

Déposée en 2ex.

Nancy

Université de Nancy I

U.E.R. Sciences Mathématiques

N° 340

Sc. N. 71/90^A

THESE

présentée à l'

UNIVERSITE DE NANCY I

pour obtenir le

DOCTORAT DE SPECIALITE MATHEMATIQUES OPTION MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Claude IUNG

Ingénieur E.N.S.E.M.



COMMANDE OPTIMALE EN TEMPS REEL D'UN PROCESSUS

NON LINEAIRE ECHANTILLONNE

Soutenue le 17 décembre 1971 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. J. LEGRAS
Examineurs : MM. C. GILORMINI
R. HUSSON
L. LE LETTY

THESE

présentée à l'

UNIVERSITE DE NANCY I

pour obtenir le

**DOCTORAT DE SPECIALITE
MATHEMATIQUES
OPTION MATHEMATIQUES APPLIQUEES**

par

Claude IUNG

Ingénieur E.N.S.E.M.

COMMANDE OPTIMALE EN TEMPS REEL D'UN PROCESSUS

NON LINEAIRE ECHANTILLONNE

Soutenue le 17 décembre 1971 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. J. LEGRAS
Examineurs : MM. C. GILORMINI
R. HUSSON
L. LE LETTY

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Automatique de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique de Nancy, sous la direction de Monsieur le Professeur LEGRAS, Directeur de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique et de Monsieur le Professeur HUSSON. Je tiens à leur exprimer ici ma profonde reconnaissance pour l'aide et les encouragements qu'ils m'ont apportés tout au long de ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur GILORMINI, et Monsieur LE LETTY, Ingénieur au Centre d'Etudes et de Recherches Aérospatiales de Toulouse, d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Que Madame HUSSON qui a assumé la responsabilité de la présentation de ce travail, trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance, ainsi que Monsieur MAURER pour la réalisation des dessins.

Enfin, de nombreuses discussions avec mes camarades, particulièrement Monsieur LOUIS, m'ont permis d'éviter bien des écueils. Qu'ils en soient remerciés.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I : *Systeme Physique*

CHAPITRE II : *Commandabilité du Systeme*

CHAPITRE III : *Commande Optimale*

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

La commande directe, par ordinateur, de processus industriels peut rarement être effectuée en boucle ouverte, étant donné le grand nombre de perturbations qui peuvent intervenir sur le système et les contraintes à respecter. Or, mis à part quelques cas où la commande optimale en boucle fermée est calculable théoriquement et s'exprime simplement à tout instant en fonction des variables d'état du système (par exemple : équations linéaires et critère quadratique), il est impossible de la calculer suffisamment rapidement pour pouvoir agir sur le système physique en temps réel. On est conduit à faire tous les calculs préalablement et à consulter des tables au moment de la commande ; on se heurte alors aux problèmes de dimension, les ordinateurs destinés à la commande étant généralement de petite taille.

Nous avons essayé de montrer sur un exemple comment on peut réduire les calculs grâce à une étude directe des équations différentielles par les méthodes non linéaires (plan de phase en particulier) et grâce à l'emploi des techniques d'interpolation. Celles-ci résolvent également le problème du stockage lors de la commande en temps réel.

Pour mieux utiliser l'ordinateur à chaque échantillonnage, nous avons construit une commande optimale en boucle fermée qui, outre la recherche classique sur les valeurs de la variable d'entrée, calcule également les durées d'applications des commandes ; nous avons montré que ce problème se ramène à une recherche de chemin optimal dans un graphe.

CHAPITRE I

Systeme Physique

PLAN DU CHAPITRE I
Système physique

I.1 - Description du moteur

I.1.1 - Notations - équations

I.1.2 - Valeurs numériques

I.1.3 - Représentation du coefficient de proportionnalité couple-intensité

I.2 - Description de l'alimentation en puissance du moteur

I.2.1 - Notations - équations

I.2.2 - Commande du pont

I.2.3 - Tension aux bornes de la charge pour un angle d'allumage constant

I.2.4 - Tension aux bornes de la charge lors du changement d'angle d'allumage

I.3 - Démarrage rotor bloqué

I.3.1 - Equations

I.3.2 - Expression de l'intensité pour $\phi < \frac{\pi}{3}$

I.3.3 - Expression de l'intensité pour $\phi \geq \frac{\pi}{3}$

I.4 - Programme de simulation

I.4.1 - Sous programmes utilisés

I.4.2 - Organigramme

I.1 - DESCRIPTION DU MOTEUR

Le système à commander est un moteur à courant continu de type série, alimenté par un pont redresseur triphasé mixte. Ce processus constitue un montage de traction industriel, classique.

I.1.1 - NOTATIONS EQUATION

Notations

- I : intensité traversant le moteur (A)
 Ω : vitesse de rotation du moteur (rd/s)
R : résistance du circuit (Ω)
L : auto inductance du circuit (henry)
J : moment d'inertie du moteur ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
f : coefficient de frottement visqueux ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{rd}/\text{s}$)
 C_f : couple de frottements secs (N-m)
 Γ : couple de charge (N-m)
 $k(I)$: coefficient de proportionnalité du couple moteur à l'intensité ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$)
 $V(t)$: tension appliquée à l'instant t aux bornes du moteur (V)

Toutes les grandeurs seront exprimées en unités du Système International.

Parmi ces coefficients, certains sont effectivement des constantes : moment d'inertie, auto-inductance de l'induit ; d'autres sont en réalité des fonctions de I, $\frac{dI}{dt}$, Ω mais ici nous les considérons comme constants : résistance, auto-inductance de l'inducteur, coefficient de frottements visqueux, couple de frottements secs et couple de charge.

Compte tenu de ces hypothèses, les équations qui régissent le fonctionnement du moteur sont alors (1)

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1-1 \quad V = L \frac{dI}{dt} + RI + k(I) \Omega \\ 1-2 \quad J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega + C_f = k(I) I - \Gamma \end{array} \right.$$

II.1.2 - VALEURS NUMERIQUES

Les valeurs numériques de ces coefficients seront alors les suivantes :

$$L = 40 \cdot 10^{-3} \text{ Henry}$$

$$R = 0,85 \text{ ohm}$$

$$J = 0,3 \text{ kg-m}^2$$

$$f = 10^{-2} \text{ N-m/(rd/s)}$$

$$C_f = 3 \text{ N-m}$$

$$\Gamma = 30 \text{ N-m}$$

II.1.3 - REPRESENTATION DU COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITE COUPLE-INTENSITE

Le coefficient de proportionnalité couple-intensité a été mesuré en utilisant le moteur en génératrice à excitation indépendante, à vitesse constante ($\Omega = 1.400 \text{ tr/mn}$ soit $146,5 \text{ rd/s}$).

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau (I.1)

Tension aux bornes de la génératrice U(Volts)	Courant d'excitation I(Ampères)	$10^2 k(I) = \frac{U}{\Omega}$
17	1	11,6
32	2,9	21,8
36	3,1	24,5
41	3,7	28,0
45	4,0	30,7
67	5,6	45,7
80	7,0	54,5
100	9,0	68
120	11,5	81,8
140	13,7	95,5
160	16,5	109
172	18,5	117
180	20	123
190	22,7	129,5
200	25	136,5
220	32	150

C'est un phénomène de saturation qui se représente en physique par un polynôme de degré impair sous la forme

$$I = \alpha k + \beta k^5 + \gamma k^7$$

Dans ce cas précis, nous avons :

$$\alpha = 19/1,5 \text{ (pente à l'origine)}$$

$$\beta = 1,404$$

$$\gamma = 0,136$$

La figure I.1 montre la courbe obtenue par cette représentation polynomiale, comparée avec les points expérimentaux.

Cette représentation, intéressante physiquement, puisqu'elle tient compte de l'interprétation théorique du phénomène de saturation, sera aussi très bonne pour les calculs car on pourra considérer que même si la précision est faible (ici du même ordre de grandeur que celle des mesures), l'expression mathématique rend correctement compte de la forme d'une courbe de saturation et permettra des extrapolations.

Cependant, le calcul de k en fonction de I interviendra très souvent, ce qui oblige à résoudre l'équation $I(k) - I_0 = 0$, par la méthode de Newton par exemple. Malgré la vitesse de convergence de cet algorithme (cinq ou six itérations au plus pour une précision de 10^{-3}), la rapidité de ce calcul, qui interviendra un très grand nombre de fois, est insuffisante. Nous prendrons donc une représentation polynomiale $P(I) = k(I)$.

Après différents essais, nous avons été conduits à prendre les polynômes d'interpolation de Tchebychev de degré 7, augmentés de $1,5 \cdot 10^{-3}$, pour satisfaire aux conditions réelles : $k(0) \geq 0$, $k(I) > 0$ pour $I > 0$, avec assez de précision.

En effet, ces deux conditions sont fondamentales pour l'étude du système et conduisent à des résultats absurdes si elles ne sont pas respectées. Le tableau (I.2) nous montre les valeurs obtenues, d'une part avec la résolution de l'équation $I(k) - I_0 = 0$, et d'autre part, avec la méthode choisie. Nous constatons que l'erreur due à l'interpolation est largement inférieure aux erreurs de mesure.

Intensité I(A)	k(I)		Valeur absolue de l'erreur $ \Delta\varepsilon $
	Résolution de $k(I) - I_0 = 0$	Interpolation polynomiale	
0	0.00000E 00	-0.41866E-06	0.410 ⁻⁶
2	0.15789E 00	0.15432E 00	310 ⁻³
4	0.31543E 00	0.31469E 00	110 ⁻³
6	0.47105E 00	0.47232E 00	110 ⁻³
8	0.62100E 00	0.62119E 00	210 ⁻⁴
10	0.75983E 00	0.75755E 00	210 ⁻³
12	0.88329E 00	0.87950E 00	410 ⁻³
14	0.98990E 00	0.98653E 00	410 ⁻³
16	0.10810E 01	0.10791E 01	210 ⁻³
18	0.11590E 01	0.11587E 01	310 ⁻⁴
20	0.12264E 01	0.12269E 01	510 ⁻⁴
22	0.12854E 01	0.12857E 01	310 ⁻⁴
24	0.13376E 01	0.13369E 01	210 ⁻³
26	0.13843E 01	0.13823E 01	210 ⁻³
28	0.14265E 01	0.14234E 01	310 ⁻³
30	0.14649E 01	0.14613E 01	310 ⁻³
32	0.15002E 01	0.14968E 01	410 ⁻³
34	0.15328E 01	0.15302E 01	210 ⁻³
36	0.15630E 01	0.15617E 01	110 ⁻³
38	0.15913E 01	0.15911E 01	310 ⁻⁴
40	0.16178E 01	0.16182E 01	410 ⁻⁴
42	0.16427E 01	0.16428E 01	110 ⁻⁴
44	0.16663E 01	0.16650E 01	110 ⁻³
46	0.16887E 01	0.16858E 01	310 ⁻³
48	0.17099E 01	0.17066E 01	310 ⁻³
50	0.17302E 01	0.17304E 01	210 ⁻⁴

TABLEAU I.2

Ce calcul est effectué par le sous programme FUNCTION REW (AI).

1.2 - DESCRIPTION DE L'ALIMENTATION EN PUISSANCE DU MOTEUR

Nous utiliserons un pont redresseur mixte triphasé (Ref. 12)
relie au reseau par l'intermédiaire d'un auto-transformateur (Figure (I.2)).

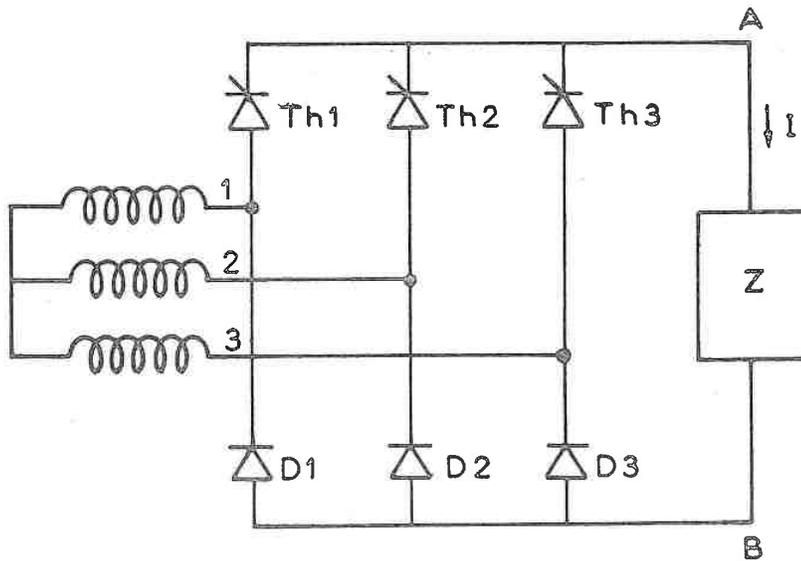


Schéma du pont redresseur

FIGURE I.2

I.2.1 - NOTATIONS - EQUATIONS

Les notations utilisées seront les suivantes :

- Th_i (i = 1,2,3) Thyristor i
- D_i (i = 1,2,3) Diode i
- $U_i(t)$ (i = 1,2,3) tension entre la phase i et le neutre à l'instant t
- U_{eff} tension efficace entre phase et neutre
- U_m tension maximale entre phase et neutre $U_m = U_{eff} \sqrt{2}$
- V tension aux bornes de la charge
- ϕ angle d'amorçage des thyristors
- V_c tension de commande
- ω pulsation du réseau

s temps réduit $s = \omega t$

$$U = U_m \sqrt{3}$$

Nous avons les valeurs numériques suivantes :

$$\omega = 100 \pi$$

$$U = 312$$

En prenant comme origine des temps, le point t_0 ou $U_1(t_0) = U_3(t_0)$, les tensions U_i s'écrivent :

$$U_1(t) = U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$U_2(t) = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$U_3(t) = U_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$$

ou en fonction du temps réduit :

$$U_1(s) = U_m \sin \left(s + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$U_2(s) = U_m \sin \left(s - \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$U_3(s) = U_m \sin \left(s - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$$

I.2.2 - COMMANDE DU PONT

L'allumage d'un thyristor est réalisé par l'envoi d'une impulsion sur sa gachette. Cette impulsion est obtenue en comparant une tension sinusoïdale redressée dans sa partie positive, qui sert de référence, avec la tension continue de commande V_c . Pour les trois redresseurs commandés du pont, l'allumage se produit dans l'ordre indiqué par la figure (I.3).

Nous repèrerons l'instant d'amorçage des thyristors par l'angle ϕ : temps réduit auquel Th_1 (voir figure (I.3)) commence à conduire.

I.2.3 - TENSION AUX BORNES DE LA CHARGE POUR UN ANGLE D'AMORÇAGE CONSTANT

Nous étudierons cette tension dans le cas où la charge est telle que l'intensité ne puisse s'annuler lorsque $V > 0$: ce qui sera réalisé pour le système choisi (cf. chapitre II).

Nous supposons :

- les inductances du transformateur d'alimentation nulles et par conséquent, nous négligerons les commutations entre diodes,
- le courant de maintien des thyristors nul

La tension V présente alors deux formes suivant les valeurs de

$$\phi \leq \frac{\pi}{3} \left\{ \begin{array}{l} s \in \left(\phi, \frac{\pi}{3} \right) \quad V(s) = U \sin\left(s + \frac{\pi}{3}\right) = U \cos\left(s - \frac{\pi}{6}\right) \\ s \in \left(\frac{\pi}{3}, \phi + \frac{2\pi}{3} \right) \quad V(s) = U \sin s \end{array} \right.$$

$$\phi \geq \frac{\pi}{3} \left\{ \begin{array}{l} s \in \left(\phi, \pi \right) \quad V(s) = U \sin s \\ s \in \left(\pi, \frac{2\pi}{3} + \phi \right) \quad V(s) = 0 \end{array} \right.$$

voir figure n° (I.4) et (I.5)

I.2.4 - TENSION AUX BORNES DE LA CHARGE LORS DU CHANGEMENT D'ANGLE D'AMORÇAGE

Le changement de commande, c'est-à-dire de tension V_c , sera toujours réalisé à l'instant $s = \pi$ (synchronisation externe de la sortie analogique de l'ordinateur). Nous passerons de la tension V_{c1} correspondant à l'angle d'amorçage ϕ_1 , à la tension V_{c2} correspondant à l'angle d'amorçage ϕ_2 .

Quatre cas sont alors à envisager suivant les valeurs de ϕ_1 et ϕ_2 par rapport à $\frac{\pi}{3}$ et compte tenu du fait que le thyristor déjà allumé ne change pas d'état en présence d'une nouvelle impulsion et qu'une impulsion sur un autre thyristor n'a d'effet que si ce dernier est susceptible de conduire (tension positive à ses bornes).

Les quatre configurations possibles sont représentées dans les figures (I.9), (I.6), (I.7), (I.8) et les équations correspondantes sont :

Figure (I.6)

$$\begin{cases} \phi_1 \leq \frac{\pi}{3} \\ \phi_2 \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{aligned} s \in (\phi_1, \frac{\pi}{3}) \quad V(s) &= U \cos (s - \frac{\pi}{6}) \\ s \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + \phi_2) \quad V(s) &= U \sin s \end{aligned}$$

Figure (I.7)

$$\begin{cases} \phi_1 \leq \frac{\pi}{3} \\ \phi_2 \geq \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{aligned} s \in (\phi_1, \frac{\pi}{3}) \quad V(s) &= U \cos (s - \frac{\pi}{6}) \\ s \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \quad V(s) &= U \sin s \\ s \in (\pi, \frac{2\pi}{3} + \phi_2) \quad V(s) &= 0 \end{aligned}$$

Figure (I.8)

$$\begin{cases} \phi_1 \geq \frac{\pi}{3} \\ \phi_2 \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{aligned} s \in (\phi_1, \pi) \quad V(s) &= U \sin s \\ s &= \frac{\pi}{3} \\ s \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + \phi_2) \quad V(s) &= U \sin s \end{aligned}$$

Figure (I.9)

$$\begin{cases} \phi_1 \geq \frac{\pi}{3} \\ \phi_2 \geq \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{aligned} s \in (\phi_1, \pi) \quad V(s) &= U \sin s \\ s \in (\pi, \frac{2\pi}{3} + \phi_2) \quad V(s) &= 0 \end{aligned}$$

I.3 - DEMARRAGE ROTOR BLOQUE

Nous avons vu au § I.1.2 que le couple résistant Γ et le couple de frottements secs C_f seraient considérés comme constants. Ceci ne peut être rigoureusement vérifié puisque, lors du démarrage, la vitesse reste nulle tant que le couple moteur n'est pas au moins égal au couple résistant total $\Gamma + C_f$; C_f est alors un couple de frottements secs statique, supérieur à la valeur dynamique, très difficile à évaluer, qu'il prendra quand le moteur commencera à tourner.

De plus, les équations du système sont totalement différentes et permettent de connaître analytiquement l'intensité en fonction du temps : pont redresseur débitant sur un système inductance-résistance.

Nous donnerons brièvement les résultats relatifs à cette phase de fonctionnement, et dans la suite nous prendrons toujours les conditions dynamiques en imposant $\Omega \geq 10$ rd/s (voir chapitre III).

I.3.1 - EQUATIONS

Quand le moteur, soumis à un couple extérieur, commence à tourner, $\frac{d\Omega}{dt}$ devient positif ; avant le système d'équations (1) se réduit à

$$(2) \quad \begin{cases} 2-1 & L \frac{di}{dt} + RI = V(t) \\ 2-2 & \Omega = 0 \end{cases}$$

Montrons que la charge du pont redresseur satisfait bien aux hypothèses du paragraphe I.2.4 à savoir que I ne peut s'annuler à un instant t_0 où $V(t_0) > 0$.

Supposons que I s'annule à l'instant t_0 où $V(t_0) \geq a > 0$

Nous avons toujours $I(t) \geq 0$ (redresseur)

Les solutions de l'équation (2-1) sont continues et V est continu donc quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\Delta t_0 > 0$ tel que

- i) $\epsilon \geq I(t_0 - \Delta t_0) \geq 0$
- ii) $\frac{dI}{dt}(t_0 - \Delta t_0) \leq 0$
- iii) $V(t) \geq a > 0$ pour tout t appartenant à $(t_0 - \Delta t_0, t_0)$

alors d'après l'équation (2) : $RI = V - L \frac{dI}{dt}$ soit $I(t_0 - \Delta t_0) \geq \frac{a}{R}$

donc les hypothèses sont contradictoires pour $\epsilon < \frac{a}{R}$

Le résultat cherché est donc démontré.

Nous voyons que deux cas se présentent : $\phi < \frac{\pi}{3}$ et $\phi \geq \frac{\pi}{3}$

L'expression du courant, à un instant s , connaissant la valeur initiale à l'instant $s = \phi$ va être donnée ci-dessous.

Etudions d'abord la forme du courant sur une période $(\phi, \frac{2\pi}{3} + \phi)$ connaissant la condition initiale $I(\phi)$

Notons ϕ_k les temps réduits, $\phi + \frac{2k\pi}{3}$

s_k les temps réduits, $s + \frac{2k\pi}{3}$ où s appartient à

$$(\phi, \frac{2\pi}{3} + \phi)$$

et nous montrerons que les quantités $I(s_k)$ sont liées par récurrence linéaire.

I.3.2 - EXPRESSION DE L'INTENSITE LORSQUE $\phi \geq \frac{\pi}{3}$

a) $s \in (\phi, \pi)$

alors $V(s) = U \sin s$

d'où en résolvant (2)

$$I(s) = A(s, \phi) + C(s, \phi) I(\phi)$$

avec :

$$A(s, \phi) = A_1 \sin(s - \theta_1) - A_1 \sin(\phi - \theta_1) e^{-\frac{R}{L\omega}(s - \phi)}$$

$$C(s, \phi) = e^{-\frac{R}{L\omega}(s - \phi)}$$

$$\cdot A_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

$$\cdot \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{L\omega}{R}$$

En particulier :

$$I(\pi) = A(\pi, \phi) + C(\pi, \phi) I(\phi)$$

$$\text{b) } s \in \left(\pi, \phi + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$V(s) = U$$

$$\text{et } I(s) = C(s, \pi) I(\pi)$$

En particulier :

$$I\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) = I(\phi_1) = C\left(\phi + \frac{2\pi}{3}, \pi\right) I(\pi) = C\left(\phi, \frac{\pi}{3}\right) I(\pi)$$

Nous voyons que nous avons immédiatement les deux relations de récurrence :

$$I(\pi_n) = A(\pi, \phi) + C(\pi, \phi) I(\phi_n)$$

$$I(\phi_n) = C\left(\phi, \frac{\pi}{3}\right) I(\pi_{n-1}) \quad \text{avec } I(\phi) \text{ donné.}$$

On en tire :

$$I(\pi_n) = A(\pi, \phi) \frac{1 - C^{n-1}\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)}{1 - C\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)} + C(\pi, \phi) C^n\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right) I(\phi)$$

et

$$I(\phi_{n-1}) = A(\pi, \phi) C(\pi, \phi) \frac{1 - C^{n-1}\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)}{1 - C\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)} + C^n\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right) I(\phi)$$

d'où pour s quelconque, les résultats suivants :

$$I(s_n) = A(s, \phi) + C(s, \phi) I(\phi_n) \quad \text{pour } s \in \left(\phi, \pi \right)$$

$$I(s_n) = C(s, \pi) I(\pi_n) \quad \text{pour } s \in \left(\pi, \phi + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Remarquons que la quantité $C^n(\frac{2\pi}{3}, 0) = e^{-\frac{nR}{L\omega} \cdot \frac{2\pi}{3}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc que

$$I(\pi_n) \text{ tend vers } I_{\pi f} = \frac{A(\pi, \phi)}{1 - C(\frac{2\pi}{3}, 0)}$$

$$I(\phi_n) \text{ tend vers } I_{\phi f} = \frac{A(\pi, \phi) C(\pi, \phi)}{1 - C(\frac{2\pi}{3}, 0)}$$

Les valeurs de $I_{\pi f}$ et $I_{\phi f}$ sont indépendantes de la condition initiale $I(\phi)$, l'intensité $I(s_n)$ tend vers I_{sf} solution périodique, indépendante de la condition initiale, c'est le régime permanent.

