

V

B U
SCN 66
25

UNIVERSITE de NANCY - FACULTE Des SCIENCES

THESE

PRESENTEE à la FACULTE des SCIENCES de NANCY

pour obtenir le titre de

DOCTEUR de SPECIALITE en MATHEMATIQUES

(mention MATHEMATIQUES APPLIQUEES)

par

Jacques JOLY



Utilisation des graphes dans des problèmes d'analyse et de
classement de Structures Sociales

Soutenu le 27 juin 1966 devant la Commission d'Examen:

M. LEGRAS

Président

M. DEPAIX

M. LESNE

Examineurs

UNIVERSITE de NANCY - FACULTE Des SCIENCES

THESE

PRESENTEE à la FACULTE des SCIENCES de NANCY

pour obtenir le titre de

DOCTEUR de SPECIALITE en MATHEMATIQUES

(mention MATHEMATIQUES APPLIQUEES)

par

Jacques JOLY



Utilisation des graphes dans des problèmes d'analyse et de
classement de Structures Sociales

Soutenue le 27 juin 1966 devant la Commission d'Examen:

M. LEGRAS Président

M. DEPAIX Examineurs
M. LESNE

Doyen : M. AUBRYAssesseur : M. GAYDoyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - URION - ROUBAULT.Professeurs honoraires : MM. CROZE - RAYBAUD - LAFITTE - LERAY - JULY - LAPORTE - EICHHORN - GODEMENT - DUBREUIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMANN - LONGCHAMBON - LEFORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHL.Maîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET.PROFESSEURS

MM.

| | | | |
|----------|---------------------------------|-------------|---------------------------------------|
| URION | Chimie biologique | * MALAPRADE | Chimie |
| DELSARTE | Analyse supérieure | MANGENOT | Botanique |
| ROUBAULT | Géologie | GAYET | Physiologie |
| CHAPELLE | Mécanique rationnelle | BONVALET | Mécanique appliquée |
| VEILLET | Biologie animale | HADNI | Physique |
| BARRIOL | Chimie théorique | * BASTICK | Chimie |
| BIZETTE | Physique | * KERN | Minéralogie |
| GUILLIEN | Electronique | DUCHAUFOR | Pédologie |
| GIBERT | Chimie physique | GARNIER | Agronomie |
| LEGRAS | Mécanique rationnelle | * WEPPE | Minéralogie appliquée |
| BOLFA | Minéralogie et cristallographie | NEEL | Chimie organique industrielle |
| NICLAUSE | Chimie | BERNARD | Géologie appliquée |
| FAIVRE | Physique appliquée | * CHAMPIER | Physique |
| AUBRY | Chimie minérale | * GAY | Chimie biologique |
| COPPENS | Radiogéologie | * REGNIER | Physico-chimie |
| DUVAL | Chimie | STEPHAN | Zoologie |
| FRUHLING | Physique | * CONDE | Zoologie |
| HILLY | Géologie | * WERNER | Botanique |
| LE GAFF | Génie chimique | EYMARD | Calcul différentiel et intégral |
| SUHNER | Physique expérimentale | LEVISALLES | Chimie organique |
| CHAPON | Chimie biologique | Mme HERVE | Méthodes mathématiques de la physique |
| HEROLD | Chimie minérale industrielle | | Mécanique physique |
| SCHWARTZ | Exploitation minière | * GOSSE | Physique |
| | | FELDEN | |

ANNEE SCOLAIRES 1965-1966

* Professeur titulaire à titre personnel

Ce travail n'aurait certainement jamais pu être entrepris sans la très large compréhension de Monsieur le Professeur Legras, directeur du Centre de Calcul de Nancy, il n'aurait pu être mené à bien non plus, sans les conseils de Monsieur le Professeur Depaix qui a bien voulu s'y intéresser.

Je tiens également à remercier Monsieur Lévi Strauss, Professeur au Collège de France, qui, à plusieurs reprises, m'a fourni de précieuses indications, Monsieur Barbut, Directeur d'Etudes à L'Ecole Pratique des Hautes Etudes, qui m'a encouragé dans cette voie de recherche dès le départ, et Monsieur Lesne, Professeur à la Faculté des Lettres de Nancy qui a accepté de participer au jury.

Introduction.

Quand on s'interroge sur les aspects d'une oeuvre d'art, on retient fréquemment parmi eux celui d'instrument de communication. Les dessins, les tableaux sont des moyens d'expression parmi d'autres.

Il est ensuite extrêmement banal de constater que ces instruments de communication ne sont pas utilisés n'importe où, n'importe comment ; il existe des styles, des écoles où les spécialistes rangent ces oeuvres d'art.

Les critères retenus pour ces travaux de classement sont très nombreux, mais presque toujours, pourrait-on dire, se placent à la "surface" de l'oeuvre d'art. On peut se demander si, tenant compte des résultats généraux de ces études, il n'est pas possible de chercher sous les apparences, sous les styles, les procédés, par lesquels s'organisent les multiples caractères formels qui donneront un dessin.

Nous sommes donc conduits à chercher une méthode d'analyse de l'organisation d'une oeuvre plastique.

Dans cette méthode, d'une part, nous voulons introduire le minimum d'éléments d'appréciation subjective (ce que nous avons appelé le domaine de la "surface", en précisant bien qu'il n'est pas dans nos objectifs) ; d'autre part, les éléments conservés, doivent permettre des comparaisons et par suite donner naissance à des procédés de classement, grâce auxquels l'appartenance de telle oeuvre d'art à telle école c'est-à-dire finalement à un certain groupe social se trouvera justifiée.

Réciproquement nous aurons, par la découverte de ces moyens d'organisation, attribué certains caractères au groupe social dont la connaissance se trouvera ainsi améliorée.

Toutefois, on ne saurait raisonnablement parler d'un progrès dans la connaissance des modes d'organisation d'un groupe social en se limitant à l'étude d'un seul type d'activité, ici l'activité artistique. D'autres travaux sont nécessaires : Examen des types d'organisation économique, familiale, linguistique etc... et des confrontations, des comparaisons entre ces travaux s'imposent.

Il s'ensuit pour nous, le besoin d'adapter la méthode d'analyse cherchée à ces investigations dans des domaines très divers, elle doit donc offrir un caractère de généralité, c'est-à-dire se placer à un niveau où les

qualités particulières des phénomènes étudiés ne jouent plus.

Nous rejoignons ici les préoccupations de nombreux chercheurs et très particulièrement celles de M. Levi Strauss dont le texte cité ci-dessous révèle d'ailleurs le chemin dans lequel nous nous engagerons.

"L'objet de l'analyse structurale comparée n'est pas la langue française ou la langue anglaise, mais un certain nombre de structures que le linguiste peut atteindre à partir de ces objets empiriques et qui sont, par exemple, la structure phonologique du français, ou sa structure grammaticale, ou sa structure lexicale ou même celle du discours, lequel n'est pas absolument indéterminé. A ces structures, je ne compare pas la société française ni même la structure de la société française, ..., mais un certain nombre de structures que je vais chercher là où il est possible de les trouver et pas ailleurs : dans le système de parenté, l'idéologie politique, la mythologie, le rituel, l'art, le "code" de la politesse, et - pourquoi pas ?- la cuisine. C'est entre ces structures qui sont toutes des expressions partielles - mais privilégiées pour l'étude scientifique - de cette totalité qu'on appelle la société française, anglaise ou autre, que je recherche s'il existe des propriétés communes." (1)

Enfin, on ne saurait négliger l'intérêt offert par l'étude comparée d'un même type d'activité dans un certain groupe social à des moments différents ou dans des groupes distincts.

On doit donc demander à une méthode d'analyse d'être capable d'interpréter les différences constatées entre des coupes pratiquées à de multiples niveaux. Il serait donc bon que cette méthode contienne l'étude des transformations assurant le passage d'un niveau à un autre. Citons de nouveau ici M. Levi Strauss qui, ayant formulé (avec certaines réserves) l'hypothèse suivante : "Divers aspects de la vie sociale (y compris l'art et la religion) ne consistent-ils pas en phénomènes dont la nature rejoint celle même du langage" pense pouvoir la vérifier ainsi "qu'on limite l'examen à une seule société, ou qu'on l'étende à plusieurs, il faudra pousser l'analyse des différents aspects de la vie sociale assez profondément pour atteindre un niveau où le passage deviendra possible de l'un à l'autre ; c'est-à-dire élaborer une sorte de code universel capable d'exprimer les propriétés communes aux structures spécifiques relevant de chaque aspect : l'emploi de ce code devra être légitime pour chaque système puis isolément et pour tous quand il s'agira de les comparer. On se mettra ainsi en position de savoir si l'on a atteint leur nature la plus profonde et s'ils consistent ou non en réalités du même type." (2)

Il est évident que le travail présenté ici, ne prétend pas répondre à des exigences aussi fondamentales. Il s'agit plus simplement d'une tentative pour traduire des ensembles d'éléments formels organisés (des

dessins) en terme de structures, pour chercher une représentation graphique de ces structures et enfin pour essayer d'analyser et de hiérarchiser ces représentations graphiques. On s'est efforcé toutefois de trouver une méthode qui ne se borne pas au plan limité de l'activité artistique.

Précisons d'abord ce que nous entendons par structure : le système complexe des liaisons, des relations existant entre les propriétés caractéristiques de l'objet d'étude.

La première étape consistera donc en la différenciation de ces propriétés caractéristiques et en la description des liaisons constatées. De la valeur de cette première étape dépend l'efficacité de la méthode utilisée. Mais cette première partie descriptive peut s'efforcer d'être aussi fidèle que possible. Nous verrons dans le dernier chapitre qu'il n'est pas du tout nécessaire de simplifier l'enchevêtrement complexe des liaisons ; de plus, on s'épargne, à ce niveau les hypothèses plus ou moins fondées qui s'imposent avant tout traitement numérique des faits dans les sciences humaines.

Ces structures, nous les représentons par des graphes : des ensembles de points (les sommets) et de segments de droites (les arêtes)

Dans le premier chapitre nous indiquons sur l'exemple particulier qui constitue notre point de départ : l'étude de dessins d'indigènes de la Terre d'Arnhem en Australie du Nord, les procédés utilisés pour construire un graphe. Il va sans dire, qu'il ne s'agit là que d'un exemple, chaque problème nécessite certainement des procédés distincts.

Un second chapitre se limite à la recherche de quelques repères, permettant de situer les dessins les uns par rapport aux autres et de distinguer par la même les groupes sociaux auxquels appartiennent les auteurs des dessins.

Avec les deux chapitres suivants nous nous efforçons de généraliser nos méthodes d'interprétation de graphes, afin de répondre, en partie, aux exigences évoquées précédemment. Une des difficultés essentielles, provient du fait que nous sommes conduits à comparer globalement des graphes entièrement donnés par les analyses précédentes et non à chercher les formes idéales auxquelles doivent se soumettre tel, ou tels graphes.

(1) Cl. Levi Strauss : Anthropologie structurale p. 96

(2) " " " p. 71

Dans le dernier chapitre, nous indiquons la façon dont on peut concevoir les transformations d'un graphe en un autre, ce qui implique donc une certaine mesure de l'évolution des structures, avec cette réserve importante que les transformations proposées ne peuvent rendre compte de tous les aspects des graphes.

Seules des études et des applications ultérieures permettraient de dire si les catégories, les classes retenues caractérisent avec assez de précision les relations existant réellement entre structures diverses.

chapitre I

L'examen des systèmes d'organisation d'éléments formels mis en oeuvre dans chaque dessin nous a conduit, avons-nous dit, à construire un graphe par dessin. Cette construction se fait en 2 étapes.

La première consiste à identifier dans le dessin, considéré comme un ensemble de taches colorées de contours variés, quelques groupes de taches possédant simultanément quelques propriétés bien définies. On décomposera ainsi le dessin en plusieurs sous-ensembles de taches et nous travaillerons désormais sur ces sous-ensembles, ce qui réduira d'autant la multiplicité des éléments possibles d'un dessin.

Pour fonder l'appartenance à un même sous-ensemble, on retient les propriétés suivantes :

- contours analogues
- teintes analogues
- proportions semblables

Quand nous parlons de contours et de teintes analogues, nous faisons déjà intervenir quelques résultats de la deuxième étape.

Dans celle-ci, en effet nous dressons une liste des éléments formels susceptibles de caractériser assez complètement l'un de nos dessins. Il est évident que cette liste dépend du type de dessins rencontré et qu'elle devrait très probablement être modifiée si l'on avait affaire à des dessins entièrement différents.

Pour notre part la liste comprend

- 1) les éléments de définition de contours : contours rectilignes, contours courbes
- 2) les éléments de définition de teintes : teintes plates, rayures
- 3) Les modes de relations entre teintes : contraste, harmonie, uniformité.
- 4) Les caractéristiques de position, elles mêmes envisagées à 2 niveaux
 - a- un niveau immédiat, élémentaire, (position d'une tache dans l'ensemble du dessin)
nous retiendrons alors les 2 caractéristiques suivantes
juxtaposition
non juxtaposition
 - b- un niveau "relationnel" : rôle joué par la position d'une tache vis-à-vis d'autres groupes de taches.

Ce seront les caractéristiques de symétrie

- { possédant un axe de symétrie
- { constituant un axe de symétrie

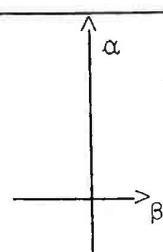
et d'inclusion

- { contenant
- { contenu

5) Enfin à la rubrique précédente on peut rattacher les directions suivant lesquelles s'ordonnent les caractéristiques de position. Dans notre série de dessins ce sont essentiellement les directions horizontales et verticales.

Si maintenant, nous faisons correspondre un point, (un sommet) distinct à chaque élément formel de la liste précédente et si chaque fois qu'un sous-ensemble possède simultanément deux des éléments de cette liste, nous joignons les points correspondants par un segment de droite (une arête) alors en passant en revue tous les sous-ensembles, nous fabriquerons progressivement un graphe par dessin.

Soient donc : a, b, c, ..., α, β les sommets du graphe identifiés d'après le tableau suivant.

| contours | | teintes | | Relations entre teintes | | Positions | | | Directions | | |
|------------|-------------|---------|-----------|-------------------------|---------|---------------|---|------------------------------|------------|--|---|
| courbes | a | plates | c | contraste | e | juxtaposition | h | Possédant un axe de symétrie | j |  | |
| | rectilignes | | | b | rayures | | | | | | d |
| uniformité | | g | contenant | | | l | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | contenu | m | | |

Considérons par exemple le dessin de la page 9 (reproduction extraite de l'ouvrage de K KUPKA page 160), le sous-ensemble de taches de forme ovale désigné par a_1 possède simultanément les propriétés a et c (contours courbes, teintes plates) nous le mentionnerons donc sur l'arête ac. Puis on cherche les autres caractéristiques formelles appartenant à a_1 , ce qui nous conduit à faire suivre par a_1 le chemin c g i j α. Ceci fait, nous recommençons avec un autre sous-ensemble a_2 par exemple, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les sous-ensembles du dessin soient passés en revue.

Finalement sur chaque arête du graphe obtenu, figure une liste de sous-ensemble, dont le nombre indique le nombre de fois où l'association entre les 2 sommets adjacents à cette arête est réalisée par les sous-ensembles du dessin. Oubliant l'identification des sous-ensembles, on portera simplement ce nombre sur l'arête, on passe ainsi du graphe 1 au graphe 1'. Nous réduirons celui-ci, en ne conservant plus que les arêtes dont la "valeur" (c'est-à-dire finalement le nombre d'arêtes parallèles joignant les sommets considérés) est supérieure ou égale à la moyenne de la répartition des valeurs des arêtes dans le graphe. Pour le graphe 1' cette répartition est : 6 arêtes de valeur 1 ; 4 de 2 ; 5 de 3 ; 6 de 4 ; 1 de 5 ; 1 de 6.

Ou encore

$1^6, 2^4, 3^5, 4^6, 5, 6.$

La moyenne $m = 2,7 \approx 3$

Ce qui nous permet de passer au graphe 1''

Remarque : Dans ce graphe, les sommets k, l et m ne sont jamais atteints.

Pages 11 et 12 nous donnons un second exemple de construction de graphe : Ici le sous-ensemble a_1 formé des bandes obliques de teinte plate de la partie droite du dessin suit ¹ le chemin : b, c, e, i, α c'est-à-dire : contours rectilignes, teintes plates, teintes contrastées, non juxtaposition, direction verticale (Il s'agit de la direction selon laquelle sont disposés les éléments du sous-ensemble a_1)...

Puis en procédant de même que pour le graphe 1, on obtiendra les graphes 2' et 2''.

Nous avons utilisé cette méthode avec une quinzaine de dessins qui sont reproduits en Annexe, ainsi que les graphes correspondants.

Les graphes réduits sont d'autre part regroupés dans les planches I, II, et III chaque planche rassemblant les dessins d'artistes appartenant à un clan déterminé

Planche I : groupe 1 (g_1) : clan des Waramini

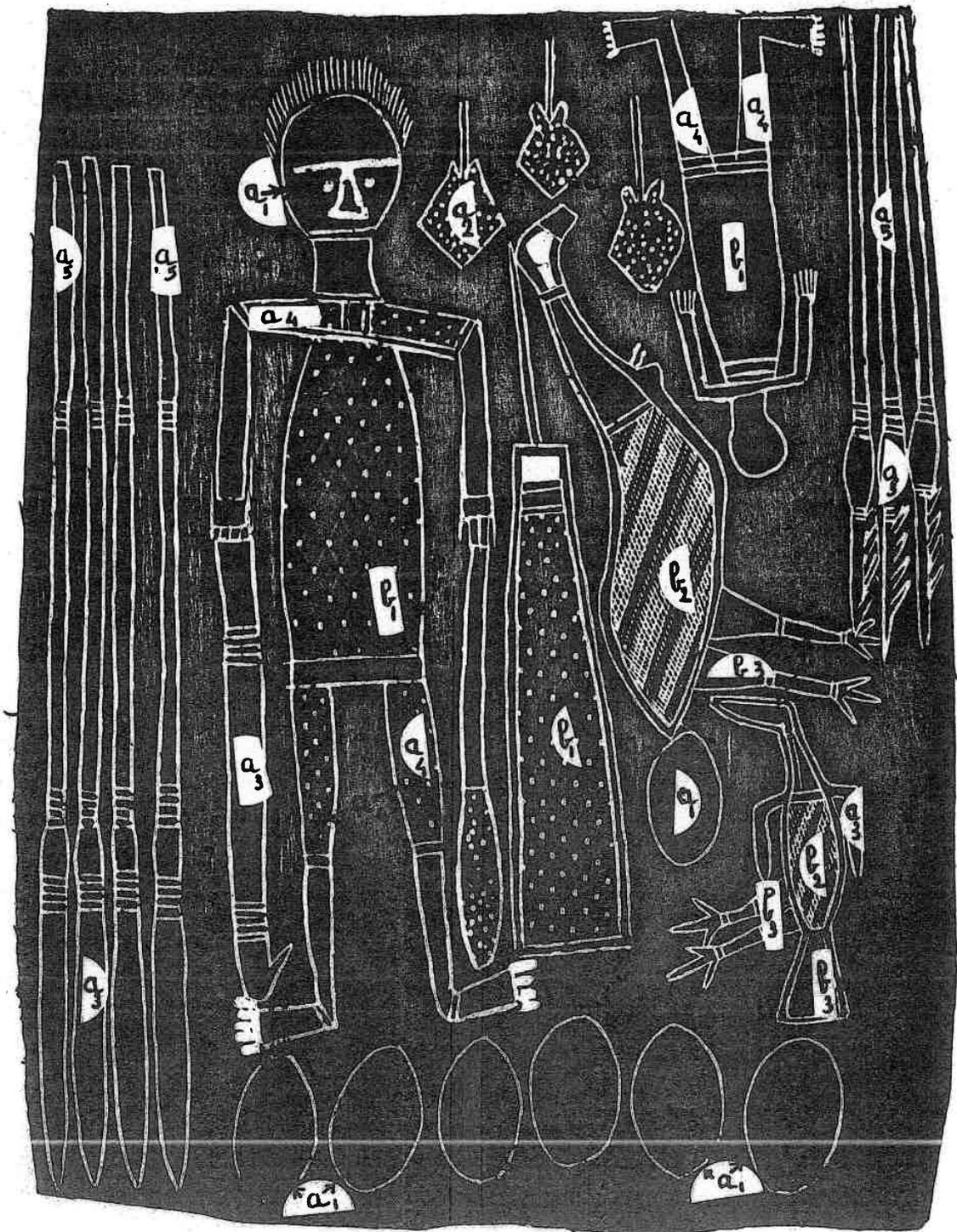
Planche II : groupe 2 (g_2) : clan des Riradjingo

Planche III : groupe 3 (g_3) : clan des Gubabuingu

Les chiffres portés en face de chaque graphe renvoient aux pages du livre de K. KUPKA.

En présence de ces suites de graphes, le problème est maintenant de les analyser. En effet sur chacune des planches, ils semblent présenter certaines similitudes de formes. Il s'agit donc de voir si on peut aller plus loin que cette apparence de similitude, s'il est possible de trouver des facteurs communs aux graphes d'un même groupe ethnique et en quoi ces facteurs communs diffèrent d'un groupe à l'autre.

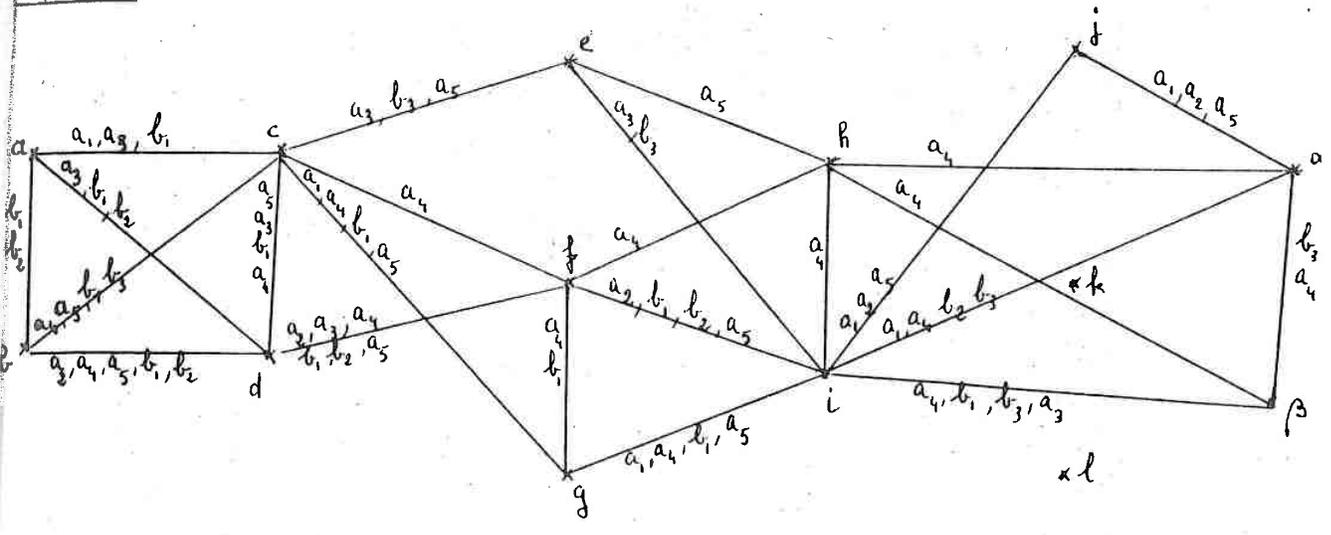
Cet essai fera l'objet des 3 chapitres suivants.



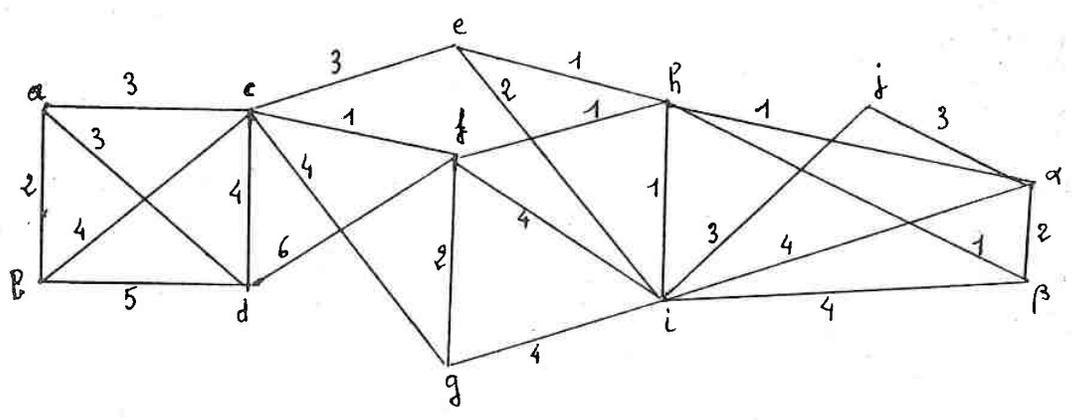
aphc



apte 1

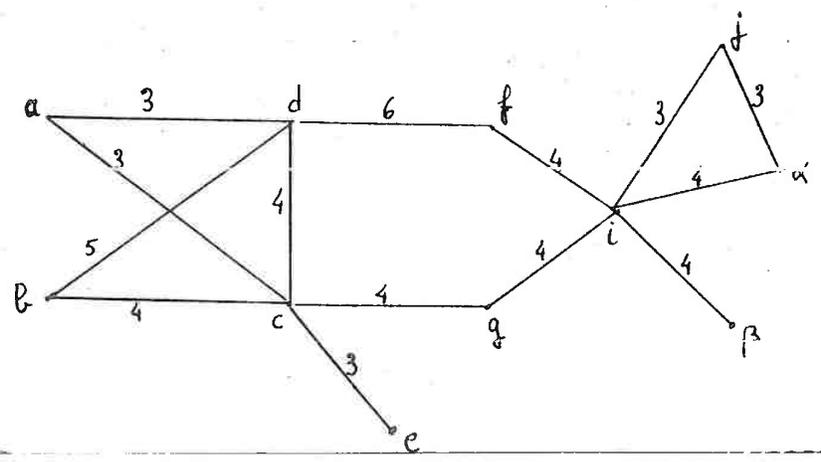


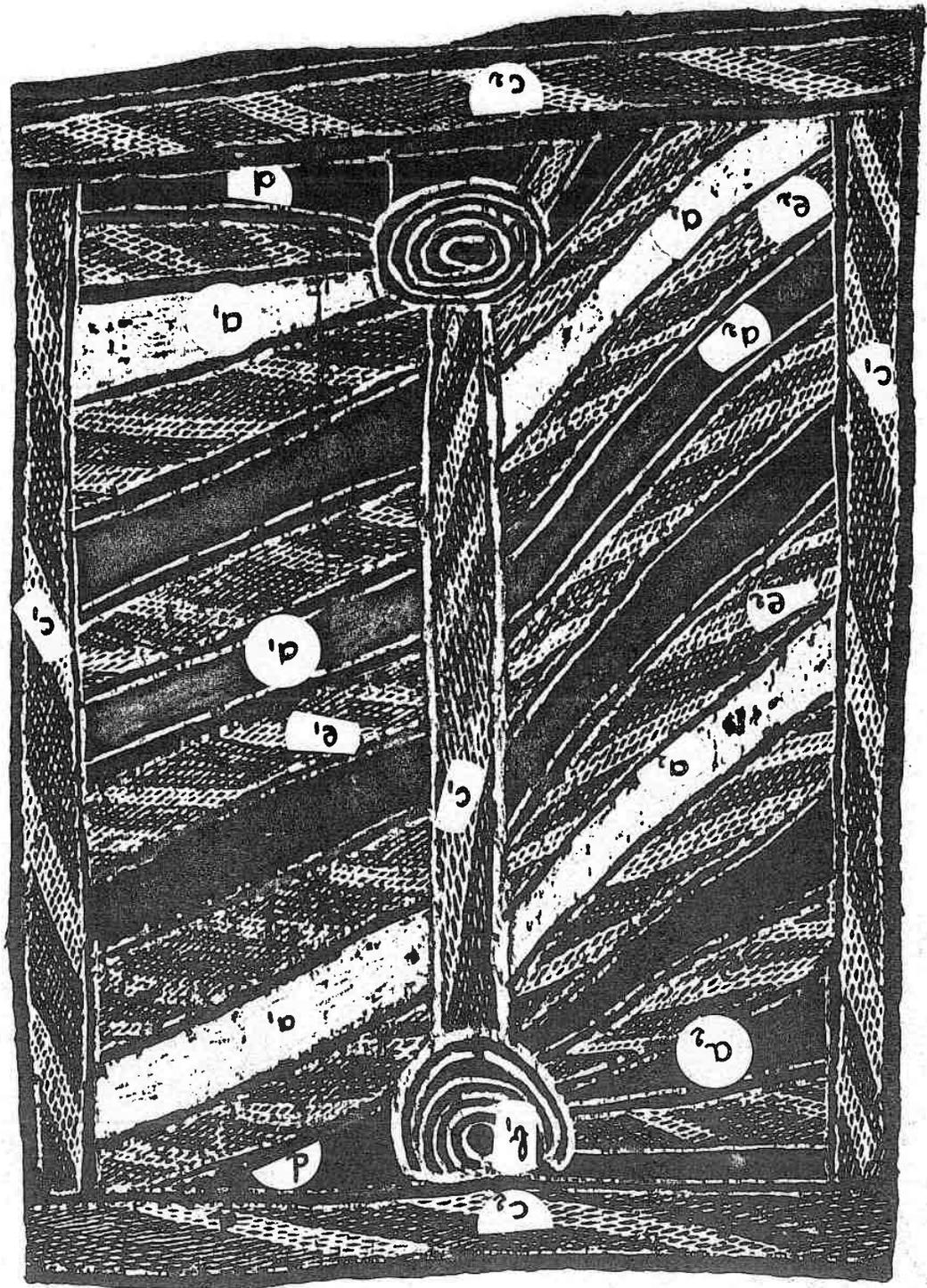
x l
x m



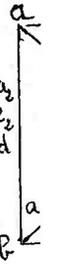
$$m = 2, 7 \approx 3$$

1¹⁰



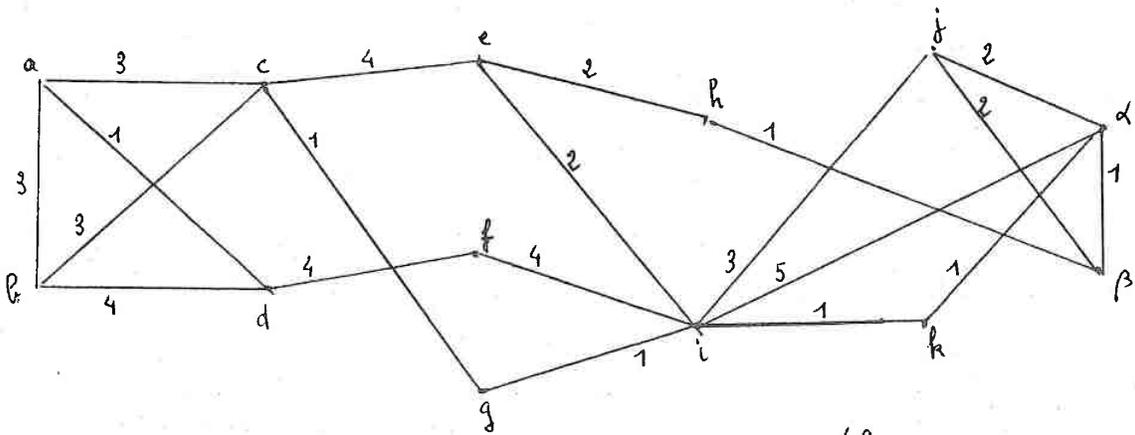
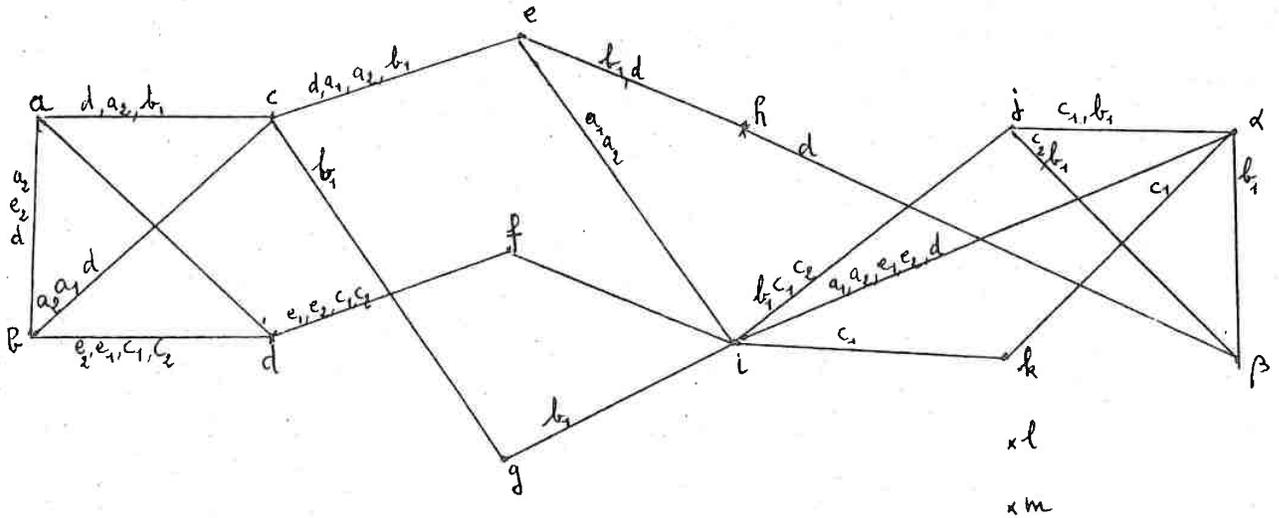


a phe



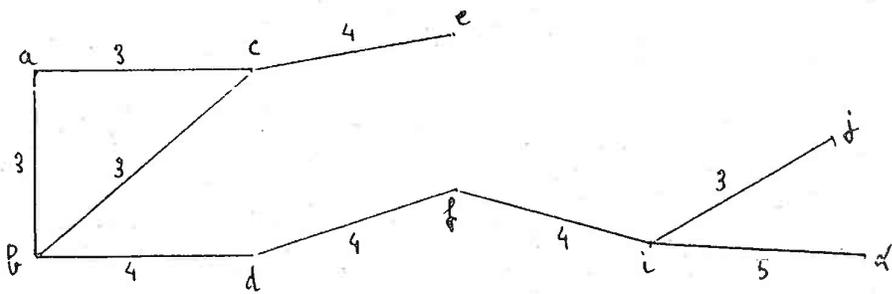
2 11

aphe 2



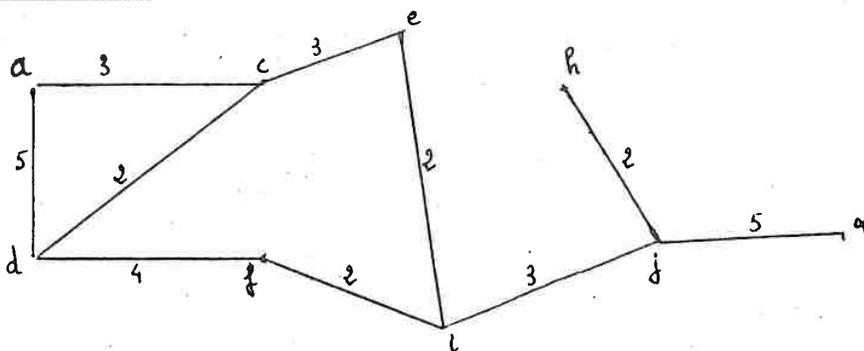
$$m = \frac{49}{20} = 2,5$$

2 RA



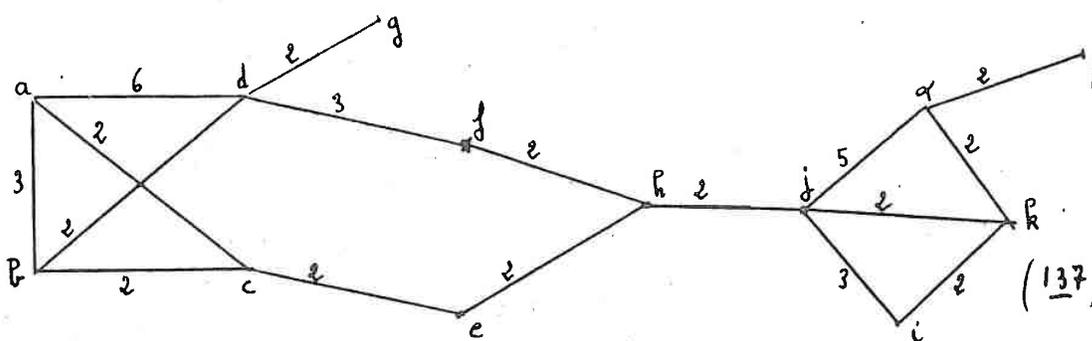
type 1 (Waramini)

136



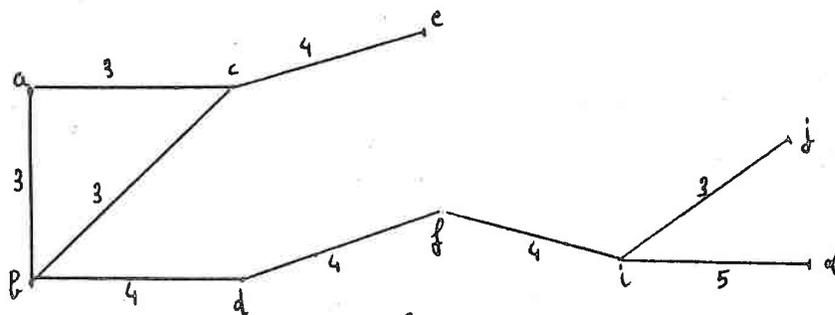
(136)

137



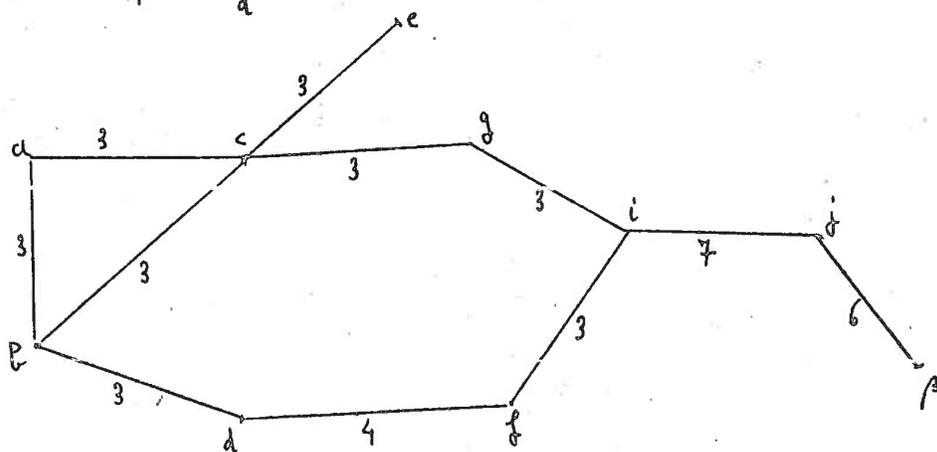
(137)

