

87/901

UNIVERSITE DE NANCY I

UER SCIENCES de la MATIERE

THESE

présentée devant

l'Université de NANCY I

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES

par

Gérard HIRSCH



EQUATIONS de RELATION FLOUE

et MESURES D'INCERTAIN EN

RECONNAISSANCE DE FORMES

soutenue publiquement le 27 Avril 1987 devant la Commission d'examen

JURY

Monsieur R. MAINARD

Président

Monsieur C. HUMBERT

Rapporteur

Monsieur H. PRADE

Rapporteur

Monsieur J. BREMONT

Examineur

Monsieur A. FRÜHLING

Examineur

Monsieur M. LAMOTTE

Directeur de Recherche

UNIVERSITE DE NANCY I

UER SCIENCES de la MATIERE

THESE

présentée devant

l'Université de NANCY I

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES

par

Gérard HIRSCH



EQUATIONS de RELATION FLOUE

et MESURES D'INCERTAIN EN

RECONNAISSANCE DE FORMES

soutenue publiquement le 27 Avril 1987 devant la Commission d'examen

JURY

Monsieur R. MAINARD

Président

Monsieur C. HUMBERT

Rapporteur

Monsieur H. PRADE

Rapporteur

Monsieur J. BREMONT

Examineur

Monsieur A. FRUHLING

Examineur

Monsieur M. LAMOTTE

Directeur de Recherche

AVANT-PROPOS

Je remercie Monsieur le Professeur MAINARD, Président de l'Université de Nancy I, Monsieur LAMOTTE, Directeur de Recherche au CNRS, Monsieur PRADE, Laboratoire Langages et Systèmes Informatiques, Université Paul Sabatier, Toulouse, Monsieur HUMBERT, Professeur à l'Université de Nancy I, Monsieur FRÜHLING, Professeur à l'Université de Nancy I, Monsieur BREMONT, Professeur à l'Université de Nancy I, de me faire l'honneur de participer à mon jury de thèse, respectivement en tant que Président, Directeur de thèse, Rapporteurs et Membres examinateurs du Jury.

D'abord, comment ne pas parler de ma très vieille dette de reconnaissance envers Monsieur le Président MAINARD dont je fus l'étudiant en 1959 et qui veut bien être encore présent à ce stade de ma carrière universitaire.

Je voudrais ensuite remercier Monsieur LAMOTTE de m'avoir, il y a douze ans, accueilli dans son laboratoire CRAN-LEA, de m'avoir témoigné sa confiance et de m'avoir apporté une aide inestimable.

Je voudrais dire ma gratitude à Monsieur PRADE, éminent spécialiste international de la théorie du flou, dont la thèse et les recherches ont alimenté mon travail.

A mon arrivée au laboratoire, Monsieur FRÜHLING m'a encouragé ; sans lui, ma thèse n'aurait pas vu le jour. Je le remercie infiniment.

La tâche de rapporteur a été acceptée et assumée par Monsieur HUMBERT, auquel je dis ma reconnaissance.

C'est enfin grâce à l'adresse et à la patience de Madame SCHWARTZ que ma thèse a pris sa forme dactylographique définitive.

S O M M A I R E

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE 1</u> : Les équations de relation floue dans les problèmes de reconnaissance de formes	3
1. Introduction de la notion de relation floue	3
2. Les événements	4
3. La composition .	4
4. Quelle signification doit-on donner à la composition .	6
5. Comment choisir les opérateurs O_{p1} et O_{p2}	6
<u>CHAPITRE 2</u> : Normes et conormes triangulaires	11
1. Définitions	11
2. Opérations duales	13
3. Fonction pseudo-inverse. Générateur additif	13
4. t-normes et t-conormes duales non paramétrées	18
5. Inégalités entre t-normes et entre t-conormes	21
6. Autres constructions de t-normes et de t-conormes	28
7. Familles paramétrées de t-normes et de t-conormes	30
8. Générateurs additifs numériques	31
8.1. Position du problème	31
8.2. Construction de la norme $T(a,b)$ à partir de la fonction génératrice $y = f(x)$	31
8.3. Courbes de niveau de la t-norme	34
9. Générateurs multiplicatifs numériques	38

	Pages
<u>CHAPITRE 3 : Négations</u>	39
1. Différentes négations	39
2. t-normes et t-conormes n-duales	40
3. Générateur d'une négation forte	40
4. Lien entre négations fortes t-normes et t-conormes	41
<u>CHAPITRE 4 : Opérateurs d'implication flous.</u>	
Syllogisme	43
1. Les opérateurs d'implication flous	43
2. Modus ponens. Modus tollens	48
3. Les opérateurs de pseudo-implication flous	51
4. Le syllogisme	54
4.1. Le syllogisme direct	54
4.2. Le syllogisme indirect	57
<u>CHAPITRE 5 : Equations de relation floue</u>	67
1. Problème uni-dimensionnel lié à la composition MAX-MIN	67
2. Problème bi-dimensionnel lié à la composition MAX-MIN	70
3. Existence des solutions. Solution maximale pour la composition MAX-MIN	71
3.1. Transposée d'une relation floue	71
3.2. L'opérateur de maximalisation α et l'opérateur de minimalisation σ	71
3.3. La composition $\odot$	72
3.4. La composition $\oslash$	72
3.5. Existence des solutions	72
3.6. Solution maximale	73

	Pages
4. Les solutions minimales pour la composition MAX-MIN	74
4.1. Problème uni-dimensionnel	74
4.1.1. Fonction ordinale	74
4.1.2. Eléments minimaux	74
4.2. Problème bi-dimensionnel	81
5. Détermination d'un opérateur de maximalisation pour la résolution d'équations de relation floue dans le cas de la composition sup-T, avec T norme triangulaire quelconque	87
5.1. Position du problème	87
5.2. Conditions suffisantes permettant de définir un opérateur de maximalisation	88
5.3. Détermination de l'opérateur de maximalisation associé à une norme triangulaire	91
5.3.1. Normes continues	91
5.3.2. Normes archimédiennes	92
5.4. Opérateurs de maximalisation associés à certaines t-normes non archimédiennes	98
6. Détermination des solutions minimales pour la résolution d'équations de relation floue dans le cas de la composition sup-T, avec T norme triangulaire quelconque	102
7. Détermination d'un opérateur de minimalisation pour la résolution d'équations de relation floue dans le cas de la composition inf-S, où S est une conorme triangulaire quelconque	104
7.1. Position du problème	104
7.2. Conditions suffisantes permettant de définir un opérateur de minimalisation	107
7.3. Opérateur de minimalisation associé à une conorme triangulaire continue par rapport à l'un de ses arguments	110
7.4. Opérateur de minimalisation associé à une conorme triangulaire archimédienne	112

	Pages
CHAPITRE 6 : Mesures d'incertain	116
1. Définition d'une algèbre	116
2. Mesures de probabilité	117
3. Mesures d'incertain	118
3.1. Définition d'une mesure d'incertain	118
3.2. Propriétés d'une mesure d'incertain	119
4. Première construction des mesures d'incertain	120
4.1. L'opérateur de combinaison $\ast$	120
4.2. Exemples	122
4.2.1. Composition $\ast$: somme bornée	122
4.2.2. Composition $\ast$: maximum. Mesures de possibilité	123
4.2.3. Composition $\ast$: somme probabiliste	125
4.2.4. Composition $\ast$: conorme S_w	127
4.2.5. Les mesures de Sugeno	128
4.2.6. Composition $\ast$ basée sur la conorme paramétrée de Sugeno	131
4.2.7. Composition $\ast$ basée sur la conorme paramétrée de Yager	132
4.3. Classification des mesures d'incertain basées sur une conorme	133
4.4. Mesures d'incertain duales	135
4.4.1. Propriétés des mesures d'incertain duales	135
4.4.2. Exemples	137
4.4.2.1. Composition $\perp$: minimum. Mesures de nécessité	137
4.4.2.2. Composition $\perp$: $\max(0, a+b-1)$	140
4.4.2.3. Composition $\perp$: produit ab	141
4.5. Classification des mesures d'incertain basées sur une norme	142
4.6. Mesures d'incertain auto-duales	144
4.7. Les deux classes de mesures d'incertain décomposables	147

	Pages
5. Deuxième construction des mesures d'incertain : mesures de crédibilité et de plausibilité	148
5.1. Crédibilité et plausibilité au sens de Shäfer	148
5.1.1. Eléments focaux	148
5.1.2. Fonctions de communalité	152
5.2. Diverses classes de mesures de crédibilité ou de plausibilité	153
5.2.1. Les fonctions de corroboration simple	153
5.2.2. Les fonctions de corroboration consonante	155
5.2.3. Les mesures floues de Sugeno	156
5.3. Densité et pondération probabiliste de base. Passage entre les deux constructions de mesures d'incertain	157
5.3.1. Mesure de possibilité ou de nécessité	157
5.3.2. Mesures de Sugeno	161
5.3.3. Somme probabiliste ou produit	163
5.3.4. Conclusion	165
5.4. Approche d'une mesure de plausibilité ou de crédibilité	165
5.4.1. Approche d'une mesure de plausibilité par une mesure de possibilité ou d'une mesure de crédibilité par une mesure de nécessité	165
5.4.2. Approche d'une mesure de plausibilité ou de crédibilité par une mesure de probabilité	167
5.5. Mesures d'information	169
5.5.1. Mesure de spécificité (ou de précision) de Yager	170
5.5.2. Degré d'imprécision de Higashi et Klir	172
5.5.3. Degré de confusion de Höhle	173
5.5.4. Degré de dispersion de Yager	173

	Pages
<u>CHAPITRE 7 : Application à la reconnaissance des phonèmes</u>	175
1. Les formes acoustiques	175
2. Le choix des phonèmes	176
3. Première expérience	179
3.1. Phase d'apprentissage. Recherche des relations R_i avec A_i et B_i connus	179
3.1.1. Détermination des coefficients de la matrice A_i	179
3.1.2. Détermination des coefficients de la matrice B_i	179
3.1.3. Calcul des matrices R_i	180
3.2. Phase de reconnaissance	180
3.3. Interprétation	181
3.3.1. Interprétation par les mesures de Sugeno	183
3.3.2. Interprétation en termes de mesures de possibilité sur des sous-ensembles emboîtés	185
4. Deuxième expérience	188
<u>CONCLUSION</u>	196
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	198
<u>ANNEXE 1</u>	208
<u>ANNEXE 2</u>	213

INTRODUCTION

Le signal vocal émis par un être humain est sujet, d'une personne à une autre, à une très grande variabilité. Ces différences proviennent essentiellement de quatre sources :

- anatomique,
- culturelle (langues, accent régional, ...),
- d'intonation,
- émotionnelle.

De ce fait, la description des formes vocales, par des quantités floues, est particulièrement bien adaptée.

Nous nous sommes intéressés au niveau élémentaire de la parole : au phonème. Peu de chercheurs se placent au niveau des phonèmes. Cependant, WIEZLAK et GUBRYNOWICZ [WIE-82], pour la reconnaissance de mots, traduisent des formes acoustiques en caractères articulatoires, en utilisant des relations floues. DEMORI-GUBRYNOWICZ et LAFACE [DEM-79], pour décrire des formes, utilisent des règles syntaxiques floues, autrement dit des grammaires où les symboles sont des variables linguistiques floues. RIVOIRA et TORASSO [RIV-78] envisagent des grammaires avec des règles de production floue.

De notre côté, nous nous sommes fixés deux axes :

- traiter un problème de reconnaissance de formes à l'aide de relations floues ;
- quantifier les résultats de la reconnaissance à l'aide des mesures d'incertain.

Ce travail est divisé en trois parties.

Dans la première partie, nous posons le problème de la reconnaissance de formes qui est modélisé par une équation de relation floue où la relation établit un pont entre les attributs de la forme et sa catégorie d'appartenance (chapitre 1).

La discussion de la composition qui intervient dans la relation d'équation floue, nous amène à nous intéresser aux normes et aux conormes (chapitre 2). Les négations (chapitre 3) sont envisagées pour établir le passage entre les différentes notions duales l'une de l'autre. Les règles d'inférence (chapitre 4) sont utiles pour la construction des relations. A la suite de PEDRYCZ qui s'était limité à la composition sup-t norme de YAGER, nous avons apporté des solutions à la détermination d'un opérateur de maximalisation pour la résolution d'équations de relations floues dans le cas de la composition générale SUP-T avec T norme triangulaire quelconque (chapitre 5), ainsi que pour un opérateur de minimalisation pour le problème dual

Dans la seconde partie, nous avons rappelé les résultats des mesures d'incertitude développées par DUBOIS et PRADE.

Dans la dernière partie, nous avons mis en pratique les notions théoriques précédentes. L'application à la reconnaissance des phonèmes est faite à partir des données acoustiques brutes, et non pas obligatoirement parmi les meilleures fournies au départ.

CHAPITRE 1

LES ÉQUATIONS DE RELATION FLOUE

DANS LES PROBLÈMES DE RECONNAISSANCE DE FORMES

Nous allons discuter la forme que doit prendre une équation de relation floue pour répondre à un problème de reconnaissance de formes.

1. INTRODUCTION DE LA NOTION DE RELATION FLOUE

On se trouve devant le problème suivant : deux événements A et B sont en présence. Quel lien existe-t-il entre ces deux événements ?

Deux exemples d'application sont envisageables :

- a) A est un événement cause, B est un événement effet. Il convient de rechercher une relation de cause à effet.
- b) A est une forme, B est une catégorie. On a alors affaire à un problème de reconnaissance de formes et il faut trouver une fonction discriminante qui permette d'affecter la forme A à une catégorie B. Pour cette application, on peut généraliser la notion de relation de cause à effet et appliquer ce terme à la fonction de discrimination. Ce problème de cause à effet peut se formaliser ainsi :

$$R \circ A = B$$

où $\circ$ est une composition d'opérations qui calcule l'effet B à partir de la cause A au moyen de la relation R.

2. LES EVENEMENTS

Les événements A et B sont décrits respectivement par m et n propriétés ou attributs. A et B possèdent ces propriétés avec un degré d'appartenance $\mu \in [0,1]$. A et B sont alors les ensembles flous ayant la forme suivante :

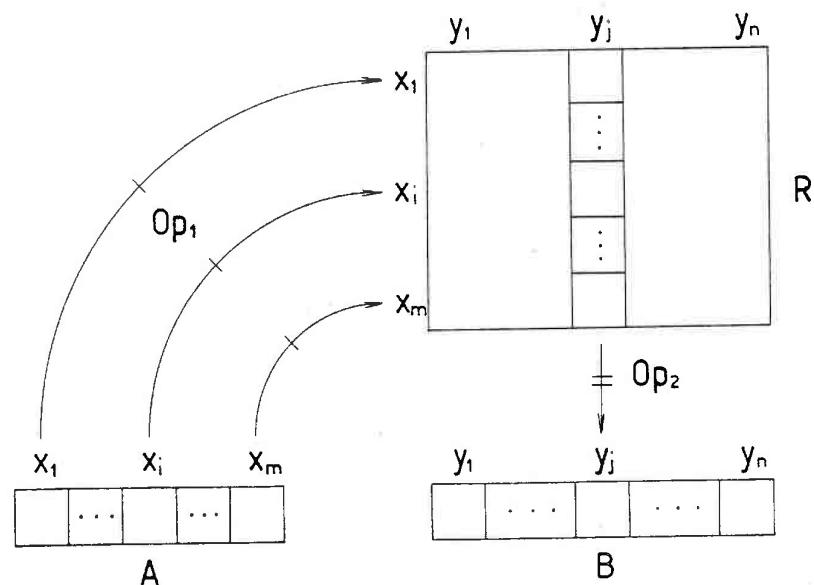
$$A = \begin{array}{c} x_1 \quad \quad x_i \quad \quad x_m \\ \mu_{x_1} \quad \dots \quad \mu_{x_i} \quad \dots \quad \mu_{x_m} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} y_1 \quad \quad y_j \quad \quad y_n \\ \mu_{y_1} \quad \dots \quad \mu_{y_j} \quad \dots \quad \mu_{y_n} \end{array}$$

A ou B sont des ensembles ordinaires si les valeurs $\mu \in \{0,1\}$.

3. LA COMPOSITION .

Dans la relation de cause à effet, le degré d'appartenance de la propriété y_j de l'effet B dépend, a priori, de toutes les m propriétés x_i de la cause A. Ceci conduit au schéma de calcul suivant :



- Suivant ce schéma, R doit posséder m lignes et n colonnes.
- L'ensemble des flèches du schéma symbolise la composition ..
- La composition ., représentée ici par le calcul du degré d'appartenance de y_j , pourrait être éventuellement différente pour le calcul de chacune des n propriétés de B. A la suite de tous les auteurs, on n'envisage que le cas où . est identique pour toutes les n colonnes de R.

4. QUELLE SIGNIFICATION DOIT-ON DONNER A LA COMPOSITION ?

Elle se déroule en deux temps.

- a) D'abord, une "pondération" de μ_{x_1} par l'élément r_{ij} de la relation R en utilisant un opérateur approprié (O_{p1}).
C'est la prise en compte d'un attribut de A évalué par son degré d'appartenance et "combiné" avec un élément r_{ij} pour contribuer à l'évaluation du degré d'appartenance d'un attribut de B. Chaque calcul évalue une "contribution partielle".
- b) Puis, évaluation d'une certaine "globalité" faisant intervenir les m contributions partielles précédentes. Ce deuxième calcul fait intervenir un autre opérateur (O_{p2}) (ou le même que précédemment). A noter qu'il est souhaitable que cet opérateur possède la propriété d'associativité si l'on désire que le résultat final ne soit pas dépendant de l'ordre des attributs de A.

5. COMMENT CHOISIR LES OPERATEURS O_{p1} ET O_{p2} ?

Le choix des opérateurs sera dicté par :

- l'existence des propriétés souhaitables ou nécessaires :
monotonie, commutativité, symétrie, associativité, ... ;
- la simplicité (en vue de la réduction des coûts de calcul) ;
- l'adaptation à une application donnée.

Le choix est fait en prenant appui sur l'exemple suivant (ce choix concerne des classes d'opérateurs et non pas un opérateur particulier).

Prenons : $A = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$

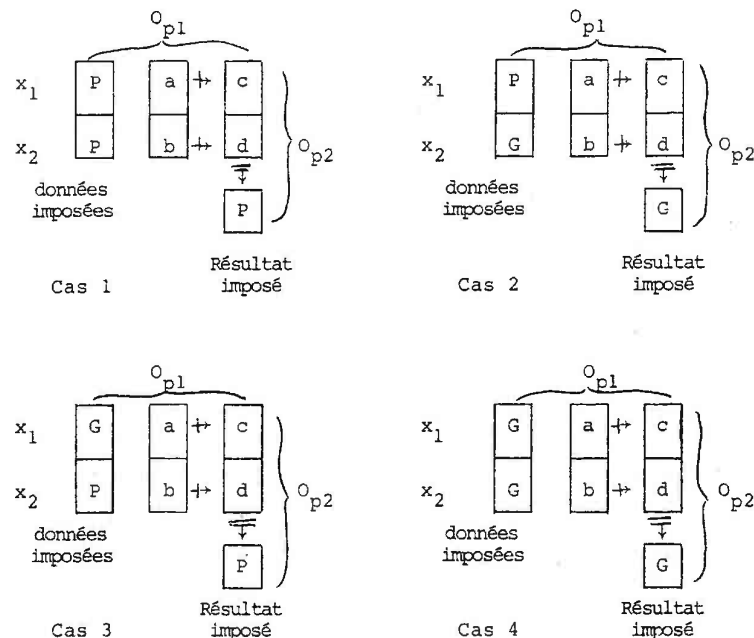
et intéressons-nous à une propriété j de B.

Par convention, une propriété (de A ou de B) est considérée :

- comme plutôt absente si $0 \leq \mu \leq 0.4$; elle sera dite petite (P),
- comme plutôt présente si $0.6 \leq \mu \leq 1$; elle sera dite grande (G).

Pour cette étude, nous supposons provisoirement qu'une propriété (de A ou de B) est interprétée comme une variable binaire, les deux valeurs possibles étant notées P et G. Ainsi, les seules valeurs de x_1 et x_2 sont petites ou grandes. Dans l'exemple, on suppose que :

- x_1 n'a pas (peu) d'influence sur la propriété y_j , quelle que soit la valeur de son degré d'appartenance (P ou G),
- x_2 a une influence sur y_j ; y_j sera grand si x_2 est grand, et inversement.



où (a,b) représente un choix (P ou G) pour les coefficients de la colonne j de la relation,

(c,d) représente les résultats de l'opérateur 1.

Pour O_{p1} et O_{p2} , seules les 16 fonctions binaires suivantes sont possibles.

N° d'opérateurs	Arguments															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P P	P	P	P	P	P	P	P	P	G	G	G	G	G	G	G	G
P G	P	P	P	P	G	G	G	G	P	P	P	P	G	G	G	G
G P	P	P	G	G	P	P	G	G	P	P	G	G	P	P	G	G
G G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G

On prend tous les couples possibles (O_{p1} et O_{p2}) et on élimine ceux qui ne conviennent pas :

- Les opérateurs 1 et 16 sont éliminés car trivialement sans intérêt.
- Il est souhaitable que O_{p1} et O_{p2} soient commutatifs :
 - . car pour O_{p1} , la "pondération" de μ_{x_i} par r_{ij} dépend seulement de ces seules valeurs et non pas de l'ordre dans lequel elles sont prises ;
 - . car pour O_{p2} , le résultat final ne doit pas dépendre de l'ordre des attributs de A. Donc, pour les arguments (P,G) ou par commutation (G,P), les opérateurs doivent donner le même résultat : on élimine les opérateurs 3,4,5,6,11, 12,13,14.
- En non binaire, les opérateurs 7 et 10 sont en partie croissants et en partie décroissants. Les opérateurs 7 et 10 ne peuvent garantir un résultat cohérent et sont à éliminer.

On teste systématiquement les couples d'opérateurs (O_{p1} - O_{p2}) formés à partir des opérateurs restants 2,8,9 et 15, et cela en se fixant successivement pour (a,b) les quatre configurations :

- choix 1 pour (a,b) = (P,P)
- choix 2 pour (a,b) = (P,G)
- choix 3 pour (a,b) = (G,P)
- choix 4 pour (a,b) = (G,G)

Pour le choix n° 1, il n'y a pas de couple convenable.

Pour le choix n° 2, on obtient $O_{p1} = 2$ et $O_{p2} = 8$.

Pour le choix n° 3, on obtient $O_{p1} = 8$ et $O_{p2} = 2$.

Pour le choix n° 4, il n'y a pas de couple convenable.

En non binaire, les opérateurs 2 et 8 sont croissants par rapport à chacune des variables. En ajoutant des conditions aux limites et compte tenu des propriétés précédentes imposées, l'opérateur 2 est une t-norme et l'opérateur 8 est une t-conorme (voir chapitre 2).

Les deux compositions ($O_{p1}-O_{p2}$) décrites sont donc :

t-conorme - t-norme
et t-norme - t-conorme

Elles s'avèrent trop générales ; en fait, on se borne simplement à considérer les compositions sup t-norm et inf t-conorme parce qu'elles possèdent des propriétés intéressantes (voir chapitre 5).

CHAPITRE 2

NORMES ET CONORMES TRIANGULAIRES

Dans ce chapitre, on rappelle les définitions des t-normes et des t-conormes introduites par Menger [MEN-42] lors de l'étude des espaces métriques aléatoires. Nous utiliserons les résultats démontrés par Ling [LIN-65] et Schweitzer et Sklar [SCH-60 et SCH-61]. Nous attacherons un intérêt plus particulier à la construction et à la comparaison de ces t-normes et de ces t-conormes. Nous ferons apparaître le rôle important joué par les générateurs additifs et multiplicatifs. Nous proposons la construction de t-normes et de t-conormes à l'aide de générateurs numériques.

1. DEFINITIONS

a) Une application $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ est une norme triangulaire ou t-norme ssi

$$T_1 : \begin{cases} T(0,0) = 0 \\ T(a,1) = T(1,a) = a \end{cases} \quad \text{conditions aux limites}$$

$$T_2 : T(a,b) = T(b,a) \quad \text{commutativité}$$

$$T_3 : T(a,b) \leq T(a,c) \text{ si } b \leq c \quad \text{non décroissance}$$

$$T_4 : T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c) \quad \text{associativité}$$

T confère à $[0,1]$ une structure de groupe commutatif avec 1 pour élément neutre.

Une t-norme T est archimédienne ssi

T_5 : T est continue

T_6 : $T(a,a) < a$ pour tout $a \in]0,1[$.

Une t-norme archimédienne T est stricte ssi

T_7 : T est strictement croissante sur $]0,1[\times]0,1[$.

b) Une application $S :]0,1[\times]0,1[\rightarrow]0,1[$ est une conorme triangulaire ou t-conorme ssi

S_1 : $\begin{cases} S(1,1) = 1 \\ S(0,a) = S(a,0) = a \end{cases}$ conditions aux limites

S_2 : $S(a,b) = S(b,a)$ commutativité

S_3 : $S(a,b) \leq S(a,c)$ si $b \leq c$ non décroissance

S_4 : $S(a, S(b,c)) = S(S(a,b), c)$ associativité

S confère à $]0,1[$ une structure de groupe commutatif avec 0 pour élément neutre.

Une t-conorme S est archimédienne ssi

S_5 : S est continue

S_6 : $S(a,a) > a$ pour tout $a \in]0,1[$.

Une t-conorme archimédienne S est stricte ssi

S_7 : S est strictement croissante sur $]0,1[\times]0,1[$.

2. OPERATIONS DUALES

A toute t-norme T correspond une t-conorme S (et réciproquement) définie par l'une des formules :

$$S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$$

ou

$$T(a,b) = 1 - S(1-a, 1-b)$$

3. FONCTION PSEUDO-INVERSE. GENERATEUR ADDITIF

Définition :

Etant donné une fonction $f :]0,1[\rightarrow]0,+\infty[$ vérifiant $f(1) = 0$, continue et strictement décroissante, on appelle pseudo-inverse de f et l'on note $f^{(-1)}$ la fonction définie par :

$$f^{(-1)}(a) = \begin{cases} f^{-1}(a) & \text{si } a \in]0, f(0)[\\ 0 & \text{si } a \in]f(0), +\infty[\end{cases}$$

Remarques :

- $f^{(-1)}$ représente la pseudo-inverse de f et f^{-1} est la fonction réciproque de f .
- La relation $f(1) = 0$ est une condition nécessaire pour définir une t-norme.

Théorème :

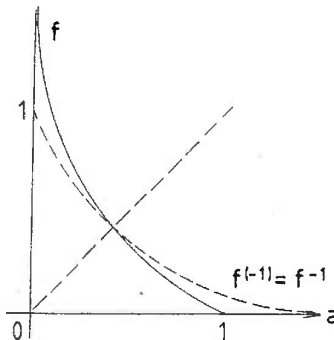
Une application $T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ est une t-norme archimédienne ssi

$$T(a,b) = f^{(-1)}[f(a) + f(b)].$$

Ce théorème est dû à LING [LIN-65].

La fonction f est appelée générateur additif de T ; elle est définie à une constante multiplicative près.

La t-norme T est stricte ssi : $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ a > 0}} f(a) = +\infty$.



Cas d'un générateur additif pour une t-norme stricte

Remarque :

Pour une t-norme stricte, alors $f^{(-1)} = f^{-1}$.

Définition :

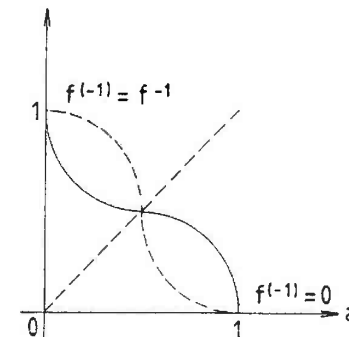
Les normes triangulaires continues et archimédiennes dont les fonctions génératrices sont telles que $f(1) = 0$ et $f(0)$ est fini, sont nilpotentes si, pour toute suite $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de nombres de $]0,1[$, il existe un n_0 tel que $\sum_{i=1}^{n_0} f(a_i) > f(0)$ et donc $T(a_0, a_1, \dots, a_{n_0}) = f^{(-1)}\left[\sum_{i=1}^{n_0} f(a_i)\right] = 0$.

Remarque :

Dans le cas où $f(0)$ est fini, on peut toujours supposer $f(0) = 1$ puisqu'un générateur additif est défini à une constante multiplicative près.

Définition :

Le générateur additif f est normé ssi $f(0) = 1$.



Cas d'un générateur additif normé

Propriétés :

$$f^{(-1)}(f(a)) = a$$

$$f(f^{(-1)}(a)) = \min(a, f(0))$$

Définition :

Etant donné une fonction $g : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ vérifiant $g(0) = 0$, continue et strictement croissante, on appelle pseudo-inverse de g et l'on note $g^{(-1)}$ la fonction définie par :

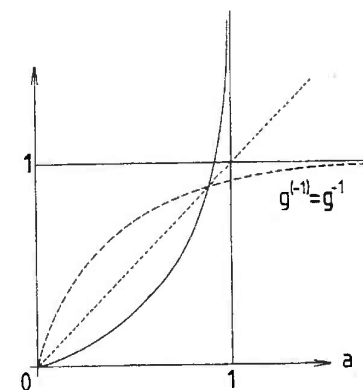
$$g^{(-1)}(a) = \begin{cases} g^{-1}(a) & \text{si } a \in [0, g(1)] \\ 1 & \text{si } a \in]g(1), +\infty[. \end{cases}$$

Théorème :

Une application S de $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une t -conorme archimédienne ssi

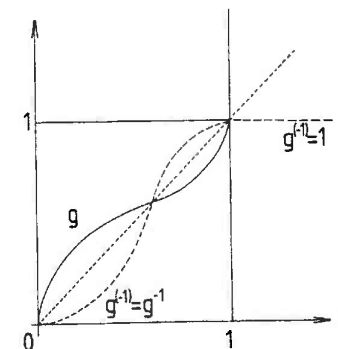
$$S(a, b) = g^{(-1)}[g(a) + g(b)]$$

La t -conorme S est stricte ssi : $\lim_{a \rightarrow 1} g(a) = +\infty$.



Cas d'un générateur additif pour une t -conorme stricte

Le générateur additif g est normé ssi $g(1) = 1$.



Cas d'un générateur additif normé

Propriétés :

$$g^{(-1)}(g(a)) = a$$

$$g^{(-1)}(g(a)) = \max(a, g(1))$$

4. t-NORMES ET t-CONORMES DUALES NON PARAMETREES

Si une t-norme possède f pour fonction génératrice, alors la t-conorme duale a pour fonction génératrice la fonction g définie par :

$$g(x) = f(1-x) \text{ et } g^{(-1)}(x) = 1 - f^{(-1)}(x)$$

Il existe une infinité de fonctions f (ou g) de $[0,1]$ dans $[0,+\infty]$, continues, strictement décroissantes (ou croissantes) telles que $f(1) = 0$ (ou $g(0) = 0$) ; donc, il existe une infinité de normes (ou de conormes).

Les t-normes et les t-conormes duales les plus importantes, ainsi que leurs propriétés, sont données dans le tableau suivant. Les générateurs additifs permettent d'envisager d'autres normes et conormes. Considérons par exemple :

- la fonction génératrice $f(x) = \frac{1-x}{x}$; on obtient le produit de Hamacher qui est une norme stricte :

$$T_{\square}(a,b) = \frac{ab}{a+b-ab}$$

et pour conorme duale :

$$S_{\square}(a,b) = \frac{a+b-2ab}{1-ab} ;$$

- la fonction génératrice $f(x) = \ln \frac{2-x}{x}$; on obtient le produit d'Einstein qui est une norme stricte :

$$T_{|.|}(a,b) = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$$

et pour conorme duale :

$$S_{|.|}(a,b) = \frac{a+b}{1+ab}$$

t-norme	$T_w(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b=1 \\ b & \text{si } a=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$T_m(a,b) = \begin{cases} \max(0, a+b-1) & \text{si } a+b \geq 1 \\ a+b-1 & \text{sinon} \\ 0 & \end{cases}$	$\text{prod}(a,b) = a.b$	$\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$
f fonction génératrice		$f(x) = 1 - x$	$f(x) = -\ln x$	
$f^{(-1)}$ pseudo-inverse		$f^{(-1)}(y) = \max(1-y, 0)$	$f(y) = e^{-y}$	
nature	discontinue	continue nilpotente	continue archimédienne stricte	continue
t-conorme duale	$S_w(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b=0 \\ b & \text{si } a=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$	$S_b(a,b) = \min(1, a+b)$ Somme bornée	$S_p(a,b) = a+b-ab$ Somme probabiliste	$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$
g fonction génératrice		$g(x) = x$	$g(x) = -\ln(1-x)$	
$g^{(-1)}$ pseudo-inverse		$g^{(-1)}(y) = \min(y, 1)$	$g^{(-1)}(y) = 1 - e^{-y}$	

De son côté, Mizumoto [MIZ-86] considère des fonctions génératrices trigonométriques :

- la fonction génératrice $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ introduit la norme nilpotente :

$$T_C(a,b) = \frac{2}{\pi} \text{Arc cos} \left[\min(1, \cos \frac{\pi}{2} a + \cos \frac{\pi}{2} b) \right]$$

et la conorme duale :

$$S_C(a,b) = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin} \left[\min(1, \sin \frac{\pi}{2} a + \sin \frac{\pi}{2} b) \right] ;$$

- la fonction génératrice $f(x) = 1 - \sin \frac{\pi}{2} x$ introduit la norme nilpotente :

$$T_S(a,b) = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin} \left[\max(0, \sin \frac{\pi}{2} a + \sin \frac{\pi}{2} b - 1) \right]$$

et la conorme duale :

$$S_S(a,b) = \frac{2}{\pi} \text{Arc cos} \left[\max(0, \cos \frac{\pi}{2} a + \cos \frac{\pi}{2} b - 1) \right] ;$$

- la fonction génératrice $f(x) = \cotg \frac{\pi}{2} x$ introduit la norme stricte :

$$T_t(a,b) = \frac{2}{\pi} \text{Arc cotg} \left[\cotg \frac{\pi}{2} a + \cotg \frac{\pi}{2} b \right]$$

et la conorme duale :

$$S_t(a,b) = \frac{2}{\pi} \text{Arc tg} \left[\tg \frac{\pi}{2} a + \tg \frac{\pi}{2} b \right].$$

- En considérant la fonction génératrice $f(x) = \tg \frac{\pi}{4}(1-x)$, nous proposons la norme :

$$T_H(a,b) = \max\left(0, 1 - \frac{4}{\pi} \text{Arctg} \left[\tg \frac{\pi}{4}(1-a) + \tg \frac{\pi}{4}(1-b) \right] \right)$$

et la conorme duale :

$$S_H(a,b) = \min\left(1, \frac{4}{\pi} \text{Arctg} \left[\tg \frac{\pi}{4} a + \tg \frac{\pi}{4} b \right] \right).$$

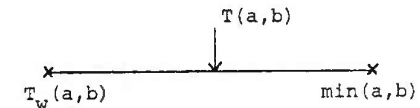
5. INEGALITES ENTRE t-NORMES ET ENTRE t-CONORMES

$T_w(a,b)$ est la t-norme la plus faible. En effet, $T_w(a,b)$ respecte les conditions aux limites et $T_w(a,b)$ est nulle partout ailleurs.

$\min(a,b)$ est la t-norme la plus forte. En effet, $\min(a,b)$ respecte les conditions aux limites et puisqu'une t-norme est commutative, pour un b donné avec $b \leq a \leq 1$, nous devons avoir $T(1,b) = b$ et compte tenu de la non-décroissance, la valeur la plus grande sur le segment est b , c'est-à-dire le minimum de a et de b .

SCHWEIZER et SKLAR [SCH-60] montrent que toute norme $T(a,b)$ vérifie :

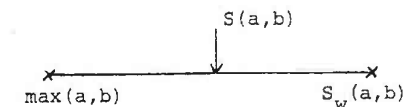
$$T_w(a,b) \leq T(a,b) \leq \min(a,b)$$



Par dualité, la t-conorme la plus faible est $\max(a,b)$ et la t-conorme la plus forte est $S_w(a,b)$.