1.3.3 - EXPRESSION DE L'INTENSITE POUR $\phi < \frac{\pi}{3}$

Nous appliquerons la même méthode de résolution que dans le paragraphe précédent pour obtenir les résultats suivants :

$$I(s) = A(s + \frac{\pi}{3}, \phi + \frac{\pi}{3}) + C(s, \phi) I(\phi) \quad \text{pour } s \in (\phi, \frac{\pi}{3})$$

$$I(s) = A(s, \frac{\pi}{3}) + C(s, \frac{\pi}{3}) I(\frac{\pi}{3}) \quad \text{pour } s \in (\frac{\pi}{3}, \phi + \frac{2\pi}{3})$$

puis les suites de récurrence :

$$I(\frac{n\pi}{3}) = A(\frac{2\pi}{3}, \phi + \frac{\pi}{3}) + C(\frac{\pi}{3}, \phi) I(\phi_n)$$

$$I(\phi_{n+1}) = A(\phi + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) + C(\phi + \frac{\pi}{3}, 0) I(\frac{n\pi}{3})$$

Comme dans le paragraphe 1.3.2 ces valeurs tendent vers des valeurs finales indépendantes de $I(\phi)$, quand n tend vers $+\infty$:

$$I_{\frac{\pi}{3}f} = \frac{A(\frac{2\pi}{3}, \phi + \frac{2\pi}{3}) - A(\phi + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) C(\frac{\pi}{3}, \phi)}{1 - C(\frac{2\pi}{3}, 0)}$$

$$I_{\phi f} = \frac{A(\phi + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) + A(\frac{2\pi}{3}, \phi + \frac{2\pi}{3}) C(\phi + \frac{\pi}{3}, 0)}{1 - C(\frac{2\pi}{3}, 0)}$$

et les valeurs $I(s_n)$ tendent vers les intensités finales I_{sf} correspondantes ; régime permanent périodique de période $\frac{2\pi}{3\omega}$. Cette période de démarrage a été simulée numériquement par le sous-programme SINLI écrit en FORTRAN.

I.4 - PROGRAMME DE SIMULATION

I.4.1 - SOUS PROGRAMMES UTILISES

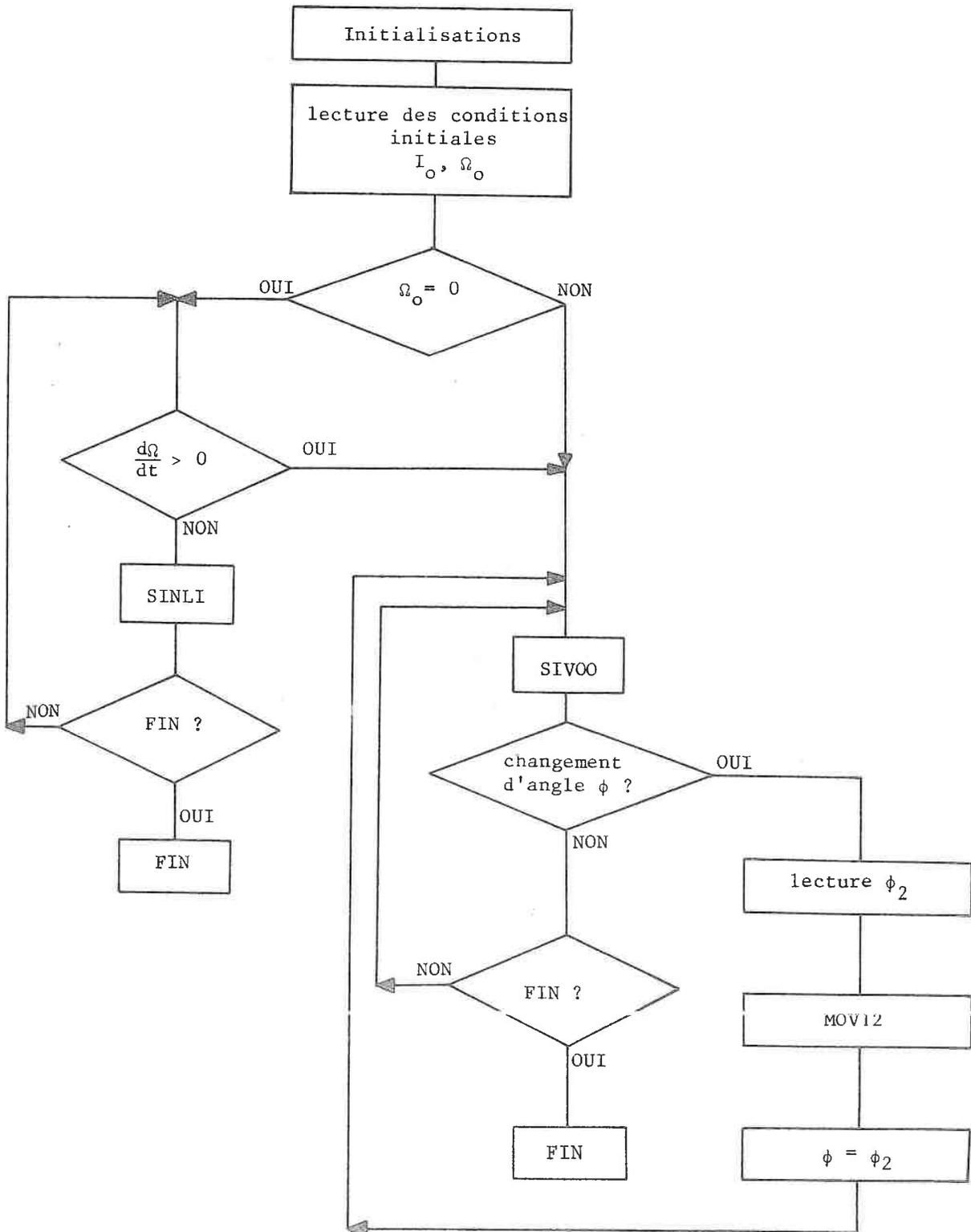
Nous avons établi un programme général MSTHY qui simule le fonctionnement du moteur, avec les conditions initiales I_0 , Ω_0 et un angle d'amorçage donnés. Ce programme a nécessité l'élaboration des sous-programmes suivants :

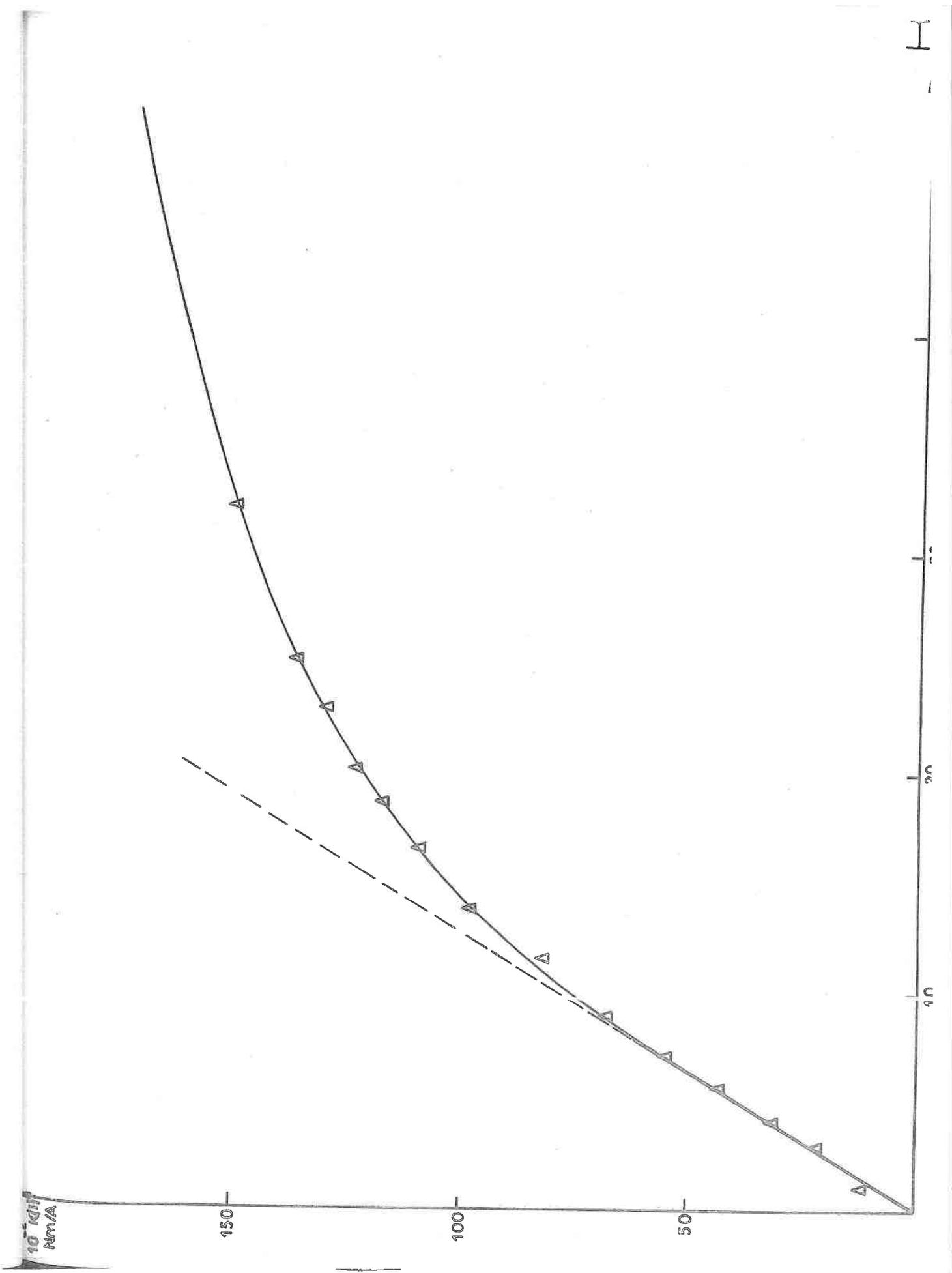
- . SINLI : intégration des équations (2) pendant une période
- . SIV00 : intégration des équations (1) pendant une période, la résolution des équations différentielles se fait par la méthode de Kutta-Runge d'ordre quatre (sous-programme KUTMS) sur le découpage suivant : chaque période est séparée en deux intervalles correspondant aux équations de $V(s)$ (§ I.2.3) et chacun des intervalles est lui-même découpé en N parties égales. Après plusieurs essais, nous avons fixé $N = 2$, la précision des résultats augmentant très peu pour des valeurs plus grandes.
- . MOV12 : intégration des équations (1) lors du changement d'angle d'amorçage : passage de ϕ_1 à ϕ_2 (§ I.2.4)

Chacun de ces sous-programmes gère totalement le système pendant une période, c'est-à-dire qu'il choisit l'équation de V correspondant au temps réduit s en cours, incrémente le compteur de temps, réinitialise le temps réduit à la valeur qu'il doit prendre pour la période suivante et intègre les équations correspondant au fonctionnement.

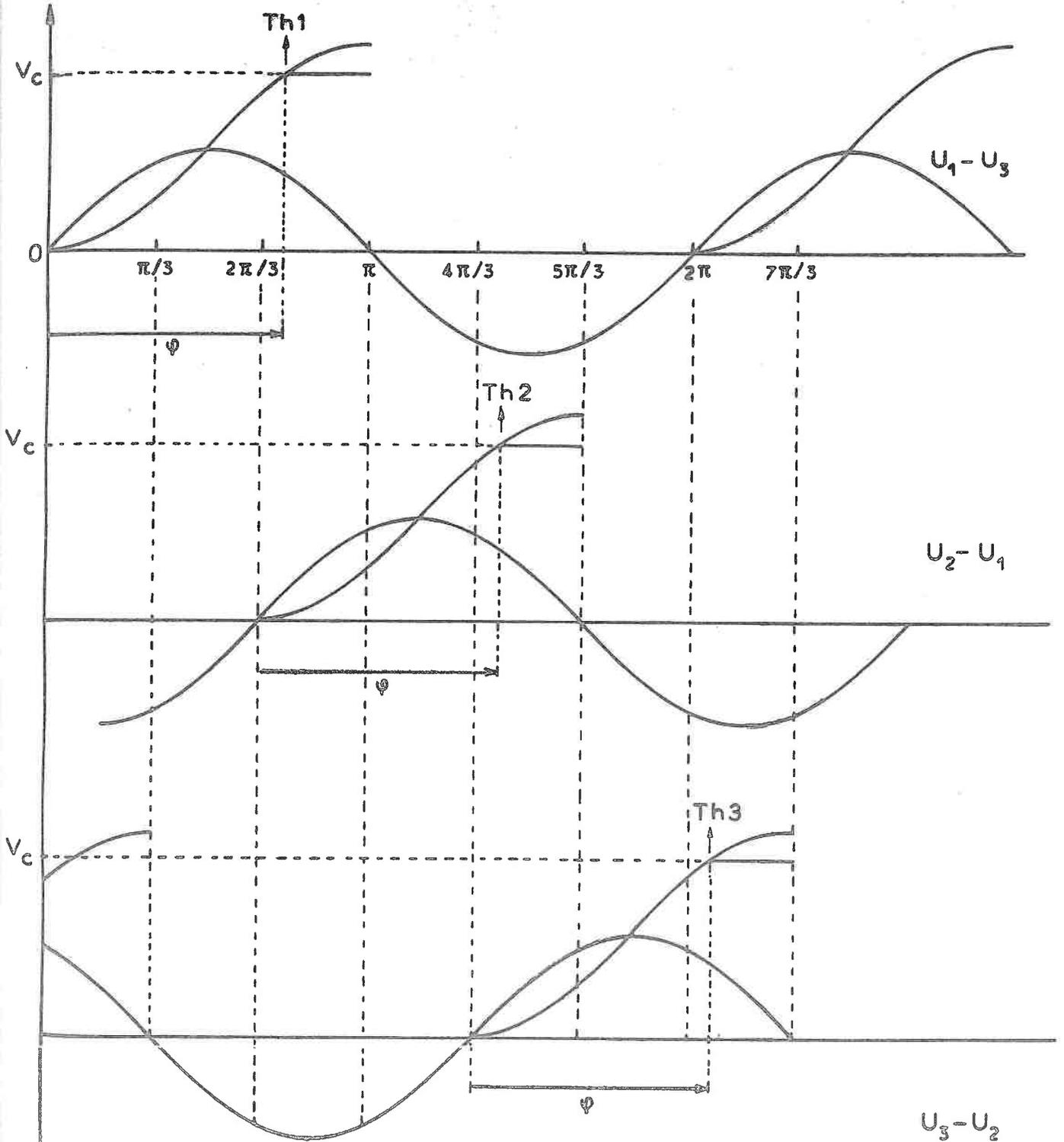
Le programme MSTHY fait la liaison entre ces sous-programmes.