138



(138)

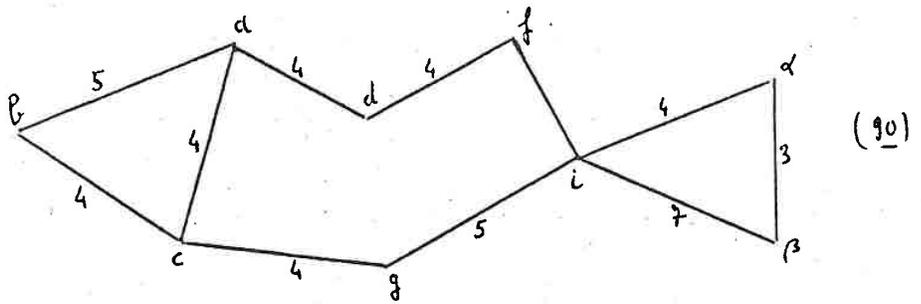
171



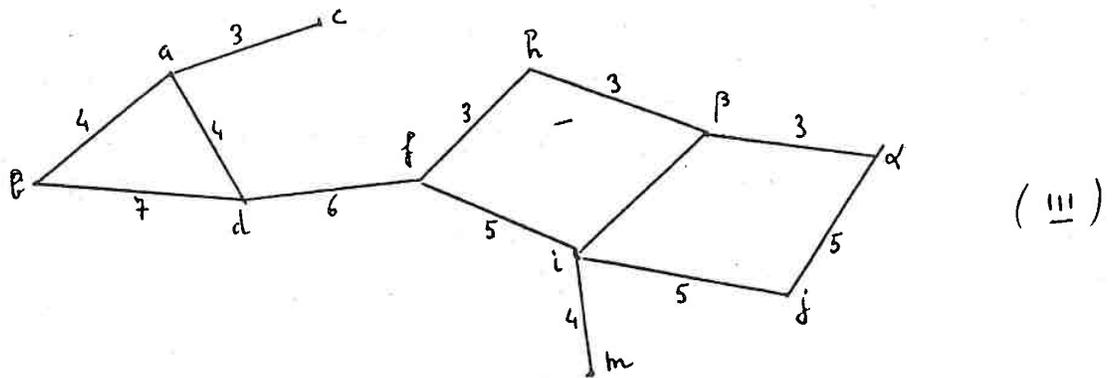
(171)

pe 2 (Riradjingo)

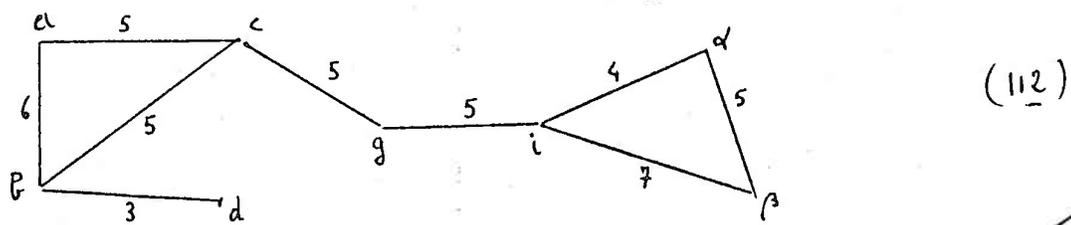
90



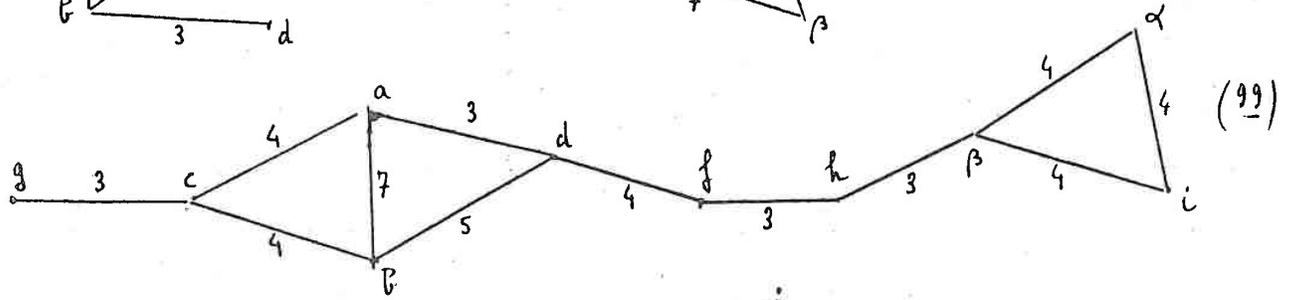
111



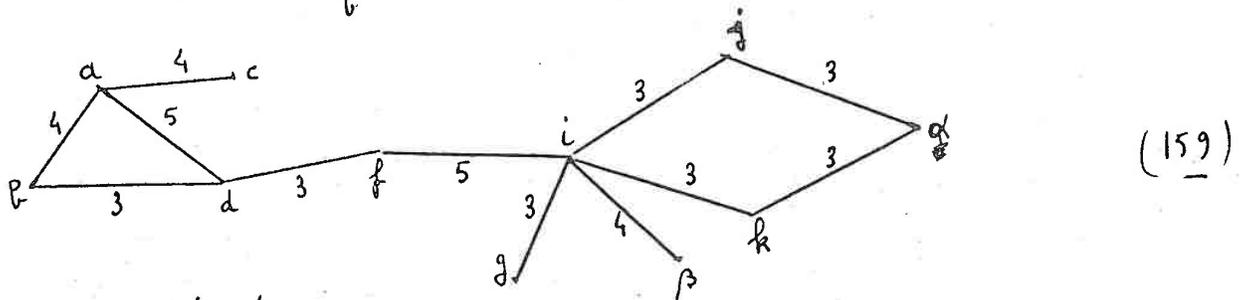
112



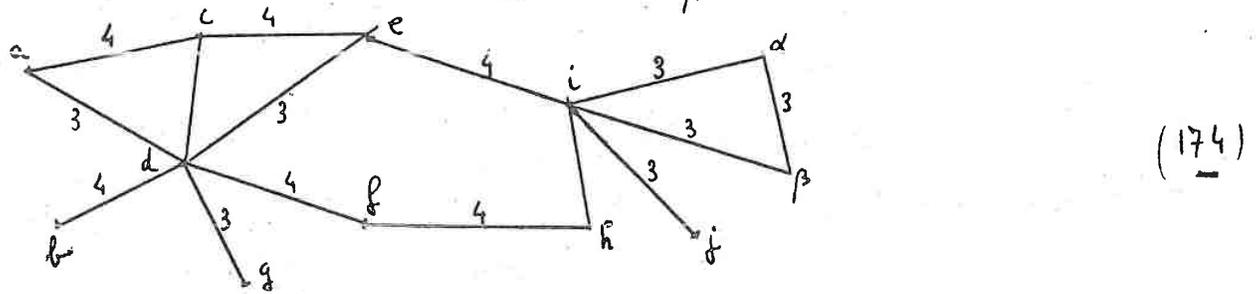
99



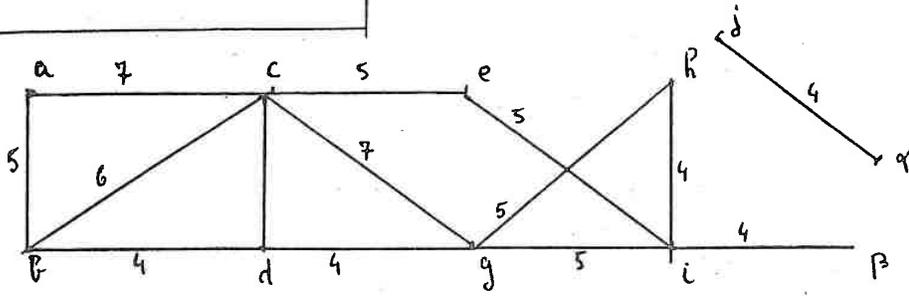
159



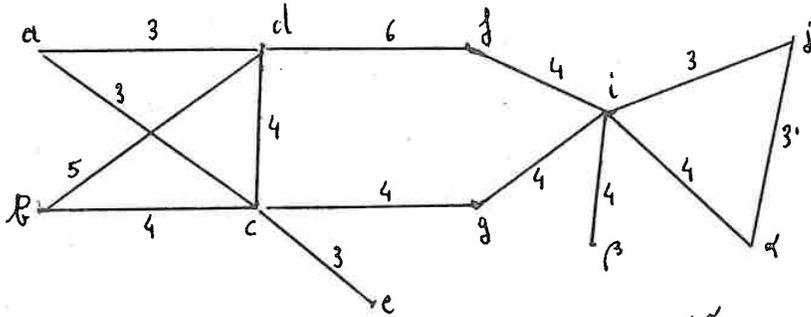
174



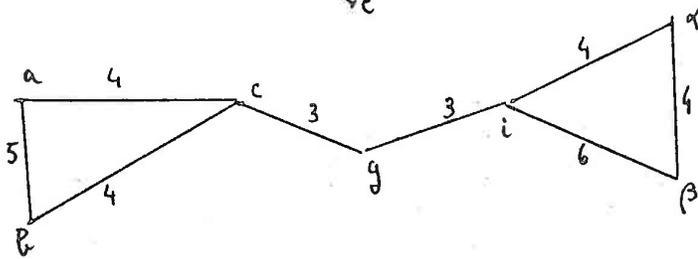
oupe 3 (gubabuing)
g₃



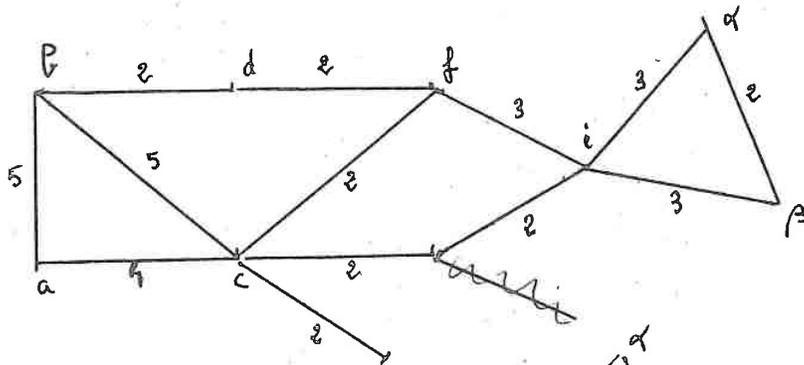
(123)



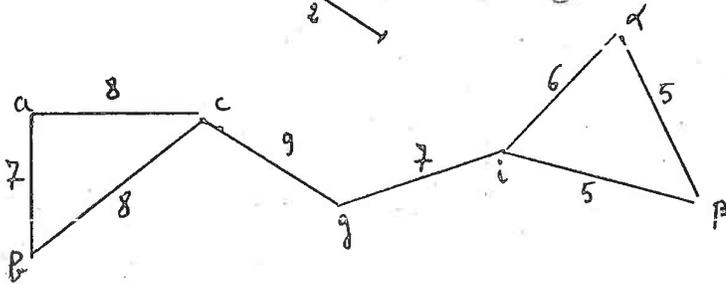
(124)



(160)



(187)



(149)

Chapitre II : Méthode des indices.

Rappelons l'hypothèse qui nous a conduit à substituer un graphe à chaque dessin : Avant d'entreprendre son oeuvre, l'artiste dispose d'un certain nombre de moyens d'expression plastique. Pour un groupe social donné, ces moyens ne sont pas en nombre infini, et un premier examen des dessins permet d'en dresser une liste, partielle il est vrai, mais réunissant toutefois les plus importants.

La composition de l'oeuvre réalise, une série, un ensemble de liaisons entre ces moyens d'expression plastique - ensemble que la structure du graphe doit reproduire.

Le graphe donne ainsi une image de l'activité de synthèse de l'artiste : Nature des associations réalisées, nombre d'associations distinctes, nombre d'associations ayant un point commun.

Précisons que pour construire les graphes précédents, nous n'avons jamais voulu tenir compte de la signification des dessins, bien au contraire, même lorsque les objets représentés sont très facilement reconnaissables, on s'efforce de les traiter comme de simples taches colorées où jouent seulement les éléments formels énumérés.

Parvenu à ce stade, on doit se demander s'il convient de tenir compte ou non des différences de nature entre les sommets du graphe. En effet, si l'on désire évaluer les articulations des moyens utilisés dans l'expression artistique d'un groupe social, avec l'intention de comparer ensuite cette évaluation à celles obtenues à propos d'autres types d'expression, (en donnant à l'expression son sens le plus large) il n'est plus possible de distinguer les propriétés retenues à propos de chaque mode d'expression, sinon aucune comparaison ultérieure ne pourra se faire.

Donc, ignorer la nature des sommets, revient à n'étudier que le travail d'associations, de combinaisons, exécuté dans l'activité artistique. Supposons ce point de vue admis. Il nous faut distinguer les graphes (pris globalement) les uns des autres.

La première méthode consiste à isoler certaines caractéristiques importantes des graphes et à les introduire en indices. On obtiendra ainsi des suites d'indices de même nature pour chaque groupe social et on pourra faire une première comparaison entre ces diverses suites.

1) Indice F.

Nous avons vu qu'à chaque arête correspond une valeur, une "intensité" indiquant le nombre de sous-ensembles qui possèdent simultanément les deux propriétés (Sommets joints par l'arête)
D'une arête à l'autre, sur un même graphe, cette intensité varie.
On calculera donc sa valeur moyenne repérée par l'indice F.

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

.../..

avec i_1 = valeur de l'intensité sur l'arête i
 n = nombre d'arêtes dans le graphe.

On peut estimer que F fournit une mesure de la répétition des liaisons dans l'organisation formelle du dessin; Par exemple, répétition de l'association de contours courbes avec des teintes plates, ou encore de la juxtaposition d'éléments d'un sous-ensemble avec l'existence d'un axe de symétrie dans ce sous-ensemble.

Les valeurs de F sont groupées dans le tableau n° 1.

Tableau n° 1

| groupe 1 | | groupe 2 | | groupe 3 | |
|-----------------------------|-----|-----------------------------|-----|-----------------------------|-----|
| N° ^s des dessins | F | N° ^s des dessins | F | N° ^s des dessins | F |
| 136 | 3 | 112 | 5 | 123 | 5 |
| 137 | 2,4 | 90 | 4,3 | 124 | 7 |
| 138 | 3,6 | 99 | 4 | 160 | 3,8 |
| 171 | 3,8 | 111 | 4,3 | 87 | 4,2 |
| | | 174 | 3 | 149 | 3 |
| | | 159 | 3 | | |
| moyenne des valeurs de F | 3,2 | | 3,9 | | 4,6 |

Il y a incontestablement de nombreux chevauchements des valeurs de F d'un groupe à l'autre. Toutefois, si on calcule une nouvelle moyenne, celle des valeurs de F à l'intérieur de chaque groupe, on obtient des chiffres distincts : 3,2 pour le groupe 1; 3,9 pour le groupe 2; 4,6 pour le groupe 3. D'autre part, le dernier groupe qui possède la moyenne de F la plus élevée, est aussi celui pour lequel les écarts entre F, c'est-à-dire entre indices de répétition, sont les plus grands. On peut évidemment songer à utiliser certains tests pour apprécier la significativité des écarts de moyennes d'un groupe à l'autre. Par exemple, le t de Student montre que l'écart des moyennes n'est pas significatif entre les groupes 1 et 2 ; 2 et 3 ; et l'est seulement entre 1 et 3.

De toutes façons, d'une part il ne saurait être question de départager les groupes sur une seule variable ; d'autre part les effectifs des séries de dessins dans chaque groupe sont bien trop réduits pour que l'on songe à en tirer des conclusions définitives.

Pour le moment, il nous semble plus important de rechercher si chaque indice suggère des conclusions concordantes, ce qui permettrait d'accorder un certain crédit à la méthode des indices.

2) Indice q

Une seconde caractéristique importante des graphes est fournie par les sauts de valeur de l'intensité de répétition d'une arête à l'autre. Soient 3 sommets, A, B, C. Si, sur l'arête A B est portée l'intensité 8, sur B C l'intensité 4, cela signifie que 8 sous-ensembles du dessin ont réalisé l'association A B, tandis que 4 seulement ont réalisé B C. (Notons tout de suite qu'entre A B et B C, il ne s'agit pas obligatoirement des mêmes sous-ensembles).

Nous cherchons donc à estimer une valeur moyenne de ces variations dans l'intensité de répétition. Elle peut nous donner une idée sur la façon dont les artistes d'un groupe social ont coutume de privilégier certains thèmes d'organisation formelle.

Pour ce faire, nous avons fabriqué un indice q, obtenu en calculant le rapport de la différence des intensités extrêmes à la valeur de F

Soient I : l'intensité la plus forte sur un graphe
i : l'intensité la plus faible

$$\text{Alors } q = \frac{I - i}{F}$$

Appliqué aux 3 groupes de graphes, le calcul de q donne le tableau n° 2

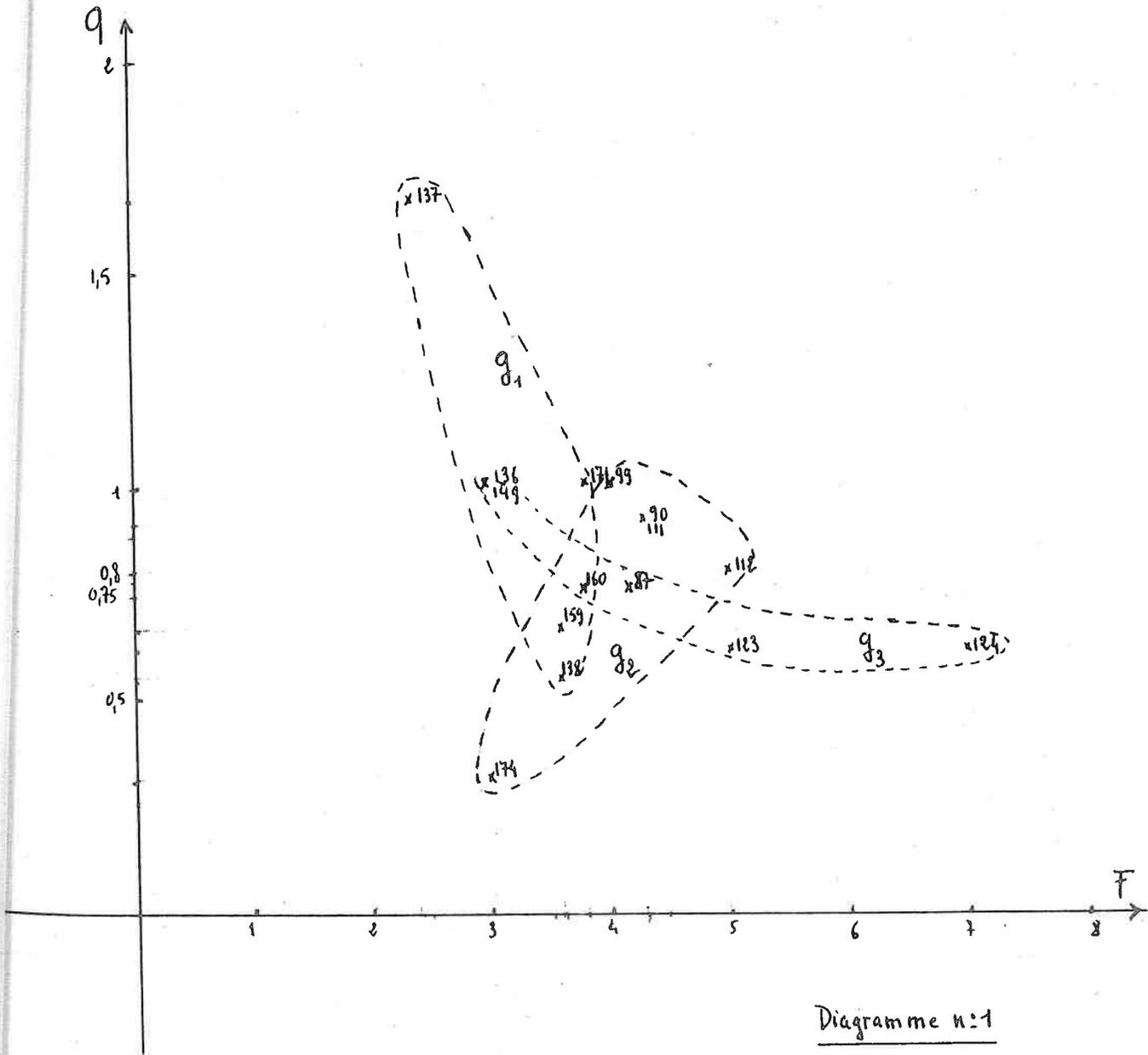
Tableau n° 2

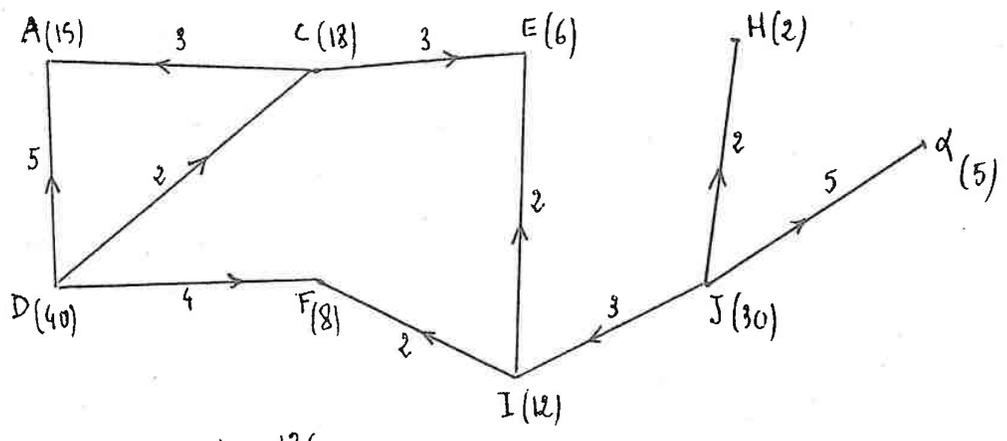
| groupe 1 | | groupe 2 | | groupe 3 | |
|--------------------------|------|-----------------|------|-----------------|------|
| N°s des dessins | q | N°s des dessins | q | N°s des dessins | q |
| 136 | 1 | 112 | 0,8 | 123 | 0,6 |
| 137 | 1,7 | 90 | 0,93 | 124 | 0,6 |
| 138 | 0,55 | 99 | 1 | 160 | 0,75 |
| 171 | 1 | 111 | 0,93 | 87 | 0,75 |
| | | 174 | 0,33 | 149 | 1 |
| | | 159 | 0,66 | | |
| moyenne des valeurs de q | 1,06 | | 0,77 | | 0,74 |

On constate que le groupe 3 où l'indice de répétition variait de façon notable est le plus stable pour l'indice de discontinuité, tandis que le groupe 1 relativement stable pour F admet les plus fortes variations pour q.

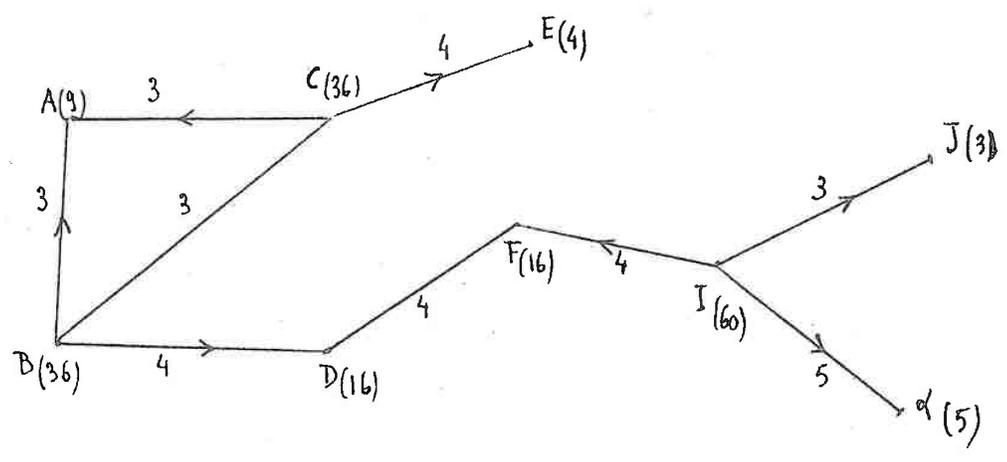
Nous avons traduit graphiquement cette double évolution sur le diagramme 1 où figurent sur les 2 axes les valeurs de F et de q.

.../...





graphe 136



graphe 138

(fig II, 1)

Le groupe 1 (g_1) est ainsi orienté presque verticalement, tandis que le groupe 3 (g_3) l'est horizontalement. Le groupe 2 (g_2) beaucoup plus concentré occupe une position médiane.

3) Indice B

Les indices F et q nous renseignent sur les répétitions d'associations entre couples de propriétés et sur leurs variations, ils ne nous apprennent rien sur la façon dont ces propriétés sont liées entre elles dans l'ensemble du graphe.

On cherche donc maintenant un indice susceptible de décrire la forme du graphe sans négliger les intensités de répétition. Cet objectif : décrire la forme d'un graphe, puis substituer à cette description un certain nombre de valeurs entre lesquelles pourront se faire des comparaisons, sources elles-mêmes d'une classification fera l'objet des prochains chapitres et en particulier du chapitre IV. Pour le moment, nous cherchons simplement un indice où intervienne la forme du graphe.

Soit donc le graphe n° 136 de la (fig. II, 1)

Considérons un sommet quelconque, par exemple le sommet A.

Il y a 3 chemins parallèles possibles pour aller de A en C et 5 chemins parallèles possibles pour aller de A en D, donc A est au centre de 15 associations possibles (C - A - D)

On peut évidemment renouveler ce calcul pour tous les sommets du graphe, ce qui nous conduit à faire correspondre à chaque sommet un nombre d'associations possibles baptisé "capacité d'associations" et désigné par C_X = capacité d'association du sommet X.

De façon générale

Si x_1, x_2, \dots, x_u sont les intensités des arêtes issues d'un sommet x alors $C_X = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_u$ (produit des x_i)

On introduit ensuite une orientation conventionnelle dans le graphe en supposant que pour 2 sommets adjacents (reliés par une arête), l'association se fera du sommet ayant la plus forte "capacité" vers celui où elle est le plus faible.

Par exemple, les graphes 136 et 138 de la (fig. II, 1) sont orientés suivant cette convention.

Cela revient à faire l'hypothèse d'un "courant d'association" qui partagera l'ensemble des sommets du graphe en sommets de transition, à partir desquels ou à travers lesquels passera ce "courant" et en sommets terminaux qui seront les points d'aboutissement du courant. Sur les exemples de la (fig. II, 1)

les sous-ensembles de sommets de transition comprennent

| | |
|------------------|--------------------|
| $\{D, C, I, J\}$ | dans le graphe 136 |
| $\{C - B, I\}$ | dans le graphe 138 |

Remarque : Dans ce dernier graphe (138) les sommets C et B ayant même

capacité d'association ne forment, du point de vue actuel, qu'un seul sommet.

Dans les sous-ensembles de sommets terminaux, on rangera

{A, E, F, α } graphe 136

{A, E, D-F, J α } graphe 138 (ici D-F liés pour ne former qu'un sommet terminal)

Dans un graphe ainsi orienté, considérons maintenant la probabilité d'associer un sommet à un sommet adjacent.

Ex. Dans le graphe 136 on se place sur le sommet C

De C, on peut aller vers A, vers E, mais non vers D puisque l'arête est orientée de D vers C, la probabilité d'aller de C en D est donc nulle. De C vers A, il y a 3 chemins possibles, de même de C vers E 3 chemins possibles.

Nous attribuerons donc aux parcours C A et C E les probabilités $\frac{1}{2}$. Ce calcul peut être fait avec tous les sommets du graphe et nous conduit à caractériser celui-ci par la matrice des probabilités de passage d'un sommet à un autre.

Les graphes se comportent désormais comme des chaînes de Markov avec ensemble ergodique (chaîne absorbante) ce qui nous permet d'utiliser les résultats de ces chaînes absorbantes et en particulier d'affirmer l'existence d'une matrice limite (quand le temps tend vers l'infini) des matrices de probabilités de passage des sommets de transition aux sommets terminaux.

Nous désignerons ces matrices limites par (B)

Nous donnons ci-dessous deux exemples de calcul de ces matrices (B), graphes 136 et 138.

Dans les matrices de probabilité de passage les sommets sont rangés en sous-ensemble ergodique (à gauche) puis en sous-ensemble de transition.

A côté, ou sous chaque sommet est indiquée la valeur de sa capacité d'association C_x . Enfin, ne figurent dans la matrice, que les valeurs de probabilité différentes de 0.

| A (15) | F (8) | E (6) | α (5) | H (2) | D (40) | J (30) | C (18) | I (12) |
|--------------|----------|----------|-----------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| A (15) 1 | | | | | | | | |
| F (8) | 1 | | | | | | | |
| E (6) | | 1 | | | | | 0 | |
| α (5) | | | 1 | | | | | |
| H (2) | | | | 1 | | | | |
| D (40) 5/11 | 4/11 | | | | | | 2/11 | |
| J (30) | | | 1/2 | 1/5 | | | | 3/10 |
| C (18) 1/2 | | 1/2 | | | | | | |
| I (12) | 1/2 | 1/2 | | | | | | |

Les probabilités se lisent en allant d'une ligne à la colonne correspondante.

exemple : probabilité d'aller de D en A = 5/11

D'un sommet ergodique, on ne peut que rester sur ce sommet, aussi le carré $(A, F, E, \alpha, H) \times (A, F, E, \alpha, H)$ ne comprend que des 1 sur la diagonale. De même d'un sommet ergodique on ne peut joindre un sommet de transition et par conséquent le rectangle $(A, F, E, \alpha, H) \times (D, J, C, I)$ ne comprend que des 0.
Le calcul donne les valeurs suivantes pour la matrice limite (B)

| (B) | A (15) | F (8) | E (6) | α (5) | H (2) |
|--------|-----------|----------|----------|-----------------|----------|
| D (40) | 6/11 | 4/11 | 1/11 | | |
| J (30) | | 3/20 | 3/20 | 1/2 | 1/5 |
| C (18) | 1/2 | | 1/2 | | |
| I (12) | | 1/2 | 1/2 | | |

Matrice de probabilités de passage du graphe (138)

| (138) | D-F (16) | A (9) | α (5) | E (4) | J (3) | I (60) | B-C (36) |
|--------------|-------------|----------|-----------------|----------|----------|-----------|-------------|
| D-F(16) | | | | | | | |
| A (9) | | | | | | | |
| α (5) | | | I | | | 0 | |
| E (4) | | | | | | | |
| J (3) | | | | | | | |
| I (60) | 1/3 | | 5/12 | | 1/4 | 0 | |
| B-C(36) | 2/7 | 3/7 | | 2/7 | | | |

De cette matrice, on passe à la matrice limite (B) du graphe 138

| (B) (138) | D-F | A | α | E | J |
|--------------|-----|-----|----------|-----|-----|
| I (60) | 1/3 | | 5/12 | | 1/4 |
| B-C (36) | 2/7 | 3/7 | | 2/7 | |

Les matrices correspondant aux autres graphes des 3 groupes étudiés sont données en annexe.

Nous voulons maintenant utiliser ces matrices (B) dans le cadre de la méthode des indices.

Pour ce faire, on extrait de chaque matrice la colonne dont la somme des termes est la plus élevée, cette somme devient l'indice B, il ne s'agit évidemment plus d'une valeur de probabilité, ce nombre est

d'ailleurs très souvent supérieur à l'unité, mais d'un indice qui nous permet de caractériser le sommet ergodique sur lequel, en venant du sous-ensemble des sommets de transition on a les plus grandes chances d'arriver. Autrement dit, on dégage ainsi la propriété ou la caractéristique du dessin vers laquelle, avec notre orientation conventionnelle d'association, on doit être conduit, et l'on fait correspondre une certaine valeur à cette propriété, valeur qui permettra les comparaisons.

Les résultats sont groupés dans le tableau n° 3 où l'on a également reproduit les valeurs de l'indice q

Tableau n° 3

| groupe 1 | | | groupe 2 | | | groupe 3 | | |
|------------------------------|------|------|------------------------------|------|------|------------------------------|------|------|
| N ^o s des dessins | B | q | N ^o s des dessins | B | q | N ^o s des dessins | B | q |
| 136 | 1;3 | 1 | 112 | 1,7 | 0,8 | 123 | 1,06 | 0,6 |
| 137 | 4,2 | 1,7 | 90 | 1,1 | 0,93 | 124 | 1,6 | 0,6 |
| 138 | 0,6 | 0,55 | 99 | 3,3 | 1 | 160 | 1,4 | 0,75 |
| 171 | 0,85 | 1 | 111 | 2,2 | 0,93 | 87 | 1,7 | 0,75 |
| | | | 174 | 1,7 | 0,33 | 149 | 1,7 | 1 |
| | | | 159 | 1 | 0,66 | | | |
| Moyenne | 1,73 | 1,06 | | 1,83 | 0,77 | | 1,49 | 0,74 |

De même que l'indice q, l'indice B traduit la complexité du graphe, mais avec B les écarts sont plus accentués, ceci est normal puisque l'on tient compte dans B des variations de ramification. Nous avons représenté graphiquement ces résultats sur les diagrammes 2 et 3

Le diagramme 2 ayant comme axes de références les axes B et F le diagramme 3 les axes B et q

Sur tous ces diagrammes, il semble bien que l'on puisse accorder au groupe 2 une position intermédiaire entre celles des groupes 1 et 3.

Ainsi, sous la réserve du nombre très limité de dessins étudiés dans chaque groupe, cette méthode des indices permettrait d'établir un classement entre les groupes situant les groupes 1 et 3 aux 2 extrêmes, le groupe 2 au centre.

