numéro NP de l'élément de la ligne de projection où se projette le centre du pixel ;
- 2ème mot : octet de gauche : pourcentage du pixel se projetant sur l'élément NP - 1
octet de droite : pourcentage du pixel se projetant sur l'élément NP + 1

Le calcul des pourcentages se fait en projetant chacun des 100 "sous-pixels".

Les tables sont ensuite stockées sur disque.

Structure du programme KCPT.

Entrée des paramètres (cf. dialogue)

Pour chaque incidence

Pour chaque pixel de la moitié supérieure d'une matrice 64 x 64

- . calcul projection du centre → NP
- . calcul projection de chacun des 100 sous-pixels
- . mise à jour des deux mots correspondant de la table

Ecriture sur disque de la table

Dialogue

Angle origine en degrés ?

Nombre d'incidences

Premier fichier Table de projection ?

2) PROGRAMME DE PROJECTION : KPRO

Ce programme calcule les différentes lignes - projections d'une image 64 x 64 en utilisant les tables - projections.

Ces lignes - projections sont chacune recopiée une à une sur disque sous la forme d'une matrice 64 x 64 comportant 64 lignes identiques.

Ainsi le programme KPRO génère sur disque une série de 32, 64 ou 128 matrices simulant l'acquisition tomographique de 64 coupes identiques superposées.

Cette acquisition simulée pourra être traitée comme une acquisition réelle par les programmes de reconstruction tomographique.

II- SIMULATION DE L'ABSORPTION RADIO-ACTIVE

L'effet de l'absorption radio-active est de pondérer chacune des sources élémentaires par un facteur multiplicatif $e^{-\mu l}$ où μ est le coefficient d'absorption supposé constant et l l'épaisseur de matière absorbante traversée.

Pour simuler l'effet de l'absorption, il faut pour chaque incidence et pour chaque point de l'image à projeter calculer l'épaisseur traversée par les rayons. Cela nécessite de connaître le contour du domaine D à l'intérieur duquel est inscrite l'image à projeter et où μ est supposé constant et à l'extérieur duquel μ est supposé nul. Le domaine D sera stocké sur disque sous la forme d'une matrice 64 x 64 dont chaque élément vaut 1 s'il appartient à D et 0 dans le cas contraire.

Le calcul des longueurs est long mais indépendant de l'image à projeter : il ne dépend que du domaine D . Ce calcul pourra donc être fait de manière indépendante et les résultats seront sauvegardés sur disque sous forme de tables.

1) CREATION DES TABLES D'ABSORPTION : PROGRAMME KCTA

Ce programme génère une table par incidence sous forme d'une matrice standard 64 x 64. Chaque point de ces matrices contient la longueur entre ce point et le contour de D en suivant la direction de projection.

Le calcul se fait en se déplaçant pas à pas à partir de chacun des points de D le long de la direction de projection et en testant à chaque pas le passage de la frontière de D.

Chacune des matrices ainsi créées est rangée sur disque.

Structure de KCTA

- Entrée des paramètres (cf. dialogue)
- Lecture sur disque du domaine D
- Pour chaque incidence

Pour chaque point de D

- . incrémentation des coordonnées correspondant à la direction de projection
 - . test de passage de frontières
 - . calcul de l, recopie dans le pixel
- Ecriture sur disque de la table.

Dialogue

Fichier du domaine D ?
Premier fichier des tables d'absorption ?
Angle origine en degrés ?
Nombre d'incidences ?

2) EXPLOITATION DES TABLES PAR LE PROGRAMME DE PROJECTION

Le programme de projection KPRO va lire sur le disque pour chaque incidence la table de projection et la table d'absorption et pondère, avant de le projeter, chaque pixel sur la quantité $e^{-\mu l}$.

III - SIMULATION DES DEFAUTS DE COLLIMATION

Si la collimation était parfaite, l'image d'une source ponctuelle sur le cristal de la gamma-caméra serait un point.

Or, dans la réalité, l'image d'une source ponctuelle est une tache d'aspect gaussien ce qui limite la résolution du système. L'image fournie par la gamma-caméra peut donc être considérée comme la convolution de l'image réelle par la réponse impulsionnelle du collimateur qui sera simulée numériquement par la série :

$$C_3, C_2, C_1, 100, C_1, C_2, C_3$$

La simulation du défaut de résolution de la gamma-caméra se fera en convoluant des lignes - projections par ce filtre numérique.