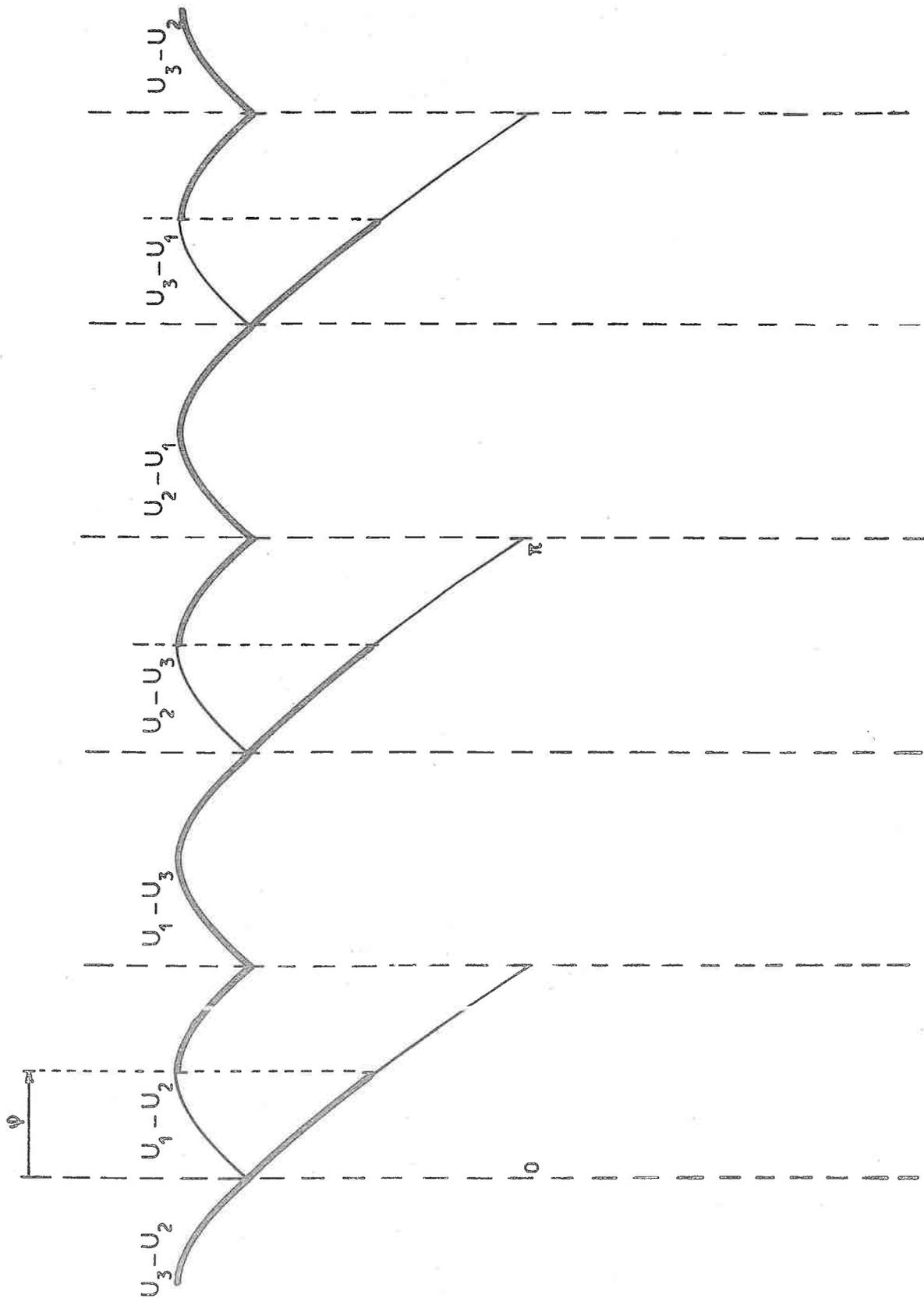
1.4.2 - ORGANIGRAMME DE MSTHY

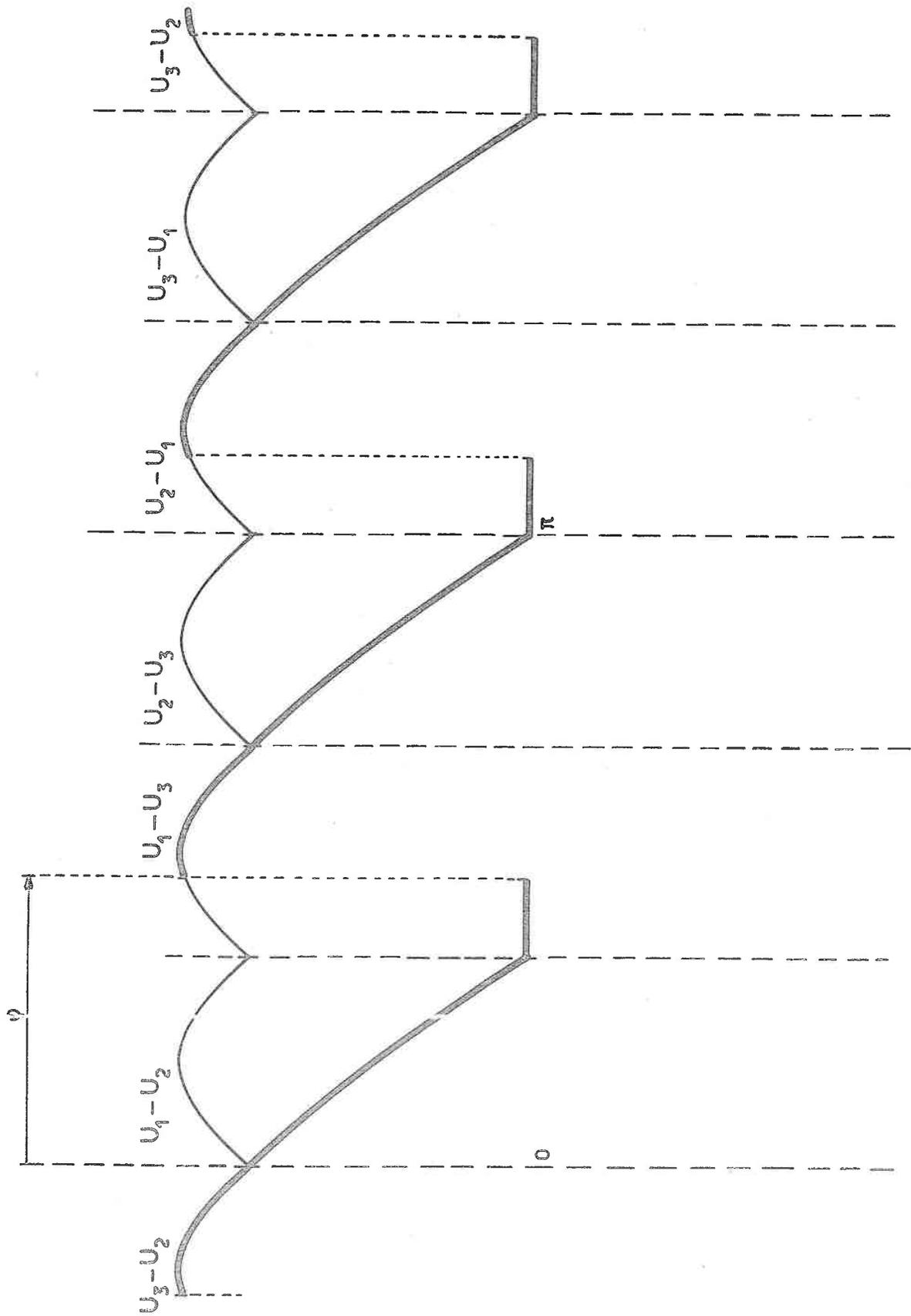


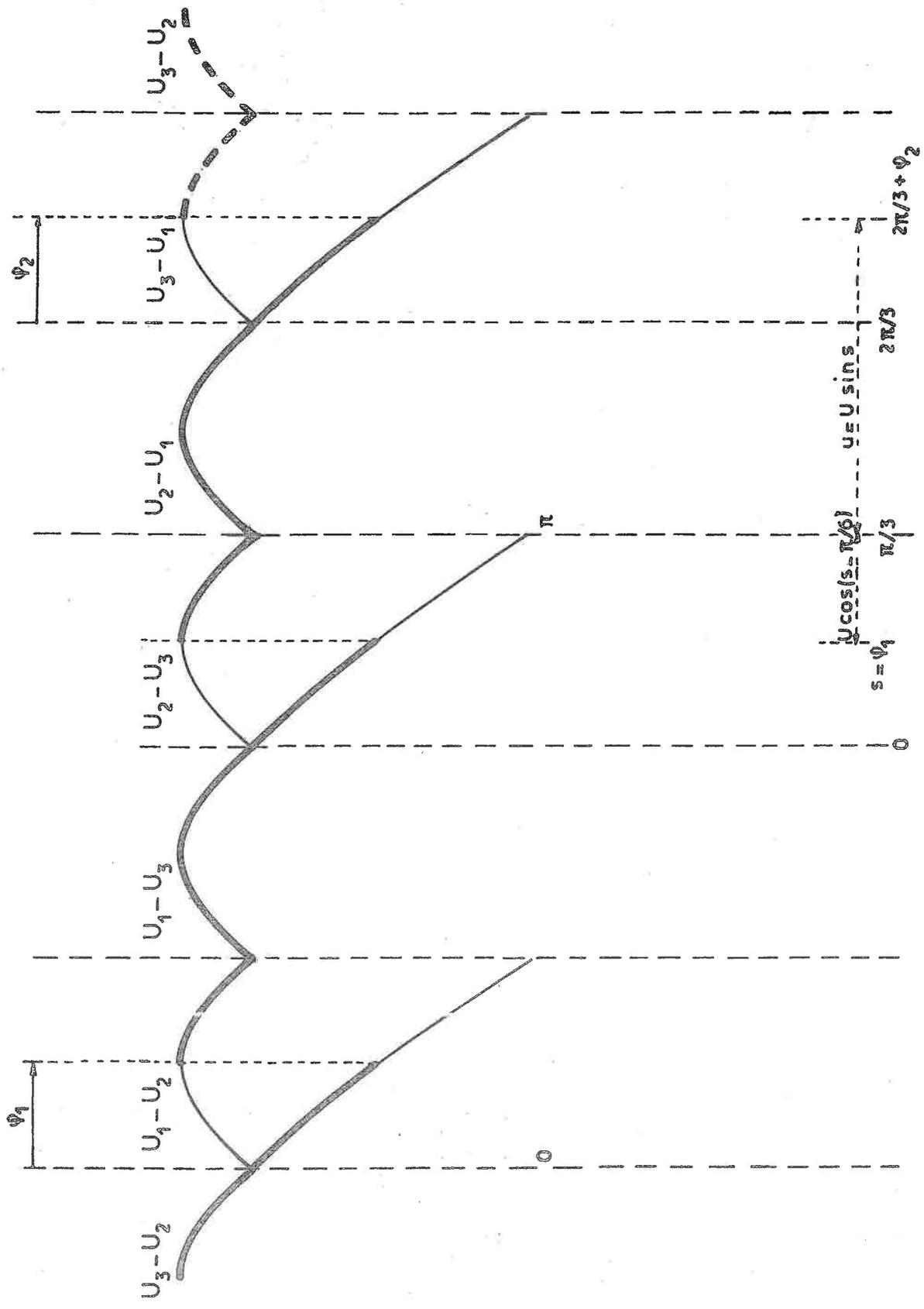


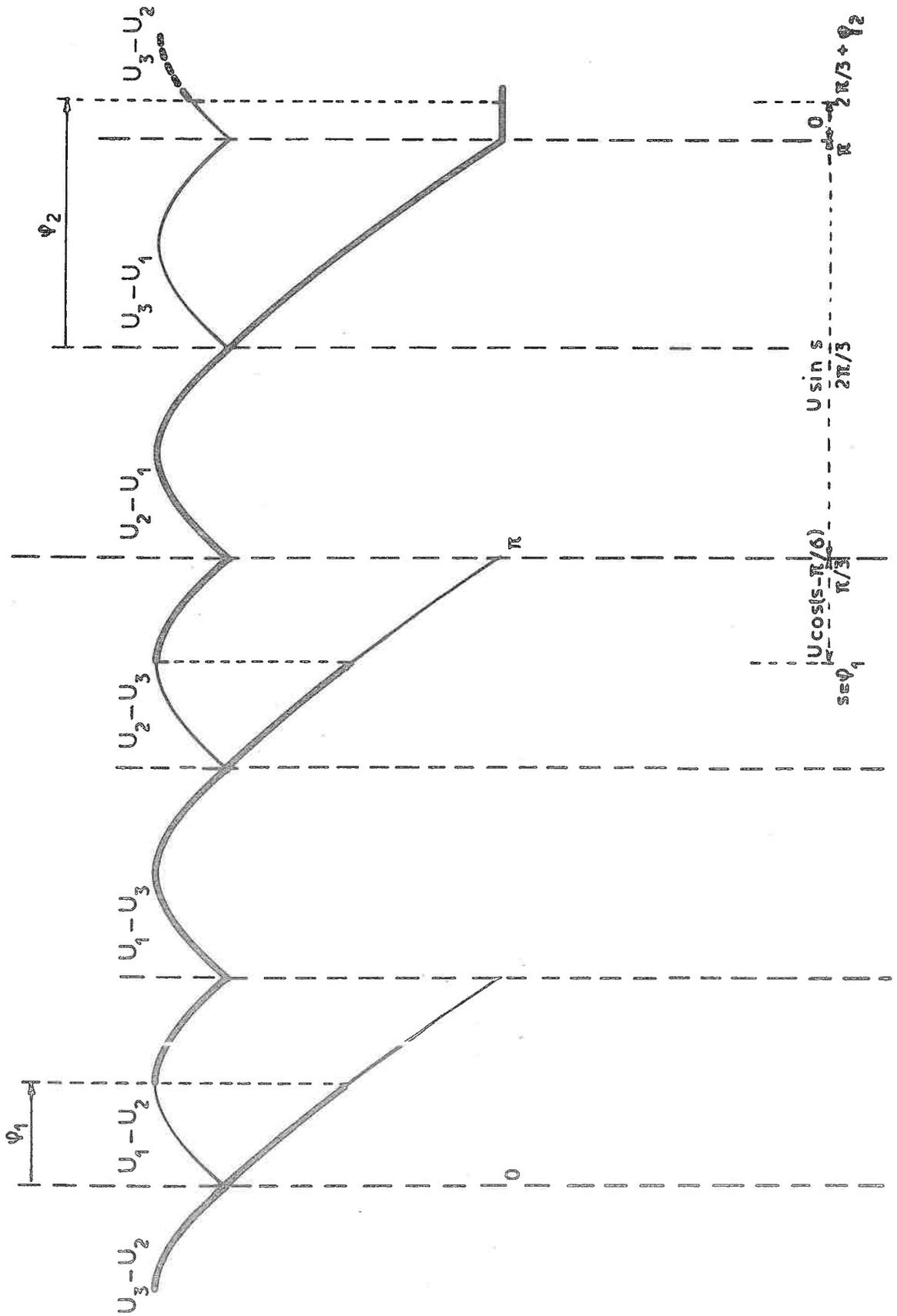
Principe du déclenchement des Thyristors

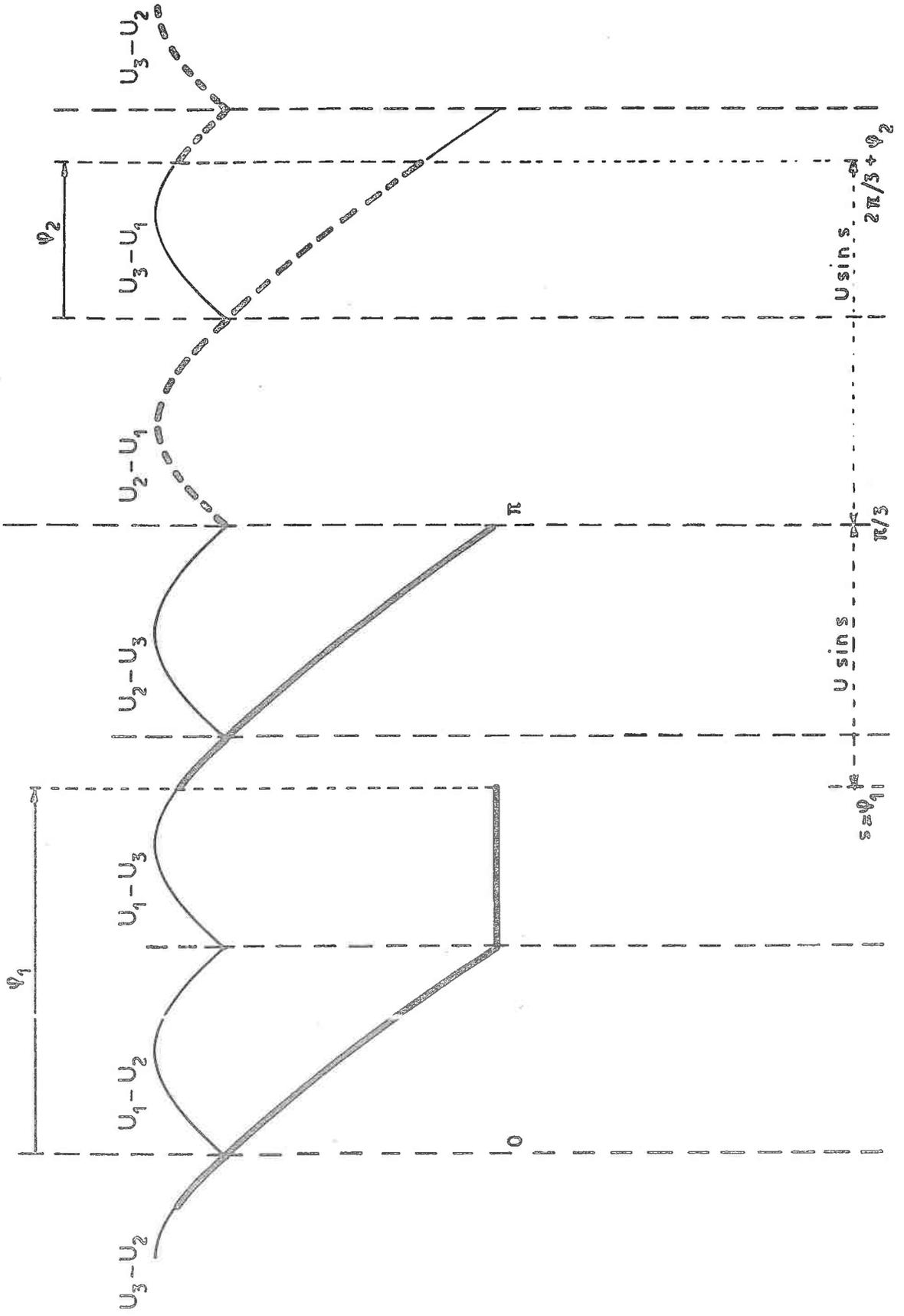


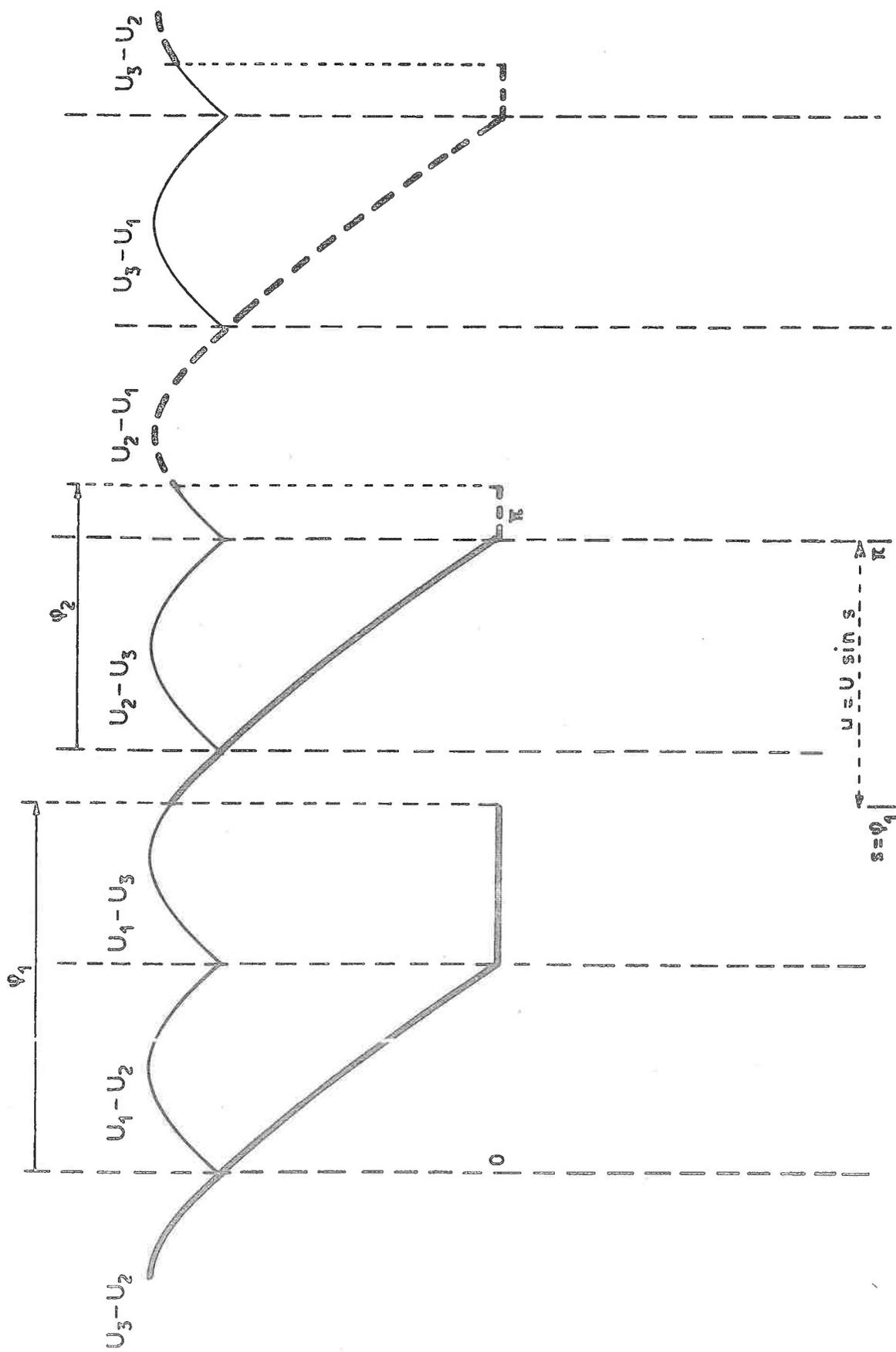












CHAPITRE II
Commandabilité du Système

PLAN DU CHAPITRE II

II.1 - Etude générale des équations

- II.1.1 - Notations, hypothèses physiques
- II.1.2 - Existence, unicité, continuité des solutions
- II.1.3 - Solutions bornées

II.2 - Etude des points singuliers pour une alimentation constante

- II.2.1 - existence, unicité
- II.2.2 - Caractéristique x_c, y_c : régime permanent
- II.2.3 - Classification
- II.2.4 - Etude des trajectoires isolées (séparatrices)

II.3 - Etude du système réel

- II.3.1 - Etude sur une période
 - II.3.1.1 - Majoration en vitesse
 - II.3.1.2 - Majoration des pointes d'intensité
- II.3.2 - Comparaison avec le cas V constant
 - II.3.2.1 - Sur une période
 - II.3.2.2 - En régime établi
 - II.3.2.3 - Conclusion

II.4 - Domaines atteignables. commandes admissibles

- II.4.1 - Majorations directes
- II.4.2 - Test sur les commandes admissibles

II.1 - ETUDE GENERALE DES EQUATIONS

II.1.1 - NOTATIONS - HYPOTHESES

Dans ce chapitre, les équations (1) seront écrites sous forme canonique en prenant pour variables d'état, l'intensité et la vitesse respectivement notées x et y .

$$\begin{aligned}x &= I \\y &= \Omega\end{aligned}$$

Les équations (1) s'écrivent alors sous la forme (3)

$$(3) \quad \begin{cases} 3-1 & \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{L} (Rx + \kappa(x)y - V(t)) \\ 3-2 & \frac{dy}{dt} = \frac{1}{J} (-fy + \kappa(x)x - C_f - \Gamma) \end{cases}$$

soit avec les valeurs numériques

$$(3') \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{0,04} (-0,85x - \kappa(x)y + V(t)) = -21,25x - 25 \kappa(x)y + 25 V(t) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{0,3} (-0,01y + \kappa(x)x - 33) \end{cases}$$

ou sous forme vectorielle :

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{X} &= F(X,t) \text{ avec } X = (x,y) & |X| &= \max(|x|, |y|) \\ F_x(X,t) &= -\frac{1}{L} (Rx + \kappa(x)y - V(t)) \\ F_y(X,t) &= \frac{1}{J} (-fy + \kappa(x)x - C_f - \Gamma) \end{aligned}$$

La solution de (4) passant par la condition initiale X_0 au temps t_0 s'écrira

$$X(X_0, t_0, t) \text{ ou } (x(x_0, y_0, t_0, t), y(x_0, y_0, t_0, t))$$

L'étude physique du système nous a donné les hypothèses suivantes :

- . k est une courbe de saturation et les réactions d'induit sont négligées d'où
 $H_1) - k$ est une application de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ continue, dérivable, croissante à dérivée bornée $K' = \sup_{\mathbb{R}^+} |k'(x)|$
- . V tension redressée n'admet des discontinuités qu'au moment d'allumage des thyristors soit
 $H_2) - V$ est une application de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ continue par morceaux, bornée sur \mathbb{R}^+
- $H_3) - x(t) > 0$ quel que soit t réel positif (Intensité délivrée par un pont redresseur)
- $H_4) - y(t) > 0$ quel que soit t réel positif (on suppose que le moteur ne peut être entraîné en sens inverse de sa rotation normale).

II.1.2 - EXISTENCE, UNICITE, CONTINUITE DES SOLUTIONS

Montrons avec les hypothèses H_1 et H_2 que $X(X_0, t_0, t)$ solution de (4) existe pour tout $t > t_0 > 0$, est unique et continue par rapport à t.

Il suffit de prouver que F est lipschitzienne en X à t fixé, et intégrable en t sur tout compact de \mathbb{R}^+ à X fixé.

La deuxième condition est immédiatement vérifiée puisque V est continue par morceaux. Montrons que la première l'est aussi.

Soient $X_1(x_1, y_1)$; $X_2(x_2, y_2)$

$$F_x(X_1, t) - F_x(X_2, t) = -\frac{1}{L} (R(x_1 - x_2) + k(x_1)y_1 - k(x_2)y_2)$$

$$F_y(X_1, t) - F_y(X_2, t) = \frac{1}{J} (-f(y_1 - y_2) + k(x_1)x_1 - k(x_2)x_2)$$

soit :

$$|F_x(X_1, t) - F_x(X_2, t)| < \frac{1}{L} (R_1|x_1 - x_2| + |k(x_1) - k(x_2)||y_2| + |y_1 - y_2| k(x_1))$$

$$|F_y(X_1, t) - F_y(X_2, t)| < \frac{1}{J} (f|y_1 - y_2| + |k(x_1) - k(x_2)||x_1| + |x_1 - x_2| k(x_2))$$

avec l'hypothèse H_1 nous obtenons enfin :

$$|F_x(X_1, t) - F_x(X_2, t)| \leq \frac{1}{L} ((R + K' |y_2|) |x_1 - x_2| + k(x_1) |y_1 - y_2|)$$

$$|F_y(X_1, t) - F_y(X_2, t)| \leq \frac{1}{J} ((k |x_2| + K' |x_1|) |x_1 - x_2| + f |y_1 - y_2|)$$

donc à t fixe F est lipschitzienne pour tout couple X_1, X_2 tels que $|X_1| < +\infty$ $|X_2| < +\infty$, le système (4) admet une solution unique, continue, passant par le point X_0 au temps t_0 .

II.1.3 - SOLUTIONS BORNEES

Nous ne nous préoccupons que des solutions situées dans le quart de plan positif (hypothèses H_1 et H_2) et nous démontrerons que ces solutions sont bornées en utilisant le théorème suivant (réf. 15)

Théorème :

Soit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x} = F_x(x, y, t) \\ \dot{y} = F_y(x, y, t) \end{cases}$$

Soient A_1 et B_1 deux constantes positives définissant le rectangle $R_1 : |x| < A_1, |y| < B_1$

Soit ϕ définie dans le complémentaire de R_1 (\bar{R}_1) et satisfaisant à

1) $\phi(x, y) > 0$

2) i) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \phi(x, y) = 0$ uniformément en y

ii) $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \phi(x, y) = 0$ uniformément en x

3) ϕ localement lipschitzienne

4) pour tout $t \geq 0$ et pour tout point (x, y) appartenant à \bar{R}_1 il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\phi \left(x + h F_x(x, y, t), y + h F_y(x, y, t) \right) - \phi(x, y) \right] \geq \varepsilon > 0$$

alors il existe deux constantes A et B telles que pour toute condition initiale (x_0, y_0, t_0) on ait un nombre T_0 tel que :

$$|x(x_0, y_0, t_0, t)| < A$$

$$\text{et } |y(x_0, y_0, t_0, t)| < B$$

pour tout $t > T_0$

Montrons que ce théorème s'applique à nos équations :

Considérons la fonction ϕ définie par $\phi(x, y) = e^{-(Lx^2 + Jy^2)}$

Lx^2 et Jy^2 sont les énergies emmagasinées respectivement dans la self et le rotor (inertie) du moteur.

ϕ vérifie immédiatement les conditions 1), 2), 3). Pour satisfaire 4) il suffit de montrer qu'il existe deux constantes A_1 et B_1 telles que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} F_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} F_y > 0 \quad \text{sur } (R_1)$$

nous avons

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} F_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} F_y \right) = Rx^2 + fy^2 - x V(t) + (\Gamma + C_f) y$$

Comme nous ne nous intéressons qu'au quart de plan positif, le seul terme négatif de l'expression ci-dessus est $-x V(t)$; il suffit donc de prendre :

- $x > A_1$ tel que $Rx^2 - x V(t) > 0$ quel que soit t

d'où $x > A_1 > \frac{1}{R} \sup_t V(t)$. C'est l'intensité maximale sans force contre électromotrice.

- $y > B_1$ tel que, pour la valeur de x rendant minimum la partie négative, l'expression soit positive.

Or $Rx^2 - x V(t)$ est minimum pour $x = \frac{V(t)}{2R}$. Cette valeur minimum est alors égale à $-\frac{V(t)^2}{4R}$; il suffit donc de prendre

$$Y > B_1 > \frac{-(\Gamma + C_f) + \sqrt{(\Gamma + C_f)^2 + \frac{f}{R} \left(\sup_t V(t) \right)^2}}{2f}$$

II.2 - ETUDE DES POINTS SINGULIERS POUR V CONSTANT

Montrons d'abord que lorsque le rotor n'est plus bloqué, les équations de V sont celles données au paragraphe I.2.3, c'est-à-dire que x ne peut s'annuler en un point t_0 où $V(t_0) \geq a > 0$.