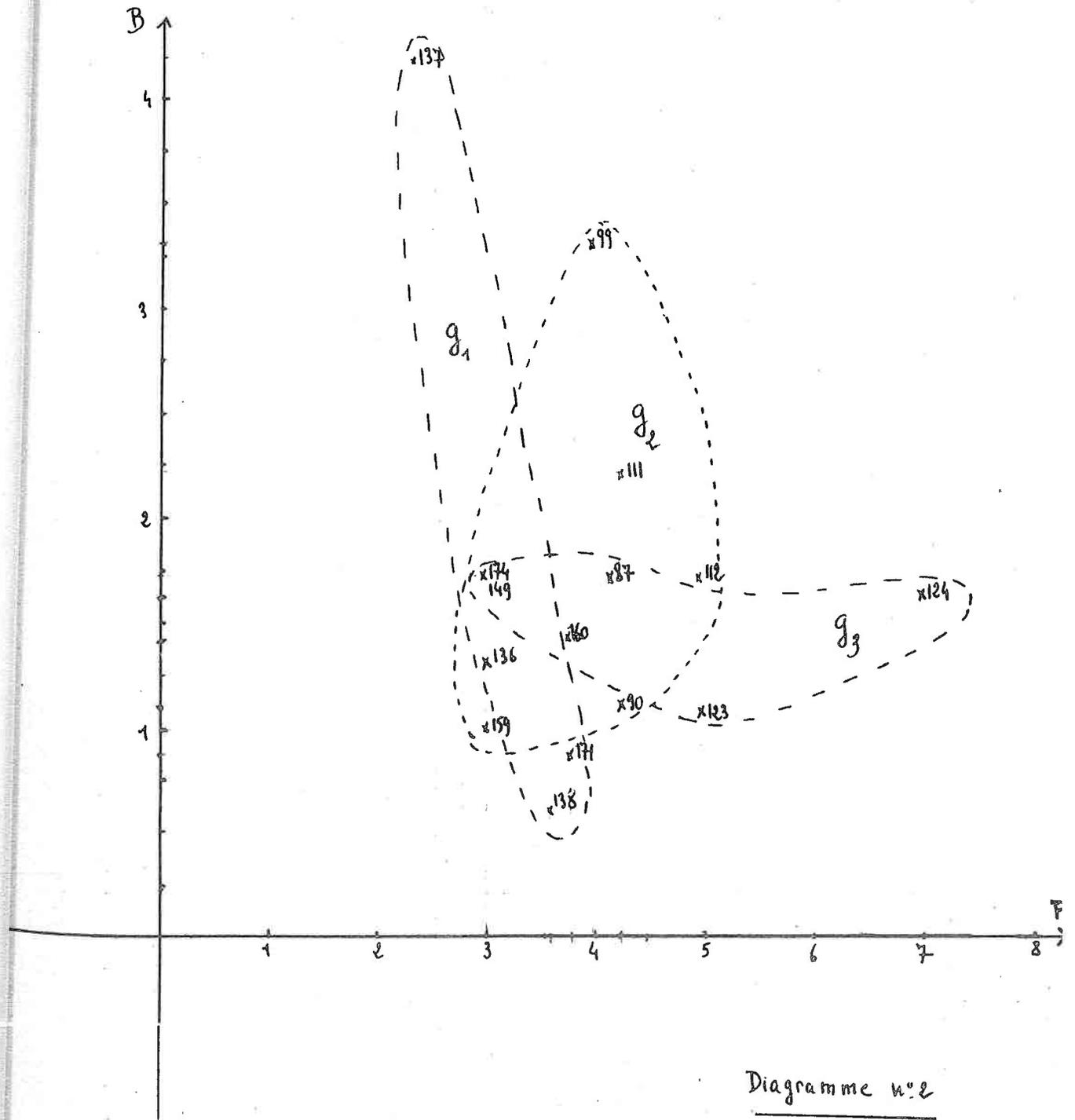


Diagramme n°2

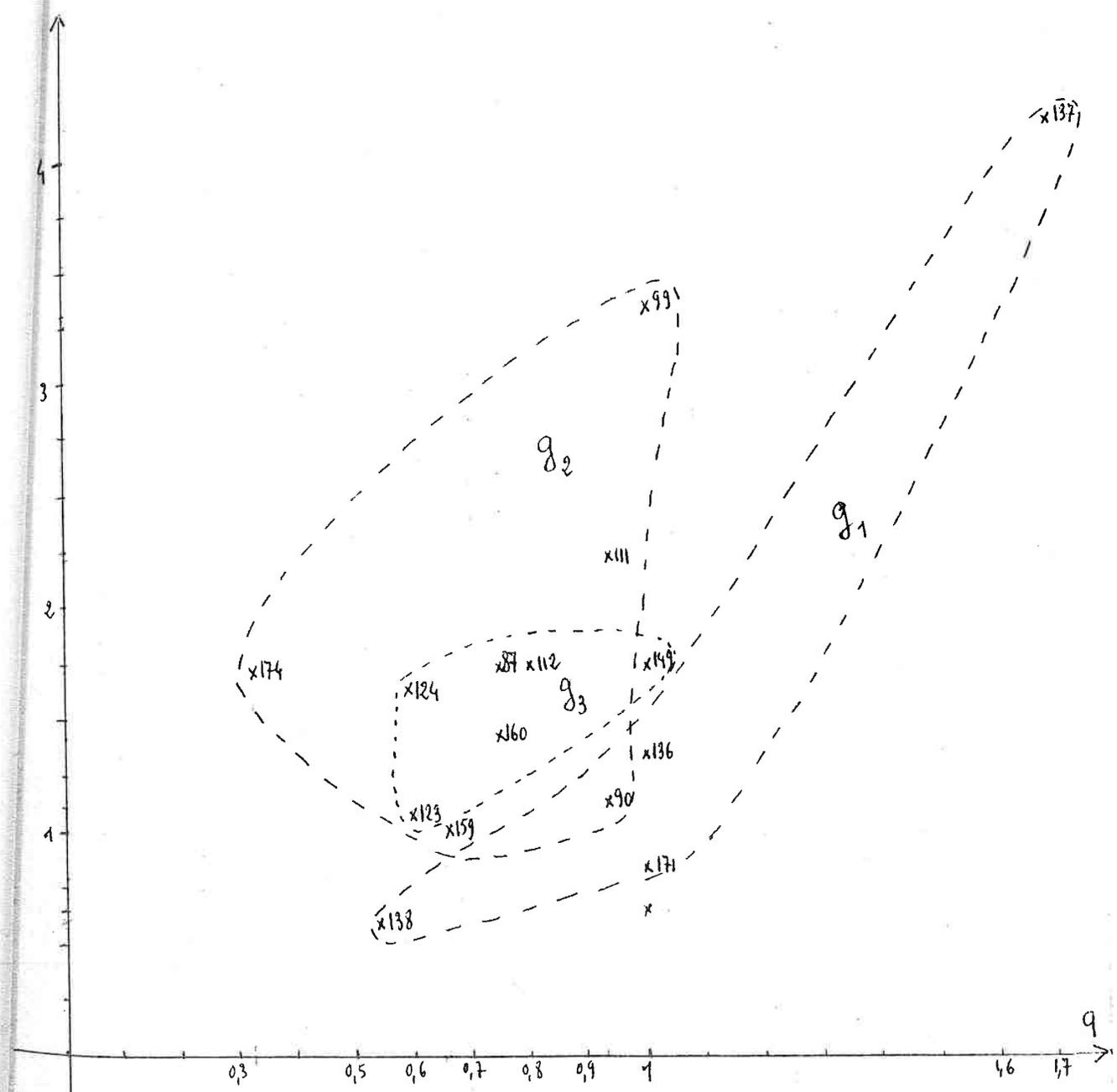


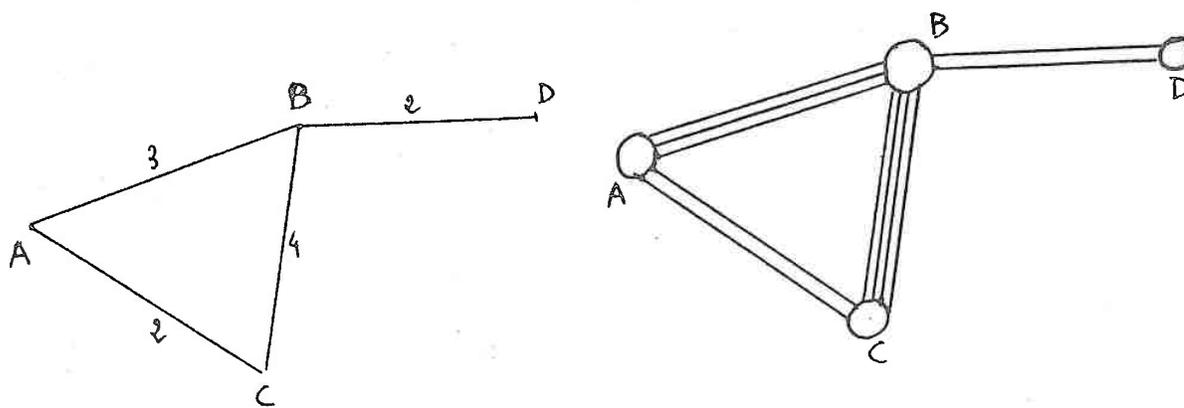
Diagramme n° 3

Chapitre III

On reprend dans ce chapitre l'idée qui nous a conduit aux matrices B, mais en essayant de l'adapter à des graphes plus complexes que ceux sur lesquels nous avons travaillé jusqu'ici - c'est-à-dire des graphes comportant un plus grand nombre de sommets et d'arêtes et que l'on pourrait rencontrer dans des modèles d'analyse d'activités humaines.

1) Vecteur répartition initiale.

Construisons, pour notre démonstration, le graphe G suivant



(fig III, 1)

Il existe dans G, 11 arêtes de communication, on peut donc distinguer dans G 22 parcours élémentaires (puisque chaque arête peut être parcourue dans les deux sens). Ou encore, le parcours complet du graphe, parcours dans lequel chaque sommet a la même valeur exigera 22 associations élémentaires. Nous allons distribuer cette quantité entre les sommets A, B, C, D selon la répartition (5, 9, 6, 2) c'est-à-dire, si on considère les liaisons

- de A vers B on attribuera la valeur 3 à A
- de B vers A on attribuera la valeur 3 à B
- de A vers C on attribuera la valeur 2 à A
- de C vers A on attribuera la valeur 2 à C

Et ainsi de suite.

On obtient finalement, pour tout graphe, un vecteur de répartition initiale

$$\omega = (a, b, c, d, \dots, u) \text{ (s'il y a } u \text{ sommets distincts)}$$

2) Matrice de passage.

Soit donc le graphe G caractérisé par ω

$$\omega = (5, 9, 6, 2)$$

Nous n'introduisons plus maintenant sur les arêtes d'orientation conventionnelle et l'on cherche la probabilité de parcourir, en un certain sens, une arête quelconque.

Considérons le sommet B, il est adjacent aux sommets A, C, D. La probabilité d'être en A ou C ou D, en venant de B, dépend :

- 1) des "poids" de ces sommets A, C, ou D c'est-à-dire des composantes du vecteur ω correspondant aux sommets A, C ou D.
- 2) du nombre d'arête parallèles (c'est-à-dire des supports matériels d'association) existant entre B d'une part, A, C, D d'autre part.

Remarque :

Il faut tenir compte à la fois de 1) et de 2) , car si 2) ne fait intervenir que les arêtes parallèles (les associations) existant entre le sommet de départ et le sommet visé ; 1) fait intervenir les liaisons existant entre tous les sommets du graphe.

Ainsi dans notre graphe G les poids relatifs (il s'agit de la liaison avec B) des sommets A, C, D sont pour

$$\begin{aligned} A &: 5/13 \\ C &: 6/13 \\ D &: 2/13 \end{aligned}$$

Nous obtenons ces valeurs en prenant comme numérateurs les éléments de ω correspondant à A, C, D et comme dénominateur la somme de ces numérateurs, en effet il s'agit ici de la liaison de A, C, D avec B seulement. (Du graphe total on extrait le graphe partiel réduit aux arêtes A B, C B, D B)

Aux liaisons B A, B C, B D on donne ensuite les valeurs

$$\begin{aligned} B A &: 3/9 \\ B C &: 4/9 \\ B D &: 2/9 \end{aligned}$$

Il y a 3 arêtes possibles pour aller de B vers A, 4 pour aller de B vers C, 2 pour aller de B vers D, donc en tout 9 arêtes permettant de quitter B.

Dans ces conditions la probabilité d'aller de B en A est égale au produit de la probabilité d'emprunter l'arête B A et du poids relatif de A rapporté à la somme des produits des probabilités de choisir les arêtes issues de B et des poids relatifs des sommets adjacents à B

$$Pr_{BA} = \frac{5/13 \times 3/9 + 6/13 \times 4/9 + 2/13 \times 2/9}{5/13 \times 3/9 + 6/13 \times 4/9 + 2/13 \times 2/9} = 15/43$$

De même on calculera les probabilités d'aller de B en C (Pr_{BC}) et de B en D (Pr_{BD})

$$Pr_{BC} = \frac{6/13 \times 4/9}{5/13 \times 3/9 + 6/13 \times 4/9 + 2/13 \times 2/9} = 24/43$$

$$Pr_{BD} = \frac{2/13 \times 3/9}{5/13 \times 3/9 + 6/13 \times 4/9 + 2/13 \times 2/9} = 4/43$$

On retrouve ici une formulation analogue à celle du théorème de BAYES
Rappelons ce théorème

Si on désigne par

$Pr (X_n)$: la probabilité de l'évènement X_n

$Pr (Y/X_n)$: la probabilité de l'évènement Y, une fois l'évènement X_n choisi

$Pr (X_n/Y)$: la probabilité pour que l'évènement Y étant réalisé, il trouve sa "cause" dans l'évènement X_n

Alors $Pr (X_n) \times Pr (Y/X_n)$

$$Pr (X_n/Y) = \frac{Pr (X_n) \times Pr (Y/X_n)}{\sum_i [Pr (X_i) \times Pr (Y/X_i)]}$$

Pour interpréter les résultats précédents à l'aide du théorème de BAYES nous allons considérer l'évènement : parcours d'une arête issue du sommet B c'est-à-dire, réaliser l'association de B avec un sommet adjacent. Il y a 3 façons possibles d'obtenir cet évènement (parcours d'une arête issue de B) qui sont les associations B A, B C, ou B D ; ou encore cet évènement dépend de 3 attractions possibles : celles des sommets A, C ou D. Une fois l'une des "attractions" précisée, celle de A par exemple, la probabilité de réaliser l'évènement : parcours de B A est la probabilité d'emprunter l'arête B A.

Ainsi pour nous, l'évènement Y est le parcours d'une arête issue de B et l'évènement X_n , la détermination de l'attraction de l'un des sommets adjacents à B.

De façon générale, Etant donné un sommet X

Et V, W, ..., Z l'ensemble des sommets adjacents

v, w, ..., z l'ensemble des poids relatifs à la liaison avec X de ces sommets

n_x, n_w, \dots, n_z l'ensemble des nombres d'arêtes joignant X à V, W, ... Z

Posons

$$m_v = \left(\frac{n_v}{n_v + n_w + \dots + n_z} \right) \left(\frac{v}{v + w + \dots + z} \right)$$

$$\text{Alors } Pr_{XV} = \frac{m_v}{\sum m_i} \quad (i = v, w, \dots, z)$$

On obtiendra ainsi la matrice carrée de passage P dont les éléments sont les probabilités définies ci-dessus.

On peut donc calculer le produit $\omega.P$, puis, appliquant ce qui a été vu au chapitre précédent sur les chaînes de Markov déterminer la limite α de $\omega.P^t$ quand t tend vers l'infini.

3) Points stables, instables et réguliers.

Soit donc un graphe G caractérisé par le vecteur limite α

$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_u)$; α nous indique les probabilités d'être sur les différents sommets après un temps suffisamment grand.

Pour classer ces sommets, on considérera la distribution des a_i , sa moyenne m et son écart type σ

On appellera stables les sommets pour lesquels $a_i - m > \sigma$
 instables ceux pour lesquels $a_i - m \leq -\sigma$
 réguliers les autres. $|a_i - m| < \sigma$

L'ensemble des sommets est ainsi divisé en 3 classes. A l'intérieur d'une classe, les arêtes multiples peuvent être considérées comme des arêtes simples et ceci nous permet de réduire les multigraphes en graphes simples. Evidemment cette transformation n'est utile que sur des graphes comprenant un grand nombre de sommets, de telle sorte que dans chaque classe le nombre de sommets demeure élevé.

Les graphes étudiés dans les chapitres précédents ne contenant qu'une dizaine de sommets, il ne semble pas que cette méthode puisse donner des résultats intéressants, ou alors il faudrait augmenter le nombre des éléments formels dans la classification de départ.

4) Une autre utilisation de la matrice de probabilité de passage construite dans le paragraphe 2 consiste en l'application des résultats d'un travail de MM. Erdős et Rényi.

Ceux-ci ont montré en effet, que, la forme d'un graphe n'étant pas connue, si on admet la possibilité de le construire selon une certaine loi de probabilité de passage d'un sommet à un autre

et si d'autre part, on connaît le nombre n de sommets du graphe et le nombre $N(n)$ d'arêtes

Alors, on peut prévoir la forme du graphe en fonction de $N(n)$ (*1)

Il semble que dans la catégorie de problèmes qui nous occupe, ces résultats puissent être très intéressants dans la mesure où l'analyse détaillée des phénomènes n'est possible que dans certain cas. Ces cas nous fourniraient la loi de probabilité de passage, grâce à laquelle on pourrait déterminer la structure des relations dans les phénomènes difficilement analysables, pour peu que l'on connaisse le nombre de propriétés et le nombre de liaisons que l'on doit isoler.

(*1) P. Erdős et A. Rényi : On the évolution of random graphs
(Bulletin de l'Institut international de Statistique - 1961 P. 343 - 347)

Supposons la méthode du chapitre précédent, appliquée pour classer les sommets d'un graphe.

Nous sommes alors en présence d'un ensemble de propriétés (sommets) sur lequel toutes les associations possibles, après un temps suffisamment long, ont été faites. Que signifie alors pour ces sommets la structure primitive du graphe?

On a envisagé une série de temps pendant lesquels on faisait telle ou telle association c'est-à-dire pendant lesquels on exploitait toutes les possibilités d'association du graphe. On peut donc estimer que des parcours ultérieurs n'apporteront plus rien : notre graphe ne dépend plus du temps.

La structure primitive indique simplement quels sont les sommets (les propriétés) que la méthode d'analyse choisie tend à rapprocher ou au contraire à éloigner les uns des autres.

Et si nous nous plaçons maintenant dans les graphes partiels constitués par les sommets appartenant à l'une des classes définies au chapitre 3, il devient inutile de tenir compte des "intensités" attribuées aux arêtes puisque ces dernières ont précisément déjà été utilisées pour déterminer les classes considérées. Seules nous intéressent désormais les relations de voisinage entre sommets. Ce qui revient à reprendre les données immédiates de l'analyse mais dans des cadres réduits, définis eux-mêmes par les conséquences de certains aspects de cette analyse.

Il se peut d'ailleurs que cette étude des relations de voisinage soit entreprise dès le début. Ce sera le cas pour toutes les descriptions dans lesquelles le temps n'intervient pas ou très peu. L'idée d'un cheminement sur le graphe ne signifie alors rien. Dans ce cas il ne sera pas nécessaire de fabriquer une partition du graphe en graphes partiels.

Il faut noter toutefois, que dans ce chapitre, où nous examinons des relations de voisinage, on ne tient plus aucun compte, ainsi que nous l'avons dit, des intensités portées sur les arêtes. Il serait donc souhaitable, pour entreprendre cette étude immédiatement, que les intensités aient des valeurs voisines, sinon, on peut toujours, en imaginant un parcours fictif des arêtes dans le temps, regrouper les sommets en classes d'une façon analogue à celle du chapitre précédent.

Ceci étant, notre objectif est donc maintenant de classer des relations de voisinage, de décrire les graphes selon les types de relations obtenues, puis, toujours de ce point de vue, d'examiner la nature des transformations d'un graphe ou un graphe voisin. Ces transformations pourront alors nous permettre d'introduire une notion de distance entre graphes et par conséquent d'établir un classement, selon la valeur des distances, à l'intérieur d'un ensemble de graphes.

Ère partie : Description

1) Classe d'équivalence G1 : définition

On se donne un graphe (G) quelconque, soit par exemple celui de la figure (IV 1)

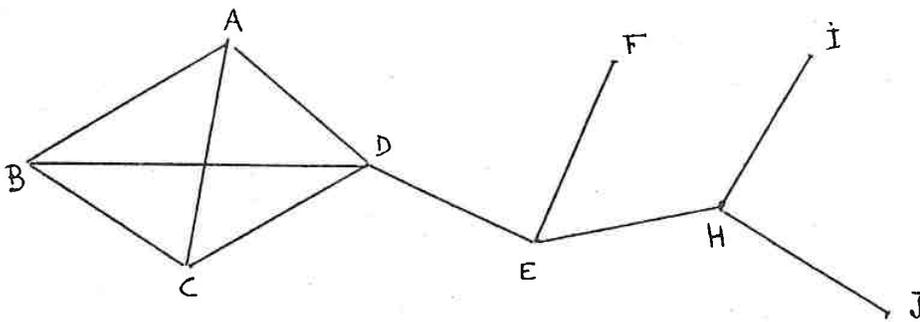


fig IV 1

On fait correspondre à G la matrice carrée symétrique d'éléments x_{ij} tels que

$x_{ij} = 1$ si les sommets i et j sont reliés par une arête

$x_{ij} = 0$ sinon.

On admet que les sommets sont liés à eux-mêmes, (existence d'une boucle sur chaque sommet), d'où $x_{ij} = 1$

| | A | B | C | D | E | F | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| D | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| I | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| J | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Nous dirons que 2 sommets I et J appartiennent à une même classe d'équivalence \mathcal{G}_1 si nous avons

$x_{ik} = x_{jk}$ quelles que soient les valeurs de k
sauf pour $k = i$ et $k = j$

Il s'agit bien d'une relation d'équivalence, en effet
Réflexivité et symétrie évidentes

$$\text{Transitivité : } \left. \begin{array}{l} x_{ik} = x_{jk} \\ x_{jk} = x_{lk} \end{array} \right| \Rightarrow x_{ik} = x_{lk}$$

avec i, j, l, k

Nous désignerons par G_1 l'ensemble des classes g_1 .
Chacune de ces classes, groupe les sommets supportant le même type de liaison avec tous les autres sommets du graphe moins les sommets de la classe elle-même. C'est-à-dire que dans le phénomène étudié nous isolons des groupes de propriétés définies par des relations identiques avec l'ensemble du phénomène étudié.

2) Classes d'équivalence G_2 Définition

Nous chercherons ensuite à caractériser ces groupes, ce qui nous conduit à envisager le ou les sommets avec lesquels les éléments d'une classe g_1 sont en liaison. Nous posons que ces sommets appartiennent à une même classe g_2 .
Montrons que cette classe g_2 est encore une classe d'équivalence

Soient A, B, C, 3 sommets appartenant à g_2

g_2 est définie par une relation R telle que

$A R B \Leftrightarrow$ il existe une classe g_1 telle que

$$x_{ia} = x_{ib} \text{ pour tout } i \text{ appartenant à } g_1$$

Il est immédiat que R est reflexive et symétrique

$$\text{Transitivité : Soient } \left. \begin{array}{l} A R B \Leftrightarrow x_{ia} = x_{ib} \\ B R C \Leftrightarrow x_{ib} = x_{ic} \end{array} \right| \Rightarrow x_{ia} = x_{ic}$$

donc $A R C$

L'ensemble des classes g_2 sera désigné par G_2 :

Il s'agit donc ici de l'ensemble de sommets qui assurent l'articulation entre les classes g_1 et le reste du graphe, ou encore de l'ensemble des propriétés servant d'intermédiaire entre des groupes de propriétés analogues et les autres propriétés du phénomène.

Quant au reste du graphe, momentanément inorganisé de notre point de vue, nous le désignons par G_3 .

Ce "momentanément" se justifie par le fait qu'il est toujours possible de considérer le graphe partiel G_3 obtenu par suppression des ensembles G_2 et G_1 et dans ce graphe réduit, de faire de nouveau apparaître des ensembles G'_1 , G'_2 et G'_3 et ainsi de suite. Le graphe total se présentera ainsi comme une succession de décompositions emboîtées les unes dans les autres.

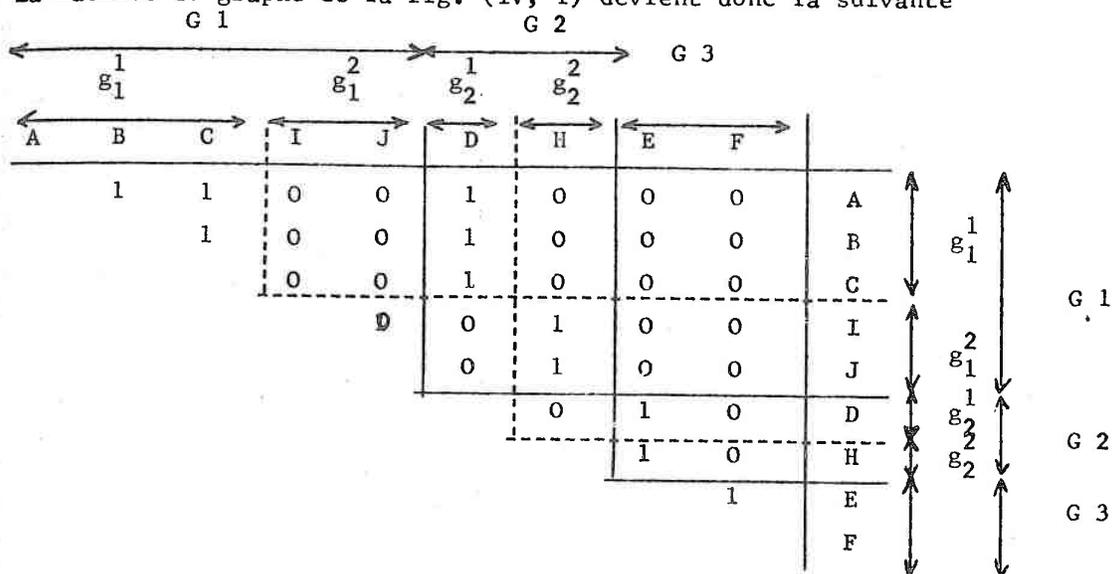
Pratiquement nous écrivons la matrice correspondant à un graphe en plaçant en tête, c'est-à-dire dans la partie supérieure gauche, l'ensemble G_1 , puis les ensembles G_2 et G_3 . Cet ordre se retrouve évidemment en colonne.

G_1 est lui-même divisé en classes g_1^i de telle sorte que l'on trouve d'abord tous les éléments d'une première classe g_1^1 , puis tous les éléments d'une seconde, etc...

A l'intérieur de ces classes toutes les permutations sont possibles sans modifier le contenu de la matrice. L'ordre des classes g_1 , lui, est indifférent, nous avons toutefois adopté la convention d'écrire d'abord les classes que nous définirons par la suite comme des classes ouvertes, puis les classes fermées. Et à l'intérieur de ces ouverts et de ces fermés d'ordonner les g_1 selon le nombre croissant des éléments. Il en va de même pour G_2 , l'ordre adopté pour G_1 impliquant celui de G_2 , puisque par définition les g_2 sont déterminées par référence aux g_1 . Enfin pour G_3 considéré dans cette première étape comme inorganisé l'ordre des éléments est arbitraire.

Ajoutons que, la matrice étant symétrique, nous pouvons la réduire à un triangle, et que pour simplifier nous avons simplement placé des points sur la diagonale. Ces points symbolisant la liaison d'un sommet avec lui-même.

La matrice du graphe de la fig. (IV, 1) devient donc la suivante



Le graphe sera parfaitement défini, si nous connaissons le contenu des différentes matrices partielles, triangulaires, rectangulaires ou carrées :

$$(G_1 \times G_1), (G_2 \times G_2), (G_3 \times G_3), (G_1 \times G_2), (G_1 \times G_3), (G_2 \times G_3)$$

D'après notre définition de l'ensemble G_3 , $(G_1 \times G_3)$ ne contient que des 0. D'autre part nous avons vu que l'on peut extraire G_3 du graphe et le décomposer de nouveau en G'_1 , G'_2 et G'_3 par conséquent nous laisserons de côté pour le moment la matrice $(G_3 \times G_3)$.

Dans les paragraphes suivants nous examinerons les matrices $(G_1 \times G_1)$, $(G_1 \times G_2)$ et $(G_2 \times G_2)$. Il nous reste donc à étudier maintenant $(G_2 \times G_3)$.

(1) Dans la suite de ce texte, pour désigner un élément d'un tableau, nous convenons de placer d'abord l'indice de colonne, puis l'indice de ligne, notation qui nous semble plus commode étant donnée la disposition des indices de colonnes et de lignes sur les tableaux triangulaires.

3) Matrice de "transition" ($G_2 \times G_3$)

G_2 est l'ensemble de sommets reliant les classes g_1^i au groupe provisoirement indifférencié de sommets G_3 .

Dans la mesure où nous voulons, par la suite, recommencer l'analyse sur G_3 il est nécessaire de posséder au préalable un certain nombre de renseignements sur l'articulation de G_3 avec le reste du graphe.

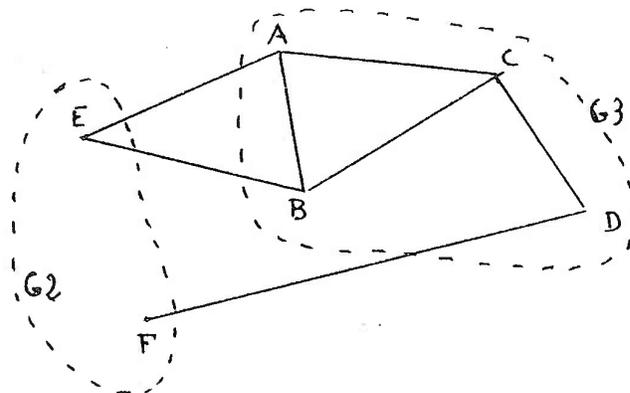
C'est précisément ($G_2 \times G_3$) qui contient ces renseignements

Puisque nous ne savons rien sur G_3 nous plaçons les sommets de G_3 dans un ordre quelconque, il s'ensuit que à l'intérieur de ($G_2 \times G_3$) la disposition relative des 1 et des 0 ne peut rien nous apprendre, cette disposition étant arbitraire. Nous chercherons donc plutôt à évaluer la "qualité" du transfert global assuré depuis G_2 vers G_3

Pour cela nous considérons 2 cas :

1er cas ;

G_3 isolé, peut de nouveau être partagé en classes $G'1, G'2, G'3$
C'est le cas de la fig. (IV, 2)



(IV, 2)

Remarque : Sur cette figure nous n'avons pas représenté les sommets appartenant à G_1 .

Après suppression des arêtes EA, EB, FD, c'est-à-dire des arêtes appartenant à ($G_2 \times G_3$), A et B forment une nouvelle classe $G'1$, pour que cette classe n'apparaisse pas comme telle dans le graphe primitif, les liaisons entre E, F d'une part, A et B d'autre part, ne doivent pas être identiques.

Autrement dit, si nous prenons la matrice ($AB \times EF$); il ne peut y avoir quatre 1 ou quatre 0 dans cette matrice.

| | A | B |
|---|---|---|
| E | 1 | 1 |
| F | 1 | 1 |

| | A | B |
|---|---|---|
| E | 0 | 0 |
| F | 0 | 0 |

} ces deux cas sont impossibles

Par contre les 3 autres combinaisons : trois 1, un 0
deux 1, deux 0
un 1, trois 0 ← (ex de la fig. IV, 2)

sont possibles. La liaison maximale entre G 2 et cette partie de G 3 étant assurée par la première : (trois 1, un 0)
 Donc si nous avons n sommets appartenant à G 2

m sommets appartenant à un g'_i extrait de G 3
 et si l'on ne tient pas compte des différences de nature entre les sommets il y a $(n \times m + 1)$ façons de lier G 2 à g'_i , dont nous devons exclure les deux extrêmes pour ne pas "dénaturer" G 3, donc finalement $(n \times m - 1)$ types d'associations entre G 2 et ce g'_i .

L'association la plus dense comprenant elle même $(n \times m - 1)$ arêtes
 Nous aurons ainsi une mesure de $(G 2 \times g'_i)$ en formant le rapport

$$L_i = \frac{\text{Nombre d'arêtes existant réellement dans } (G 2 \times g'_i)}{n \times m - 1}$$

Dans notre exemple $L_i = \frac{2}{3}$

On renouvellera cette opération pour chaque classe g'_i

On notera enfin que les autres sommets de G 3 (ceux qui constitueront les classes éventuelles G' 2 et G' 3) peuvent tous être rattachés de façon identique à G 2 sans modifier la nature de G 3. Par conséquent, si le nombre de ces sommets est k, avec toujours n = nombre de sommets de G 2, la liaison maximale entre G 2 et ces G' 2, G' 3 est constituée de $n \times k$ arêtes
 D'où un indice de liaison L_j

$$L_j = \frac{\text{Nombre d'arêtes existant dans } [G 2 \times (G' 2 + G' 3)]}{n \times k}$$

Ici $L_j = \frac{1}{4}$

On obtiendra l'indice total L caractérisant la matrice $(G 2 \times G 3)$ en formant $P \sum_{i=1}^P L_i + L_j$

$$L = \frac{\sum_{i=1}^P L_i + L_j}{P + 1} \quad \text{avec } P = \text{nombre de classes de la forme } g'_i$$

Dans l'exemple de la figure (IV, 2)

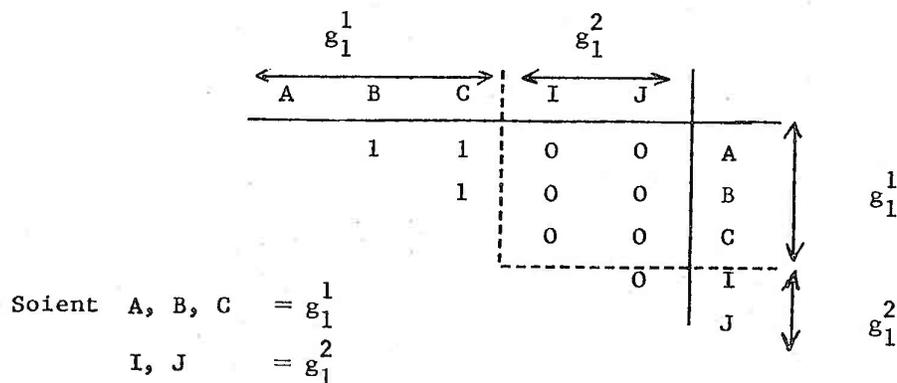
$$L = \frac{2/3 + 1/4}{2} = \frac{3}{8}$$

2ème cas :

G 3 isolé ne peut plus être décomposé en G'1, G'2, G'3
 nous caractériserons alors la matrice $(G 2 \times G 3)$ en utilisant simplement l'indice L_i et nous aurons $L = L_i$, puisque les sommets de G 3, n'occupant pas de situation particulière, peuvent être tous indistinctement rattachés à G 2.

4) Matrice (G 1 x G 1)

Considérons simplement la matrice partielle (G 1 x G 1) du graphe de la figure (IV, 1)

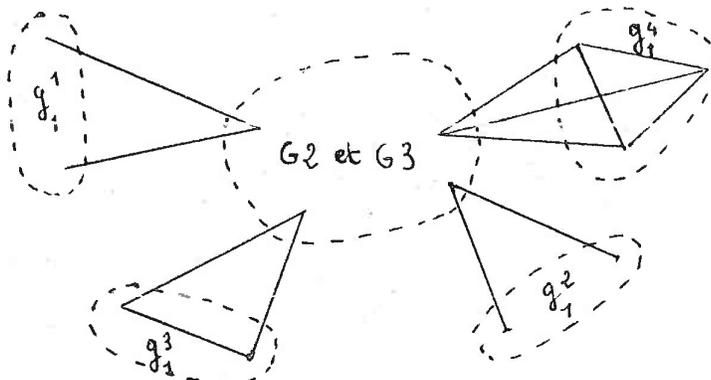


Les matrices triangulaires ($g_1^1 \times g_1^1$) et ($g_1^2 \times g_1^2$) indiquent l'existence ou non de liaisons entre sommets appartenant à une même classe, elles seront donc composées comme ici soit de 1, soit de 0. Si leurs éléments sont des 0 nous appellerons la classe correspondante, classe ouverte, fermée, si les éléments sont des 1. De plus, pour connaître complètement une classe g_1^i il faut encore indiquer le nombre de sommets qu'elle contient : 3 pour g_1^1 , 2 pour g_1^2 .

Etant donné un graphe G quelconque, la matrice (G 1 x G 1) de ce graphe, nous pouvons décrire les matrices triangulaires partielles de (G 1 x G 1) en indiquant : le nombre de ces matrices, leur qualité : ouverte ou fermée et le nombre de sommets appartenant à chacune d'elle.

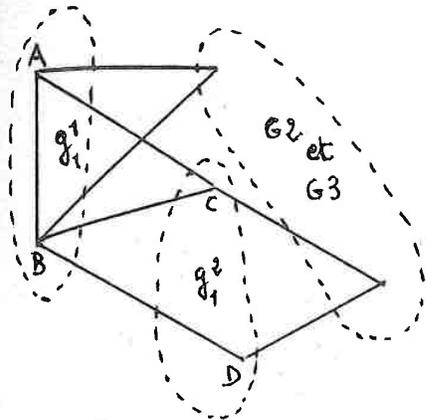
Ainsi, pour le graphe (IV, 1) nous avons 2 matrices triangulaires, l'une fermée, l'autre ouverte, la première de 3 sommets, la seconde de 2 sommets. Nous adopterons alors pour ce graphe la notation suivante (2,3) : c'est-à-dire : une suite de nombres, représentant le nombre de sommets de chaque classe distincte, la suite, séparée en 2 parties par une virgule, les nombres situés à gauche de la virgule, représentent les classes ouvertes, ceux qui sont à droite les classes fermées.

Avec cette convention, le graphe de la figure (IV, 3) pour lequel nous ne précisons pas la structure des sous-ensembles G 2 et G 3, sera représenté par (2 2, 2 3) : c'est-à-dire 2 classes ouvertes de 2 éléments chacune et 2 classes fermées : l'une de 2 éléments, l'autre de 3.

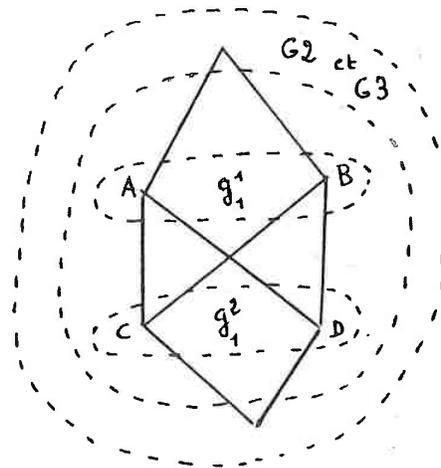


(fig. IV, 3)

Il reste maintenant à examiner les matrices rectangulaires de type $g_1^i \times g_1^j$ avec $i \neq j$. Dans l'exemple de la figure (IV, 1) la matrice $(g_1^2 \times g_1^1)$ ne contient que des 0, mais il n'en est pas toujours de même comme le montrent les 2 exemples suivants



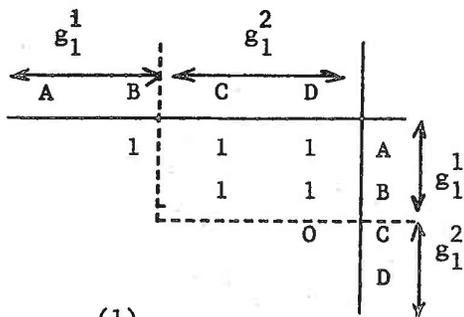
(1)



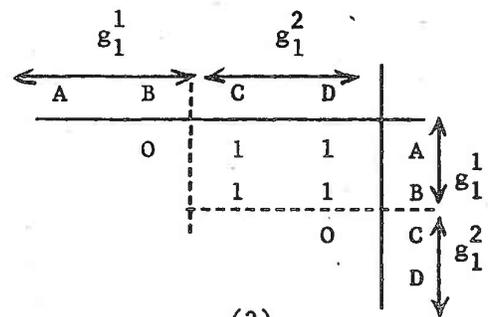
(fig IV, 4)

(2)

dont les matrices $G^1 \times G^1$ seront



(1)



(2)

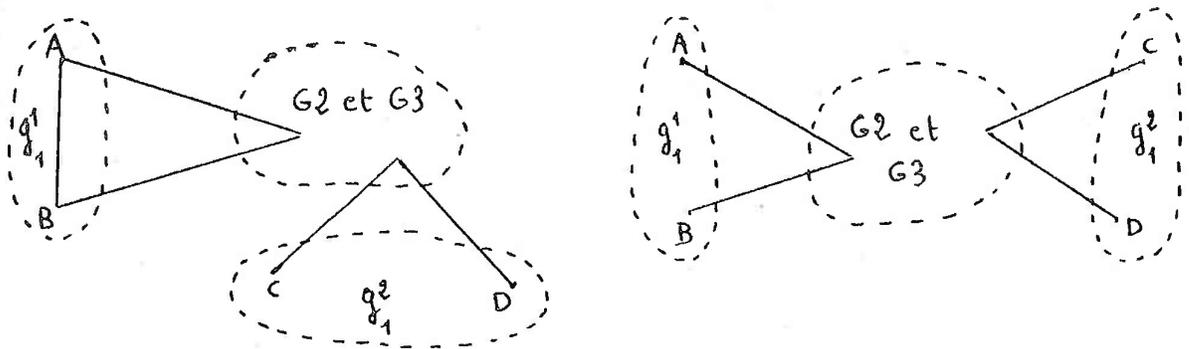
Avec la convention précédente ces graphes seraient représentés

(1) par (2, 2)

(2) par (2, 2, 1)

Notons tout de suite que le chiffre 1 placé à droite de la virgule dans le graphe (2) indique une classe d'équivalence composée d'un sommet unique, donc d'un sommet quelconque, qui par suite ne figurera pas dans l'ensemble G^1 , c'est dire qu'un 1 placé de la sorte, indique qu'il n'existe pas dans le graphe, de classe fermée.

Revenons aux graphes (1) et (2), avec les formules (2, 2) et (2 2, 1), on ne peut distinguer ces graphes des graphes (1') et (2') (fig IV, 4') où les classes g_1^i ne sont pas liées entre elles



(fig. IV, 4')

(1')

(2')

Nous ajouterons donc aux chiffres, notant le nombre de sommets, un indice, semblable pour toutes les classes liées entre elles, l'absence d'indice, indiquant l'absence de liaison.

