

V
UNIVERSITÉ DE NANCY

Sc N 69
FACULTÉ DES SCIENCES
99

METHODE DU POTENTIEL
APPLICATION A DES PROBLEMES DE
"BARRIERE" PLANS ET DE REVOLUTION



THÈSE

présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ (MATHÉMATIQUES)

par

Gérard HIRSCH

soutenue le 15 Novembre 1969
devant la Commission d'Examen

JURY :

M. LEGRAS Président
M. DEPAIX } Examineurs
M. GILORMINI }

METHODE DU POTENTIEL
APPLICATION A DES PROBLEMES DE
"BARRIERE" PLANS ET DE REVOLUTION

THÈSE

présentée à la
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE NANCY
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ (MATHÉMATIQUES)

par
Gérard HIRSCH

soutenue le 15 Novembre 1969
devant la Commission d'Examen



JURY :

M. LEGRAS Président
M. DEPAIX } Examineurs
M. GILORMINI }

ANNEE SCOLAIRE 1969/1970

DOYEN : M. AUBRY

ASSESEUR : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - ROUBAULTProfesseurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITE - LERAY - JOLY - LAPORTE - EICHBORN - CAPELLE - GODEMENT - DUBREIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMAN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHL.Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET - M^{le} MATHIEU.PROFESSEURS

MM. ROUBAULT	Geologie		GAYET	Physiologie
VEILLET	Biologie animale		HADNI	Physique
BARRIOL	Chimie Théorique	* BASTICK		Chimie
BIZETTE	Physique	DUCHAUFOUR		Pédologie
GUILLIEN	Electronique	GARNIER		Agronomie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	NEEL		Chimie Organique Industrielle
BOLFA	Minéralogie	BERNARD		Géologie Appliquée
NICLAUSE	Chimie	* CHAMPIER		Physique
FAIVRE	Physique Appliquée	* GAY		Chimie Biologique
AUBRY	Chimie Minérale	STEPHAN		Zoologie
COPPENS	Radiogéologie	* CONDE		Zoologie
DUVAL	Chimie	* WERDNER		Botanique
FRUHLING	Physique	EYMARD		Calcul Différentiel et intégral
HILLY	Géologie			Chimie Organique
LE GOFF	Génie Chimique	LEVISALLES		Physique
SUHNER	Physique expérimentale	FELDEN		Mécanique Physique
CHAPON	Chimie Biologique	* GOSSE		Physique (ENSMIN)
HEROLD	Chimie Minérale Industrielle	* DAVOINE		
SCHWARTZ B.	Exploitation Minière	HORN		Physique (1 ^o Cycle)
MALAPRADE	Chimie	* ROCCI		Géologie
* MANGENOT	Botanique	DELPUECH		Chimie Physique

N... Chimie Biologique

N... Mécanique Appliquée

N... Analyse supérieure

N... Méthodes Mathématiques de la Physique

N... Mécanique rationnelle

(*) Professeur titulaire à titre personnel.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme BASTICK	Chimie P.C Epinal	BALESDENT	Thermodynamique Chimie Appliquée (ENSIC)
MM. GUDEFIN	Physique	BLAZY	Minéralogie Appliquée (ENSG)
VUILLAUME	Psychophysiologie	JANOT	Physique P.C. Epinal
FRENTZ	Biologie Animale	CACHAN	Entomologie Appliquée (ENSA)
MARI	Chimie (ISIN)	JACQUIN	Pédologie et Chimie agricoles
AUROUZE	Géologie	MAINARD	Physique M.P.
DEVIOT	Physique du Solide	PAULMIER	Mécanique Expérimentale
FLECHON	Physique P.C.	MARTIN	Chimie P.C
Mlle HUET	Mathématiques C.B.G.	PROTAS	Minéralogie
VIGNES	Métallurgie		
JURAIN	Géologie C.B.G.		