Supposons que x s'annule à l'instant t_0 où $V(t_0) > a > 0$, nous avons toujours $x \geq 0$, $y \geq 0$ (hypothèses H_3 et H_4), les solutions de (3) sont continues et V est continue dans un intervalle (α, t_0) donc quel que soit $\epsilon > 0$, il existe Δt_0 tel que :

$$\epsilon \geq x(t_0 - \Delta t_0) > 0$$

$$\frac{dx}{dt}(t_0 - \Delta t_0) \leq 0$$

$$V(t) \geq a > 0 \text{ pour } t \text{ dans } (t_0 - \Delta t_0, t_0)$$

alors d'après l'équation 3-1 : $Rx + k(x)y = V(t) - L \frac{dx}{dt}$

$$\text{soit } Rx(t_0 - \Delta t_0) + k(x(t_0 - \Delta t_0)) y(t_0 - \Delta t_0) \geq a$$

ce qui est impossible pour tout $\epsilon > 0$ puisque k est une fonction continue croissante et $k(0) \geq 0$.

V est donc une fonction périodique et nous appellerons V_m sa moyenne.

$$V_m = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{3U}{2\pi} (1 + \cos \phi) = 149 (1 + \cos \phi)$$

Nous verrons dans les paragraphes suivants que le comportement du système alimenté par V_m donne des renseignements sur les trajectoires réelles. Nous allons donc étudier ce cas, et, en particulier, le comportement asymptotique.

II.2.1 - EXISTENCE, UNICITE DU POINT SINGULIER

Les points singuliers notés (x_c, y_c) sont définis par les équations :

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{dy_c}{dt} = 0$$

soit donc à résoudre le système (5)

$$(5) \quad \begin{cases} -R x_c - k(x_c) y_c + V_m = 0 \\ -f y_c + k(x_c) x_c - C_f - \Gamma = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne l'équation en x_c :

$$(6) \quad h(x_c) = f V_m + k(x_c) (C_f + \Gamma) - k^2(x_c) x_c - R f x_c = 0$$

Montrons que (6) admet une solution unique sur \mathbb{R}^+ :

quand x tend vers 0, $h(x)$ tend vers $V_m > 0$

quand x tend vers $+\infty$, $h(x)$ tend vers $-\infty$

il existe donc au moins un point x_1 tel que $h(x_1) = 0$, supposons que ce soit le premier obtenu et montrons qu'il est unique.

$$h'(x) = -Rf - k^2(x) + k'(x) (C_f + \Gamma - 2 x k(x))$$

$$h(0) > 0 \quad \text{donc} \quad h'(x_1) \leq 0$$

D'après l'hypothèse H_1 , k est croissante donc $k'(x) > 0$ et il existe A tel que $x \geq A$ entraîne $C_f + \Gamma < 2 x k(x)$ soit $h'(x) < 0$

- si $x_1 \geq A$ alors $h'(x) < 0$ pour tout $x > x_1$ donc $x_1 = x_c$ unique

- si $x_1 < A$ alors $h'(x_1) \leq 0$, $C_f + \Gamma - 2 x_1 k(x_1) > 0$; lorsque x croît, $C_f + \Gamma - 2 x k(x)$ tend vers 0, k' est non croissante, k^2 décroît donc h' décroît soit

$$h'(x) \leq 0 \quad \text{pour } x \text{ appartenant à } [x_1, A]$$

Dans les deux cas $h'(x) \leq 0$ pour $x \geq x_1$ il existe un seul point tel que $h(x_c) = 0$. On tire alors y_c d'une des équations (5).

Le sous programme SIVIF calcule, pour V_m donné, la racine x_c de l'équation $h(x) = 0$ par la méthode de Newton, puis y_c .

II.2.2 - CARACTERISTIQUE (x_c, y_c) : REGIME PERMANENT

Etudions la courbe (x_c, y_c) lorsque V_m varie.

D'après les equations (5) nous avons $-f y_c + k(x_c)x_c - C_f^{-1} = 0$

d'où
$$\frac{\partial x_c}{\partial y_c} = \frac{f}{k(x_c) + k'(x_c)x_c} > 0$$

Le fonctionnement du moteur étant limité à 200 rd/s (voir chapitre III), nous voyons que x_c est croissant en fonction de y_c et que x_c appartient à (x_{c10}, x_{c200}) avec

$$\begin{cases} x_{c10} \text{ obtenu pour } y_c = 10 \\ x_{c200} \text{ " " } y_c = 200 \end{cases}$$

Le tableau (II.1) donne les différentes valeurs de x_c, y_c en fonction de V_m . Nous voyons que x_c appartient à $(24,5 ; 25,5)$, ce qui nous permettra dans certaines approximations de prendre $x_c = 25$.

Soit $x_c = \gamma(y_c)$ cette caractéristique

PHI	V MOYEN	INTENSITE FINALE	VITESSE FINALE
10	295.67	25.51	199.74
20	288.95	25.48	194.93
30	277.97	25.44	187.07
40	263.08	25.39	176.40
50	244.72	25.32	163.21
60	223.45	25.24	147.89
70	199.91	25.15	130.91
80	174.83	25.06	112.75
90	148.96	24.96	93.96
100	123.10	24.86	75.12
110	98.01	24.77	56.79
120	74.48	24.68	39.54
130	53.21	24.60	23.90
140	34.85	24.53	10.37

Tableau II.1 : Régime permanent

11.2.3 - CLASSIFICATION

Pour étudier le point singulier, nous utiliserons la première méthode de Ljapounov en linéarisant les équations (3) autour du point (x_c, y_c) .

Posons :

$$x = x_c + u$$

$$y = y_c + v$$

ce qui nous donne :

$$L \frac{du}{dt} = -R(x_c + u) - k(x_c + u)(y_c + v) + V_m$$

$$J \frac{dv}{dt} = k(x_c + u)(x_c + u) - f(y_c + v) - C_f - \Gamma$$

avec la dérivabilité de k nous écrirons $k(x_c + u) = k(x_c) + k'(x_c)u + \sigma(u^2)$; nous obtenons les équations (6)

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{L} \left[- (R + k'(x_c) y_c)u - k(x_c)v + k'(x_c) u v \right] \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{J} \left[(k(x_c) + k'(x_c)x_c)u - fv + k'(x_c)u^2 \right] \end{cases}$$

que nous écrirons plus simplement sous la forme (7) :

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{u} = \alpha u + \beta v + f(u,v) \\ \dot{v} = \gamma u + \delta v + g(u,v) \end{cases}$$

avec :

$$(7') \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} f(u,v)/\rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} g(u,v)/\rho = 0 \quad \rho^2 = u^2 + v^2$$

$$\text{Posons} \quad \begin{cases} S = \alpha + \delta \\ P = \alpha\delta - \beta\gamma \end{cases}$$

Le type de point singulier (x_c, y_c) dépendant des valeurs de S et P , il nous faut donc calculer ces valeurs approximativement. Pour les valeurs faisant intervenir x_c nous prendrons $x_c = 25$, $k(x_c) = 1,35$, $k'(x_c) = 25 \cdot 10^{-3}$.

$$\text{Ce qui donne :} \quad \begin{cases} S \approx 21,28 - 0,625 y_c \\ P \approx 225 + 0,02 y_c \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} S < 0 \\ S^2 \approx 450 + 26,4 y_c + 0,39 y_c^2 \\ 4P \approx 900 + 0,08 y_c \end{cases}$$

Selon les valeurs de y_c , nous obtenons les trois configurations suivantes pour le système linéarisé :

- $y_c < 12$ foyer stable
- $y_c \approx 12$ noeud stable à une tangente
- $y_c > 12$ noeud stable à deux tangentes

Compte tenu du résultat (7'), le comportement du système réel (3) est le même que celui du système linéarisé, autour du point singulier ; ce que nous avons vérifié à l'aide de la simulation numérique : voir les figures (II - 1) , (II - 2) , (II - 3) , (II - 4)

Remarques :

- $y_c < 12$ le foyer stable est très peu visible car l'amortissement est très grand comme le montre la figure (II - 1)
- $y_c \approx 12$ ce cas est impossible à obtenir, puisqu'il correspond à une limite de fonctionnement
- $y_c > 12$ C'est la partie qui nous intéressera dans la suite puisque le fonctionnement du moteur ne sera étudié que pour $Y > 10$ rd/s

II.2.4 - ETUDE DES TRAJECTOIRES ISOLEES (SEPARATRICES)

Le comportement autour du point singulier, dans le cas du noeud à deux tangentes, a été décrit plus en détail, en étudiant les valeurs propres du système linéarisé (liées aux constantes de temps), et les vecteurs propres (direction des tangentes). Ces résultats sont présentés dans le tableau (II - 2).

PHI	V MOYEN	VALEURS PROPRES		DIRECTIONS PROPRES	
		UN	DEUX	UN	DEUX
20	288.95	-0.16E 03	-0.14E 01	-0.42E-01	-0.49E 01
30	277.97	-0.16E 03	-0.15E 01	-0.43E-01	-0.47E 01
40	263.08	-0.15E 03	-0.16E 01	-0.46E-01	-0.45E 01
50	244.72	-0.14E 03	-0.17E 01	-0.49E-01	-0.42E 01
60	223.45	-0.13E 03	-0.18E 01	-0.53E-01	-0.39E 01
70	199.91	-0.12E 03	-0.20E 01	-0.58E-01	-0.35E 01
80	174.83	-0.10E 03	-0.22E 01	-0.66E-01	-0.31E 01
90	148.96	-0.93E 02	-0.26E 01	-0.76E-01	-0.27E 01
100	123.10	-0.78E 02	-0.31E 01	-0.91E-01	-0.23E 01
110	98.01	-0.63E 02	-0.38E 01	-0.11E 00	-0.18E 01
120	74.48	-0.48E 02	-0.50E 01	-0.14E 00	-0.14E 01
130	53.21	-0.33E 02	-0.72E 01	-0.21E 00	-0.99E 00
140	34.85	-0.19E 02	-0.10E 02	-0.30E 00	-0.57E 00

TABLEAU II.2

Nous remarquons que la direction D_1 vers laquelle tendent toutes les trajectoires, se rapproche de l'axe Oy et que la direction D_2 , trajectoire singulière, se rapproche de l'axe Ox quand V_m augmente, résultat prévisible si l'on considère les valeurs numériques du système (6) en assimilant x_c à 25.

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{u} \approx - (21,25 - 0,625 y_c) u - 34 v \\ \dot{v} \approx 6,6 u - \frac{v}{30} \end{cases}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4 P}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4 P}}{2}$

et les vecteurs propres $\vec{VP}_1 (\frac{1}{30} - \lambda_1, 6,6)$ $\vec{VP}_2 (\frac{1}{30} - \lambda_2, 6,6)$

quand y_c tend vers $+\infty$, λ_1 tend vers $-\infty$, λ_2 tend vers 0 donc les directions propres tendent vers

$$\vec{VP}_1 (\text{axe Ox}) \quad \vec{VP}_2 (\frac{1}{30}; 6,6) \approx \text{axe Oy}$$

En résumé, nous savons que :

- toutes les trajectoires du système réel tendent vers le point singulier puisque les solutions sont bornées et que le noeud est stable (stabilité globale)
- le système est à structure stable (grossier), puisqu'il ne possède qu'un point singulier qui n'est pas un foyer faible

La simulation du système réel alimenté par V_m nous montre que les séparatrices sont très proches de celles du système linéarisé dans le domaine d'étude $x \leq 45 A$, ce qui nous permet de dire que pour atteindre le point y_c correspondant à V_m , en partant des conditions initiales (x_0, y_0) telles que $y_0 < y_c$, il faut appliquer une commande $V \geq V_m$, puisque les trajectoires ne coupent pas la séparatrice assimilée à l'axe Ox.

La condition de grossièreté prouve que l'étude faite reste encore valable si les valeurs des paramètres sont légèrement différentes de celles choisies.

II.3 - ETUDE DU SYSTEME REEL

Les équations qui régissent le fonctionnement du moteur sont les équations (3) où V est la tension délivrée par le pont redresseur. Les équations de V sont celles données au paragraphe I.2.3 comme nous l'avons vu précédemment. V est donc une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{1}{150}$ s, continue sur une période ; les résultats concernant l'existence, la continuité et les solutions bornées, obtenus au paragraphe II.1 sont donc toujours valables.

II.3.1 - ETUDE SUR UNE PERIODE, MAJORATIONS

Nous allons montrer que l'on peut majorer les variations de x et y sur une période, majorations qui donneront des renseignements quand aux "pointes d'intensité" dues au pont redresseur et quant aux variations de y, importantes pour la connaissance des domaines atteignables. Dans toute cette partie, nous utiliserons implicitement le lemme suivant.

L e m m e

Soient - x_1 solution de $\dot{x}_1 = f_1(x_1, t)$
 - x_2 " " $\dot{x}_2 = f_2(x_2, t)$

avec $x_1(0) > x_2(0)$ et $f_1(x, t) > f_2(x, t)$ quels que soient x et t
 alors $x_1(t) > x_2(t)$ quel que soit t

Nous obtenons alors les résultats suivants :

II.3.1.1 - Majoration de la vitesse

$$\dot{y} = \frac{1}{0,3} (-0,01 y + k(x)x - 33) \quad (\text{éq. 3-2})$$

avec x maximum = $x_M = 45$ A soit $k(x_M) = 1,65$
 $y > 0$

donc

$$|\dot{y}| < \frac{1}{0,3} |k(x_M)x_m - 33| < \frac{4,2}{0,3} \approx 140$$

d'où sur une période

(M₁) |Δy| < 1 rd/s

II.3.1.2 - Majorations de l'intensité

Nous étudierons les pointes de courant dues à l'alimentation par le pont redresseur, dans le domaine d'utilisation où V "diffère le plus" de V_m c'est à dire pour $\phi \geq \frac{\pi}{3}$

$$\dot{x} = 25 (-0,85 x - k(x)y + V(t)) \quad (\text{éq. 3-1})$$

nous avons donc toujours $\dot{x} \leq 25 V(t)$ quel que soit t

$$\text{donc } |x(t) - x(t_0)| \leq \int_{t_0}^t 25 V(u) du$$

sur l'intervalle (ϕ, π) nous obtenons avec la valeur numérique $U = 312$ volts

$$x(s) \leq x(\phi) + 25 (\cos \phi - \cos s) \quad \text{soit pour } s = \pi$$

$$M_2 \quad \boxed{x(\pi) - x(\phi) \leq 25 (\cos \phi + 1)}$$

Cette majoration est très proche de la réalité lorsque le pont est utilisé à faible ouverture.

- par exemple pour $\phi = 130^\circ$

M_2 donne $x(\pi) - x(\phi) \leq 9,2$ A alors que la valeur réelle est 6,4 A

Ce résultat peut être amélioré de façon sensible en tenant compte de la faible variation de y sur une période (M_1).

On obtient alors, en considérant x croissant (seul cas qui nous intéresse puisque nous cherchons à majorer les maxima d'intensité) :

$$\dot{x} \leq 25 [-0,85 x(\phi) - k(x(\phi)) (y(\phi) - 1) + V(t)]$$

soit en intégrant :

$$M_3 \quad \boxed{x(s) \leq x(\phi) + 25(\cos \phi - \cos s) - 25 (0,85 x(\phi) + k(x_\phi)(y_\phi - 1)) \frac{s}{\omega}}$$

Nous voyons que cette majoration est beaucoup plus fine que la précédente puisqu'elle tient compte des conditions initiales, au lieu de supposer le cas le plus défavorable $x(\phi) = 0 \quad y(\phi) = 0$

- par exemple pour $x(\phi) = 25$ A , $y(\phi) = 10$ rd/s , $\phi = 130^\circ$

M_3 donne $x(\pi) = x(\phi) \leq 6,8$ A (valeur réelle 6,4 A)

En particulier, la majoration (M_2) est sans signification pour ϕ voisin de $\frac{\pi}{3}$

par exemple pour $\phi = \frac{\pi}{3}$ et les conditions initiales $x(\phi) = 12$, $y(\phi) = 100$:

M_2 donne $\Delta x < 37,5$ A

M_3 " $\Delta x < 19$ A

La valeur réelle est 14 A

II.3.2 - COMPARAISON AVEC LE CAS $V = V_m$

II.3.2.1 - Sur une période

Nous appellerons (x,y) les solutions du système réel, (x_m, y_m) les solutions du système alimenté par la tension V_m , nous avons alors les équations (9) liant $\Delta x = x - x_m$ et $\Delta y = y - y_m$

$$(9) \begin{cases} \Delta \dot{x} = 25 (-0,85 \Delta x - y (k(x) - k(x_m)) - \Delta y k(x_m) + V(t) - V_m) \\ \Delta \dot{y} = \frac{1}{0,3} (-0,01 \Delta y + k(x)x - k(x_m)x_m) \end{cases}$$

Montrons que si les conditions initiales à l'instant réduit ϕ sont identiques ($\Delta x_\phi = 0$, $\Delta y_\phi = 0$), alors trajectoires de (x,y) et (x_m, y_m) se recourent.

En négligeant les quantités $y - y_m$ faibles (M_1)

$x(\phi_+) > x_m(\phi_+)$ puisque $V(\phi) > V_m$

$y(\phi_+) > y_m(\phi_+)$

Supposons alors $x(t) > x_m(t)$ sur $(0,T)$

on a $\int_0^T (\Delta \dot{x}) < 0$ puisque $\int_0^T (V_m - V(t)) dt = 0$ d'où $x(T) < x_m(T)$ contraire à l'hypothèse.

On montrerait plus généralement par la même méthode que si

$x(\phi) > x_m(\phi)$

$y(\phi) = y_m(\phi)$

alors $x(T) - x_m(T) < x(\phi) - x_m(\phi)$: les courbes se rapprochent, et si

$x(\phi) < x_m(\phi)$

$y(\phi) = y_m(\phi)$

alors $x_m(T) - x(T) < x_m(\phi) - x(\phi)$: les courbes se rapprochent.

II.3.2.2 - Comparaison des régimes établis

Nous avons vu que les trajectoires du système (7) tendent vers le noeud stable à deux tangentes (x_c, y_c) (§ II.2.2).

L'existence de la fonction ϕ (§ II.1.3), et l'unicité des solutions, entraînent que le système réel admet une solution périodique de période T unique. La stabilité globale du système assure que toutes les solutions de (3) tendent vers cette solution périodique quand t tend vers $+\infty$.

Pour comparer la position du cycle obtenu avec le point (x_c, y_c) correspondant, nous utiliserons un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent.

ϕ étant donné, soit $(x_p(t), y_p(t))$ la solution périodique et (x_c, y_c) le point limite pour $V = V_m$, on a :

$$x_p(t + T) = x_p(t) \quad \text{quel que soit } t \text{ dans } \mathbb{R}^+$$

$$y_p(t + T) = y_p(t) \quad \text{quel que soit } t \text{ dans } \mathbb{R}^+$$

en intégrant les équations (3) de t à t + T on obtient alors (10)

$$10 \quad \left\{ \begin{array}{l} 10-1 \quad \int_t^{t+T} \left[Rx(u) + k(x(u))y(u) \right] du = \int_t^{t+T} V(u) du = \int_t^{t+T} V_m du = \int_t^{t+T} \left[Rx_c + k(x_c)y_c \right] du \\ 10-2 \quad \int_t^{t+T} \left[k(x(u))x(u) - fy(u) \right] du = \int_t^{t+T} (C_f + \Gamma) du = \int_t^{t+T} \left[k(x_c)x_c - fy_c \right] du \end{array} \right.$$

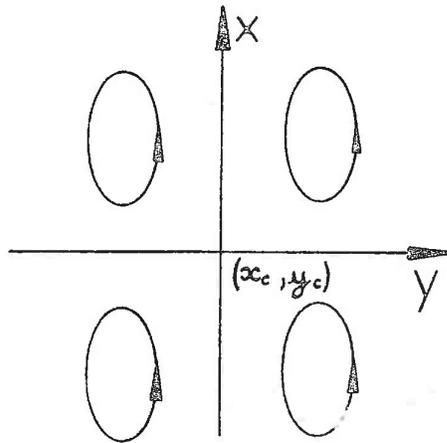
Supposons alors que sur l'intervalle $(t, t + T)$ on ait :

$$\text{ou } \left\{ \begin{array}{l} x > x_c, y > y_c \\ x < x_c, y < y_c \end{array} \right. : 10-1 \text{ est contredit}$$

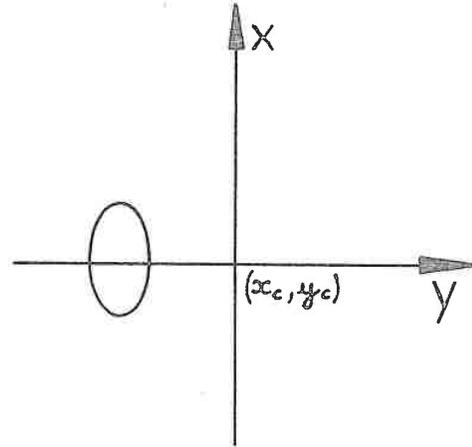
$$\text{ou } \left\{ \begin{array}{l} x > x_c, y < y_c \\ x < x_c, y > y_c \end{array} \right. : 10-2 \text{ est contredit}$$

compte tenu des hypothèses $x > 0, y > 0, k(x) > 0$ croissante.

Ce résultat signifie que les configurations de la figure II.7 sont impossibles :



II.7



II.6

En réalité, nous aurons toujours une configuration telle que celle de la figure II.6, l'oscillation en vitesse restant extrêmement faible ($< 0,05$ rd/s) quel que soit ϕ et cette vitesse étant très proche en moyenne (\bar{y}) de y_c comme le montre le tableau (II.3)

ϕ (degrees)	V_m (volts)	x_c (A)	y_c (rd/s)	\bar{y} (rd/s)
10	295,67	25,49	199,58	199,65
50	244,72	25,30	163,10	163,39
70	199,92	25,14	130,82	131,42
90	148,97	24,94	93,91	94,41
110	98,02	24,75	56,77	57,00
130	53,21	24,59	23,90	23,94

TABLEAU II.3

II.3.2.3 - Conclusion

Nous admettrons que les résultats des paragraphes (II.3.2.1) et (II.3.2.2) s'étendent aux trajectoires complètes, c'est-à-dire que les trajectoires (x,y) et (x_m, y_m) se recoupent à chaque période si les conditions initiales sont identiques. Ce résultat a été vérifié sur toutes les simulations que nous avons effectuées (exemple : figure II.8) et nous l'utiliserons pour obtenir des majorations et des minoration relatives aux domaines atteignables et aux commandes admissibles.

II.4 - DOMAINES ATTEIGNABLES, COMMANDES ADMISSIBLES

L'étude faite dans les paragraphes précédents va nous permettre d'obtenir des majorations simples sur les commandes admissibles, des renseignements concernant les domaines atteignables et un test simple pour déterminer l'espace des commandes admissibles.

Rappelons le résultat final du paragraphe II.2.4 : pour atteindre le point (x, y_c) , y_c correspondant à V_m , x quelconque, avec des conditions initiales (x_0, y_0) $y_0 < y_c$ il faut appliquer une tension $V > V_m$.