IV - SIMULATION DE LA FLUCTUATION STATISTIQUE

La radio-activité est un phénomène aléatoire et la mesure m d'une source radio-active suit une loi de Poisson de moyenne m qui, si m est supérieur à 20, peut être approchée par une loi de Gauss de moyenne m et d'écart-type $\sqrt{m}$.

La loi de Gauss centrée réduite est simulée en utilisant le théorème de la limite centrale qui consiste à additionner un certain nombre de variables aléatoires uniformes sur $[-0,5, 0,5]$.

Pour simuler à l'aide de la même image de départ, des acquisitions de durées différentes, donc de qualités statistiques différentes, on générera une loi de Gauss de moyenne m et d'écart-type $k \times m$ où k est un paramètre.

Ainsi, chaque élément des lignes de projection de valeur M sera remplacé par

$$M + G \cdot \sqrt{k \cdot m}$$

où G est la variable aléatoire qui suit la loi de Gauss centrée réduite.

V - CONCLUSION

La simulation des acquisitions tomographiques à la gamma-caméra est réalisée à l'aide de trois programmes :

KCTP : programme de création des tables de projection
KCTM : programme de création des tables d'absorption
KPRO : programme de projection proprement dit.

La structure de KPRO est la suivante :

Entrée des paramètres (cf. dialogue)

Lire sur chaque disque l'image à projeter

Pour chaque incidence

lire sur disque la table de projection

si $\mu \neq 0$, lire sur disque la table d'absorption

pour chaque pixel de l'image à projeter

si $\mu \neq 0$ pondération par $e^{-\mu l}$

projection

Simulation défaut de collimation

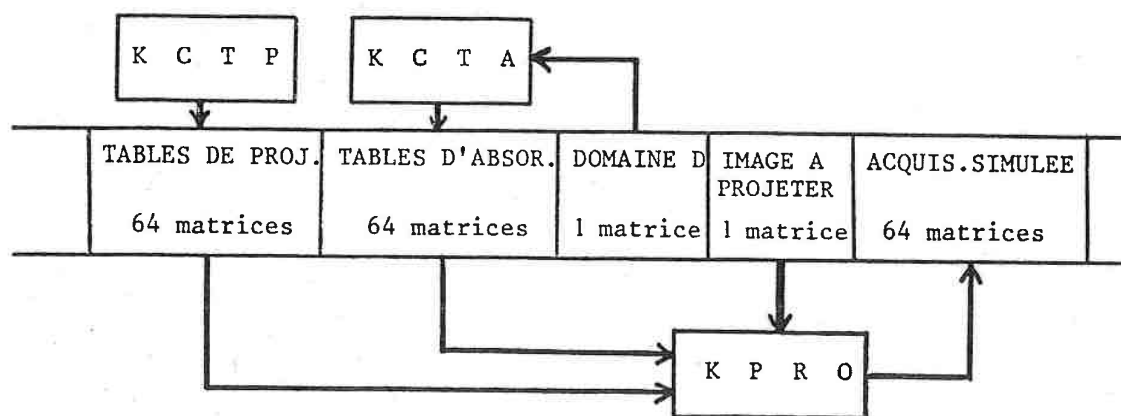
Simulation fluctuation statistique

Création de la matrice comportant 64 lignes de projection identique
écriture sur disque de cette matrice.

Dialogue

- . fichier de l'image à projeter ?
- . premier fichier résultat ?
- . premier fichier table de projection ?
- . coefficient d'absorption MU ?
(si MU $\neq 0$), premier fichier table d'absorption ?
- . défaut de collimation (Y ou N) ?
- . (si oui) coefficients de la réponse impulsionnelle en % :
 - $C_1 = ?$
 - $C_2 = ?$
 - $C_3 = ?$
- . fluctuation statistique (Y ou N) ?
- . (si oui) SIGMH = RACINE (K * MOY) : K = ?