MAITRES DE CONFERENCES

JOZEFOWICZ	Physico-Chimie	GERL	Physique (FNSEM)
RIVAIL	Chimie Appliquée (CUCES)	ROQUES	Chimie Minérale
VILLERMAUX	Génie Chimique	FERRIER	Mathématiques
METCHE	Biochimie Appliquée (Brasserie)	GILORMINI	Mécanique (ISIN)
		N...	Mécaniques des fluides (ISIN)
PAIR	Mathématiques Appliquées	N...	Mathématiques
BAUMANN	Physique 1 ^o Cycle	N...	Mathématiques P.C.
DURAND	Physique	N...	Mathématiques C.B.G.
GRANGE	Physique (ISIN)	N...	Physiologie animale
DEPAIX	Probabilités et Statistiques	N...	Mathématiques M.P.
BAVEREZ	Chimie (ENSIC)	N...	Chimie Organique
CHAMBON	Exploitation Minière(Mines)	N...	Chimie (ENSIC)
HUSSON	Physique (ENSEM)		Mathématiques
WEISSLINGER	Physique		

CHARGES D'ENSEIGNEMENTS

MM. AMARIGLIO - COEURE - DAVRAINVILLE - GIRARDEAU - HILY - MAURIN - NOVERRAZ -
OVAERT - RUYER - WEBER.

JE REMERCIE MONSIEUR LE PROFESSEUR LEGRAS,

DIRECTEUR DE L'INSTITUT DE CALCUL

Il a été pour moi un maître bienveillant
toujours disponible. Il n'a ménagé ni ses
conseils, ni son temps, rare et précieux.

Qu'il veuille bien trouver ici le témoignage
de ma profonde reconnaissance et de ma vive
admiration.

Je suis honoré de la participation au Jury de
Messieurs DEPAIX et GILORMINI, Maîtres de Conférences.

Je remercie :

- Monsieur MARI, Directeur de l'INSTITUT DES SCIENCES
DE L'INGENIEUR, qui m'a aimablement permis l'accès à l'ordinateur
de l'ISIN.

- Monsieur DURAND, Chef de Département de GENIE CIVIL
à l'INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE.

J'adresse mon souvenir reconnaissant à mes collègues
pour leur amicale coopération.

- TABLE DES MATIERES -

	Pages
INTRODUCTION	
A - <u>PROBLEMES PLANS</u>	
I - CAS GENERAL	
I. 1. Position du Problème	1
I. 2. Potentiels de simple couche et de double couche	2
I. 3. Résolution numérique	
I.3.1. Détermination des densités de couche g et h	3
I.3.2. Calcul du potentiel	6
I.3.2.1. Etude de l'intégrale le long de Γ_1	7
I.3.2.2. Etude de l'intégrale le long de Γ_2	8
II - CAS DE 2 CERCLES CONCENTRIQUES CENTRES A L'ORIGINE	
II.1. Calcul des densités sous forme discrète	11
II.2. Calcul du potentiel en un point quelconque du domaine	14
II.3. Applications numériques	
II.3.1. Solution stricte	15
II.3.2. Calcul des densités	17
II.3.3. Calcul du potentiel	18
III - CAS DE 2 ELLIPSES HOMOFOCALES	
III.1. Position du problème	21
III.2. Calcul des densités sous forme discrète	22
III.3. Calcul du potentiel	27
III.4. Résultats numériques	29
B - <u>PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS DE REVOLUTION.</u>	
CAS DE 2 CYLINDRES DE REVOLUTION CONCENTRIQUES	
I.1. Position du problème	32
I.2. Calcul des densités sous forme discrète	33
I.3. Calcul du potentiel	47
I.4. Applications numériques	
I.4.1. Solution stricte	51
I.4.2. Calcul des densités	52
I.4.3. Calcul du potentiel	55

I N T R O D U C T I O N

---:---:---:---:---:---:---:---:---:---

Un problème fondamental en électricité est d'établir la liaison entre la densité de charge sur un conducteur et le potentiel crée par cette distribution en un point quelconque, en particulier, si ce conducteur est placé dans un diélectrique, continu ou discontinu, de forme variable.

Ce problème est important puisqu'il permet, par exemple de calculer les capacités d'un ensemble de conducteurs, mais il est aussi très difficile puisqu'il conduit à la résolution d'un système d'équations intégrales.

La connaissance d'une solution numérique est alors un atout très précieux et dès l'instant où une méthode mathématique permet d'y parvenir, elle devient d'un intérêt considérable.

Notons que, la solution numérique de problèmes de la théorie du potentiel a un intérêt qui dépasse le cadre de la simple électrostatique puisque l'on sait, que, par des analogies, le même problème se trouve, dans les mêmes termes, posé dans bien des domaines de la physique ou de la mécanique.