Le système physique impose une contrainte d'intensité $x \leq L$, avec $L = 45$ A; nous allons montrer comment cette contrainte réduit l'espace des commandes admissibles et en conséquence les domaines atteignables.

II.4.1 - MAJORATIONS DIRECTES

Calculons l'accroissement d'intensité à la $p^{\text{ième}}$ période avec les conditions initiales x_0, y_0 et la tension V_m .

Nous savons que $|\Delta y| \leq 1 \text{ rd/s}(M_1)$ sur une période.

Comme $x_c \approx 25$ A, nous pourrions écrire $V_m = 0,85x25 + k(25)y_c$

Soit $V_m \approx 21,2 + 1,36 y_c$ la commande appliquée pendant p périodes :

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| \geq 25 \left(-0,85 L - k(L) \times (y_0 + p) + V_m \right)$$

$$\text{Pendant } p \text{ périodes } \Delta x \geq \sup \left| \frac{dx}{dt} \right| \times pT$$

$$\text{soit } \Delta x > \frac{p}{6} \left(-17,1 - 1,7 y_0 - 1,7 p + 1,36 y_c \right)$$

Il suffit qu'il existe un p tel que $\Delta x \geq 45$ A pour que le point y_c ne puisse être atteint à partir de (y_0, x_0) sans dépassement de contrainte.

$$\text{Soit donc } \frac{P}{6} \{-17,1 - 1,7 y_0 - 1,7 p + 1,36 y_c\} \geq 45$$

$$\text{ou } 1,7 y_0 \leq 1,36 y_c - 17,1 - \left(\frac{280}{p} + 1,7 p\right).$$

En prenant la valeur de p entière qui rend cette dernière expression maximum, c'est-à-dire $\frac{280}{p} + 1,7 p$ minimum; donc $p = 13$, nous obtenons :

$$(11) \quad y_0 \leq 0,8 y_c - 47$$

- Donc si $y_0 \leq 0,8 y_c - 47$ on ne peut aller du point (x_0, y_0) au point (x_c, y_c) en une seule commande ; ce résultat peut aussi être exprimé par :

- Partant du point (x_0, y_0) on ne peut atteindre en une seule commande un point (x, y) tel que

$$y > \frac{y_0 + 47}{0,8}$$

En exprimant maintenant V_m en fonction de l'angle d'amorçage : $V_m = 149 (1 + \cos \phi)$ dans la majoration de Δx sur p périodes, on a

$$(12) \quad \Delta x > \frac{P}{6} \{-38,2 - 1,7(y_0 + p) + 149(1 + \cos \phi)\}$$

Δx doit être inférieur à $\Delta x_M = L - x_0$ pour tout p donc si le deuxième membre de (12) est supérieur à x_M pour au moins une valeur de p , la contrainte sera dépassée, ce qui se traduit par

$$\frac{P}{6} \{-38,2 - 1,7 (y_0 + p) + 149 (1 + \cos \phi)\} > \Delta x_M$$

En prenant pour p la valeur qui rend cette expression minimum, soit $p^2 = \frac{6 \Delta x_M}{1,7}$ nous obtenons :

$$\text{si } (13) \quad \boxed{\cos \phi \geq -0,75 + 0,0114 y_0 + 0,043 (45 - x_0)} \quad \text{est vérifié,}$$

l'application d'une commande correspondant à l'angle d'ouverture ϕ , au système ayant pour conditions initiales (x_0, y_0) entraîne un dépassement d'intensité.

II.4.2 - TEST SUR LES COMMANDES ADMISSIBLES

Nous allons montrer que l'on peut améliorer le resultat (13), en prouvant qu'il suffit de connaître une commande non admissible (V_m), pour les conditions initiales (x_0, y_0) , pour en déduire que toute commande $V > V_m$ n'est pas admissible pour les mêmes conditions initiales. Démontrons d'abord le lemme suivant :

L e m m e :

Etant donné une commande V_m , soient :

- (x_c, y_c) le point limite correspondant
- S la trajectoire issue du point (x_0, y_0) telle que

- i) $x_0 = \gamma(y_0)$
- ii) $\frac{dx}{dt} > 0$ pour tout x appartenant à (x_0, L)
- iii) $\frac{dy}{dt} > 0$ pour tout x appartenant à (x_0, L)

iv) $y_L < y_c$ en notant y_L le point correspondant à $x = L$

alors toute trajectoire (x_1, y_1) issue de conditions initiales (x_{10}, y_{10}) avec $y_{10} < y_0$ admet au moins un point tel que $x_1 > L$

Démonstration :

Soient (A), (B), (C) les domaines du plan de phase définis par leurs frontières comme suit : (figure II.9)

- (A) $\begin{cases} x = L \\ x = x_0 \\ S \\ y = 0 \end{cases}$
- (B) $\begin{cases} x = x_0 \\ \Gamma \text{ (graphe de } x=\gamma(y) \text{)} \\ y = 0 \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 \\ \Gamma \\ y = 0 \end{cases}$

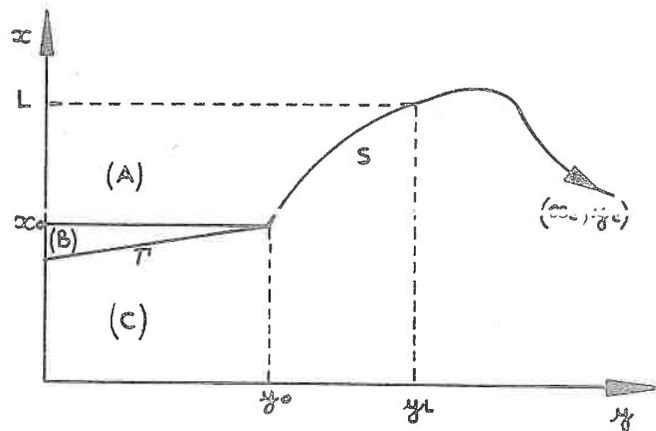


Figure II.9

a) - Supposons que (x_{10}, y_{10}) appartienne à (A)

Soit S_1 la trajectoire issue de (x_{10}, y_{10}) . Supposons que S_1 satisfasse la contrainte, c'est-à-dire :

$$x_1 < L \text{ pour tout } y_1 < y_L$$

$$\text{alors } \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{L} \left[V_m - Rx_1 - k(x_1)y_1 \right] \geq \frac{1}{L} \left[V_m - Rx_L - k(x_L)y_L \right] > 0 \quad (\text{ii})$$

Or, quand t tend vers $+\infty$ y tend vers $y_c > y_L$ (iv), donc la trajectoire S_1 sort du domaine (A) et par continuité, coupe la frontière en un point qui, puisque x est croissant dans (A), appartient à :

- $(x = L)$; c'est contraire à l'hypothèse

- (S) ; c'est impossible à cause de l'unicité des solutions

b) - Supposons que (x_{10}, y_{10}) appartienne à (C), alors il existe au moins un point de S_1 dans $(A) \cup (B)$, en effet supposons que :

$$x_1 < \gamma(y_1) \text{ pour tout } y_1 < y_L, \text{ alors}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{J} \left[k(x_1) - fy_1 - \Gamma - C_f \right] \leq \frac{1}{J} \left[k(y_c) \gamma(y_1) - fy_1 - \Gamma - C_f \right] = 0$$

donc $\frac{dy_1}{dt} < 0$, $\frac{dx_1}{dt} > 0$: c'est impossible puisque y_1 tend vers $y_c > y_L$ quand t tend vers $+\infty$

c) - Supposons que (x_{10}, y_{10}) appartienne à (B)

alors il existe un point de S_1 qui appartient à (A), sinon la trajectoire reste dans $(B) \cup (C)$; c'est impossible puisque y_1 tend vers $y_c > y_L$ quand t tend vers $+\infty$, nous sommes ramenés au premier cas.

Ce lemme étant démontré, montrons le résultat annoncé.

Soit V une commande telle que $V > V_m$, S' la trajectoire issue du point (x_o, y_o) , sous la commande V .

$$\left(\frac{dx_o}{dt} \right)_{S'} > \left(\frac{dx_o}{dt} \right)_S \quad \text{puisque } V > V_m$$

donc il existe des points de S' dans (A) , S' ne peut couper S en un point (x_s, y_c) sinon on aurait

$$\left(\frac{dx_s}{dy_s}\right)_{S'} \geq \left(\frac{dx_s}{dy_c}\right)_S$$

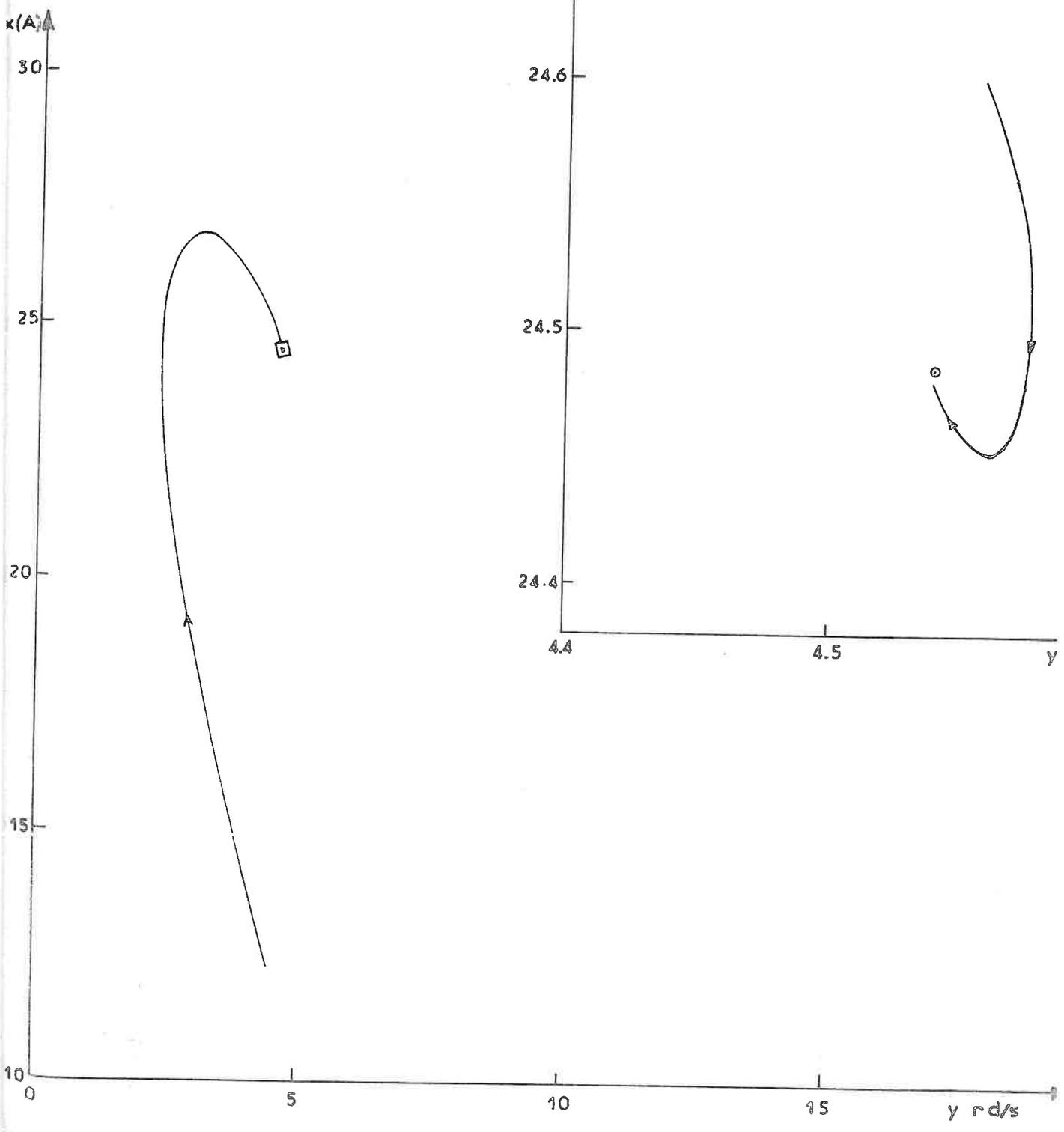
c'est impossible puisque S' étant au dessus de S au point (x_{o+}, y_{o+}) on doit avoir au point d'intersection

$$\left(\frac{dx_s}{dy_s}\right)_{S'} < \left(\frac{dx_s}{dy_s}\right)_S \quad \text{d'où le résultat cherché}$$

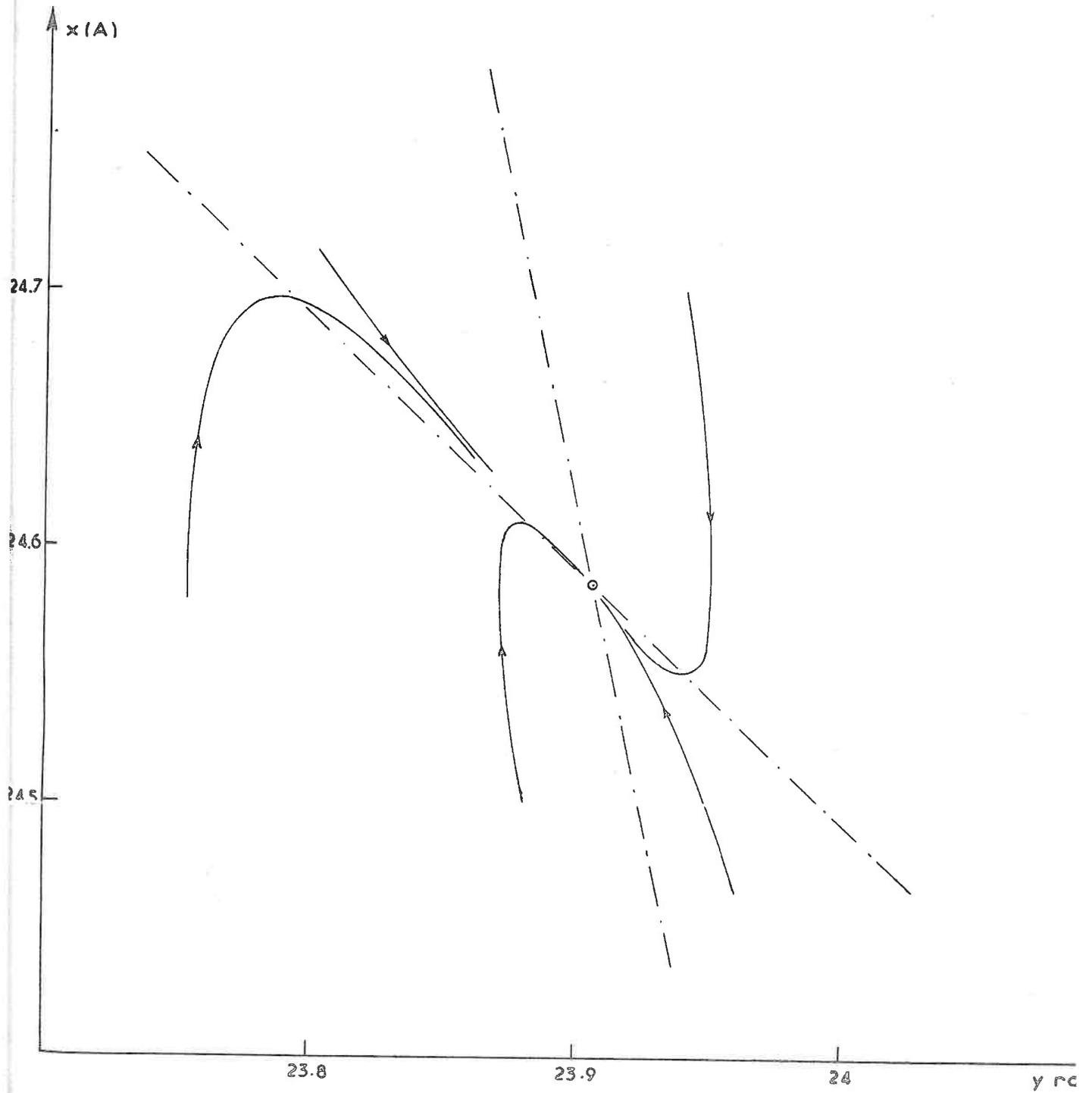
Nous voyons que ces démonstrations utilisent le résultat suivant : $y(t)$ tend vers y_c quand t tend vers $+\infty$ et ne sont donc valables pour une commande constante sur $(0, +\infty)$; cependant nous avons vu au paragraphe II.4.1 que le maximum d'intensité était atteint au bout d'une quinzaine de périodes au maximum. Comme nous appliquerons des commandes constantes sur des intervalles de temps supérieurs ou égaux à 30 périodes, les résultats trouvés seront applicables.

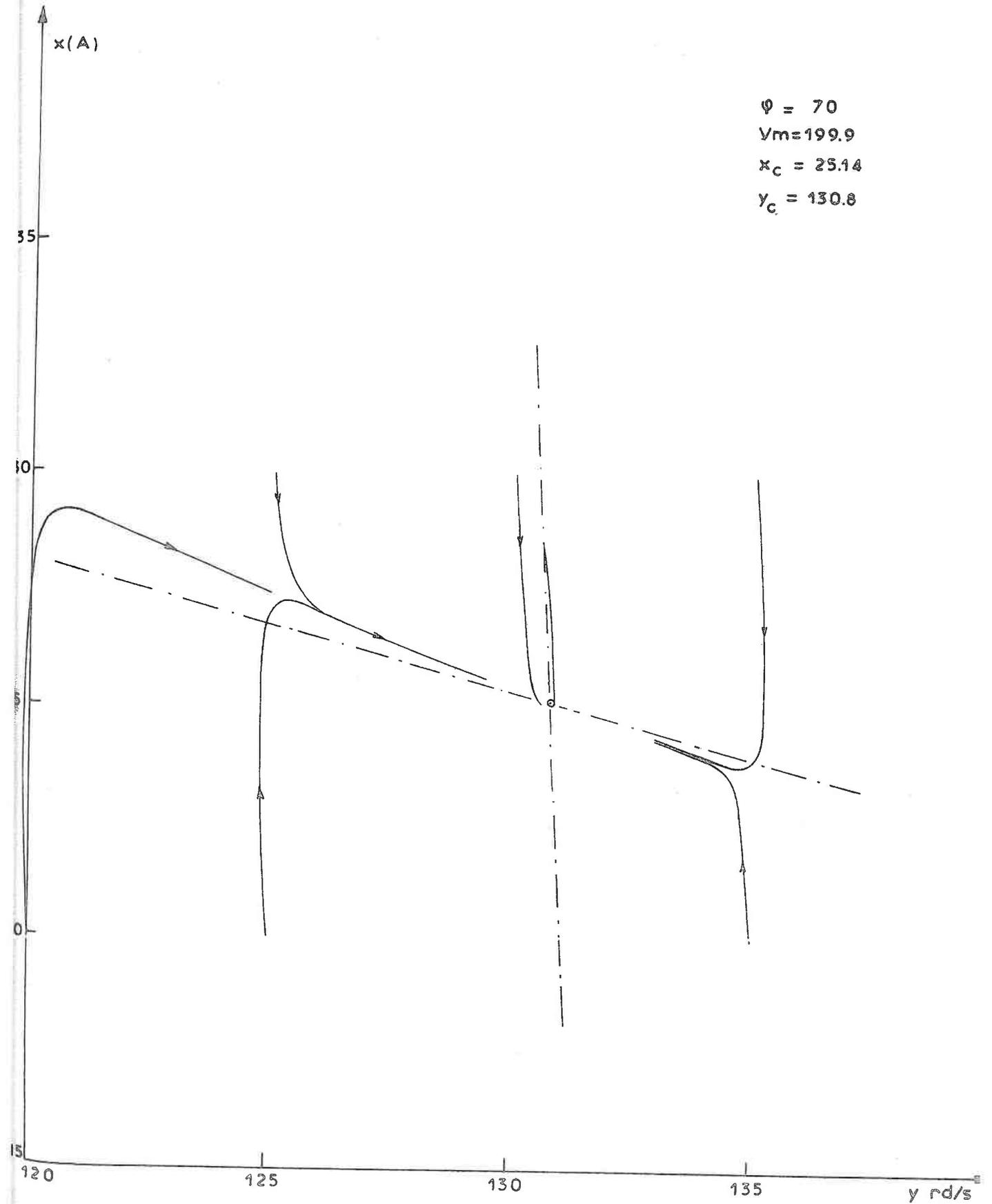
On peut enfin montrer par le même raisonnement que si V_m est une commande admissible pour les conditions initiales (x_o, y_o) , alors toute commande V telle que $V < V_m$ est aussi admissible pour les mêmes conditions initiales. Ces résultats vont nous permettre de réduire considérablement les calculs d'optimisation, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