Toute t-conorme $S(a,b)$ vérifie :

$$\max(a,b) \leq S(a,b) \leq S_w(a,b)$$



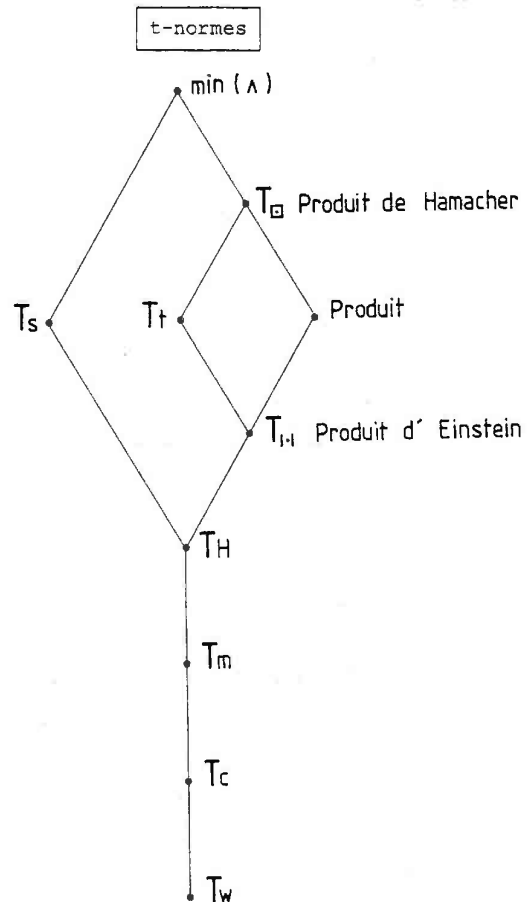
Cependant, deux t-normes (ou deux t-conormes) ne sont pas forcément comparables entre elles.

Ainsi, pour le produit et la norme de Mizumoto T_t :

$$0.6 \times 0.4 = 0.24 < T_t(0.6, 0.4) \approx 0.2826$$

$$T_t(0.9, 0.9) \approx 0.8047 < 0.9 \times 0.9 = 0.81$$

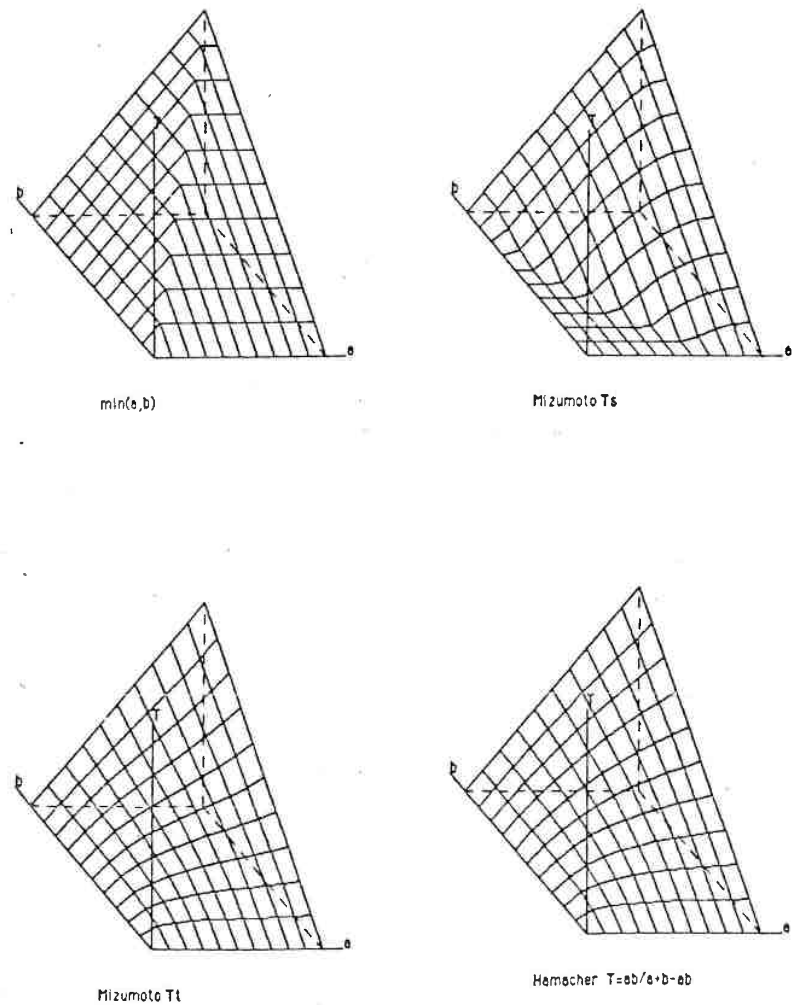
Entre les t-normes précédentes, on vérifie l'ordre suivant :

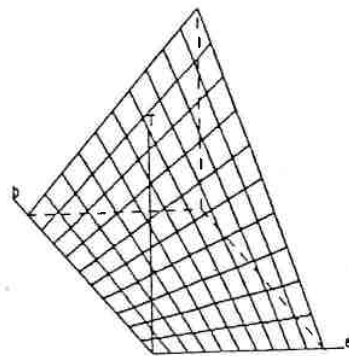


Remarque :

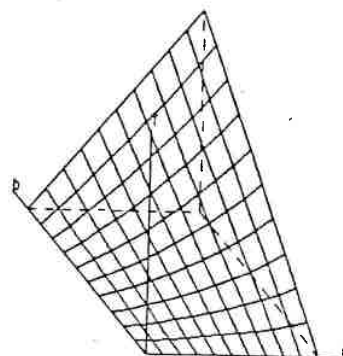
Par rapport à l'article de Mizumoto [MIZ-86], nous avons trouvé la différence suivante : la norme T_t n'est pas comparable au produit.

La représentation tridimensionnelle des t-normes est donnée ci-après.

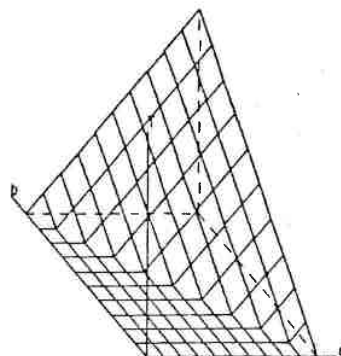




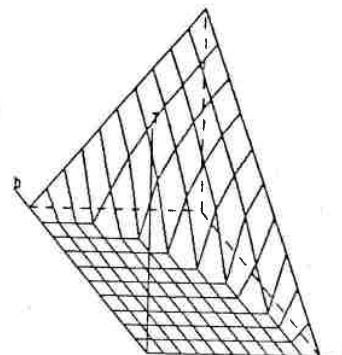
produit



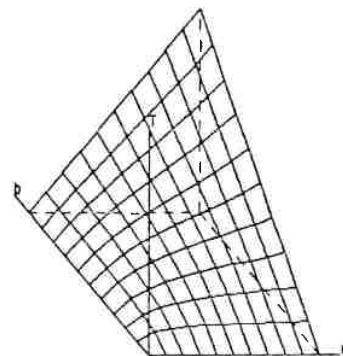
Einstein $T=ab/(1+(1-a)(1-b))$



$T_m=a \cdot b = 1$ si $a \cdot b = 1$, sinon 0



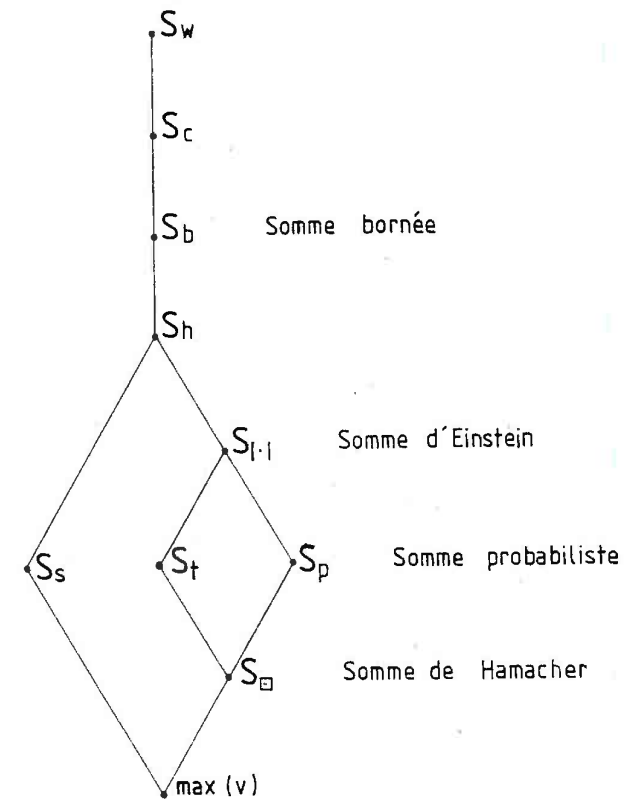
Mizumoto T_c



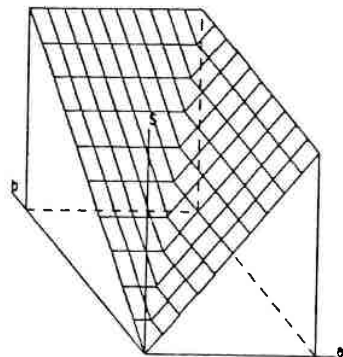
Norme T_h

Par dualité, l'ordre entre les t-conormes est le suivant :

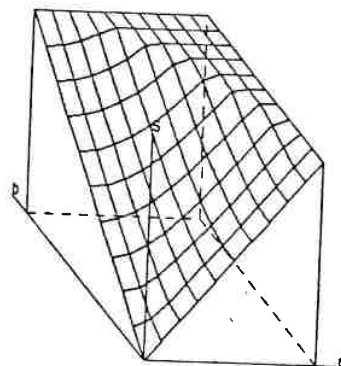
t-conormes



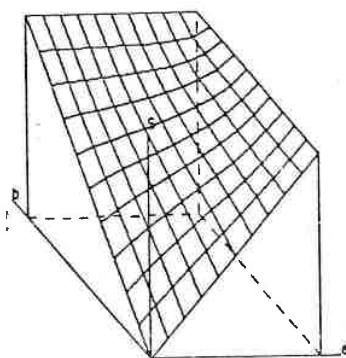
La représentation tridimensionnelle des t-conormes est la suivante :



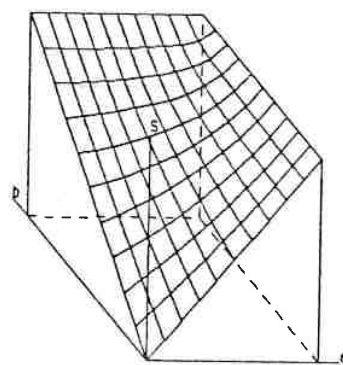
$\max(a,b)$



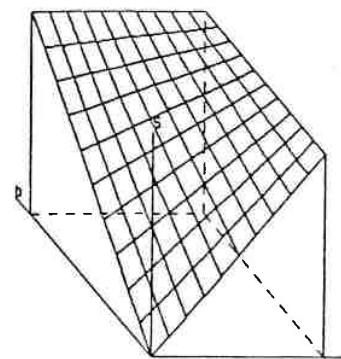
Mizumoto S_s



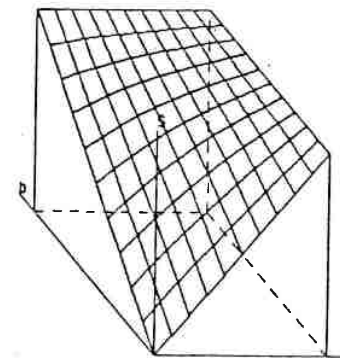
Mizumoto S_t



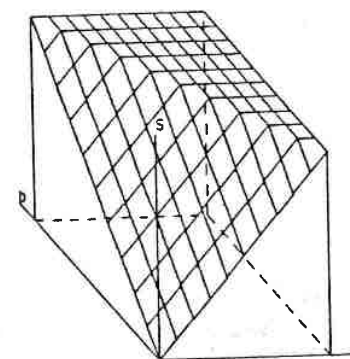
Hamecher $S = a \cdot b - 2ab / (1 - ab)$



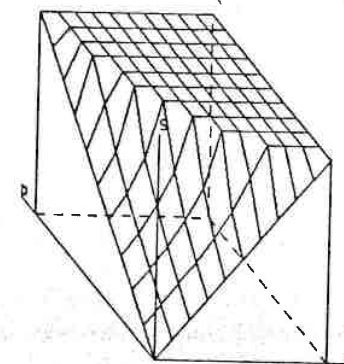
somme probabiliste $a+b-ab$



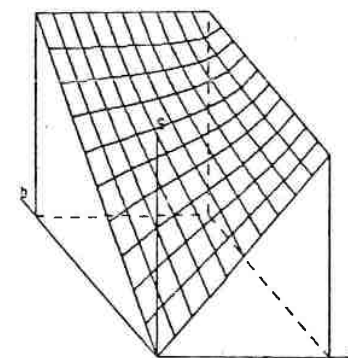
Einstein $S = a+b / (1+ab)$



somme bornée $= \min(1, a+b)$



Mizumoto S_c



Conorme S_h

6. AUTRES CONSTRUCTIONS DE t-NORMES ET DE t-CONORMES

YOU [YOU-83] propose une autre construction des t-normes et des t-conormes (voir A. Kaufmann, note de travail n° 109).

Théorème 1 :

Soit une fonction k continue sur $[0,1]$, strictement croissante, telle que $k(0) = 0$ et $k(1) = 1$; alors, pour toute t-norme $T(a,b)$:

$$F(a,b) = k^{-1}[T(k(a),k(b))] \text{ est une t-norme,}$$

et pour toute t-conorme $S(a,b)$:

$$F'(a,b) = k^{-1}[S(k(a),k(b))] \text{ est une t-conorme.}$$

Exemple :

Considérons la fonction $k(x) = \frac{2x}{x+1}$ qui vérifie les hypothèses du théorème 1. Avec la t-norme produit $T(a,b) = a.b$, on obtient la t-norme :

$$F(a,b) = \frac{2ab}{a+b+1-ab}.$$

La t-conorme duale du produit est la somme probabiliste $S_p(a,b) = a+b-ab$, d'où la t-conorme $F'(a,b) = \frac{a+b}{ab+1}$.

Remarque :

Pour $F(a,b)$ (ou pour $F'(a,b)$), le théorème 1 conduit à envisager une "déformation élastique" d'une t-norme T (ou d'une t-conorme S) à l'aide de la fonction k .

Théorème 2 :

Soit une fonction h continue sur $]0,1]$, strictement décroissante, telle que $h(0) = +\infty$ et $h(1) = 1$; alors :

$$F_1(a,b) = h^{-1}[h(a).h(b)] \text{ est une t-norme,}$$

$$\text{et } F_2(a,b) = h^{-1}[h(a) + h(b) - 1] \text{ est aussi une t-norme.}$$

Exemple :

La fonction $h(x) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} x}$ vérifie les hypothèses du théorème 2 ; alors :

$$F_1(a,b) = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin} \left[\left(\sin \frac{\pi}{2} a \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} b \right) \right]$$

$$\text{et } F_2(a,b) = \frac{2}{\pi} \text{Arc sin} \left[\frac{1}{\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} a} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} b} - 1} \right]$$

sont des t-normes.

Remarque 1 :

En posant $h(x) = f(x)+1$, la fonction réciproque $h^{-1}(x)$ vérifie $h^{-1}(x) = f^{-1}(x-1)$ et l'on retrouve le résultat valable pour les t-normes strictes $T(a,b) = f^{-1}[f(a) + f(b)]$.

Remarque 2 :

En appliquant la première partie du théorème 2 à la fonction $h(x) = f(x)+1$, on obtient :

$$F_1(a,b) = h^{-1}[(f(a)+1)(f(b)+1)]$$

$$\text{d'où } F_1(a,b) = f^{-1}[f(a)+f(b)+f(a).f(b)]$$

Donc, pour un même générateur f , on peut former une deuxième t -norme stricte à l'aide de la relation précédente.

Exemple :

La fonction $f(x) = -\ln x$ génère la t -norme produit ab et la t -norme $F_1(a,b) = abe^{-\ln a \ln b}$ moins utilisable.

Théorème 3 :

Soit une fonction ℓ continue sur $[0,1]$, strictement croissante, telle que $\ell(0) = 1$ et $\ell(1) = +\infty$; alors :

$$G_1(a,b) = \ell^{-1}[\ell(a) \cdot \ell(b)] \text{ est une } t\text{-conorme,}$$

$$\text{et } G_2(a,b) = \ell^{-1}[\ell(a) + \ell(b) - 1] \text{ est aussi une } t\text{-conorme.}$$

Exemple :

La fonction $\ell(x) = \frac{1}{1-x}$ définie sur $[0,1]$ vérifie les hypothèses du théorème 3 :

$$G_1(a,b) = a + b - ab \text{ (somme probabiliste)}$$

$$\text{et } G_2(a,b) = \frac{a+b-2ab}{1-ab} \text{ sont des } t\text{-conormes.}$$

7. FAMILLES PARAMETREES DE t -NORMES ET DE t -CONORMES

De nombreuses familles paramétrées de t -normes et de t -conormes duales ont été introduites par différents auteurs. Les plus importantes, ainsi que leurs propriétés, sont envisagées dans les tableaux figurant chapitre 5, § 5.4.

8. GENERATEURS ADDITIFS NUMERIQUES

8.1. Position du problème :

Très souvent, la fonction génératrice est donnée sous une forme analytique et, à part pour quelques fonctions simples, l'expression de $T(a,b)$ est difficilement utilisable. Afin de construire une norme ayant une "configuration" voulue, on propose de modéliser la fonction génératrice à notre convenance. Pour cela, nous partons d'une fonction f continue sur $[0,1]$, affine par morceaux, strictement décroissante et vérifiant $f(1) = 0$. Cette fonction génératrice sera ainsi définie par une succession de n segments de droites. Nous n'envisageons que des générateurs additifs normés ($f(0) = 1$). Les points de jonction de deux segments ou points de cassure M_i sont les données du problème :

$$x_1 \rightarrow f(x_1) = y_1$$

·

$$x_i \rightarrow f(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

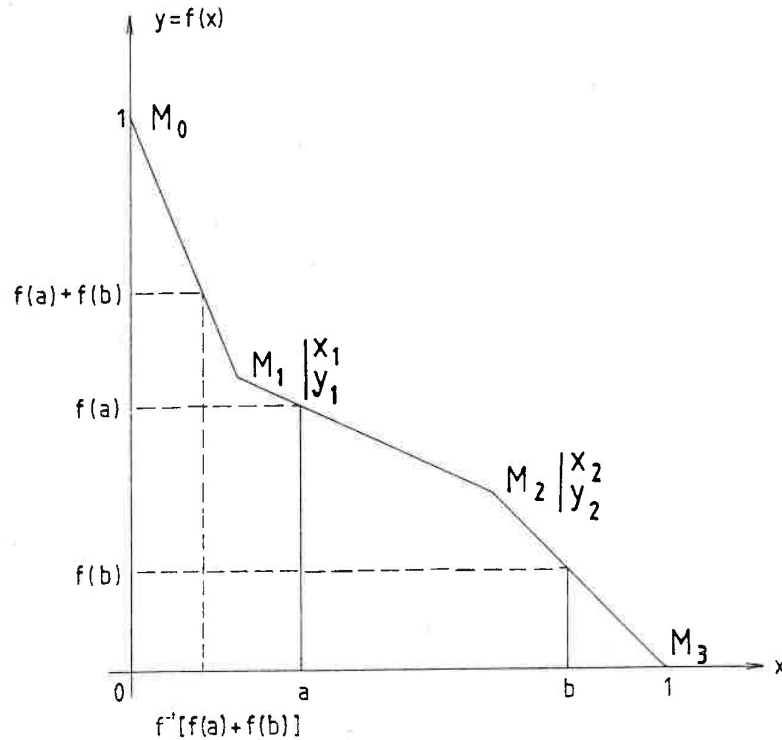
·

$$x_{n-1} \rightarrow f(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

8.2. Construction de la norme $T(a,b)$ à partir de la fonction génératrice $y = f(x)$:

Algorithme de calcul de la norme $T(a,b)$, a et b étant spécifiés :

- 1) Repérer le segment qui contient a (entrée dans la table par les x_i) et calcul de $f(a)$ par interpolation linéaire.



(pour 3 segments)

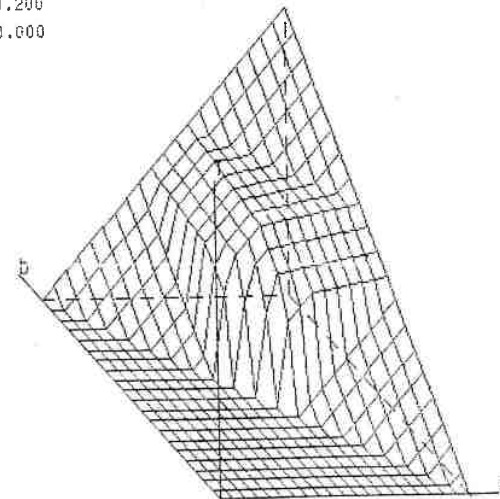
- 2) Même calcul pour b , d'où la valeur $f(b)$.
- 3) Si $f(a) + f(b) \geq 1$, alors $T(a,b) = 1$ sinon.
- 4) Repérer le segment qui contient $f(a) + f(b)$ (entrée dans la table par les y_1), puis calcul de $T(a,b)$ par interpolation linéaire.

Exemple :

La norme $T(a,b)$ est tracée pour a et b variant avec un pas de 0.05. Nous avons envisagé le cas de trois segments joignant les points :

$$M_0(0;1) \quad M_1(.4;.8) \quad M_2(.6;.2) \quad M_3(1;0)$$

nombre de segments		3
0.400	0.800	
0.600	0.200	
1.000	0.000	



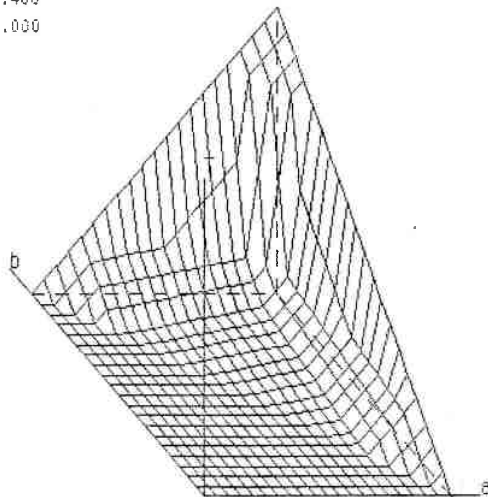
Gene add numérique

puis les points :

$M_0(0;1)$ $M_1(.2;.6)$ $M_2(.8;.4)$ $M_3(1;0)$

nombre de segments

0.200 0.600
0.800 0.400
1.000 0.000



Gene add numérique

8.3. Courbes de niveau de la t-norme :

Pour avoir une idée visuelle de "l'allure" de la t-norme, on trace dans le plan (a,b) quelques courbes de niveau, par exemple $T(a,b) = 0, .2, .4, \dots, 1$.

On se donne donc la valeur de la courbe de niveau $T(a,b) = x$ avec $0 \leq x \leq 1$. On a alors :

$$f(a) + f(b) = y = f(x)$$

f fonction connue, x connu, et a et b sont à déterminer.

Remarque 1 :

Par suite de la non croissance de f, on a toujours $a \geq x$ et $b \geq x$.

On ne prend donc en compte que les segments de f situés à droite du point M(x,y).

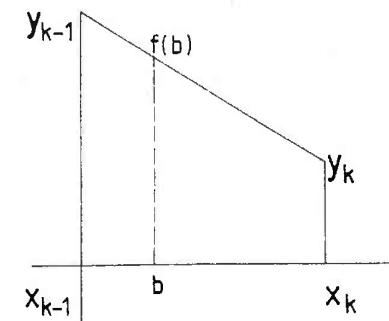
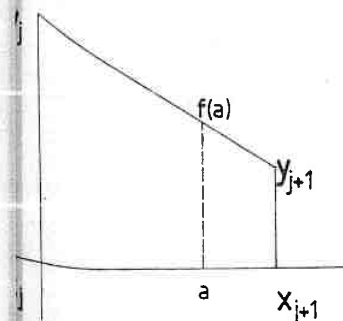
Remarque 2 :

Le point M(x,y) est situé sur le segment $M_i M_{i+1}$ repéré par l'abscisse de ses extrémités x_i et x_{i+1} ($i=0,1,\dots,n-1$). La variable a croît de x à 1 et la variable b décroît de 1 à x de façon à garder $f(a) + f(b)$ constant. On décrit donc les segments repérés par les abscisses $(x_1, x_{i+1}) \dots (x_j, x_{j+1}) \dots (x_{n-1}, x_n)$ respectivement dans l'ordre direct pour a et rétrograde pour b. On arrête le calcul lorsque a et b sont égaux, puisque T(a,b) est commutatif.

A une étape quelconque du calcul :

a est sur le segment (x_j, x_{j+1}) $j=i, i+1, \dots, (n-1)$

b est sur le segment (x_{k-1}, x_k) $k=n, n-1, \dots, i+1$



On a alors :

$$f(a) = y_j + (a - x_j)(y_j - y_{j+1}) / (x_j - x_{j+1})$$

$$f(b) = y_{k-1} + (b - x_{k-1})(y_{k-1} - y_k) / (x_{k-1} - x_k)$$

$$\text{puis } y = f(a) + f(b) \quad (1)$$

La relation (1) indique que a et b sont liés. La courbe de niveau comprenant le point (a,b) est un segment de droite. Il nous suffit alors de déterminer ses extrémités.

Calcul de a en fonction de b, et réciproquement :

$$a = x_j + ((x_j - x_{j+1}) / (y_j - y_{j+1})) (y - y_j - y_{k-1} + (x_{k-1} - b)((y_{k-1} - y_k) / (x_{k-1} - x_k))) \quad (2)$$

$$b = x_{k-1} + ((x_{k-1} - x_k) / (y_{k-1} - y_k)) (y - y_j + y_{k-1} + (x_j - a)((y_j - y_{j+1}) / (x_j - x_{j+1}))) \quad (3)$$

Les relations (2) et (3) restent valables tant que a et b se situent sur leur même segment respectif. Lorsque a arrive au point de jonction avec le segment suivant, l'indice j est incrémenté ; lorsque b arrive au point de jonction avec le segment précédent, l'indice k est décrémenté ; a et b peuvent arriver en même temps à des cassures de f, les deux indices j et k sont changés.

Pour l'algorithme, on a besoin :

de b calculé avec $a_j = x_{j+1}$ (extrémité droite du segment qui porte a) :

$$b_j = x_{k-1} + ((x_{k-1} - x_k) / (y_{k-1} - y_k)) (y - y_{k-1} - y_{j+1}) \quad (4)$$

et de a calculé avec $b_k = x_{k-1}$ (extrémité gauche du segment qui porte b) :

$$a_k = x_j + ((x_j - x_{j+1}) / (y_j - y_{j+1})) (y - y_j - y_{k-1}) \quad (5)$$

Algorithme des courbes de niveau :

- 1) Prendre une valeur $T(a,b) = x$; calculer $y = f(x)$.
- 2) Prendre $j = 1$, premier segment possible pour a, $k = n$, dernier segment de f pour b.
- 3) Avec $a_j = x_{j+1}$, on calcule b_j : on a le couple (a_j, b_j)
 si $x_{k-1} < b_j < x_k$, on retient le couple (a_j, b_j)
 et $j = j+1$, aller en 4
 si $x_{k-1} = b_j$, on retient le couple (a_j, b_j)
 et $j = j+1$, $k = k-1$, aller en 4
 si $x_{k-1} > b_j$, on sort du segment (x_{k-1}, x_k) et avec $b_k = x_{k-1}$ on calcule a_k : on a le couple (a_k, b_k)
 si $x_j < a_k < x_{j+1}$, on retient le couple (a_k, b_k) et $k = k-1$, aller en 4
 si $x_{j+1} = a_k$, situation déjà vue
 si $x_{j+1} < a_k$, impossible
- 4) Pour le couple retenu, si $a < b$, alors aller en 3, sinon toutes les courbes de niveau sont calculées, alors fin, sinon aller en 1.

9. GENERATEURS MULTIPLICATIFS NUMERIQUES

Nous utilisons l'algorithme donné au § 8.2 pour le calcul de la norme $T(a,b)$ avec a et b spécifiés. Nous partons d'une fonction h continue sur $[0,1]$, affine par morceaux, strictement décroissante, telle que $h(0)$ soit très grand et $h(1) = 1$.

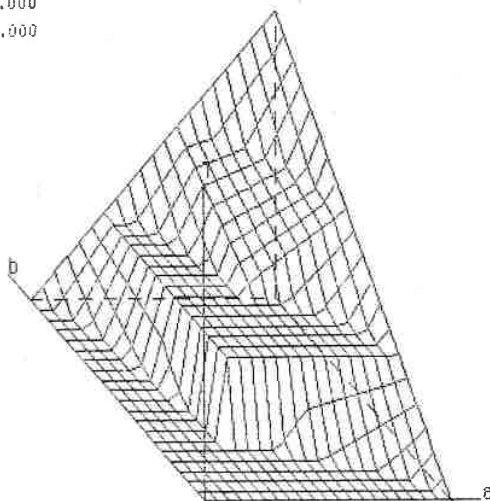
La norme $T(a,b)$ est calculée par la formule :

$$T(a,b) = h^{-1} [\bar{h}(a) \cdot h(b)].$$

Exemple :

Nous avons envisagé le cas de trois segments joignant les points $M_0(0;1000)$, $M_1(.3;10)$, $M_2(.6,3)$ et $M_3(1;1)$.

nombre de segments 3
0.300 10.000
0.600 3.000
1.000 1.000



Gene mult. numerique

CHAPITRE 3

NÉGATIONS

Nous rappelons les définitions et les propriétés des négations. Ces négations nous serviront à construire d'autres t-normes et t-conormes.

1. DIFFERENTES NEGATIONS

Une application $n : [0,1] \rightarrow [0,1]$ est une négation ssi

$$N1 : n(0) = 1, n(1) = 0$$

N2 : n est non croissant.

Une négation n est stricte ssi

N3 : n est continue

N4 : n est strictement décroissante.

Une négation stricte est une négation forte (ou négation involutive) [TRI-79] ssi

$$N5 : n(n(a)) = a \quad \forall a.$$

Exemple : $n(a) = 1-a$ est une négation forte.

2. t-NORMES ET t-CONORMES n-DUALES

Si T est une t -norme et n une négation forte,
 $S(a,b) = n [T(n(a),n(b))]$ est une t -conorme, et réciproquement,
 $T(a,b) = n [S(n(a),n(b))]$ est une t -norme.
 S et T sont dites n -duales l'une de l'autre, ce qui est la
généralisation des opérations duales (chapitre II, § 2).

3. GENERATEUR D'UNE NEGATION FORTE

A toute négation forte n , on peut associer une appli-
cation t de $[0,1]$ dans $[0,+\infty[$ continue et strictement crois-
sante, vérifiant $t(0) = 0$ et $t(1)$ fini, telle que :

$$n(a) = t^{-1} [t(1) - t(a)] .$$

Le générateur additif t de la négation forte est dé-
fini à une constante multiplicative près ; on prendra alors
en général $t(1) = 1$.

Pour une négation forte, il existe toujours un seuil
 $s \in]0,1[$ tel que $n(s) = s$; le seuil vaut :

$$s = t^{-1} \left[\frac{t(1)}{2} \right] .$$

De plus, si n est une négation forte, alors
 $n^*(a) = 1 - n(1-a)$ est aussi une négation forte, en général
distincte de n .

Exemple 1 :

A partir de $t(x) = \sqrt{x}$ avec $x \in [0,1]$, on vérifie que
 t est continue et strictement croissante sur $[0,1]$. De plus,
 $t(0) = 0$ et $t(1) = 1$, alors $n(a) = (1-\sqrt{a})^2$, le seuil vaut
 $s = \frac{1}{4}$. La négation forte n^* associée est $n^*(a) = 1 - (1-\sqrt{1-a})^2$
dont le seuil vaut $s = \frac{3}{4}$.

Exemple 2 :

A partir de $t(x) = \frac{2x}{x+1}$ avec $x \in [0,1]$, t est continue
et strictement croissante sur $[0,1]$. De plus, $t(0) = 0$ et
 $t(1) = 1$, alors $n(a) = \frac{1-a}{3a+1}$ est une négation forte dont le
seuil est $\frac{1}{3}$. La négation forte associée est $n^*(a) = \frac{4(1-a)}{4-3a}$
dont le seuil est $\frac{2}{3}$.

4. LIEN ENTRE NEGATIONS FORTES t-NORMES ET t-CONORMES

Les propriétés imposées à t montrent que t est à la
fois un générateur de négation forte et un générateur additif
d'une t -conorme nilpotente. De même, à partir d'un générateur
de négation forte, on peut obtenir un générateur additif d'une
 t -norme nilpotente par la formule :

$$f(x) = t(1) - t(x) .$$

Inversement, pour une t -norme nilpotente f , puisque $f(0)$ est
fini, on peut construire un générateur de négation forte par
la formule :

$$t(x) = f(0) - f(x) .$$

Ainsi, à partir d'un générateur t de négation forte, on peut former :

- la négation forte $n(a) = t^{-1}[\bar{t}(1)-t(a)]$;
- la t -norme $T(a,b) = f^{(-1)}[\bar{f}(a)+f(b)]$, avec $f(x) = t(1)-t(x)$

$$\text{posons } t^{(1)}(a) = \begin{cases} t^{-1}(a) & \text{si } a \in [\bar{0}, t(1)] \\ 1 & \text{si } a \in [\bar{t}(1), +\infty[; \end{cases}$$

- la t -conorme $S(a,b) = t^{(-1)}[\bar{t}(a)+t(b)]$
 $= \min[1, t^{-1}[\bar{t}(a)+t(b)]]$ si t prend ses valeurs sur $[\bar{0}, +\infty[$.

Si, à partir d'un même générateur t , on a formé n , T et S , alors :

$$\begin{cases} T[\bar{a}, n(a)] = 0 \\ S[\bar{a}, n(a)] = 1 \end{cases}$$

Réciproquement, pour toute t -norme (respectivement t -conorme) nilpotente, il existe une négation forte et une t -conorme (respectivement t -norme) nilpotente telles que les propriétés précédentes soient vérifiées.

Exemple : à partir de $t(a) = a$, on obtient :

$$n(a) = 1-a$$

$$T(a,b) = \max(0, a+b-1)$$

$$S(a,b) = \min(0, a+b)$$

CHAPITRE 4

OPÉRATEURS D'IMPLICATION FLOUS - SYLLOGISME

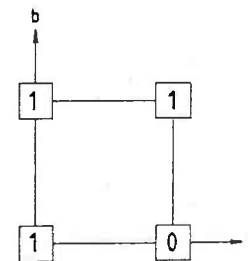
Dans une première partie, nous allons définir et discuter des opérateurs d'implication flous.

Dans une deuxième partie, on envisagera le syllogisme. La première prémisse du syllogisme se traduit par un opérateur d'implication.

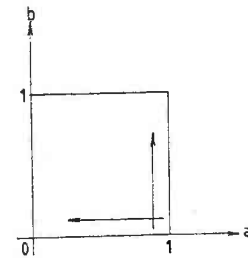
1. LES OPÉRATEURS D'IMPLICATION FLOUS

Un opérateur $\times$ de $[\bar{0}, 1] \times [\bar{0}, 1] \rightarrow [\bar{0}, 1]$ est un opérateur d'implication flou ssi :

$$\begin{aligned} 0 \times 0 &= 1 \\ 0 \times 1 &= 1 \\ 1 \times 0 &= 0 \\ 1 \times 1 &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$



$$\begin{aligned} \text{et } \forall a, a', b \text{ et } b' \in [\bar{0}, 1] \\ a < a' \Rightarrow a \times b \geq a' \times b \\ b < b' \Rightarrow a \times b \leq a \times b' \end{aligned} \quad (2)$$



Aux quatre sommets non flous, l'opérateur $\times$ doit donner des valeurs en accord avec la logique binaire.

L'opérateur $\times$ est :

- monotone non croissant par rapport à la première variable,
- monotone non décroissant par rapport à la deuxième variable.