Ainsi (1) deviendra (2', 2')

et (2) deviendra (2' 2', 1)

De façon générale $G/G_1 = \underbrace{(a^i \ a^j \ b^i \ c, \ a \ b^j \dots \ d)}_{n \text{ nombres distincts}}$

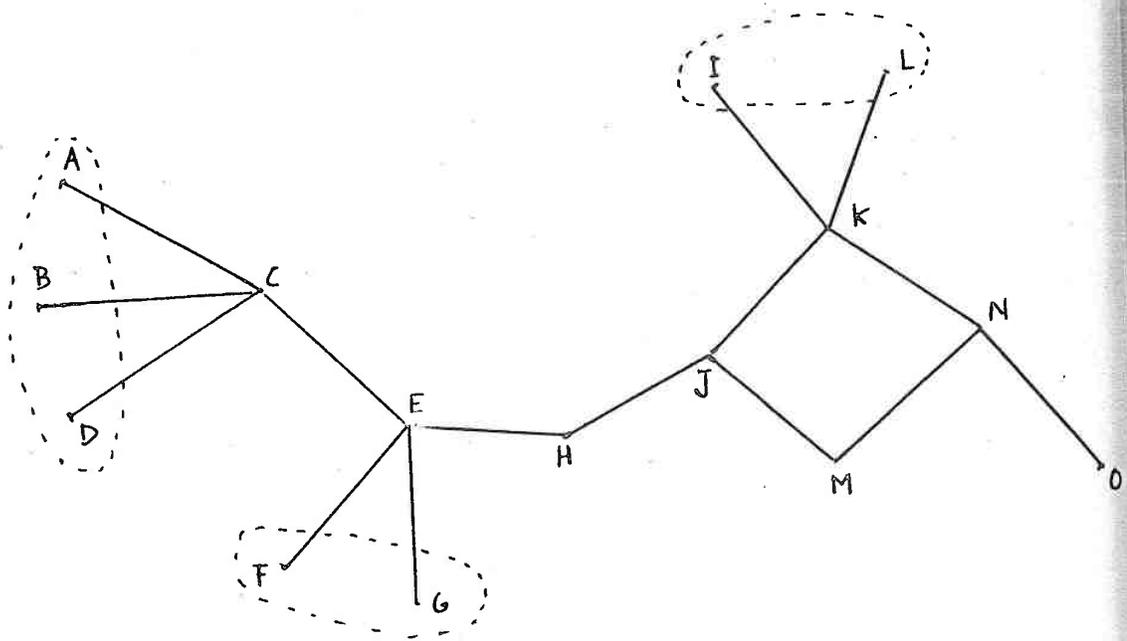
signifie que la relation d'équivalence G_1 , partage l'ensemble des sommets du graphe G (d'où la notation G/G_1) en n classes, certaines étant reliées entre elles les $a^i \ b^j$, les $b^j \ a^i$, d'autres demeurant séparées les $a, c, d \dots$

5) Matrice $[G_2 \times (G_1 + G_2)]$

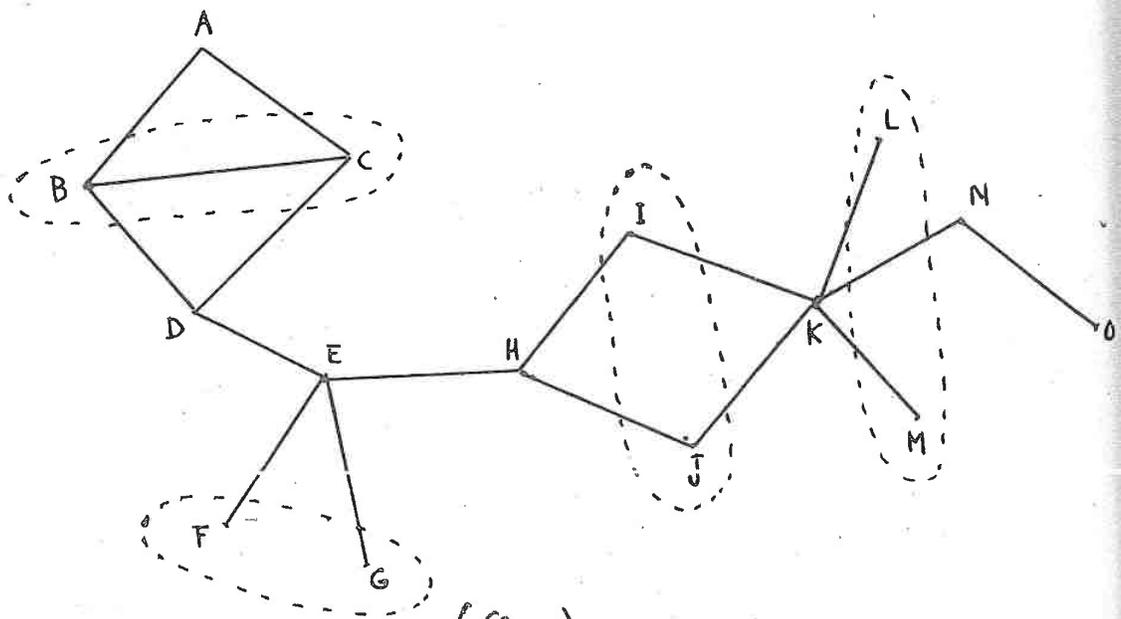
Si l'on veut se limiter à l'étude de groupes de variables reliées de façon identique à l'ensemble du phénomène, on pourra se contenter de la méthode de classification du paragraphe 4) décrivant la composition de la matrice $(G_1 \times G_1)$.

Mais il peut être intéressant de connaître avec plus de précision comment ces variables sont liées à la totalité du graphe, d'où la nécessité d'examiner la matrice $[G_2 \times (G_1 + G_2)]$

Soient donc 2 graphes (G_1) et (G_2) (ayant même nombre de sommets, mais dont les arêtes sont différentes) et les matrices correspondantes (fig IV, 5)

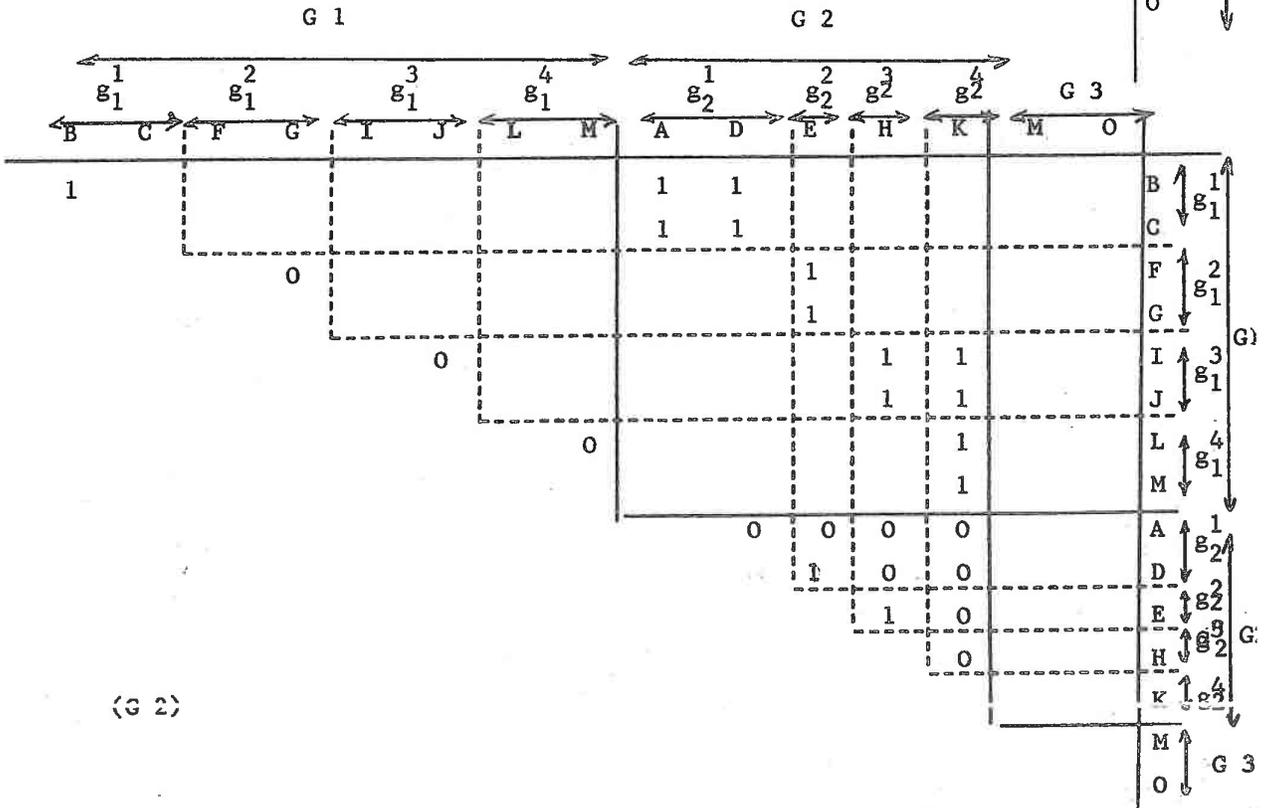
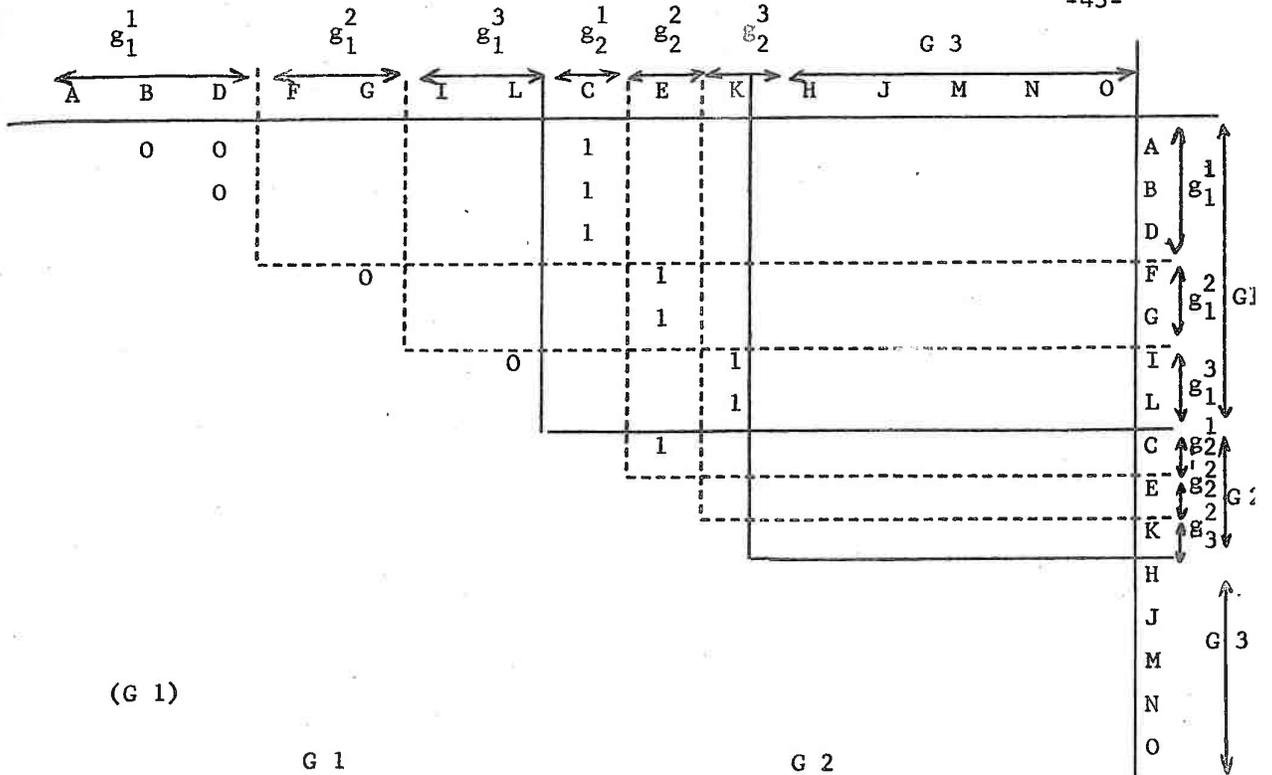


(g₁)



(g₂)

(fig IV, 5)



Remarque : La matrice (G 3 x G 1) est toujours nulle
et nous ne plaçons rien dans (G 3 x G 3).

Nous considérons successivement la matrice rectangulaire (G 2 x G 1) et la matrice triangulaire (G 2 x G 2)

Comme nous l'avons déjà dit, l'ordre des classes de G 2 est imposé par celui de G 1, c'est-à-dire que sur la diagonale de (G 2 x G 1), nous trouverons des cases dont les éléments seront toujours des 1

- a) Ces cases peuvent être formées de une ou plusieurs colonnes :
 une colonne \Leftrightarrow tous les éléments de g_1^i sont reliés au graphe par un sommet unique de G 2
 deux ou plusieurs colonnes \Leftrightarrow tous les éléments de g_1^i sont reliés au graphe par plusieurs sommets de G 2 qui jouent donc un rôle analogue pour cette classe de G 1

B) En dehors des cases de la diagonale, on peut trouver d'autres cases de (G 2 x G 1) dont les éléments sont des 1 : ex dans le graphe (G 2) la case (g_2^4, g_1^3)
 La présence de ces cases, indiquent des classes de G 2 communes à deux ou plusieurs classes distinctes de G 1.

c) La matrice (G 2 x G 2) : Nous ne pouvons faire ici, aucune distinction entre les matrices partielles carrées et les matrices partielles triangulaires. On se contentera de considérer les colonnes de cette matrice, la présence d'un 1 signifie que l'élément correspondant de G 2 est lié à un autre élément de G 2, d'où un partage des éléments de G 2 en éléments liés et éléments libres.

- Si nous formulons d'une façon quelconque les 3 propriétés a, b, c, précédentes, nous avons épuisé toutes les caractéristiques de $[G 2 \times (G 1 + G 2)]$
 Pour rendre compte de c) convenons de noter par x les éléments libres de G 2, et par y les éléments liés.

D'après a) plusieurs de ces éléments peuvent appartenir à une même case de (G 2 x G 1) on introduira donc un coefficient de x ou y indiquant le nombre de ces éléments qui figure dans une même case

Ex. Pour le graphe (G 2) dans ($g_2^1 \times g_1^1$) : 2 x
 dans ($g_2^2 \times g_1^2$) : y etc...

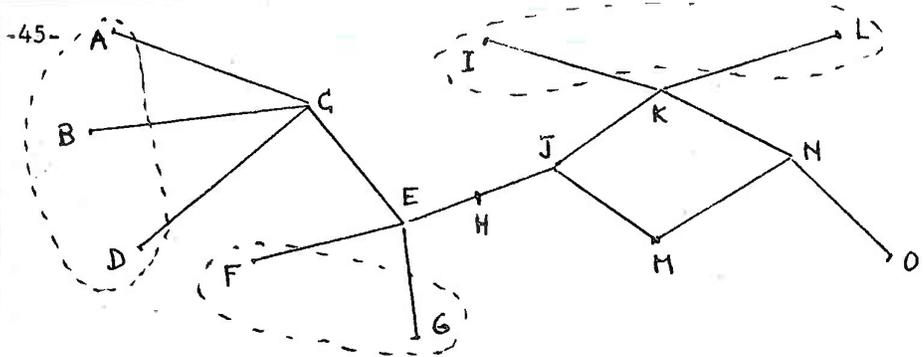
Si une case de (G 2 x G 1) contient, et des éléments libres et des éléments liés, nous noterons alors: n x + m y; n et m étant les coefficients respectifs de x et y.

Enfin d'après b) un même élément de G 2 peut figurer dans des cases distinctes de (G 2 x G 1) nous traduirons cela, en utilisant cette fois, un coefficient fractionnaire de x ou y, le dénominateur correspondant au nombre de cases distinctes où figure cet élément.

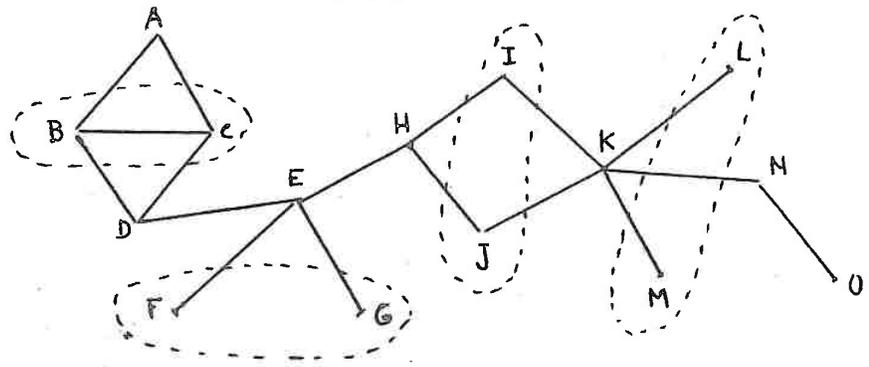
Ex. toujours dans le graphe (G 2)

g_2^4 figure dans g_1^3 et g_1^4

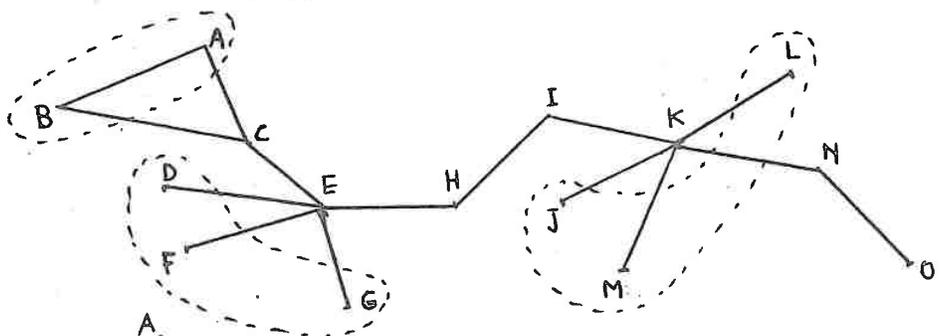
d'où $1/2 x$ pour g_1^3 et $1/2 x$ pour g_1^4



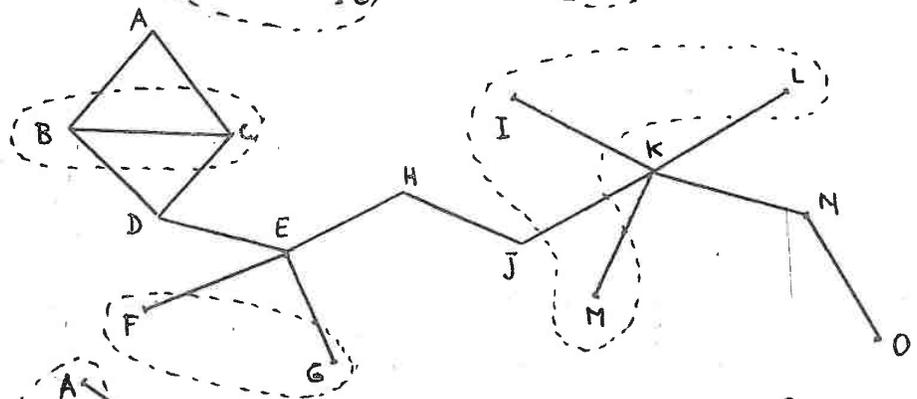
$$(x^2 y^2 y^3; 0)$$



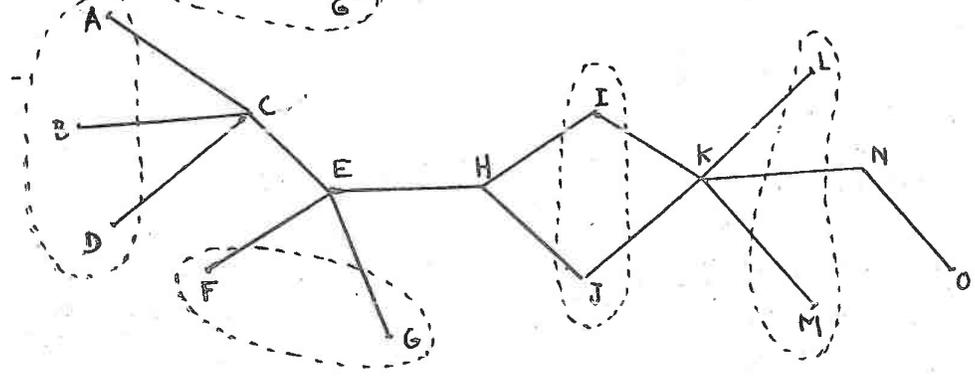
$$\left[y^2 \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \frac{x^2}{2}; (x+y)^2 \right]$$



$$(x^3 y^3; y^2)$$



$$\left[y^2 x^3; (x+y)^2 \right]$$



$$\left[y^2 \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \frac{x^2}{2} y^3; 0 \right]$$

(Fig IV, 6)

Finalment, si nous considérons une classe quelconque de G 1, on traduira son mode de liaison avec le reste du graphe c'est-à-dire le contenu partiel qui lui correspond de $[G 2 \times (G 1 + G 2)]$, à l'aide d'une formule de la forme : $q_1 x + p_1 y$

où q_1 et p_1 sont des nombres rationnels :

Les numérateurs indiquant le nombre de x ou y existant dans la case choisie de $(G 2 \times G 1)$

Les dénominateurs le nombre de cases où se retrouvent ces x ou ces y

Pour réunir dans un même système de notations, les données de l'analyse des matrices $(G 1 \times G 1)$ et $[G 2 \times (G 1 + G 2)]$ nous combinerons les notations de ce paragraphe et du précédent.

Par ex : $(x^2 (x + y)^3 ; 2 x^2 y^2)$

Se rapporte à un graphe où existent : 2 classes ouvertes, 2 classes fermées

les classes ouvertes | la première contient 2 éléments reliés par un sommet de G 2 libre
| la seconde contient 3 éléments reliés à la fois par un sommet libre et un sommet lié.

les classes fermées | la première de 2 éléments reliés par 2 sommets libres
| la deuxième de 2 éléments reliés par un sommet lié

A titre d'exemple nous présentons ci-contre, 5 graphes (dont les 2 de la fig. (IV, 5) (ayant tous même nombre de sommets) et les facteurs qui leur correspondent.

Pour conclure à chaque graphe nous associons un "facteur" dont l'expression générale est

$$\underbrace{(q_1 x + p_1 y)^{n_1^a} (q_2 x + p_2 y)^{n_2^b} \dots (q_i x + p_i y)^{n_i^a}}_{\text{classes ouvertes}}, \underbrace{(q_j x + p_j y)^{n_j^a} \dots (q_l x + p_l y)^{n_l^a}}_{\text{classes fermées}}$$

avec $n_1, n_2, \dots, n_l =$ nombres entiers

$q_1, q_2, \dots, q_l =$ nombres rationnels

les indices a, b... des n_1, \dots, n_l traduisant les liaisons entre classes de G 1 pourvus des mêmes indices

(+y)²

)²

3

v, 6)

II. 2° partie : Etude des transformations.

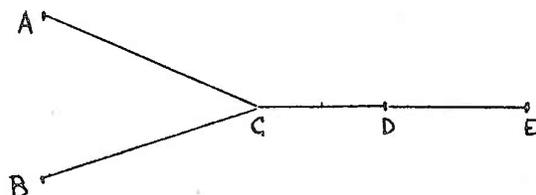
Nous nous demandons maintenant s'il n'est pas possible d'interpréter la structure d'un graphe quelconque, comme étant le résultat d'une composition de transformations fondamentales opérant sur quelques données de base. Quand nous parlons de structure d'un graphe, il est bien entendu que nous signifions la description d'une structure dans les termes où nous l'avons posée dans la première partie de ce chapitre.

1) Les 2 graphes élémentaires.

Les données de base sur lesquelles nous devons travailler sont les graphes ayant le nombre minimum de sommets et d'arêtes et analysables toutefois en classes G 1, G 2, G 3.

Dans le paragraphe 1 de la première partie, nous avons distingué dans G 1 des classes ouvertes et des classes fermées, ceci nous conduit à distinguer 2 graphes élémentaires, le premier formé à partir d'une classe ouverte de G 1, le second à partir d'une classe fermée de G 1. Nous fabriquerons ainsi les 2 graphes suivants.

A : graphe élémentaire à classe ouverte (5 sommets)

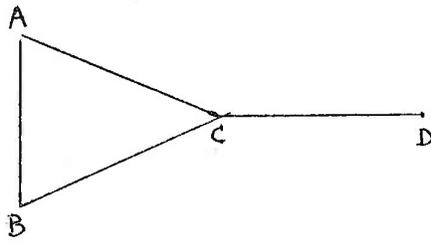


(fig. IV, 5)

dont la matrice est

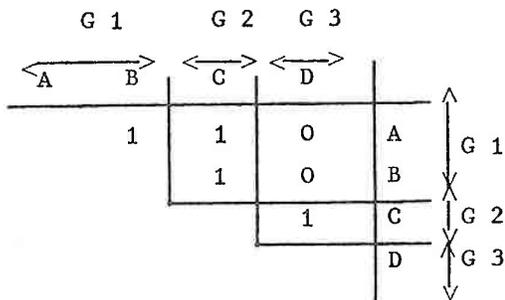
| G 1 | | G 2 | | G 3 | | |
|-----|---|-----|---|-----|---|-----|
| A | B | C | D | E | | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | A | G 1 |
| | | 1 | 0 | 0 | B | G 1 |
| | | | 1 | 0 | C | G 2 |
| | | | | 1 | D | G 3 |
| | | | | | E | G 3 |

B : graphe élémentaire à classe fermée (4 sommets)



(fig. IV, 6)

de matrice



Remarquons tout de suite que l'indice L caractérisant la matrice de transition (G 2 x G 3)

$$L = \frac{\sum_{i=1}^P L_i + L_j}{P + 1}$$

prend dans ces graphes la valeur 1

Dans A il est réduit à L_1 et dans B à L_1 . Il atteint donc, dans les 2 graphes, sa valeur maximale. Ce qui nous permet de définir également les graphes élémentaires comme des graphes à transition maximale.

Puisque nous venons de définir 2 graphes élémentaires distincts et que nous étudions dans cette partie les transformations permettant de passer d'un graphe à un autre, il serait souhaitable de préciser quelle est la nature de la transformation assurant le passage du graphe A au graphe B ; nous reviendrons sur ce point quand nous aurons précisé quelles sont les transformations fondamentales.

2) Les transformations fondamentales.

Pour nous guider dans cette étude, nous considérerons les matrices $(G_1 \times G_2)$. Soit donc la matrice $(G_1 \times G_2)$ d'un graphe quelconque, nous avons vu (paragraphe 5, première partie) qu'on peut la diviser en un certain nombre de cases ou blocs/

Désignons par a_i le nombre de colonnes du bloc i de la diagonale" et par n_i le nombre de lignes de ce même bloc.

Tous les éléments de ces blocs sont des 1 et nous savons qu'il existe d'autres blocs différents de 0 ayant par exemple a_i colonnes et n_j lignes.

I-. La première catégorie de transformations groupe celles modifiant le contenu des blocs : nombre de lignes ou nombre de colonnes.

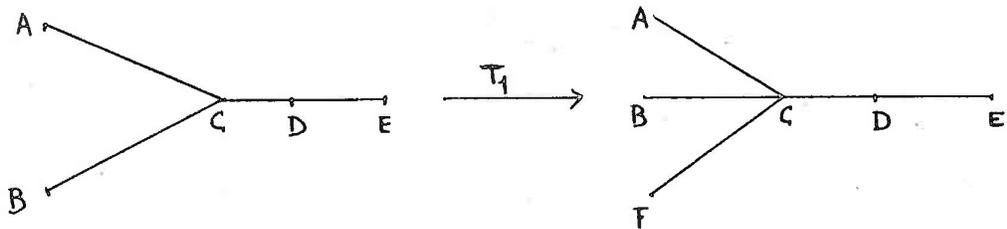
a. Modification du nombre de lignes d'un bloc donné, le nombre de colonnes étant fixé.

Soit un bloc de n_i lignes, a_j colonnes

La transformation T_1 est : $(n_i \times a_j) \xrightarrow{T_1} [(n_i + 1) \times a_j]$

Ex. sur les graphes élémentaires A et B

T_1 est telle que $(2 \times 1) \xrightarrow{T_1} (3 \times 1)$



(fig IV,7)

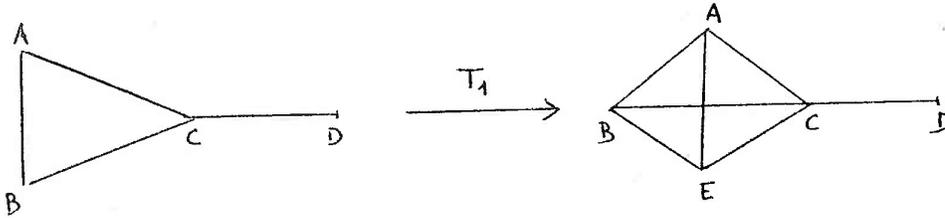
Matrices
($G_2 \times G_1$)

| | | |
|---|---|---|
| | C | |
| 1 | | A |
| 1 | | B |

$\xrightarrow{T_1}$

| | | |
|---|---|---|
| | C | |
| 1 | | A |
| 1 | | B |
| i | | F |

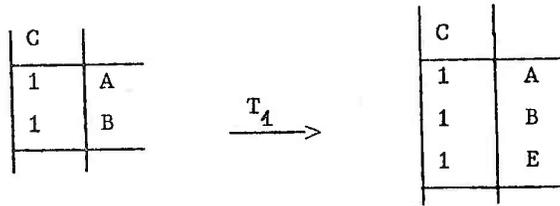
Graph B



(fig IV, 8)

Matrices

(G 2 x G 1)



Cette transformation T_1 assure donc le passage d'une classe d'ordre n à une classe d'ordre $n + 1$ (classes d'équivalence de G 1) en laissant invariant G 2 et G 3

b. Modification du nombre de colonnes d'un bloc donné, le nombre de lignes restant fixe.

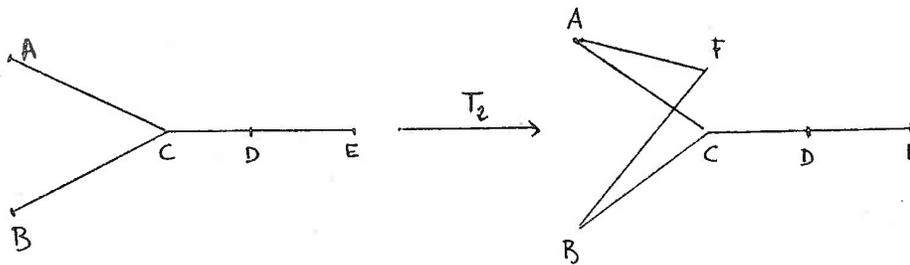
Soient : T_2 cette transformation et un bloc de n_i lignes a_j colonnes

T_2 est telle que : $(n_i \times a_j) \xrightarrow{T_2} [n_i \times (a_j + 1)]$

Pour les graphes A et B nous obtiendrons

T_2 telle que $(2 \times 1) \xrightarrow{T_2} (2 \times 2)$

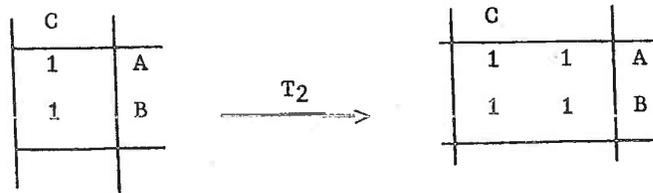
Graph A



(fig IV, 9)

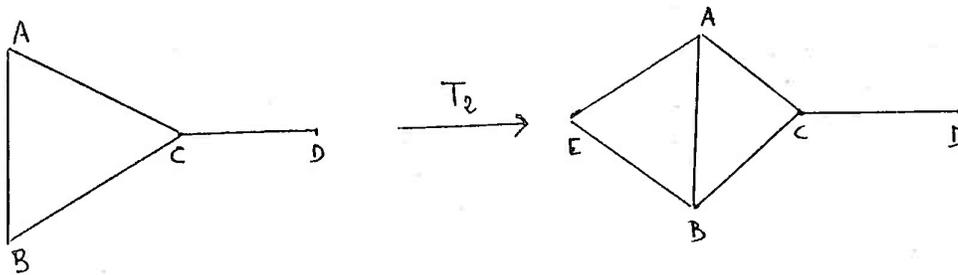
Matrice

(G 2 x G 1)



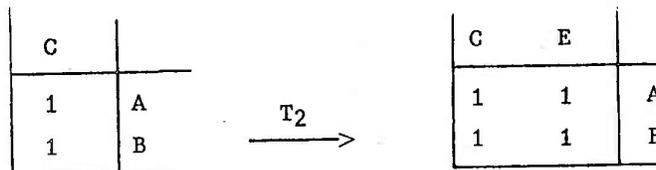
.../...

graphe B



(fig. IV, 10)

Matrices
(G 2 x G 1)



Donc la transformation T_2 , laissant la classe G 1 invariante, quant au nombre de sommets, introduit un nouvel élément dans la classe G 2 correspondante.

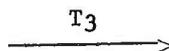
II-. Seconde catégorie de transformations :

Ce sont celles qui opèrent sur le nombre de blocs contenus à l'intérieur d'une matrice (G 2 x G 1)
Nous distinguerons encore dans cette catégorie deux types possibles de transformations.

a. Dans une colonne donnée de (G 2 x G 1) on augmente le nombre de blocs différents de 0. Il s'agit maintenant de la matrice (G 2 x G 1) dont les éléments sont des blocs c'est-à-dire que cette transformation consiste à superposer des blocs les uns au-dessus des autres ou encore à former une pile de blocs. Soient : T_3 la transformation, a_i l'indice de colonne de la matrice des blocs ; dans cette colonne, il existe obligatoirement un bloc différent de 0, celui dont l'indice de ligne est n_i , donc le bloc (a_i, n_i)
 T_3 consiste à faire apparaître un nouveau bloc différent de 0 (a_i, n_j) avec $j \neq i$.

Blocs différents de 0
dans colonne a_i

$\# (a_i \times n_i)$



Blocs différents de 0
dans colonne a_i

$\# (a_i \times n_i) + (a_i \times n_j)$

Ce que l'on peut figurer ainsi :

.../..

Matrices
(G 2 x G 1)

| | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | a ₁ | a ₂ | a ₃ | a ₄ |
| n ₁ | 1 | | | |
| n ₂ | | 1 | | |
| n ₃ | | | 1 | |
| n ₄ | | | | 1 |

 $\xrightarrow{T_3}$

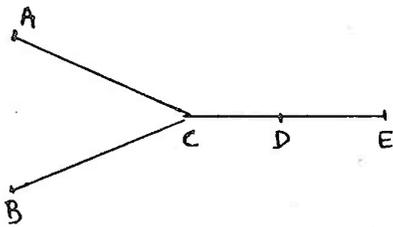
| | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | a ₁ | a ₂ | a ₃ | a ₄ |
| n ₁ | 1 | | | |
| n ₂ | | 1 | 1 | |
| n ₃ | | | 1 | |
| n ₄ | | | | 1 |

La transformation porte ici sur la colonne a₃

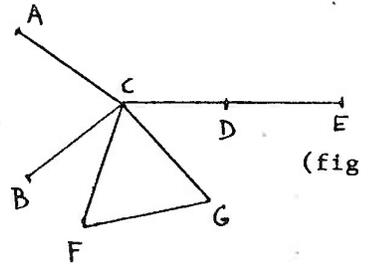
Remarque Nous avons distingué les blocs différents de 0, des autres, en inscrivant simplement un 1 dans ces blocs, sans tenir compte du nombre de lignes et de colonnes de ces blocs, c'est-à-dire, des valeurs de a_i et de n_j

Appliquée aux graphes élémentaires A et B, T₃ donnera

graphe A



$\xrightarrow{T_3}$



(fig IV, 11)

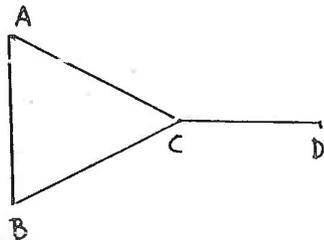
Matrice
(G 2 x G 1)

| | | |
|--------------------|---|---|
| | C | |
| n ₁ =2 | 1 | A |
| | 1 | B |
| a ₁ = 1 | | |

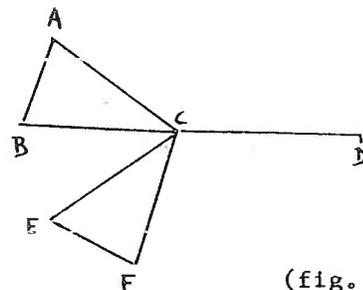
$\xrightarrow{T_3}$

| | | |
|--------------------|---|---|
| | C | |
| n ₁ =2 | 1 | A |
| | 1 | B |
| n ₂ =2 | 1 | F |
| | 1 | G |
| a ₁ = 1 | | |

graphe B

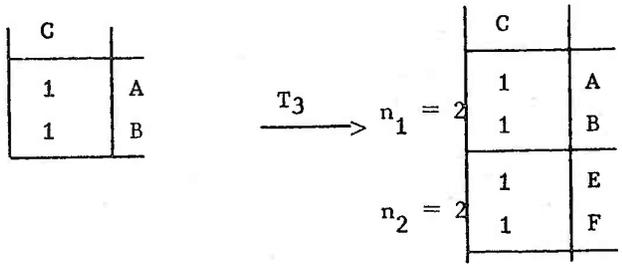


$\xrightarrow{T_3}$



(fig. IV, 12)

Matrices
(G 2 x G 1)



Remarque : T_3 appliquée sur A ne peut ajouter à ce graphe qu'une classe g_1 fermée (en introduisant une classe ouverte) on ne fabrique pas une "pile de blocs" mais simplement le résultat de $T_1, T_1(A)$: double application de la transformation T_1 au graphe A c'est-à-dire une classe ouverte de 4 sommets

b) "Diagonalisation" d'une pile de blocs

Si dans une matrice (G 2 x G 1) dont les éléments sont des blocs il existe

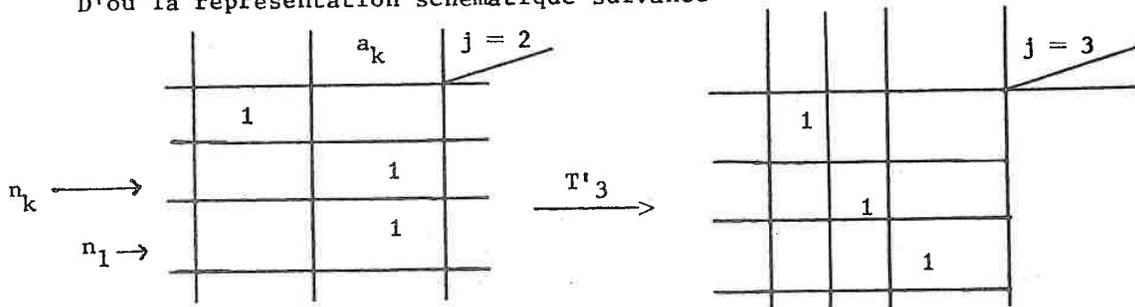
- 1- une colonne contenant un nombre de blocs > 1
- 2- un nombre de lignes supérieur ou égal au nombre de colonnes.