A. PROBLEMES PLANS

I. CAS GENERAL

I. 1. Position du problème :

Etant donné un domaine D_2 entouré par un domaine D_1 , Γ_1 et Γ_2 les frontières respectives des domaines D_1 et D_2 . Nous nous proposons de trouver numériquement la solution $\phi(x,y)$ du problème défini par les quatre relations :

(1) $\Delta\phi = 0$ à l'intérieur du domaine D_2

(2) $\Delta\phi = 0$ à l'intérieur du domaine D_1

(3) ϕ est donné sur la frontière Γ_1

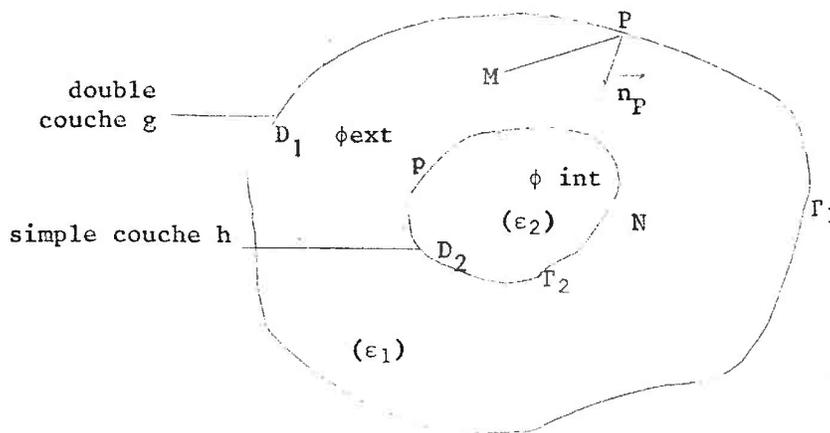
$\phi(P_i) = F(P_i)$ en tout point P_i de Γ_1

F fonction donnée

(4) le flux à travers Γ_2 est continu

$$\epsilon_1 \left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{ext}} = \epsilon_2 \left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{int}}$$

ϵ_1 et ϵ_2 représentant des constantes



I.2. POTENTIELS DE SIMPLE COUCHE ET DOUBLE COUCHE

La relation (3) étant une condition de type Dirichlet, répartissons continument sur Γ_1 un potentiel de double couche de densité g , donné par la formule (5)

$$(5) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} g(s_p) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} ds_p$$

P point courant sur Γ_1 , la normale $\overrightarrow{n_p}$ étant orientée vers l'intérieur, $r(M, P)$ désignant la distance arithmétique PM .

$$\frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} \quad \text{s'évaluant à partir du produit scalaire}$$

$\frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{n_p}}{PM^2}$ Cette fonction est solution de l'équation de Laplace (relation 1) dans tout le plan.

La relation (4) étant une condition de type Neumann, répartissons continument sur Γ_2 un potentiel de simple couche de densité h , donné par la formule (6)

$$(6) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \text{Log } NM \, d\xi_N$$

N point courant sur Γ_2

Cette fonction est solution de l'équation de Laplace

(relation 2) dans tout le plan en dehors de Γ_2 . L'opérateur Laplacien étant linéaire, le potentiel induit en M appartenant au domaine est donné par

$$(7) \quad \phi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} g(s_P) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_P})}{r(M,P)} ds_P + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \text{Log}NM d\xi_N$$

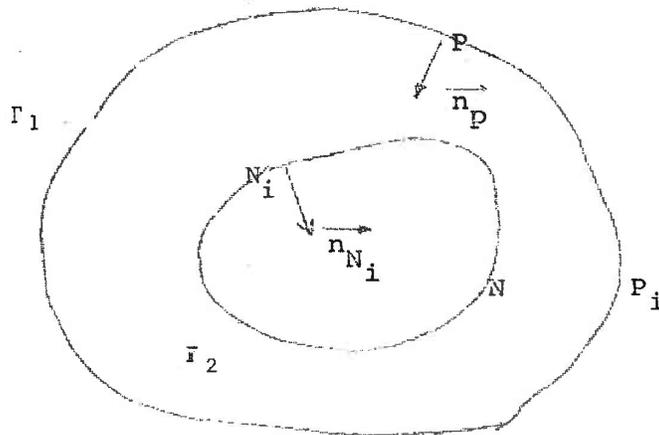
I. 3. RESOLUTION NUMERIQUE.

La résolution numérique de ce problème s'effectue en deux temps.