Remarque :

On ne doit pas confondre le concept d'implication $\rightarrow$ avec celui de méta-implication $\Rightarrow$. On doit dire pour une implication $A \rightarrow B$: "A infère B", alors que pour une méta-implication $A \Rightarrow B$, on utilise "si A alors B".

Wéber [WEB-83] a proposé trois procédés de construction d'opérateurs d'implication flous :

type I $a \rightarrow b = \sup_T \{ z \mid T(a, z) \leq b \}$

type II $a \rightarrow b = n[\inf_S \{ y \mid S(b, y) \geq a \}]$

type III $a \xrightarrow{n} b = n[\bar{T}(a, n(T(a, b)))]$

En particulier, le type I correspond à l'opérateur de maximalisation τ que nous définissons page 91.

Ainsi, par deux approches très différentes :

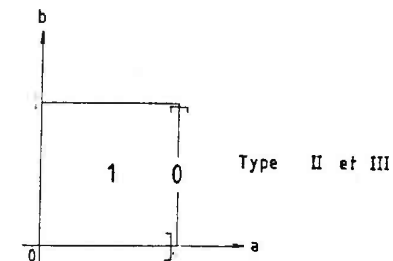
- opérateurs d'implication flous,
- résolution des équations de relations floues,

on aboutit au même opérateur τ .

On peut définir une infinité d'opérateurs d'implication flous. A titre d'exemples, citons-en quelques-uns très utilisés. Pour chacun d'eux, on envisage la définition, ainsi que les courbes de niveau.

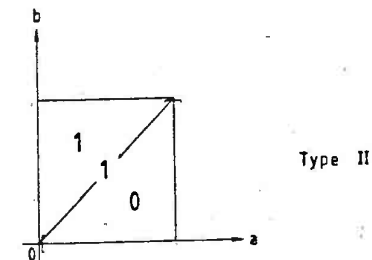
1. L'opérateur "standard sharp"

$$a \times_1 b = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 1 \text{ ou } b = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



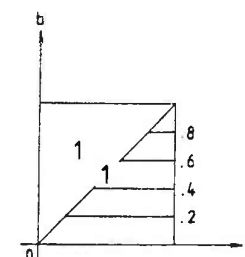
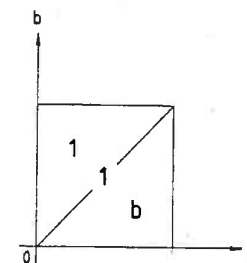
2. L'opérateur "standard strict"

$$a \times_2 b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



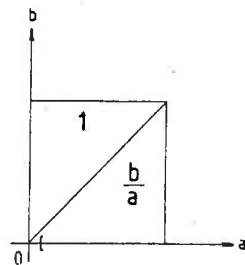
3. L'opérateur de Gödel (ou de Sanchez, noté aussi α)

$$a \times_3 b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

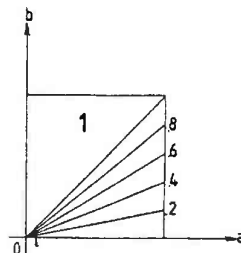


4. L'opérateur de Goguen

$$a \times_4 b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ \frac{b}{a} & \text{sinon} \end{cases}$$

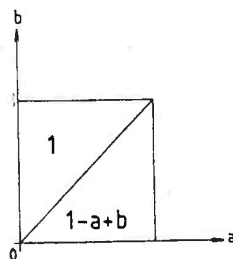


Type I

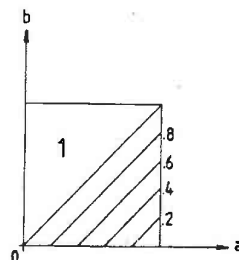


5. L'opérateur de Lukasiewicz

$$a \times_5 b = \min(1 - a + b, 1)$$

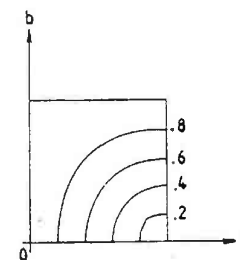
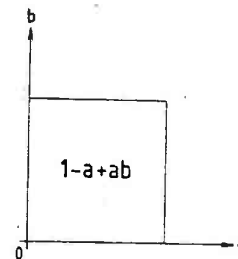


Type I et II



6. L'opérateur de Kleene-Dienes

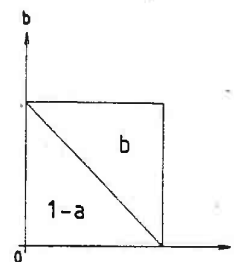
$$a \times_6 b = 1 - a + ab$$



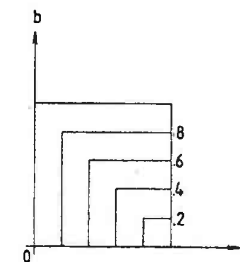
L'opérateur $\times_6$ n'est d'aucun des trois types de Wéber.

7. L'opérateur de Lee (ou de Kleene-Dienes)

$$a \times_7 b = \max(b, 1-a)$$



Type III



Seuls certains opérateurs vérifient les égalités :

$$\begin{cases} a \times 0 = \bar{a} \\ 1 \times b = b \end{cases} \quad (3)$$

Les opérateurs de Lukasiewicz ($\ast_5$), de Kleene-Dienes ($\ast_6$), de Lee ($\ast_7$) vérifient les égalités (3).

On peut aussi définir des opérateurs d'implication flous paramétrés [voir BAN_D-85 et KAU-85].

2. MODUS PONENS - MODUS TOLLENS

Suivant les conventions de la logique propositionnelle, nous utiliserons :

le chiffre 1 si la proposition est vraie,
le chiffre 0 si la proposition est fausse.

Considérons l'opérateur d'implication en logique binaire :

$a \rightarrow b$ est vrai ssi $a \leq b$

et sa table de vérité :

$v(a)$	$v(b)$	$v(a \rightarrow b)$
0	0	1
0	1	1
1	1	1
1	0	0

modus tollens

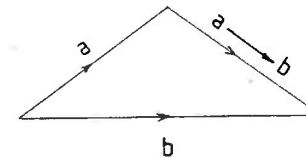
modus ponens

Tableau 1

De la table de vérité précédente, on tire les conséquences suivantes :

1) D'après la ligne 3 du tableau 1 :

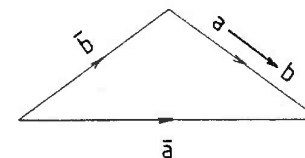
Si $a \rightarrow b$ est vrai et si a est vrai alors b est vrai ;
c'est la règle de détachement du modus ponens.



Dans un tableau hendécadaire à double entrée, avec a en abscisse et b en ordonnée, le modus ponens se traduit par la présence d'un "1" au sommet supérieur droit.

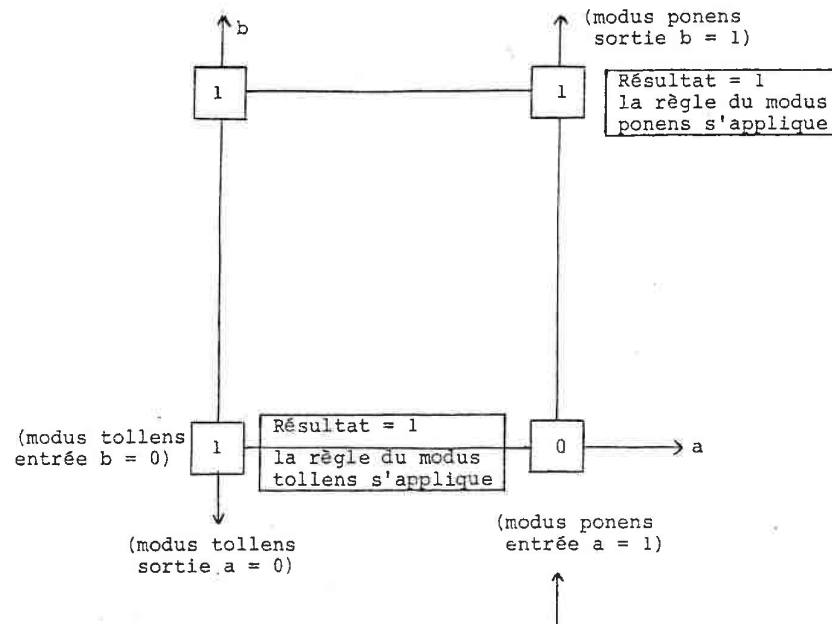
2) D'après la ligne 1 du tableau 1 :

Si $a \rightarrow b$ est vrai et si b est faux alors a est faux ;
c'est la règle de détachement du modus tollens.



Pour le même tableau hendécadaire, le modus tollens se traduit par la présence d'un "1" au sommet inférieur gauche.

A partir du schéma suivant, nous retrouvons facilement les deux modus.



3) La ligne 4 du tableau 1 ne présente pas d'intérêt car l'inférence fausse se traduit par : a toujours vrai et b toujours faux.

4) La ligne 2 du tableau 1 ne permet pas de conclusion.

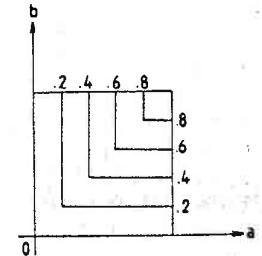
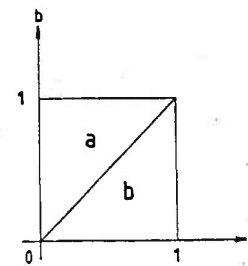
3. LES OPERATEURS DE PSEUDO-IMPLICATION FLOUS [KAU-85]

D'autres opérateurs peuvent être introduits. Ils correspondent à des applications de $[0,1] \times [0,1]$ dans $[0,1]$ qui ne satisfont pas à certaines des propriétés définies par (1) et (2). De tels opérateurs sont appelés des opérateurs de pseudo-implication flous.

L'opérateur de Zadeh (ou de Mandani) utilisé pour le produit de deux ensembles flous :

$$a \times_8 b = \min(a, b) = a \wedge b$$

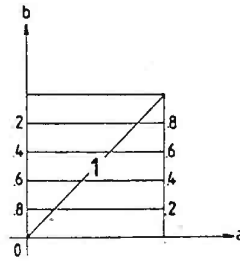
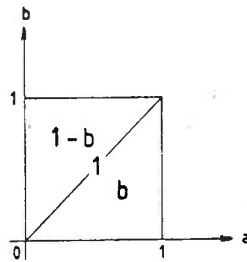
$\times_8$ ne vérifie ni la propriété (1), ni la propriété (2). Seul le modus ponens est satisfait.



L'opérateur de Mizumoto :

$$a \times_9 b = (a \times_3 b) \wedge (\bar{a} \times_3 \bar{b})$$

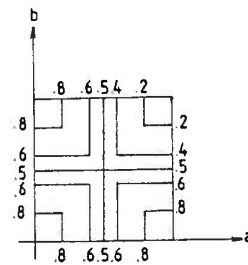
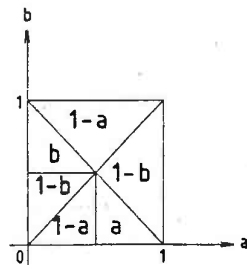
vérifie le modus ponens et le modus tollens, mais la propriété (2) n'est pas satisfaite.



Un autre opérateur, toujours proposé par Mizumoto :

$$a \times_{10} b = (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (a \vee \bar{a}) \wedge (b \vee \bar{b})$$

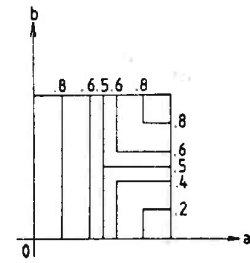
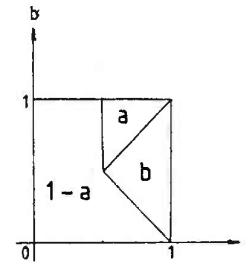
vérifie le modus tollens, mais la propriété (2) de monotonie n'est pas satisfaite.



L'opérateur d'inférence de Zadeh :

$$a \times_{11} b = \bar{a} \vee (a \wedge b) = \max[\bar{1-a}, \min(a,b)]$$

vérifie la propriété (1), mais ne satisfait pas la propriété (2) de monotonie. Cet opérateur vérifie aussi les égalités (3).



L'opérateur de Willmott :

$$a \times_{12} b = \min[\max(1-a,b), \max(a,1-b), \min(b,1-a)]$$

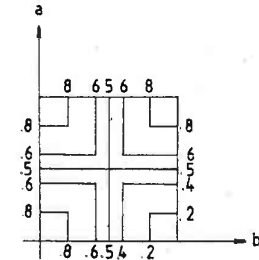
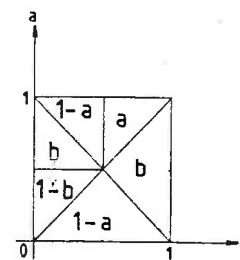
qui peut aussi s'écrire :

$$a \times_{12} b = \max[\min(a,b), \min(1-a,1-b), \min(1-a,b)]$$

ou encore :

$$a \times_{12} b = \min[\max(1-a,b), \max(a,1-a), \max(b,1-b)]$$

vérifie les relations (3).



4. LE SYLLOGISME

Nous travaillons dans le domaine flou avec les règles de détachement du modus ponens et du modus tollens sur des tableaux hendécadaires, et non plus comme en binaire uniquement aux quatre sommets de ces tableaux.

4.1. Syllogisme direct :

E_1 et E_2 représentent l'univers du discours :

$$F(E_1) = \{A : E_1 \rightarrow [0,1]\}$$

$$F(E_2) = \{B : E_2 \rightarrow [0,1]\},$$

et R une règle d'inférence caractérisée par un opérateur $\times$ (ou un pseudo-opérateur) d'implication flou. Posons alors $R(A,B) = A \times B$, soit pour les fonctions d'appartenance :

$$\mu_A \times_B (e_1, e_2) = \mu_A(e_1) \times \mu_B(e_2)$$

x, y, x' et y' sont des noms d'objet.

La règle de détachement du modus ponens est :

Antécédent 1	Si x est A alors y est B
Antécédent 2	x' est A
Conséquence	y' est B

La règle de détachement du modus tollens est :

Antécédent 1	Si x est A alors y est B
Antécédent 2	y' est $\bar{B}$
Conséquence	x' est $\bar{A}$

Les règles de détachement sont strictes en binaire ; elles sont moins franches, en général, dans le domaine flou.

Pour présenter notre travail, nous utiliserons l'exemple suivant.

Exemple 1 :

Considérons A et B hendécadaires et la règle d'inférence caractérisée par l'opérateur de Lukasiewicz :

$$a \times_5 b = \min(1, 1-a+b)$$

	b	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	R(A,B)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.9
.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.8
.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.7
.6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.6
.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.5
.4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.4
.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.3
.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.2
.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
	a	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1	1	1	1	

Tableau II

Pour le modus ponens, afin de généraliser les résultats de la logique binaire, il nous faut :

- choisir une entrée a,
- consulter le tableau,
- déduire un résultat b.

En flou, en général, pour un a donné, on déduit du tableau de composition $R(A,B)$ plusieurs valeurs de b différentes. Pour $a = 0.6$ et une inférence totale correspondant à $R(0.6,b) = 1$, on obtient $b = 0.6$ ou 0.7 ou 0.8 ou 0.9 ou 1 . Donc en flou, il nous faut imposer une règle supplémentaire afin que pour un a donné, ne lui corresponde qu'un b unique.

On envisage alors, pour un a donné, un seuil d'inférence p. On considère sur la colonne correspondante du tableau $R(A,B)$, la première valeur supérieure ou égale au seuil d'inférence p. Pour $a = 0.6$ et $p = 0.85$, on obtient $b = 0.5$.

On pourrait envisager de prendre sur une colonne donnée a la valeur b la plus grande, mais ce choix conduirait à prendre $b = 1$ pour toute valeur de a. Ce choix de règle est donc sans intérêt.

Si l'on envisage de prendre une valeur quelconque parmi les solutions possibles, il n'y a plus de règle objective.

Le seuil d'inférence a la signification suivante :

- pour $p = 1$, on dira que l'inférence est totale, la déduction est complète. Dans ce cas, on vérifie sur l'exemple que $b=a$;
- pour $0 < p < 1$, plus le seuil d'inférence est faible, plus les valeurs de b sont faibles ;

- pour $p = 0$, il n'y a plus d'inférence, la déduction est nulle. Dans ce cas, on vérifie sur l'exemple que pour toute valeur de a, alors $b=0$.

La règle d'inférence floue qui consiste à prendre, compte tenu du seuil d'inférence p, parmi les valeurs b possibles celle qui est la plus petite, est donc plus riche que la règle d'inférence binaire. On peut en effet modéliser le degré d'inférence par le biais du paramètre p.

Pour le modus tollens, nous appliquons le même procédé, en lisant en entrée non b et pour un seuil d'inférence p donné, on déduit non a.

4.2. Syllogisme indirect :

E_1 , E_2 et E_3 représentent l'univers du discours :

$$F(E_1) = \{A : E_1 \rightarrow [0,1]\}$$

$$F(E_2) = \{B : E_2 \rightarrow [0,1]\}$$

$$F(E_3) = \{C : E_3 \rightarrow [0,1]\}$$

et R une règle d'inférence caractérisée par un opérateur * (ou un pseudo-opérateur) d'implication flou.

Soit P_1 , P_2 et P_3 les propositions conditionnelles floues suivantes :

$$P_1 : \text{Si } x \text{ est } A \text{ alors } y \text{ est } B$$

$$P_2 : \text{Si } y \text{ est } B \text{ alors } z \text{ est } C$$

$$P_3 : \text{Si } x \text{ est } A \text{ alors } z \text{ est } C$$

Soit $R(A,B)$, $R(B,C)$ et $R(A,C)$ trois relations floues définies sur $E_1 \times E_2$, $E_2 \times E_3$ et $E_1 \times E_3$ qui sont obtenues respectivement à partir des propositions P_1 , P_2 et P_3 .

La règle de détachement du modus ponens est la suivante :

Antécédent 1 :	Si x est A alors y est B
Antécédent 2 :	Si y est B alors z est C
Antécédent 3 :	x' est A
Conséquence	z' est C

La règle de détachement du modus tollens est la suivante :

Antécédent 1 :	Si x est A alors y est B
Antécédent 2 :	Si y est B alors z est C
Antécédent 3 :	z' est $\bar{C}$
Conséquence	x' est $\bar{A}$

Ces deux règles de détachement correspondent au syllogisme indirect (passage composé de A à B, puis de B à C).

Le syllogisme indirect sera dit parfait si pour toute entrée avec la règle de détachement du modus ponens et du modus tollens, on a la propriété :

$$R(A,B) \circ R(B,C) = R(A,C) \quad (4)$$

où " $\circ$ " représente une composition de relations floues. Kaufmann [KAU-85] et Mizumoto [MIZ-82] envisagent la composition " $\circ$ " = MAX-MIN et concluent "On ne rencontre pas en flou des opérateurs ayant les trois propriétés (1), (2) et (4). Chaque opérateur possède un inconvénient".

Nous envisageons une composition " $\circ$ " plus générale. On définit au chapitre 5, un opérateur de maximalisation τ qui intervient dans la résolution des équations de relations floues (composition " $\circ$ " sup t-norm). Cet opérateur τ est également un opérateur d'implication.

Soient $E_1 = \{e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1m}\}$, $E_2 = \{e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2n}\}$ et $E_3 = \{e_{31}, e_{32}, \dots, e_{3p}\}$ trois ensembles finis non vides, et $F(E_1) = \{A : E_1 \rightarrow [0,1]\}$, $F(E_2) = \{B : E_2 \rightarrow [0,1]\}$ et $F(E_3) = \{C : E_3 \rightarrow [0,1]\}$ les ensembles flous sur E_1 , E_2 et E_3 respectivement.

On note $a_i = A(e_{1i})$, $b_j = B(e_{2j})$ et $c_k = C(e_{3k})$ pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq k \leq p$.

Théorème :

Soit T une t-norme archimédienne et τ l'opérateur de maximalisation associé ; les relations floues $R(A,B)$, $R(B,C)$ et $R(A,C)$ appartenant respectivement à $F(E_1 \times E_2)$, $F(E_2 \times E_3)$ et $F(E_1 \times E_3)$ et définies par :

$$\begin{aligned} R(A,B) &= {}^t_A \tau B \\ R(B,C) &= {}^t_B \tau C \\ R(A,C) &= {}^t_A \tau C \end{aligned}$$

vérifient l'inégalité :

$$R(A,B) \circ R(B,C) \leq R(A,C)$$

où " $\circ$ " désigne la composition sup-T.

De plus, si pour tout $i = 1, \dots, n$ et $\forall k = 1, \dots, p$, il existe un indice $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$a_i \leq b_{j_0} \leq c_k \text{ ou } c_k < b_{j_0} < a_i$$

alors : $R(A, B) \circ R(B, C) = R(A, C)$.

L'opérateur τ (ainsi que ses propriétés) n'étant défini qu'au chapitre 5, nous envisageons la démonstration de ce théorème en annexe 1.

Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous ne traitons que le cas particulier où A , B et C sont tous les trois hendécadaires.

Dans ce cas, le syllogisme indirect est parfait si l'on considère en (4) la composition " $\circ$ " = sup t-norme avec t-norme archimédienne, et comme opérateur d'implication l'opérateur concordant de maximalisation associé à la t-norme. En effet, il existe toujours un b_j tel que $a_i \leq b_j \leq c_j$ (ou $c_j < b_j < a_j$).

Par exemple, pour la règle d'inférence de Goguen :

$$a \times_4 b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ \frac{b}{a} & \text{si } a > b \end{cases}$$

la composition sup-produit, où la t-norme est $T(a, b) = ab$, conduit à un syllogisme indirect parfait.

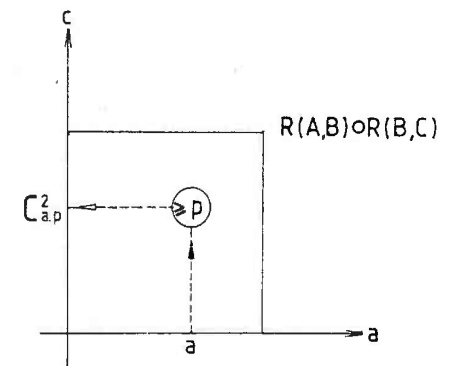
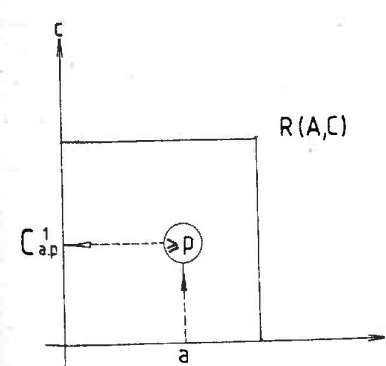
Par contre, pour l'opérateur de Gödel (ou de Sanchez) :

$$a \times_3 b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases}$$

qui est l'opérateur de maximalisation correspondant à MIN, la composition MAX-MIN ne conduit pas à un syllogisme indirect parfait (puisque la norme est non archimédienne et seulement continue).

Cependant, avec A , B et C hendécadaires, on peut aussi considérer un opérateur $\times$ (ou un pseudo-opérateur) d'implication flou et une règle de composition " $\circ$ " quelconque. Afin de tester dans ces conditions un opérateur $\times$ (ou un pseudo-opérateur) d'implication flou avec une règle de composition " $\circ$ " donnée, nous utilisons la notion de seuil d'inférence au § 4.1 et nous introduisons deux indicateurs.

Pour une règle d'inférence donnée avec le modus ponens, on envisage les onze valeurs d'entrée de a et l'on considère sur une colonne donnée de $R(A, C)$ et de $R(A, B) \circ R(B, C)$, la première valeur supérieure ou égale au seuil d'inférence p .



On calcule pour le modus ponens un premier indicateur, par exemple la somme des valeurs absolues des différences $c_{a,p}^1 - c_{a,p}^2$ divisée par les onze entrées considérées.

Pour le modus tollens, on envisage en entrée les 11 valeurs possibles de C et l'on considère sur une ligne donnée de $R(A,C)$ et de $R(A,B) \circ R(B,C)$ la première valeur supérieure ou égale au seuil d'inférence. On calcule pour le modus tollens un second indicateur en effectuant la somme des valeurs absolues des différences $a_{c,p}^1 - a_{c,p}^2$ divisée par les onze entrées envisagées. Si les deux indicateurs sont faibles, le syllogisme indirect est presque parfait et l'on peut estimer que la règle d'inférence et la composition envisagée sont bien adaptées.

Exemple 2 :

Règle de Lukasiewicz $\ast_5$ et composition " $\circ$ " = MAX-MIN.

On envisage $A = B = C$ pris tous les trois suivant les valeurs hendécadaires croissantes.

On utilise le tableau II précédent et le tableau III suivant pour $R(A,B) \circ R(B,C)$, avec " $\circ$ " = MAX-MIN.

	$R(A,B) \circ R(B,C)$										
c	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.9
.8	1	1	1	1	1	1	1	1	.9	(.9)	.8
.7	1	1	1	1	1	1	1	.9	(.9)	.8	.8
.6	1	1	1	1	1	1	.9	(.9)	.8	.8	.8
.5	1	1	1	1	1	.9	(.9)	.8	.8	.7	.7
.4	1	1	1	1	.9	(.9)	.8	.8	.7	.7	.7
.3	1	1	1	.9	(.9)	.8	.8	.7	.7	.6	.6
.2	1	1	.9	(.9)	.8	.8	.7	.7	.6	.6	.5
.1	1	.9	(.9)	.8	.8	.7	.7	.6	.6	.5	.5
0	(1)	(.9)	(.9)	.8	.8	.7	.7	.6	.6	.5	.5
	a										
	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1

Tableau III

Pour un seuil d'inférence p tel que $0.8 < p < 0.9$, les termes considérés pour une colonne donnée a sont encadrés dans les tableaux II et III :

- en trait plein, les termes correspondent à une différence non nulle pour $c_{a,p}^1 - c_{a,p}^2$;
- en pointillés, les termes correspondent à une différence nulle pour $c_{a,p}^1 - c_{a,p}^2$.

Pour le modus ponens, dans notre exemple, le premier indicateur i_1 vaut $\frac{0.9}{11} \approx 0.082$.

Nous présentons ensuite quelques exemples de calcul d'indicateur.

Exemple 3 :

$$A = B = C = \{0, .1, .2, \dots, 1\}$$

p seuil d'inférence.

i_1 indicateur correspondant au modus ponens avec la composition " $\circ$ " = MAX-MIN.

i_2 indicateur correspondant au modus tollens, avec la même composition.

Pour le pseudo-opérateur minimum x_8 , le modus tollens n'est pas vérifié et nous n'envisageons pas le calcul de l'indicateur i_2 pour l'opérateur x_8 .

A l'exception de la restriction relative à x_8 , nous avons constaté que $i_1 = i_2$.

		.9≤p<.1	.7≤p<.8	.5≤p<.6	.3≤p<.4	.1≤p<.2
Opérateurs	x ₁ = standard sharp	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	x ₂ = standard strict	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	x ₃ = Gödel (Sanchez)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	x ₄ = Gaines	0.027	0.091	0.109	0.073	0.009
	x ₅ = Lukasiewicz	0.082	0.164	0.136	0.055	0.009
	x ₆ = Kleene Dienes	0.073	0.127	0.155	0.055	0.009
	x ₇ = Lee ou Kleene Dienes	0.000	0.000	0.227	0.082	0.009
Pseudo- opérateurs	x ₉ = Mizumoto	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	x ₁₁ = Zadeh	0.000	0.000	0.227	0.082	0.009
	x ₁₂ = Willmott	0.000	0.000	0.227	0.082	0.009

Valeurs de i_1 (ou de i_2) pour différents opérateurs en fonction du seuil d'inférence p

Exemple 4 :

$$A = C = \{0, .1, .2, \dots, 1\}$$

$$B = \{1, .9, .8, \dots, 0\}$$

i_1 indicateur correspondant au modus ponens avec la composition " $\circ$ " = MAX-MIN.

	.9≤p<1	.7≤p<.8	.5≤p<.6	.3≤p<.4	.1≤p<.2	
Opérateurs	x ₁ = standard sharp	0.000	0.000	0.000	0.000	
	x ₂ = standard strict	0.036	0.036	0.036	0.036	
	x ₃ = Gödel (Sanchez)	0.027	0.027	0.027	0.018	0.000
	x ₄ = Gaines	0.027	0.091	0.109	0.073	0.000
	x ₅ = Lukasiewicz	0.082	0.164	0.136	0.055	0.009
	x ₆ = Kleene Dienes	0.073	0.127	0.155	0.055	0.009
	x ₇ = Lee ou Kleene Dienes	0.000	0.000	0.227	0.082	0.009
Pseudo- opérateurs	x ₈ = Minimum	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	x ₉ = Mizumoto	0.145	0.055	0.027	0.018	0.000
	x ₁₁ = Zadeh	0.000	0.000	0.227	0.082	0.009
	x ₁₂ = Willmott	0.000	0.000	0.227	0.082	0.009

Valeurs de i_1

Exemple 5 :

$$A = C = \{0, .1, .2, \dots, 1\}$$

$$B = \{1, .9, .8, \dots, 0\}$$

i_2 indicateur correspondant au modus tollens avec la composition " $\circ$ " = MAX-MIN.

	$.9 \leq p < 1$	$.7 \leq p < .8$	$.5 \leq p < .6$	$.3 \leq p < .4$	$.1 \leq p < .2$
Opérateurs	x_1 = standard sharp	0.000	0.000	0.000	0.000
	x_2 = standard strict	0.036	0.036	0.036	0.036
	x_3 = Gödel (Sanchez)	0.027	0.027	0.027	0.018
	x_4 = Gaines	0.027	0.091	0.109	0.073
	x_5 = Lukasiewicz	0.082	0.164	0.136	0.055
	x_6 = Kleene Dienes	0.073	0.127	0.155	0.055
	x_7 = Lee ou Kleene Dienes	0.000	0.000	0.227	0.082
Pseudo-Opérateurs	x_8 = Minimum	-	-	-	-
	x_9 = Mizumoto	0.009	0.018	0.027	0.018
	x_{11} = Zadeh	0.000	0.000	0.227	0.082
	x_{12} = Willmott	0.000	0.000	0.227	0.082

Valeurs de i_2

CHAPITRE 5

ÉQUATIONS DE RELATION. FLOUE

Comme on l'a vu au chapitre 1, les relations floues vont nous permettre de travailler sur des problèmes de reconnaissance de formes. On s'intéresse à la détermination de la relation de cause à effet avec la composition habituelle MAX-MIN. On sait que l'on a un ensemble de solutions qui forme un sup demi-treillis. On aura donc à déterminer la solution maximale, ainsi que les solutions minimales. On envisage soit une cause, d'où un problème uni-dimensionnel, soit un ensemble de causes, d'où un problème bi-dimensionnel.

Nous proposons une méthode originale pour déterminer un opérateur de maximalisation et les solutions minimales pour la composition plus générale SUP-T et un opérateur de minimalisation pour la composition INF-S.

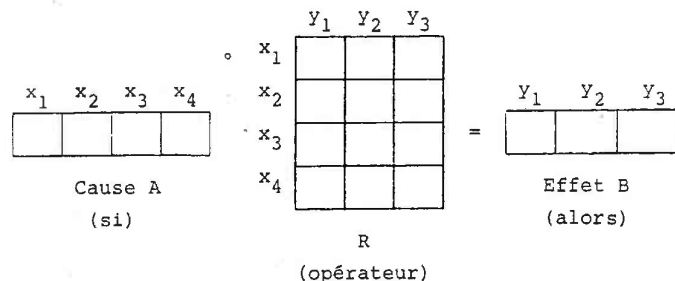
1. PROBLEME UNI-DIMENSIONNEL LIE A LA COMPOSITION MAX-MIN

Soit les ensembles finis non vides $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ avec $\text{card } X = |X| = n$ fini, et $\text{card } Y = |Y| = m$ fini, et $F(X) = \{A : X \rightarrow [0, 1]\}$ la classe de tous les ensembles flous sur l'intervalle réel unitaire $I = [0, 1]$.

Soit $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$ et R une relation floue appartenant à $F(X \times Y)$ telle que l'équation suivantesoit vérifiée :

$$B(y_j) = (R \circ A)(y_j) = \bigvee_{i=1}^n [R(x_i, y_j) \wedge A(x_i)] \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (1)$$

La relation floue $R \in F(X \times Y)$ est l'inconnue de l'équation MAX-MIN précédente (1). Il s'agit de trouver la relation R telle que "si A alors B par R ". La relation R est appelée relation de "causalité" ou de "méta-implication" qui permet d'obtenir B si l'on se donne A .



2. PROBLEME BI-DIMENSIONNEL LIE A LA COMPOSITION MAX-MIN

Soit les ensembles finis non vides $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ et $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ avec $|X| = n$, $|Y| = m$ et $|Z| = p$ finis, $A \in F(X \times Y)$, $R \in F(Y \times Z)$ et $B \in F(X \times Z)$ des relations floues liées par l'équation suivante :

$$B(x_i, z_k) = (R \circ A)(x_i, z_k) = \bigvee_{j=1}^m [A(x_i, y_j) \wedge R(y_j, z_k)] \quad (4)$$

$$\forall i = 1, \dots, n$$

$$\forall k = 1, \dots, p$$

La relation R est l'inconnue de l'équation précédente (4). Appelons $R = \{R \subset X \times Y \mid R \circ A = B\}$ l'ensemble des solutions de l'équation (4). Dinola et Sessa [DIN-84] font remarquer que l'équation (4) est équivalente au système de n équations floues uni-dimensionnel de la forme (1) :

$$R \circ A_i = B_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (5)$$

avec $A_i \in F(\{x_i\} \times Y)$ et $B_i \in F(\{x_i\} \times Z)$

Les fonctions d'appartenance étant données par :

$$A_i(x_i, y_j) = A(x_i, y_j) \quad \forall j = 1, \dots, m$$

$$B_i(x_i, z_k) = B(x_i, z_k) \quad \forall k = 1, \dots, p$$

Si l'on désigne par R_i l'ensemble de toutes les solutions de l'équation i de la forme (5), alors :

$$R = \bigcap_{i=1}^n R_i \quad (6)$$

3. EXISTENCE DES SOLUTIONS. SOLUTION MAXIMALE POUR LA COMPOSITION MAX-MIN

Pour résoudre l'équation $R \circ A = B$, nous sommes amenés à introduire différents opérateurs et différentes compositions.

3.1. Transposée d'une relation floue :

La transposée d'une relation floue $A \in F(X \times Y)$ est la relation floue notée ${}^tA \in F(Y \times X)$ telle que :

$$\begin{aligned} {}^tA(y_j, x_i) &= A(x_i, y_j) \\ \forall i &= 1, \dots, n \\ \forall j &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

3.2. L'opérateur de maximalisation α et l'opérateur de minimalisation σ :

Soit l'opérateur α de Sanchez (ou α_3 de Gödel) ou de maximalisation, ou encore de pseudo-complémentation :

$$[\bar{0}, 1] \times [\bar{0}, 1] \rightarrow [\bar{0}, 1]$$

$$a \alpha b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases}$$

(c'est le plus grand élément tel que $a \alpha \leq b$).

L'opérateur σ ou opérateur de minimalisation :

$$[\bar{0}, 1] \times [\bar{0}, 1] \rightarrow [\bar{0}, 1]$$

$$a \sigma b = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b \\ b & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

(l'opérateur σ n'est pas le dual de l'opérateur α).

3.3. La composition $\odot$:

La composition $\odot$ de $t_A \in F(Y \times X)$ et de $B \in F(X \times Z)$ est la relation floue notée $t_A \odot B = \overset{V}{R}$, avec $\overset{V}{R} \in F(Y \times Z)$, telle que :

$$\overset{V}{R}(y_j, z_k) = \bigwedge_{i=1}^n [t_A(y_j, x_i) \alpha B(x_i, z_k)] \quad (7)$$

$$\forall j = 1, \dots, m ; \forall k = 1, \dots, p$$

3.4. La composition $\oslash$:

La composition $\oslash$ de $t_A \in F(Y \times X)$ et de $B \in F(X \times Z)$ est la relation floue notée $t_A \oslash B \in F(Y \times X)$ telle que :

$$t_A \oslash B(y_j, z_k) = \bigvee_{i=1}^n [t_A(y_j, x_i) \sigma B(x_i, z_k)] \quad (8)$$

$$\forall j = 1, \dots, m ; \forall k = 1, \dots, p$$

3.5. Existence des solutions :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des solutions à l'équation $R \circ A = B$ est que $\overset{V}{R}$ soit solution de cette équation.