$\psi = 145$
 $V_m = 26.94$
 $x_c = 24.48$
 $y_c = 4.54$

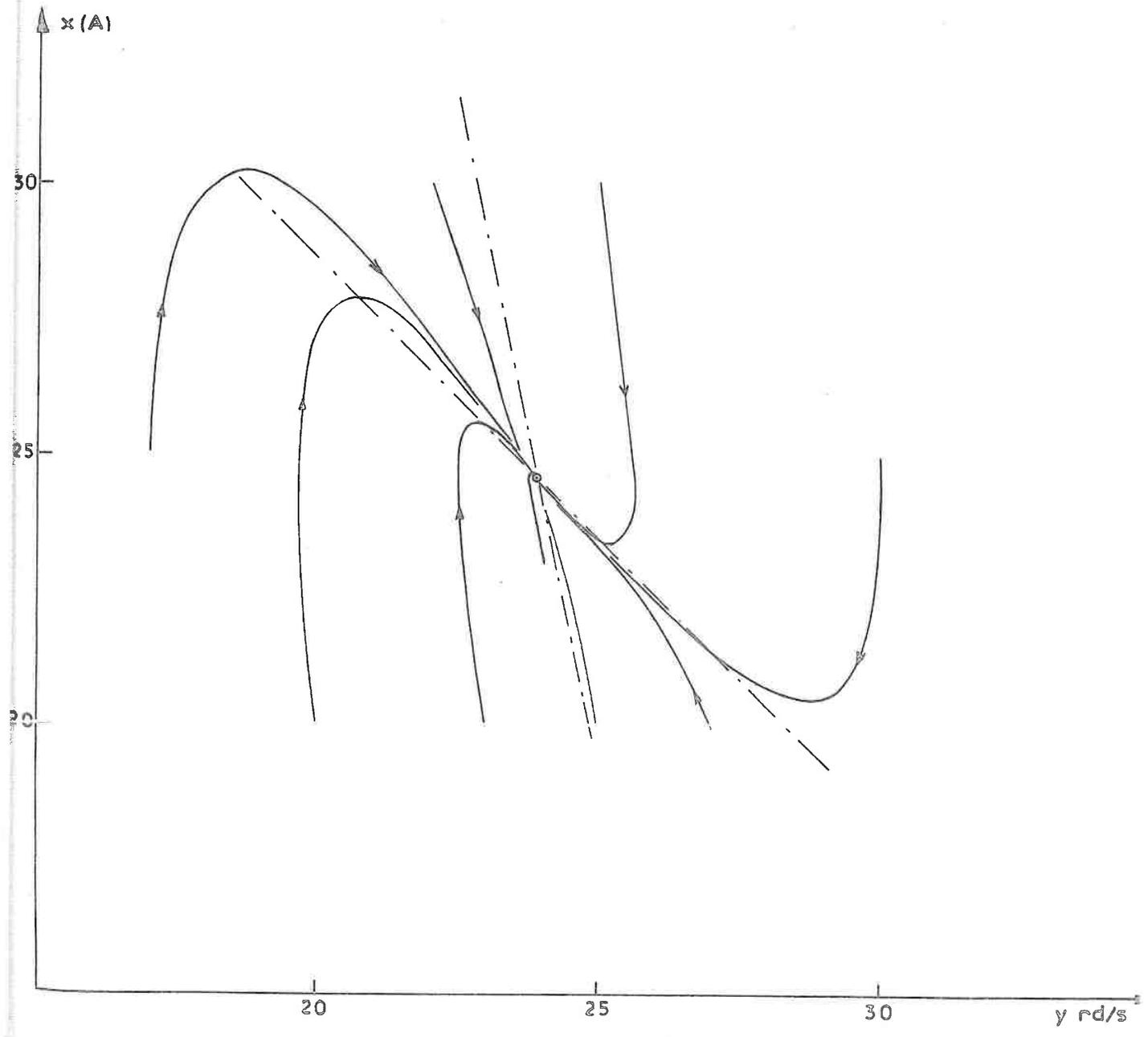


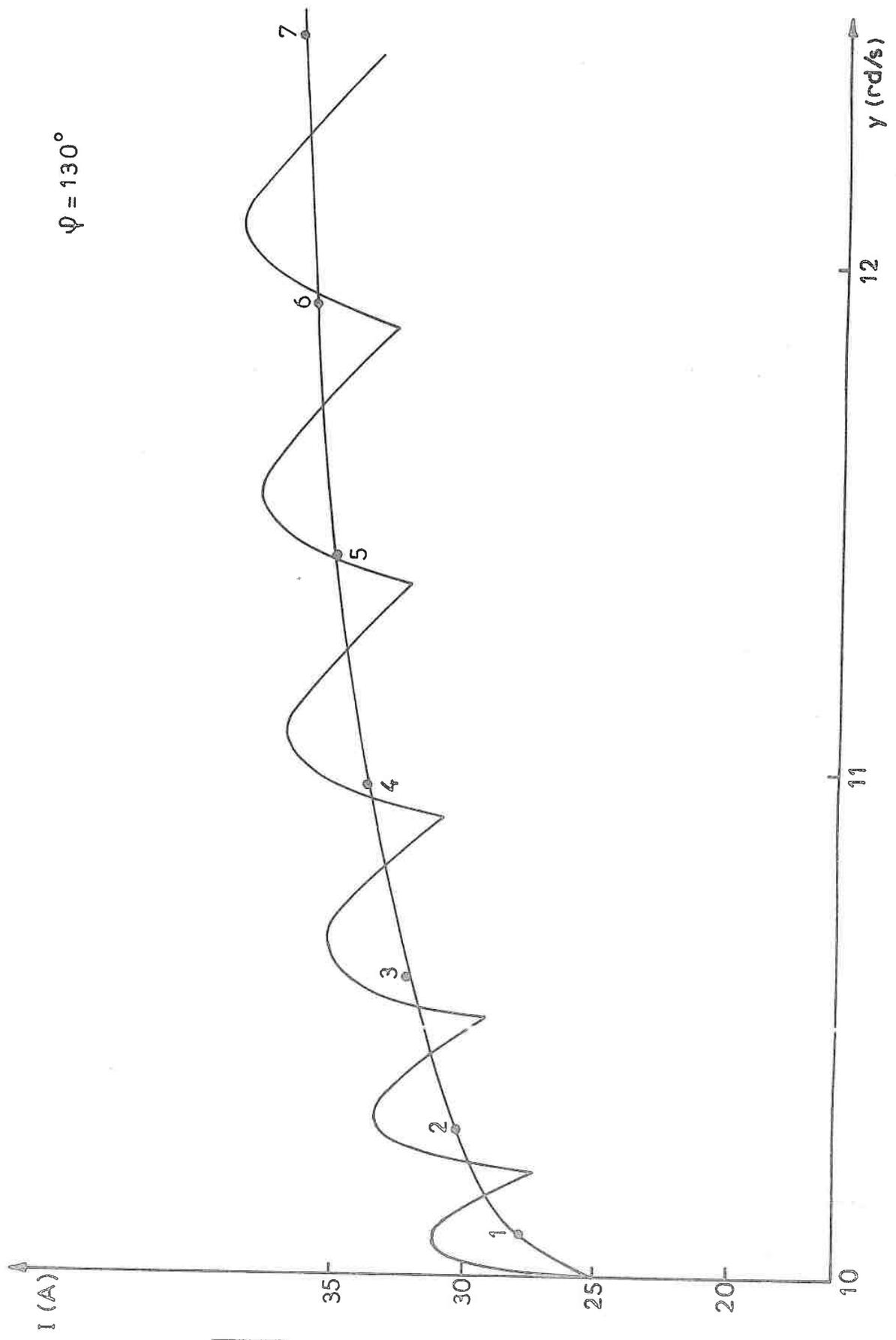
$$\begin{aligned}\psi &= 130 \\ V_m &= 53.2 \\ x_c &= 24.58 \\ y_c &= 23.90\end{aligned}$$





$\psi = 130$
 $V_m = 53.2$
 $x_c = 24.58$
 $y_c = 23.90$





CHAPITRE III

Commande Optimale

PLAN DU CHAPITRE III

III.1 - Introduction

III.1.1 - Définition du problème

III.1.2 - Notations

III.2 - Etude générale du problème

III.2.1 - Formulation

III.2.2 - Graphe représentatif des commandes

III.2.3 - Principe d'optimalité

III.3 - Méthodes d'optimisation et de stockage utilisées

III.3.1 - Traitement des contraintes

III.3.2 - Résolution du problème d'optimalité sur un arc

III.3.3 - Interpolation des revenus optimaux et des commandes
optimales $\bar{R}_i^{j,k}$, $\bar{\phi}_i^{j,k}$

III.3.4 - Interpolation des valeurs finales et des revenus élémentaires

III.3.5 - Interpolation dans l'espace des commandes

III.3.6 - Organigramme de la construction des commandes optimales

III.4 - Résultats

III.4.1 - Programme de simulation

III.4.2 - Résultats comparatifs

III.1 - INTRODUCTION

III.1.1 - DEFINITION DU PROBLEME

Nous cherchons à réaliser une commande par ordinateur de ce système en temps réel. Les conditions physiques imposent une commande "en boucle fermée". En effet, il faut pouvoir s'opposer aux perturbations qui peuvent être importantes, risquent d'entraîner le système loin de la trajectoire optimale, et surtout de l'amener dans un domaine où les contraintes ne sont pas respectées. L'utilisation de l'ordinateur, et le processus physique, imposent une commande échantillonnée. Les lectures de l'état du système et les commandes ne peuvent être effectuées de façon continue, puisqu'elles se font sur ordre de l'ordinateur et nécessitent un certain nombre de calculs. D'autre part, nous avons vu au paragraphe I.2.4 que le pont redresseur réalisait un échantillonnage naturel, puisqu'un changement de la tension de commande ne peut intervenir qu'au bout du temps nécessaire à l'extinction du thyristor passant ; ce changement n'a d'effet que sur l'allumage du thyristor suivant.

Nous nous placerons dans le cas d'un horizon borné $(0, H)$, et déciderons donc du nombre d'instantés de commande, soit N . Pour améliorer les caractéristiques de la commande, N étant fixé, nous avons choisi d'agir sur deux paramètres : la tension de la commande appliquée et le temps pendant lequel cette commande est appliquée ; c'est-à-dire le choix des instants d'échantillonnage. Nous nous proposons alors de minimiser sur $(0, H)$, l'intégrale du carré de l'écart entre la vitesse de rotation et une vitesse de référence choisie y_F ; définissons alors les notations utilisées.

III.1.2 - NOTATIONS UTILISEES

- N : nombre d'instants de commande
- t_i : instant d'application de la $i^{\text{ème}}$ commande $i = 1, \dots, N$ (Notation rétrograde)
- ϕ_i : angle d'amorçage appliqué entre les instants t_i et t_{i-1}
- x_i : valeur de l'intensité à l'instant t_i
- y_i : valeur de la vitesse à l'instant t_i
- Δt_i : temps d'application de la $i^{\text{ème}}$ commande $t_i = t_{i-1} - t_i$
- R_i : revenu entre l'instant t_i et l'horizon H
- \hat{A} : toute grandeur A optimale pour le critère choisi
- Δt_{\min} : temps d'application minimum possible pour une commande
- X_i : vecteur d'état (x_i, y_i) à l'instant t_i
- y_F : vitesse de référence choisie

Interpolation de degré n : Interpolation par des polynomes de Tchebychev de degré n sur la base d'interpolation de Tchebychev (racines du polynome T_{n+1})

III.2 - ETUDE GENERALE DU PROBLEME

III.2.1 - FORMULATION

Nous avons donc à résoudre le problème suivant :

à tout instant t_i , trouver la commande ϕ_i à appliquer au système et l'intervalle d'application $\Delta t_i = t_{i-1} - t_i$ de cette commande, tels que le revenu entre l'instant t_i et l'horizon H soit minimum, c'est-à-dire :

$$(14) \quad R_i(X_i, t_i, t_{i-1}, \dots, t_1, \phi_i, \phi_{i-1}, \dots, \phi_1) = \hat{R}_i(X_i, t_i)$$

avec la contrainte sur le temps $\sum_{i=1}^N \Delta t_i = H$ et les contraintes physiques sur les variables d'état.

Nous avons vu précédemment (§ III.1.1) qu'il existe un échantillonnage naturel de l'ensemble ordinateur-processus, ce qui nous conduit à définir l'intervalle de temps minimum Δt_{\min} possible entre deux commandes successives. Cet intervalle sera un multiple de la période T (période de la tension V fournie par le système redresseur $T = \frac{2\pi}{3\omega}$) et un diviseur de l'horizon H : $H = p \Delta t_{\min}$.

Les intervalles de temps Δt_i seront alors de la forme $\Delta t_i = k_i \Delta t_{\min}$ où les k_i peuvent prendre toutes les valeurs entières de un à p en respectant

$$\sum_{i=1}^N k_i = p$$

La généralité du problème n'est en rien réduite si nous limitons les valeurs possibles des k_i à un nombre plus petit M, puisqu'il suffira de faire $M = p$, pour résoudre le problème initial. Nous allons donc résoudre l'équation (14) avec la condition supplémentaire

$$\Delta t_i = k_i \Delta t_{\min}, \quad k_i = 1, 2, \dots, M \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N k_i = p$$

III.2.2 - GRAPHE REPRESENTATIF DES COMMANDES

Pour déterminer les instants de commande possibles t_i , nous sommes ramenés à construire un graphe ayant les caractéristiques suivantes :

- il existe un point origine (commande N à l'instant $t = 0$)
- il existe un point extrémité unique (horizon H)
- la longueur d'un arc sera la valeur k_i
- la longueur de tous les chemins allant de l'origine à l'extrémité est p
- un chemin allant de l'origine à l'extrémité contient N arcs
- un arc est origine d'au plus M arcs

Chaque point du graphe sera représenté par deux indices (i,j)
i numero de la commande
j nombre de Δt_{\min} restant à parcourir jusqu'à l'extrémité

Nous avons traité en exemple le cas $p = 10$, $N = 5$, $M = 3$
auquel correspond le graphe de la figure III.1. Ce graphe est établi sans
ambiguïté avec les hypothèses de construction données.

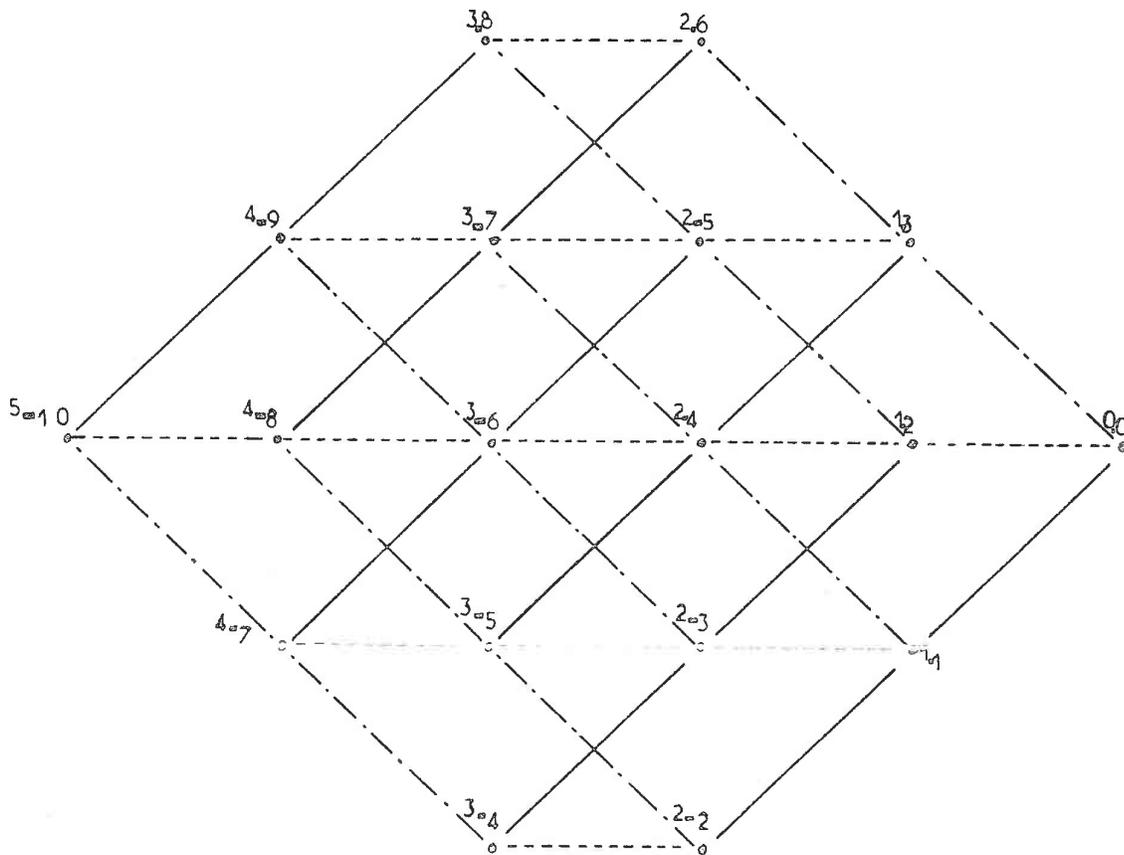


FIGURE III.1

III.2.3 - PRINCIPE D'OPTIMALITE

La discrétisation naturelle du système et la nécessité de connaître une commande en boucle fermée, nous conduisent à résoudre l'équation (14) en utilisant le principe d'optimalité de Bellman, appliqué au graphe précédent.

Introduisons les notations suivantes :

- $r_i^{j,k}(X_i, \phi_i)$: revenu élémentaire pour aller du point (i, j) au point $(i-1, k)$ avec les conditions initiales X_i
- $\hat{R}_i^{j,k}(X_i)$: revenu optimal pour aller du point (i, j) à l'extrémité $(0,0)$ en passant par le point $(i-1, k)$ avec les conditions initiales X_i
- $\hat{R}_i^j(X_i)$: revenu optimal pour aller du point (i, j) à l'extrémité avec les conditions initiales X_i
- $\hat{\phi}_i^{j,k}(X_i)$: commande optimale à appliquer pour aller du point (i, j) au point $(i-1, k)$ avec les conditions initiales X_i

$$(15) \quad \hat{R}_i^j(X_i) = \min_{k \text{ possible}} \hat{R}_i^{j,k}(X_i)$$

Le principe d'optimalité s'écrit alors sur un arc :

$$(16) \quad \hat{R}_i^{j,k}(X_i) = \text{opt}_{\phi_i} \left[r_i^{j,k}(X_i, \phi_i) + \hat{R}_{i-1}^k(X_{i-1}) \right]$$

$$\text{avec} \quad X_{i-1} = X(X_i, t_i, \phi_i, t_{i-1})$$

$$\text{et} \quad t_{i-1} = t_i + k_i \Delta t_{\min}$$

Cette équation (16) doit être résolue pour tous les chemins du graphe et toutes les conditions initiales possibles. La commande au point (i, j) en cours est déterminée par la valeur de k , qui satisfait l'équation (15) et la valeur $\hat{\phi}_i^{j,k}$ correspondante. Nous allons donc donner les méthodes d'optimisation et de stockage de ces renseignements, compte tenu des contraintes physiques imposées.

111.3 - METHODES D'OPTIMISATION ET DE STOCKAGE UTILISEES

111.3.1 - TRAITEMENT DES CONTRAINTES

Nous sommes amenés à résoudre l'équation (16) en tenant compte des contraintes physiques suivantes :

- a) $0 \leq \phi \leq \pi$
- b) $x(t) \leq 45 \text{ A}$ quel que soit t réel positif
- c) $y(t) \leq 200 \text{ rd/s}$ " " "
- d) $y(t) \geq 10 \text{ rd/s}$ " " "

Détaillons chacune de ces inégalités et donnons le traitement correspondant.

- a) $0 < \phi < \pi$

Cette contrainte est liée au fonctionnement du pont redresseur (§ I.2.1) et se traduira par le fait que nous chercherons l'optimum de (16) pour ϕ_1 appartenant à l'intervalle $(0, \pi)$

- b) $x(t) < 45 \text{ A}$

Cette contrainte sur l'intensité est imposée par le moteur lui-même et les redresseurs, qui ne peuvent supporter un courant trop élevé ; en réalité, c'est une contrainte thermique, beaucoup plus difficile à exprimer ; nous imposerons à la valeur inférieure du courant sur une période de ne pas dépasser 45 ampères.

Nous avons vu dans le paragraphe II.4.2 que pour des tensions d'alimentation constantes, si une commande ϕ_0 est telle que $x(x_0, y_0, t_0, \phi_0, t) \leq L$ quel que soit t , alors toute commande $\phi_1 > \phi_0$ est telle que $x(x_0, y_0, t_0, \phi_1, t) \leq L$ quel que soit t . Ce résultat est utilisé pour ramener le problème d'optimisation avec contraintes, à une recherche de l'intervalle admissible pour ϕ , les conditions initiales étant données. Nous noterons $\phi_{\min}(X_0)$ la plus petite valeur de ϕ qui respecte la contrainte avec la condition initiale X_0 .

Pour rechercher cette caractéristique $\phi_{\min}(X)$, nous avons d'abord étudié, à partir de quelle vitesse initiale, toute commande dans $(0, \pi)$ est admissible pour $x_0 = 25$ A soit $y \approx 150$ rd/s. Nous avons ensuite interpolé cette courbe, pour y sur $(10, 150)$ par des polynomes de degré 7, pour x sur $(0, 45)$ par des polynomes de degré 4. Les interpolations avec des polynomes de Tchebychev de degrés inférieurs ne respectent pas les contraintes en tout point. Nous donnons dans le tableau III.1 les comparaisons entre les valeurs réelles, l'interpolation de degré (7) en y et l'interpolation de degré (5) en y pour x_0 fixé égal à 25 A.

L'utilisation de la majoration (13) nous a permis, lors du calcul de $\phi_{\min}(X_0)$ (X_0 point d'interpolation de Tchebychev) de restreindre l'intervalle d'étude de ϕ , sur lequel on procède ensuite par dichotomie. Le calcul de $\phi_{\min}(x_0, y_0)$, par interpolation est effectué par le sous-programme PHIMI (XO, YO).

VITESSE rd/s	ϕ_{\min} T_5 (rd)	ϕ_{\min} T_7 (rd)	ϕ_{\min} réel (rd)	ϕ_{\min} - ϕ_{\min} réel T_7
10.0	0.21180E 01	0.21160E 01	0.21154E 01	0.2E -02
20.0	0.19774E 01	0.19793E 01	0.19799E 01	0.6E -03
30.0	0.18514E 01	0.18522E 01	0.18517E 01	0.5E -03
40.0	0.17313E 01	0.17288E 01	0.17289E 01	0.1E -03
50.0	0.16129E 01	0.16091E 01	0.16101E 01	0.1E -02
60.0	0.14948E 01	0.14933E 01	0.14932E 01	0.1E -03
70.0	0.13777E 01	0.13801E 01	0.13795E 01	0.6E -03
80.0	0.12625E 01	0.12671E 01	0.12656E 01	0.2E -02
90.0	0.11496E 01	0.11521E 01	0.11523E 01	0.1E -03
100.0	0.10371E 01	0.10339E 01	0.10371E 01	0.3E -02
110.0	0.92010E 00	0.91235E 00	0.91600E 00	0.4E -02
120.0	0.78874E 00	0.78394E 00	0.78324E 00	0.6E -03
130.0	0.62758E 00	0.63504E 00	0.62891E 00	0.7E -02
140.0	0.41394E 00	0.42841E 00	0.43366E 00	0.5E -02
150.0	0.11679E 00	0.83589E-01	0.27391E-01	0.6E -01

Tableau III.1

c) $y < 200$ rd/s

Contrainte mécanique introduite pour éviter l'emballement du moteur, cette contrainte n'interviendra pas explicitement dans nos calculs, car les commandes conduisant à des valeurs de y dépassant 200 rd/s ne sont jamais optimales pour le critère choisi. Nous vérifierons seulement lors de la recherche des commandes que cette contrainte est bien satisfaite.

d) $y > 10$ rd/s

Cette contrainte a été introduite au paragraphe I.3, pour éliminer de notre étude la phase de fonctionnement à vitesse nulle. Cette inégalité artificiellement introduite par le calcul, ne nécessite pas une vérification très précise. Nous avons procédé comme pour la contrainte (b), et avons interpolé la caractéristique ϕ_{\max} uniquement sur y avec x_0 fixé à 25 A. L'interpolation de degré 5 est réalisée par le sous-programme PHMAX (YO).

Nous voyons comment les résultats du paragraphe II.4 obtenus par l'étude des trajectoires dans le plan de phase ont permis de ramener le problème des contraintes, à un problème de détermination de l'intervalle $(\phi_{\min}(X_0), \phi_{\max}(X_0))$, tel que toute commande appartenant à cet intervalle respecte les contraintes pour la condition initiale X_0 .

La figure (III.2) montre l'espace des commandes admissibles en fonction de y_0 , pour x_0 fixé à 25 ampères.

III.3.2 - RESOLUTION DU PROBLEME D'OPTIMALITE SUR UN ARC

Nous avons maintenant à résoudre l'équation (16) que nous rappelons

$$(16) \quad \hat{D}_i^{j,k}(x_i) = \underset{\phi_i(\phi_{\min}(X_i), \phi_{\max}(X_i))}{\text{opt}} \left\{ \hat{r}_i^{j,k}(x_i, \psi_i) + \hat{R}_{i-1}^k(x_{i-1}) \right\}$$

pour tous les indices i, j, k et toutes les conditions initiales X_i possibles. C'est une optimisation à une variable que nous résoudrons par la méthode de Fibonacci. Rappelons que la suite de Fibonacci, F_k , est définie par la relation de récurrence

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \quad \text{avec} \quad F_0 = 1 \quad F_1 = 1$$

Le minimum d'une fonction définie sur un intervalle (a,b) est localisé avec une précision $P \leq \frac{(b-a)}{F_{k-1}}$ par l'algorithme de Fibonacci utilisé jusque l'ordre k.