I. 3. 1. DETERMINATION DES DENSITES DE COUCHE g et h

On détermine les densités de couche g et h, correspondant au problème posé, en écrivant les relations (3) et (4). La continuité du potentiel de simple couche et la discontinuité du potentiel de double couche donnent pour la relation (3) en tous points P_i de Γ_1

$$(8) \quad g(P_i) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} g(s_P) \frac{\cos(\overrightarrow{PP_i}, \overrightarrow{n_P})}{r(P_i,P)} ds_P + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \text{Log}NP_i d\xi_N = F(P_i)$$



La dérivée normale d'un potentiel de double couche est une fonction continue, par contre la dérivée normale d'un potentiel de simple couche est discontinue et s'exprime par les formules suivantes en tous points N_i de Γ_2

$$\left(\frac{d\phi}{dn}\right)_{\text{int}} = h(\xi_i) + \frac{1}{\mathfrak{q}} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \frac{\cos(\overrightarrow{NN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r(N_i, N)} d\xi_N + \frac{1}{\mathfrak{q}} \int_{\Gamma_1} g(s_P) \frac{d}{dn} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_P})}{r(N_i, P)} ds_P$$

$$\left(\frac{d\phi}{dn}\right)_{\text{ext}} = -h(\xi_i) + \frac{1}{\mathfrak{q}} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \frac{\cos(\overrightarrow{NN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r(N_i, N)} d\xi_N + \frac{1}{\mathfrak{q}} \int_{\Gamma_1} g(s_P) \frac{d}{dn} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_P})}{r(N_i, P)} ds_P$$

La relation (4) entraîne

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\mathfrak{q}} \int_{\Gamma_1} g(s_P) \frac{d}{dn} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_P})}{r(N_i, P)} ds_P - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) h(\xi_i) \\ & + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\mathfrak{q}} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \frac{\cos(\overrightarrow{NN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r(N_i, N)} d\xi_N = 0 \end{aligned}$$

La détermination des densités g et h se fait à partir du système intégral obtenu en regroupant les relations (8) et (9)

$$g(P_i) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} g(s_p) \frac{\cos(\overrightarrow{PP_i}, \overrightarrow{n_p})}{r(P_i, P)} + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \text{Log} NP_i d\xi_N = F(P_i)$$

(8)

(10)

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\pi} \int_{\Gamma_1} g(s_p) \frac{d}{dn} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_p})}{r(N_i, P)} ds_p - (\epsilon_1 + \epsilon_2) h(\xi_i)$$

$$+ \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\pi} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \frac{\cos(\overrightarrow{NN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r(N_i, N)} d\xi_N = 0$$

(9)

Nous calculons alors de manière approchée les valeurs de la fonction g en n points P₁ P_n et de la fonction h en n points N₁ N_n correspondant à des angles polaires

$$\theta_1 = \frac{\pi}{n} \dots \dots \dots \theta_i = \frac{2i - 1}{n} \pi \dots \dots \theta_n$$

régulièrement espacés sur (0, 2 π) de la quantité $\frac{2\pi}{n}$

Pour cela, on écrit (8) aux points P₁ P_n et (9) aux points N₁ N_n ce qui donne 2n relations. Toutes les intégrales qui interviennent dans ces relations sont de la forme

$$(11) \int_0^{2\pi} f(\theta) k(\psi, \theta) d\theta$$

Où f est une fonction périodique de période 2π ; $k(\psi, \theta)$ noyau. On remplace chaque intégrale par sa valeur approchée à l'aide d'une formule de quadrature.

Compte tenu de l'ordinateur dont nous disposons, nous avons choisi une méthode d'interpolation trigonométrique. Les noeuds d'interpolation étant les θ_j qui correspondent aux points P_j et N_j . On obtient alors

$$(12) \int_0^{2\pi} f(\theta) k(\psi, \theta) d\theta \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^n f(\theta_j) k(\psi, \theta_j)$$

Le système d'équations intégrales (10) devient après discrétisation le système matriciel

(13)

$$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [g] \\ [h] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F] \\ [O] \end{bmatrix}$$

Les sous-matrices $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ seront explicitées dans chacun des exemples traités. La résolution du système matriciel (13) conduit à la détermination des densités g et h .