Alors nous pouvons définir une transformation T'_3 : "diagonalisation" d'une pile de blocs qui ajoute une colonne à la matrice (G 2 x G 1)

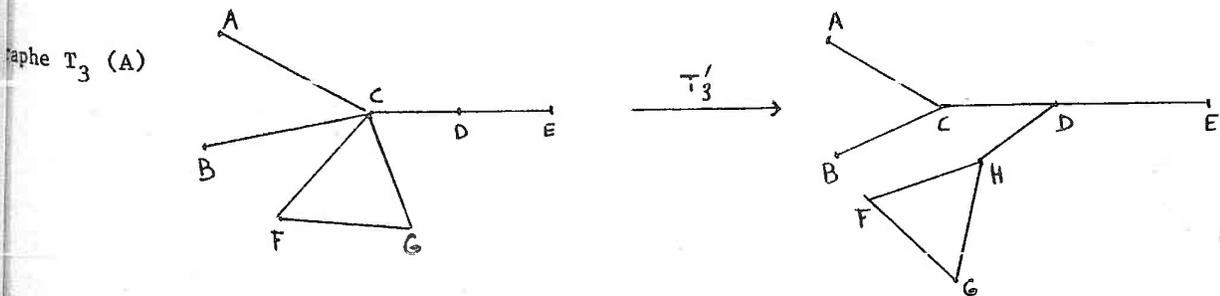
Soient i le nombre de lignes, j le nombre de colonnes et si dans une colonne a_k il existe (n_k et au moins n_1) $\neq 0$

alors $T'_3 : (i, j) \xrightarrow{T'_3} (i, j+1)$

D'où la représentation schématique suivante



EX. Nous ne pouvons appliquer cette transformation T'_3 aux graphes élémentaires A et B. Les exemples les plus simples seront les transformés de A et B : $T_3(A)$ et $T_3(B)$



(fig. IV)

.../...

.../...

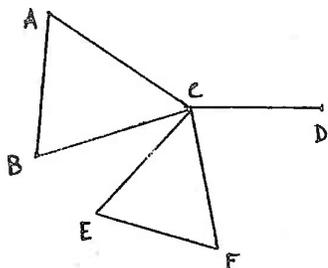
Matrice
(G 2 x G 1)

| | C | |
|---|---|---|
| 1 | | A |
| 1 | | B |
| 1 | | F |
| 1 | | G |

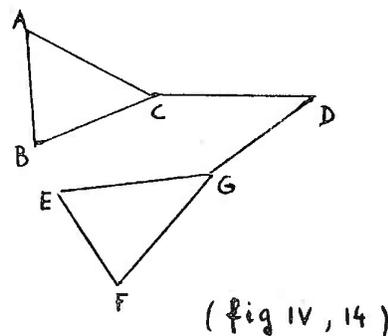
$T'_3 \rightarrow$

| | C | H | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | A |
| 1 | | | B |
| | | 1 | F |
| | | 1 | G |

graphe T_3 (B)



$T'_3 \rightarrow$



(fig IV, 14)

Matrice
(G 2 x G 1)

| | C | |
|---|---|---|
| 1 | | A |
| 1 | | B |
| 1 | | E |
| 1 | | F |

$T'_3 \rightarrow$

| | C | G | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | A |
| 1 | | | B |
| | | 1 | E |
| | | 1 | F |

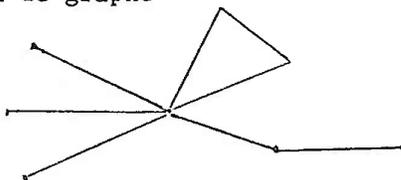
Donc, si la transformation T_3 opère, une "concentration" sur une même classe de G 2, des liaisons avec 2 ou plusieurs classes de G 1, la transformation T'_3 réalise la dispersion de cette concentration, et c'est en ce sens que l'on peut dire que T_3 précède T'_3 .

III.- La combinaison des transformations énoncées ci-dessus : T_1 , T_2 , T_3 , et T'_3 opérant sur les graphes élémentaires A et B peut engendrer une infinité de graphes, aussi complexes qu'on le désirera, mais ces transformations ne sont

...

pas commutatives :

par ex. $T_3 \circ T_1 (A)$ donnera le graphe



(fig. IV, L5)

en revanche $T_1 \circ T_3 (A)$ n'est pas déterminé, car cet énoncé ne précise pas sur quelle classe de G^1 porte la transformation T_1

Pour éviter cette indétermination il est donc nécessaire de revenir maintenant aux notations utilisées dans la première partie de ce chapitre.

En effet avec ces notations

$$A = (x^2)$$

$$T_1 (A) = (x^3)$$

$$T_3 \circ T_1 (A) = \left(\frac{x^3}{2}, \frac{x^2}{2} \right)$$

De même

$$T_3 (A) = \left(\frac{x^2}{2}; \frac{x^2}{2} \right) \text{ par conséquent,}$$

Si nous voulons obtenir un graphe identique à $T_3 \circ T_1 (A)$ en faisant successivement, non plus T_1 puis T_3 , mais T_3 puis T_1 , nous devons écrire

$$T_1 \left(\frac{x^2}{2} \right), \frac{x^2}{2} \text{ qui donne bien } \left(\frac{x^3}{2}, \frac{x^2}{2} \right)$$

Ainsi les transformations fondamentales ne sont utilisables pratiquement que dans le cadre de référence des notations de la première partie.

Nous allons donc les traduire dans ce cadre.

T_1 : ajoute un sommet à une classe g_1^i donc augmente de une unité "l'exposant" d'un x ou d'un y.

$$T_1 (x^3) = x^4 \quad ; \quad T_1 (y^2) = y^3$$

T_2 : laisse invariant cet exposant, mais augmente de une unité le numérateur du coefficient rationnel de x ou de y

$$T_2 (x^2) = 2 x^2 \quad ; \quad T_2 (2 y^3) = 3 y^3$$

$$\text{ou } T_2 (x^2) = (x + y)^2 \quad ; \quad \text{ou } T_2 (2 y^3) = (x + 2y)^3$$

Avec les transformations de la deuxième catégorie, nous obtenons des opérations très différentes.

T_3 fait apparaître un nouvel élément dans le facteur descriptif du graphe et simultanément augmente de une unité les dénominateurs des coefficients

de la suite ainsi formée

$$T_3(x^2) = \left(\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}\right)$$

$$T_3\left(\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{3}\right) = T_3 \circ T_3(x^2) = T_3^2(x^2)$$

Enfin T_3' supprime la dénominateur d'un élément de la suite et diminue de une unité les dénominateurs des éléments restants

ex. $T_3'\left(\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}\right) = (x^2, x^2)$

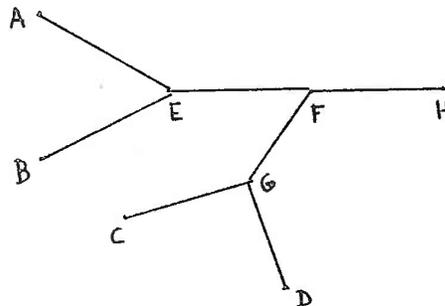
$$T_3'\left(\frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{3}\right) = \left(\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}, x^2\right)$$

$$T_3'\left(\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2}, x^2\right) = (x^2, x^2, x^2)$$

Transformation T_0

Certains types de graphes ne peuvent être obtenus à l'aide des seules transformations T_1, T_2, T_3 et T_3'

Par exemple le graphe suivant



(fig. IV, 16)

Il est donc nécessaire d'introduire une nouvelle transformation, celle à laquelle nous faisons allusion à la fin de la première partie de ce chapitre : la transformation qui permet le passage d'un graphe élémentaire fermé à un graphe élémentaire ouvert : soit T_0 .

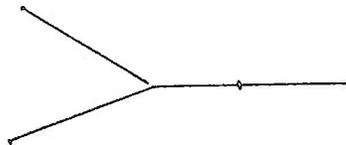
$$B \xrightarrow{T_0} A$$

Remarque : Nous plaçons cette transformation T_0 nettement à part des 4 précédentes car elle intervient, non plus dans la matrice $(G \times G)$, mais dans la matrice $(G \times G)$ et plus précisément dans la partie diagonale de cette matrice.

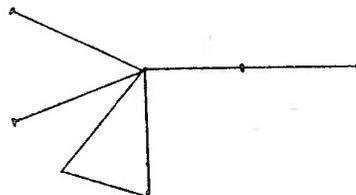
Nous pouvons désormais décrire la formation du graphe de la figure ci-dessus à l'aide de la combinaison de transformations suivante

$$T_0 \circ T_3' \circ T_3 (A)$$

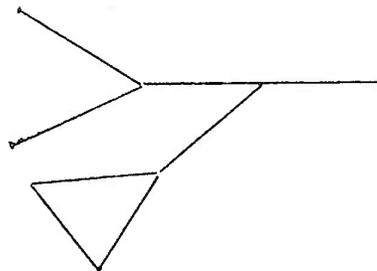
En effet soit A:



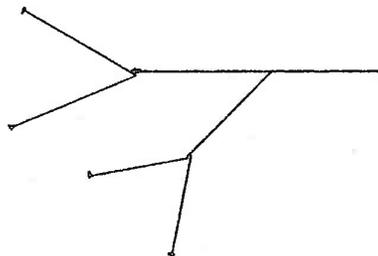
$T_3(A)$



$T_3' \circ T_3 (A)$



$T_0 \circ T_3' \circ T_3 (A)$



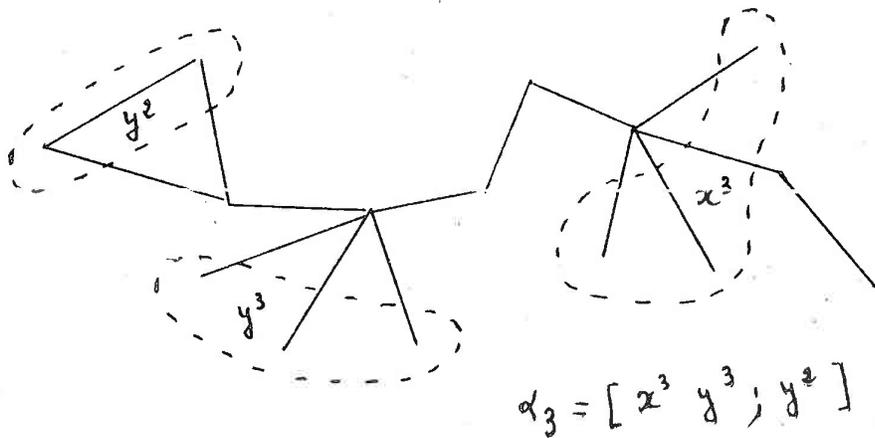
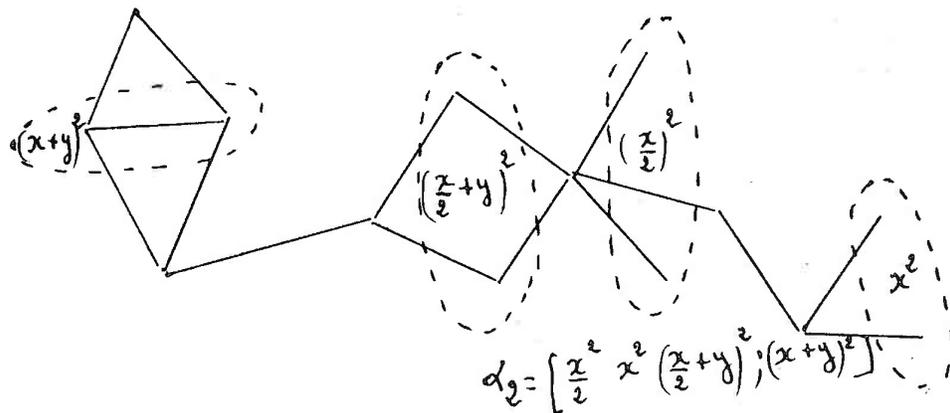
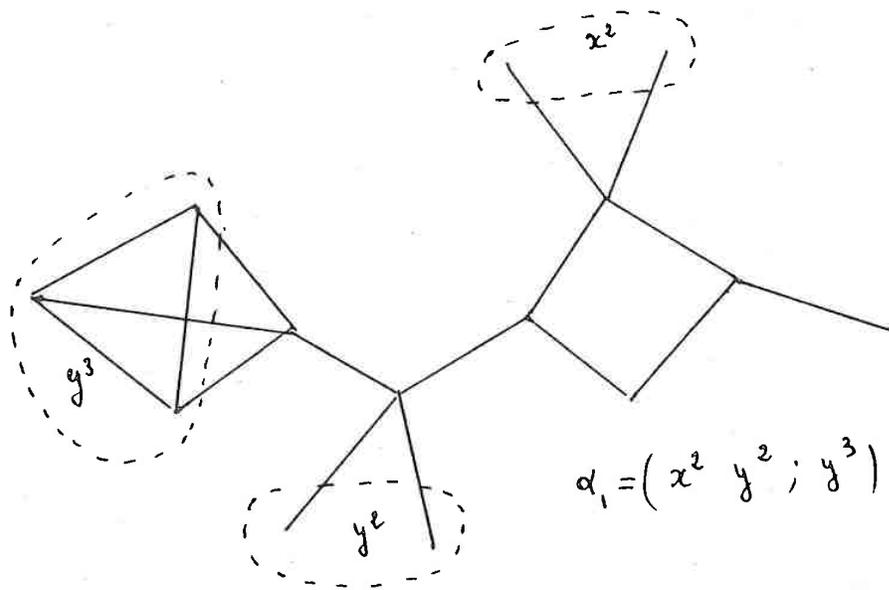
(fig. IV, 17)

3ème partie : classement des graphes - "Distance" entre graphes

Utilisant l'ensemble complet des transformations T ; T_1 , T_2 , T_3 , T_3' à l'intérieur des facteurs descriptifs des graphes, nous pouvons interpréter un graphe quelconque comme le résultat d'une suite de produits de transformations des éléments d'un autre graphe quelconque.

Ces suites de transformations nous permettront d'introduire une notion, vérifiant des axiomes analogues à ceux vérifiés par la distance dans un espace métrique.

Soient par exemple, les 3 graphes ci-contre : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (fig. IV, 18)



(fig. IV, 18)

leurs facteurs descriptifs sont

$$\alpha_1 = [x^2 \quad y^2 \quad ; \quad y^3]$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{x}{2} \quad x^2 \quad \left(\frac{x}{2} + y \right)^2 \quad ; \quad (x + y)^2 \right]$$

$$\alpha_3 = [x^3 \quad y^3 \quad ; \quad y^2]$$

Cherchons quelles sont les transformations assurant les passages entre ces graphes.

Soit T_r telle que $\alpha_1 \xrightarrow{T_r} \alpha_2$

Remarque : Nous désignons par \dot{I} la transformation identique

$$\text{ainsi : } \dot{I}(x^2) = x^2$$

Pour T_r nous obtenons la suite :

$$\dot{I}(x^2) = x^2$$

$$T_2(y^2) = (x + y)^2$$

$$T_3 \left[(x + y)^2 \right] = \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} + y \right)^2$$

$$T_1^{-1}(y^3) = y^2$$

$$T_2(y^2) = (x + y)^2$$

Ou encore

$$T_r(\alpha_1) = \left[\begin{array}{ccc} \dot{I}(x^2) & T_3 \circ T_2(y^2) & ; \quad T_2 \circ T_1^{-1}(y^2) \\ x^2 & \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} + y \right)^2 & ; \quad (x + y)^2 \end{array} \right] = \alpha_2$$

Soit T''_r telle que $\alpha_2 \xrightarrow{T''_r} \alpha_3$

à T''_r correspond la suite :

$$T_1(x^2) = x^3$$

$$T_3^{-1} \left[\frac{x}{2} \left(\frac{x}{2} + y \right)^2 \right] = (x + y)^2$$

$$T_2^{-1}(x + y)^2 = y^2$$

$$T_1(y^2) = y^3$$

$$T_2^{-1}(x + y)^2 = y^2$$

Ou encore

$$\begin{aligned} T''_r (\alpha_2) &= \left[T_1 (x^2) \quad T_1 \cdot T_2^{-1} \cdot T_3^{-1} \left[\frac{x^2}{2} \quad (\frac{x}{2} + y)^2 \right] ; T_2^{-1} (x + y)^2 \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} x^3 & y^3 \end{array} ; \begin{array}{cc} y^2 & \end{array} \right] = \alpha_3 \end{aligned}$$

Enfin soit T''_r telle que $\alpha_1 \xrightarrow{T''_r} \alpha_3$

Pour T''_r nous avons

$$T_1 (x^2) = x^3$$

$$T_1 (y^2) = y^3$$

$$T_1^{-1} (y^3) = y^2$$

Donc

$$\begin{aligned} T''_r (\alpha_1) &= \left[T_1 (x^2) \quad T_1 (y^2) ; T_1^{-1} (y^3) \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} x^3 & y^3 \end{array} ; \begin{array}{cc} y^2 & \end{array} \right] = \alpha_3 \end{aligned}$$

Définissons maintenant le produit de 2 transformations complexes Tr de la façon suivante

Soit un facteur descriptif de graphe : α_i

$$\alpha_i = (a \quad b \quad c)$$

a, b, c sont des éléments isolés du facteur

$$\text{ex : } a = x^2, b = (x + y)^2$$

ou plusieurs éléments

$$\text{ex : } a = \left[\frac{x^2}{2} \quad (\frac{x}{2} + y)^2 \right]$$

$T^i_r (\alpha_i) = \alpha_j$ est de la forme

$$\left[T_s (a) \quad T_v (b) \quad T_u (c) \right]$$

avec $T_s, T_v, T_u =$ produit de transformations simples :

$$T_1, T_2, T_3, T_3'$$

Nous écrirons de même

$$\alpha_j = (a' \quad b' \quad c')$$

avec $a' = T_s (a)$, $b' = T_v (b)$, $c' = T_u (c)$

$$\text{et } T^i_r (\alpha_j) = \left[T_{s'} (a') \quad T_{v'} (b') \quad T_{u'} (c') \right] = \alpha_k$$

Dans ces conditions, nous posons

$$\text{Tr}^j \text{Tr}^i (\alpha_i) = \left[T_{s'} \cdot T_s^{-1}(a) \quad T_{v'} \cdot T_v (b) \quad T_{u'} \cdot T_u (c) \right]$$

Alors si $\alpha_k = (a'' , b'' , c'')$

$$\text{et si } \alpha_k = \left[T_{s''} (a) \quad T_{v''} (b) \quad T_{u''} (c) \right] = \text{Tr}^k (\alpha_i)$$

Nous avons bien

$$\text{Tr}^j \text{Tr}^i = \text{Tr}^k$$

$$\text{avec } T_{s'} \cdot T_s = T_{s''} \quad ; \quad T_{v'} \cdot T_v = T_{v''} \quad ; \quad T_{u'} \cdot T_u = T_{u''}$$

Vérifions ceci avec les exemples des graphes $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$

$$\begin{aligned} \text{Tr}'' \text{Tr}' (\alpha_1) &= \left[T_1 \cdot I (x^2) \quad T_1 T_2^{-1} T_3^{-1} T_3 T_2 (y^2) \quad ; \quad T_2^{-1} T_2 T_1^{-1} (y^2) \right] \\ &= \left[T_1 (x^2) \quad T_1 (y^2) \quad ; \quad T_1^{-1} (y^2) \right] \\ &= \text{Tr}''' (\alpha_1) \end{aligned}$$

"Distance" entre graphes : A chaque transformation complexe Tr, qui permet de passer d'un graphe α_i à un graphe α_j , nous ferons correspondre une "distance" $T (\alpha_i , \alpha_j)$ définie ainsi (1)

$$\text{Soit } \text{Tr} (\alpha_i) = \left[T_s (a) \quad T_v (b) \quad T_u (c) \right] = \alpha_j$$

$$\text{alors } T (\alpha_i , \alpha_j) = |T_s| \quad |T_v| \quad |T_u|$$

avec $|T_s| , |T_v| , |T_u| =$ produits des transformations simples : T_1, T_2, T_3, T_3 ; les exposants étant pris en valeur absolue.

Par exemple si $T_s = T_1 T_2^{-1} T_3^{-1} T_3$

$$|T_s| = T_1 T_2 T_3^2$$

Ainsi dans l'exemple des graphes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$T (\alpha_1, \alpha_2) = T_1 T_2^2 T_3$$

$$T (\alpha_2, \alpha_3) = T_1^2 T_2^2 T_3$$

$$T (\alpha_1, \alpha_3) = T_1^3$$

Montrons que ces applications T vérifient les axiomes d'une distance.
Pour cela posons

(1) Ces distances permettent simplement de situer les graphes dans l'espace des matrices $(G_1 \times G_2)$, c'est-à-dire que 2 graphes α_i, α_j , ayant des classes g_1 différentes (ouvertes ou fermée) ne seront pas séparés par $T (\alpha_i, \alpha_j)$

$$1) T(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}(\alpha_i, \alpha_j) = [\dot{i}(a) \dots \dot{i}(d)] \\ = \text{suite de transformations identiques}$$

2) "Somme" de T

$$\text{Soit } T(\alpha_i, \alpha_j) = T_1^{|n|} \quad T_2^{|m|} \quad T_3^{|p|}$$

$$T(\alpha_k, \alpha_l) = T_1^{|r|} \quad T_2^{|s|} \quad T_3^{|t|}$$

$$\text{Alors } T(\alpha_i, \alpha_j) + T(\alpha_k, \alpha_l) = T_1^{|n|+|r|} \quad T_2^{|m|+|s|} \quad T_3^{|p|+|t|}$$

3) Relation d'ordre entre T

$$T(\alpha_i, \alpha_j) \leq T(\alpha_k, \alpha_l)$$

$$\text{si pour } T_1 \quad n \leq r$$

$$\text{si pour } T_2 \quad m \leq s$$

$$\text{si pour } T_3 \quad p \leq t$$

Dans ces conditions les axiomes
de séparation et de symétrie
sont évidents

$$T(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha_j$$

$$T(\alpha_i, \alpha_j) = T(\alpha_j, \alpha_i)$$

Reste à vérifier l'inégalité triangulaire

$$T(\alpha_i, \alpha_j) \leq T(\alpha_i, \alpha_k) + T(\alpha_k, \alpha_j) \quad ?$$

Soient

$$\alpha_i \xrightarrow{\text{Tr}'} \alpha_k; \text{Tr}'(\alpha_i) = [T_s(a) \quad T_v(b) \quad T_u(c)] = \alpha_k$$

$$\text{à Tr}' \text{ correspond } T(\alpha_i, \alpha_k) = |T_s| \quad |T_v| \quad |T_u|$$

ou en faisant apparaître les transformations

$$T_1, T_2, T_3; T(\alpha_i, \alpha_j) = T_1^{|n|} \quad T_2^{|m|} \quad T_3^{|l|}$$

$$\alpha_k \xrightarrow{\text{Tr}''} \alpha_j, \text{Tr}''(\alpha_k) = [T_{s'}(a') \quad T_{v'}(b') \quad T_{u'}(c')] = \alpha_j$$

$$\text{à Tr}'' \text{ correspond } T(\alpha_k, \alpha_j) = |T_{s'}| \quad |T_{v'}| \quad |T_{u'}|$$

$$\text{ou } T(\alpha_k, \alpha_j) = T_1^{|n'|} \quad T_2^{|m'|} \quad T_3^{|l'|}$$

$$\alpha_i \xrightarrow{\text{Tr}'''} \alpha_j, \text{Tr}'''(\alpha_i) = \text{Tr}'' \cdot \text{Tr}'(\alpha_i) = \alpha_j$$

$$= [T_{s'} \cdot T_s(a) \quad T_{v'} \cdot T_v(b) \quad T_{u'} \cdot T_u(c)]$$

$$\text{à Tr}''' \text{ correspond } T(\alpha_i, \alpha_j) = |T_{s'} \cdot T_s| \quad |T_{v'} \cdot T_v| \quad |T_{u'} \cdot T_u|$$

$$\text{ou } T(\alpha_i, \alpha_j) = T_1^{|n+n'|} \quad T_2^{|m+m'|} \quad T_3^{|l+l'|}$$

Et d'après la définition de la somme de 2 T

$$T(\alpha_i, \alpha_k) + T(\alpha_k, \alpha_j) = T_1^{|\ln|+|\ln'|} T_2^{|\ln|+|\ln''|} T_3^{|\ln|+|\ln'|}$$

Vérifions cette propriété de l'inégalité triangulaire sur les exemples $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$T(\alpha_1, \alpha_2) = T_1^{|\alpha_2|} T_2^{|\alpha_2|} T_3$$

$$T(\alpha_1, \alpha_3) = T_1^{|\alpha_3|}$$

$$T(\alpha_2, \alpha_3) = T_1^{|\alpha_3|} T_2^{|\alpha_3|} T_3$$

$$\begin{aligned} T(\alpha_1, \alpha_3) + T(\alpha_3, \alpha_2) &= (T_1^{|\alpha_3|}) + (T_1^{|\alpha_2|} + T_2^{|\alpha_2|} + T_3) \\ &= T_1^{|\alpha_3|} + T_2^{|\alpha_2|} + T_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(\alpha_1, \alpha_2) < T(\alpha_1, \alpha_3) + T(\alpha_3, \alpha_2)$$

$$\begin{aligned} T(\alpha_1, \alpha_2) + T(\alpha_2, \alpha_3) &= (T_1^{|\alpha_2|} T_2^{|\alpha_2|} T_3) + (T_1^{|\alpha_3|} T_2^{|\alpha_3|} T_3) \\ &= T_1^{|\alpha_2|} T_2^{|\alpha_2|} T_3 + T_1^{|\alpha_3|} T_2^{|\alpha_3|} T_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(\alpha_1, \alpha_3) < T(\alpha_1, \alpha_2) + T(\alpha_2, \alpha_3)$$

$$\begin{aligned} T(\alpha_3, \alpha_1) + T(\alpha_1, \alpha_2) &= (T_1^{|\alpha_3|}) + (T_1^{|\alpha_2|} T_2^{|\alpha_2|} T_3) \\ &= T_1^{|\alpha_3|} + T_1^{|\alpha_2|} T_2^{|\alpha_2|} T_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(\alpha_3, \alpha_2) < T(\alpha_3, \alpha_1) + T(\alpha_1, \alpha_2)$$

4ème partie. Transformation d'un graphe quelconque en un graphe structuré en classes G 1, G 2, G 3.

Le plus souvent, nous risquons de rencontrer des graphes où la partition en classes G 1 n'est pas possible. Il faut donc modifier ces graphes afin d'obtenir une structure du type (G 1, G 2, G 3).

Pour ce faire, on supprime certaines arêtes dont la présence interdit la partition en classes G 1. Autrement dit, on supprime les liaisons qui empêchent d'apercevoir les groupes de liaisons analogues.

Mais il faut évidemment tenir compte de ces modifications et par conséquent avoir un moyen de les caractériser.

Nous utiliserons pour cela la nature des classes dans lesquelles se rangent les sommets après suppression d'arêtes.

Par exemple si dans un graphe, après avoir supprimé les arêtes

A B Et C D

A et C appartiennent à G 1

B à G 2 et D à G 3.

Alors nous caractériserons la suppression de A B par (G 1, G 2) ou (1, 2)
et celle de C D par (G 1, G 3) ou (1, 3)
et la transformation totale : suppression des arêtes A B et C D
sera $T' = (1, 2) (1, 3)$

Remarque 1 : On supprime des arêtes, mais on conserve tous les sommets et les arêtes à supprimer sont choisies de telle sorte que les parties du graphe, connexes avant la transformation T' demeurent connexes après la transformation T' .

Remarque 2 : Ces transformations sont indépendantes des précédentes et ne peuvent être composées avec elles, on les classera donc toujours dans une rubrique spéciale.

5ème partie : Application aux groupes de dessins

Nous avons appliqué cette méthode à nos 3 groupes de dessins. Les graphes correspondants comportant un nombre restreint d'arêtes, on admet que l'on pourra étudier la forme des graphes en négligeant les variations d'intensité sur ces arêtes. L'examen des variations d'intensité a d'ailleurs fait l'objet du chapitre II.

Pour décomposer les graphes en classes G 1, G 2, G 3, il faut déjà leur faire subir des transformations T' . On indique la nature de ces transformations dans la 2ème colonne du tableau n° 4, la 3ème colonne contient les facteurs descriptifs des graphes.

Résultats : Le groupe 1 ne contient aucun facteur entièrement fermé (nous désignons ainsi des facteurs où tous les x et tous les y sont situés à droite du point virgule).

Le groupe 3 ne contient aucun facteur entièrement ouvert (x et y à gauche du point virgule).

Le groupe 2, enfin contient les deux :

facteurs fermés : graphes n°s 90, 99.

facteurs ouverts : graphes n°s 111, 159.

On retrouve donc la position du groupe 2 intermédiaire entre les groupes 1 et 3.

On peut ensuite essayer de situer ces facteurs dans des régions distinctes.

On utilise pour cela la "distance" $T(\alpha_i, \alpha_j)$

Pour chaque groupe de dessins on cherchera quel facteur occupe la position la plus centrale, c'est-à-dire le facteur dont les distances aux autres facteurs sont minimales. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que ce facteur-centre figure explicitement dans le groupe.

Puisque le groupe 1 est à tendance ouverte, nous prendrons comme facteur-centre $(x^2; 0)$

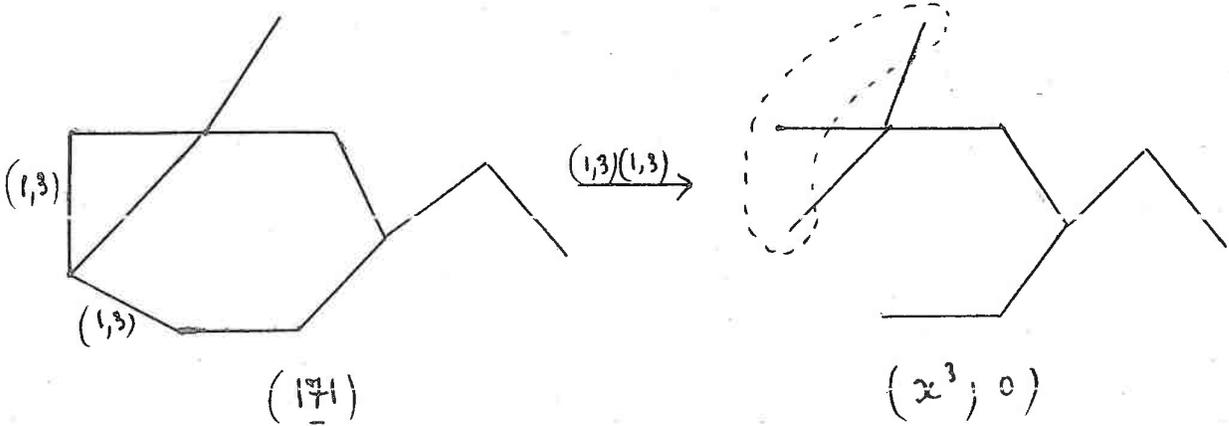
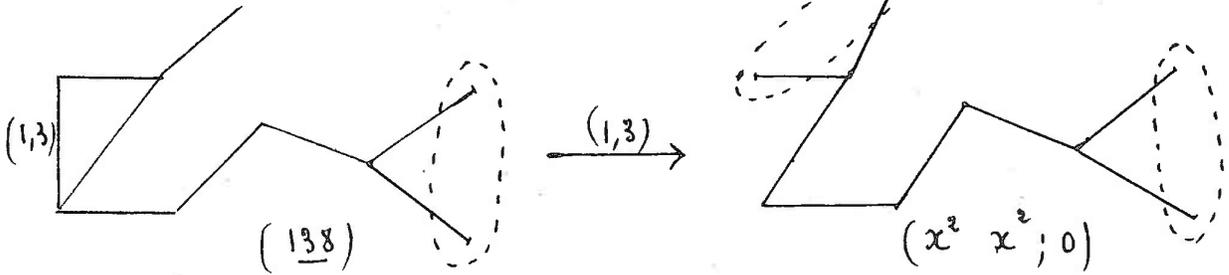
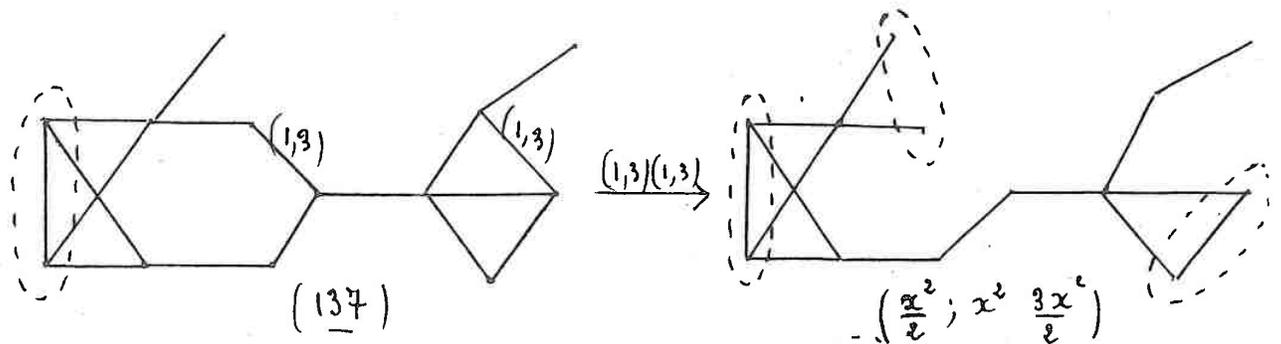
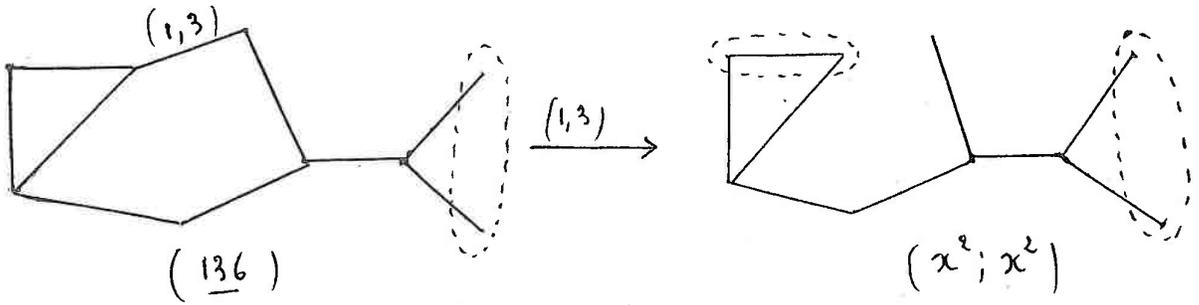
Dans le groupe 2 (mixte) : $(x^2; x^2)$

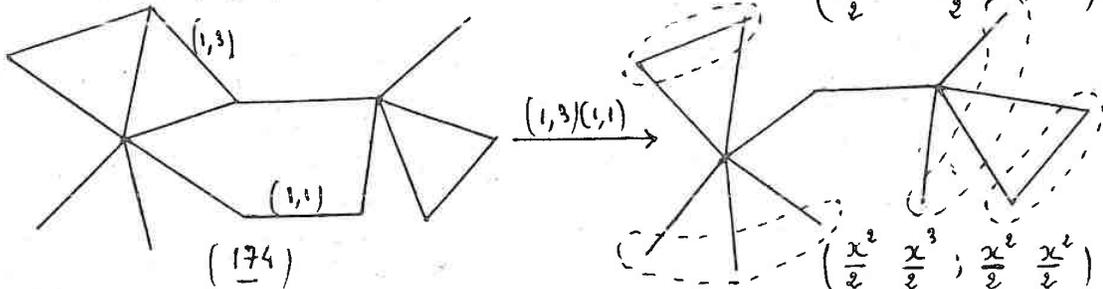
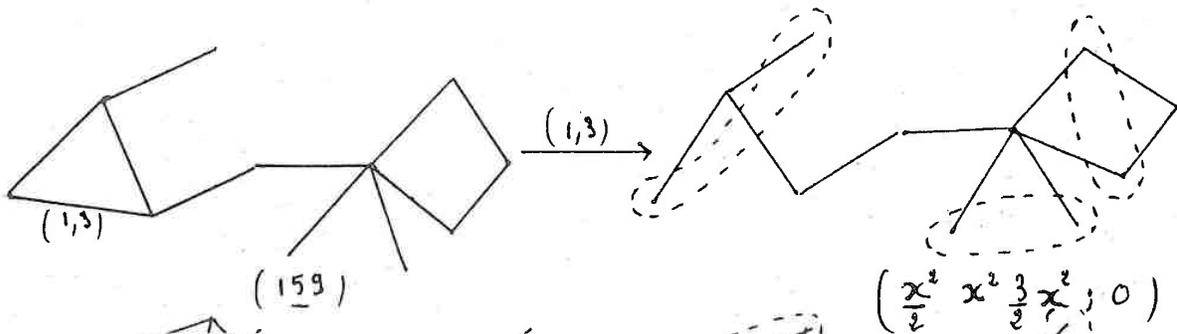
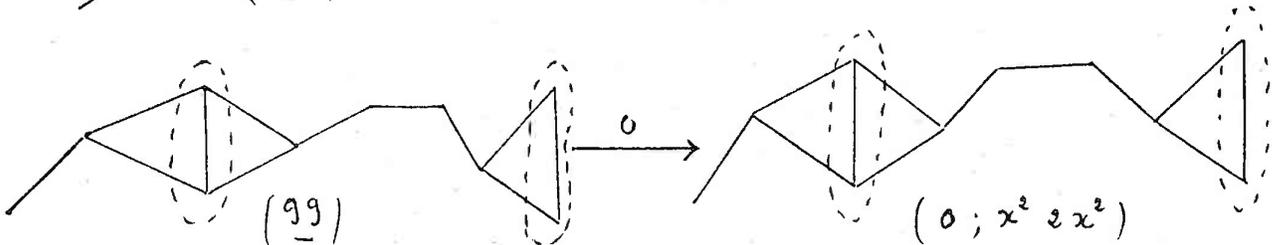
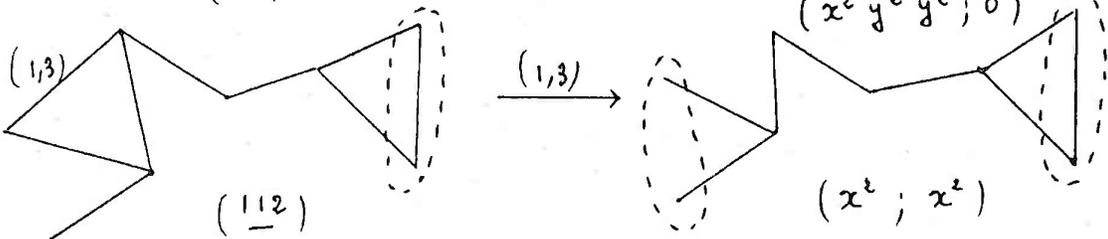
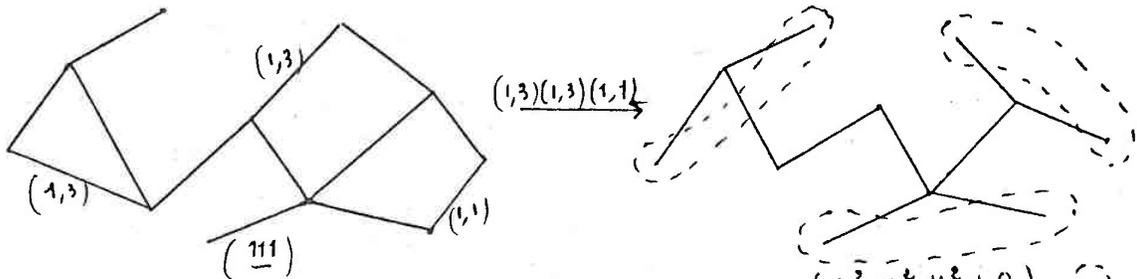
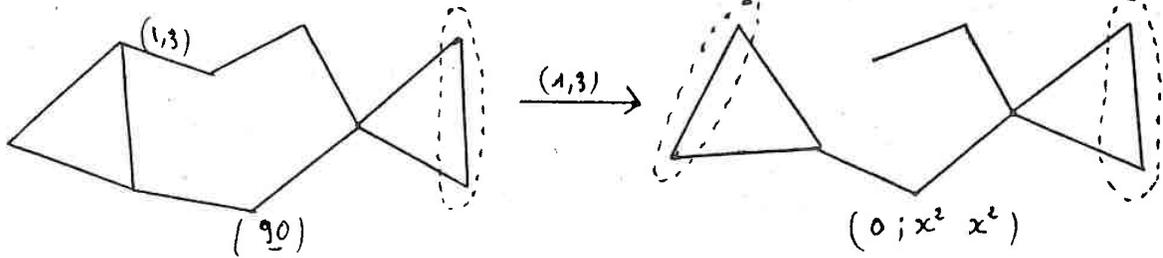
Dans le groupe 3 (fermé) : $(0; x^2 x^2)$

On obtient alors le tableau n° 5. Pour faciliter les comparaisons, les distances sont groupées dans des tableaux : une colonne par transformation, les éléments de la colonne sont les "puissances absolues" de la transformation.