Nous nous imposons de connaître la valeur $\hat{\phi}_i^{j,k}$ dans un intervalle de longueur $\epsilon \leq 2 \cdot 10^{-3}$ pour avoir une précision semblable à celle des contraintes. L'intervalle d'étude $(\phi_{\min}(X_0), \phi_{\max}(X_0))$ peut être égal à $(0, \pi)$, et l'intervalle de Fibonacci doit donc être utilisé jusqu'à l'ordre 18

$$\left(F_{18} = 2.584, F_{17} = 1.597 \geq \frac{\pi}{\epsilon} \right)$$

Nous aurons donc 17 ou 18 "mesures" à effectuer pour chaque optimisation : une "mesure" étant le calcul du revenu élémentaire

$$r_i^{j,k}(X_i, \phi_i) = \int_{t_i}^{t_i + (j-k)\Delta t_{\min}} \left(y(x_i, y_i, t_i, \phi_i, t) - y_F \right)^2 dt$$

qui suppose la résolution de l'équation différentielle : ce calcul est long (4 minutes sur I.B.M. 1800) et doit être répété pour tous les indices i,j,k et tous les X_i . Nous allons le réduire en interpolant à X_i fixé, l'expression

$$r_i^{j,k}(X_i, \phi_i) + \hat{R}_{i-1}^k(X_{i-1})$$

par rapport à ϕ_i , puis en faisant le calcul d'optimisation sur le polynome d'interpolation. Nous avons choisi, après essais, une interpolation de degré 8. Une vérification sur l'arc (1,2) \curvearrowright (0,0) donne les résultats suivants :

$$\begin{cases} x_0 = 5 \text{ A} & \hat{\phi}_1^{2,0} \text{ calculé directement} = 1.1577 \\ y_0 = 90 \text{ rd/s} & \hat{\phi}_1^{2,0} \text{ calculé par le polynome d'interpolation} = 1.1577 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 22,5 \text{ A} & \hat{\phi}_1^{2,0} \text{ calculé directement} = 0,778 \\ y_0 = 130,781 \text{ rd/s} & \hat{\phi}_1^{2,0} \text{ calculé par le polynome d'interpolation} = 0,786 \end{cases}$$

Le premier résultat est très bon car cette valeur correspond à la contrainte, par contre le deuxième résultat moins précis (erreur $\approx 8 \cdot 10^{-3}$) est compensé par le fait que le revenu est peu sensible aux variations de ϕ autour de $\hat{\phi}$.

$$\begin{aligned} \text{On trouve pour } \phi_1^{2,0} = 0,778 & \quad R_1^{2,0} = 29,603 \\ \text{pour } \phi_1^{2,0} = 0,786 & \quad R_1^{2,0} = 29,648 \end{aligned}$$

et le point choisi est particulièrement défavorable puisque pour ϕ admissible, le revenu varie de 34 à 700.

Cette méthode de calcul nous permettra de réduire le temps de calcul sensiblement de moitié, pour une optimisation, puisque nous ne ferons que 9 "mesures" : calculs du revenu au 9 points d'interpolation. L'optimisation sur le polynome étant, elle, très rapide.

III.3.3 - INTERPOLATION DES REVENUS OPTIMAUX $\hat{R}_i^{j,k}(X_i)$ ET DES COMMANDES OPTIMALES $\hat{\phi}_i^{j,k}(X_i)$

La résolution de l'équation (16) i, j, k, X_i étant fixés, nécessite la connaissance de

$$\hat{R}_{i-1}^k(X_i) = \min_{l=1,2,3} \hat{R}_{i-1}^{k,l}(X_{i-1})$$

Il faut donc connaître les revenus optimaux de l'étape précédente pour la valeur X_{i-1} , comme il est impossible de calculer ces revenus pour toutes les valeurs de X_{i-1} , puisque les variables d'état sont continues, il est nécessaire d'introduire un quadrillage, puis de faire une interpolation sur deux ou plusieurs points, pour trouver la quantité $\hat{R}_{i-1}^{j,k}(X_{i-1})$. Nous avons choisi d'interpoler ces revenus globalement sur l'espace des phases par une interpolation de Tchebychev à deux variables, de degré 4 en x et 3 en y .

D'autre part, au moment de la commande en temps réel, il est nécessaire de connaître la valeur $\hat{\phi}_i^{j,k}(X_i)$ pour des valeurs de X_i qui n'appartiennent pas au quadrillage choisi. Nous avons donc aussi interpolé les $\hat{\phi}_i^{j,k}(X_i)$ dans l'espace des phases, par des polynomes de même degré que ceux des revenus. Nous avons vérifié la validité de cette interpolation sur l'arc

(1,2) \rightarrow (0,0) avec x_0 fixe à 25 ampères, les résultats sont donnés dans le tableau III.2 suivant

intensité x_i	vitesse y_i	$\hat{\phi}_1^{2,0}(x_i, y_i)$ interpolé	$\hat{R}_1^{2,0}(x_i, y_i)$ réel	$\hat{R}_1^{2,0}(x_i, y_i)$ interpolé
25.00	10.00	2.12385	0.59485E 04	0.59214E 04
25.00	20.00	1.98003	0.48844E 04	0.48957E 04
25.00	30.00	1.85891	0.40078E 04	0.39812E 04
25.00	40.00	1.73343	0.31865E 04	0.31791E 04
25.00	50.00	1.60850	0.24598E 04	0.24800E 04
25.00	60.00	1.49165	0.18562E 04	0.18752E 04
25.00	70.00	1.38264	0.13627E 04	0.13609E 04
25.00	80.00	1.27446	0.95379E 03	0.93690E 03
25.00	90.00	1.15969	0.61670E 03	0.60308E 03
25.00	100.00	1.03759	0.35657E 03	0.35653E 03
25.00	110.00	0.91884	0.18058E 03	0.18895E 03
25.00	120.00	0.82595	0.80187E 02	0.86543E 02
25.00	130.00	0.78919	0.24559E 02	0.31864E 02
25.00	140.00	0.83915	0.20785E 01	0.76615E 01
25.00	150.00	0.99836	0.19682E-01	0.14199E 01
25.00	160.00	1.27598	0.99544E 01	0.92174E 01
25.00	170.00	1.67110	0.39994E 02	0.36672E 02
25.00	180.00	2.19122	0.91805E 02	0.94237E 02
25.00	190.00	2.89450	0.18762E 03	0.18349E 03

Tableau III.2

Nous constatons une erreur relative plus importante au voisinage de 120 et de 150 rd/s. Cette anomalie autour de 150 rd/s s'explique, car les revenus variant de 0 à 6.000, la précision sur les valeurs faibles est médiocre ; ceci correspond en réalité à deux modes de fonctionnement du moteur : démarrage (loin du point y_F : les revenus sont importants) et régulation autour de la valeur de consigne (revenus faibles). Nous avons, alors, découpé l'intervalle de variation de la vitesse (10, 190) en deux intervalles et nous obtenons les résultats du tableau III.3 dans l'intervalle (80-190) pour une intensité initiale de 25 ampères.

intensité x_i	vitesse y_i	$\hat{\phi}_1^{2,0}$ interpolé	$\hat{R}_1^{2,0}$ interpolé	$\hat{R}_1^{2,0}$ réel
25.00	190.00	2.99974	0.18640E 03	0.18762E 03
25.00	180.00	2.04611	0.90890E 02	0.91805E 02
25.00	170.00	1.55043	0.41631E 02	0.39994E 02
25.00	160.00	1.25731	0.15516E 02	0.99544E 01
25.00	150.00	1.04036	0.23329E 01	0.19682E-01
25.00	140.00	0.86519	0.22237E 01	0.20785E 01
25.00	130.00	0.75237	0.23153E 02	0.24559E 02
25.00	120.00	0.74051	0.78372E 02	0.80187E 02
25.00	110.00	0.84917	0.18388E 03	0.18058E 03
25.00	100.00	1.04191	0.35590E 03	0.35657E 03
25.00	90.00	1.18927	0.60833E 03	0.61670E 03
25.00	80.00	1.03178	0.95021E 03	0.95379E 03

Tableau III.3

La répétition des imprécisions, aux mêmes endroits que précédemment, nous a conduits à étudier rigoureusement les commandes autour du point $y_0 = 120$ rd/s, on constate alors l'existence d'un point anguleux pour $y_0 \approx 125$ rd/s. La figure IIL3 montre les trois courbes obtenues : la courbe réelle et les courbes tracées à partir des interpolations.

On peut alors envisager deux solutions pour améliorer la précision sur $\hat{\phi}$ et \hat{R} :

- utiliser des polynômes d'interpolation de degré élevé
- chercher le point anguleux de la courbe $y_0 \longmapsto \hat{\phi}(y_0)$ qui correspond au passage sur la contrainte en résolvant l'équation (17).

$$(17) \quad \phi_{\min}(x_0, y_0) = \hat{\phi}(x_0, y_0)$$

et interpoler séparément sur les deux axes de courbes.

Cette dernière solution est malheureusement très lourde, puisqu'il faut résoudre l'équation (17) pour tout x_0 et tout point du graphe. Nous avons donc conservé la première solution, qui respecte les contraintes, malgré une imprécision autour du point anguleux.

III.3.4 - INTERPOLATION DES VALEURS FINALES ET DES REVENUS ELEMENTAIRES

Nous avons vu dans le paragraphe III.3.2 que nous résolvions l'équation (16), pour X_i fixé, en interpolant l'expression

$$\left(r_i^{j,k}(X_i, \phi_i) + \hat{R}_{i-1}^k(X_{i-1}) \right) \text{ sur } \phi_i$$

Une simplification apparaît lorsque le critère $r_i^{j,k}$ ne dépend pas explicitement du temps, mais uniquement de la trajectoire, ce qui est le cas dans l'exemple traité actuellement où la référence est fixe. Les revenus $r_i^{j,k}(X_i, \phi_i)$ indépendants de i et j peuvent s'écrire $r^{k_i}(X_i, \phi_i)$. Les valeurs finales X_{i-1} ne dépendent pas de l'origine des temps choisis et s'écriront :

$$X_{i-1}(X_i, \phi_i, t_i, t_i + k_i \Delta t_{\min}) = X_{i-1}(X_i, \phi_i, k_i)$$

Il suffit donc de calculer, pour les X_i et les ϕ_i appartenant aux points d'interpolation et les valeurs de k_i possibles (1,2,3), le revenu $r^{k_i}(X_i, \phi_i)$ et les valeurs finales $X_{i-1}(X_i, \phi_i, k_i)$.

L'équation (16) sera résolue, pour X_i appartenant aux points d'interpolation, en utilisant les interpolations de r^k et X_{i-1} sur ϕ_i .

Vérifions, sur un exemple, que le polynome de degré 8 en y choisi, donne une précision suffisante :

$$\text{avec } x_i = 22,500 \text{ ampères ; } y_i = 130,781 \text{ rd/s}$$

les résultats obtenus pour $x_{i-1}, y_{i-1}, r^{k_i}$ ($k_i=2$) par interpolations sur ϕ_i , sont résumés dans le tableau III.4 et comparés aux résultats donnés par le calcul direct.

Nous donnons ces valeurs pour 10 valeurs de ϕ_i équiréparties sur l'intervalle $(\phi_{\min}(X_i), \pi)$.

VITESSE	INTENSITE	REVENU	PHI	
164.163	29.5056	38.49	0.6211	
151.737	26.3105	34.09	0.8732	
137.009	21.8780	28.27	1.1252	
122.114	17.0410	231.07	1.3772	Interpolation
108.906	12.4308	392.68	1.6293	
98.717	8.4540	542.00	1.8813	
91.859	5.2967	654.09	2.1334	
87.912	2.9617	722.92	2.3854	
86.103	1.3409	755.69	2.6375	
85.614	0.3302	765.17	2.8895	
85.555	-0.0116	766.48	3.1415	

VITESSE	INTENSITE	REVENU	PHI	
164.232	29.5731	39.79	0.6211	
151.813	26.3692	34.36	0.8732	
137.154	21.9099	27.96	1.1252	
122.095	17.1179	231.01	1.3772	
108.934	12.4599	392.31	1.6293	Calcul direct
98.787	8.4483	541.07	1.8813	
91.869	5.3166	653.92	2.1334	
87.884	2.9928	723.29	2.3854	
86.117	1.3542	755.48	2.6375	
85.624	0.3451	765.03	2.8895	
85.575	0.0000	766.20	3.1415	

Tableau III.4

III.3.5 - INTERPOLATION DANS L'ESPACE DES COMMANDES

Par définition
$$\hat{R}_i^j(X_i) = \min_{k \text{ possibles}} \hat{R}_i^{j,k}(X_i)$$

Si pour les arcs $(i,j) \xrightarrow{(i-1,k)}$ du graphe (k prenant toutes les valeurs possibles) les revenus $\hat{R}_i^{j,k}$ sont des fonctions continues de X_i , alors l'enveloppe inférieure \hat{R}_i^j de ces fonctions en nombre fini est aussi continue ; ceci est vrai dans cet exemple, où le critère est continûment dérivable par rapport à chacune des variables, les solutions de l'équation différentielle étant elles-mêmes continues par rapport aux conditions initiales (§ II.1.2).

L'expression $r_i^{j,k}(X_i, \phi_i) + \hat{R}_i^j(X_{i-1})$ est donc continue par rapport à ϕ_i et X_i .

Nous avons constaté que pour un arc, la commande $\hat{\phi}_i^{j,k}$ est continue par rapport à X_i , bien que la commande $\hat{\phi}_i^j$ ne le soit pas, comme on peut le voir sur la figure (III.4) relative au point (2,4) du graphe.

De même l'indice k discret ne peut être interpolé et il faudra au moment de la commande, calculer les valeurs de $\hat{R}_i^{j,k}(X_i)$ pour les k possibles, choisir la plus petite de ces valeurs, ce qui donnera le k optimal, et en déduire la commande $\hat{\phi}_i^{i,k}$ correspondante à appliquer.

III.3.6 - ORGANIGRAMME DE LA CONSTRUCTION DES COMMANDES OPTIMALES

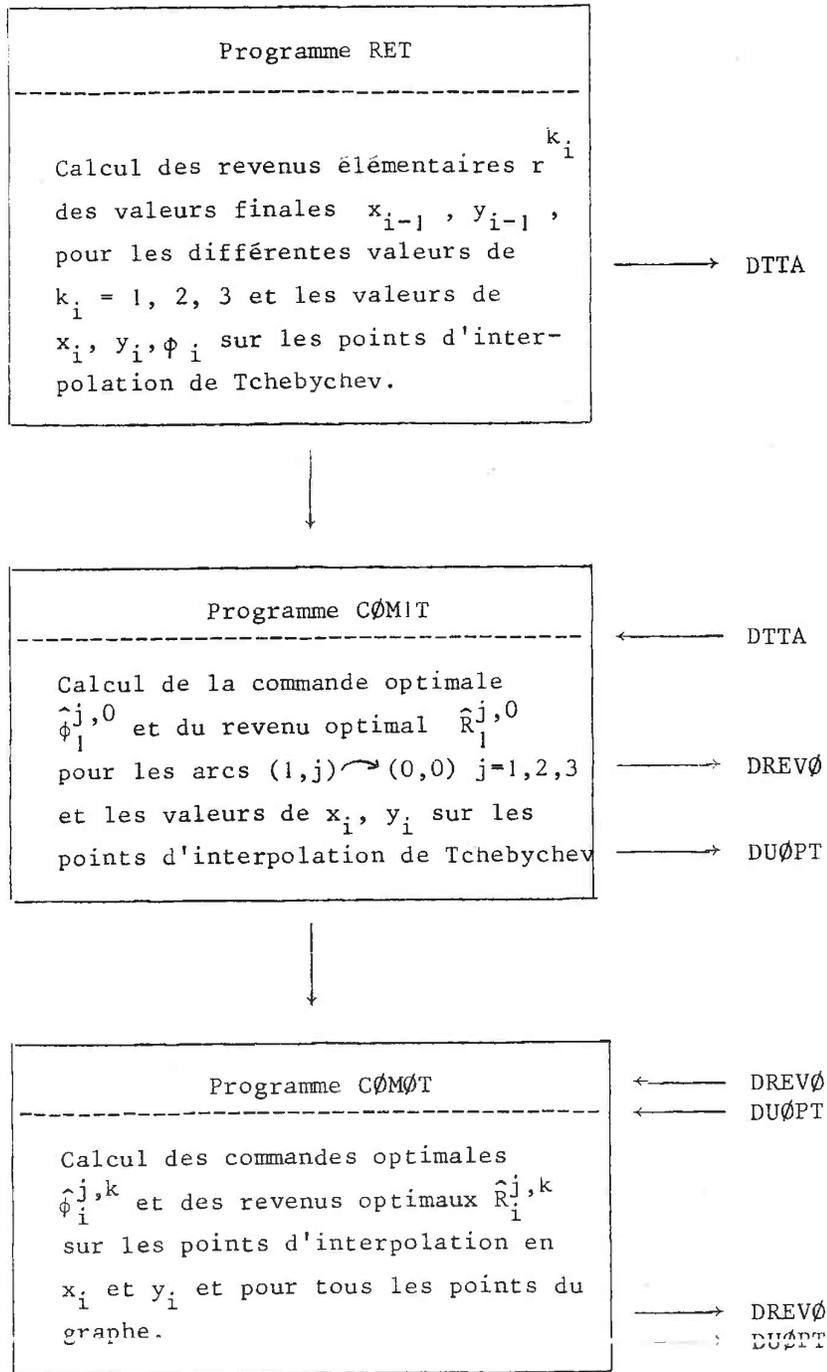
Nous avons enregistré les résultats, sur disques magnétiques pour une plus grande commodité de calculs, sous les noms suivants :

DTTA fichier des revenus élémentaires, $r_i^{k_i}$, et des valeurs finales x_{i-1} , y_{i-1} pour tous les points x_i , y_i , ϕ_i appartenant aux points d'interpolation de Tchebychev, et pour les valeurs de k_i égales à 1, 2 et 3.

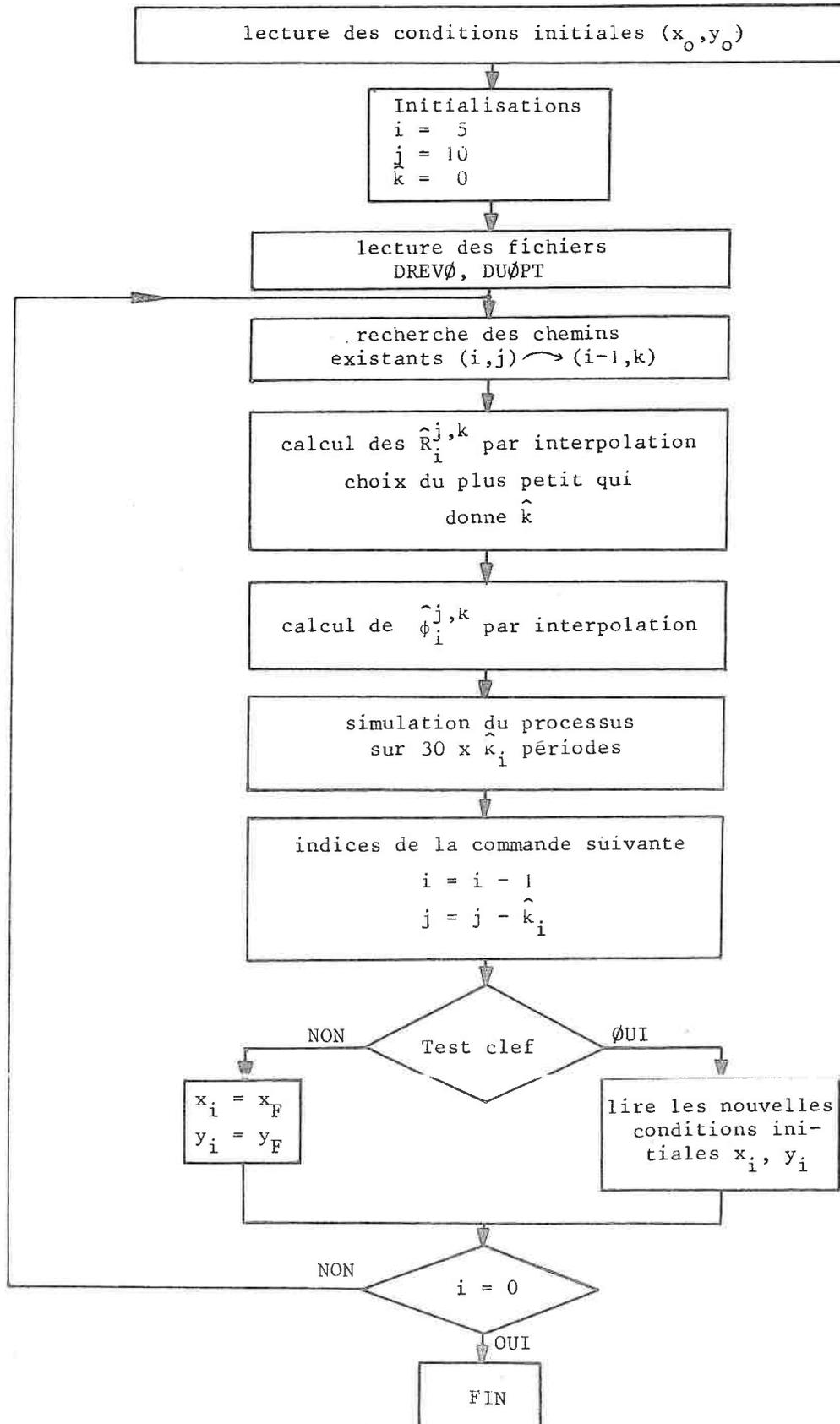
DREVO fichier des revenus optimaux $\hat{R}_i^{j,k}(X_i)$

DUOPT fichier des commandes optimales $\hat{\phi}_i^{j,k}(X_i)$

L'organigramme est alors le suivant :



III.4.1 - PROGRAMME DE SIMULATION - ORGANIGRAMME



Nous avons simulé numériquement, la commande en boucle fermée du système, par le programme SIMOT sur $(0, H) = 2$ secondes soit 300 périodes. Un test sur une clef de pupitre permet de simuler les perturbations, c'est-à-dire de réintroduire, à l'instant d'échantillonnage, des conditions initiales différentes de l'état du système à cet instant.

III.4.2 - RÉSULTATS COMPARATIFS

Nous avons effectuée plusieurs simulations d'une commande en temps réel, avec des conditions initiales différentes, pour étudier le comportement de cette méthode de pilotage, lors du démarrage, et en période de régulation (figures III.5 et III.6).

Nous avons comparé les résultats obtenus à ceux que donnent les commande à échantillonnage fixe, pour cinq et dix instants d'échantillonnage.