I. 3. 2 CALCUL DU POTENTIEL

Les densités étant connues, on calcule le potentiel en un

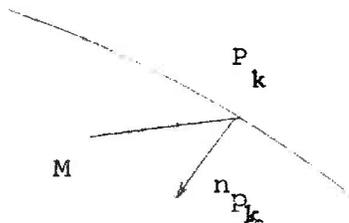
point quelconque du domaine grâce à la formule (7)

$$\phi(M) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_1} g(s_P) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_P})}{r(M, P)} ds_P + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \text{Log NMd}\xi_N$$

La technique de quadrature précédente ne peut pas s'appliquer sans modification. En effet les noyaux \log et $\frac{\cos}{r}$ présentent une pseudo-singularité et une approximation correcte de ces expressions nécessiterait l'utilisation de polynômes de très haut degré.

I.3.2.1. ETUDE DE L'INTEGRALE LE LONG DE Γ_1

Si le point M se rapproche du contour Γ_1 , appelons P_k le point parmi les P_1, P_2, \dots, P_n le plus proche de M



L'expression de $\frac{\cos(\overrightarrow{P_k M}, \overrightarrow{n_{P_k}})}{r(M, P_k)}$, qui doit intervenir lors de la discrétisation de l'intégrale n'est plus bornée.

Parmi les techniques possibles de calcul du potentiel, nous décomposons l'intégrale le long de Γ_1 en deux parties.

$$(14) \quad \frac{1}{\mathfrak{A}} \int_{\Gamma_1} g(s_p) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} ds_p = \frac{1}{\mathfrak{A}} \int_{\Gamma_1} [g(s_p) - g(s_{P_k}) + g(s_{P_k})] \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} ds_p$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}} \int_{\Gamma_1} [g(s_p) - g(s_{P_k})] \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} ds_p + \frac{1}{\mathfrak{A}} g(s_{P_k}) \int_{\Gamma_1} \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} ds_p$$

Le noyau de la première des deux intégrales est régulier et s'annule lorsque le point P est en P_k . La seconde intégrale est connue strictement.

$$(15) \quad \int_{\Gamma_1} \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} ds_p = 2\mathfrak{A} \quad \text{pour M intérieur à } \Gamma_1$$

On applique alors cette technique de quadrature (cf. page 5) en tous les points du domaine intérieur à Γ_1

On obtient :

$$(16) \quad \frac{1}{\mathfrak{A}} \int_{\Gamma_1} g(s_p) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} ds_p = 2g(s_{P_k}) + \frac{2}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{\cos(\overrightarrow{P_j M}, \overrightarrow{n_{P_j}})}{r(M, P_j)} \left(\frac{ds}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_j} [g(s_{P_j}) - g(s_{P_k})]$$

I.3.2.2. ETUDE DE L'INTEGRALE LE LONG DE Γ_2

La même difficulté apparaît avec l'expression de Log NM

lorsque la distance NM devient trop petite

Soit N_k , le point parmi les N_1, N_2, \dots, N_n le plus proche de N

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} h(\xi_N) \text{Log NMd}\xi_N = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} [h(\xi_N) - h(\xi_{N_k}) + h(\xi_{N_k})] \text{Log NMd}\xi_N$$

(17)

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_2} [h(\xi_N) - h(\xi_{N_k})] \text{Log NMd}\xi_N + \frac{1}{\pi} h(\xi_{N_k}) \int_{\Gamma_2} \text{Log NMd}\xi_N$$

Cette méthode ne s'applique que dans la mesure où l'on est susceptible de calculer mathématiquement $\int_{\Gamma_2} \text{Log NMd}\xi_N$ (cas du cercle). Sinon une technique différente est exposée page 27 lors de l'étude de l'ellipse.

II. CAS DE DEUX CERCLES CONCENTRIQUES CENTRES A L'ORIGINE

Dans un but de simplification et afin de tester nos résultats à l'aide d'une solution stricte, nous avons d'abord envisagé le cas de 2 cercles concentriques centrés à l'origine.