SCHEMA GENERAL DE LA SIMULATION



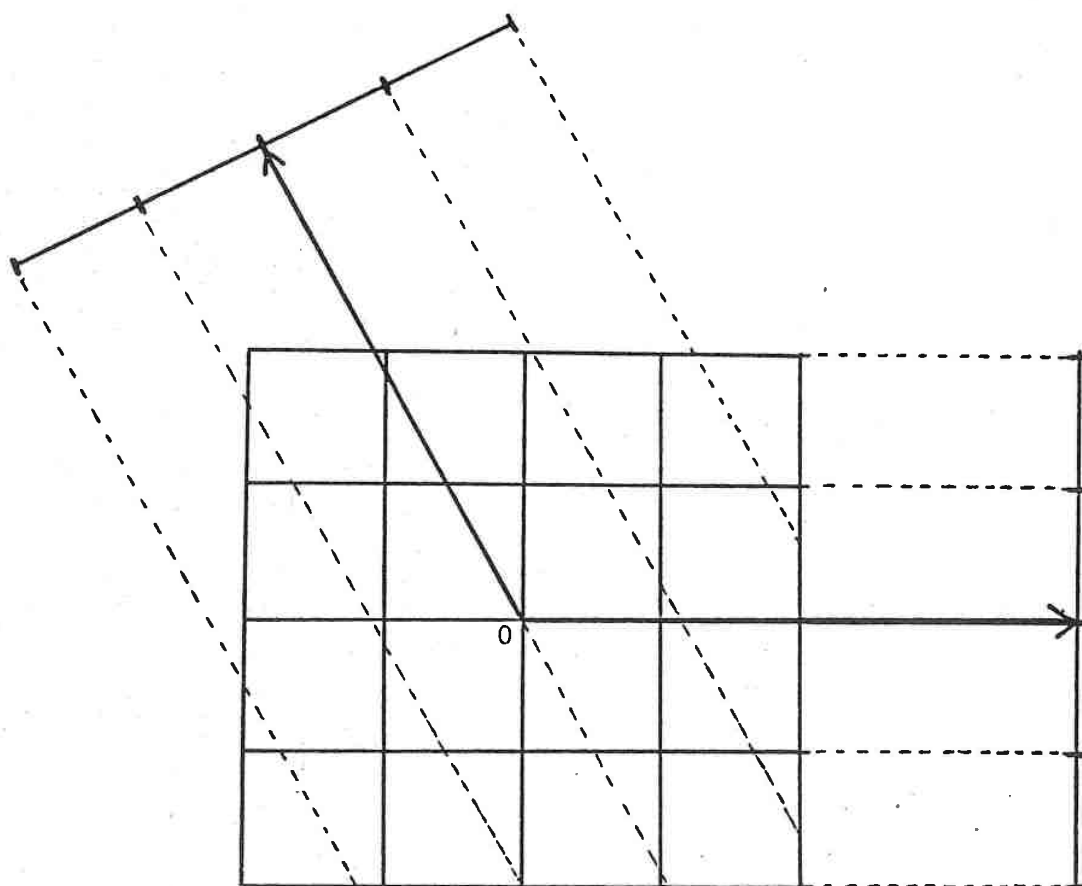