La condition suivante :

$$B(x_i, z_k) \leq \sup_y A(x_i, y) \quad \begin{matrix} \forall i = 1, \dots, n \\ \forall k = 1, \dots, p \end{matrix} \quad (9)$$

est une condition nécessaire d'existence des solutions.

3.6. Solution maximale :

R' est la solution maximale de R (avec $R \neq \emptyset$) si :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in X \times Y \quad R(x, y) &\leq R'(x, y) \\ \forall R \in R \end{aligned}$$

Sanchez montre que l'ensemble R des solutions de l'équation $R \circ A = B$, avec " $\circ$ " = MAX-MIN, possède la structure d'un sup demi-treillis avec pour solution maximale $\overset{V}{R} = t_A \odot B$.

Exemple 2 :

Considérons :

	x_1	x_2	x_3	x_4
$A =$	.2	.8	0	.4

	y_1	y_2	y_3
$B =$	.4	.8	.3

$$\text{alors : } \overset{V}{R} = t_A \odot B = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ .4 & 1 & .3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & .3 \end{bmatrix} \end{matrix} \in R$$

Remarque :

Les résultats similaires sont démontrés pour l'équation $R \circ A = B$ (A inconnue, B et R donnés). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des solutions à l'équation $R \circ A = B$ (avec A inconnue) est que $\overset{V}{A} = t(R \oslash t_B)$ soit solution de cette équation. Lorsque les solutions existent, $\overset{V}{A}$ est la plus grande solution.

4. LES SOLUTIONS MINIMALES POUR LA COMPOSITION MAX-MIN

4.1. Problème uni-dimensionnel :

Pour déterminer les solutions minimales, ainsi que leur nombre, introduisons la fonction ordinale.

4.1.1. Fonction ordinale :

Soit la fonction ordinale définie par :

$$\Gamma_j = \{x_i \in X | A(x_i) \geq B(y_j)\} \quad j = 1, \dots, m \quad (10)$$

Exemple 3 :

Considérons :

$$A = \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline .2 & .8 & 0 & .4 \end{array} \quad B = \begin{array}{c|c|c} y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline .4 & .8 & .3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{alors : } \Gamma_1 &= \Gamma\{y_1\} = \{x_2, x_4\} \\ \Gamma_2 &= \Gamma\{y_2\} = \{x_2\} \\ \Gamma_3 &= \Gamma\{y_3\} = \{x_2, x_4\} \end{aligned}$$

4.1.2. Éléments minimaux :

Un élément M est dit élément minimal de R si pour tout $R \in R$, $R \leq M$ alors $R = M$. Dinola [DIN-84] montre les propositions suivantes.

Proposition 1 :

Si $R \neq \emptyset$ alors $\Gamma_j \neq \emptyset \quad \forall j = 1, \dots, m$

(c'est la condition nécessaire (9)).

Proposition 2 :

Si $\Gamma_j \neq \emptyset \quad \forall j = 1, \dots, m$ alors :

$${}^t_A \odot B \quad \text{et} \quad {}^t_A \otimes B \in R.$$

Proposition :

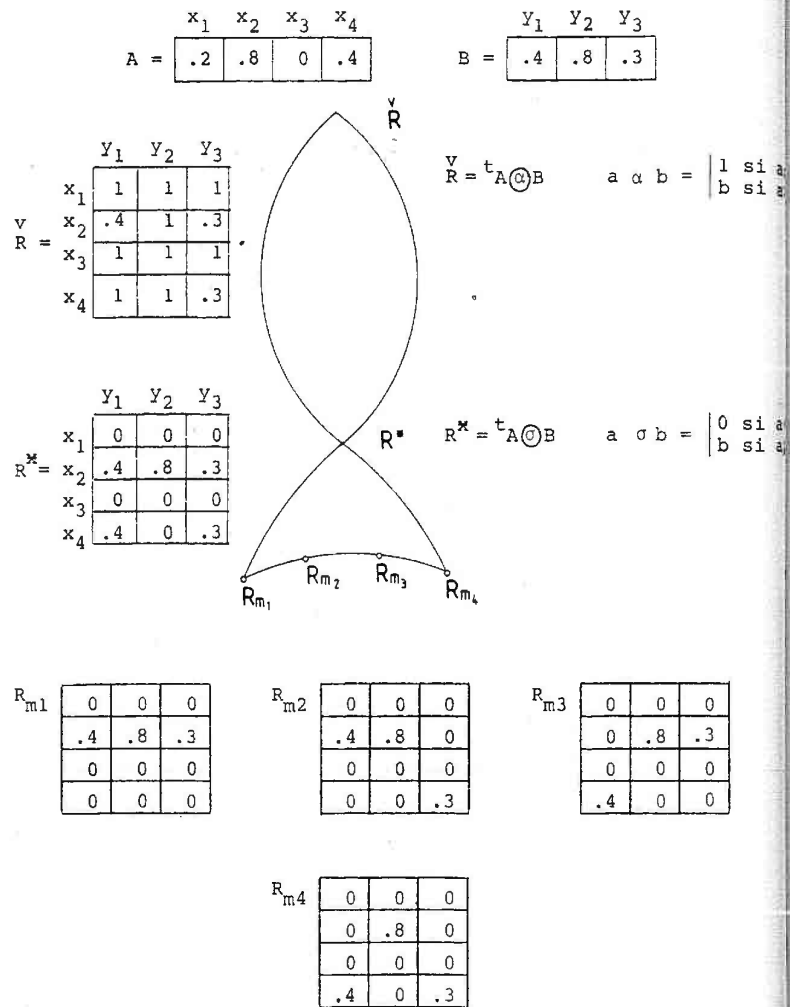
Si $R \neq \emptyset$, R possède des éléments minimaux. Pour déterminer ces éléments minimaux, il suffit de garder un élément et un seul non nul dans chaque colonne de ${}^t_A \odot B$. Les éléments minimaux sont au nombre de N^* :

$$N^* = \prod_{\mu_B(y) \neq 0} |\Gamma_j|$$

La réunion des N^* éléments minimaux redonne $R^* = {}^t_A \odot B$:

$${}_{i=1}^{N^*} M_i = R^* = {}^t_A \odot B \quad (11)$$

Exemple 4 :



Sanchez montre que toute relation floue comprise entre R^* et R est solution de l'équation (1).

Ainsi, pour l'exemple précédent :

$R_1 = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & .2 & .3 & .4 \\ x_2 & .4 & .8 & .3 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & .4 & 0 & .3 \end{array} \in R$
 $R_2 = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & .5 & .1 & .4 \\ x_2 & .4 & .8 & .3 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & .4 & 0 & .3 \end{array} \in R$

mais R_1 et R_2 ne sont pas comparables.

De même :

$R_3 = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & .4 & .8 & .3 \\ x_3 & .1 & 0 & 0 \\ x_4 & .3 & 0 & .3 \end{array} \in R$

mais R_3 n'est pas comparable à R^* .

Proposition 4 :

${}^t A \odot B$ est l'élément minimum de R

$\text{ssi } \begin{cases} \text{ou } B(y_j) = 0 \\ \text{ou } r_j = 1 \end{cases} \quad \forall j = 1, \dots, m$

Exemple 5 :

Les relations $A \in F(X)$ et $B \in F(Y)$ sont données par :

	x_1	x_2	x_3	x_4		y_1	y_2	y_3
$A =$	.9	.3	.2	.4	$B =$	.5	0	.8

$$\Gamma_1 = \Gamma\{y_1\} = \{x_1\}$$

$$B(y_2) = 0$$

$$\Gamma_2 = \Gamma\{y_2\} = \{x_1\}$$

$${}^v_R = t_{A \otimes B} = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & .5 & 0 & .8 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad R^* = t_{A \odot B} = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & .5 & 0 & .8 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Si $B(y_j) = 0$ ou $\Gamma_j = 1 \quad \forall j = 1, \dots, m$, alors la structure de R est celle d'un treillis :

$$\begin{array}{c} t_{A \otimes B} = {}^v_R \\ \text{---} \\ t_{A \odot B} = R^* \end{array}$$

Remarque : Sessa [SES-84] donne deux théorèmes sur la résolution des équations MAX-MIN.

Théorème 1 :

$$t_{A \otimes B} = t_{A \odot B} \text{ ssi ou bien}$$

$$\text{I) } B(y_j) < 1 \quad \forall j = 1, \dots, m \text{ alors } A(x_i) > B(y_j) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m$$

ou

$$\text{II) il existe au moins un indice } j^*, j^* = 1, \dots, m \text{ tel que } B(y_{j^*}) = 1 \text{ alors } A(x_i) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Exemple 6 :

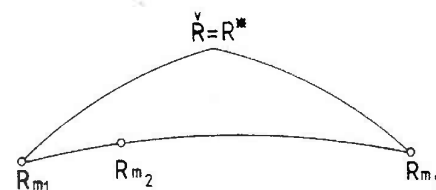
Les relations $A \in F(X)$ et $B \in F(Y)$ sont données par :

	x_1	x_2	x_3		y_1	y_2
$A =$	.9	.8	1	$B =$	.6	.4

La condition I) est satisfaite et :

$$t_{A \otimes B} = t_{A \odot B} = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & .6 & .4 \\ x_2 & .6 & .4 \\ x_3 & .6 & .4 \end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $R \circ A = B$ possède 9 éléments minimaux. La structure de R est la suivante :



Exemple 7 :

Les relations $A \in F(X)$ et $B \in F(Y)$ sont données par :

$$A = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad B = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline & .7 & 1 \end{array}$$

La condition II) est satisfaite et :

$${}^t A \odot B = {}^t A \otimes B = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & .7 & 1 \\ x_2 & .7 & 1 \\ x_3 & .7 & 1 \end{array}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $R \circ A = B$ possède 9 éléments minimaux. La structure de R est la même qu'à l'exemple 6. Remarquons que dans les exemples 6 et 7 :

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = X$$

Théorème 2 :

$$|R| = 1 \text{ ssi et } \begin{array}{l} A(x_i) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ B(y_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \end{array}$$

De plus, la matrice nulle, c'est-à-dire la matrice $R(x_i, y_j) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m$, est l'unique élément de R .

Remarque :

Dinola et Pedrycz [DIN-82a] et Dinola et Sessa [DIN-83b] déterminent les éléments de R ayant la plus petite mesure floue.

4.2. Problème bi-dimensionnel :

Le problème bi-dimensionnel attaché à la composition MAX-MIN, suit la même démarche que le problème uni-dimensionnel [DIN-84] et [SES-84].

Considérons l'exemple suivant [SES-84].

Exemple 8 :

Trouver la solution maximale et les éléments minimaux de l'ensemble R des solutions de $R \circ A = B$, où " $\circ$ " désigne la composition MAX-MIN avec R pour inconnue et :

$$A = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & .1 & 0 & .5 \\ x_2 & .2 & .7 & .3 \\ x_3 & .4 & .9 & 1 \end{array} \quad B = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline x_1 & .5 & .1 & .5 \\ x_2 & .6 & .5 & .6 \\ x_3 & .6 & .5 & .9 \end{array}$$

Déterminons la solution maximale $\overset{v}{R} = {}^t A \otimes B$:

$$\overset{v}{R} = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline y_1 & 1 & 1 & 1 \\ y_2 & .6 & .5 & .6 \\ y_3 & .6 & .1 & .9 \end{array}$$

On vérifie que $\overset{v}{R} \circ A = B$, donc $R \neq \emptyset$, et $\overset{v}{R}$ est bien la solution maximale.

A_i et B_i désignant la $i^{\text{ème}}$ ligne $i = 1, \dots, n$ des relations respectives A et B , construisons :

$$w_i = {}^t A_i \odot B_i \quad i = 1, \dots, n$$

Dans cet exemple :

$$W_1 = {}^t A_1 \odot B_1 = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0 & .1 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & 0 \\ y_3 & .5 & .1 & .5 \end{matrix}$$

$$W_2 = {}^t A_2 \odot B_2 = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & .6 & .5 & .6 \\ y_3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$W_3 = {}^t A_3 \odot B_3 = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & .6 & .5 & .9 \\ y_3 & .6 & .5 & .9 \end{matrix}$$

Proposition 1 :

La relation $R^* = (\bigvee_{i=1}^n W_i) \wedge^v R$, appartient à R avec

$$W_i = {}^t A_i \odot B_i \quad i = 1, \dots, n$$

et $R \wedge R^*$ appartient à $R \forall R \in R$:

$$R^* = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0 & .1 & 0 \\ y_2 & .6 & .5 & .6 \\ y_3 & .6 & .1 & .9 \end{matrix}$$

Soit R_i l'ensemble de toutes les solutions de l'équation :

$$R \circ A_i = B_i \quad \text{avec } i = 1, \dots, n$$

Proposition 2 :

Si $R_i \neq \emptyset$, alors il existe au moins une solution minimale $M_i \leq R$ pour tout $R \in R_i$.

Proposition 3 :

Si $R \neq \emptyset$, l'ensemble $\Lambda_i = \{M_i \in R_i \mid M_i \leq^v R\}$ est non vide pour tout $i = 1, \dots, n$.

A partir de W_1 , gardons un élément et un seul non nul dans chaque colonne de W_1 (cf. page 74). On obtient :

$$M_1^{(I)} = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0 & .1 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & 0 \\ y_3 & .5 & 0 & .5 \end{matrix}$$

$$M_1^{(II)} = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & 0 \\ y_3 & .5 & .1 & .5 \end{matrix}$$

L'ensemble Λ_1 contient les deux matrices $M_1^{(I)}$ et $M_1^{(II)}$:

$$\Lambda_1 = \{M_1^{(I)}, M_1^{(II)}\}$$

A partir de W_2 , on obtient :

$$M_2 = \begin{matrix} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & .6 & .5 & .6 \\ y_3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

L'ensemble Λ_2 contient la seule matrice M_2 :

$$\Lambda_2 = \{M_2\}.$$

A partir de W_3 , on obtient huit matrices :

$$M_3^{(I)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .6 & .5 & (.8) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M_3^{(II)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .6 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & .9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M_3^{(III)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .6 & 0 & (.8) \\ 0 & (.5) & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M_3^{(IV)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .6 & 0 & 0 \\ 0 & (.8) & .9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M_3^{(V)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & (.8) \\ .6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M_3^{(VI)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ .6 & 0 & .9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M_3^{(VII)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (.8) \\ .6 & (.8) & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M_3^{(VIII)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ .6 & (.8) & .9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

L'ensemble Λ_3 ne contient que deux matrices car on doit éliminer les matrices M qui contiennent des éléments supérieurs aux éléments correspondants de $\bar{R}$:

$$\Lambda_3 = \{M_3^{(II)}, M_3^{(VI)}\}.$$

Proposition 4 :

Si $R \neq \emptyset$, l'ensemble :

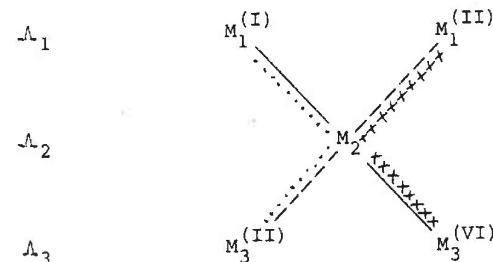
$$\Lambda = \{M \in F(X \times Y) \mid M = \bigvee_{i=1}^n M_i, M_i \in \Lambda_i\}$$

est un sous-ensemble fini de R .

Les éléments minimaux de Λ sont les éléments minimaux de R , et réciproquement.

Proposition 5 :

Si $R \neq \emptyset$ pour tout $R \in R$, alors il existe au moins un élément $M \in \Lambda$ tel que $M \leq R$:



Dans cet exemple, Λ est formé des relations floues suivantes :

$$M = M_1^{(I)} \vee M_2 \vee M_3^{(II)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & .1 & 0 \\ .6 & .5 & .6 \\ .5 & 0 & .9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$N = M_1^{(I)} \vee M_2 \vee M_3^{(VI)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & .1 & 0 \\ .6 & .5 & .6 \\ .6 & 0 & .9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$P = M_1^{(II)} \vee M_2 \vee M_3^{(II)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .6 & .5 & .6 \\ .5 & .1 & .9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q = M_1^{(II)} \vee M_2 \vee M_3^{(VI)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .6 & .5 & .6 \\ .6 & .1 & .9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ainsi, dans le cas où T est la norme triangulaire MIN, c'est-à-dire dans le cas où $\circ$ désigne la composition MAX-MIN, on sait que l'opérateur α de Sanchez permet de définir la solution de (12) par :

$$R = {}^t_A \circ B$$

α est l'opérateur de maximalisation associé à la composition " $\circ$ " = MAX-MIN.

Pedrycz donne les propriétés de l'opérateur de maximalisation [PED-83c] associé à la composition sup t-norme triangulaire, et détermine l'opérateur de maximalisation [PED-83a] dans le cas de la norme de Yager, c'est-à-dire :

$$T(a,b) = 1 - \min [1, ((1-a)P + (1-b)P)^{1/P}] \quad , \quad p \geq 1$$

On se propose, après avoir rappelé les conditions suffisantes que doit vérifier l'opérateur de maximalisation, de généraliser ce résultat et de définir un opérateur de maximalisation noté τ , associé à la composition sup-T où T est une norme triangulaire quelconque.

5.2. Conditions suffisantes permettant de définir un opérateur de maximalisation :

Soit $\tau : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ un opérateur.

On veut déterminer les conditions suffisantes pour que

$${}^t_A \tau B = R$$

c'est-à-dire pour que :

$$\forall R \in R, \forall (x,y) \in X \times Y \quad R(x,y) \leq \bigvee R(x,y) = {}^t_A(x) \tau B(y)$$

$$({}^t_A) \tau (R \circ A)(x,y) = ({}^t_A)(x) \tau (R \circ A)(y)$$

$$= {}^t_A(x) \tau \sup_{z \in X} [T(R(z,y), A(z))]$$

donc, si l'opérateur τ vérifie la condition :

$$a \tau b \geq a \tau c \quad \text{si } b \geq c \quad (13)$$

alors, puisque pour tout $x \in X$:

$$\sup_{z \in X} [T(R(z,y), A(z))] \geq T(R(x,y), A(x))$$

$${}^t_A(x) \tau \sup_{z \in X} [T(R(z,y), A(z))] \geq {}^t_A(x) \tau T(R(x,y), A(x))$$

De plus, pour que :

$${}^t_A(x) \tau T(R(x,y), A(x)) \geq R(x,y),$$

il suffit que l'opérateur τ vérifie la condition :

$$a \tau T(a,b) \geq b \quad (14)$$

car ${}^t_A(x) = A(x)$.

On obtient ainsi :

$$({}^tA) \circ ({}^tB) (R \circ A) (x, y) = ({}^tA \circ ({}^tB) (x, y) \geq R(x, y)$$

donc, pour que ${}^tA \circ ({}^tB)$ définisse une relation $\overset{V}{R}$ telle que, quel que soit $R \in R$, $R \leq \overset{V}{R}$, il suffit que τ vérifie les conditions (13) et (14).

Il reste à préciser à quelle condition $\overset{V}{R}$ appartient à R .

Soit $R \in R$, R étant supposé non vide, puisque :

$$\forall (x, y) \in X \times Y \quad R(x, y) \leq \overset{V}{R}(x, y)$$

$$T(R(x, y), A(x)) \leq T(\overset{V}{R}(x, y), A(x))$$

$$\text{donc, } \sup_{x \in X} [T(R(x, y), A(x))] \leq \sup_{x \in X} [T(\overset{V}{R}(x, y), A(x))]$$

c'est-à-dire :

$$B(y) \leq \sup_{x \in X} [T(\overset{V}{R}(x, y), A(x))]$$

Pour que $\overset{V}{R}$ appartienne à R , il suffit que :

$$T(a \tau b, a) \leq b \quad (15)$$

car alors :

$$T(\overset{V}{R}(x, y), A(x)) = T[{}^tA(x) \tau B(y), A(x)] \leq B(y)$$

puisque ${}^tA(x) = A(x)$, et donc :

$$\sup_{x \in X} [T(\overset{V}{R}(x, y), A(x))] = (\overset{V}{R} \circ A)(y) \leq B(y)$$

Finalement, $B(y) \leq (\overset{V}{R} \circ A)(y) \leq B(y)$, donc $\overset{V}{R} \in R$ et l'on a ainsi établi la proposition suivante :

Proposition 1 :

Si τ est un opérateur de $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et si $R \neq \emptyset$, alors pour que ${}^tA \circ ({}^tB)$ définisse l'élément maximal $\overset{V}{R}$ de R , il suffit que τ vérifie les trois conditions suivantes :

$$a \tau b \geq a \tau c \text{ si } b \geq c \quad (13)$$

$$a \tau T(a, b) \geq b \quad (14)$$

$$T(a \tau b, a) \leq b \quad (15)$$

Un opérateur τ vérifiant les conditions (13), (14) et (15) est appelé opérateur de maximalisation associé à T pour l'équation (12).

5.3. Détermination de l'opérateur de maximalisation associé à une norme triangulaire :

5.3.1. Normes continues :

Proposition 2 :

Si T est une norme triangulaire vérifiant la condition supplémentaire suivante :

$\forall a \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto T(a, x)$ est continue sur $[0, 1]$,

alors l'opérateur τ défini par :

$$a \tau b = \{\sup x | T(a, x) \leq b\}$$

est un opérateur de maximalisation pour l'équation (12).

Remarque :

τ est un opérateur d'implication flou du type I de Weber.

Montrons que $a \tau b = \sup\{x | T(a, x) \leq b\}$ vérifie (13), (14) et (15) :

$a \tau b$ vérifie (13) : trivial

$a \tau T(a, b) = \sup\{x | T(a, x) \leq T(a, b)\}$

donc $x = b$ et (14) est vérifiée

$T(a \tau b, a) = T[\sup\{x | T(a, x) \leq b\}, a]$

si $a \leq b$, alors $x=1$ et $T(a, 1) = a \leq b$; (15) est vérifiée

si $a > b$, alors $x=b$ et $T[\sup\{x | T(a, x) \leq b\}, a] \leq T(b, a) \leq b$

donc (15) est vérifiée.

5.3.2. Normes archimédiennes :

a) Condition pour que (15) soit vérifiée :

On a : $T(a \tau b, a) \leq b$

donc, si $a \leq b$, l'inégalité (15) est vérifiée quel que soit l'opérateur τ .

On peut donc supposer $a > b$. L'inégalité (15) s'écrit aussi :

$$f^{(-1)}[\bar{f}(a \tau b) + f(a)] \leq b \quad (15')$$

Si $f^{(-1)}[\bar{f}(a \tau b) + f(a)] = 0$ (dans le cas où T n'est pas stricte et où $f(a \tau b) + f(a) \geq 1$), alors (15') est vérifiée.

Sinon, on a $f^{(-1)} = f^{-1}$ et puisque f^{-1} est décroissante, (15') peut aussi s'écrire :

$$f(a \tau b) + f(a) \geq f(b)$$

c'est-à-dire :

$$f(a \tau b) \geq f(b) - f(a)$$

et puisque :

$$f(b) - f(a) \geq 0$$

$$a \tau b \leq f^{-1}(f(b) - f(a))$$

En conclusion, pour que :

$$T(a \tau b, a) \leq b \quad (15)$$

il suffit que :

$$a > b \Rightarrow a \tau b \leq f^{-1}[\bar{f}(b) - f(a)] \quad (16)$$

b) Condition pour que :

$$T(a \tau b, a) \leq b \quad (15)$$

$$a \tau T(a, b) \geq b \quad (14)$$

soient vérifiées simultanément.

On suppose la condition (16) vérifiée, alors (15) l'est également.

Pour $a = 1$, la relation (16) donne, pour $b < 1$:

$$1 \tau b \leq f^{-1}(f(b)) = b,$$

tandis que (14) donne :

$$1 \tau T(1, b) = 1 \tau b \geq b$$

Les relations (14) et (16) ne sont donc compatibles que si l'on a, pour $b < 1$, $1 \tau b = f^{-1}(f(b) - f(1))$.

Plus généralement, posons pour $a > b$:

$$a \tau b = f^{-1}(f(b) - f(a))$$

et vérifions qu'alors la condition (14) est satisfaite :

$$T(a, b) \leq b$$

$$\begin{aligned} \text{et } a \tau T(a, b) &= f^{-1}[f(T(a, b)) - f(a)] \\ &= f^{-1}[f(f^{-1}(f(b) - f(a))) - f(a)] \end{aligned}$$

Si T n'est pas stricte et si $f(a) + f(b) > 1$, alors :

$$f^{(-1)}(f(a) + f(b)) = 0$$

$$\text{et } a \tau T(a, b) = f^{-1}[f(0) - f(a)] = f^{-1}[1 - f(a)] \geq b$$

$$\text{car } f(b) > 1 - f(a) \Rightarrow b < f^{-1}[1 - f(a)]$$

donc (14) est vérifiée.

Si $f(a) + f(b) \leq 1$, ou si T est stricte, $f^{(-1)} = f^{-1}$

et :

$$a \tau T(a, b) = f^{-1}(f(b)) = b$$

donc (14) est vérifiée.

En conclusion, si on pose :

$$a \tau b = f^{-1}(f(b) - f(a)) \text{ pour } a > b \quad (17)$$

les relations (14) et (15) sont vérifiées.

c) Recherche de $\tau : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ pour que :

$$T(a \tau b, a) \leq b \quad (15)$$

$$a \tau T(a, b) \geq b \quad (14)$$

$$b > c \Rightarrow a \tau b \geq a \tau c \quad (13)$$

soient vérifiées simultanément.

On suppose la relation (17) vérifiée, alors (15) et (14) sont vérifiées et, d'après (17), $a \tau a = f^{-1}(0) = 1$.

Pour que (13) soit vérifiée, il faut en particulier que :

$$a \leq b \Rightarrow a \tau b \geq a \tau a = 1$$

On est donc amené à compléter la définition en posant :

$$a \tau b = 1 \text{ si } a \leq b$$

Il est immédiat de vérifier qu'alors, la condition (13) est satisfaite car :

$$\text{si } c \leq b \leq a, f(c) - f(a) \geq f(b) - f(a)$$

$$\text{et } f^{-1}(f(c) - f(a)) \leq f^{-1}(f(b) - f(a))$$

$$\text{c'est-à-dire } a \tau c \leq a \tau b$$

$$\text{si } c \leq a \leq b, a \tau c = 1 = a \tau b$$

$$\text{si } a \leq c \leq b, a \tau c = 1 = a \tau b.$$

Remarque 1 :

On a posé, pour $a = b$,
 $a \tau b = f^{-1}(f(b) - f(a)) = f^{-1}(0) = 1$. En particulier, si T est archimédienne non stricte, $0 \tau 0 = f^{-1}(f(0) - f(0)) = 1$; mais si T est une t-norme archimédienne stricte, $f(0)$ n'est pas défini.

On convient de poser encore dans ce cas, $0 \tau 0 = 1$, et par conséquent :

$$\forall a \in [0,1], a \tau a = 1$$

En tenant compte des résultats des paragraphes 2 et 3, on a donc établi le résultat suivant.

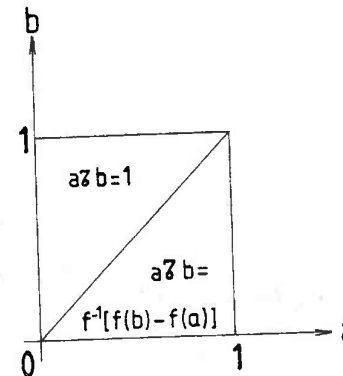
Proposition 3 :

Soit T une norme triangulaire archimédienne de fonction génératrice f .

L'opérateur $\tau : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ défini par :

$$a \tau b = \begin{cases} f^{-1}(f(b) - f(a)) & \text{si } a > b \\ 1 & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

est un opérateur de maximalisation associé à T (au sens donné par la définition du paragraphe 1).



Exemple 9 :

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} .2 & .4 & .6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} .4 & .6 \end{bmatrix}.$$

Considérons la norme produit $T(x,y) = xy$; alors
 $f(x) = -\ln x$ et $f^{-1}(x) = e^{-x}$:

$$a \tau b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ \frac{b}{a} & \text{si } a > b \end{cases}$$

R n'est pas vide car $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R$

et : ${}^t A \circ B = \begin{bmatrix} .2 \\ .4 \\ .6 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} .4 & .6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix}$

On vérifie que R^v appartient à R.

Remarque 2 :

En procédant comme pour les générateurs additifs numériques, on peut envisager des opérateurs numériques de maximalisation.

5.4. Opérateurs de maximalisation associés à certaines t-normes non archimédiennes :

Si une norme triangulaire T est continue mais non archimédienne, ou si elle est discontinue, il est possible, dans certains cas, en utilisant les relations (13), (14) et (15), de construire un opérateur de maximalisation associé à cette t-norme.

Ainsi, $T(a,b) = \min(a,b)$ est une t-norme continue, mais non archimédienne, n'admettant pas de générateur additif mais qui admet, ainsi qu'il a été vu au § 5.1 de ce chapitre, l'opérateur de Sanchez comme opérateur de maximalisation.

On a obtenu de cette manière les résultats qui sont résumés dans le tableau ci-après.

Remarque 3 :

Soit R une solution de R. $A = B$ dans le cas où " $\circ$ " = $\sup-T_4$.

Alors, l'opérateur $v : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ défini par :

$$a \vee b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a = 1 \\ \alpha & \text{où } \alpha \in [0,1] \text{ si } a > b \end{cases}$$

permet d'obtenir une solution majorant R : pour cela, si on pose $R_\alpha = {}^t A \circ B$ et si $R_\alpha(a_i, b_j) = \alpha$, il suffit de choisir $\alpha > R(a_i, b_j)$.

Mais l'ensemble R des solutions n'admet pas d'élément maximal.

Exemple 10 :

Si $A = \begin{bmatrix} .2 & .5 & .8 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} .8 & 0 \end{bmatrix}$,

alors $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .3 & .8 \\ 1 & .5 \end{bmatrix}$ est solution de R. $A = B$, avec " $\circ$ " = $\sup-T_4$.

Quel que soit $\alpha \in [0,1]$, $R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ est également solution.

Il suffit de choisir $\alpha > .8$ pour que $R_\alpha > R$.

Mais R^v n'existe pas car $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ n'appartient pas à R.

TABLEAU DES RESULTATS

NORMES TRIANGULAIRES T	PROPRIETES DE T	GENERATEUR ADDITIF f	$f^{-1}(x)$	$a \tau b$ (pour $a > b$)
$T_1(a,b) = \min(a,b)$	Continue	-	-	$\begin{matrix} b \\ \text{(opérateur de Sanchez)} \end{matrix}$
$T_2(a,b) = ab$	Archiméd. stricte	$-\ln x$	e^{-x}	$\frac{b}{a}$
$T_3(a,b) = \max(0, a+b-1)$	Archiméd. non stricte	$1-x$	$1-x$	$1+b-a$
$T_4(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b=1 \\ b & \text{si } a=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	Discontinue	-	-	N'existe pas (cf. remarque 2)
$T_5(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a+b-1 \leq 0 \\ \min(a,b) & \text{si } a+b-1 > 0 \end{cases}$	Discontinue	-	-	b si $1-a \leq b < a$ $1-a$ si $b < \min(a, 1-a)$
$T_6(a,b) = Y_p(a,b) = 1 - \min \left[1, ((1-a)^p + (1-b)^p)^{\frac{1}{p}} \right]$ (Yager) $p \geq 0, Y_0 = T_4$ [YAG-80]	Archiméd. non stricte	$(1-x)^p$	$\frac{1}{1-x^p}$	$1 - \left[(1-b)^p + (1-a)^p \right]^{\frac{1}{p}}$
$T_7(a,b) = H_\gamma(a,b) = \frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)}$ (Hamacher) $\gamma \geq 0, H_1 = T_2, H_\infty = T_4$ [HAM-75]	Archiméd. stricte	$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\gamma + (1-\gamma)x}{x}$	$\frac{\gamma}{e^{\gamma x + \gamma - 1}}$	$1 + \frac{b-a}{a-b(1-a)(1-\gamma)}$
$T_8(a,b) = D_\lambda(a,b) = \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{a} - 1 \right]^\lambda + \left[\frac{1}{b} - 1 \right]^\lambda} \frac{1}{\lambda}$ (Dombi) $\lambda > 0, D_1 = H_\infty, D_\infty = T_1$ [DOM-83]	Archiméd. stricte	$\left(\frac{1}{x} - 1 \right)^\lambda$	$\frac{1}{1+\lambda} \frac{1}{x}$	$\frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{b} - 1 \right)^\lambda + \left(\frac{1}{a} - 1 \right)^\lambda \right] \frac{1}{\lambda}}$

$T_9(a,b) = S_\lambda(a,b) = \max(0, (\lambda+1)(a+b-1) - \lambda ab)$ (Sugeno) $\lambda > -1$ [SUG-74]	Archiméd. non stricte	$\frac{\ln(1+\lambda)(1-x)}{\ln(1+\lambda)}$	$\frac{1}{\lambda} \left[1 + \lambda - (\lambda+1)x \right]$	$1 + \frac{b-a}{1+\lambda(1-a)}$
$T_{10}(a,b) = W_\lambda(a,b) = \max(0, \frac{a+b-1+\lambda ab}{1+\lambda})$ (Weber) $\lambda > -1$ [WEB-83]	Archiméd. non stricte	$1 - \frac{\ln(1+\lambda x)}{\ln(1+\lambda)}$	$\frac{1}{\lambda} \left[(1+\lambda) 1 - x - 1 \right]$	$1 + \frac{(1+\lambda)(b-a)}{1+\lambda a}$
$T_{11}(a,b) = SK_p(a,b) = \left[\max(0, a^p + b^p - 1) \right]^{\frac{1}{p}}$ (Schweizer et Sklar) $p \in \mathbb{R}$ $SK_0 = T_2, SK_{-1} = T_3, SK_{+\infty} = T_1, SK_{-\infty} = T_4$ [SCH-63]	$p > 0$ Archiméd. stricte $p < 0$ Archiméd. non stricte	$\frac{p > 0}{x^p - 1}$ $\frac{p < 0}{1 - x^p}$	$\frac{p > 0}{(1+x)^{-1/p}}$ $\frac{p < 0}{(1-x)^{-1/p}}$	$(1+b^p - a^p)^{-1/p}$
$T_{12}(a,b) = F_s(a,b) = \log_s \left[1 + \frac{(s-1)b}{s-1} \right]$ (Frank) $s > 0, s \neq 1, F_\infty = T_3$ [FRA-79]	Archiméd. stricte	$\log_s \frac{s-1}{x-1}$	$\log_s \left(1 + \frac{s-1}{s} x \right)$	$\log_s \left(1 + \frac{(s-1)(b-a)}{s-1} \right)$
$T_{13}(a,b) = D_\alpha(a,b) = \frac{ab}{\max(a,b,\alpha)}$ (Dubois et Prade) $\alpha \in [0,1], D_0 = T_1, D_1 = T_2$ [DUB-79]	Continue	-	-	$\frac{b}{a} \max(a,\alpha)$

6. DETERMINATION DES SOLUTIONS MINIMALES POUR LA RESOLUTION D'EQUATIONS DE RELATION FLOUE DANS LE CAS DE LA COMPOSITION sup-T AVEC T NORME TRIANGULAIRE QUELCONQUE

Soit T une norme continue (alors il existe un opérateur de maximalisation τ). Supposons que T vérifie en plus la condition suivante :

$$b_1 < b_2 \leq a \text{ alors } T(a, b_1) < T(a, b_2)$$

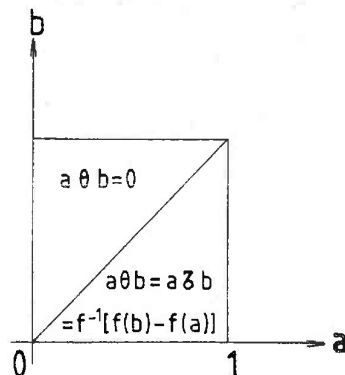
Alors, l'opérateur $\theta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ défini par :

$$a \theta b = \begin{cases} a \tau b & \text{si } a \geq b \\ 0 & \text{si } a < b \end{cases}$$

est tel que $R^* = {}^t A \theta B \in R$.