(suite tableau n° 4 page suivante)

groupe 1





groupe 3

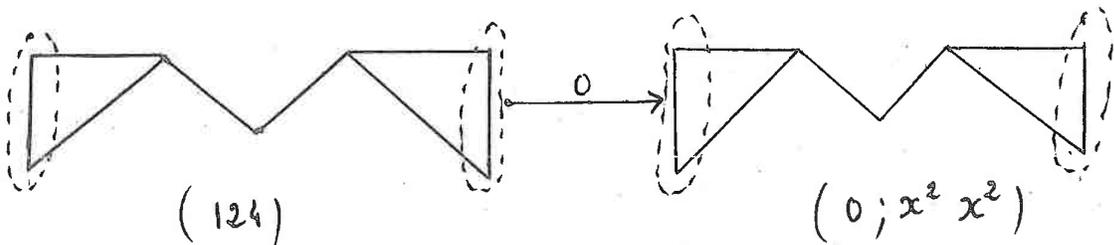
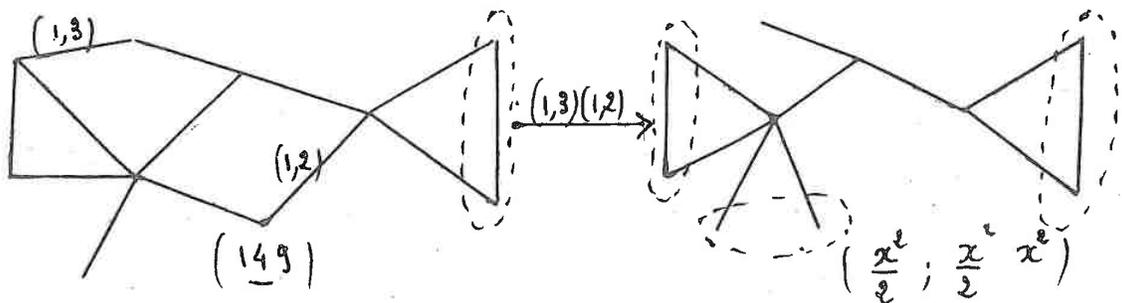
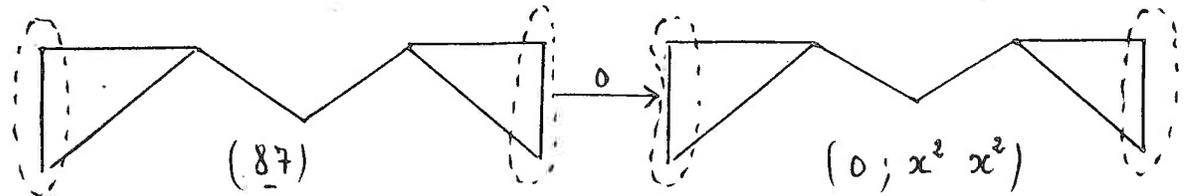
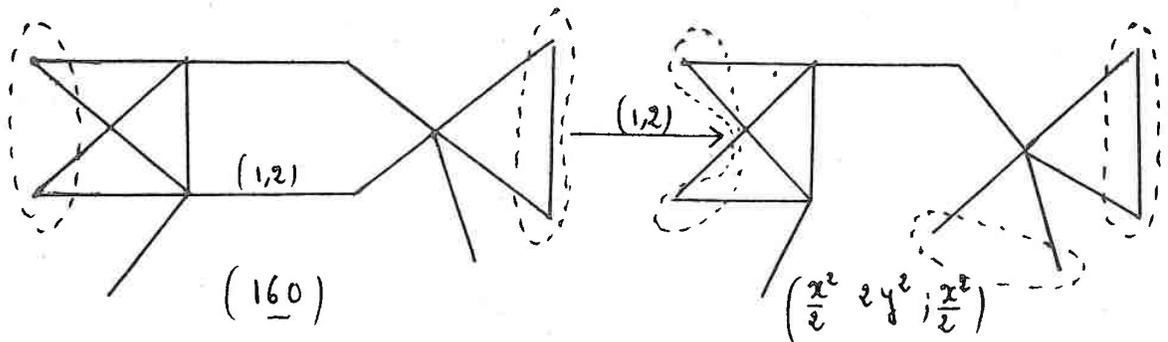
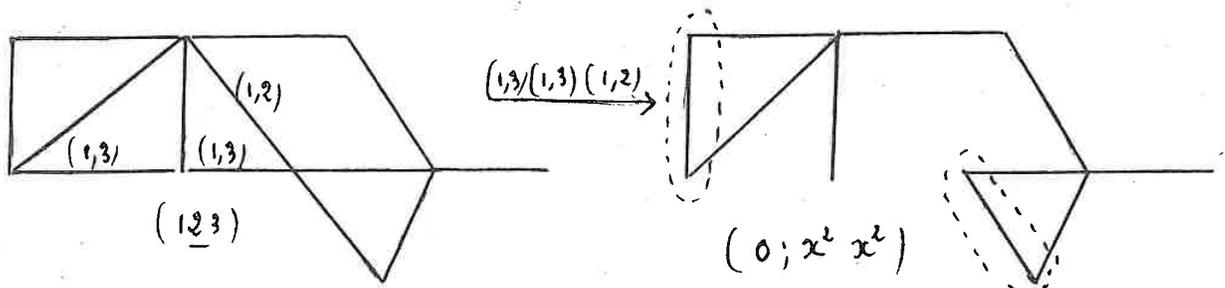


Tableau n° 4

| <u>Groupe 1</u> | | |
|-----------------|----------------|---|
| N° références | T' | Facteurs |
| 136 | (1,3) | $(x^2 ; x^2)$ |
| 137 | $(1,3)^2$ | $(\frac{x^2}{2} ; x^2 \frac{3x^2}{2})$ |
| 138 | (1,3) | $(x^2 x^2 ; 0)$ |
| 171 | $(1,3)^2$ | $(x^3 ; 0)$ |
| <u>Groupe 2</u> | | |
| 90 | (1,3) | $(0 ; x^2 x^2)$ |
| 111 | $(1,3)^2(1,1)$ | $(x^2 y^2 y^2 ; 0)$ |
| 112 | (1,3) | $(x^2 ; x^2)$ |
| 99 | 0 | $(0 ; x^2 2x^2)$ |
| 159 | (1,3) | $(\frac{x^2}{2} x^2 \frac{3}{2} x^2 ; 0)$ |
| 174 | (1,3) (1,1) | $(\frac{x^2}{2} \frac{x^3}{2} ; \frac{x^2}{2} \frac{x^2}{2})$ |
| <u>Groupe 3</u> | | |
| 123 | $(1,3)^2(1,2)$ | $(0 ; x^2 x^2)$ |
| 160 | (1,2) | $(\frac{x^2}{2} 2y^2 ; \frac{x^2}{2})$ |
| 87 | 0 | $(0 ; x^2 x^2)$ |
| 149 | (1,3) (1,2) | $(\frac{x^2}{2} ; \frac{x^2}{2} x^2)$ |
| 124 | 0 | $(0 ; x^2 x^2)$ |

Tableau n° 5

| $X = n^{os}$ des facteurs | $C_i = \text{facteur-centre}$ | $C_i \xrightarrow{\text{Tr}} X$ | $T(C_i, X)$ | | | | |
|---------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|-------|-------|-------|--------|
| groupe 1 | | | $T(C_1, X)$ | | | | |
| | C_1 | Tr | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_3' |
| 136 | $(x^2, 0)$ | $T_3' \cdot T_3 \cdot T_0^{-1}$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 137 | - | $T_2 \cdot T_3 \cdot T_0^{-2} \cdot T_3^2$ | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 138 | - | $T_3' \cdot T_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 171 | - | T_1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Groupe 2 | | | $T(C_2, X)$ | | | | |
| | C_2 | T_r | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_3' |
| 90 | $(x^2; x^2)$ | T_0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 111 | - | $T_0^2 \cdot T_3' \cdot T_3$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 112 | - | \dot{I} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 99 | - | $T_2 \cdot T_0^{-1}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 159 | - | $T_2 \cdot T_3 \cdot T_0$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 174 | - | $T_1 \cdot T_3^2$ | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| Groupe 3 | | | $T(C_3, X)$ | | | | |
| | C_3 | Tr | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_3' |
| 123 | $(0; x^2, x^2)$ | \dot{I} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 160 | - | $T_2 \cdot T_0^2 \cdot T_3$ | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 87 | - | \dot{I} | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 149 | - | $T_0 \cdot T_3$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 174 | - | I | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Nous avons choisi les facteurs-centres de telle sorte que dans chaque groupe la "distance" moyenne présente pour chaque transformation des exposants toujours ≤ 1

| | T_0 | T_1 | T_2 | T_3 | T_3' |
|----------|-------|-------|-------|-------|--------|
| groupe 1 | 3/4 | 1/4 | 1/4 | 1 | 3/4 |
| groupe 2 | 5/6 | 1/6 | 2/6 | 4/6 | 1/6 |
| groupe 3 | 3/5 | 0 | 1/5 | 2/5 | 0 |

Par conséquent, si dans l'étude d'un problème assez complexe, nous disposons d'un nombre suffisant de facteurs, c'est-à-dire, si on a effectué un nombre suffisant d'analyses traduisibles en graphes, alors, on peut essayer d'identifier le centre (ou parfois les centres) de cet ensemble de facteurs. On obtiendra ainsi une description de la structure caractéristique du phénomène étudié. Le même travail pourra se faire avec des problèmes voisins et la comparaison des structures caractéristiques, l'évaluation de leurs distances respectives suggèrera peut-être quelques hypothèses sur l'origine le degré d'évolution ou le point d'aboutissement des fait étudiés.

Conclusion :

Résumons la démarche suivie dans ce travail : Partis d'un exemple relativement "maniable" d'activité humaine, nous nous sommes efforcés de construire un instrument de classification adapté aux difficultés soulevées par l'exemple lui-même. Il est évident que ces premiers résultats exigent des contrôles provenant d'études plus larges portant à la fois sur un plus grand nombre d'objets et sur des domaines voisins du nôtre.

Notre justification essentielle est l'espoir d'appliquer cet instrument à d'autres exemples d'analyse d'activité humaine. Il est très probable d'ailleurs que ceci nous conduira à certaines modifications.

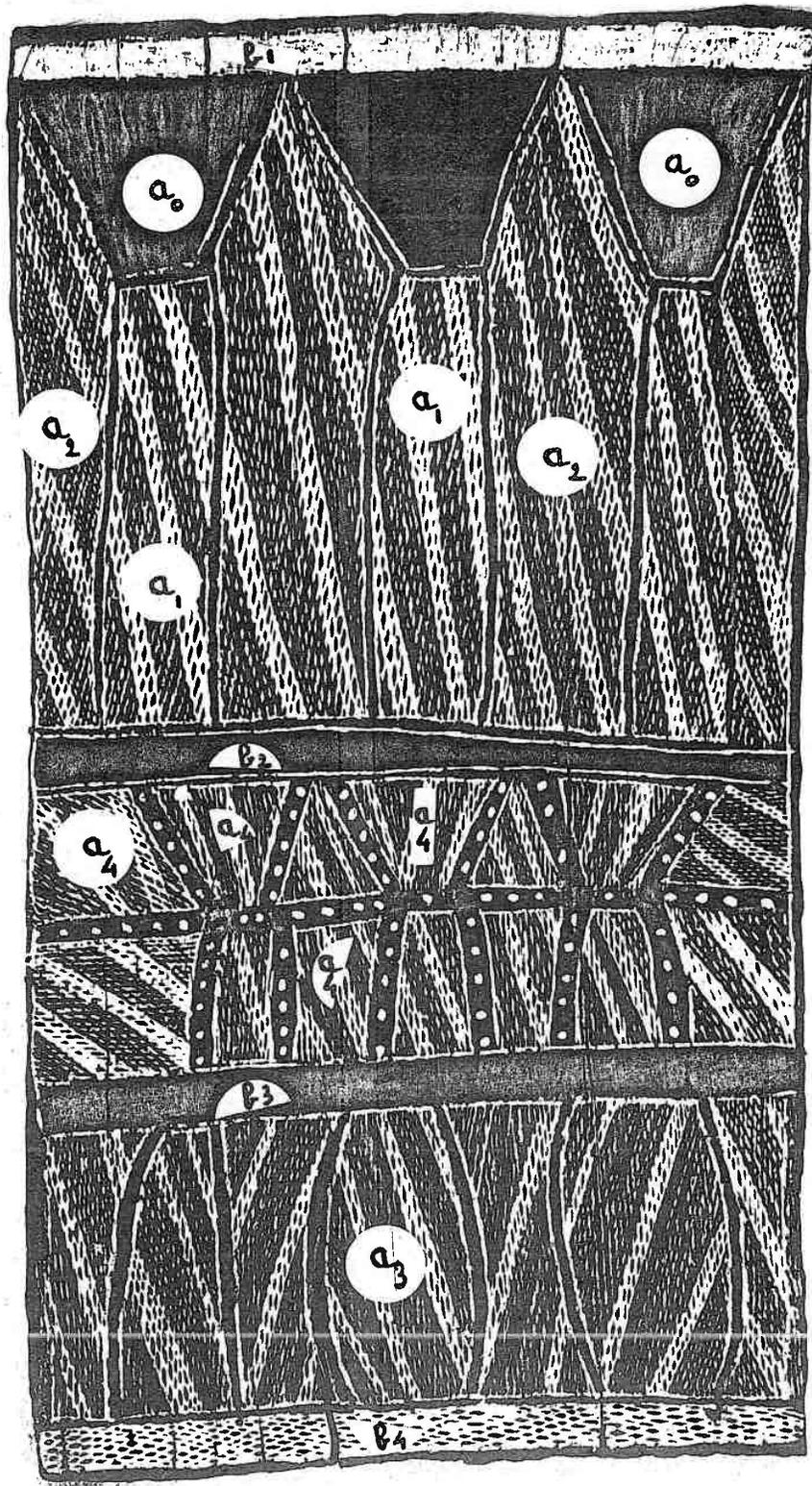
Dans cette perspective, quels sont les domaines offerts à ce type d'analyse ? Il peut sembler hasardeux de répondre à cette question de façon trop nette. Suggérons donc simplement l'étude des formes d'expression, zone privilégiée, mais aussi, l'examen de quelques modes d'organisation sociale où l'on aimerait introduire une hiérarchie, ou plus modestement quelques points de repère. Ces organisations concerneront par exemple les relations entre les membres d'une entreprise économique, entre ce personnel et certaines caractéristiques techniques de l'entreprise, ou encore entre ce même personnel et les milieux extérieurs à l'entreprise.

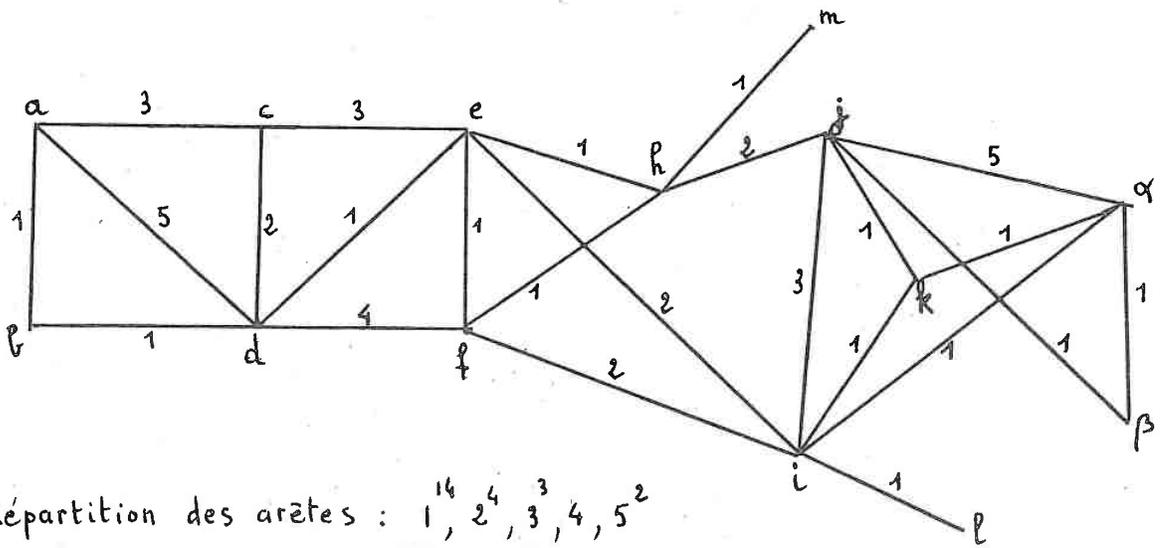
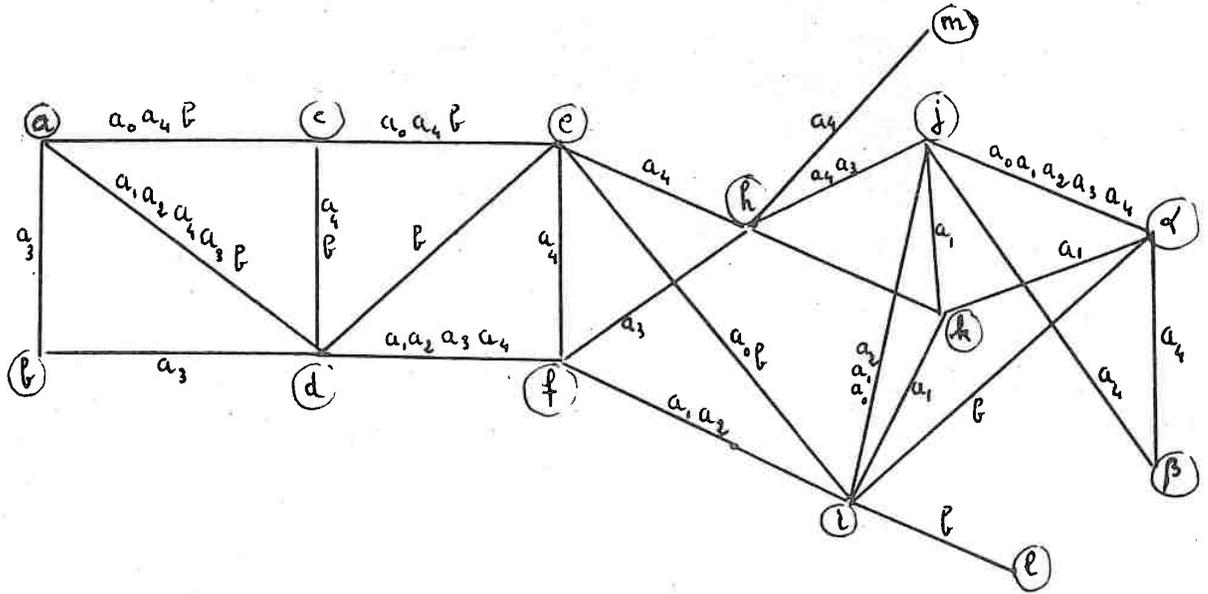
Les relations d'un individu aux différents domaines où s'insère son activité peuvent aussi s'analyser en un grand nombre de variables plus ou moins liées entre elles. On entrevoit ainsi la possibilité de comparer ces réseaux de relations, et donc les individus qui en sont l'origine, comparaison limitée aux types de relations envisagées, mais valables cependant de ce point de vue.

Répetons encore une fois, que, d'une part, ce sont là de simples suggestions et que, d'autre part, l'instrument présenté a besoin d'être "rodé".

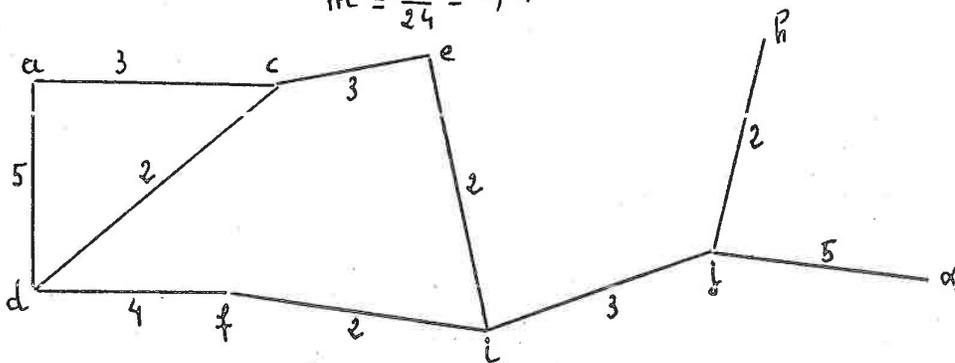
Toutefois, il nous semble que dans de nombreux secteurs des sciences humaines, il est nécessaire d'introduire des méthodes de description et de classification des structures envisagées, suffisamment précises pour dépasser le stade de la simple énumération et ouvrir le chemin sinon de l'explication, du moins d'une compréhension fort proche de la compréhension déductive.

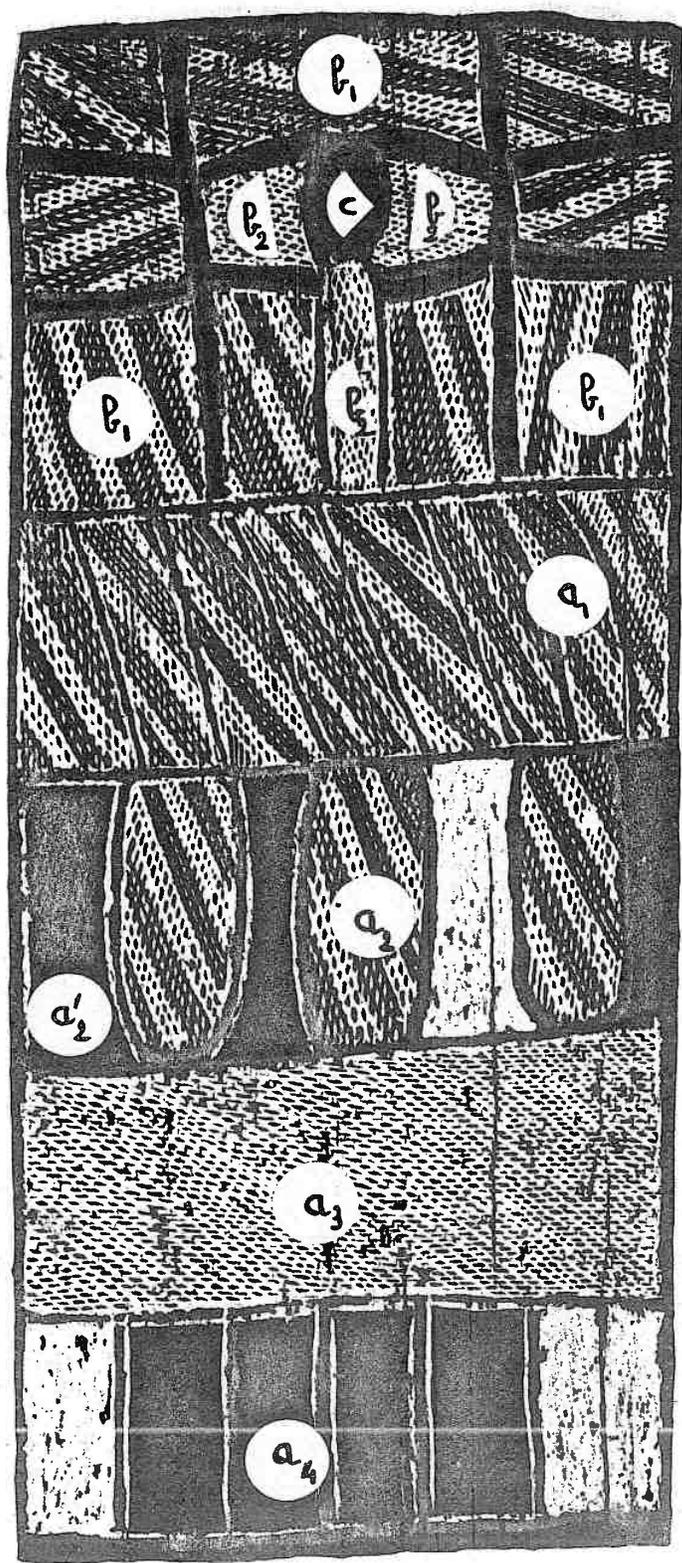
A N N E X E

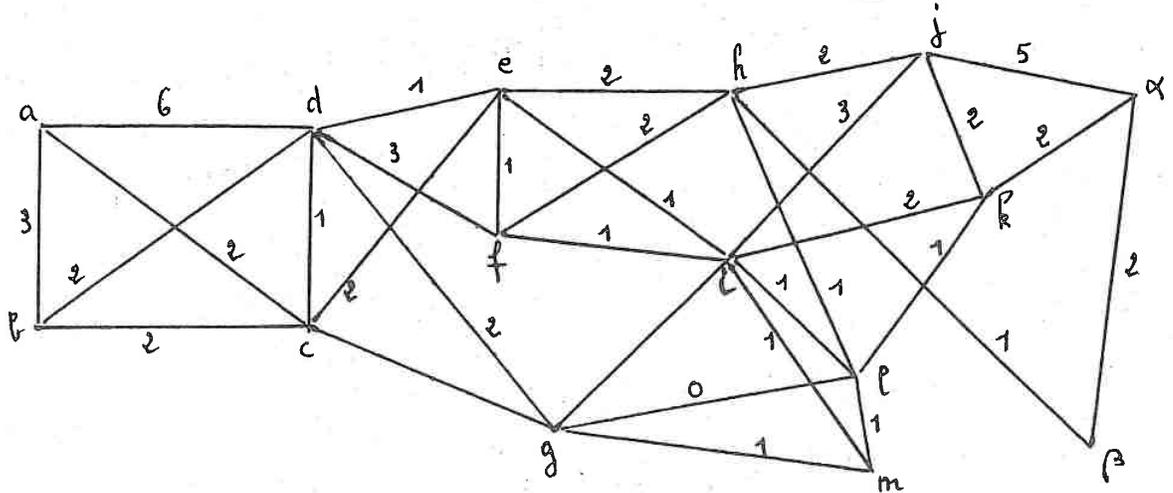
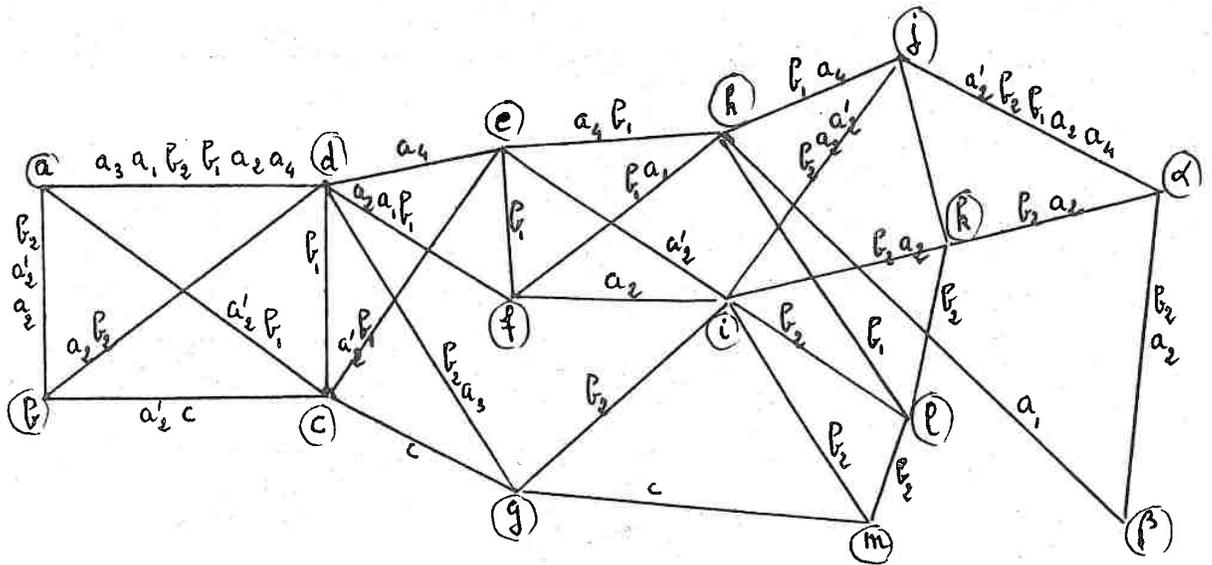




Répartition des arêtes : $1^{16}, 2^4, 3^3, 4, 5^2$
 $m = \frac{45}{24} = 1,875$

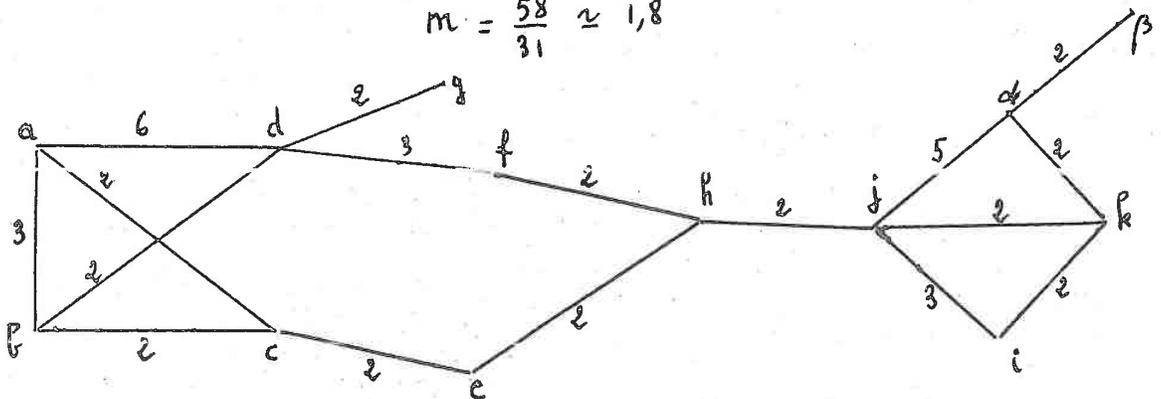


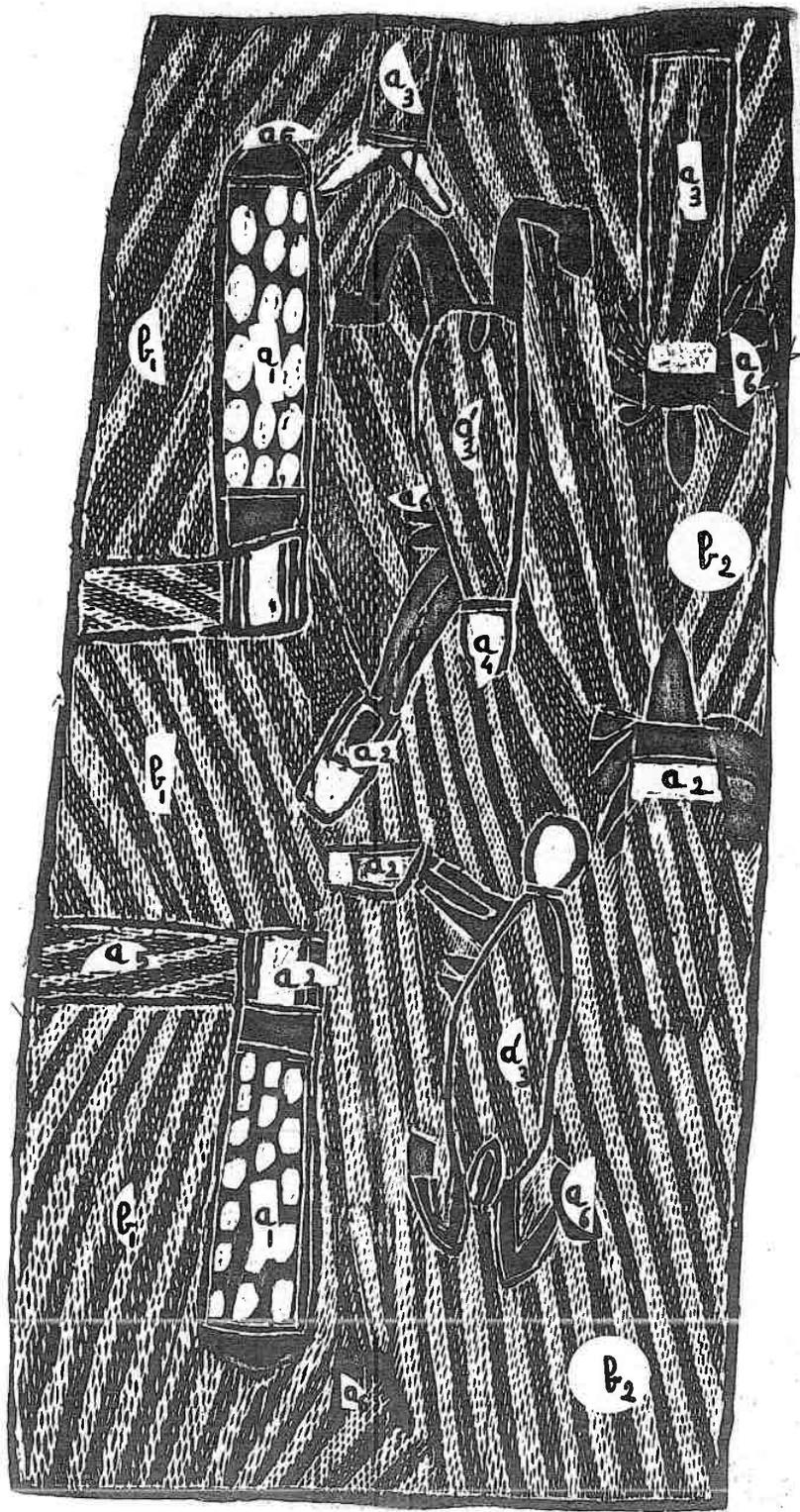


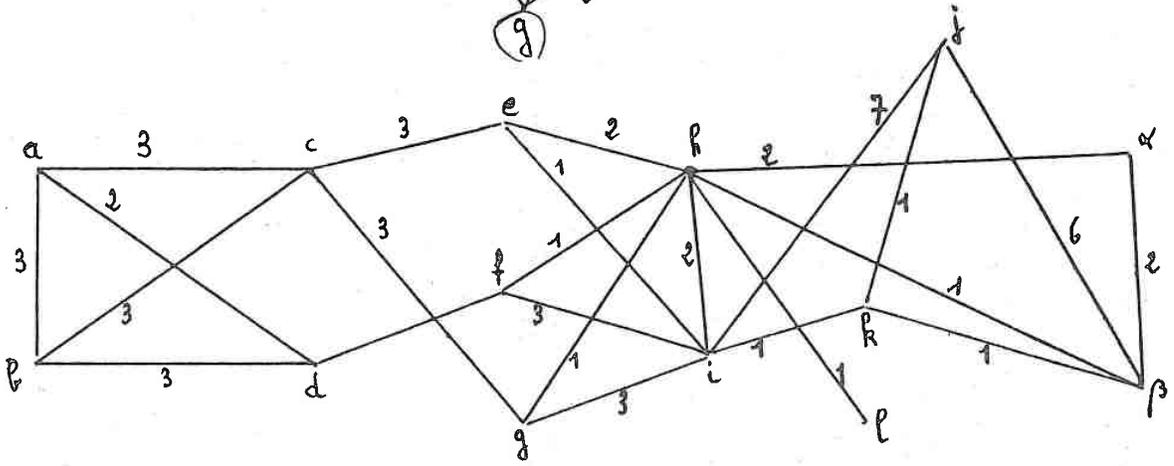
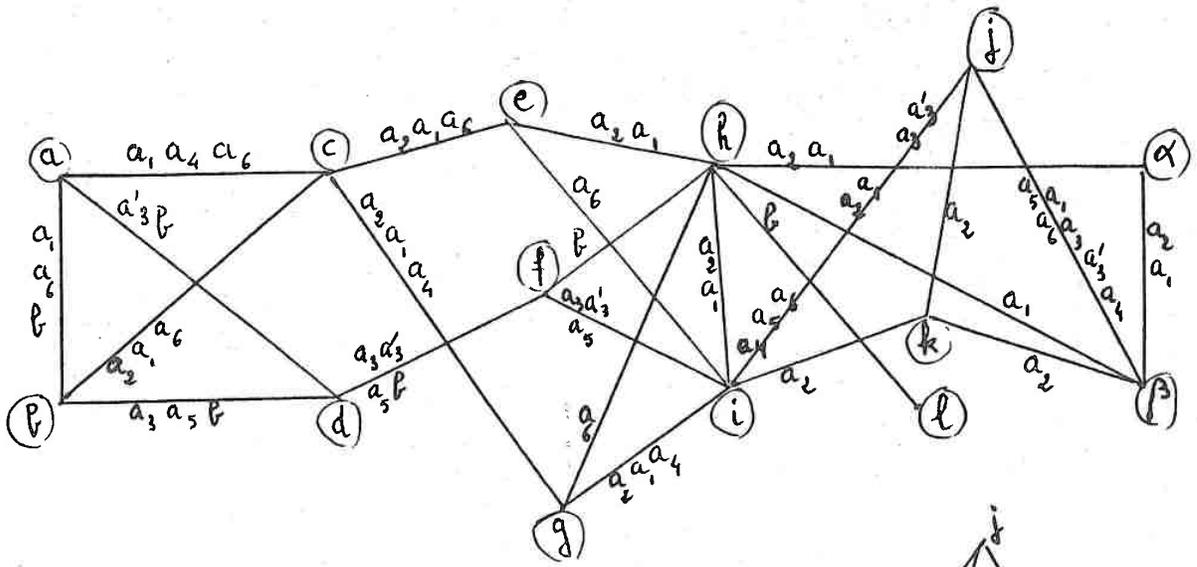