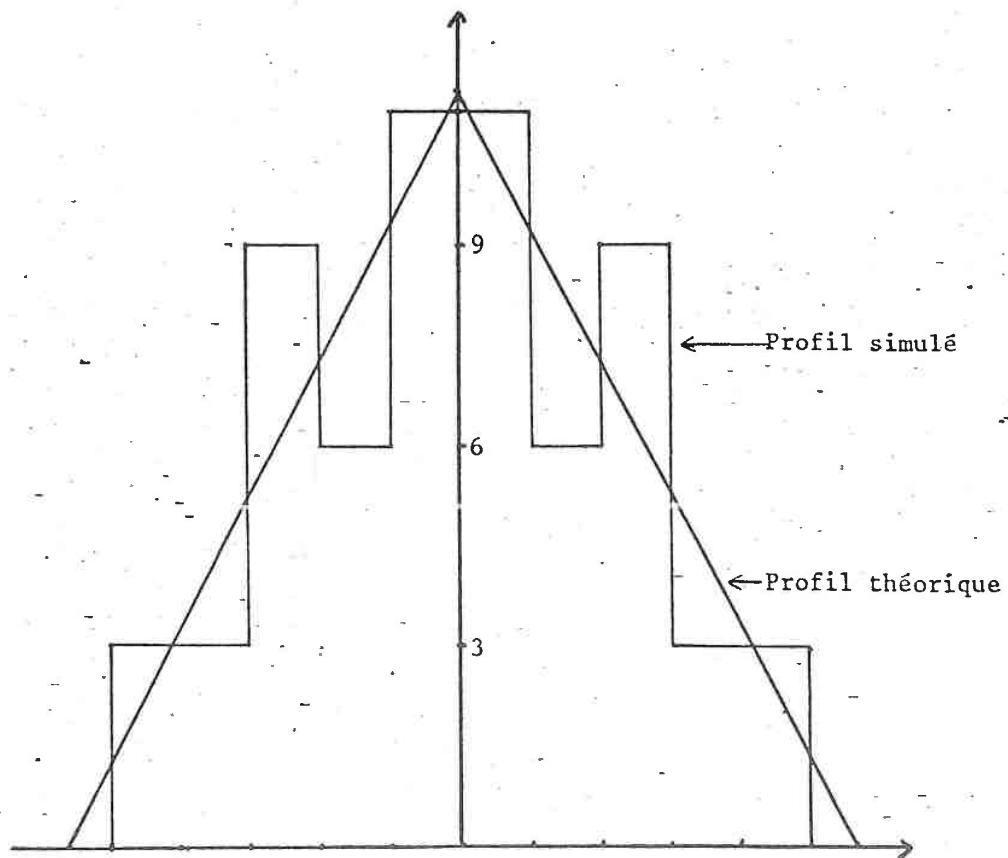
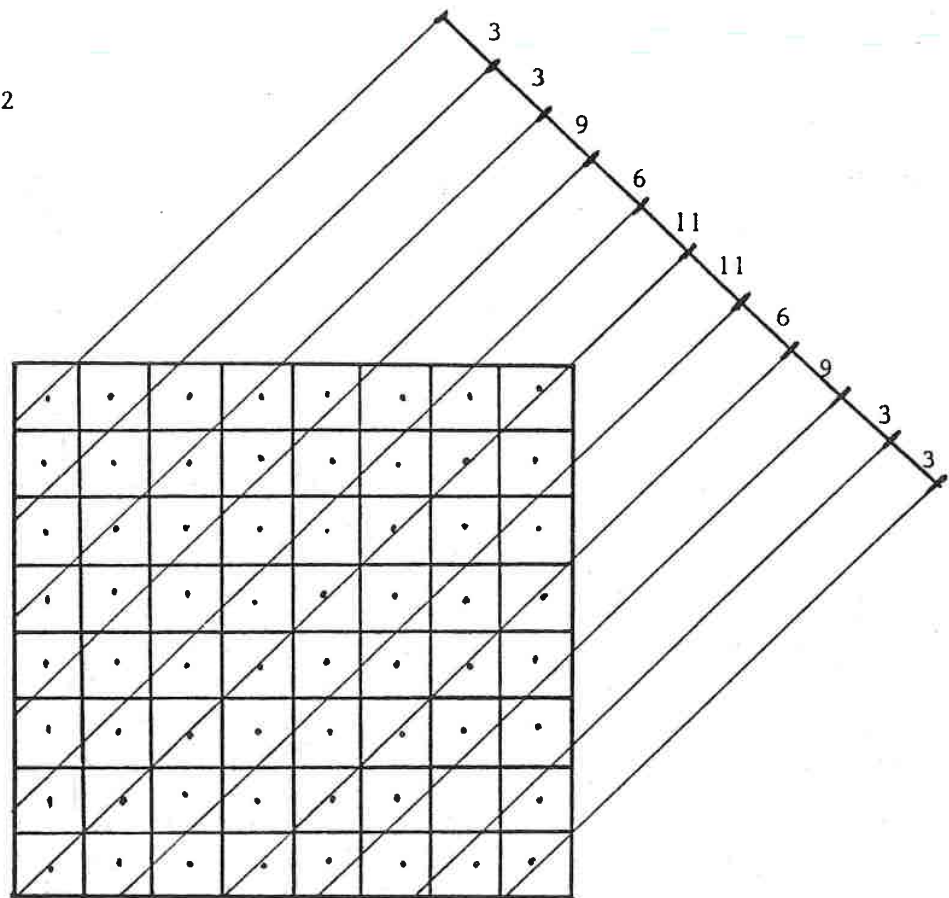