Remarque :

Une T-norme archimédienne vérifie les conditions précédentes.



A partir de R^* , en procédant comme au § 4.1, on peut déterminer les éléments minimaux pour la composition sup-T norme.

Exemple 11 :

Considérons la norme produit $T(a, b) = ab$.

L'opérateur concordant τ est l'opérateur de Goguen $\times_4$:

$$a \tau b = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b \\ \frac{b}{a} & \text{si } a > b \end{cases}$$

L'opérateur θ est défini par :

$$a \theta b = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b \\ \frac{b}{a} & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

Reprenons les résultats de l'exemple 8 :

$$A = \begin{bmatrix} .2 & .4 & .6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} .4 & .6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^v R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution R^* correspondant à la composition "o" = MAX PRODUIT est $R^* = {}^t A \theta B$:

$$\begin{bmatrix} .2 \\ .4 \\ .6 \end{bmatrix} \theta \begin{bmatrix} .4 & .6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix} = R^*$$

A partir de R^* , on obtient les 2 éléments minimaux :

$$R_{m_1} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$R_{m_2} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 2/3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Remarque :

La t-norme $T(a,b) = \min(a,b)$ est continue et vérifie $b_1 < b_2 \leq a$, alors $\min(a,b_1) \leq \min(a,b_2)$.

Nous avons ainsi obtenu au § 4.1.2. les éléments minimaux.

De même, on peut traiter le problème bidimensionnel avec la composition sup-T norme, comme au § 4 de ce chapitre.

7. DETERMINATION D'UN OPERATEUR DE MINIMALISATION POUR LA RESOLUTION D'EQUATIONS DE RELATION FLOUE DANS LE CAS DE LA COMPOSITION inf-S où S EST UNE CONORME TRIANGULAIRE QUELCONQUE

7.1. Position du problème :

On considère l'équation de relation floue duale de l'équation floue (12) :

$$R \square A = B \quad (12')$$

où " $\square$ " désigne une composition inf-conorme triangulaire, A et B sont donnés et R est une relation floue inconnue.

On désignera par :

$$R' = \{R \mid R \square A = B, R \in F(X \times Y), A \in F(X), B \in F(Y)\}$$

l'ensemble des solutions de (12').

En supposant R' non vide, on veut déterminer, s'il existe, l'élément minimal de R' , c'est-à-dire déterminer une solution $\hat{R}$ de (12') telle que :

$$\forall (x,y) \in X \times Y, \forall R \in R', \hat{R}(x,y) \leq R(x,y)$$

Si S désigne une conorme triangulaire quelconque, l'équation (12') peut aussi s'écrire :

$$\inf_{x \in X} [S(R(x,y), A(x))] = B(y)$$

Ainsi, dans le cas où S est la conorme triangulaire MAX, c'est-à-dire dans le cas où $\square$ désigne la composition MIN-MAX, on sait que l'opérateur β , dual de l'opérateur de Sanchez α , défini par :

$$a \beta b = \begin{cases} b & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

permet de définir la solution $\hat{R}$ de (12') par l'égalité :

$$\hat{R} = {}^t A \beta B$$

où ${}^t A$ désigne la transposée de A et ${}^t A \beta B$ est défini par :

$$({}^t A \beta B)(x,y) = ({}^t A)(x) \beta B(y)$$

Exemple 12 :

Si $A = \begin{bmatrix} .4 & .2 & .6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} .5 & .2 \end{bmatrix}$,

alors $R' \neq \emptyset$ car $R = \begin{bmatrix} .5 & 1 \\ .7 & 0 \\ .8 & .4 \end{bmatrix}$ est une solution de

$R \sqsupset A = B$, où $\sqsupset = \text{MIN-MAX}$,

et ${}^t A \otimes B = \begin{bmatrix} .4 & .2 \\ .2 & .6 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} .5 & .2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 & 0 \\ .5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{R}$

On vérifie que $\hat{R}$ appartient à R' et est l'élément minimal de R' .

Définition :

On appellera opérateur de minimalisation pour l'équation (12') et on notera σ_s , ou plus simplement σ , si aucune confusion n'est possible, tout opérateur $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ tel que ${}^t A \otimes B = \hat{R}$, où $\hat{R}$ est la solution minimale de (12') (si elle existe).

7.2. Conditions suffisantes permettant de définir un opérateur de minimalisation :

Proposition 1' :

Pour qu'un opérateur σ de $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ soit un opérateur de minimalisation pour l'équation (12'), l'ensemble R' étant supposé non vide, il suffit que σ vérifie les trois conditions suivantes :

$$b \leq c \Rightarrow a \sigma b \leq a \sigma c \quad (13')$$

$$a \sigma S(a,b) \leq b \quad (14')$$

$$S(a \sigma b, a) \geq b \quad (15')$$

Démonstration : Posons $R_m = {}^t A \otimes B$.

a) Puisque $R' \neq \emptyset$, $B = R \sqsupset A$ et :

$$\begin{aligned} R_m(x,y) &= ({}^t A) \otimes (R \sqsupset A)(x,y) = ({}^t A)(x) \sigma (R \sqsupset A)(y) \\ &= ({}^t A)(x) \sigma \inf_{z \in X} [S(R(z,y), A(z))] \end{aligned}$$

$$\text{et puisque } \inf_{z \in X} [S(R(z,y), A(z))] \leq S(R(x,y), A(x))$$

quel que soit $x \in [0,1]$ d'après (13'), on a :

$$R_m(x,y) \leq ({}^t A)(x) \sigma S(R(x,y), A(x))$$

b) D'après (14'), puisque $({}^tA)(x) = A(x)$:

$$R_m(x,y) \leq ({}^tA)(x) \sigma S(R(x,y), A(x))$$

et donc $\forall (x,y) \in X \times Y, \forall R \in R', R_m(x,y) \leq R(x,y)$.

c) Par suite, puisque $S(a,b)$ est une fonction croissante de a :

$$S(R_m(x,y), A(x)) = S(({}^tA)(x) \sigma B(y), A(x)) \leq S(R(x,y), A(x))$$

et d'après (15'), puisque $({}^tA)(x) = A(x)$:

$$B(y) \leq S(({}^tA)(x) \sigma B(y), A(x)) \leq S(R(x,y), A(x)).$$

Il en résulte :

$$B(y) \leq \inf_{x \in X} S(R_m(x,y), A(x)) \leq \inf_{x \in X} S(R(x,y), A(x)) = B(y)$$

$$\text{donc : } \inf_{x \in X} S(R_m(x,y), A(x)) = (R_m \sqcap A)(y) = B(y)$$

c'est-à-dire : $R_m \in R'$.

Ainsi, R_m est bien la solution minimale de (12') et

$$R_m = \hat{R}.$$

Remarque 1 :

Soit S la conorme triangulaire duale de la norme triangulaire T définie par :

$$S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$$

et soit τ l'opérateur de maximalisation associé à T pour l'équation (12). Alors, l'opérateur σ , défini par :

$$a \sigma b = 1 - (1-a) \tau (1-b)$$

est un opérateur de minimalisation associé à S pour l'équation (12'), duale de l'équation (12).

En effet :

- Si $b \leq c$, alors d'après (13) :

$$(1-a) \tau (1-b) \geq (1-a) \tau (1-c)$$

et

$$1 - (1-a) \tau (1-b) \leq 1 - (1-a) \tau (1-c),$$

donc (13') est vérifiée.

- D'après (14), $1-a \tau T(1-a, 1-b) \geq 1-b$,

$$\begin{aligned} \text{donc } a \sigma S(a,b) &= 1 - (1-a) \tau (1-S(a,b)) \\ &= 1 - (1-a) \tau T(1-a, 1-b) \leq b, \end{aligned}$$

donc (14') est vérifiée.

- D'après (15), $T((1-a) \tau (1-b), (1-a)) \leq 1-b$,

$$\begin{aligned} \text{donc } S(a \sigma b, a) &= 1 - T(1-a \sigma b, 1-a) \\ &= 1 - T((1-a) \tau (1-b), 1-a) \geq b, \end{aligned}$$

donc (15') est vérifiée.

7.3. Opérateur de minimalisation associé à une conorme triangulaire continue par rapport à l'un de ses arguments :

Proposition 2' :

Si S est une conorme triangulaire vérifiant la condition supplémentaire suivante : $\forall a \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto S(x,a)$ est continue sur $[0,1]$; alors, l'opérateur β_S de $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ défini par :

$$a \beta_S b = \inf\{x | S(x,a) \geq b\}$$

est un opérateur de minimalisation pour l'équation (12').

En effet :

- (13') est vérifiée car :

$$b \leq c \Rightarrow \{x | S(x,a) \geq b\} \supseteq \{x | S(x,a) \geq c\}$$

donc :

$$\inf\{x | S(x,a) \geq b\} \leq \inf\{x | S(x,a) \geq c\}$$

c'est-à-dire :

$$a \beta_S b \leq a \beta_S c .$$

- (14') est vérifiée car :

$$a \beta_S S(a,b) = \inf\{x | S(x,a) \geq S(a,b)\} \leq b .$$

- (15') est vérifiée car, puisque la fonction $x \mapsto S(x,a)$ est continue sur $[0,1]$:

$$a \beta_S b \in \{x | S(x,a) \geq b\}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad S(a \beta_S b, a) \geq b$$

Remarque 2 :

Si dans la proposition (13') on supprime l'hypothèse de continuité sur $[0,1]$ de la fonction $x \mapsto S(x,a)$, alors l'élément minimal de R' peut ne pas exister même si $R' \neq \emptyset$.

Ainsi, par exemple, dans le cas où $\square = \inf-S_4$ (cf. tableau des résultats), la fonction $x \mapsto S_4(x,a)$ n'est pas continue sur $[0,1]$ et, si R est une solution de $R \square A = B$, l'opérateur μ de $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ défini par :

$$a \mu b = \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a = 0 \\ m & \text{où } m \in]0,1[\text{ si } a < b \end{cases}$$

permet d'obtenir une solution de (12') minorant R .

Pour cela, si on pose $R_m = {}^t A \oplus B$ et si $R_m(x_i, y_j) = m$, il suffit de choisir $m \leq R(x_i, y_j)$. Mais l'ensemble R' des solutions n'admet pas d'élément minimal.

Exemple 13 :

Si $A = \begin{bmatrix} .2 & .4 & .6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & .2 \end{bmatrix}$,

alors $R = \begin{bmatrix} .3 & 0 \\ .1 & .8 \\ 1 & .5 \end{bmatrix}$ est solution de $R \sqsupset A = B$,

et quel que soit $m \in]0,1]$:

${}^t A \circledast B = R_m = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m & 0 \\ m & 0 \end{bmatrix}$ est solution de (12').

Il suffit de choisir $m \in]0,1]$ pour obtenir une solution $R_m \leq R$.

Mais $\hat{R}$ n'existe pas, car $R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'appartient pas à R' .

7.4. Opérateur de minimisation associé à une conorme triangulaire archimédienne :

D'après la remarque 1, l'opérateur de minimisation σ associé à S est donné par :

$$a \sigma b = 1 - (1-a) \tau (1-b)$$

donc, d'après la proposition 3, si $1-a > 1-b$, c'est-à-dire si $a < b$:

$$\begin{aligned} a \sigma b &= 1 - f^{-1}(f(1-b) - f(1-a)) \\ &= g^{-1}(g(b) - g(a)) \end{aligned}$$

et $a \sigma b = 0$ si $a \geq b$.

Proposition 3' :

Si la conorme triangulaire S est archimédienne, de fonction génératrice g , alors l'opérateur σ défini par :

$$a \sigma b = \begin{cases} g^{-1}(g(b) - g(a)) & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

est un opérateur de minimisation associé à S pour l'équation (12').

Exemple 14 :

Soit $S_2(a,b) = a + b - ab$; alors :

$$g(x) = -\ln(1-x), \quad g^{-1}(x) = 1 - e^{-x}$$

et $a \sigma b = \begin{cases} \frac{b-a}{1-a} & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a \geq b \end{cases}$

Soit $A = \begin{bmatrix} .2 & .4 & .6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} .6 & .2 \end{bmatrix}$;

alors $R' \neq \emptyset$ car $R = \begin{bmatrix} .5 & 0 \\ .7 & .4 \\ 1 & .6 \end{bmatrix} \in R'$

et :

${}^t A \circledast B = \begin{bmatrix} .5 & 0 \\ 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{R} \in R'$

TABEAU DES RESULTATS

CONOMES TRIANGULAIRES S	PROPRIETES DE S	GENERA TEUR ADDITIF g	$g^{-1}(x)$	a o b (pour a < b)
$S_1(a,b) = \max(a,b)$	Continue	-	-	b
$S_2(a,b) = a+b - ab$	Archimédienne stricte	$-\ln(1-x)$	$1 - e^{-x}$	$\frac{b-a}{1-a}$
$S_3(a,b) = \min(1, a+b)$	Archimédienne non stricte	x	x	b-a
$S_4(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b=0 \\ b & \text{si } a=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$	Discontinue	-	-	N'existe pas (cf. remarque 2)
$S_5(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a+b-1 \geq 0 \\ \max(a,b) & \text{si } a+b-1 < 0 \end{cases}$	Discontinue	-	-	b si a < b < 1-a a si b > max(a, 1-a)
$S_6(a,b) = \min\left[1, (a^p + b^p)^{1/p}\right] = Y_p'(a,b)$ (Yager) $p \geq 0, Y_0'(a,b) = S_4$	Archimédienne non stricte	x^p	$x^{1/p}$	$(b^p - a^p)^{1/p}$
$S_7(a,b) = H_\gamma'(a,b) = 1 - \frac{(1-a)(1-b)}{\gamma^*(1-\gamma)(1-ab)}$ (Hamacher) $\gamma \geq 0, H_1' = S_2, H_\infty' = S_4$	Archimédienne stricte	$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{1+(1-\gamma)x}{1-x}$	$\frac{e^{\gamma x} - 1}{e^{\gamma x} + \gamma - 1}$	$\frac{b-a}{1-a-a(1-b)(1-\gamma)}$
$S_8(a,b) = D_\lambda'(a,b) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda}\right] - \frac{1}{\lambda}}$ (Dombi) $\lambda > 0, D_1' = H_0', D_\infty' = S_1$	Archimédienne stricte	$\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{-\lambda}$	$\frac{1}{1 + x^{-\frac{1}{\lambda}}}$	$\frac{1}{1 + \left[\left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda} - \left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda}\right] - \frac{1}{\lambda}}$

$S_9(a,b) = S_\lambda'(a,b) = \min(1, a+b+\lambda ab)$ (Sugeno) $\lambda > -1$	Archimédienne non stricte	$\frac{\ln(1+\lambda x)}{\ln(1+\lambda)}$	$\frac{1}{\lambda} \left[(1+\lambda)^x - 1 \right]$	$\frac{b-a}{1+\lambda a}$
$S_{10}(a,b) = W_\lambda'(a,b) = \min\left(1, a+b - \frac{\lambda ab}{1+\lambda}\right)$ (Weber) $\lambda > -1$	Archimédienne non stricte	$1 - \frac{\ln(1+\lambda(1-x))}{\ln(1+\lambda)}$	$1 - \frac{1}{\lambda} \left[(1+\lambda)^{1-x} - 1 \right]$	$\frac{(1+\lambda)(b-a)}{1+\lambda(1-a)}$
$S_{11}(a,b) = Sk_p'(a,b) = 1 - \max[0, (1-a)^{-p} + (1-b)^{-p} - 1]^{-\frac{1}{p}}$ (Schweizer et Sklar) $p \in \mathbb{R}$	$p > 0$ Archimédienne stricte $p < 0$ Archimédienne non stricte	$p > 0$ $(1-x)^{-p} - 1$ $p < 0$ $1 - (1-x)^{-p}$	$p > 0$ $1 - (1+x)^{-1/p}$ $p < 0$ $1 - (1-x)^{-1/p}$	$1 - \left[(1+b)^{-p} - (1-a)^{-p} \right]^{-\frac{1}{p}}$
$S_{12}(a,b) = F_s'(a,b) = 1 - \log_s \left[1 + \frac{(1-a-1)(s^{1-b}-1)}{s-1} \right]$ (Frank) $s > 0, s \neq 1$	Archimédienne stricte	$\log_s \frac{s-1}{s^{1-x}-1}$	$1 - \log_s \left(1 + \frac{s-1}{s^x} \right)$	$1 - \log_s \left(1 + \frac{(s-1)(s^{1-a}-1)}{s^{1-a}-1} \right)$
$S_{13}(a,b) = D_a'(a,b) = 1 - \frac{(1-a)(1-b)}{\max(1-a, 1-b, \alpha)}$ (Dubois et Prade) $\alpha \in [0, 1], D_0' = S_1, D_1' = S_2$	Continue	-	-	$1 - \frac{1-b}{1-a} \max(1-a, \alpha)$

CHAPITRE 6

MESURES D'INCERTAIN

Les mesures d'incertain sont des mesures d'ensembles qui généralisent les mesures de probabilités. Suivant les cas, on rencontrera soit des distributions de densité portant sur des singletons de X , soit une fonction m portant sur les parties de X .

On n'envisage dans ce chapitre que le cas d'un ensemble fini X comportant n singletons :

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

1. DEFINITION D'UNE ALGÈBRE

Une famille $\mathcal{A}$ de parties de X est une algèbre ssi :

- 1) $\emptyset$ et $X \in \mathcal{A}$
- 2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
- 3) $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ et $A \cup B \in \mathcal{A}$

Un sous-ensemble $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{G}(X)$ est formé de p éléments ($p \leq n$) :

$$A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$$

si $1 < p \leq n$, le sous-ensemble A est dit composite.

2. MESURES DE PROBABILITÉ

Une mesure de probabilité P est une application de $\mathcal{G}(X)$ dans $[0,1]$ vérifiant :

- 1) $P(X) = 1$
- 2) $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}$ si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A partir des axiomes d'une mesure de probabilité, on déduit les propriétés suivantes :

- . $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- et par conséquent : $P(\emptyset) = 0$.
- . $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$; l'application P est croissante.
- . Pour tout couple A et $B \in \mathcal{A}$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dans tous les exemples de ce chapitre, les cases



représentent les valeurs données pour construire une mesure d'incertain,



représentent les valeurs imposées par les contraintes ou les valeurs calculées à partir d'autres cases.

Exemple 1 : mesure de probabilité

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et

$A \in \mathcal{A}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$P(A)$	0	.2	.3	.5	.5	.7	.8	1

Pour une mesure de probabilité :

$$P(A) = \sum_{j=1}^p P(x_{1j})$$

3. MESURES D'INCERTAIN

3.1. Définition d'une mesure d'incertain :

Une mesure d'incertain g est une application d'une algèbre $\mathcal{A}$ de X (fini) dans $[0, 1]$ vérifiant :

$$g(\emptyset) = 0 \quad (1.1)$$

$$g(X) = 1 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathcal{A} \\ &\forall B \in \mathcal{A} \quad \text{si } A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Une mesure d'incertain n'est donc pas une mesure mathématique au sens strict du terme. Du reste, pour éviter toute confusion, Kaufmann préfère le terme de "valuation" à celui de mesure d'incertain.

La relation (1.3) traduit que si A est contenu dans B , on a toujours autant confiance en l'occurrence de B qu'en celle de A .

Exemple 2 : mesure d'incertain

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et

$A \in \mathcal{A}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$
$g(A)$	0	.2	.3	.4	[.3, 1]	[.4, 1]	[.4, 1]	1

La notation précédente signifie par exemple que pour $A = \{a, b\}$, g peut prendre n'importe quelle valeur appartenant au segment fermé $[.3, 1]$.

3.2. Propriétés d'une mesure d'incertain :

Les relations (1) impliquent :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad g(A \cap B) \leq \min(g(A), g(B)) \quad (2)$$

$$\forall B \in \mathcal{A} \quad g(A \cup B) \geq \max(g(A), g(B)) \quad (3)$$

La relation (1.3) permet de déterminer une plage dans laquelle doit se trouver la valeur de la mesure floue g pour des éléments composites.

Il existe donc une infinité de fonctions g satisfaisant les relations (1). Pour définir les fonctions g vérifiant (1), il est nécessaire de restreindre la classe de telles fonctions g . Deux démarches sont possibles.

4. PREMIERE CONSTRUCTION DES MESURES D'INCERTAIN

4.1. L'opérateur de combinaison $\times$:

Afin de calculer facilement les valeurs de la fonction g pour les éléments composites, nous substituerons à la relation (1.3) la relation moins générale :

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathcal{A} \\ &\forall B \in \mathcal{A} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } g(A \cup B) = g(A) \times g(B) \quad (1.3') \end{aligned}$$

où $\times$ est une opération interne définie sur $[0,1]$. Ainsi, suivant le problème posé, on aura à choisir parmi les différentes fonctions g vérifiant (1.3').

L'opération $\times$ doit satisfaire :

- l'associativité : $g(A) \times (g(B) \times g(C)) = (g(A) \times g(B)) \times g(C)$
- la commutativité : $g(A) \times g(B) = g(B) \times g(A)$
- la monotonie si $g(A) \geq g(B)$ alors $g(A) \times g(C) \geq g(B) \times g(C)$
- et la conditions aux limites : $g(A) \times 0 = g(A)$.

En particulier, lorsque l'opérateur $\times$ est une conorme, les conditions précédentes sont satisfaites.

Puisque $A \cup \bar{A} = X$, la relation (1.3') implique :

$$g(A) \times g(\bar{A}) = 1 \quad (4)$$

Pour la construction des valeurs de $g(A)$ pour $A \in \mathcal{G}(X)$, la relation (1.3') peut être adaptée au cas de deux ensembles A et

B non nécessairement disjoints. (1.3') est équivalent à (1.3'') :

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathcal{A} \\ &\forall B \in \mathcal{A} \quad g(A \cup B) \times g(A \cap B) = g(A) \times g(B) \quad (1.3'') \end{aligned}$$

(voir la démonstration [PRA-82] page 14).

En définissant uniquement g sur l'ensemble des singletons de X , la relation (1.3') ou (1.3'') permet la connaissance de $g(A)$ pour tous les éléments composites appartenant à $\mathcal{G}(X)$:

$$g(A) = g\left(\bigcup_{j=1}^p \{x_{i_j}\}\right) = g_{i_1} \times \dots \times g_{i_p} \quad (5)$$

en notant $g_i = g(\{x_i\})$.

L'ensemble $\{g_i\}_{i=1,n}$ est la densité de g .

De telles mesures g sont appelées mesures décomposables. Puisque $g(X) = 1$, alors :

$$g_1 \times \dots \times g_n = 1 \quad (6)$$

Cette relation est trivialement satisfaite dès qu'il existe un $x_i \in X$ tel que $g_i = 1$. La relation (6) est une condition de normalisation des mesures d'incertain.

4.2. Exemples :

4.2.1. Composition $\times$: somme bornée :

Choisissons pour la composition $\times$, la conorme somme bornée :

$$a \times b = \min(1, a+b).$$

La relation (1.3') s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A} \\ \forall B \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \quad g(A \cup B) = \min(1, g(A) + g(B)) \quad (7)$$

Exemple 3 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et

A	g(A)	$\bar{A}$	g($\bar{A}$)	g(A) + g($\bar{A}$)
$\emptyset$	0	$\{a, b, c\}$	1	1
$\{a\}$	.2	$\{b, c\}$	.9	1.1
$\{b\}$	.3	$\{a, c\}$	.8	1.1
$\{c\}$	.6	$\{a, b\}$	.5	1.1
$\{a, b\}$	.5	$\{c\}$	.6	1.1
$\{a, c\}$	.8	$\{b\}$	.3	1.1
$\{b, c\}$	.9	$\{a\}$	.2	1.1
$\{a, b, c\}$	1	$\emptyset$	0	1

Dans le cas où l'opérateur $\times$ est la somme bornée, alors :

$$g(A) + g(\bar{A}) \geq 1$$

et $\sum_{i=1}^n g_i \geq 1$ la somme s'effectuant pour les singletons de X.

Dans le cas limite où $\sum_{i=1}^n g_i = 1$, la densité g est une mesure de probabilité.

4.2.2. Composition $\times$: maximum - Mesures de possibilité :

Choisissons pour la composition $\times$ la conorme maximum :

$$a \times b = \max(a, b).$$

La relation (1.3') est remplacée par (1.3''), mais puisque $A \cap B \subseteq A \cup B$, alors d'après la monotonie :

$$g(A \cap B) \leq g(A \cup B),$$

(1.3'') s'écrit, pour l'opération $\times$ maximum :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A} \\ \forall B \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad g(A \cup B) = \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)) \quad (8)$$

La mesure g ainsi définie, notée aussi Π , dans le cas particulier de la conorme maximum, est une mesure de possibilité. La densité $\{g_i\}_{i=1, n} = \{\Pi_i\}_{i=1, n}$ est appelée distribution de possibilité.

Rappelons la relation (3) :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{F} \\ \forall B \in \mathcal{F} \quad g(A \cup B) \geq \max(g(A), g(B)) ; \end{aligned}$$

ainsi, une mesure de possibilité apparaît comme un cas limite des mesures d'incertain. La conorme la plus faible étant le maximum, une mesure de possibilité correspond à la valeur la plus faible prise par le degré de confiance de $A \cup B$ lorsque l'on connaît le degré de confiance de A et B.

Exemple 4 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et

A	$g(A) = \Pi(A)$	$\bar{A}$	$g(\bar{A}) = \Pi(\bar{A})$
$\emptyset$	0	$\{a, b, c\}$	1
$\{a\}$	1	$\{b, c\}$	.3
$\{b\}$	.3	$\{a, c\}$	1
$\{c\}$	.2	$\{a, b\}$	1
$\{a, b\}$	1	$\{c\}$	.2
$\{a, c\}$	1	$\{b\}$	.3
$\{b, c\}$	.3	$\{a\}$	1
$\{a, b, c\}$	1	$\emptyset$	0

Afin de normaliser Π , il faut prendre l'un des Π_i égal à 1.

Ainsi : $\max_{i=1, n} \Pi_i = 1$

De plus, on vérifie que :

$$\max(\Pi(A), \Pi(\bar{A})) = 1$$

Puisque $g(X) = 1$, pour une mesure de possibilité, il n'est pas possible que la mesure complète ne soit ni en A, ni en $\bar{A}$:

$$\Pi(A) \neq 1 \Rightarrow \Pi(\bar{A}) = 1$$

L'un des sous-ensembles A ou $\bar{A}$ a une mesure de possibilité égale à 1, l'autre ayant une mesure de possibilité susceptible de prendre n'importe quelle valeur dans $[0, 1]$. La possibilité d'un événement et celle de son complémentaire ne sont que faiblement liées.

4.2.3. Composition $\times$: somme probabiliste :

Choisissons pour conorme $\times$ la somme probabiliste :

$$a \times b = a + b - ab$$

La relation (1.3') s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{F} \\ \forall B \in \mathcal{F} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \quad g(A \cup B) = g(A) + g(B) - g(A)g(B) \end{aligned} \quad (9)$$

Exemple 5 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et

A	$g(A)$	$\bar{A}$	$g(\bar{A})$
$\emptyset$	0	$\{a, b, c\}$	1
$\{a\}$	.2	$\{b, c\}$	1
$\{b\}$	.3	$\{a, c\}$	1
$\{c\}$	.44	$\{a, b\}$	.44
$\{a, b\}$	.44	$\{c\}$	1
$\{a, c\}$	1	$\{b\}$	.3
$\{b, c\}$	1	$\{a\}$	.2
$\{a, b, c\}$	1	$\emptyset$	0

La relation (4) donne alors :

$$g(A) + g(\bar{A}) - g(A) \cdot g(\bar{A}) = 1$$

soit : $(1 - g(A))(1 - g(\bar{A})) = 0$

ou encore : $\max(g(A), g(\bar{A})) = 1$

On ne retrouve pas, comme cas limite, une mesure de probabilité.

4.2.4. Composition $\ast$: conorme S_w :

Choisissons pour opération $\ast$, la conorme S_w :

$$S_w(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b=0 \\ b & \text{si } a=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La relation (1.3') s'écrit alors :

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \quad g(A \cup B) = S_w(g(A), g(B)) \quad (10)$$

$$\forall B \in \mathcal{K}$$

Exemple 6 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et

A	$g(A)$	$\bar{A}$	$g(\bar{A})$
$\emptyset$	0	$\{a, b, c\}$	1
$\{a\}$	0	$\{b, c\}$	1
$\{b\}$	.1	$\{a, c\}$	.2
$\{c\}$	.2	$\{a, b\}$	.1
$\{a, b\}$	.1	$\{c\}$	.2
$\{a, c\}$	.2	$\{b\}$	.1
$\{b, c\}$	1	$\{a\}$	0
$\{a, b, c\}$	1	$\emptyset$	0

La condition de normalisation est alors :

ou bien $\exists k$ tel que $g_k = 1$

ou bien $\exists k, \exists l \neq k$ tel que $g_k \neq 0$ et $g_l \neq 0$.

Remarquons que $g(A) = 0 \Rightarrow g(\bar{A}) = 1$.

4.2.5. Les mesures de Sugeno :

Nous sortons du cadre où l'opération $\ast$ est une conorme pour définir des mesures d'incertain vérifiant (1.3').

On utilise alors les mesures g_λ de Sugeno définies pour $\lambda \in]-1, +\infty[$. La relation (1.3') devient

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathcal{L} \\ &\forall B \in \mathcal{L} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B) \end{aligned} \quad (11)$$

Rappelons que g_λ n'est pas une conorme.

Le cas $\lambda = 0$ est celui des probabilités.

La condition de normalisation $g_\lambda(X) = 1$ est satisfaite si :

$$\sum_{i=1}^n (1 + \lambda g_i) = 1 + \lambda \quad (12)$$

(voir démonstration en annexe 2).

En introduisant la fonction $\phi(x) = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda x)$ avec $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 0$, la condition de normalisation (12) s'écrit aussi :

$$\sum_{i=1}^n \phi(g_i) = \phi(1)$$

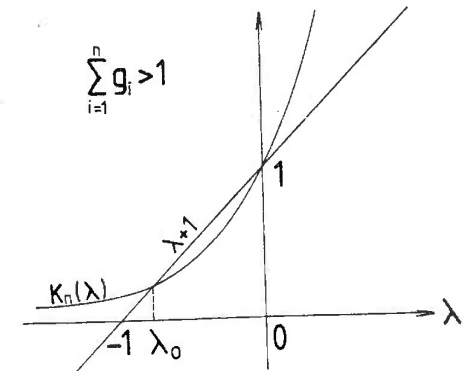
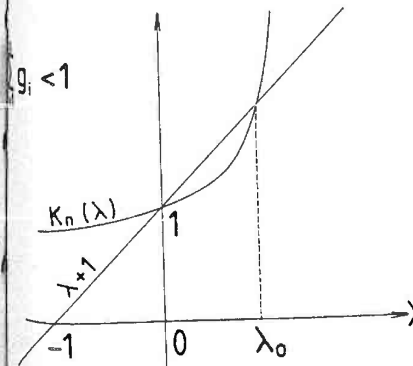
La condition de normalisation peut être réalisée soit :

1) Si l'on se donne une valeur $\lambda \in]-1, +\infty[$, on peut trouver les g_i satisfaisant la condition de normalisation (12) (cf. exemple 7).

2) Si les $\{g_i\}_{i=1, n}$ avec $g_i \in [0, 1]$ sont donnés, il existe une valeur unique et une seule $\lambda \in]-1, +\infty[$ pour laquelle la condition de normalisation (12) est vérifiée [HUA-86 et LES-85]. Plus précisément, en posant $K_n(\lambda) = \sum_{i=1}^n (1 + \lambda g_i)$,

$K_n(\lambda)$ est une fonction positive, croissante et convexe. L'unique racine λ_0 de l'équation (12) est :

- . positive si $\sum_{i=1}^n g_i < 1$, la mesure g_λ correspondante est une mesure de crédibilité (voir § 5.1) ;
- . négative si $\sum_{i=1}^n g_i > 1$, la mesure g_λ correspondante est une mesure de plausibilité (voir § 5.1) ;
- . nulle si $\sum_{i=1}^n g_i = 1$, la mesure g_λ correspondante est une mesure de probabilité.



La fonction $G_n(\lambda) = \prod_{i=1}^n (1+\lambda g_i) - \lambda - 1$ est appelée la fonction caractéristique des g_λ .

La deuxième méthode de normalisation sera utilisée dans l'application chapitre 7, § 3.3.1.

Remarquons que si l'un des g_i est égal à 1, la valeur unique de λ est égale à -1.

Exemple 7 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et les mesures construites à partir des mesures de Sugeno (11) :

	$\lambda = -1/2$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$
A	$g_{-1/2}(A)$	$g_{1/2}(A)$	$g_1(A)$	$g_{10}(A)$
$\emptyset$	0	0	0	0
{a}	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{12}$
{b}	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$
{c}	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
{a,b}	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$
{a,c}	$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{20}$
{b,c}	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$
{a,b,c}	1	1	1	1

4.2.6. Composition * basée sur la conorme paramétrée de Sugeno :

On peut aussi envisager des mesures d'incertain correspondant à la conorme nilpotente :

$$a * b = \min(1, a+b+\lambda ab) \quad \text{avec } \lambda \in]-1, +\infty[.$$

La relation (1.3') s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A} \\ \forall B \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } g(A \cup B) = \min[1, g(A) + g(B) + \lambda g(A)g(B)] \quad (13)$$

Les mesures g_λ de Sugeno apparaissent alors comme un cas particulier de (13).

La condition de normalisation est $\prod_{i=1}^n (1+\lambda g_i) \geq 1+\lambda$.

Exemple 8 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et les mesures construites à partir de la conorme paramétrée de Sugeno (13) :

	$\lambda = -1/2$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 10$
A	$g_{-1/2}(A)$	$g_{1/2}(A)$	$g_1(A)$	$g_{10}(A)$
$\emptyset$	0	0	0	0
{a}	.2	.1	.2	.1
{b}	.4	.3	.5	.2
{c}	.7	.7	.6	.3
{a,b}	.56	.415	.8	.5
{a,c}	.83	.835	.92	.7
{b,c}	.96	1	1	1
{a,b,c}	1	1	1	1

4.2.7. Composition $\times$ basée sur la conorme paramétrée de Yager :

Envisageons la famille paramétrée de conormes nilpotentes définies à partir de la conorme de Yager :

$$a \times b = \min(1, a^q + b^q)^{1/q}, \text{ avec } q > 0$$

La relation (1.3') s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathcal{A} \\ &\forall B \in \mathcal{A} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } g(A \cup B) = \min \left[1, g(A)^q + g(B)^q \right]^{1/q} \quad (14) \\ &\text{avec } q > 0 \end{aligned}$$

La condition de normalisation est $\sum_{i=1}^n (g_i)^q \geq 1$, la somme s'effectuant sur les singletons de $\bar{X}$.

Exemple 9 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et les mesures construites à partir de la conorme paramétrée de Yager (14) pour $q = 2$:

A	$g(A)$
$\emptyset$	0
{a}	.3
{b}	.4
{c}	.9
{a,b}	.5
{a,c}	.949
{b,c}	.985
{a,b,c}	1

4.3. Classification des mesures d'incertain basées sur une conorme :

Rappelons l'ordre vérifié par les principales conormes :

$$\max(a, b) \leq a + b - ab \leq \min(1, a + b) \leq S_w(a, b).$$

- 1) La contrainte la plus faible liant $g(A)$ et $g(\bar{A})$ pour toute mesure d'incertain basée au sens de (1) est :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad g(A) = 0 \Rightarrow g(\bar{A}) = 1 \quad (15)$$

C'est le cas de la composition $S_w(a, b)$.

- 2) Si l'opération $\ast$ est une conorme plus petite ou égale à la somme bornée $s_b = \min(1, a+b)$, alors :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad g(A) + g(\bar{A}) \geq 1 \quad (16)$$

- 3) Si l'opération $\ast$ est une conorme stricte ou si $\ast$ est une conorme inférieure ou égale à la somme probabiliste $s_p = a+b-ab$, alors :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \max(g(A), g(\bar{A})) = 1 \quad (17)$$

Toutes les mesures floues qui vérifient (17) seront appelées "mesures de pseudo-possibilité". Les mesures de possibilité correspondant à $\ast = \max$ font partie de cette classe.