Répartition des arêtes : 1¹⁴, 2¹², 3³, 5, 6

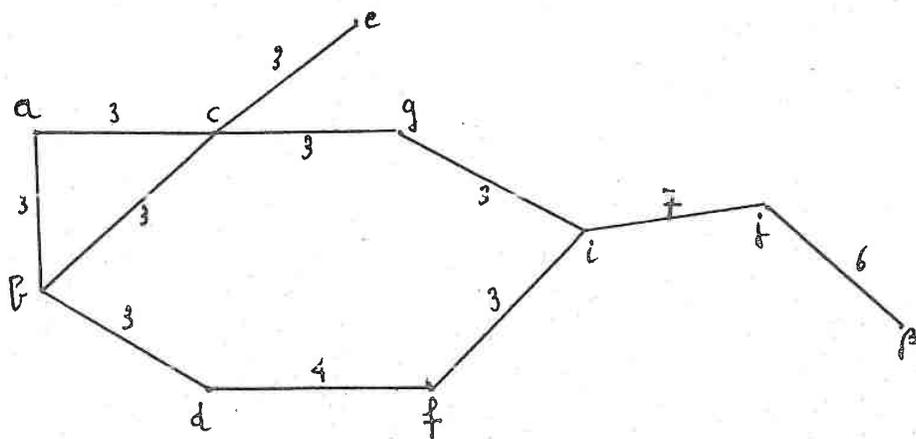
$$m = \frac{58}{31} \approx 1,8$$

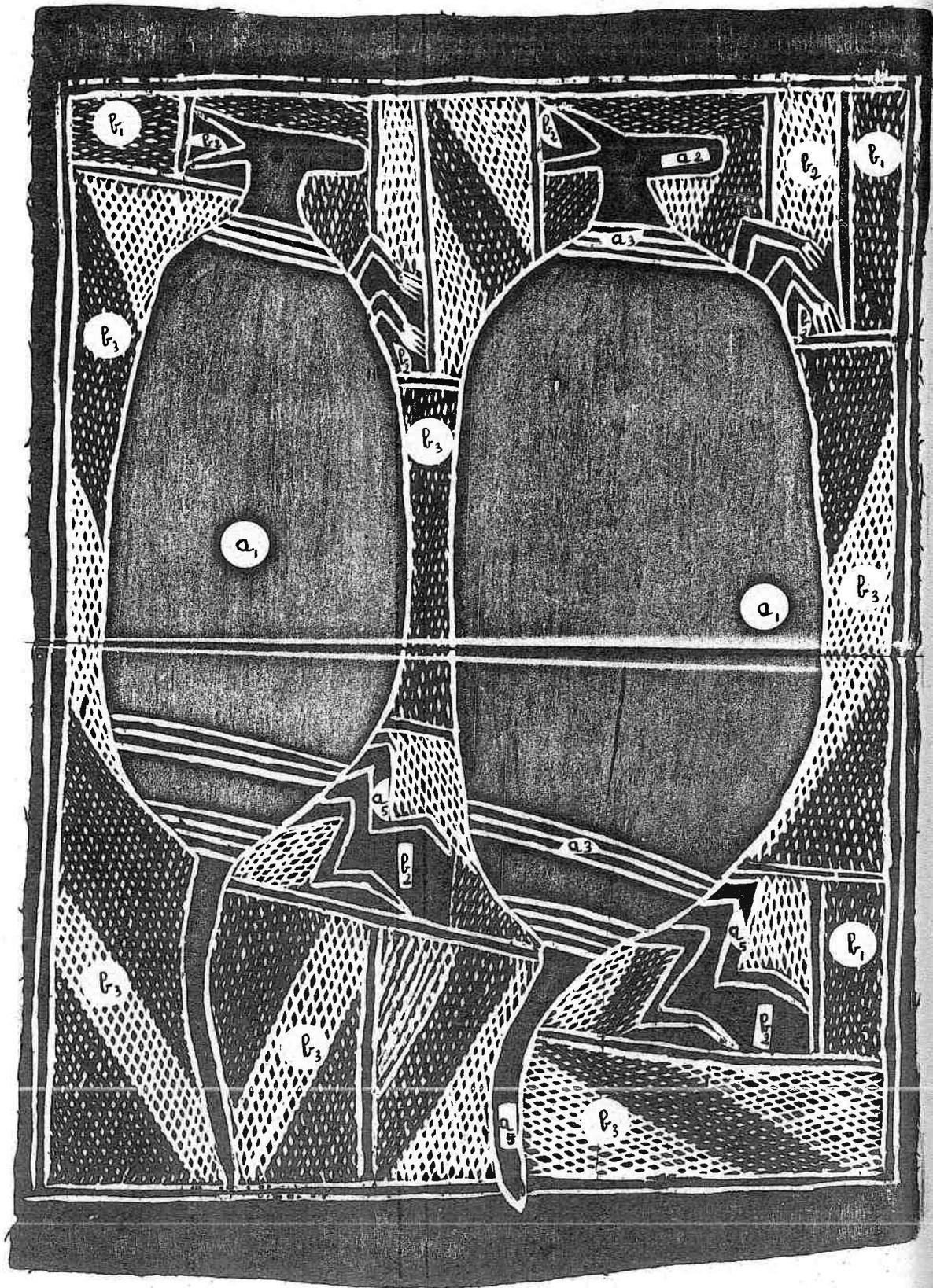


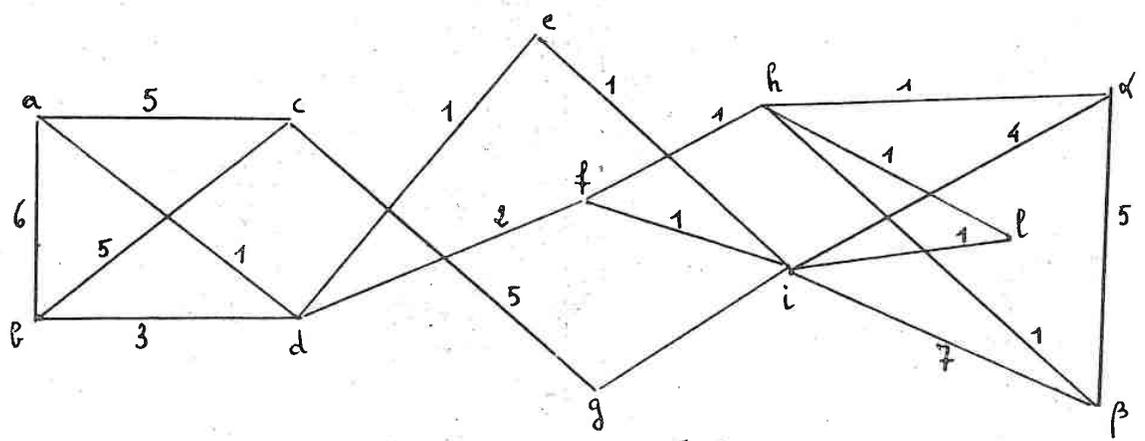
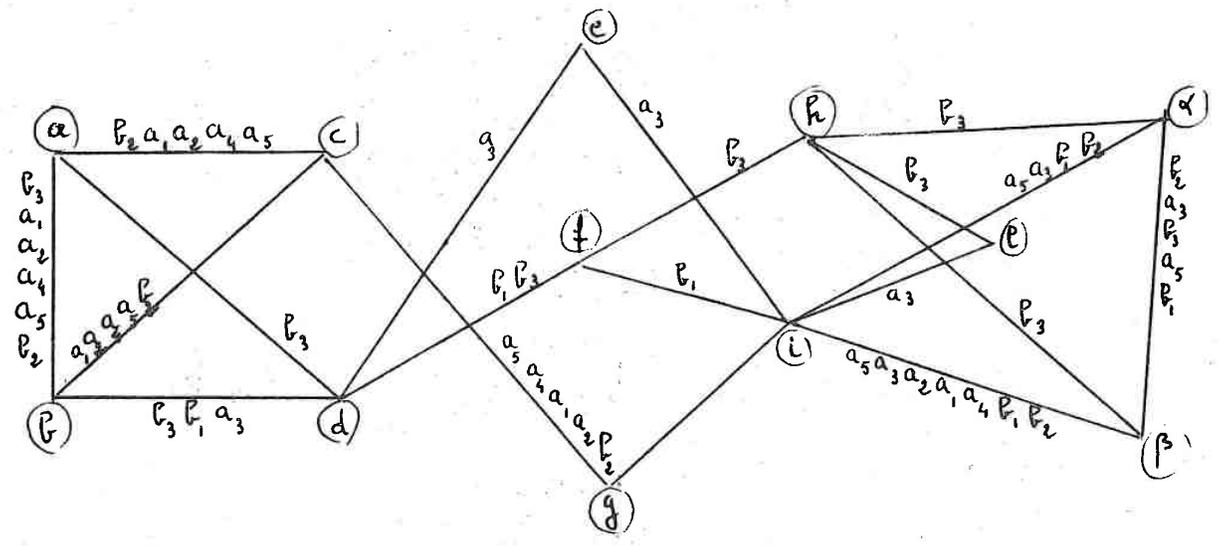




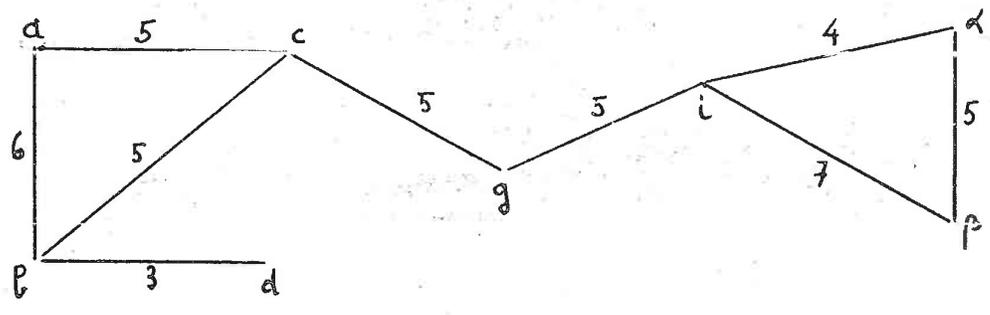
Répartition des arêtes : 1⁸, 2⁵, 3⁸, 4, 6, 7
 $m = \frac{59}{24} \approx 2,5$

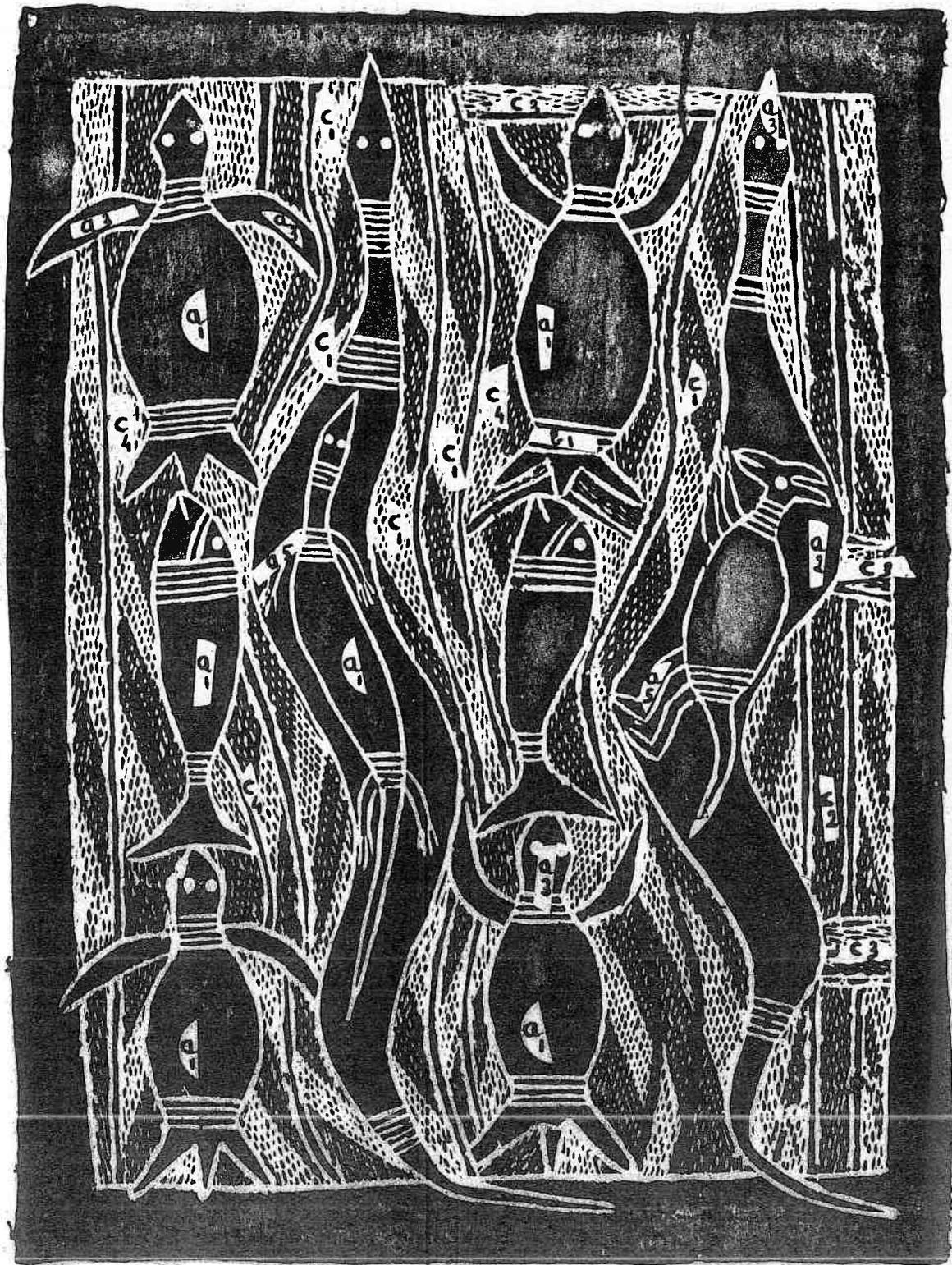


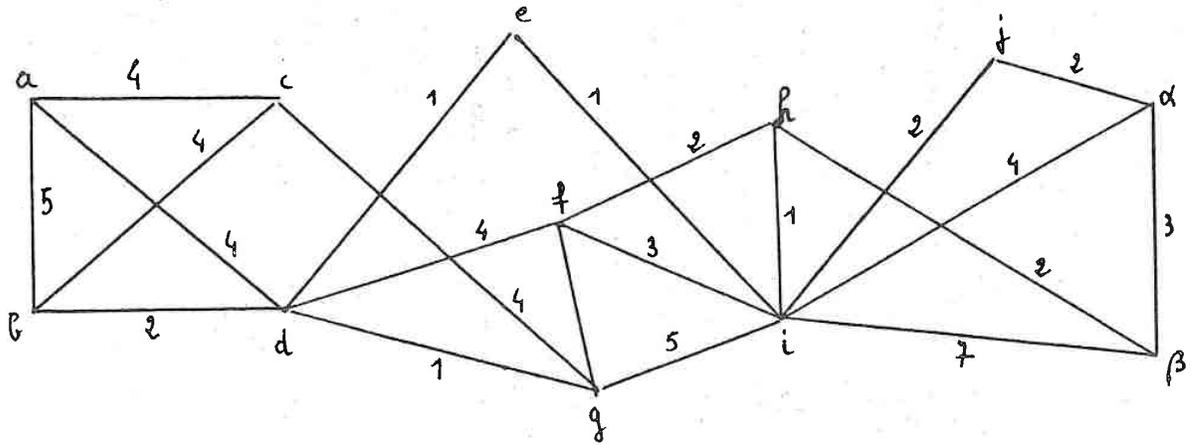
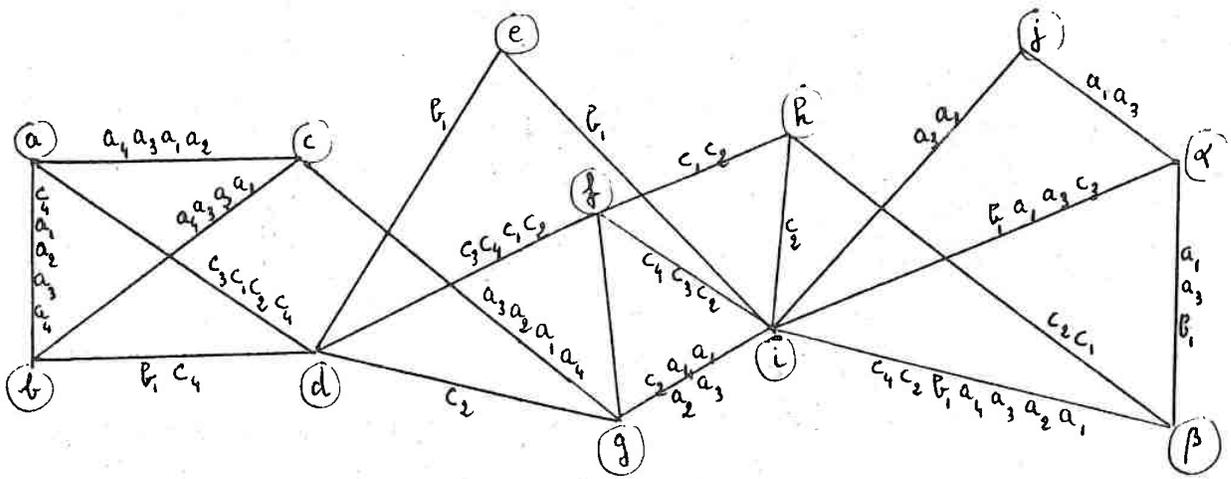




Répartition des arêtes : 1⁸, 2, 3, 4, 5⁵, 6, 7
 $n = \frac{64}{14} \approx 3$

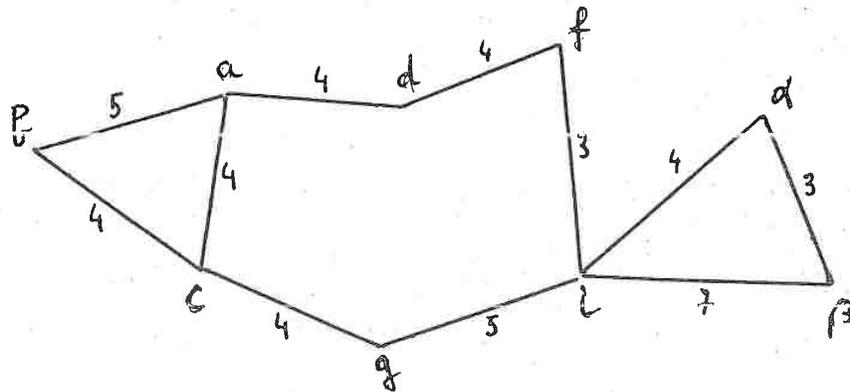


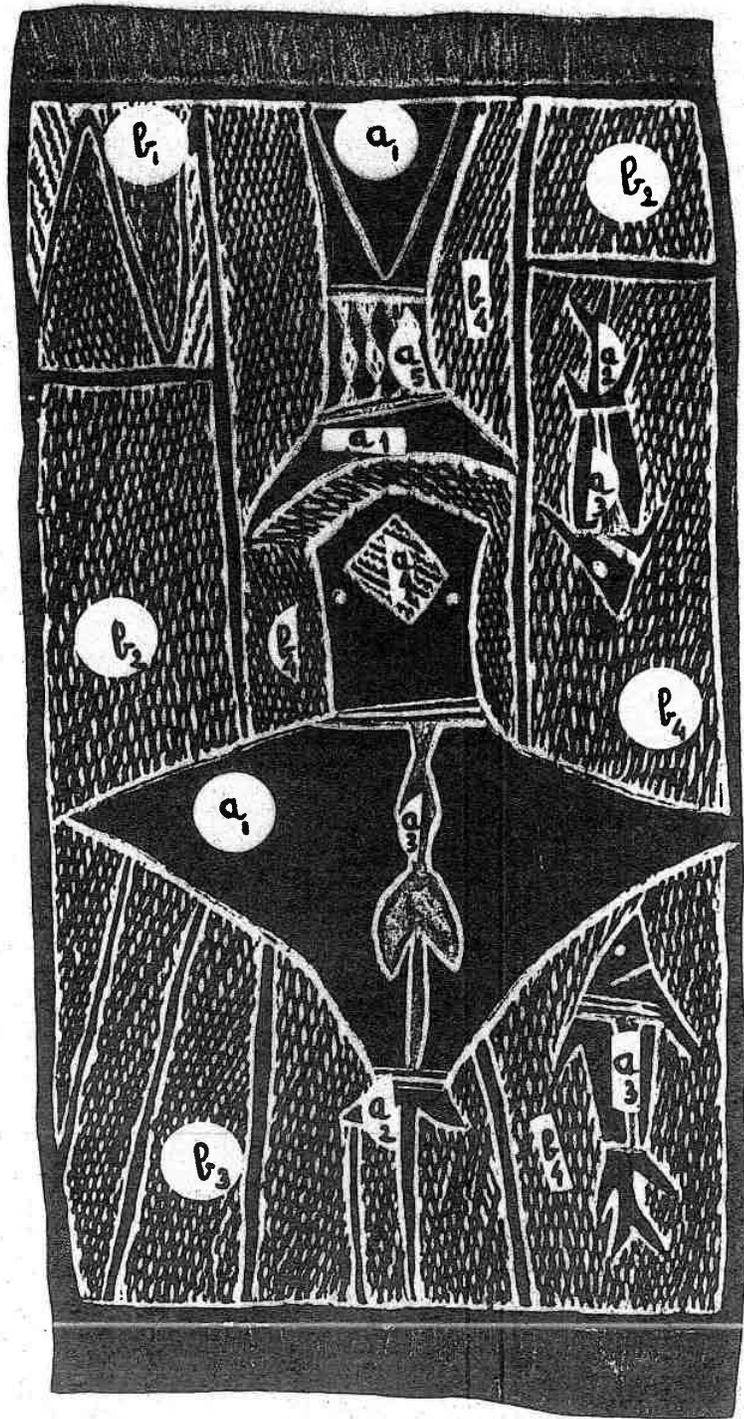


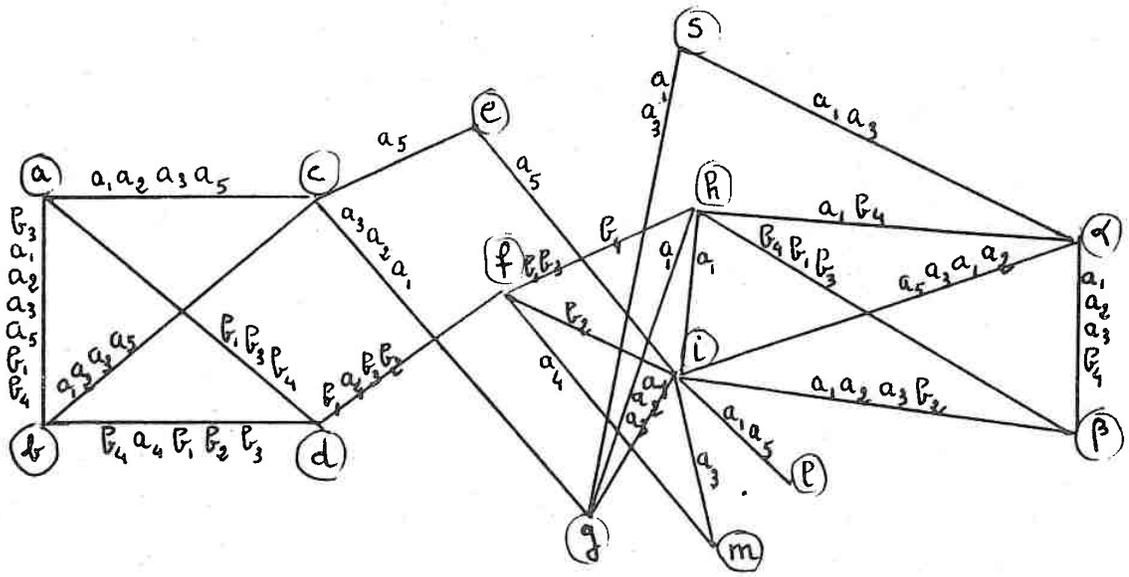


Répartition des arêtes $1^5, 2^5, 3^2, 4^6, 5^2, 7$

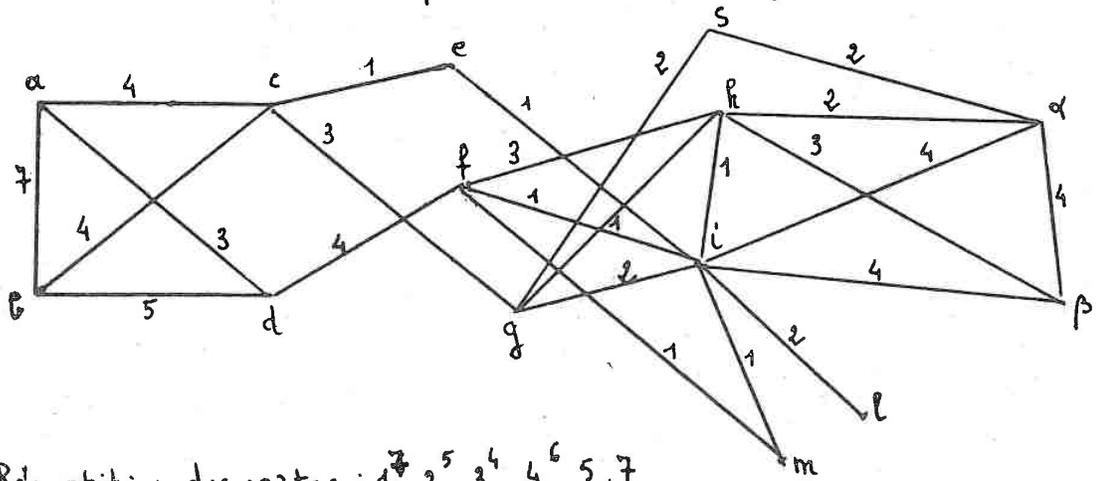
$$m = \frac{62}{21} \approx 3$$





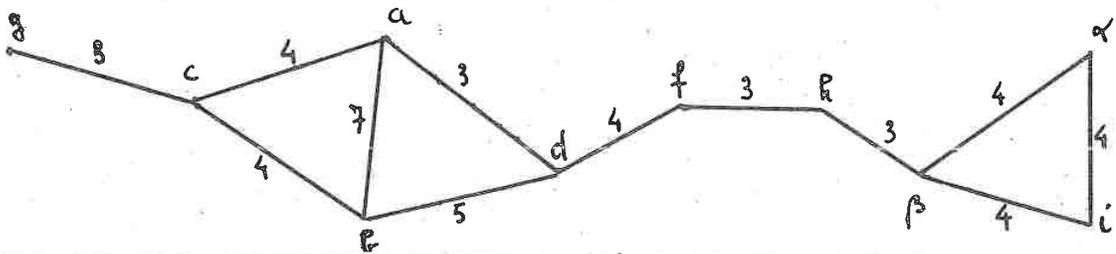


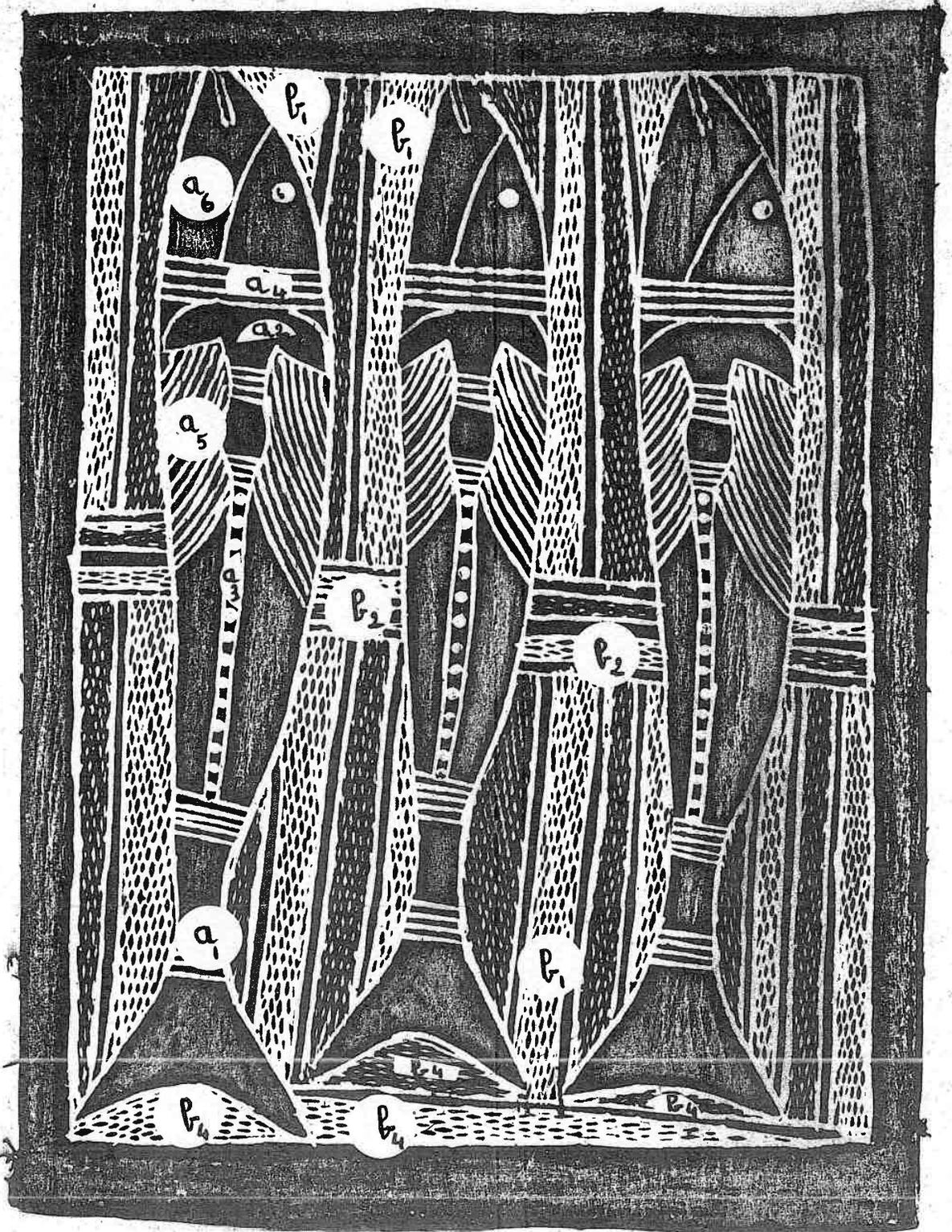
Remarque : Sommet (S) : chaque élément d'un sous-ensemble possède un axe de symétrie

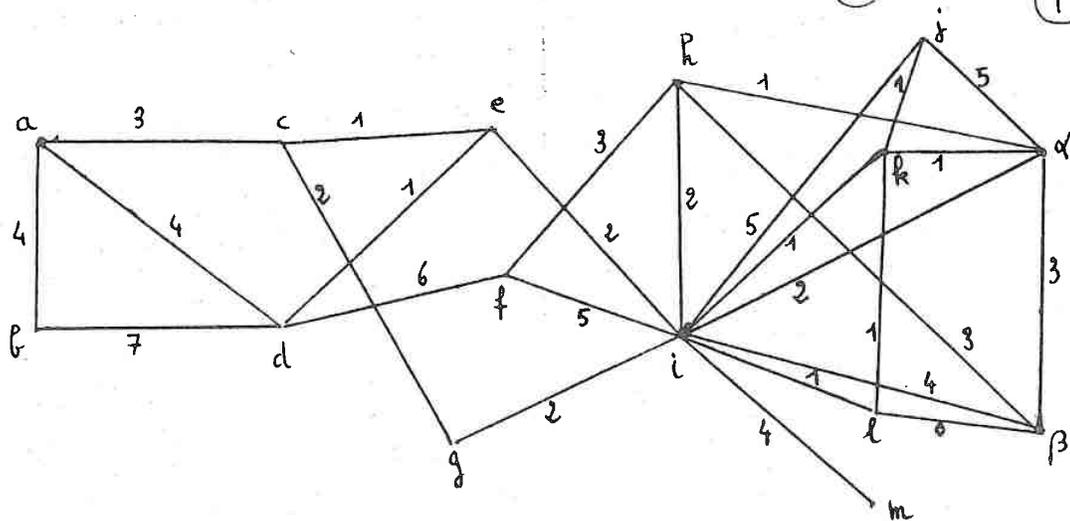
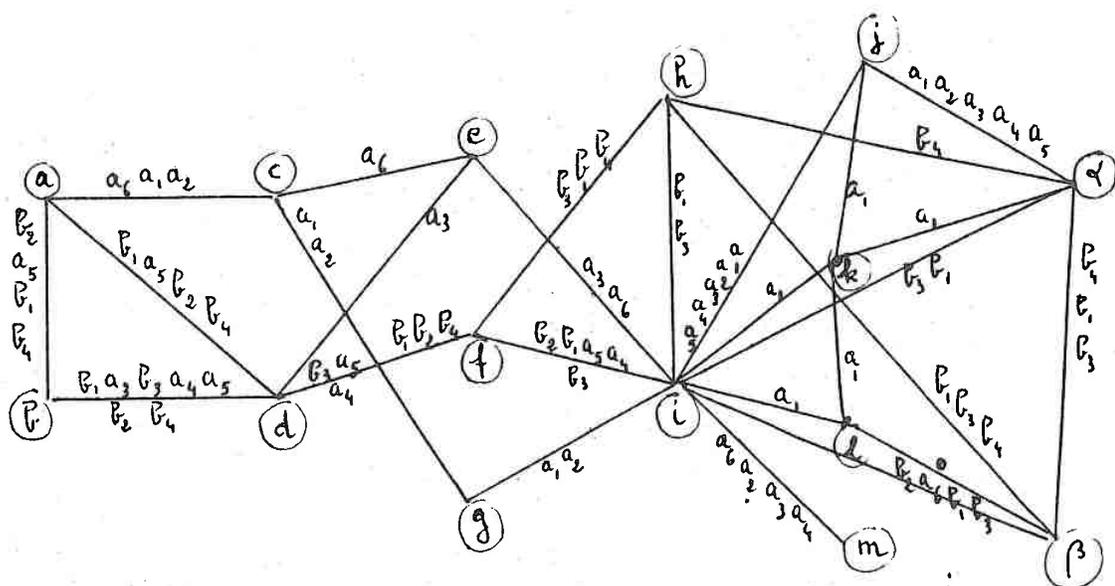