Les résultats sont alors les suivants :

Conditions initiales		Revenus		
Intensité	Vitesse	cinq commandes échantillonnage fixe	cinq commandes échantillonnage optimisé	dix commandes échantillonnage fixe
10	10	11.731	8.493	7.773
30	80	1.083	902	880
25	135	19,5	17,3	

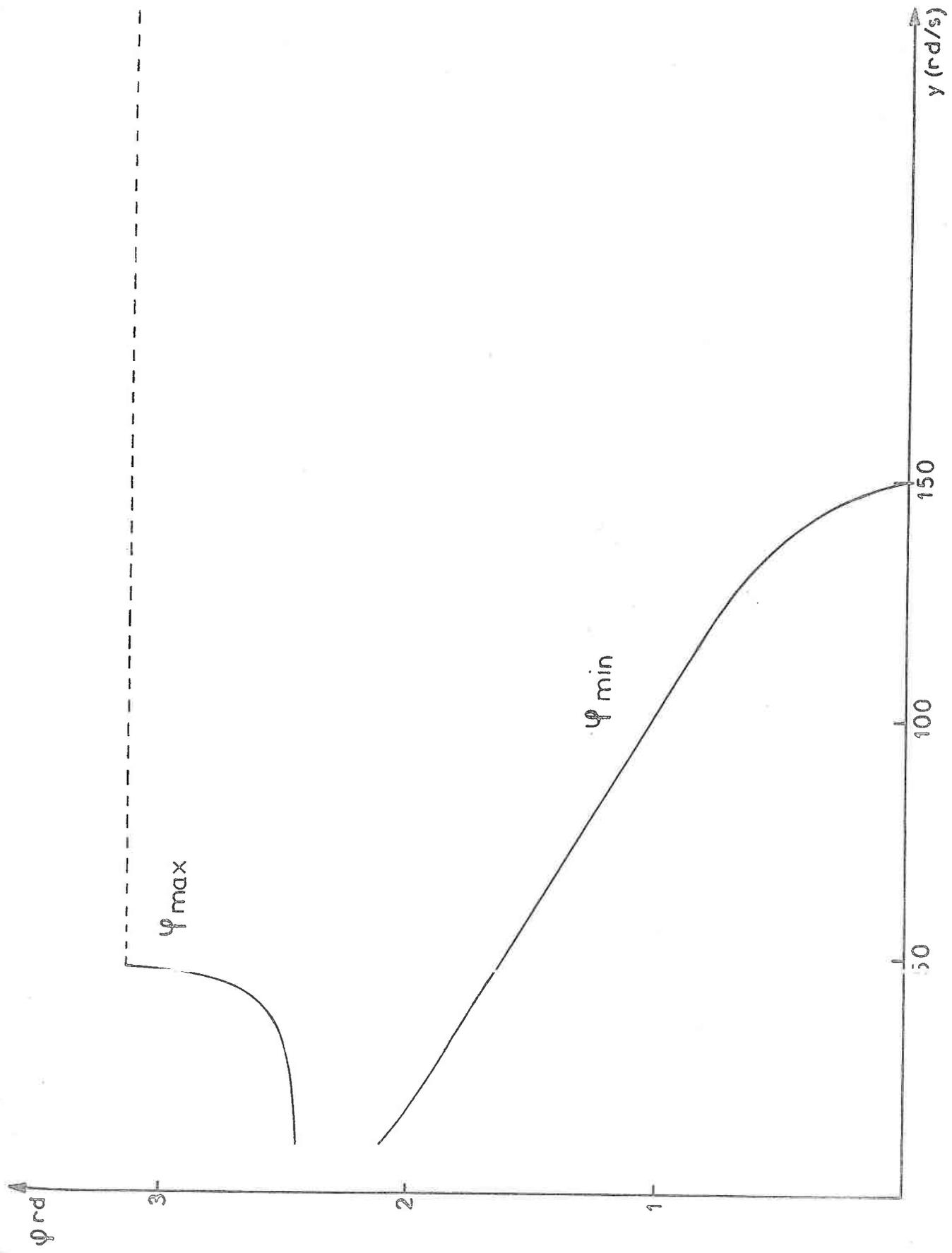
Nous constatons que les résultats concordent avec les prévisions :

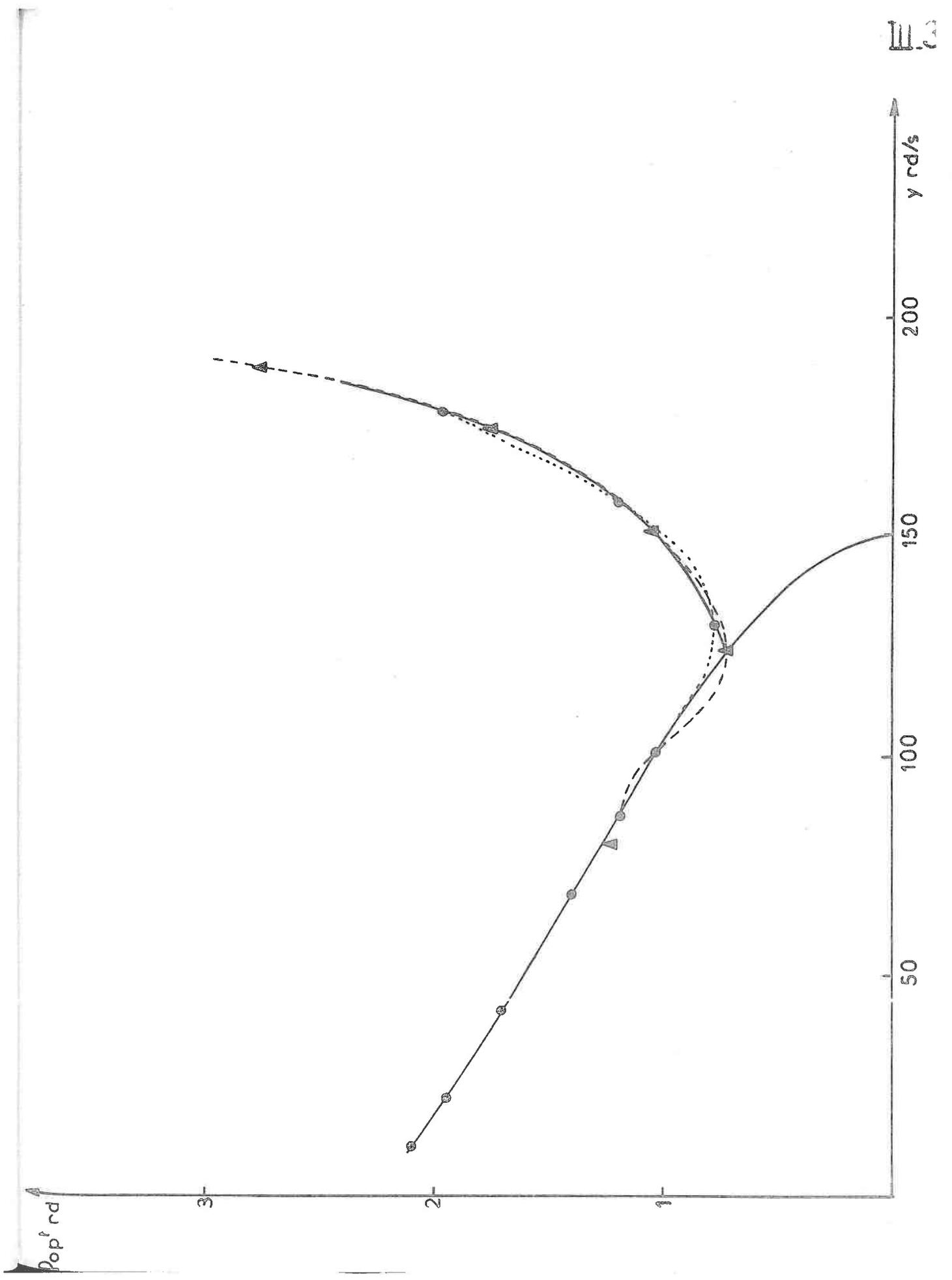
La commande en cinq coups avec optimisation sur le temps est meilleure que celle avec cinq instants d'échantillonnage fixes, et inférieure à celle réalisée en dix instants fixes.

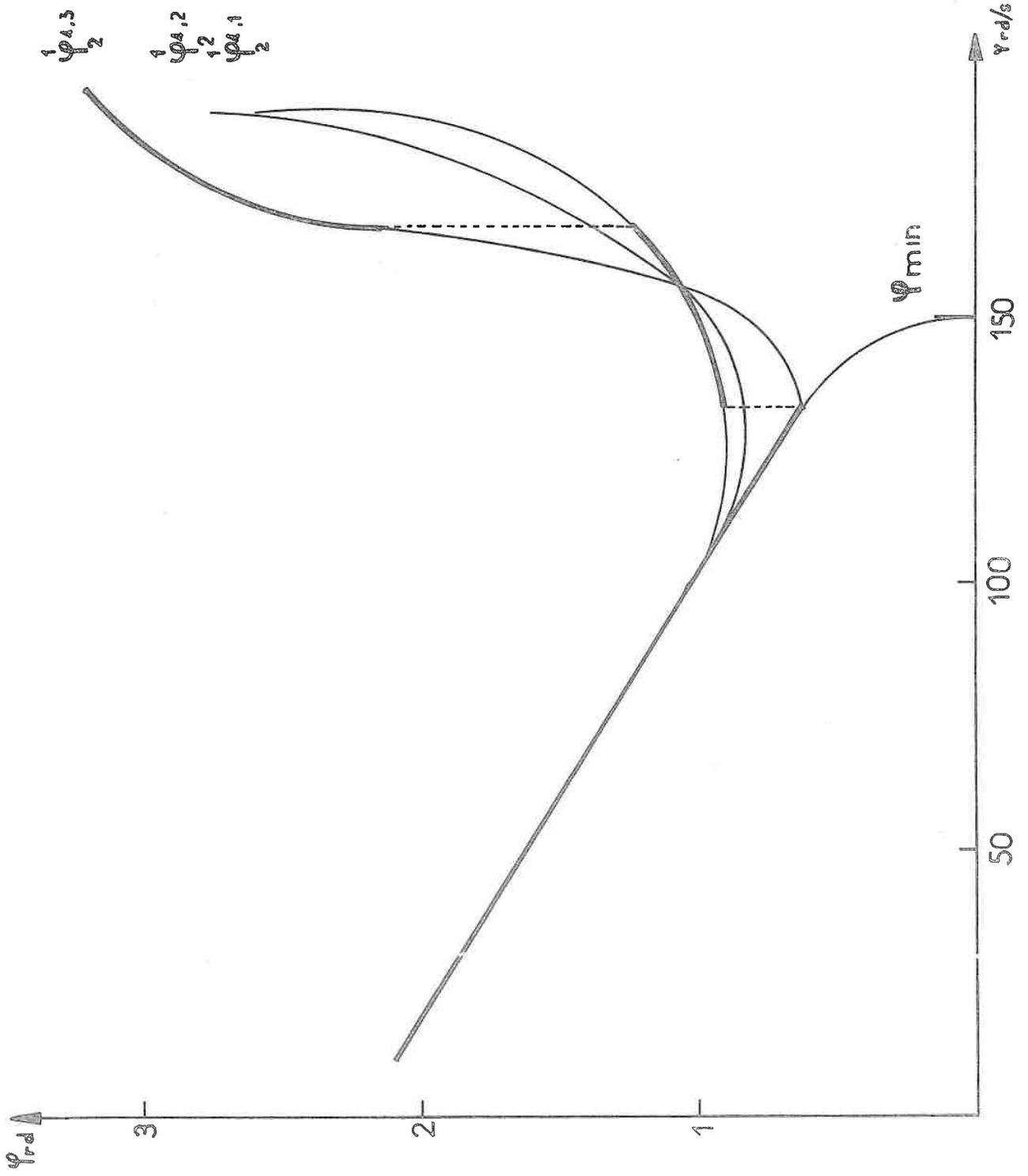
L'amélioration par rapport à l'échantillonnage équiréparti est surtout sensible dans la période de démarrage, puisque, dans ce régime, on peut plus facilement forcer le système à se maintenir sur les contraintes.

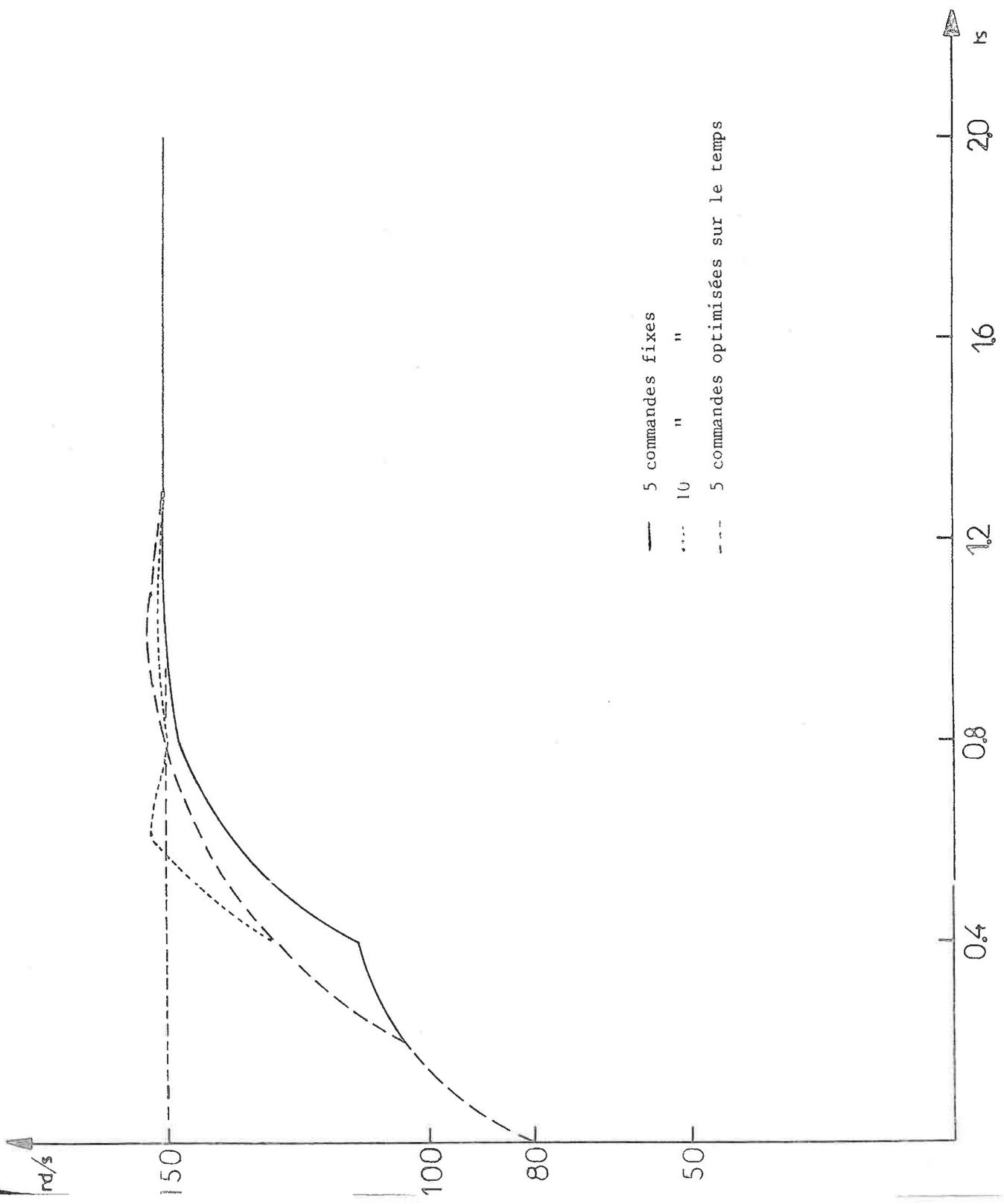
Nous avons aussi constaté que les variations d'intensité respectaient les contraintes imposées.

Ces résultats justifient, à postériori, les méthodes de traitement des contraintes et d'interpolation utilisées.

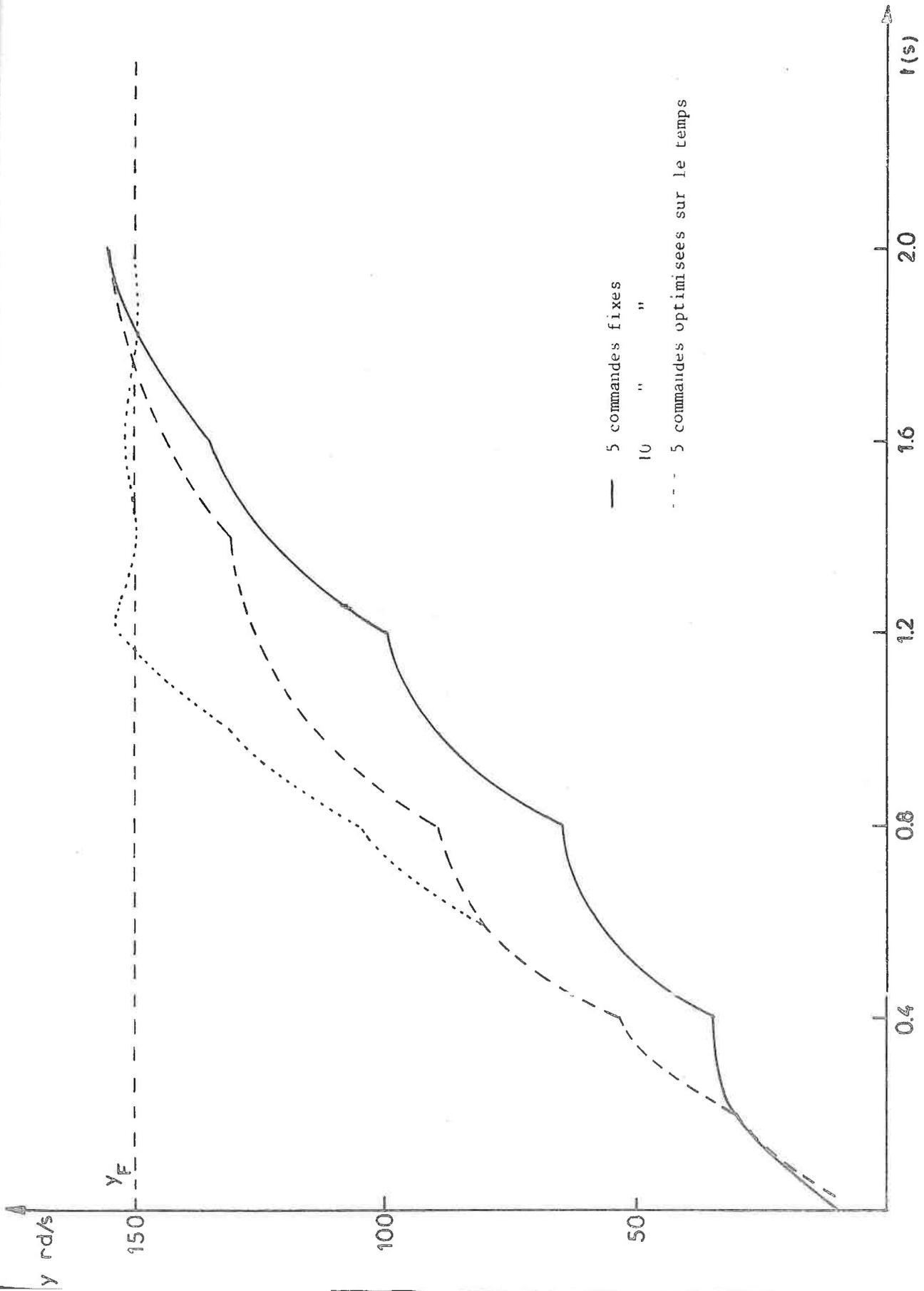








— 5 commandes fixes
... 10 " "
- - - 5 commandes optimisées sur le temps



C O N C L U S I O N

Les difficultés rencontrées lors de la commande directe par ordinateurs industriels, de processus non linéaires, nous ont conduits à rechercher la diminution du volume des calculs préalables, une solution au problème du stockage, et une meilleure utilisation de l'ordinateur aux instants d'échantillonnage.

Nous avons alors montré comment une étude mathématique des équations différentielles peut apporter des résultats intéressants quant à la connaissance des domaines atteignables, et diminuer ainsi, les calculs nécessités par la recherche d'une commande optimale avec contraintes sur l'état.

Nous avons utilisé, chaque fois qu'il était possible, les techniques d'interpolation à une ou plusieurs variables par les polynômes de Tchebychev, en indiquant les limites de validité de ces interpolations. Ces méthodes numériques réduisent considérablement les calculs et résolvent les problèmes de stockage en mémoire lors de la commande en temps réel.

Pour obtenir de meilleurs résultats avec le même nombre d'instants d'échantillonnage, nous avons optimisé les valeurs de commandes et la durée d'application de celles-ci ; nous avons alors montré que ce problème se ramenait à la recherche d'un chemin optimum dans un graphe. La comparaison des résultats donnés par cette méthode avec ceux obtenus pour un échantillonnage équiréparti, montre l'avantage de l'optimisation supplémentaire sur le temps.

Les méthodes employées dans l'étude de ce problème concret, pourraient être généralisées à certaines classes de systèmes régis par des équations différentielles ordinaires et conduire à la réalisation pratique de systèmes de commande directe utilisant des ordinateurs industriels.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) R. AHRAN
Caractéristique statique des régulateurs de vitesse à thyristors
(Automatisme, Mars 1970)
- (2) R. BELLMAN
Dynamic Programming (Princeton Univ. Press, 1957)
- (3) R. BOUDAREL, J. DELMAS, P. GUICHET
Commande optimale des processus (Dunod, 1968)
- (4) L. CESARI
Asymptotic behaviour and stability problems in ordinary differential
equations (Springer Berlin, 1959)
- (5) S.B. GERSHWIN, D.H. JACOBSON
A controllability theory for nonlinear systems (I.E.E.E. Trans. Automatic
Control, février 1971)
- (6) J.E. GIBSON
Nonlinear automatic control (Mc Graw-Hill, 1963)
- (7) E.J. GUDEFIN
Cours d'Electrotechnique professé à l'E.N.S.E.M.
- (8) J. LASALLE, S. LEFSCHETZ
Stability by Ljapounov's direct method with applications (New York
Academic Press, 1961)
- (9) E.B. LEE, L. MARKUS
Optimal control for nonlinear processus (Arch. Ration. Mech. Anal.
vol. 8, 1961)

- (10) L. LE LETTY, J. DELMAS
Optimisation et identification par calculatrice numérique
(E.N.S.A. rapport D.G.R.S.T., janvier 1970)
- (11) J. LEGRAS
Précis d'analyse numérique (Dunod, 1963)
- (12) A. MOTALLEBI
Thèse d'Ingénieur-Docteur (Nancy, 1971)
- (13) R. PALLU DE LA BARRIERE
Cours d'Automatique théorique (Dunod, 1966)
- (14) H. POINCARÉ
Oeuvres, tome I (Gauthier-Villars, 1951)
- (15) G. SANSONE, R. CONTI
Nonlinear differential equations (Pergamon Press, 1964)
- (16) T.J. TAKEUCHI
Theory of SCR circuit and application to motor-control
(Tokyo Elec. Eng. College Press, 1968)
- (17) P. VIDAL
Systèmes échantillonnés non linéaires (Gordon and Breach)
- (18) YU ZIANG KUANG
Doctorat de Spécialité Mathématiques (Nancy, 1969)

NOM DE L'ETUDIANT : IUNG Claude

Nature de la thèse : Doctorat de Spécialité Mathématiques

Vu, approuvé
et permis d'imprimer

Nancy, le

Le Président du Conseil de l'Université de
NANCY I

J.R. HELLUY