- 4) Si l'opération $\ast$ est une conorme nilpotente ayant pour générateur additif ϕ , alors :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \phi[g(A)] + \phi[g(\bar{A})] \geq \phi(1) \quad (18)$$

La condition de normalisation correspondante est :

$$\sum_{i=1}^n \phi(g_i) \geq \phi(1) \quad (\text{cf. exemple 9})$$

4.4. Mesures d'incertain duales :

4.4.1. Propriétés des mesures d'incertain duales :

La mesure d'un événement $g(A)$ et celle de l'événement contraire $g(\bar{A})$ peuvent ne pas être déductibles l'une de l'autre et $g(\bar{A})$ apporte alors des informations complémentaires à $g(A)$.

Soit g une mesure floue décomposable et c une négation forte. Construisons alors la mesure floue $\bar{g}_c$ définie par :

$$\bar{g}_c(A) = c[g(\bar{A})] \quad \forall A \in \mathcal{X}$$

Si g vérifie la relation (1.3'), l'opération $\ast$ est une conorme triangulaire, alors $\bar{g}$ vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{A} \\ \forall B \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad \text{si } A \cup B = X \text{ alors } \bar{g}_c(A \cap B) = \bar{g}_c(A) \perp \bar{g}_c(B) \quad (19)$$

où l'opération binaire $\perp$ est définie par :

$$\begin{aligned} \forall a \in [0,1] \\ \forall b \in [0,1] \end{aligned} \quad a \perp b = c[c(a) \ast c(b)] \quad (20)$$

$\perp$ est une norme triangulaire.

Les mesures g et $\bar{g}_c$ sont dites c -duales l'une de l'autre. Ainsi, les mesures d'incertain basées sur les normes se déduisent par dualité des mesures d'incertain basées sur les conormes. Les mesures d'incertain basées sur (19) véri-

fient les propriétés analogues à celles basées sur les conormes :

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \bar{g}(A \cup B) \perp \bar{g}(A \cap B) = \bar{g}(A) \perp \bar{g}(B) \quad (21)$$

$$\forall B \in \mathcal{K} \quad \text{et} \quad \bar{g}(A) \perp \bar{g}(\bar{A}) = 0 \quad (22)$$

Soit $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$; alors $\bar{A} = \{x_{i_{p+1}}, \dots, x_{i_n}\}$.

La mesure d'incertain $\bar{g}(A)$ peut s'exprimer à partir de la connaissance de $\bar{g}$ sur l'ensemble des éléments composés de X comprenant exactement $(n-1)$ éléments.

Posons : $\bar{g}_i = \bar{g}(X - \{x_i\})_{i=1,n}$; on a alors :

$$\bar{g}(A) = \bar{g}\left(\bigcap_{x_i \notin A} (X - \{x_i\})\right) = \bar{g}_{i_{p+1}} \perp \dots \perp \bar{g}_{i_n} \quad (23)$$

$\{\bar{g}_i\}_{i=1,n}$ est appelée la codensité de $\bar{g}$.

La condition de normalisation de la codensité est obtenue en traduisant $\bar{g}(\emptyset) = 0$, soit :

$$\bar{g}_{i_1} \perp \dots \perp \bar{g}_{i_n} = 0 \quad (24)$$

Cette relation est trivialement satisfaite dès qu'il existe un $x_{i_1} \in X$ tel que $\bar{g}_{i_1} = 0$.

4.4.2. Exemples :

4.4.2.1. Composition $\perp$: minimum - Mesures de nécessité :

Les mesures d'incertain $\bar{g}$ qui vérifient

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \bar{g}(A \cap B) = N(A \cap B) = \min(N(A), N(B)) \quad (25)$$

sont appelées mesures de nécessité (ou mesures de certitude). Toutes les mesures de certitude vérifient la relation (2). La norme la plus forte étant le minimum, une mesure de nécessité correspond à la valeur la plus forte prise par le degré de confiance de $A \cap B$ lorsque l'on connaît le degré de confiance de A et B .

Les mesures d'incertain duales des mesures de nécessité sont les mesures notées $\hat{g}$ définies par :

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \hat{g}(A) = 1 - \bar{g}(\bar{A})$$

Ces mesures $\hat{g}$ vérifient (8) et sont donc des mesures de possibilité.

L'équation de dualité est :

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \Pi(A) = 1 - N(\bar{A}) \quad (26)$$

où Π et N désignent respectivement des mesures de possibilité et de nécessité. Cette équation de dualité exprime la nécessité d'un événement correspondant à l'impossibilité de l'événement contraire.

Exemple 10 : mesures de nécessité (dualité avec les mesures de possibilité définies par $a * b = \max(a, b)$)

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et la mesure d'incertain définie par (25) avec $a \perp b = \min(a, b)$:

A	$\bar{g}(A) = N(A)$	$\bar{A}$	$\bar{g}(\bar{A}) = N(\bar{A})$	$\min(N(A), N(\bar{A}))$
$\emptyset$	0	$\{a, b, c\}$	1	0
$\{a\}$	0	$\{b, c\}$	.8	0
$\{b\}$	0	$\{a, c\}$	.7	0
$\{c\}$	.7	$\{a, b\}$	0	0
$\{a, b\}$	0	$\{c\}$	.7	0
$\{a, c\}$	.7	$\{b\}$	0	0
$\{b, c\}$	.8	$\{a\}$	0	0
$\{a, b, c\}$	1	$\emptyset$	0	0

Pour normaliser $\bar{g}$, il faut prendre l'un des $\bar{g}_i$ égal à 0, donc :

$$\min_{i=1, n} \bar{g}_i = 0$$

$$\text{et } \min(N(A), N(\bar{A})) = 0$$

L'un des sous-ensembles A ou $\bar{A}$ a une mesure de nécessité égale à 0, l'autre ayant une mesure de nécessité susceptible de prendre n'importe quelle valeur dans $[0, 1]$; donc :

$$N(A) \neq 0 \Rightarrow N(\bar{A}) = 0$$

En tenant compte de (26), on vérifie que :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \Pi(A) \geq N(A)$$

Ainsi, un événement incertain est d'abord possible avant d'être nécessaire.

De plus, $N(A) > 0 \Rightarrow N(\bar{A}) = 0$, donc $\Pi(A) = 1$.

Un événement quelque peu nécessaire ($N(A) > 0$) est donc complètement possible ($\Pi(A) = 1$) et :

$$\Pi(A) < 1 \Rightarrow \Pi(\bar{A}) = 1, \text{ donc } N(A) = 0$$

Un événement non entièrement possible ($\Pi(A) < 1$) n'est jamais nécessaire ($N(A) = 0$).

Pour une mesure de probabilité, la probabilité d'un événement P(A) détermine complètement celle de son contraire $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Par contre, pour caractériser une proposition incertaine A, nous prendrons un couple de nombres $(N(A), \Pi(A))$ bien que dans le cas où $N(A) > 0$ (ou $\Pi(A) < 1$), un seul nombre suffit.

4.4.2.2. Composition $\perp$: $\max(0, a+b-1)$:

(dualité des mesures associées à la somme bornée :

$$a \times b = \min(1, a+b).$$

Soit la norme $T_m(a, b)$ avec :

$$T_m(a, b) = \max(0, a+b-1)$$

La relation (19) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{F} \\ \forall B \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad \text{si } A \cup B = X \text{ alors } \bar{g}(A \cap B) = \max(0, \bar{g}(A) + \bar{g}(B) - 1) \quad (27)$$

Exemple 11 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et

A	$\bar{g}(A)$	$\bar{A}$	$\bar{g}(\bar{A})$	$\bar{g}(A) + \bar{g}(\bar{A})$
$\emptyset$	0	$\{a, b, c\}$	1	1
$\{a\}$	.1	$\{b, c\}$	.8	.9
$\{b\}$	.2	$\{a, c\}$	.7	.9
$\{c\}$	.5	$\{a, b\}$	.4	.9
$\{a, b\}$	.4	$\{c\}$	.5	.9
$\{a, c\}$	.7	$\{b\}$	.2	.9
$\{b, c\}$	.8	$\{a\}$	.1	.9
$\{a, b, c\}$	1	$\emptyset$	0	1

Dans le cas où l'opérateur $\perp$ est la norme $T_m(a, b)$, alors :

$$\bar{g}(A) + \bar{g}(\bar{A}) \leq 1$$

$$\text{et : } \sum_{i=1}^n \bar{g}_i \leq n-1$$

la somme s'effectuant sur les éléments composites de X.

4.4.2.3. Composition $\perp$: produit ab :

(dualité des mesures associées à la somme probabiliste :

$$a \times b = a + b - ab).$$

Soit la norme produit :

$$a \perp b = ab$$

La relation (19) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{F} \\ \forall B \in \mathcal{F} \end{aligned} \quad \text{si } A \cup B = X \text{ alors } \bar{g}(A \cap B) = \bar{g}(A) \cdot \bar{g}(B) \quad (28)$$

Exemple 12 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et la mesure d'incertain définie par (28) avec $a \perp b = ab$:

A	$\bar{g}(A)$	$\bar{A}$	$\bar{g}(\bar{A})$	$\min(\bar{g}(A), \bar{g}(\bar{A}))$
$\emptyset$	0	$\{a, b, c\}$	1	0
$\{a\}$	0	$\{b, c\}$	.8	0
$\{b\}$	0	$\{a, c\}$	.7	0
$\{c\}$	.56	$\{a, b\}$	0	0
$\{a, b\}$	0	$\{c\}$	.56	0
$\{a, c\}$	.7	$\{b\}$	0	0
$\{b, c\}$	.8	$\{a\}$	0	0
$\{a, b, c\}$	1	$\emptyset$	0	0

Dans le cas où l'opérateur $\perp$ est le produit :

$$\min(\bar{g}(A), \bar{g}(\bar{A})) = 0$$

4.5. Classification des mesures d'incertain basées sur une norme :

Rappelons l'ordre vérifié par les principales normes :

$$T_w(a, b) \leq \max(0, a+b-1) \leq ab \leq \min(a, b).$$

- 1) Pour toute mesure d'incertain basée sur une norme $\perp$ au sens de (19), on a :

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \bar{g}(A) = 1 \Rightarrow \bar{g}(\bar{A}) = 0 \quad (29)$$

- 2) Si $\perp$ est une norme plus grande ou égale à $T_m = \max(0, a+b-1)$, alors :

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \bar{g}(A) + \bar{g}(\bar{A}) \leq 1 \quad (30)$$

- 3) Si $\perp$ est une norme stricte ou si $\perp$ est une norme supérieure ou égale au produit ab , alors :

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \min(\bar{g}(A), \bar{g}(\bar{A})) = 0 \quad (31)$$

La condition de normalisation équivaut alors à l'existence d'un i_0 tel que $\bar{g}_{i_0} = 0$. Toutes les mesures floues qui vérifient (31) seront appelées "mesures de pseudo-nécessité". Les mesures de nécessité correspondant à $\perp = \min$ font partie de cette classe.

- 4) Si $\perp$ est une norme nilpotente ayant pour générateur additif ϕ , alors :

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \phi[\bar{g}(A)] + \phi[\bar{g}(\bar{A})] \geq \phi(0) \quad (32)$$

La condition de normalisation correspondante est :

$$\sum_{i=1}^n \phi(\bar{g}_i) \geq \phi(0)$$

4.6. Mesures d'incertain auto-duales :

Soit une mesure d'incertain g basée sur une conorme triangulaire $\times$ et $\bar{g}_C$ la mesure duale basée sur la norme triangulaire $\perp$.

Dans le cas particulier où $\bar{g} = g$, les mesures d'incertain qui vérifient :

$$\forall A \in \mathcal{K} \quad \bar{g}_C(A) = g(A) = c[g(\bar{A})] \quad (33)$$

avec c négation forte, sont appelées mesures d'incertain auto-duales ou mesures de pseudo-probabilité.

Pour ces mesures, la connaissance de $g(A)$ équivaut à celle de $g(\bar{A})$.

Exemple 13 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et la mesure de Sugeno correspondant à $\lambda = 1$.

La connaissance de g_1 pour les singletons de X , permet la construction de la table de g avec la conorme $a \times b = \min(1, a+b+ab)$. Les éléments $g_1(\bar{A})$ s'obtiennent à partir de ceux de $g_1(A)$ par la formule :

$$g_1(\bar{A}) = \frac{1 - g_1(A)}{1 + g_1(A)} = c_1[g_1(A)]$$

où $c_1(t) = \frac{1-t}{1+t}$ est la négation de Sugeno.

De même, la connaissance de $\bar{g}_1$ pour les éléments composites de X redonne la même table $\bar{g}_1$ en utilisant la norme duale $a \perp b = \max(0, \frac{a+b+ab-1}{2})$.

A	$g_1(A)$	$\bar{g}_1(A)$
$\emptyset$	0	0
{a}	$\boxed{1/15}$	1/15
{b}	$\boxed{1/4}$	1/4
{c}	$\boxed{1/2}$	1/2
{a,b}	1/3	$\boxed{1/3}$
{a,c}	3/5	$\boxed{3/5}$
{b,c}	7/8	$\boxed{7/8}$
{a,b,c}	1	1

g_1 et $\bar{g}_1$ sont des mesures de pseudo-probabilité.

Exemple 14 :

Envisageons les conormes nilpotentes g basées sur l'opérateur de Yager :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{K} \\ \forall B \in \mathcal{K} \end{aligned} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } g(A \cup B) = \sqrt[q]{g(A)^q + g(B)^q} \quad \text{avec } q > 0 \quad (34)$$

La fonction génératrice est $\phi(t) = t^q$ et la condition de normalisation $\sum_{i=1}^n (g_1)^q = 1$. La négation forte associée à la

conorme est $c(t) = \sqrt[q]{1-t^q}$ et la mesure d'incertain duale est définie par :

$$\begin{aligned} & \forall A \in \mathcal{F} \\ & \forall B \in \mathcal{L} \quad \text{si } A \cup B = X \text{ alors } \bar{g}(A \cap B) = \sqrt[q]{g(A)^q + \bar{g}(B)^q - 1} \end{aligned} \quad (35)$$

g et $\bar{g}$ sont des mesures de pseudo-probabilité.

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et prenons $q = 2$:

A	$g_2(A)$	$\bar{g}_2(A)$
$\emptyset$	0	0
{a}	.3	.3
{b}	.4	.4
{c}	.866	.866
{a,b}	.5	.5
{a,c}	.916	.916
{b,c}	.954	.954
{a,b,c}	1	1

4.7. Les deux classes de mesures d'incertain décomposables :

- 1) A toute norme et conorme nilpotentes t-duales, pour une densité $\{g_i\}_{i=1,n}$ telle que $\sum_{i=1}^n \phi(g_i) = \phi(1)$ que l'on utilise la relation (1.3') ou la relation (19), on n'obtient qu'une seule mesure d'incertain (cas des mesures d'incertain auto-duales) : une mesure de pseudo-probabilité.

La connaissance de $g(A)$ détermine alors complètement celle de $g(\bar{A})$.

- 2) Par contre, pour une densité donnée $\{g_i\}_{i=1,n}$ avec $\max_{i=1,n} g_i = 1$, à toute norme stricte (ou à toute norme supérieure ou égale à l'opération produit) et à la conorme duale stricte (ou à la conorme duale inférieure ou égale à la somme probabiliste) correspond deux mesures d'incertain, en général distinctes :

- une mesure de pseudo-possibilité définie par (1.3'),
- la mesure de pseudo-nécessité duale définie par (19).

$g(\bar{A})$ n'est pas toujours déductible de $g(A)$.

5. DEUXIEME CONSTRUCTION DES MESURES D'INCERTAIN : MESURES DE CREDIBILITE ET DE PLAUSIBILITE

On affecte à chacun des sous-ensembles de X une fonction de poids.

5.1. Crédibilité et plausibilité au sens de Shäfer :

Indépendamment de la théorie des ensembles flous et de la théorie des possibilités, Shäfer [SHA-76] introduit les mesures de crédibilité et de plausibilité.

Une mesure de crédibilité Cr est une fonction de $\mathcal{P}(X)$ ensemble des parties de X (fini) dans $[0,1]$ telle que :

- i) $Cr(\emptyset) = 0$
- ii) $Cr(X) = 1$
- iii) $\forall A_i \subseteq X \quad i=1, \dots, k$ avec $0 < k \leq 2^n$

$$Cr\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \geq \sum_{i=1}^k Cr(A_i) - \sum_{i < j} Cr(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{k+1} Cr\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right)$$

La relation précédente de superadditivité s'écrit pour $k=2$:

$$Cr(A \cup B) \geq Cr(A) + Cr(B) - Cr(A \cap B).$$

Toute mesure de crédibilité est complètement définie à partir d'une fonction m, appelée pondération probabiliste de base, de $\mathcal{P}(X)$ dans $[0,1]$ telle que :

$$\begin{cases} m(\emptyset) = 0 \\ \sum_{A \subseteq X} m(A) = 1 \end{cases}$$

La crédibilité de A se calcule à partir de la pondération probabiliste de base m, par la relation :

$$\forall A \subseteq X \quad Cr(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (36)$$

La crédibilité de A est obtenue en sommant tous les poids en faveur de l'information incertaine associée aux ensembles inclus dans A.

$Cr(A)$ et $Cr(\bar{A})$ vérifient l'inégalité :

$$\forall A \subseteq X \quad Cr(A) + Cr(\bar{A}) \leq 1 \quad (37)$$

Le référentiel X peut recevoir lui-même une valeur $m(X)$ non nulle, qui correspond à la part allouée à l'ignorance totale.

La pondération probabiliste de base m n'est pas une mesure d'incertain ; elle ne satisfait pas (1) ; m est une pondération relative.

Par dualité, la mesure de plausibilité Pl est définie par :

$$\forall A \subseteq X \quad Pl(A) = 1 - Cr(\bar{A}) \geq Cr(A) \quad (38)$$

La plausibilité d'un événement est toujours plus grande que sa crédibilité. La plausibilité Pl vérifie :

- i) $Pl(\emptyset) = 0$
- ii) $Pl(X) = 1$
- iii) $\forall A_i \subseteq X \quad i=1, \dots, k$ avec $0 < k \leq 2^n$

$$Pl\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k Pl(A_i) - \sum_{i < j} Pl(A_i \cup A_j) + \dots + (-1)^{k+1} Pl\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)$$

La relation précédente de subadditivité s'écrit pour $k=2$:

$$Pl(A \cup B) \leq Pl(A) + Pl(B) - Pl(A \cap B)$$

Toute mesure de plausibilité est complètement définie à partir de la pondération probabiliste de base :

$$\forall A \subseteq X \quad Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (39)$$

La plausibilité correspond à la somme des poids en faveur de l'information incertaine associée aux ensembles qui possèdent une partie commune avec A.

$Pl(A)$ et $Pl(\bar{A})$ vérifient l'inégalité :

$$\forall A \subseteq X \quad Pl(A) + Pl(\bar{A}) \geq 1 \quad (40)$$

Crédibilité et plausibilité sont des mesures d'incertain puisqu'elles vérifient (1).

5.1.1. Eléments focaux :

Un sous-ensemble A de X tel que $m(A) > 0$ est appelé élément focal (ou noyau) de la mesure de crédibilité associée à m.

Dans le cas général d'une mesure de crédibilité ou de plausibilité, les éléments focaux n'ont pas besoin d'être disjoints, ni de former un recouvrement de X.

Une information certaine sera représentée par un seul élément focal A qui recevra le poids 1, ce qui exprimera que l'on est sûr que l'information est correctement représentée par A, et par A seulement.

Dans le cas particulier où tous les éléments focaux de la pondération probabiliste de base m se réduisent aux seuls singletons de X, alors :

$$\forall A \subseteq X \quad Pl(A) = Cr(A) = P(A),$$

où $P(A)$ est la probabilité de A. La pondération probabiliste de base est alors la densité de probabilité.

L'approche de l'incertain par des mesures de crédibilité et de plausibilité est plus fine que celle procurée par les probabilités où la connaissance de $P(A)$ détermine celle de $P(\bar{A})$. L'intérêt des mesures de crédibilité et de plausibilité est que deux propositions contraires A et $\bar{A}$ peuvent apparaître toutes les deux plausibles sans être crédibles.

Exemple 15 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et la fonction d'ensemble m (pondération probabiliste de base) :

A	m(A)	Cr(A)	Pl(A)
$\emptyset$	0	0	0
{a}	.1	.1	.6
{b}	.2	.2	.65
{c}	.1	.1	.65
{a,b}	.05	.35	.9
{a,c}	.15	.35	.8
{b,c}	.1	.4	.9
{a,b,c}	.3	1	1

Réciproquement, si l'on connaît la crédibilité, on peut déterminer la pondération probabiliste de base m par la formule :

$$\forall A \subseteq X \quad m(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A-B|} Cr(B) \quad (41)$$

5.1.2. Fonctions de communalité :

A toute mesure de crédibilité, on peut associer une autre fonction d'ensemble que la pondération probabiliste de base m , une fonction de communalité de $\mathcal{P}(X)$ dans $[0,1]$ telle que :

$$Q(\emptyset) = 1 \text{ et } \forall x \in X \quad Q(\{x\}) = Pl(\{x\})$$

Crédibilité et fonction de communalité sont reliées par la relation :

$$\forall A \subseteq X \quad Cr(A) = \sum_{B \cap A = \emptyset} (-1)^{|B|} Q(B) \quad (42)$$

ou réciproquement :

$$\forall A \subseteq X \quad Q(A) = \sum_{B \supseteq A} m(B) \quad (43)$$

Exemple 16 :

Reprenons l'exemple précédent ; la fonction de communalité correspondante est donnée dans le tableau suivant :

A	Cr(A)	Q(A)	Pl(A)
$\emptyset$	0	1	0
{a}	.1	.6	.6
{b}	.2	.65	.65
{c}	.1	.65	.65
{a,b}	.35	.35	.9
{a,c}	.35	.45	.8
{b,c}	.4	.4	.9
{a,b,c}	1	.3	1

5.2. Diverses classes de mesures de crédibilité ou de plausibilité :

On considère un certain nombre de cas particuliers de mesures de crédibilité ou de plausibilité.

5.2.1. Les fonctions de corroboration simple :

Elles sont telles que la pondération probabiliste de base est partout nulle sauf :

sur un sous-ensemble Y de X où elle vaut s , et sur X où elle vaut $1-s$.

Connaissant la pondération probabiliste de base m , on en déduit la crédibilité et la plausibilité $s \in [0,1]$:

$$\forall A \subseteq X, \quad Cr(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \not\supseteq Y \\ s & \text{si } A \supseteq Y \text{ et } A \neq X \\ 1 & \text{si } A = X \end{cases} \quad (44)$$

et :

$$\forall A \subseteq X, \quad Pl(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \cap Y \neq \emptyset \\ 1-s & \text{si } A \cap Y = \emptyset \text{ et } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } A = \emptyset \end{cases} \quad (45)$$

Exemple 17 :

Considérons $X = \{a,b,c\}$ et la corroboration simple définie sur $Y = \{a,b\}$ avec $s = .3$:

A	m(A)	Cr(A)	Pl(A)
$\emptyset$	0	0	0
{a}	0	0	1
{b}	0	0	1
{c}	0	0	.7
{a,b}	.3	.3	1
{a,c}	0	0	1
{b,c}	0	0	1
{a,b,c}	.7	1	1

5.2.2. Les fonctions de corroboration consonante :

Pour de telles fonctions, l'ensemble des éléments focaux $\{A \subseteq X, m(A) > 0\}$ forme une suite de sous-ensembles emboîtés $A_1 \subseteq A_2 \leq A_m$ (si $A \neq A_i$ $i=1,n$, alors $m(A) = 0$).

Exemple 18 :

Considérons $X = \{a,b,c\}$ et la pondération probabiliste de base m telle que $m(\{a\}) = .1$, $m(\{a,b\}) = .3$ et $m(\{a,b,c\}) = .6$:

A	m(A)	Cr(A)	Pl(A)
$\emptyset$	0	0	0
{a}	.1	.1	1
{b}	0	0	.9
{c}	0	0	.6
{a,b}	.3	.4	1
{a,c}	0	.1	1
{b,c}	0	0	.9
{a,b,c}	.6	1	1

Pour des fonctions de corroboration consonante, on vérifie que :

$$\forall A \subseteq X \quad Cr(A \cap B) = \min(Cr(A), Cr(B)) \quad (46)$$

$$\forall B \subseteq X \quad Pl(A \cup B) = \max(Pl(A), Pl(B)) \quad (47)$$

Si les éléments focaux sont emboîtés (cas des fonctions de corroboration consonante), alors la fonction de plausibilité de Shäfer se confond avec la mesure de possibilité au sens de Zadeh. La fonction de crédibilité se confond avec la mesure de nécessité.

5.2.3. Les mesures floues de Sugeno :

On considère les fonctions paramétrées de $\mathcal{G}$ dans $[0,1]$ telles que :

$$g_{\lambda}(A \cup B) = g_{\lambda}(A) + g_{\lambda}(B) + \lambda g_{\lambda}(A) \cdot g_{\lambda}(B) \quad (48)$$

avec $\lambda \in]-1, +\infty[$.

Pour $\lambda \geq 0$, les mesures g_{λ} sont des mesures de crédibilité, mais ne sont pas des mesures de nécessité sauf dans le cas trivial des mesures de Dirac telles que :

$$\exists x_0 \in X, \forall A \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} g(A) = 0 & \text{si } x_0 \notin A \\ g(A) = 1 & \text{si } x_0 \in A \end{cases}$$

Par dualité, pour $-1 < \lambda \leq 0$, les mesures g_{λ} sont des mesures de plausibilité, mais ne sont pas des mesures de possibilité, sauf dans le cas trivial des mesures de Dirac.

Pour un sous-ensemble A, on obtient deux mesures floues : une mesure de crédibilité et une mesure de plausibilité.

5.3. Densité et pondération probabiliste de base. Passage entre les deux constructions de mesures d'incertain :

Pour un ensemble X fini à n éléments, on peut construire une mesure d'incertain à partir d'une densité, c'est-à-dire, à partir de la connaissance de n-1 valeurs (en tenant compte de la contrainte de normalisation) (cf. exemples 3 à 15).

Par contre, à partir de la fonction d'ensemble m, pondération probabiliste de base, on construit une mesure d'incertain à partir de la connaissance de $2^n - 2$ valeurs (en tenant compte des contraintes $m(\emptyset) = 0$ et $\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1$). On examine successivement trois cas.

5.3.1. Mesure de possibilité ou de nécessité :

Une mesure de possibilité (ou de nécessité) peut s'exprimer à la fois en termes de densité $g_i = g(\{x_i\})$, $i=1, n$, ou en termes de pondération probabiliste de base sur des ensembles emboîtés. Les mesures de possibilité (ou de nécessité) sont des fonctions de corroboration consonante.

Connaissant la densité d'une mesure de possibilité, posons $\pi_i = \pi(\{x_i\}) = g_i$, $i=1, n$, en reconsidérant éventuellement l'ordre des x_i de façon que les valeurs π_i , $i=1, n$, soient rangées en ordre décroissant.

La pondération probabiliste de base est alors :

$$m_i = \pi_i - \pi_{i+1} \quad i=1, n \quad (49)$$

$$\text{avec } \pi_{n+1} = 0$$

Réciproquement, si l'on connaît la pondération probabiliste de base, on obtient la densité π_i :

$$\pi_i = \sum_{j=1}^n m_j \quad i=1, n \quad (50)$$

Exemple 19 :

Reprenons l'exemple 4 des mesures de possibilité :

$$\pi_1 = \pi(\{a\}) = 1$$

$$\pi_2 = \pi(\{b\}) = .3$$

$$\pi_3 = \pi(\{c\}) = .2$$

$$\text{Alors : } m_1 = m(\{a\}) = \pi_1 - \pi_2 = .7$$

$$m_2 = m(\{ab\}) = \pi_2 - \pi_3 = .1$$

$$m_3 = m(\{abc\}) = \pi_3 = .2$$

A	$\pi(A) = g(A)$	$m(A)$	$Cr(A)$	$Pl(A)$
$\emptyset$	0	0	0	0
{a}	1	.7	.7	1
{b}	.3	0	0	.3
{c}	.2	0	0	.2
{a,b}	1	.1	.8	1
{a,c}	1	0	.7	1
{b,c}	.3	0	0	.3
{a,b,c}	1	.2	1	1

Exemple 20 :

Reprenons l'exemple 10 des mesures de nécessité :

$$N_1 = N(\{c\}) = .7$$

$$N_2 = N(\{b,c\}) = .8$$

$$N_3 = N(\{a,b,c\}) = 1$$

$$\text{Alors : } m_1 = m(\{c\}) = .7$$

$$m_2 = m(\{b,c\}) = .8 - .7 = .1$$

$$m_3 = m(\{a,b,c\}) = .2$$

A	$N(A) = \bar{g}(A)$	$m(A)$	$Cr(A)$
$\emptyset$	0	0	0
{a}	0	0	0
{b}	0	0	0
{c}	.7	.7	.7
{a,b}	0	0	0
{a,c}	.7	0	.7
{b,c}	.8	.1	.8
{a,b,c}	1	.2	1

Exemple 21 :

Réciproquement, connaissant la pondération probabiliste de base consonante, on calcule la densité π_i :

$$m_1 = m(\{a\}) = .7$$

$$m_2 = m(\{a,b\}) = 0$$

$$m_3 = m(\{a,b,c\}) = .3$$

$$\text{Alors : } \pi_1 = \pi(\{a\}) = m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

$$\pi_2 = \pi(\{b\}) = m_2 + m_3 = .3$$

$$\pi_3 = \pi(\{c\}) = m_3 = .3$$

A	m	$Cr(A)$	$\pi(A) = g(A)$	$Pl(A)$
$\emptyset$	0	0	0	0
{a}	.7	.7	1	1
{b}	0	0	.3	.3
{c}	0	0	.3	.3
{a,b}	0	.7	1	1
{a,c}	0	.7	1	1
{b,c}	0	0	.3	.3
{a,b,c}	.3	1	1	1

5.3.2. Mesures de Sugeno :

Pour $\lambda \geq 0$, aux mesures de crédibilité g_λ définies pour une densité, correspond la pondération probabiliste de base associée, donnée par $[\bar{BAN}_0 - 81]$:

$$\forall A \subseteq X, m(A) = \lambda^{|A|-1} \prod_{x_i \in A} g_i \quad \text{avec } \lambda \geq 0 \quad (50)$$

$$\text{et } g_i = g_\lambda(\{x_i\})_{i=1,n}$$

En considérant la bijection involutive $\lambda \mapsto \frac{-\lambda}{1+\lambda}$ de $]-1,0]$ dans $]0,+\infty[$, les mesures g_λ de crédibilité avec $\lambda \geq 0$ permettent de définir les mesures de plausibilité :

$$g_{\lambda'} = \frac{-\lambda}{1+\lambda} \quad \text{avec } \lambda' \in]-1,0]$$

en utilisant la relation :

$$\forall A \subseteq X \quad g - \frac{\lambda}{1+\lambda} (A) = 1 - g_\lambda(\bar{A}) \quad (51)$$

Exemple 22 :

Considérons l'ensemble $X = \{a, b, c\}$:

A	$g_{10}(A)$	$m(A)$	$g_{\frac{10}{11}}(A)$
$\emptyset$	0	0	0
$\{a\}$	1/12	1/12	1/2
$\{b\}$	1/10	1/10	11/20
$\{c\}$	1/5	1/5	11/15
$\{a, b\}$	4/15	1/12	4/5
$\{a, c\}$	9/20	1/6	9/10
$\{b, c\}$	1/2	1/5	11/12
$\{a, b, c\}$	1	1/6	1

Crédibilité

Plausibilité

Pour un même ensemble A, on obtient deux mesures floues : une mesure de crédibilité et une mesure de plausibilité.

Réciproquement, connaissant la pondération probabiliste de base m, on peut calculer la mesure de Sugeno par la formule :

$$g(A) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \prod_{x_i \in A} [1 + \lambda m(x_i)] - 1 \right\} \quad \text{si } \lambda \neq 0 \quad (52)$$

5.3.3. Somme probabiliste ou produit :

Connaissant une densité $g_i = g(\{x_i\})_{i=1,n}$ attachée à une mesure basée sur la conorme somme probabiliste, on peut déterminer la pondération probabiliste de base associée par la formule :

$$\forall A \subseteq X, m(A) = \prod_{x_i \in A} g_i \prod_{x_i \in \bar{A}} (1 - g_i) \quad (53)$$

Exemple 23 :

Reprenons l'exemple 5 correspondant à la conorme $a \times b = a + b - ab$:

A	$g(A)$	$m(A)$
$\emptyset$	0	0
$\{a\}$	.2	0
$\{b\}$	.3	0
$\{c\}$	1	0.56
$\{a, b\}$	0.44	0
$\{a, c\}$	1	.14
$\{b, c\}$	1	.24
$\{a, b, c\}$	1	.06

Pour une densité $\bar{g}_i = \bar{g}(\{x_i\})_{i=1,n}$ attachée à une mesure basée sur la norme duale produit, on peut déterminer la pondération probabiliste de base associée par la formule :

$$\forall A \subseteq X, \quad m(A) = \prod_{x_i \in \bar{A}} g_i' \prod_{x_i \in A} (1 - g_i') \quad (54)$$

avec $g_i' = \bar{g}(\{x_i\})_{i=1,n}$

Exemple 24 :

Reprenons l'exemple 12 correspondant à la norme $a \perp b = ab$:

A	$\bar{g}(A)$	m(A)
$\emptyset$	0	0
{a}	0	0
{b}	0	0
{c}	.56	.56
{a,b}	0	0
{a,c}	.7	.14
{b,c}	.8	.24
{a,b,c}	1	.06

5.3.4. Conclusion :

Toutes les mesures d'incertain basées sur des normes ou des conormes triangulaires ne sont pas des mesures de crédibilité ou de plausibilité. Une mesure d'incertain basée sur T_w ou sur S_w ne peut pas être une mesure de crédibilité ou de plausibilité.

La relation exacte entre les mesures de crédibilité et de plausibilité et les mesures basées sur des normes ou sur des conormes triangulaires, reste à découvrir, si elle existe.

5.4. Approche d'une mesure de plausibilité ou de crédibilité :

On peut approcher une mesure de plausibilité Pl ou une mesure de crédibilité Cr dont la pondération probabiliste ne se ramène pas à une densité, par une mesure d'incertain basée sur une densité.

5.4.1. Approche d'une mesure de plausibilité par une mesure de possibilité ou d'une mesure de crédibilité par une mesure de nécessité :

Pour tout $A \subseteq X$:

$$\begin{aligned} Pl(A) &= \sum_{B \subseteq X} \left(\sup_{x \in A} \chi_B(x) \cdot m(B) \right) \geq \sup_{x \in A} \left(\sum_{B \subseteq X} \chi_B(x) \cdot m(B) \right) = \\ &= \sup_{x \in A} Pl(\{x\}) \end{aligned}$$

où χ_B est la fonction caractéristique de B :

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

Le membre de droite est normalisé si, et seulement si :

$$\exists x \in X \text{ tel que } Pl(\{x\}) = 1, \text{ c'est-à-dire } \bigcap_{B \in X} B \neq \emptyset$$

$$m(B) > 0$$

donc, si les éléments focaux ont une intersection non vide.

On peut alors approcher la plausibilité par une mesure de possibilité $\Pi(A)$ dont la densité est déterminée par :

$$\Pi(\{x\}) = Pl(\{x\}) \quad \forall x \in X$$

De même, pour tout $A \subseteq X$:

$$Cr(A) \leq \inf_{x \in A} \left(\sum_{B \subseteq X} \chi_B(x) \cdot m(B) \right) = \inf_{x \in A} (1 - Pl(\{x\}))$$

Si les éléments focaux ont une intersection non vide, on peut approcher la crédibilité par une mesure de nécessité $N(A)$ dont la densité est déterminée par $N(\{x'\}) = 1 - Pl(\{x'\})$ pour tout x' appartenant à l'ensemble des éléments composites de la forme $X - \{x\}$ (c'est-à-dire ceux comprenant exactement $(n-1)$ éléments). Si les éléments focaux ont une intersection non vide, alors on a les inégalités suivantes :

$$\forall A \subseteq X \quad 0 \leq Cr(A) \leq N(A) \leq \Pi(A) \leq Pl(A) \leq 1$$

Exemple 25 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et la pondération probabiliste de base m telle que $m(\{a\}) = .2$, $m(\{a, b\}) = .3$, $m(\{a, c\}) = .1$ et $m(\{a, b, c\}) = .4$. L'intersection des éléments focaux est $\{a\}$ et est donc non vide.