Répartition des arêtes : 1⁷, 2⁵, 3⁴, 4⁶, 5, 7

$$m = \frac{65}{24} = 2,7$$

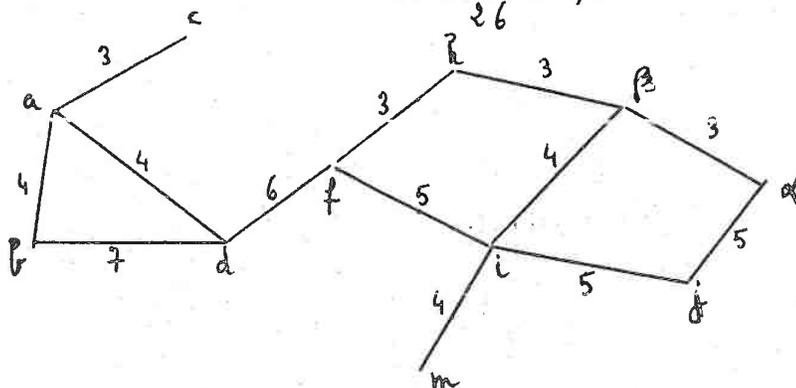




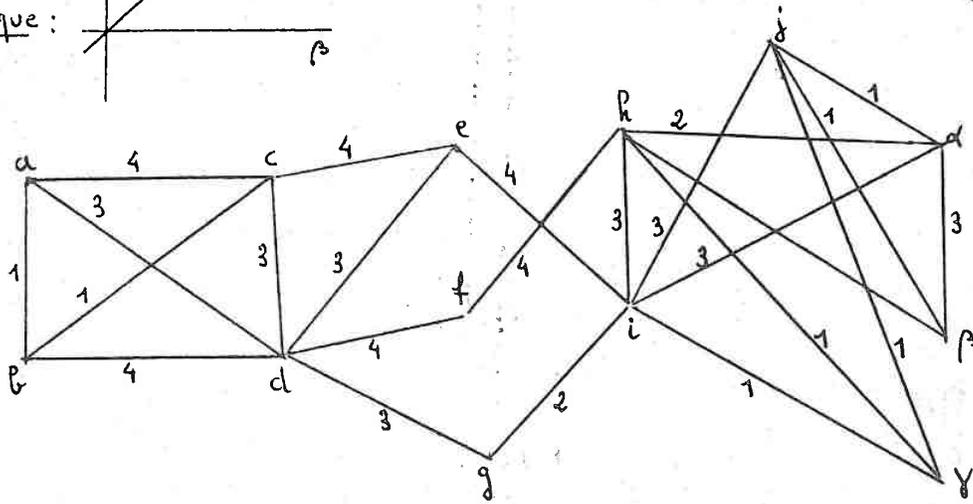
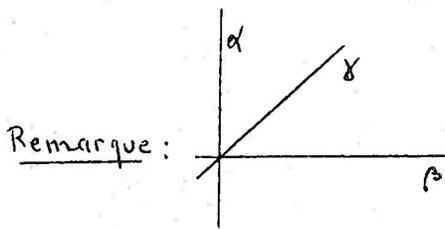
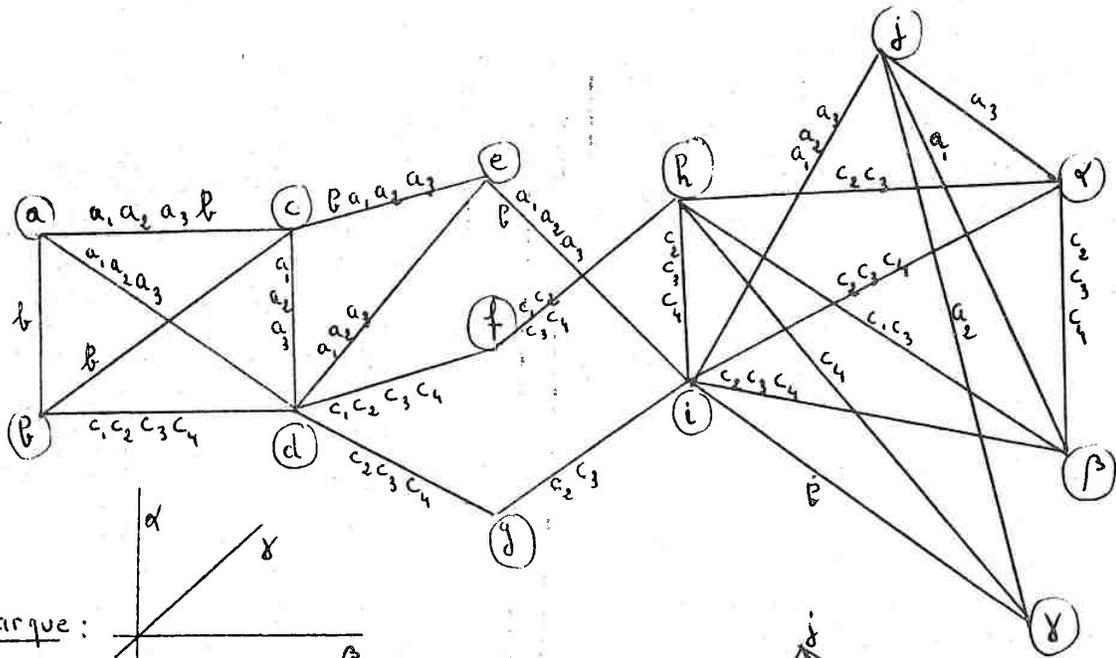


Répartition des arêtes : $1^8, 2^5, 3^4, 4^4, 5^3, 6, 7$

$$m = \frac{73}{26} = 2,8 \approx 3$$

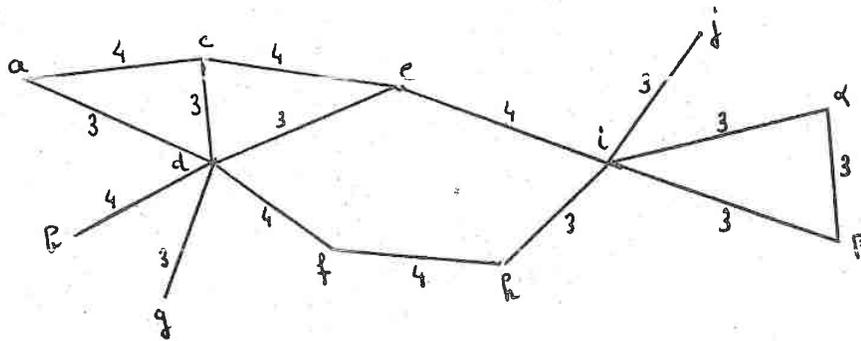


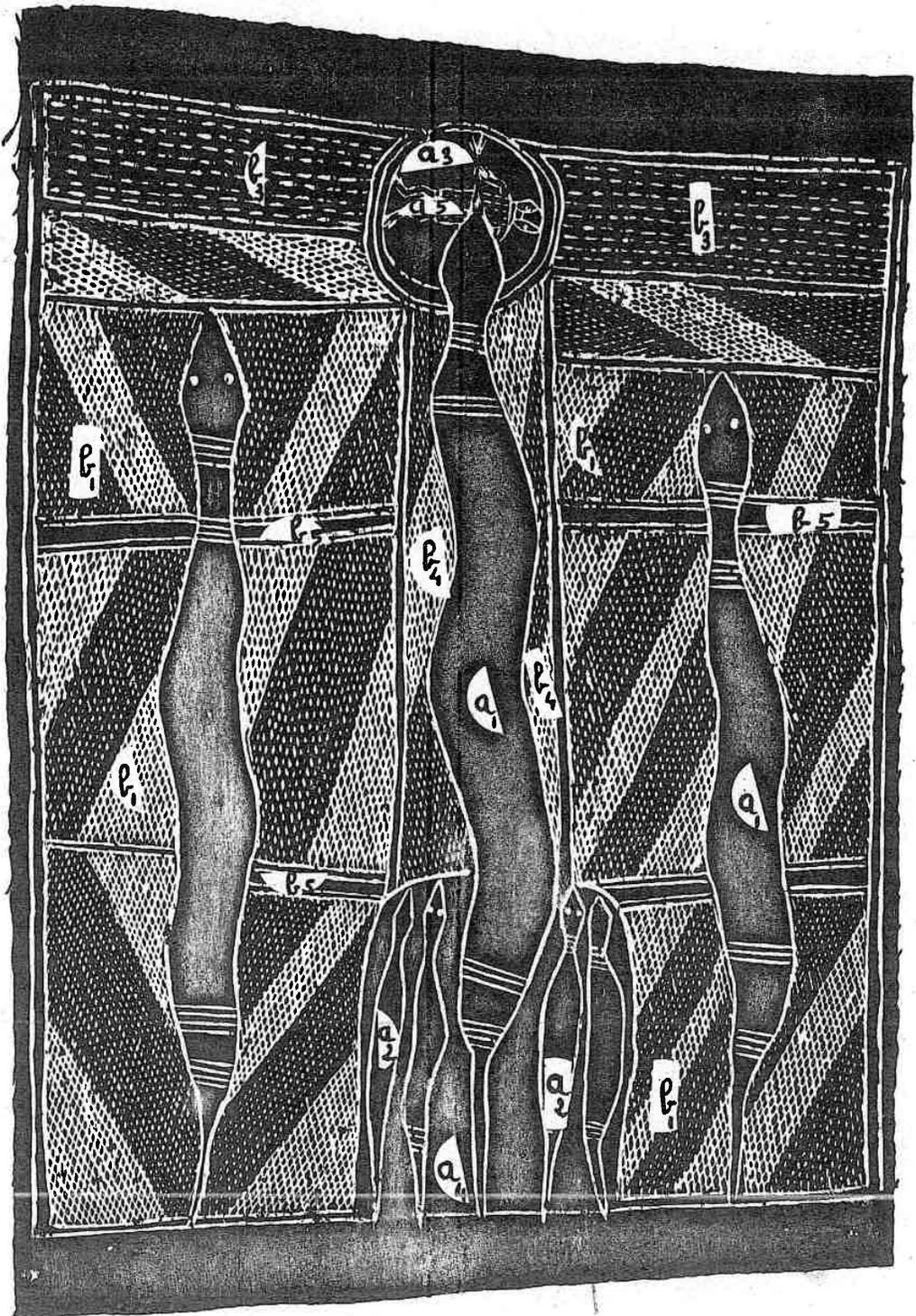


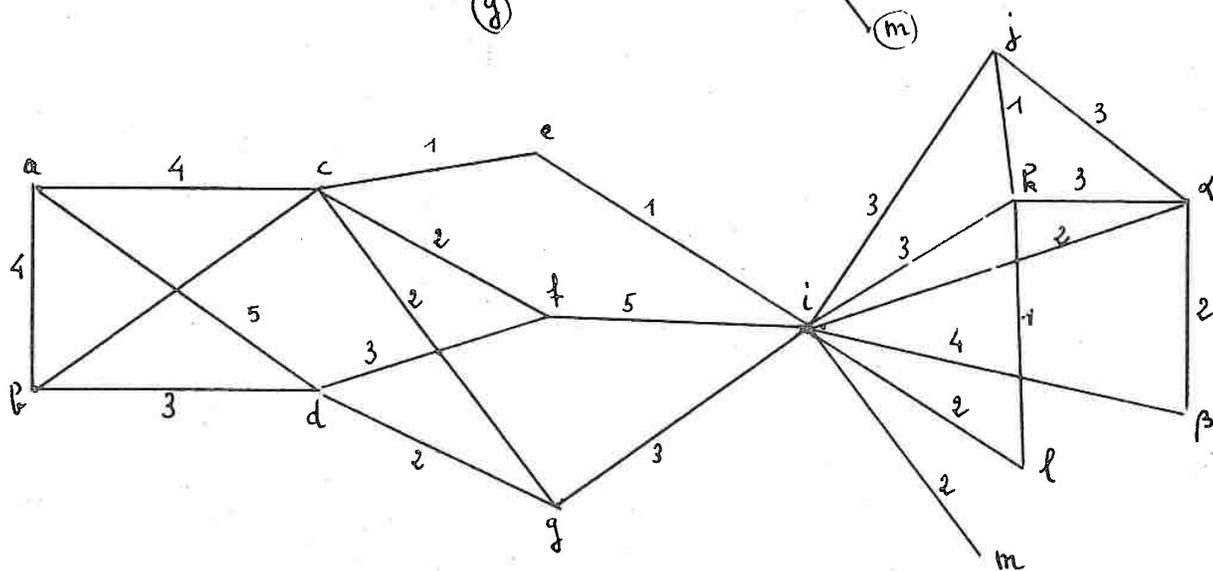
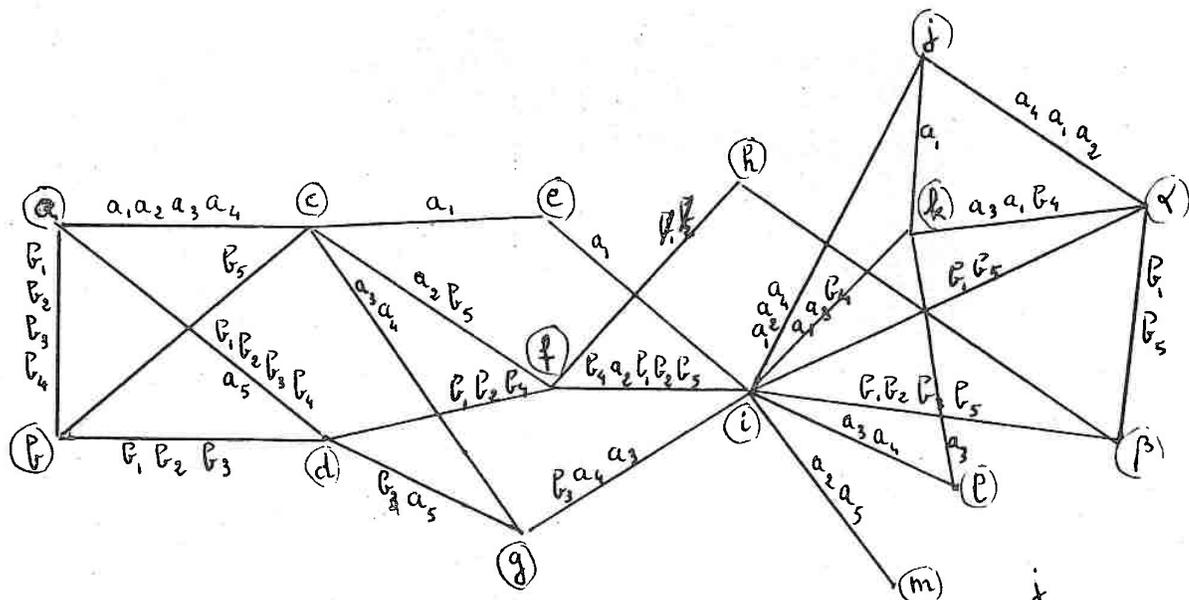


Répartition des arêtes $1^7, 2^3, 3^8, 4^6$

$$m = \frac{61}{24} = 2,6$$

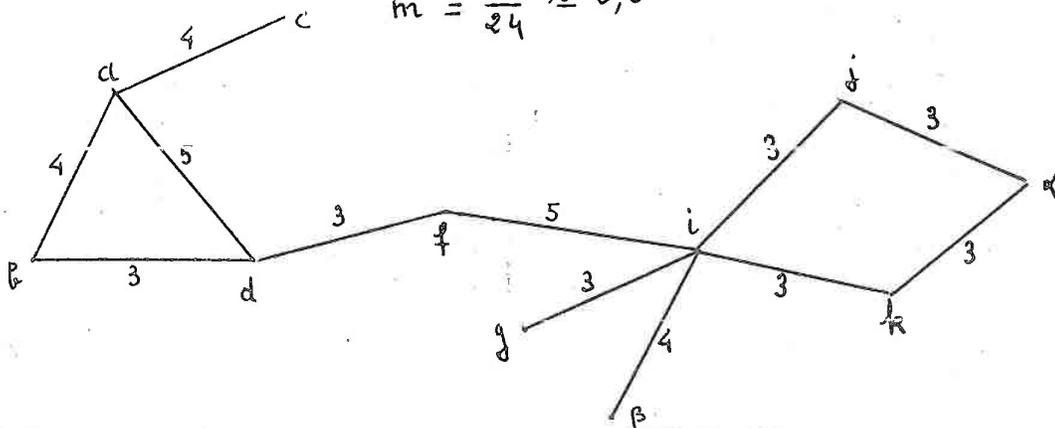




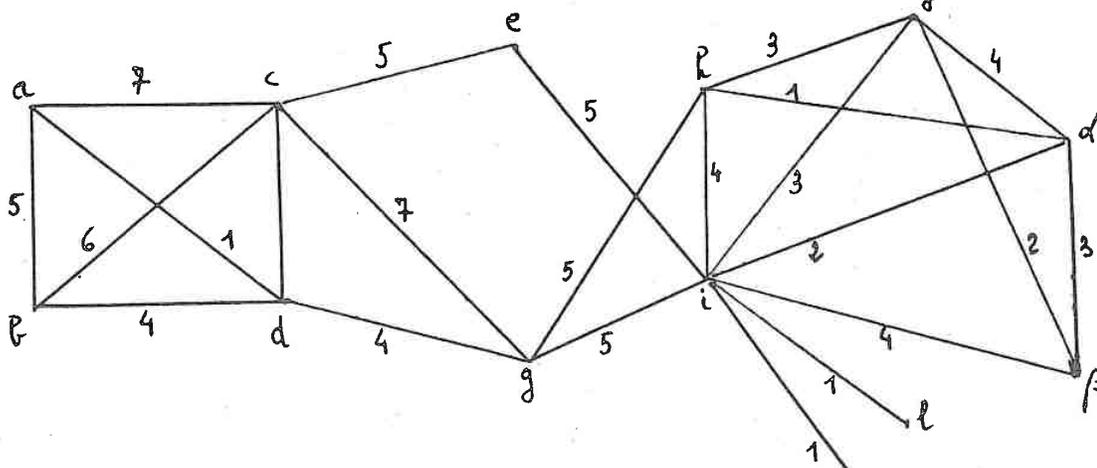
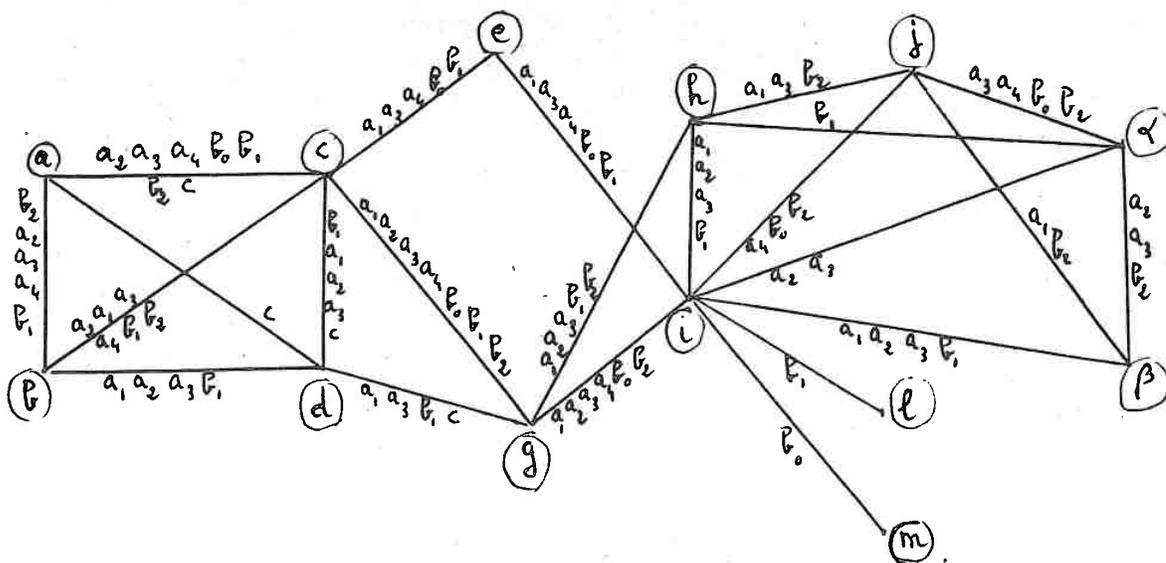


Répartition des arêtes $1^5, 2^7, 3^7, 4^3, 5^2$

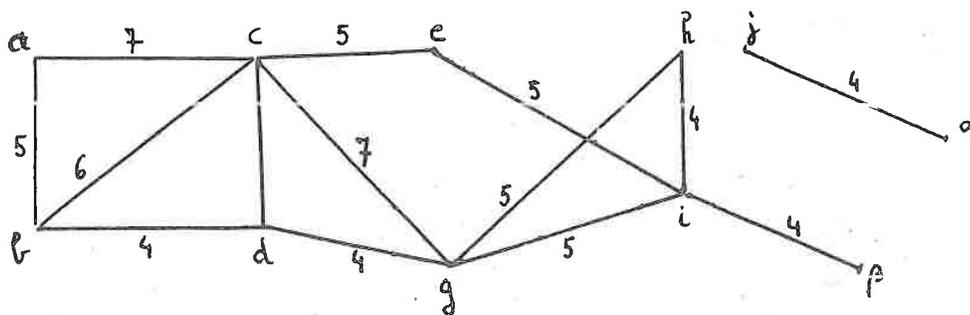
$$m = \frac{62}{24} \approx 2,6$$

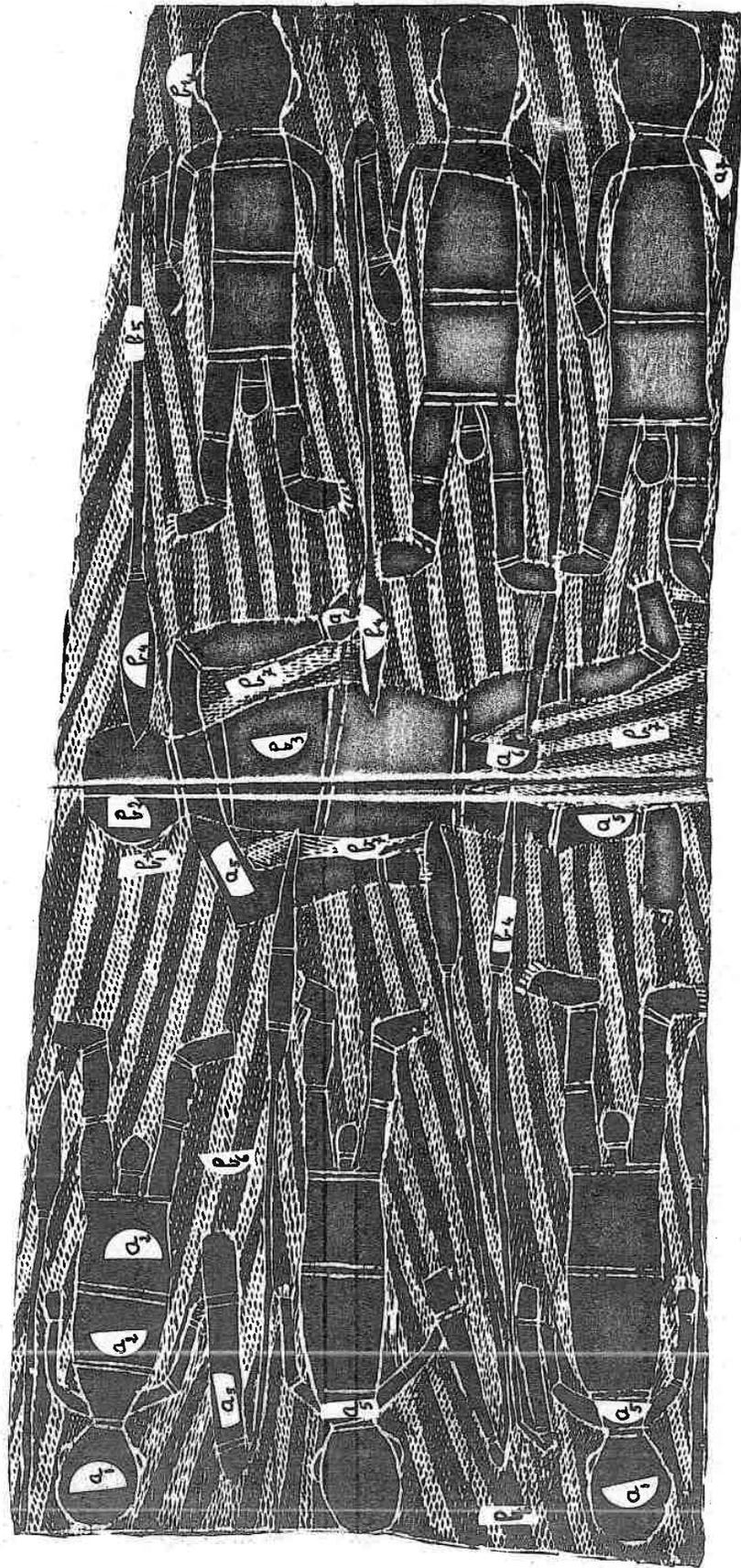


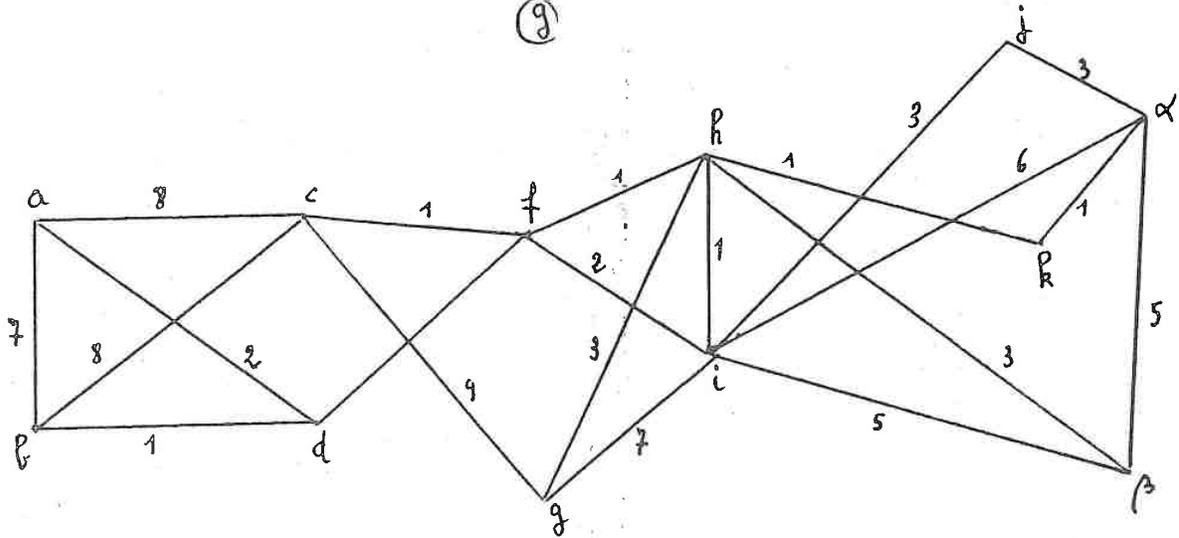
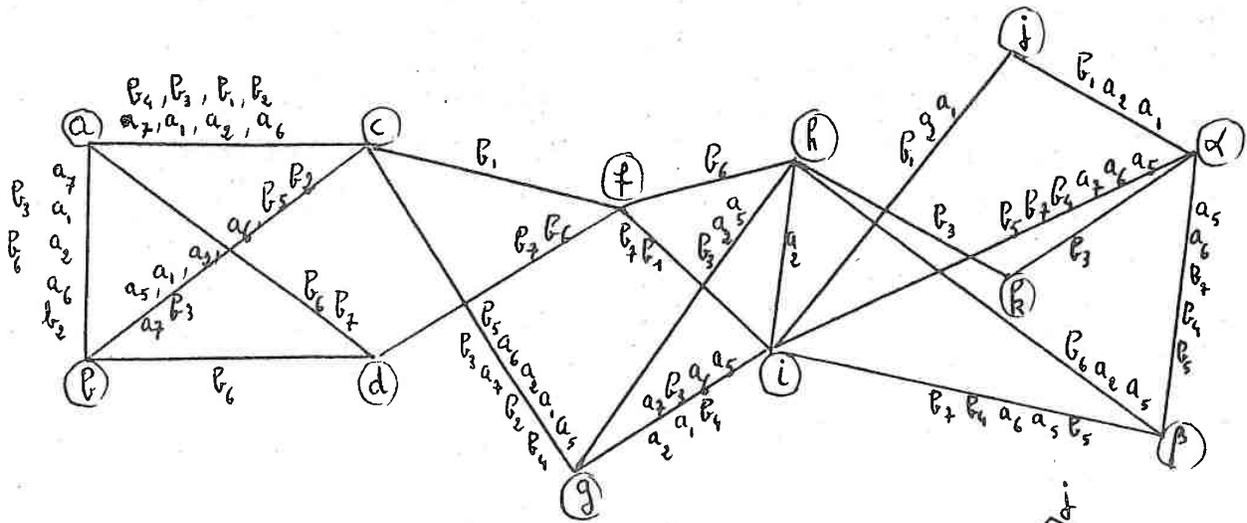




Répartition des arêtes: $1^4, 2^2, 3^3, 4^5, 5^6, 6^7, 7^2$
 $m = 3, 8$

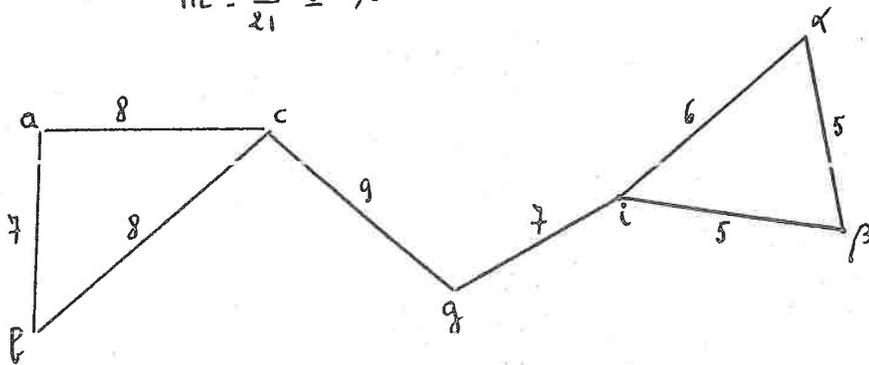




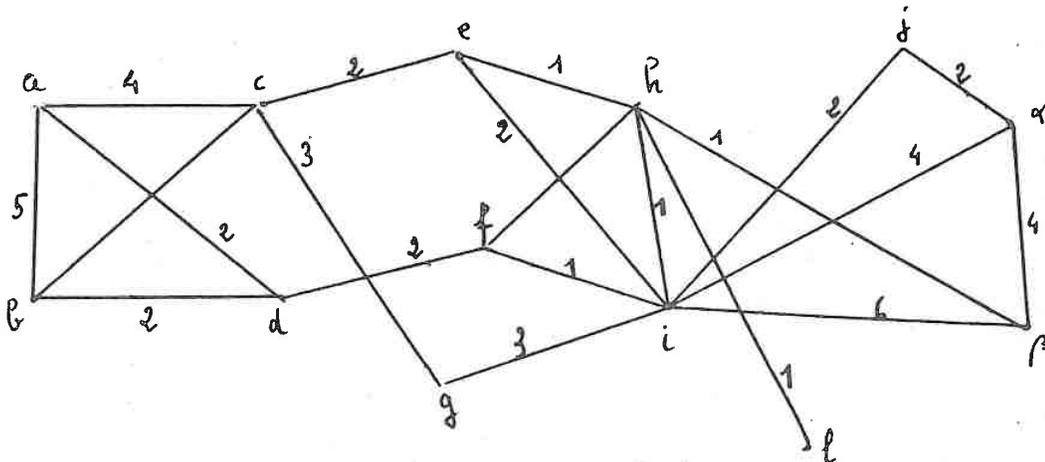
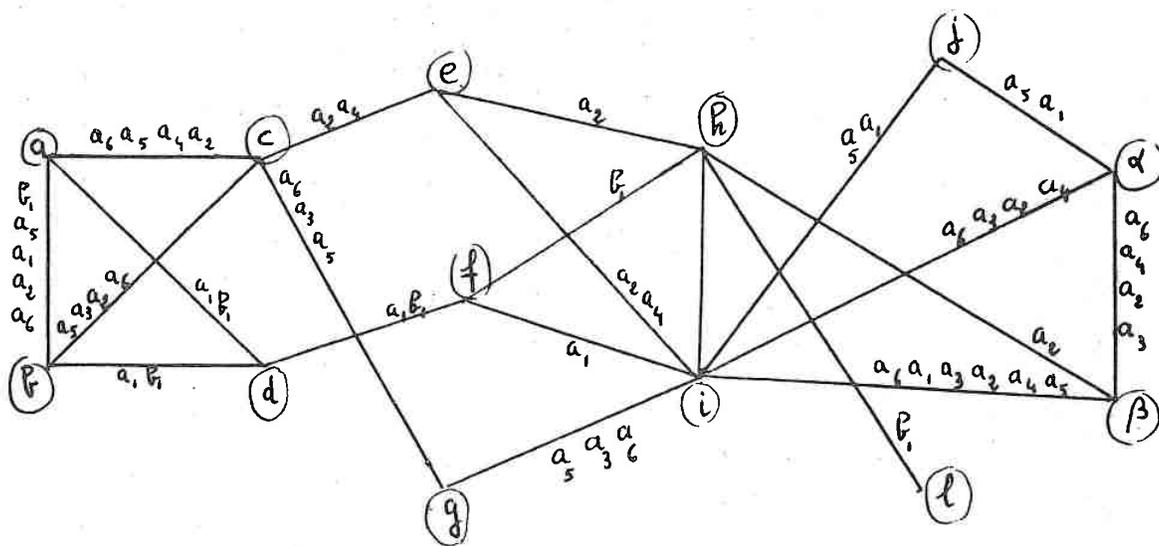


$$\begin{matrix}
 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 &
 \end{matrix}$$

$$m = \frac{79}{21} \approx 3,8$$

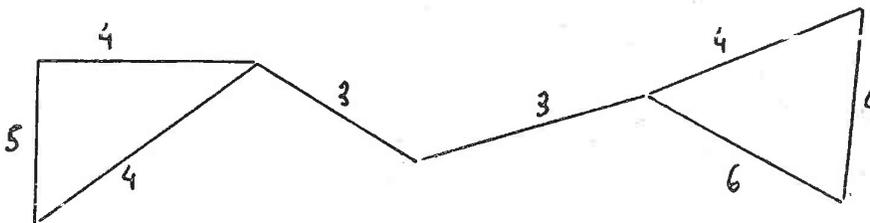




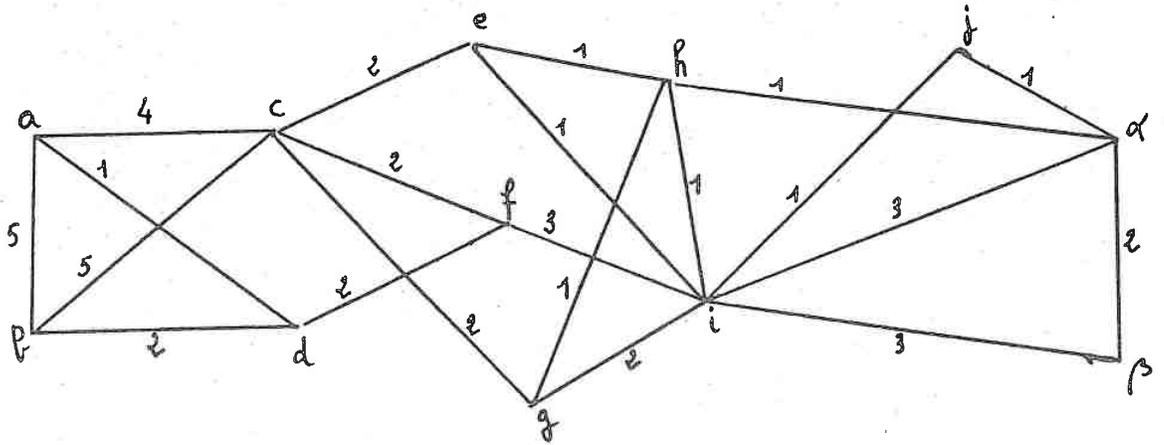
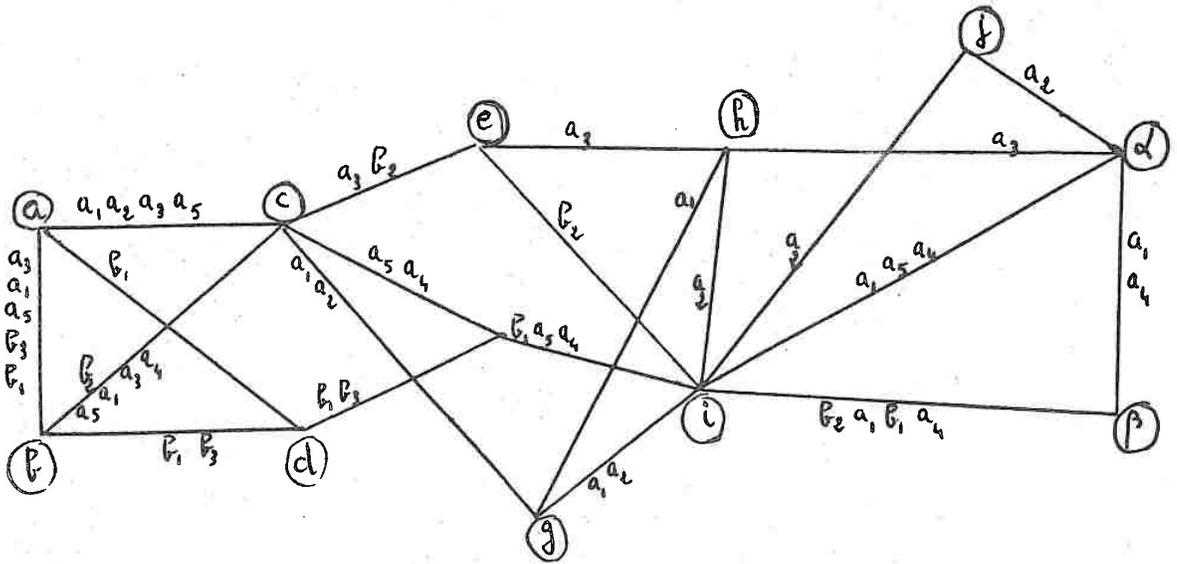


Repartition des arêtes 1⁶ 2⁷ 3² 4⁴ 5⁶

$$m = \frac{53}{21} = 2,5$$

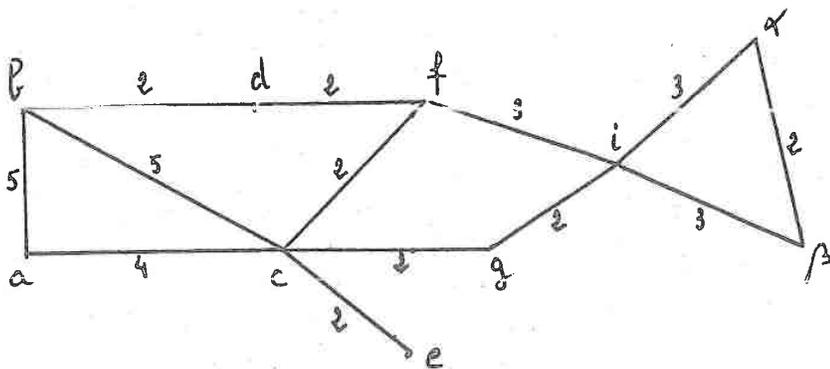






$$1^9 \ 2^6 \ 3^3 \ 4^5 \ 5^2$$

$$m = \frac{44}{21} \approx 2$$



BIBLIOGRAPHIE

C. BERGE. Théorie des graphes et ses applications.

E.B. DYNKIN. Théorie des processus Markoviens.

ERDOS et RENY. On the évolution of random graphs

FLAMENT. Théorie des graphes et Structures Sociales.

K. KUPKA. Un art à l'état brut.

Levi STRAUSS. Anthropologie Structurale.

VEYL. Symmetry.

TABLE des MATIERES

| | |
|---|----|
| <u>Introduction</u> | 2 |
| <u>Chapitre I</u> : Construction des graphes | 6 |
| <u>Chapitre II</u> : Méthodes des indices | 16 |
| <u>Chapitre III</u> : Loi de probabilité de passage sur un graphe | 28 |
| <u>Chapitre IV</u> : | 33 |
| <u>1^{re} partie</u> : Description des graphes | 33 |
| <u>2^o partie</u> : Etude des transformations | 47 |
| <u>3^o partie</u> : Classement des graphes | 57 |
| <u>4^o partie</u> : Transformation d'un graphe quelconque | 63 |
| <u>5^o partie</u> : Application aux groupes de dessins | 64 |
| <u>Conclusion</u> | 72 |
| <u>Annexe</u> | 73 |

Vu et approuvé

NANCY, le 13 juin 1966

Le doyen de la Faculté des Sciences

J. AUBRY

Vu et permis d'imprimer

NANCY, le 14 juin 1966

Le Recteur de l'Académie

Président du Conseil de l'Université

P. IMBS