Figure 9.1

Figure 9.2



CHAPITRE 10

RESULTATS EXPERIMENTAUX

La méthode de reconstruction tomographique que nous venons de décrire a été implantée et les divers programmes nécessaires à sa mise en oeuvre ont été testés et fonctionnent de manière satisfaisante.

Nous allons, dans ce chapitre, décrire quelques résultats obtenus par cette méthode afin d'en évaluer les possibilités.

Dans la première partie, nous comparons cette nouvelle méthode avec la méthode classique par rétro-projection filtrage dans le cas où l'on ne corrige pas les phénomènes d'absorption. Cette comparaison porte sur la qualité des résultats obtenus et sur le temps de calcul.

Dans la seconde partie, nous évaluons la capacité de cette méthode à corriger les effets de l'absorption radio-active en supposant le coefficient d'absorption connu et le domaine de mesure connu.

Pour simplifier l'écriture, nous appellerons dans la suite la méthode que nous proposons "méthode analytique par linéarisation en coordonnées polaires" (ALP) et la méthode par rétro-projection filtrage (RPF).

I - COMPARAISON EN QUALITE ET EN TEMPS DE CALCUL DES DEUX METHODES SANS CORRIGER LES EFFETS DE L'ABSORPTION

1) - Comparaison sur des simulations

Nous présentons les résultats obtenus en partant de trois images différentes.

1. Images de "bosses" de période 16 pixels

l'image est générée par programme :

$$f(x,y) = 30 + 10 \sin \frac{2\pi}{16} x + 10 \sin \frac{2\pi}{16} y$$

2. Images de "bosses" de période 8 pixels

$$f(x,y) = 30 + 10 \sin \frac{2\pi}{8} x + 10 \sin \frac{2\pi}{8} y$$

3. Image d'une coupe reconstruite à partir d'un cas réel

Cette image représente une coupe du muscle cardiaque qprès injection de Thallium 201 produit qui se fixe sur les muscles sains.

La simulation est faite en se rapprochant au maximum des conditions expérimentales réelles en ce qui concerne la résolution et l'absorption (C.D.A. = 6 cm). Pour chaque image, deux niveaux de bruit statistique seront simulés : le premier correspondant à une acquisition de bonne qualité et le second à une acquisition de mauvaise qualité.

A la reconstruction, l'absorption n'est pas corrigée et les paramètres de lissage sont optimisés pour chacune des deux méthodes.

La comparaison est faite en comparant visuellement les images obtenues par les deux méthodes à l'image de départ et en comparant la courbe obtenue le long d'un diamètre pour les images 1 et 2 et le long du myocarde pour l'image 3.

Les images et les courbes sont présentées en annexe (1).

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont de qualité très voisine.

La différence la plus notable réside dans la forme des artefacts qui dans le cas de la méthode APL sont d'allure circulaire (ce qui rend compte du fait qu'elle travaille en coordonnées polaires).

2) - Comparaison sur un fantôme physique

Le fantôme utilisé est représenté figure (10.1). L'enregistrement est réalisé selon la même procédure que pour les cas réels.

La reconstruction est faite selon les deux méthodes et les courbes de profil d'activité le long de la droite Δ sont comparées à la courbe théorique (cf. annexe 2).

Ici encore, les résultats fournis par les deux méthodes sont comparables.

3) - Comparaison sur des cas réels

Plusieurs tomographies du myocarde réalisées en routine au Service ont été traitées par les deux méthodes.

Dans tous les cas, les résultats fournis par les deux méthodes sont très voisins en quantité et ne diffèrent pratiquement que par l'allure des artefacts. (cf. annexe 3).

De plus, tous ces résultats ont été interprétés par les médecins du Service et pour chaque cas, les conclusions médicales ont été identiques avec les deux méthodes, ce qui permet de penser que les deux méthodes sont de qualité équivalente en pratique.

4) - Comparaison en temps de calcul

Pour la reconstruction d'une coupe transverse, les temps de calcul respectifs sont :

→ méthode par rétro-projection : 49 secondes

 pré-traitement : 17"

 traitement : 32"

→ méthode A.L.P. : 17 secondes

 pré-traitement : 4"

 traitement : 13"

transformation de Fourier directe : 4"
multiplication de matrices : 4"
transformation de Fourier inverse : 4"
transformation Polaire/Cartésienne : 1"

La méthode A.L.P. est donc environ trois fois plus rapide que la méthode classique.

REMARQUES

→ La comparaison des temps de calcul est faussée par le fait que tous ses programmes sont écrits en Fortran alors que les programmes de rétro-projection fournis par le constructeur sont écrits en partie en Assembleur.

Le temps de calcul pourrait être diminué de manière appréciable en écrivant en Assembleur au moins les sous-programmes de multiplication des matrices et de transformation de Fourier.

→ La méthode A.L.P. se prête très bien à un traitement en parallèle. En effet, les transformations de Fourier directes et inverses se font de manière indépendante pour chaque couronne de rayon x_i , et la multiplication de matrice se fait de manière indépendante pour chaque harmonique. Un processeur parallèle adapté permettrait donc de reconstruire une coupe en un temps très court.