A	m(A)	Cr(A)	N(A) = $\bar{g}(A)$	$\Pi(A) = g(A)$	Pl(A)
$\emptyset$	0	0	0	0	0
$\{a\}$	.2	.2	.3	1	1
$\{b\}$	0	0	0	.7	.7
$\{c\}$	0	0	0	.5	.5
$\{a, b\}$	.3	.5	.5	1	1
$\{a, c\}$	.1	.3	.3	1	1
$\{b, c\}$	0	0	0	.7	.8
$\{a, b, c\}$	.4	1	1	1	1

5.4.2. Approche d'une mesure de plausibilité ou de crédibilité par une mesure de probabilité :

On peut approcher une mesure de plausibilité ou une mesure de crédibilité par une probabilité en équirépartissant les valeurs de la pondération probabiliste de base m . On construit alors la densité de probabilité telle que :

$$\forall x \in X, p(x) = \sum_{B \supseteq \{x\}} \frac{1}{|B|} \cdot m(B)$$

où $|B|$ est le cardinal de B .

On obtient alors les inégalités suivantes :

$$\forall A \subseteq X, Cr(A) \leq P(A) \leq Pl(A)$$

Exemple 26 :

Considérons $X = \{a, b, c\}$ et la pondération probabiliste de base de l'exemple 15 :

$$p(a) = m(\{a\}) + \frac{m(\{a, b\})}{2} + \frac{m(\{a, c\})}{2} + \frac{m(\{a, b, c\})}{3} = .3$$

$$p(b) = m(\{b\}) + \frac{m(\{b, c\})}{2} + \frac{m(\{a, b\})}{2} + \frac{m(\{a, b, c\})}{3} = .375$$

$$p(c) = m(\{c\}) + \frac{m(\{b, c\})}{2} + \frac{m(\{a, c\})}{2} + \frac{m(\{a, b, c\})}{3} = .325$$

A	m(A)	Cr(A)	p(A)	Pl(A)
$\emptyset$	0	0	0	0
{a}	.1	.1	.3	.6
{b}	.2	.2	.375	.65
{c}	.1	.1	.325	.65
{a, b}	.05	.35	.675	.9
{a, c}	.15	.35	.625	.8
{b, c}	.1	.4	.7	.9
{a, b, c}	.3	1	1	1

5.5. Mesures d'information :

L'objet de ces mesures est de caractériser le degré de croyance en la pondération probabiliste de base.

Soit un référentiel X comprenant un nombre n fini d'éléments et $\mu_{A'}(x)$ la fonction d'appartenance à un ensemble A' flou de X . Rappelons que A' est normalisé s'il existe un $x_k \in X$ pour lequel $\mu_{A'}(x_k) = 1$.

Si l'on connaît la pondération probabiliste de base $m(B)$ pour toutes les parties de X , alors on peut introduire une fonction dépendant du cardinal de chacun des sous-ensembles de X et calculer une quantité notée :

$$F(m, f) = \sum_{B \subseteq X} m(B) \cdot f(|B|)$$

Si $f(|B|)$ est une fonction décroissante de $|B|$, alors $F(m, f)$ est une mesure de spécificité (ou de précision) qui porte l'attention sur les $m(B) > 0$ avec $|B|$ faible.

Si $f(|B|)$ est une fonction croissante de $|B|$, alors $F(m, f)$ est une mesure d'imprécision qui porte l'attention sur les $m(B) > 0$ avec $|B|$ grand.

5.5.1. Mesure de spécificité (ou de précision) de Yager :

Une mesure de spécificité satisfait les conditions suivantes :

- i) $\forall A'$ sous-ensemble flou de X , $Sp(A') \in [0, 1]$
- ii) $Sp(A') = 1 \iff A'$ est un singleton de X
- iii) A' et B' normalisés :

$$A' \subseteq B' (\mu_{A'}(x_i) \leq \mu_{B'}(x_i)) \Rightarrow Sp(A') \geq Sp(B')$$

$$i=1, n$$

Les éléments de A' étant rangés suivant les valeurs décroissantes de $\mu_{A'}(x)$, créons un élément fictif x_{n+1} tel que $\mu_{A'}(x_{n+1}) = 0$.

La spécificité d'un ensemble flou normalisé A' est définie par :

$$Sp(m) = Sp(A') = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{A'}(x_i) - \mu_{A'}(x_{i+1})}{i} \quad (55)$$

Dans le cas où l'on peut définir une pondération probabiliste de base m , par exemple pour une distribution de possibilité, la spécificité de l'ensemble flou A' s'exprime aussi par :

$$Sp(m) = Sp(A') = \sum_{B \subseteq X} \frac{m(B)}{|B|} \quad (56)$$

(cas de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$)

Exemple 27 :

Reprenons les données de l'exemple 19 :

$$\Pi(\{a\}) = \mu(\{x_1\}) = 1$$

$$\Pi(\{b\}) = \mu(\{x_2\}) = .3$$

$$\Pi(\{c\}) = \mu(\{x_3\}) = .2$$

$$A' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline 1 & .3 & .2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} Sp(A') &= \frac{\Pi(\{a\}) - \Pi(\{b\})}{1} + \frac{\Pi(\{b\}) - \Pi(\{c\})}{2} + \frac{\Pi(\{c\})}{3} \\ &= \frac{1 - 0.3}{1} + \frac{0.3 - 0.2}{2} + \frac{0.2}{3} = \frac{28}{15} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} Sp(A') &= m(\{a\}) + \frac{m(\{a, b\})}{2} + \frac{m(\{a, b, c\})}{3} \\ &= 0.7 + \frac{0.1}{2} + \frac{0.2}{3} = \frac{28}{15} \end{aligned}$$

- $Sp(A')$ est minimum et égal à $\frac{1}{n}$ dans le cas de l'ignorance totale :

$$m(X) = 1 \text{ et } \forall A \neq X, m(A) = 0 \text{ alors } Sp(A') = \frac{1}{n}$$

- $Sp(A')$ est maximum et égal à 1 dans le cas où tous les éléments focaux sont des singletons, donc pour des mesures de probabilité.

La spécificité évalue donc à quel point la pondération probabiliste de base m s'éloigne d'une densité de probabilité.

5.5.2. Degré d'imprécision de Higashi et Klir :

Higashi et Klir introduisent le degré d'imprécision d'un ensemble flou A' normalisé :

$$U(A') = HI(m) = \sum_{B \subseteq X} m(B) \cdot \log_2(|B|)$$

(cas de la fonction $f(x) = \log_2 x$)

Le degré d'imprécision $U(A')$ satisfait les conditions suivantes :

$$i) \forall A' \subseteq X, U(A') \in [0, +\infty[$$

$$ii) U(A') = 0 \Leftrightarrow A' \text{ est un singleton de } X$$

$$iii) A' \subseteq B' \Rightarrow U(A') \leq U(B')$$

- . $U(A')$ est maximum et vaut $\log_2 n$ dans le cas de l'ignorance totale.
- . $U(A')$ est minimum et vaut 0 dans le cas où tous les éléments focaux sont des singletons, donc pour des mesures de probabilité.

$U(A')$ procure une estimation de l'imprécision des éléments focaux de A' .

Le cas d'une mesure de probabilité correspond au maximum de précision des éléments focaux et au minimum de conflit entre eux, puisque ces éléments focaux sont des singletons qui ne se recouvrent pas.

Dans le cas d'une mesure de possibilité, il n'y a pas de conflit puisque les éléments focaux sont emboîtés et seule l'imprécision subsiste.

5.5.3. Degré de confusion de Höhle :

Pour une crédibilité, Höhle a proposé d'introduire le degré de confusion :

$$HC(m) = - \sum_{B \subseteq X} m(B) \cdot \ln[Cr(B)]$$

- . $HC(m)$ est minimum et vaut 0 dans le cas où la pondération probabiliste de base ne possède qu'un seul élément focal.
- . $HC(m)$ est maximum si la pondération probabiliste est équirépartie sur un nombre maximum d'éléments focaux tels qu'il n'y ait pas deux éléments focaux inclus l'un dans l'autre (alors $m(A) > 0 \Rightarrow m(A) = Cr(A)$).

$HC(m)$ peut être considéré comme un bon indicateur de la confusion de l'information incertaine représentée par m .

Exemple 27 :

Pour $X = \{a, b, c, d\}$, alors $HC(m) = \ln 6$.

5.5.4. Degré de dispersion de Yager :

Pour une plausibilité, Yager a proposé d'introduire le degré de dispersion :

$$HD(m) = - \sum_{B \subseteq X} m(B) \ln[P1(B)]$$

- . $HD(m)$ est minimum et vaut 0 dans le cas où les éléments focaux ont une intersection non vide (cas d'un minimum de cohérence entre les éléments focaux ; cf. exemple 24). En particulier, pour une distribution de possibilité, les éléments focaux sont emboîtés et le degré de dispersion est nul.

- . HD(m) est maximum si la pondération probabiliste de base est équirépartie sur les singletons de X (cas d'un maximum d'éléments focaux disjoints, alors $m(A) > 0 \Rightarrow m(A) = Pl(A)$).

HD(m) évalue la dispersion des éléments focaux.

Les propriétés de ces différents indices (additivité et projection) ont été étudiées par Dubois et Prade [DUB 85b et 86b].

CHAPITRE 7

APPLICATION À LA RECONNAISSANCE DES PHONÈMES

Notre objectif est de mettre en application les concepts théoriques développés précédemment. Nous partons d'un problème de reconnaissance de formes et, d'une façon plus précise, de reconnaissance de phonèmes et nous aboutissons à des résultats numériques pour apprécier la qualité de la reconnaissance.

1. LES FORMES ACOUSTIQUES

Les données acoustiques de chaque phonème sont issues d'un analyseur spectral : c'est un banc de 32 filtres :

le premier filtre est un passe-bas à 200 Hz,
le dernier filtre est un passe-haut à 6400 Hz.

Les trente autres sont des passe-bandes dont les fréquences centrales sont approximativement en progression géométrique. L'intervalle entre deux fréquences centrales successives est légèrement inférieur à un ton musical.

Tous les filtres sont des filtres du second ordre. La sortie analogique de chaque filtre est redressée, puis intégrée durant 1/50e de seconde. A l'issue de cette période, la sortie des intégrateurs est convertie en valeurs numériques sur 6 bits : on aura donc des résultats numériques dans la plage 0-63.

Pour constituer le corpus des échantillons servant aux expériences, on analyse un mot. Le résultat est listé et on choisit un échantillon (32 données) au milieu de la zone "stable" d'un phonème.

On a effectué deux relevés à environ un mois d'intervalle, desquels on extrait respectivement :

- 24 phonèmes : 3 occurrences de huit phonèmes différentes (fichier PHON 1),

- 12 phonèmes (fichier PHON 2).

2. LE CHOIX DES PHONEMES

On a choisi, pour les expériences, huit phonèmes qui présentent la particularité :

- soit de se ressembler fortement entre eux ;
exemple : |s| et |z| ou |ɔ| et |o|;

- soit d'être très différents des autres ;
exemple : |a| et |s|.

Les huit phonèmes sont les suivants (il leur est associé un numéro de code tout-à-fait arbitraire) :

Phonèmes	y	i	a	s	f	z	ɔ	o
N° de code	9	1	4	18	17	21	6	7

TABEAU PHON 1

N° code	24	14	33	19	10	5	4	1	0	1	1	0	1	1	0	0
9	1	1	1	1	6	10	4	3	2	0	1	2	2	0	4	5
1	6	15	13	6	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	5	12	8	10	8	11	8	11	21	20	7	7	10	7	1	1
4	1	2	3	3	7	2	2	3	5	3	5	4	2	0	3	3
4	4	8	5	5	3	4	6	8	13	14	11	20	18	8	2	2
18	5	7	8	4	2	1	1	1	4	4	4	5	7	11	7	4
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	1	1	0	1	1	1	2	3	4	12	25	33	50	60	34
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	5	16	10
1	7	15	11	7	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	7	11	11	10	15	10
21	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	1	2	4	12	24	28	52	64	31
4	4	10	8	5	7	9	17	8	8	22	24	13	12	8	5	4
6	5	7	8	4	2	1	0	0	1	0	3	2	2	3	3	2
6	4	7	6	7	8	12	25	12	7	15	22	12	10	7	8	8
6	14	13	7	3	2	1	2	0	0	0	1	1	1	0	2	3
6	11	10	12	16	22	20	14	16	8	5	5	2	3	3	0	4
9	9	10	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	4	5
9	11	23	50	20	23	6	3	3	0	0	1	1	2	1	0	0
9	1	1	2	1	6	5	6	2	1	0	5	4	2	2	5	4
9	9	10	15	18	8	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	3	4
7	9	20	18	38	18	18	10	5	5	8	4	9	15	8	3	2
17	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	2	5	3
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	5	9	13	18	11
21	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	1	1	2	3	11	22	33	51	60	30
7	8	14	24	32	49	13	8	3	0	2	3	2	2	3	6	8
1	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	3	5	3
1	12	4	13	5	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
17	0	1	0	0	0	0	2	0	1	1	6	10	8	4	7	5
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	4	12	9
6	10	5	8	6	9	15	11	18	22	10	16	15	10	9	6	10
21	9	6	3	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3	3	3	2
21	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	2	0	1	2	9	21	30	56	50	35
7	19	12	25	19	23	5	6	2	0	2	1	2	3	2	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	5	5
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	2	3	13	28	31	53	58	28

Ainsi, pour le premier phonème, dont le numéro de code est 9, la matrice B_1 est la suivante :

$$B_1(\text{code n}^\circ 9) = \begin{matrix} & 9 & 1 & 4 & 18 & 17 & 21 & 6 & 7 \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

3.1.3. Calcul des matrices R_i :

Pour chacun des huit phonèmes $(A_i)_{i=1, \dots, 8}$, on calcule une relation floue R_i par l'équation floue :

$$R_i = {}^t A_i \odot B_i \quad i = 1, \dots, 8$$

où $\odot$ est l'opérateur de maximalisation (page 88) concordant avec chacune des sept normes suivantes :

MIN
PRODUIT
 T_m
HAMACHER ($\gamma = 1/2$)
HAMACHER ($\gamma = 2$)
SUGENO ($\lambda = -1/2$)
SUGENO ($\lambda = 1$)

3.2. Phase de reconnaissance :

On effectue la phase de reconnaissance à partir des 12 phonèmes $(\mathcal{H}_\ell)_{\ell=1, \dots, 12}$ du tableau PHON 2. Pour l'un des phonèmes $\mathcal{H}_\ell$ donné, du tableau PHON 2, on calcule

$d(A_i, \mathcal{H}_\ell)_{i=1, \dots, 8}$ où $d = \sum_{j=1}^{32} [\bar{A}_i(j) - \mathcal{H}_\ell(j)]^2$ est la distance euclidienne. On cherche le minimum de $d(A_i, \mathcal{H}_\ell)_{i=1, \dots, 8}$. Soit A_k le phonème n° k reconnu, tel que pour ℓ donné, $d(A_k, \mathcal{H}_\ell)$ soit minimum.

3.3. Interprétation :

Le problème de reconnaissance de formes peut être résolu par des méthodes plus élaborées que celle que nous avons utilisée, en particulier la reconnaissance aurait pu être effectuée par les sous-relations maximales de similitude et l'algorithme de Pichat [HIR-81].

Pour un phonème présenté, appelé $\mathcal{H}_\ell$, on obtient un résultat $\odot_\ell$, composé de huit valeurs $\mu_{\odot_\ell}(x_i)_{i=1, \dots, 8}$ considéré comme fonction caractéristique d'appartenance. Le calcul de $\odot_\ell$ s'effectue au moyen de la relation floue $R_k \circ \mathcal{H}_\ell = \odot_\ell$ où R_k est la relation floue associée au phonème reconnu, numéroté k, et " $\circ$ " les compositions suivantes :

MAX-MIN
MAX-PRODUIT
MAX- T_m
MAX-HAMACHER $\gamma = 1/2$
MAX-HAMACHER $\gamma = 2$
MAX-SUGENO $\lambda = -1/2$
MAX-SUGENO $\lambda = 1$

Le référentiel étant fini, nous appellerons les compositions MAX-MIN suivant l'usage et non SUP-MIN. La même étiquette étant utilisée pour les autres compositions.

Si $\mu_{B_1}(y_j) \in \{0, 1\}$, les matrices R_i ne comportent que deux colonnes différentes, donc le coefficient d'appartenance $\mu_{\odot_\ell}(y_k)$ correspondant au phonème reconnu est égal à 1 et toutes les autres valeurs $\mu_{\odot_\ell}(y_i)_{i \neq k}$ sont égales et différentes de 1.

De plus, l'opérateur de maximalisation τ intervient seulement pour des compositions a τ 0 et a τ 1. Or, a τ 1 = 1 pour toute valeur a et quelle que soit la composition "o", et

a τ 0 = 0 si la composition "o" est MAX-MIN ou MAX-PRODUIT ou MAX-HAMACHER.

Ainsi, les résultats sont identiques pour les trois compositions MAX-MIN, MAX-PRODUIT ou MAX-HAMACHER :

$$\mu_{B_i}(y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Résultats :

Phonème présenté : $\phi_1^{(2)} = 1$

Phonème reconnu : 1

"o" MAX-MIN MAX-PRODUIT MAX-HAMACHER	μ_{ϕ_1}	9	1	4	18	17	21	6	7
		.368	1.000	.368	.368	.368	.368	.368	.368

"o" MAX-T _m	μ_{ϕ_2}	.653	1.000	.653	.653	.653	.653	.653	.653
------------------------	----------------	------	-------	------	------	------	------	------	------

Phonème présenté : $\phi_2^{(2)} : 18$

Phonème reconnu : 21

"o" MAX-MIN MAX-PRODUIT MAX-HAMACHER	μ_{ϕ_1}	.068	.068	.068	.068	.068	1.000	0.068	0.068
--	----------------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------

"o" MAX-T _m	μ_{ϕ_1}	.426	.426	.426	.426	.426	1.000	.426	.426
------------------------	----------------	------	------	------	------	------	-------	------	------

3.3.1. Interprétation par les mesures de Sugeno :

Chacune des huit valeurs $\mu_{\phi_i}(x_i)_{i=1,\dots,8}$ est interprétée comme la mesure de crédibilité (ou de plausibilité) du classement obtenu.

On définit g sur l'ensemble des singletons :

$$g_i = g(\{x_i\}) = \mu_{\phi_i}(x_i) \quad i=1,\dots,8$$

La condition de normalisation est :

$$\prod_{i=1}^8 (1 + \lambda g_i) = 1 + \lambda$$

On détermine la valeur λ qui satisfait la condition de normalisation. On sait que λ est unique et les mesures d'incertain sont :

- des mesures de crédibilité si $\lambda > 0$,
- des mesures de plausibilité si $\lambda < 0$.

On calcule ensuite tous les $g(A)$ où A est un sous-ensemble composé de 1 à 8 éléments. Les résultats ne sont donnés que pour les $g(A)$ où A est composé de 1, 2 ou 3 éléments (appelés groupes). De plus, on n'indique pour chaque $g(A)$ que la valeur maximale pour un groupe de 1, 2 ou 3 éléments. On calcule aussi la valeur associée :

$$\text{soit } Cr(A) = 1 - Pl(\bar{A})$$

$$\text{soit } Pl(A) = 1 - Cr(\bar{A}).$$

Résultats :

Puisque $\mu_G(y_k) = 1$, l'interprétation en termes de mesures de Sugeno conduit à la valeur $\lambda = -1$, donc à une plausibilité. Les mesures de plausibilité s'effectuent donc sur des ensembles emboîtés ; nous avons toujours des mesures de possibilité.

Les résultats sont identiques pour les compositions MAX-MIN ou MAX-PRODUIT ou MAX-HAMACHER :

"o." MAX-MIN

ou MAX-PRODUIT

ou MAX-HAMACHER

$$\text{Numéro du phonème présenté : } \mu_{11}^{(2)} = 1$$

$$\text{Numéro du phonème reconnu : } 1$$

$$\lambda = -1 : \text{plausibilité}$$

$$\text{Groupe de 1 : } \{1\} \quad \text{créd} = 0.040 \quad \text{plaus} = 1.000$$

$$\text{Groupe de 2 : } \{9,1\} \{1,4\} \{1,18\} \{1,17\} \{1,21\} \{1,6\} \{1,7\}$$

$$\text{créd} = 0.063 \quad \text{plaus} = 1.000.$$

Il y a donc :

- 1 seul groupe A composé du phonème reconnu ;
- 7 groupes (C_7^1) composés du phonème reconnu et d'un autre phonème quelconque ;
- 21 groupes (C_7^2) composés du phonème reconnu et de deux autres phonèmes quelconques.

3.3.2. Interprétation en termes de mesures de possibilité sur des sous-ensembles emboîtés :

La condition de normalisation est $\max_i \{g_i\} = 1$. Les

mesures de possibilité μ_i (assimilées aux g_i normalisées) sont ordonnées. On en déduit la pondération probabiliste de base associée aux ensembles emboîtés (page 158).

Les résultats font apparaître les valeurs successives de $m(A)$ avec la liste des éléments qui composent le sous-ensemble A . En dernière ligne apparaît la part allouée à l'ignorance totale.

Les mesures de possibilité prennent en considération la part allouée à l'ignorance totale, ce qui constitue une interprétation numérique importante dans le cas des problèmes de reconnaissance de formes.

Remarquons que la norme T_m , ainsi que la norme de Sugeno, font intervenir le maximum. Si aucun maximum n'est utilisé, les résultats sont identiques pour les sept compositions. C'est le cas du phonème $\mu_{11}^{(2)}$.

$B \in \{0, 1\}$	MAX-MIN MAX-PRODUIT MAX-HAMACHER.5 MAX-HAMACHER.2	MAX-Tm	MAX-SUGENO $\lambda = -1/2$	MAX-SUGENO $\lambda = 1$
HD=0				
$R_{11}^{(2)} = 1$	m(1)=0.632 m(X)=0.368 Sp=0.678 HI=1.105 HC=0.368	m(1)=0.347 m(X)=0.653 Sp=0.429 HI=1.959 HC=0.278	m(1)=0.515 m(X)=0.485 Sp=0.576 HI=1.454 HC=0.351	m(1)=0.210 m(X)=0.790 Sp=0.309 HI=2.370 HC=0.186
$R_{12}^{(2)} = 18$	m(21)=0.932 m(X)=0.068 Sp=0.940 HI=0.205 HC=0.183	m(21)=0.574 m(X)=0.426 Sp=0.627 HI=1.279 HC=0.363	m(21)=0.721 m(X)=0.279 Sp=0.756 HI=0.837 HC=0.356	m(21)=0.421 m(X)=0.579 Sp=0.493 HI=1.738 HC=0.316
$R_{13}^{(2)} = 6$	m(6)=0.903 m(X)=0.097 Sp=0.915 HI=0.290 HC=0.226	m(6)=0.423 m(X)=0.577 Sp=0.495 HI=1.730 HC=0.317	m(6)=0.519 m(X)=0.481 Sp=0.579 HI=1.444 HC=0.352	m(6)=0.360 m(X)=0.640 Sp=0.440 HI=1.919 HC=0.286
$R_{14}^{(2)} = 6$	m(6)=0.926 m(X)=0.074 Sp=0.935 HI=0.222 HC=0.193	m(6)=0.531 m(X)=0.469 Sp=0.590 HI=1.407 HC=0.355	m(6)=0.608 m(X)=0.392 Sp=0.657 HI=1.175 HC=0.367	m(6)=0.479 m(X)=0.521 Sp=0.545 HI=1.562 HC=0.340
$R_{15}^{(2)} = 9$	m(9)=0.786 m(X)=0.214 Sp=0.813 HI=0.643 HC=0.330	m(9)=0.590 m(X)=0.410 Sp=0.641 HI=1.231 HC=0.365	m(9)=0.723 m(X)=0.277 Sp=0.758 HI=0.831 HC=0.356	m(9)=0.459 m(X)=0.541 Sp=0.527 HI=1.623 HC=0.332
$R_{16}^{(2)} = 4$	m(4)=1 Sp=1 HI=0 HC=0	m(4)=0.244 m(X)=0.756 Sp=0.338 HI=2.269 HC=0.211	m(4)=0.324 m(X)=0.676 Sp=0.408 HI=2.028 HC=0.265	m(4)=0.171 m(X)=0.829 Sp=0.275 HI=2.487 HC=0.155
$R_{17}^{(2)} = 4$	m(6)=0.630 m(X)=0.370 Sp=0.676 HI=1.111 HC=0.368	m(6)=0.630 m(X)=0.370 Sp=0.676 HI=1.111 HC=0.368	m(6)=0.630 m(X)=0.370 Sp=0.676 HI=1.111 HC=0.368	m(6)=0.553 m(X)=0.553 Sp=0.609 HI=1.341 HC=0.360
$R_{18}^{(2)} = 1$	m(1)=0.744 m(X)=0.256 Sp=0.776 HI=0.769 HC=0.349	m(1)=0.740 m(X)=0.260 Sp=0.773 HI=0.779 HC=0.350	m(1)=0.744 m(X)=0.256 Sp=0.776 HI=0.769 HC=0.349	m(1)=0.734 m(X)=0.266 Sp=0.767 HI=0.799 HC=0.352
$R_{19}^{(2)} = 1$	m(1)=0.596 m(X)=0.414 Sp=0.638 HI=1.241 HC=0.365	m(1)=0.358 m(X)=0.642 Sp=0.438 HI=1.925 HC=0.285	m(1)=0.388 m(X)=0.612 Sp=0.464 HI=1.837 HC=0.300	m(1)=0.342 m(X)=0.658 Sp=0.425 HI=1.973 HC=0.276
$R_{20}^{(2)} = 21$	m(17)=0.816 m(X)=0.184 Sp=0.839 HI=0.553 HC=0.312	m(17)=0.662 m(X)=0.338 Sp=0.704 HI=1.014 HC=0.367	m(17)=0.797 m(X)=0.203 Sp=0.822 HI=0.610 HC=0.324	m(17)=0.495 m(X)=0.505 Sp=0.558 HI=1.516 HC=0.345
$R_{21}^{(2)} = 17$	m(18)=0.700 m(X)=0.300 Sp=0.738 HI=0.900 HC=0.361	m(18)=0.700 m(X)=0.300 Sp=0.738 HI=0.900 HC=0.361	m(18)=0.700 m(X)=0.300 Sp=0.738 HI=0.900 HC=0.361	m(18)=0.700 m(X)=0.300 Sp=0.738 HI=0.900 HC=0.361
$R_{22}^{(2)} = 1$	m(1)=0.706 m(X)=0.294 Sp=0.743 HI=0.882 HC=0.360	m(1)=0.401 m(X)=0.599 Sp=0.476 HI=1.798 HC=0.307	m(1)=0.428 m(X)=0.572 Sp=0.500 HI=1.715 HC=0.320	m(1)=0.386 m(X)=0.614 Sp=0.463 HI=1.842 HC=0.300

Analysons les résultats correspondant au phonème /a/. En phase d'apprentissage, pour le phonème /a/ codé 4, après avoir effectué une moyenne, on obtient des coefficients tous strictement positifs. La composition a $\tau = 0$, avec $a > 0$, correspondant à la norme MIN ou PRODUIT ou HAMACHER, conduit à un résultat nul. Ainsi, la matrice R_k ne contient que des 1 dans la colonne 3 (voir position du code 4) et ne contient que des 0 dans les sept autres colonnes.

En phase de reconnaissance pour le phonème $R_6^{(2)}$ du tableau PHON 2 correspondant à un /a/, la normalisation s'effectue par rapport à la plus grande valeur (16). Un certain nombre de filtres ont des valeurs égales ou voisines de cette plus grande valeur. En envisageant la composition "o" MAX-MIN ou MAX-PRODUIT ou MAX-HAMACHER, on obtient :

	9	1	4	18	17	21	6	7
$\mu_{B_1} =$	.000	.000	1.000	.000	.000	.000	.000	.000

d'où le résultat $m(4) = 1$. Pour la composition "o" MAX-T_m ou MAX-SUGENO, on obtient de fortes valeurs pour la part allouée à l'ignorance totale.

Par contre, le phonème $R_7^{(2)}$ correspondant toujours à un /a/, les valeurs fournies par le tableau PHON 2 sont plus éloignées de la plus grande valeur (27).

4. DEUXIEME EXPERIENCE

On modifie la détermination des coefficients de la matrice B_1 .

Pour un phonème donné, ce phonème devant être reconnu, on lui attribue un coefficient d'appartenance égal à 1. Les coefficients d'appartenance sont donnés subjectivement pour les autres phonèmes suivant qu'ils ressemblent beaucoup ou assez ou un peu au phonème donné.

Premier essai :

Phonèmes	/y/	/i/	/a/	/s/	/f/	/z/	/ɔ/	/o/
Numéros de code	9	1	4	18	17	21	6	7

B pour le code 9	1	.7	.1	.1	.1	.1	.1	.1
B pour le code 1	.7	1	.3	.2	.1	.2	.2	.2
B pour le code 4	.3	.3	1	.1	.1	.1	.6	.6
B pour le code 18	.2	.3	.1	1	.7	.8	.1	.1
B pour le code 17	.2	.2	.1	.7	1	.6	.1	.1
B pour le code 21	.2	.2	.1	.8	.6	1	.1	.1
B pour le code 6	.3	.3	.4	.1	.1	.1	1	.8
B pour le code 7	.3	.3	.4	.1	.1	.1	.8	1

Résultats :

Phonème présenté : $\mathcal{H}_1^{(2)} = 1$

Phonème reconnu : 1

	9	1	4	18	17	21	6	7
"." MAX-MIN $\mu_{\mathcal{B}_1}$	1.000	1.000	.421	.421	.421	.421	.421	.421

"." MAX-PRODUIT $\mu_{\mathcal{B}_2}$	1.000	1.000	.865	.576	.421	.576	.576	.576
---------------------------------------	-------	-------	------	------	------	------	------	------

Phonème présenté : $\mathcal{H}_2^{(2)} = 18$

Phonème reconnu : 21

"." MAX-MIN $\mu_{\mathcal{B}_1}$	.205	.205	.205	.955	.955	1.000	.205	.205
-----------------------------------	------	------	------	------	------	-------	------	------

"." MAX-PRODUIT $\mu_{\mathcal{B}_2}$	.361	.361	.205	.955	.955	1.000	.205	.205
---------------------------------------	------	------	------	------	------	-------	------	------

L'un au moins des $\mu_{\mathcal{B}_i}(y_j)$ étant égal à 1, l'interprétation par les mesures de Sugeno conduit toujours à la valeur $\lambda = -1$, et donc à une plausibilité. Nous ne donnons que les résultats pour des mesures de possibilité.

Be[0,1] ler essai		MAXMIN	PROD	Tm	HAMACH $\gamma=1/2$	HAMACH $\gamma=2$	SUGENO $\lambda=-1/2$	SUGENO $\lambda=1$
$f_1^{(2)}=1$	m(9,1)	.579	.135	.047	.189	.087	.070	.028
	m(9,1,4)		.288	.100	.333	.221	.148	.060
	m(X)	.421	.421	.753	.421	.421	.633	.851
$f_2^{(2)}=18$	m(21)	.045	.045	.045	.045	.045	.045	.045
	m(21,18,17)	.750	.593	.328	.646	.514	.420	.233
	m(X)	.205	.205	.526	.205	.236	.407	.650
$f_3^{(2)}=6$	m(6,7)	.226	.226	.226	.226	.226	.226	.222
	m(X)	.194	.392	.677	.317	.465	.630	.708
$f_4^{(2)}=6$	m(6,7)	.333	.333	.312	.333	.333	.333	.242
	m(X)	.333	.337	.569	.333	.387	.531	.594
$f_5^{(2)}=9$	m(9)	.107	.107	.107	.107	.107	.107	.107
	m(9,1)	.679	.672	.382	.679	.657	.488	.279
	m(X)	.214	.221	.510	.214	.236	.405	.614
$f_6^{(2)}=4$	m(X)	.313	.737	.856	.667	.787	.844	.888
$f_7^{(2)}=4$	m(6,7)	.556	.438	.312	.477	.377	.365	.242
	m(6,7,4)	.074	.140	.100	.139	.139	.177	.078
	m(X)	.370	.370	.388	.370	.370	.370	.525
$f_8^{(2)}=1$	m(1)	.300	.192	.167	.203	.174	.179	.147
	m(1,9)	.392	.387	.393	.381	.400	.386	.353
	m(1,9,4)		.113	.100	.108	.118	.110	.088
$f_9^{(2)}=1$	m(X)	.308	.308	.308	.308	.308	.308	.324
$f_{10}^{(2)}=21$	m(1)	.300	.090	.069	.101	.074	.078	.056
	m(1,9)	.010	.220	.241	.210	.236	.232	.254
	m(X)	.690	.690	.690	.690	.690	.690	.690
$f_{11}^{(2)}=17$	m(18,17)	.342	.094	.062	.111	.072	.075	.046
	m(18,17,21)	.342	.591	.400	.574	.562	.481	.299
	m(X)	.184	.184	.438	.184	.192	.324	.580
$f_{12}^{(2)}=1$	m(18)	.200	.200	.200	.200	.200	.200	.200
	m(18,21)	.100	.100	.100	.100	.100	.100	.100
	m(18,21,17)	.400	.289	.211	.309	.267	.238	.187
$f_{13}^{(2)}=1$	m(X)	.300	.300	.300	.300	.300	.300	.341
$f_{14}^{(2)}=1$	m(9,1)	.353	.288	.223	.321	.259	.240	.210
	m(9,1,4)		.065	.100	.032	.094	.113	.071
	m(X)	.647	.647	.647	.647	.647	.647	.648

Be [0, 1]		MAX-MIN	MAX-PROD	MAX-Tm	MAX-HAMA $\gamma = 1/2$	MAX-HAMA $\gamma = 2$	MAX-SUGE $\lambda = -1/2$	MAX-SUGE $\lambda = 1$
$f_1^{(2)} = 1$	Sp=0.342	Sp=0.239	Sp=0.165	Sp=0.266	Sp=0.208	Sp=0.185	Sp=0.149	
	HI=1.802	HI=2.291	HI=2.745	HI=2.140	HI=2.462	HI=2.622	HI=2.840	
	HC=0.364	HC=0.492	HC=0.234	HC=0.476	HC=0.484	HC=0.337	HC=0.145	
$f_2^{(2)} = 18$	Sp=0.321	Sp=0.300	Sp=0.241	Sp=0.307	Sp=0.287	Sp=0.262	Sp=0.219	
	HI=1.802	HI=1.918	HI=2.331	HI=1.879	HI=1.998	HI=2.183	HI=2.480	
	HC=0.359	HC=0.512	HC=0.400	HC=0.477	HC=0.532	HC=0.465	HC=0.314	
$f_3^{(2)} = 6$	Sp=0.253	Sp=0.238	Sp=0.217	Sp=0.244	Sp=0.233	Sp=0.221	Sp=0.214	
	HI=2.155	HI=2.289	HI=2.482	HI=2.238	HI=2.339	HI=2.450	HI=2.508	
	HC=0.466	HC=0.465	HC=0.289	HC=0.481	HC=0.435	HC=0.328	HC=0.263	
$f_4^{(2)} = 6$	Sp=0.275	Sp=0.275	Sp=0.254	Sp=0.275	Sp=0.271	Sp=0.260	Sp=0.238	
	HI=2.107	HI=2.110	HI=2.280	HI=2.107	HI=2.144	HI=2.241	HI=2.315	
	HC=0.501	HC=0.500	HC=0.368	HC=0.501	HC=0.481	HC=0.391	HC=0.364	
$f_5^{(2)} = 9$	Sp=0.473	Sp=0.471	Sp=0.362	Sp=0.473	Sp=0.465	Sp=0.402	Sp=0.323	
	HI=1.321	HI=1.335	HI=1.914	HI=1.321	HI=1.364	HI=1.702	HI=2.154	
	HC=0.407	HC=0.410	HC=0.387	HC=0.407	HC=0.415	HC=0.421	HC=0.331	
$f_6^{(2)} = 4$	Sp=0.177	Sp=0.145	Sp=0.136	Sp=0.150	Sp=0.141	Sp=0.137	Sp=0.133	
	HI=2.534	HI=2.822	HI=2.903	HI=2.774	HI=2.856	HI=2.894	HI=2.927	
	HC=0.363	HC=0.225	HC=0.133	HC=0.270	HC=0.188	HC=0.143	HC=0.106	
$f_7^{(2)} = 4$	Sp=0.349	Sp=0.322	Sp=0.278	Sp=0.334	Sp=0.304	Sp=0.297	Sp=0.244	
	HI=1.784	HI=1.890	HI=2.099	HI=1.840	HI=1.972	HI=2.005	HI=2.305	
	HC=0.428	HC=0.493	HC=0.511	HC=0.471	HC=0.516	HC=0.518	HC=0.420	
$f_8^{(2)} = 1$	Sp=0.535	Sp=0.462	Sp=0.440	Sp=0.468	Sp=0.452	Sp=0.449	Sp=0.406	
	HI=1.315	HI=1.489	HI=1.566	HI=1.475	HI=1.511	HI=1.532	HI=1.438	
	HC=0.503	HC=0.543	HC=0.551	HC=0.544	HC=0.540	HC=0.550	HC=0.561	
$f_9^{(2)} = 1$	Sp=0.391	Sp=0.286	Sp=0.276	Sp=0.292	Sp=0.279	Sp=0.281	Sp=0.270	
	HI=2.079	HI=2.289	HI=2.310	HI=2.279	HI=2.305	HI=2.301	HI=2.365	
	HC=0.260	HC=0.277	HC=0.274	HC=0.278	HC=0.274	HC=0.275	HC=0.271	
$f_{10}^{(2)} = 21$	Sp=0.334	Sp=0.293	Sp=0.239	Sp=0.296	Sp=0.282	Sp=0.262	Sp=0.210	
	HI=1.742	HI=1.888	HI=2.242	HI=1.878	HI=1.944	HI=2.088	HI=2.432	
	HC=0.607	HC=0.521	HC=0.449	HC=0.531	HC=0.534	HC=0.500	HC=0.362	
$f_{11}^{(2)} = 17$	Sp=0.421	Sp=0.412	Sp=0.401	Sp=0.413	Sp=0.410	Sp=0.405	Sp=0.393	
	HI=1.634	HI=1.680	HI=1.741	HI=1.672	HI=1.689	HI=1.717	HI=1.759	
	HC=0.526	HC=0.585	HC=0.614	HC=0.579	HC=0.590	HC=0.607	HC=0.587	
$f_{12}^{(2)} = 1$	Sp=0.257	Sp=0.247	Sp=0.230	Sp=0.252	Sp=0.242	Sp=0.239	Sp=0.220	
	HI=2.294	HI=2.332	HI=2.406	HI=2.313	HI=2.349	HI=2.360	HI=2.458	
	HC=0.282	HC=0.304	HC=0.318	HC=0.294	HC=0.310	HC=0.313	HC=0.332	

Remarquons que la reconnaissance du phonème présentée est la même que les valeurs $\mu_B(y_i)$ appartenant à $\{0,1\}$ ou à $[0,1]$, mais les résultats numériques des pondérations probabilistes de base sont différents suivant les expériences.

Dans la deuxième expérience, les sept normes donnent toutes des résultats numériques différents de la première expérience. De plus, pour des valeurs $\mu_B(y_i)$ subjectives appartenant à $[0,1]$, la composition MAX-MIN scinde moins les groupes de phonèmes que les six autres compositions.

La spécificité est minimum et vaut $\frac{1}{8}$; pour le phonème $\phi_6^{(2)}$, on obtient une spécificité faible égale à .133 car la pondération probabiliste de base s'éloigne d'une densité de probabilité.

Le degré d'imprécision est maximum et vaut $\log_2 8 = 3$ dans le cas de l'ignorance totale. On retrouve pour le phonème $\phi_6^{(2)}$ un degré d'imprécision élevé égal à 2.924.

A l'opposé, la spécificité est élevée pour le phonème $\phi_8^{(2)}$ et est égale à .535 ; la pondération probabiliste de base est élevée sur le singleton reconnu.

Deuxième essai :

Nous prenons des valeurs subjectives plus faibles pour les coefficients d'appartenance pour tous les phonèmes différents du phonème donné.

Phonèmes	/y/	/i/	/a/	/s/	/f/	/z/	/ʒ/	/o/
N° de code	9	1	4	18	17	21	6	7

B pour le code 9	1	.3	0	0	0	0	0	0
B pour le code 1	.3	1	.1	0	0	0	.1	.1
B pour le code 4	.1	.1	1	0	0	0	.3	.3
B pour le code 18	0	.1	0	1	.2	.3	0	0
B pour le code 17	0	0	0	.2	1	.2	0	0
B pour le code 21	0	0	0	.3	.2	1	0	0
B pour le code 6	.1	.1	.2	0	0	0	1	.3
B pour le code 7	.1	.1	.2	0	0	0	.3	1

Remarquons que la part allouée à l'ignorance totale est plus faible dans le deuxième essai que dans le premier essai, car les données subjectives sont plus différenciées.

$B \in [0,1]$ 2me essai	MAX-MIN		MAX-PRODUIT		MAX-SUGENO $\lambda = -1/2$	
$f_{11}^{(2)} = 1$	m(1)	=0.579	m(1)	=0.135	m(1)	=0.070
	m(1,9)	=0.443	m(1,9)	=0.297	m(1,9)	=0.297
$f_{12}^{(2)} = 18$	m(X)	=0.368	m(X)	=0.368	m(X)	=0.485
	m(21)	=0.700	m(21)	=0.458	m(21)	=0.337
	m(21,18)	=0.095	m(21,18)	=0.181	m(21,18)	=0.128
	m(21,18,17)	=0.136	m(21,18,17)	=0.293	m(21,18,17)	=0.256
$f_{13}^{(2)} = 6$	m(X)	=0.068	m(X)	=0.068	m(X)	=0.279
	m(6)	=0.226	m(6)	=0.226	m(6)	=0.226
$f_{14}^{(2)} = 6$	m(6,4,7)	=0.581	m(6,4,7)	=0.382	m(6,4,7)	=0.145
	m(X)	=0.097	m(X)	=0.097	m(X)	=0.481
	m(6)	=0.333	m(6)	=0.333	m(6)	=0.333
$f_{15}^{(2)} = 6$	m(6,4,7)	=0.333	m(6,4,7)	=0.329	m(6,4,7)	=0.136
	m(X)	=0.074	m(X)	=0.074	m(X)	=0.392
	m(9)	=0.700	m(9)	=0.445	m(9)	=0.340
$f_{16}^{(2)} = 9$	m(9,1)	=0.086	m(9,1)	=0.341	m(9,1)	=0.383
	m(X)	=0.214	m(X)	=0.214	m(X)	=0.277
$f_{17}^{(2)} = 4$	m(4,6,7)	=0.688	m(4,6,7)	=0.263	m(4,6,7)	=0.156
	m(X)	=0.676	m(X)	=0.676	m(X)	=0.676
$f_{18}^{(2)} = 4$	m(6)	=0.630	m(6)	=0.579	m(6)	=0.481
	m(6,7)	=0.051	m(6,7)	=0.117	m(6,7)	=0.117
$f_{19}^{(2)} = 1$	m(X)	=0.370	m(X)	=0.370	m(X)	=0.370
	m(6,7,4)	=0.031	m(6,7,4)	=0.031	m(6,7,4)	=0.031
$f_{20}^{(2)} = 1$	m(1)	=0.692	m(1)	=0.579	m(1)	=0.565
	m(1,9)	=0.113	m(1,9)	=0.128	m(1,9)	=0.128
$f_{21}^{(2)} = 1$	m(X)	=0.256	m(X)	=0.256	m(X)	=0.256
	m(1)	=0.310	m(1)	=0.310	m(1)	=0.310
$f_{22}^{(2)} = 1$	m(X)	=0.414	m(X)	=0.414	m(X)	=0.612
	m(17)	=0.684	m(17)	=0.684	m(17)	=0.556
$f_{23}^{(2)} = 21$	m(17,18,21)	=0.132	m(17,18,21)	=0.132	m(17,18,21)	=0.241
	m(X)	=0.184	m(X)	=0.184	m(X)	=0.203
$f_{24}^{(2)} = 17$	m(18)	=0.700	m(18)	=0.589	m(18)	=0.538
	m(18,21)	=0.111	m(18,21)	=0.112	m(18,21)	=0.112
$f_{25}^{(2)} = 17$	m(X)	=0.300	m(X)	=0.300	m(X)	=0.300
	m(18,21,17)	=0.050	m(18,21,17)	=0.050	m(18,21,17)	=0.050
$f_{26}^{(2)} = 1$	m(1)	=0.353	m(1)	=0.288	m(1)	=0.240
	m(1,9)	=0.065	m(1,9)	=0.113	m(1,9)	=0.113
$f_{27}^{(2)} = 1$	m(X)	=0.294	m(X)	=0.294	m(X)	=0.572
	m(X)	=0.294	m(X)	=0.294	m(X)	=0.572

$B \in [0,1]$ 2me essai	MAX-MIN		MAX-PRODUIT		MAX-SUGENO $\lambda = -1/2$	
$f_{11}^{(2)} = 1$	Sp=0.636		Sp=0.414		Sp=0.309	
	HI=1.227		HI=1.671		HI=2.096	
$f_{12}^{(2)} = 18$	HC=0.413		HC=0.478		HC=0.440	
	Sp=0.802		Sp=0.654		Sp=0.521	
$f_{13}^{(2)} = 6$	HI=0.516		HI=0.850		HI=1.370	
	HC=0.514		HC=0.592		HC=0.569	
$f_{14}^{(2)} = 6$	Sp=0.451		Sp=0.424		Sp=0.364	
	HI=1.435		HI=1.581		HI=2.018	
$f_{15}^{(2)} = 6$	HC=0.534		HC=0.600		HC=0.457	
	Sp=0.506		Sp=0.505		Sp=0.455	
$f_{16}^{(2)} = 9$	HI=1.353		HI=1.356		HI=1.713	
	HC=0.613		HC=0.612		HC=0.510	
$f_{17}^{(2)} = 4$	Sp=0.770		Sp=0.642		Sp=0.566	
	HI=0.729		HI=0.984		HI=1.214	
$f_{18}^{(2)} = 4$	HC=0.433		HC=0.531		HC=0.515	
	Sp=0.292		Sp=0.235		Sp=0.170	
$f_{19}^{(2)} = 4$	HI=1.815		HI=2.128		HI=2.665	
	HC=0.363		HC=0.225		HC=0.293	
$f_{20}^{(2)} = 1$	Sp=0.676		Sp=0.650		Sp=0.597	
	HI=1.111		HI=1.162		HI=1.278	
$f_{21}^{(2)} = 1$	HC=0.368		HC=0.412		HC=0.473	
	Sp=0.735		Sp=0.678		Sp=0.671	
$f_{22}^{(2)} = 1$	HI=0.888		HI=1.002		HI=1.016	
	HC=0.409		HC=0.508		HC=0.516	
$f_{23}^{(2)} = 1$	Sp=0.417		Sp=0.417		Sp=0.402	
	HI=1.882		HI=1.882		HI=2.017	
$f_{24}^{(2)} = 21$	HC=0.468		HC=0.468		HC=0.329	
	Sp=0.751		Sp=0.751		Sp=0.662	
$f_{25}^{(2)} = 17$	HI=0.761		HI=0.761		HI=0.991	
	HC=0.463		HC=0.463		HC=0.519	
$f_{26}^{(2)} = 1$	Sp=0.738		Sp=0.682		Sp=0.648	
	HI=0.900		HI=1.011		HI=1.092	
$f_{27}^{(2)} = 1$	HC=0.361		HC=0.460		HC=0.500	
	Sp=0.460		Sp=0.428		Sp=0.383	
$f_{28}^{(2)} = 1$	HI=1.702		HI=1.767		HI=2.003	
	HC=0.514		HC=0.536		HC=0.383	

CONCLUSION

Nous avons été amené à introduire une composition d'opérateurs Op_1 - Op_2 qui nous a conduit à envisager les normes et les conormes triangulaires. A la suite de nombreux auteurs dont WEBER, nous avons apporté notre contribution à la construction de ces normes et conormes grâce à la notion de générateurs numériques.

Les travaux sur les opérateurs d'implication flous ont montré qu'il n'existait pas d'opérateurs réalisant à la fois la spécification de l'implication, le syllogisme parfait et la règle contrapositive (KAUFMANN). Nous avons alors introduit la notion de seuil d'inférence pour le syllogisme et nous avons donné la condition pour que le syllogisme indirect soit parfait.

Nous avons repris les résultats de SANCHEZ et de DINOLA et SESSA pour les équations de relations floues. Cependant, il nous a semblé important d'utiliser comme PEDRYCZ une composition SUP-T plus générale que MAX-MIN. Nous avons donc déterminé les opérateurs de MAXIMALISATION, ainsi que les solutions minimales pour les équations SUP-T, ainsi que les opérateurs de MINIMALISATION pour les équations INF-S.

Cependant, est-il possible d'envisager une composition plus générale que la composition SUP-T en considérant une composition CONORME-NORME ?

En effet, la composition SUP-T a l'inconvénient de ne prendre en considération que le plus grand élément d'une série donnée, alors que la prise en compte de toutes les informations serait plus judicieuse. La composition CONORME-NORME ouvre la voie prise par notre équipe pour nos futures recherches.

Enfin, nous avons voulu utiliser les résultats précédents pour apporter une interprétation numérique aux résultats des problèmes de reconnaissance de formes. Les mesures d'incertain développées par PRADE, nous ont permis d'obtenir des résultats numériques intéressants pour la reconnaissance de phonèmes.

BIBLIOGRAPHIE

- [ALS-80] : C. ALSINA, E. TRILLAS, L. VALVERDE :
On non-distributive logical connectives for fuzzy
sets theory, Busefal n° 3 (1980), p. 18-29.
- [ALS-85] : C. ALSINA :
On a family of connectives for fuzzy sets,
F.S.S. 16 (1985), p. 231-235.
- [BAN_O-81] : G. BANON :
Distinction between several subsets of fuzzy mea-
sures, F.S.S. n° 3 (1981), p. 291-305.
- [BAN_D-80] : W. BANDLER, L. KOHOUT :
Fuzzy power sets and fuzzy implication operators,
F.S.S. n° 4 (1980), p. 13-30.
- [BAN_D-86] : W. BANDLER :
Properties of fuzzy implication operator,
Busefal n° 26 (1986), p. 24-33.
- [BOU-86a] : L. BOUR, G. HIRSCH, M. LAMOTTE :
Détermination d'un opérateur de maximalisation pour
la résolution d'équations de relation floue,
Busefal n° 25 (1986), p. 95-106.
- [BOU-86b] : L. BOUR, G. HIRSCH, M. LAMOTTE :
Détermination d'un opérateur de minimalisation pour
la résolution d'équations de relation floue,
Busefal n° 28 (1986), p. 68-77.

- [CHA-83] : M. CHAKRABORTY, M. DAS :
Studies in fuzzy relations over fuzzy subsets,
F.S.S. n° 9 (1983), p. 79-89.
- [CZO-81] : E. CZOGALA, W. PEDRYCZ :
On identification in fuzzy systems and its applications in control problems,
F.S.S. n° 6 (1981), p. 73-83.
- [CZO-82] : E. CZOGALA, J. DREWNIK, W. PEDRYCZ :
Fuzzy relation equations on a finite set,
F.S.S. n° 7 (1982), p. 89-101.
- [DEL-79] : A. DE LUCA, S. TERMINI :
Entropy and energy measures of a fuzzy set,
Advances in fuzzy set theory and applications (1979),
p. 321-338.
- [DEM-79] : R. De MORI, R. GUBRYNOWICZ, P. LAFACE :
Istituto di Sci. dell'Informazione, Univ. di
Torino, Turin Italy.
IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Process (USA),
vol. ASPP 27 n° 5, p. 538-549, octobre 1979.
- [DIN-80] : A. DI NOLA, G.S. VENTRE :
On some chains of fuzzy sets,
F.S.S. n° 4 (1980), p. 185-191.
- [DIN-82a] : A. DI NOLA, W. PEDRYCZ :
Entropy and energy measure characterisation of resolution of some fuzzy relational equations,
Busefal 10 (1982), p. 44-53.
- [DIN-82b] : A. DI NOLA :
Energy and entropy measures of fuzziness of solutions of fuzzy relation equations with continuous triangular norms,
Busefal 12 (1982), p. 60-71.

- [DIN-83a] : A. DI NOLA, S. SESSA :
On the set of solutions of composite fuzzy relation equations,
F.S.S. n° 9 (1983), p. 275-286.
- [DIN-83b] : A. DI NOLA, S. SESSA :
On the fuzziness of solutions of $\odot$ fuzzy relation equations on finite spaces,
F.S.S. n° 11 (1983), p. 65-77.
- [DIN-83c] : A. DI NOLA, S. SESSA :
On measures of fuzziness of solutions of composite fuzzy relation equations, Marseille (1983),
Fuzzy information knowledge representation and decision analysis, p. 275-2 .
- [DIN-84] : A. DI NOLA :
On functionals measuring the fuzziness of solutions in relational equations,
F.S.S. 14 (1984), p. 249-258.
- [DOM-82] : J. DOMBI :
A general class of fuzzy operators, the De Morgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators,
F.S.S. n° 8 (1982), p. 149-163.
- [DRE-82] : J. DREWNIK :
Note on fuzzy relation equations,
Busefal 12 (1982), p. 50-51.
- [DRE-84] : J. DREWNIK :
Fuzzy relation equations and inequalities,
F.S.S. n° 14 (1984), p. 237-247.

- [DUB-82] : D. DUBOIS, H. PRADE :
A class of fuzzy measures based on triangular norms.
A general framework for the combination of uncertain information.
Int. J. of General Systems (1982), vol. 8, n° 1,
p. 43-61.
- [DUB-83a] : D. DUBOIS :
Modèles mathématiques de l'imprécis et de l'incertain en vue d'applications aux techniques d'aide à la décision,
Thèse d'Etat, Institut National Polytechnique de Grenoble (1983).
- [DUB-83b] : D. DUBOIS, H. PRADE :
Unfair coins and necessity measures towards a possibilistic interpretation of histograms,
F.S.S. 10 (1983), p. 15-20.
- [DUB-84] : D. DUBOIS, H. PRADE :
A note on measures of specificity for fuzzy sets,
Busefal n° 19 (1984), p. 83-89.
- [DUB-85a] : D. DUBOIS, H. PRADE :
Théorie des possibilités. Applications à la représentation des connaissances en informatique,
Librairie Masson (1985).
- [DUB-85b] : D. DUBOIS, H. PRADE :
Additivity and monotonicity of measures of information defined in the setting of Shafer's evidence theory,
Busefal n° 24 (1985), p. 64-76.
- [DUB-85c] : D. DUBOIS, H. PRADE :
Mesures d'information pour les distributions de possibilité et les fonctions de croyance,
Journées Rémoises "Analyse de problèmes décisionnels dans un environnement incertain et imprécis" (1985),
p. 67-80.

- [DUB-86a] : D. DUBOIS, H. PRADE :
Le traitement de l'imprécision et de l'incertitude dans les modèles de raisonnement des experts,
Librairie Eyrolles, Introduction aux systèmes experts de gestion (1986), par C. Ernst.
- [DUB-86b] : D. DUBOIS, H. PRADE :
The principle of minimum specificity as a basis for evidential reasoning,
Busefal n° 25 (1986), p. 124-132.
- [GOD-84] : S. GOTTWALD :
On the existence of solutions of systems of fuzzy equations,
F.S.S. 12 (1984), p. 301-302.
- [FRA-79] : M.J. FRANK :
On the simultaneous associativity of $f(x,y)$ and $s+y = F(x,y)$.
Aequationes Math. (1979), vol. 19, p. 194-226.
- [HAM-75] : H. HAMACHER :
Über logische Verknüpfungen unscharfer Aussagen und deren zugehörige Bewertungsfunktionen,
(1975), Tech. Rep. N° 75/14, RWTH Aachen.
- [HUA-86] : W. HUA :
Some properties of g_λ - measure,
Busefal n° 26 (1986), p. 47-56.
- [HIR-81] : G. HIRSCH, M. LAMOTTE, M.T. MAS, M.J. VIGNERON :
Phonemic classification using a fuzzy dissimilitude relation,
F.S.S. n° 5 (1981), p. 267-275.
- [KAU-73] : A. KAUFMANN :
Introduction à la théorie des sous-ensembles flous,
(Masson, Paris), volume 1 (1973), volume 2 (1975),
volume 3 (1975), volume 4 (1977).

- [KAU-83] : A. KAUFMANN :
Opérateurs et normes triangulaires dans la théorie
des sous-ensembles flous,
Note de travail n° 109 (1983).
- [KAU-85] : A. KAUFMANN :
Construction d'opérateurs d'implication flous,
Note de travail n° 144 (1985).
- [KIS-85] : B. KISZKA, M. KOCHANSKA, D. SLIWINSKA :
The influence of some fuzzy implication operators
on the accuracy of a fuzzy model :
Part I, F.S.S. 15 (1985), p. 111-128,
Part II, F.S.S. 15 (1985), p. 223-240.
- [KRU-82] : R. KRUSE :
A note on λ -additive fuzzy measures,
F.S.S. 8 (1982), p. 219-222.
- [LES-85] : K. LESZCZYNSKI, P. PENCZEK, W. GROCHULSKI :
Sugeno's fuzzy measure and fuzzy clustering,
F.S.S. n° 15 (1985), p. 147-158.
- [LIN-65] : C.H. LING :
Representation of associative functions.
Publ. Math. Debrecen, vol. 12 (1965), p. 189-212.
- [MEN-42] : K. Menger :
Statistical metrics. Proc. Nat. Acad. Sci., USA,
vol. 28 (1942), p. 535-537.
- [MIY-85] : M. MIYAKOSHI, M. SHIMBO :
Solutions of composite fuzzy relational equations
with triangular norms,
F.S.S. n° 16 (1985), p. 53-63.

- [MIY-86] : M. MIYAKOSHI, M. SHIMBO :
Lower solutions of systems of fuzzy equations,
F.S.S. n° 19 (1986), p. 37-46.
- [MIZ-82] : M. MIZUMOTO, H.J. ZIMMERMANN :
Comparaison of fuzzy reasoning methods,
F.S.S. n° 8 (1982), p. 253-283.
- [MIZ-86] : M. MIZUMOTO :
T-norms and their pictorial representation,
Busefal n° 25 (1986), p. 67-78.
- [PED-82] : W. PEDRYCZ :
Fuzzy relational equations with triangular norms
and their resolutions,
Busefal n° 11 (1982), p. 24-32.
- [PED-83a] : W. PEDRYCZ :
Fuzzy relational equations with generalized con-
nectives and their applications,
F.S.S. n° 10 (1983), p. 185-201.
- [PED-83b] : W. PEDRYCZ :
Numerical and applicationnal aspects of fuzzy re-
lational equations,
F.S.S. n° 11 (1983), p. 1-18.
- [PED-83c] : W. PEDRYCZ :
Fuzzy relational equations with triangular norms in
modelling of decision making processes,
Marseille (1983) Fuzzy information knowledge repre-
sentation and decision analysis, p. 269-274.
- [PED-84a] : W. PEDRYCZ, E. CZOGALA, K. HIROFA :
Some remarks on the identification problem in fuzzy
systems,
F.S.S. n° 12 (1984), p. 185-189.

- [PED-84b] : W. PEDRYCZ :
An identification algorithm in fuzzy relational systems,
F.S.S. n° 13 (1984), p. 153-167.
- [PED-85] : W. PEDRYCZ :
Applications of fuzzy relational equations for methods of reasoning in presence of fuzzy data,
F.S.S. n° 16 (1985), p. 163-175.
- [PRA-82] : H. PRADE :
Modèles mathématiques de l'imprécis et de l'incertain en vue d'applications au raisonnement naturel, Thèse d'Etat, Université Paul Sabatier, Toulouse (1982).
- [PRE-81] : M. PREVOT :
Algorithm for the solution of fuzzy relations,
F.S.S. n° 5 (1981), p. 319-322.
- [RIV-78] : S. RIVOIRA, P. TORASSO :
Univ. di Torino, Torino, Italy.
Pattern Recognition vol. 10 n° 2, p. 73-84, 1978.
- [SAN-76] : E. SANCHEZ :
Resolution of composite fuzzy relation equations.
Information and Control, vol. 30 (1976), p. 38-48.
- [SAN-77] : E. SANCHEZ :
Solutions in composite fuzzy relation equations : application to medical diagnosis in Brouwerian Logic.
Fuzzy Automata and Decision Processes (Gupta, Saridis, Gaines Eds.), North-Holland (1977), p. 221-234.
- [SAN-78] : E. SANCHEZ :
Resolution of eigen fuzzy sets equations.
F.S.S. vol. 1 (1978), p. 69-74.

- [SAN-79] : E. SANCHEZ :
Composition of fuzzy relations. Advances in fuzzy set theory and applications,
North Holland Publishing Company (1979), p. 421-433 et p. 437-444.
- [SAN-84] : E. SANCHEZ :
Solution of fuzzy equations with extended operations,
F.S.S. n° 12 (1984), p. 237-248.
- [SCH-60] : B. SCHWEIZER, A. SKLAR :
Statistical metric spaces. Pacific J. Math. Vol. 10 (1960), p. 313-334.
- [SCH-61] : B. SCHWEIZER, A. SKLAR :
Associative functions and statistical triangle inequalities. Publ. Math. Debrecen, vol. 8 (1961), p. 169-186.
- [SCH-63] : B. SCHWEIZER, A. SKLAR :
Associative functions and abstract semigroups.
Publ. Math. Debrecen, vol. 10, p. 69-81.
- [SES-84] : S. SESSA :
Some results in the setting of fuzzy relation equations theory,
F.S.S. n° 14 (1984), p. 281-297.
- [SHA-76] : G. SHÄFER :
A mathematical theory of evidence,
Princeton University Press.
- [SUG-74] : M. SUGENO :
Theory of fuzzy integral and its applications.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Tokyo Institute of Technology.

- [TRI-79] : E. TRILLAS :
Sobre funciones de negacion en la teorica de conjuntos difusos. Stochastica, vol. III (1979), n° 1, p. 47-59.
- [WEB-83] : S. WEBER :
A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms, F.S.S. n° 11 (1983), p. 115-134.
- [WIE-82] : W. WIEZLAK, R. GUBRYNOWICZ :
Inst. of Fundamental Tech. Res., Polish Acad. of Sci., Warsaw Poland.
Proceedings of ICASSP IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Paris, France, 3-5 mai 1982, p. 529-34, vol. 1.
- [WIL-80] : R. WILLMOTT :
Two fuzzier implication operators in the theory of fuzzy power sets,
F.S.S. n° 4 (1980), p. 31-36.
- [WAN-84] : Pei-zhuang WANG, S. SESSA, A. DI NOLA, W. PEDRYCZ :
How many lower solutions can a fuzzy relation equation have ?
Busefal 18 (1984), p. 67-74.
- [YAG-80] : R. YAGER :
On a general class of fuzzy connectives,
F.S.S. n° 4 (1980), p. 235-242.
- [YOU-83] : Z. YOU :
Methods for constructing triangular norms,
Fuzzy mathematics, Wuhan, Hubei, P.R. China, vol. 3 n° 1 (1983), p. 71-78.
- [ZAD-65] : L.A. ZADEH :
Fuzzy sets in formation and control 8,
(1965), p. 338-353.

ANNEXE 1

Démonstration du théorème (chapitre 4, § 4.2, page 59)

On a :

$$R(A,B)(e_{1i},e_{2j}) = a_i \tau b_j$$

$$R(B,C)(e_{2j},e_{3k}) = b_j \tau c_k$$

$$R(A,C)(e_{1i},e_{3k}) = a_i \tau c_k$$

et l'on veut montrer :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, m \\ \forall k = 1, \dots, p \end{aligned} \quad \sup_{b_j \in B} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) \leq a_i \tau c_k$$

Premier cas : si $a_i \leq c_k$, donc $a_i \tau c_k = 1$

$$\begin{aligned} \text{Posons : } B_1 &= \{b_j \in B \mid b_j < a_i\} \\ B_2 &= \{b_j \in B \mid a_i \leq b_j \leq c_k\} \\ B_3 &= \{b_j \in B \mid b_j > c_k\} \end{aligned}$$

$$\text{et soit } T_1 = \sup_{b_j \in B_1} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k)$$

$$T_2 = \sup_{b_j \in B_2} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k)$$

$$T_3 = \sup_{b_j \in B_3} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k)$$

Puisque $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, on a : $\sup_{b_j \in B} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = \max(T_1, T_2, T_3)$

et si $b_j \in B_1$, c'est-à-dire si $b_j < a_i \leq c_k$:

$$T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = T(a_i \tau b_j, 1) = a_i \tau b_j$$

$$\text{et } T_1 = a_i \tau \left(\max_{b_j \in B_1} b_j \right) ;$$

si $b_j \in B_2$, c'est-à-dire si $a_i \leq b_j \leq c_k$:

$$T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = T(1, 1) = 1 \text{ et } T_2 = 1 ;$$

si $b_j \in B_3$, c'est-à-dire si $a_i \leq c_k < b_j$:

$$T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = T(1, b_j \tau c_k) = b_j \tau c_k$$

$$\text{et } T_3 = \left(\min_{b_j \in B_3} b_j \right) \tau c_k$$

En conclusion, pour le premier cas, si $B_2 \neq \emptyset$, c'est-à-dire s'il existe un j_0 tel que $b_{j_0} \in [a_i, c_k]$, alors $\max(T_1, T_2, T_3) = T_2 = 1 = a_i \tau c_k$.

Si $B_2 = \emptyset$, $\max(T_1, T_2, T_3) = \max(T_1, T_3) < 1 = a_i \tau c_k$.

Deuxième cas : si $a_i > c_k$, c'est-à-dire $a_i \tau c_k = f^{-1}(f(c_k) - f(a_i))$

Posons : $B_4 = \{b_j \in B \mid b_j \geq a_i\}$

$$B_5 = \{b_j \in B \mid a_i > b_j > c_k\}$$

$$B_6 = \{b_j \in B \mid c_k \geq b_j\}$$

$$\text{et soit } T_4 = \sup_{b_j \in B_4} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k)$$

$$T_5 = \sup_{b_j \in B_5} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k)$$

$$T_6 = \sup_{b_j \in B_6} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k)$$

Puisque $B = B_4 \cup B_5 \cup B_6$, on a : $\sup_{b_j \in B} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = \max(T_4, T_5, T_6)$

et si $b_j \in B_4$, c'est-à-dire $b_j \geq a_i > c_k$, alors :

$$T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = T(1, b_j \tau c_k) = b_j \tau c_k$$

$$\text{et } T_4 = \left(\min_{b_j \in B_4} b_j \right) \tau c_k ;$$

si $b_j \in B_5$, c'est-à-dire si $a_i > b_j > c_k$:

- pour une t-norme archimédienne stricte :

$$\begin{aligned} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) &= f^{-1} [f f^{-1}(f(b_j) - f(a_i)) + f f^{-1}(f(c_k) - f(b_j))] \\ &= f^{-1} [f(b_j) - f(a_i) + f(c_k) - f(b_j)] = a_i \tau c_k \end{aligned}$$

$$\text{et } T_5 = a_i \tau c_k ;$$

- pour une t-norme archimédienne non stricte :

$$\begin{aligned} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) &= f^{(-1)} [\bar{f} f^{-1}(f(b_j) - f(a_i)) + f f^{-1}(f(c_k) - f(b_j))] \\ &= f^{(-1)} [\bar{f}(c_k) - f(a_i)] = f^{-1} [\bar{f}(c_k) - f(a_i)] \end{aligned}$$

puisque $a_i > c_k$;

si $b_j \in B_6$, c'est-à-dire si $a_i > c_k > b_j$:

$$T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = T(a_i \tau b_j, 1) = a_i \tau b_j$$

$$\text{et } T_6 = a_i \tau (\max_{b_j \in B_6} b_j)$$

En conclusion pour le deuxième cas :

Si $B_5 \neq \emptyset$, c'est-à-dire s'il existe un j_0 tel que $b_{j_0} \in]c_k, a_i[$, on a :

$$T_4 = (\min_{b_j \in B_4} b_j) \tau c_k \leq a_i \tau c_k = T_5$$

$$T_6 = a_i \tau (\max_{b_j \in B_6} b_j) \leq a_i \tau c_k = T_5$$

$$\text{donc : } \max(T_4, T_5, T_6) = T_5 = a_i \tau c_k.$$

Si $B_5 = \emptyset$ et si $\forall j = 1, \dots, n$, $b_j > a_i$ ou $b_j < c_k$, alors puisque τ est strictement monotone :

$$T_4 < a_i \tau c_k \text{ et } T_6 < a_i \tau c_k$$

$$\text{et donc : } \sup_{b_j \in B} T(a_i \tau b_j, b_j \tau c_k) = \max(T_4, T_6) < a_i \tau c_k.$$

Si $B_5 = \emptyset$ et s'il existe un $b_j \in B_4$ tel que $b_j = a_i$ ou s'il existe un $b_j \in B_6$ tel que $b_j = c_k$, on a alors :

$$T_4 = a_i \tau c_k \geq T_6$$

$$\text{ou } T_6 = a_i \tau c_k \geq T_4$$

$$\text{et } \max(T_4, T_5, T_6) = a_i \tau c_k.$$



ANNEXE 2

Démonstration de la condition de normalisation des mesures de Sugeno

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $A_\ell = \{x_1, x_2, \dots, x_\ell\}$ $0 \leq \ell \leq n$

Posons $g_i = g_\lambda(\{x_i\})$ $i = 1, \dots, n$

Les mesures de Sugeno vérifient pour $\lambda \in]-1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{F} \\ \forall B \in \mathcal{F} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors } g_\lambda(A \cup B) &= g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B) \end{aligned} \quad (11)$$

$$g(A_\ell) = g(A_{\ell-1} \cup \{x_\ell\}) = g(A_{\ell-1}) + g_\ell + \lambda g(A_{\ell-1}) \cdot g_\ell$$

d'où :

$$1 + \lambda g(A_\ell) = 1 + \lambda g(A_{\ell-1}) (1 + \lambda g_\ell) + \lambda g_\ell$$

$$1 + \lambda g(A_\ell) = (1 + \lambda g_\ell) (1 + \lambda g(A_{\ell-1})).$$

Ecrivons cette relation successivement pour $\ell = 1, \dots, n$:

$$1 + \lambda g(A_1) = (1 + \lambda g_1) (1 + \lambda g(\emptyset))$$

$$1 + \lambda g(A_2) = (1 + \lambda g_2) (1 + \lambda g(A_1))$$

$$1 + \lambda g(X) = (1 + \lambda g_n) (1 + \lambda g(A_{n-1}))$$

En effectuant le produit membre à membre des égalités précédentes, après simplification, on obtient :

$$1 + \lambda g(X) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda g_i)$$

D'où la relation (12) puisque $g(X) = 1$:

$$1 + \lambda = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda g_i) \quad (12)$$

NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur HIRSCH Gérard

NATURE DE LA THESE : Doctorat d'Etat es Sciences

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

24 AVR. 1987 n° 575
NANCY, le

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



R É S U M É

Les compositions de relations floues sont introduites dans les problèmes de reconnaissance de formes, en généralisant les notions binaires classiques. Ainsi apparaissent, à partir des différentes contraintes, les normes et conormes triangulaires.

Nous rappelons que le syllogisme indirect n'est pas parfait, quel que soit l'opérateur de composition floue.

Nous déterminons pour la composition sup-t norme (ou inf-t conorme) un opérateur de maximalisation (ou de minimalisation).

Après avoir repris les résultats des mesures d'incertain, nous donnons une application numérique au problème de classification des phonèmes.

Mots-clés : Normes et conormes triangulaires.
Opérateurs d'implication flous.
Syllogisme.
Equations de relation floue.
Mesures d'incertain.