5) - Conclusion

Les quelques résultats expérimentaux présentés permettent de conclure que :

→ les méthodes A.L.P. et R.P.F. fournissent des résultats de qualité très voisines ;

→ à qualité égale, la méthode A.L.P. est environ trois fois plus rapide que la méthode R.P.F.

II - ETUDE DE LA CORRECTION D'ABSORPTION

La correction d'absorption est un problème très délicat tant du point de vue théorique (même avec des hypothèses simplificatrices) que du point de vue pratique, et actuellement, aucune méthode n'a été proposée pour résoudre ce problème de façon satisfaisante.

Nous nous bornerons ici à tester la capacité de la méthode A.L.P. à corriger les effets de l'absorption sur des cas simples constitués par des simulations et un fantôme physique dans le cas où le domaine de mesure est un cercle centré à l'origine, ce qui facilite le calcul des quantités $I_1(x,w)$ et $I_2(x,w)$ utilisées dans le pré-traitement.

1- Correction d'absorption sur des simulations

Nous utiliserons les mêmes simulations que dans la première partie. Les résultats présentés en annexe (4) permettent de constater que la correction de l'absorption est de très bonne qualité ce qui est particulièrement bien mis en évidence par les courbes de radio-activité.

2- Correction d'absorption sur le fantôme physique

Les résultats obtenus dans ce cas (cf. annexe 4) confirment ceux obtenus sur les simulations.

Il semble donc que sur ces cas idéaux (μ strictement constant sur un cercle centré à l'origine), la méthode A.L.P. est capable de corriger de façon très satisfaisante les effets de l'absorption.

Ces résultats très encourageants permettent d'envisager dans l'avenir la possibilité de corriger les effets de l'absorption sur des cas réels. Pour cela, il sera nécessaire d'étudier le comportement de l'algorithme proposé dans le cas où le coefficient d'absorption n'est pas constant et d'étudier l'influence des erreurs de mesures du contour D.

CONCLUSION

La méthode de reconstruction d'image en tomographie d'émission décrite dans la première partie a été implantée et évaluée en routine sur le système de traitement du service de Médecine Nucléaire du C.H.U. de NANCY-BRABOIS.

A priori, l'intérêt de cette méthode est double :

- elle peut tenir compte de l'absorption radio-active en supposant le coefficient d'absorption constant sur le domaine de mesure ;
- elle est plus rapide que la méthode classique de rétro-projection. En effet, elle transforme l'équation fondamentale de la tomographie d'émission en un ensemble de systèmes linéaires surdéterminés dont on cherche la "pseudo-solution" au sens des moindres carrés. Une grande partie des calculs et en particulier la "pseudo-inversion" des matrices est indépendante des données et peut donc être réalisée une fois pour toutes, les résultats étant stockés sur disque.

Nous avons comparé expérimentalement la méthode proposée ^a la méthode par rétro-projection, dans le cas où l'on néglige l'absorption, sur des simulations numériques, sur des fantômes physiques et sur des cas réels et nous avons constaté que :

- la méthode proposée est environ trois fois plus rapide que la méthode classique,
- les deux méthodes fournissent des résultats de qualité comparable, aucun critère n'ayant permis de les différencier objectivement.

La mise en oeuvre de la correction d'absorption, théoriquement possible si l'on suppose le coefficient d'absorption constant a été réalisée sur des simulations et sur des fantômes physiques. Les résultats obtenus sont très encourageants. Cependant, la correction d'absorption sur des cas réels qui n'a pas été étudiée risque d'être délicate d'une part parce que l'hypothèse de l'uniformité du coefficient d'absorption n'est qu'une approximation assez grossière de la réalité, d'autre part parce que la méthode semble très sensible aux erreurs de mesure sur la géométrie du domaine d'étude.

Ce travail qui est l'aboutissement et l'application pratique d'une série d'études antérieures est aussi le point de départ de recherches à venir sur l'amélioration de la technique proposée. Ces recherches pourraient porter en particulier :

- sur la réduction du temps de calcul par optimisation de la programmation ;
- sur l'amélioration de la résolution spatiale par augmentation du nombre d'harmoniques utilisées ;
- sur la réduction des artefacts en introduisant d'autres techniques de régularisation à plusieurs niveaux du traitement ;
- sur la correction pratique de l'absorption qui permettrait de faire de la tomographie d'émission une technique quantitative.

Nous souhaitons en effet que ce travail soit poursuivi et puisse contribuer au développement pratique de la tomographie d'émission dont les résultats cliniques sont prometteurs.