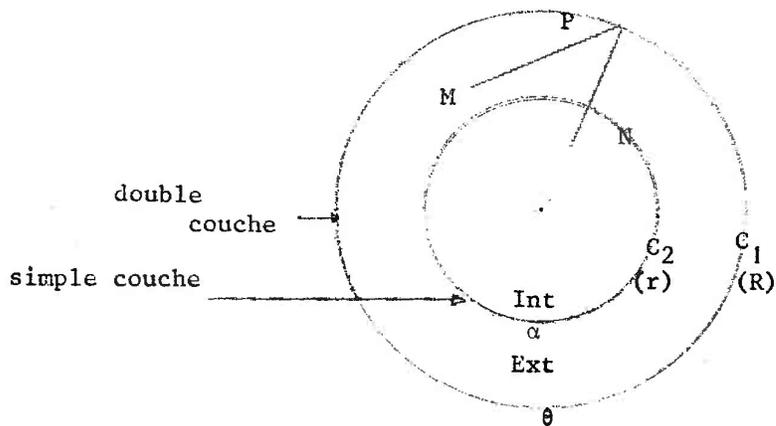
PROBLEME : Trouver numériquement la solution $\phi(x,y)$ du problème défini par

(1c) $\Delta\phi = 0$ à l'intérieur de C_2 $0 < r < R$

(2c) $\Delta\phi = 0$ dans la couronne comprise entre C_1 et C_2 $r < \rho < R$

(3c) ϕ sur $C_1 = F(\psi)$ fonction donnée

(4c) $\epsilon_1 \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_{\text{ext}} = \epsilon_2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_{\text{int}}$ à la traversée de C_2

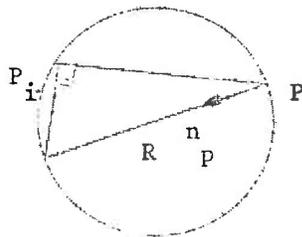


Les particularités suivantes apparaissent

- Le calcul de la dérivée normale se ramène à une dérivation partielle par rapport à r

- L'expression de $\frac{\cos(\overrightarrow{PP_i}, \vec{n}_P^+)}{r(P_i, P)}$ se calcule à l'aide des

relations trigonométriques dans le triangle rectangle



$$(13) \quad \frac{\cos(\overrightarrow{PP_i}, \vec{n}_P^+)}{r(P_i, P)} = \frac{1}{2R}$$

Nous utilisons toujours les potentiels de simple couche et de double couche. Les conditions (3c) et (4c) se traduisent par le système (10). Le potentiel induit en M est donné par la formule (7)

II.1. CALCUL DES DENSITES SOUS FORME DISCRETE

II.1.1. Ecrivons que le potentiel est connu au point P_i de C_1

$$(19) \quad g(P_i) + \frac{1}{n} \int_{C_1} g(s_P) \frac{\cos(\overrightarrow{PP_i}, \overrightarrow{n_P})}{r(P_i, P)} ds_P + \frac{1}{n} \int_{C_2} h(\xi_N) \text{Log} NP_i d\xi_N = F(P_i)$$

Compte tenu de la relation (18)

$$(20) \quad g(P_i) + \frac{1}{2\pi R} \int_{C_1} g(s_P) ds_P + \frac{1}{n} \int_{C_2} h(\xi_N) \text{Log} NP_i d\xi_N = F(P_i)$$

Les coordonnées polaires de N sont (r, α) celles de P_i (R, θ_i)

$$\overline{NP_i}^2 = R^2 - 2Rr \cos(\theta_i - \alpha) + r^2$$

Soit pour (20)

$$g(P_i) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(R\theta) d\theta + \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r\alpha) \text{Log} [R^2 - 2Rr \cos(\theta_i - \alpha) + r^2] d\alpha = F(P_i)$$

Chacuné des précédentes intégrales peut -être approchée par la méthode de quadrature exposée en I.3.1. pages 5 et 6. La relation (19), écrite aux n points $P_1 \dots P_n$ régulièrement espacés sur $(0, 2\pi)$ donne l'expression matricielle

$$(21) \quad \begin{array}{l} \boxed{[A] [g] + [B] [h] = [F]} \\ \text{avec } A_{ij} = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad A_{ii} = 1 + \frac{1}{n} \\ B_{ij} = \frac{r}{n} \text{Log} [R^2 - 2Rr \cos(\theta_i - \alpha_j) + r^2] \end{array}$$

Nous remarquons que la somme des éléments de chaque ligne ou de chaque colonne) de la matrice [A] est constante. Une justification simple est donnée page 38.

II.1.2. TRADUISONS MAINTENANT LA CONTINUITÉ DU FLUX A TRAVERS C₂

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\pi} \int_{C_1} g(s_p) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_p})}{r(N_i, P)} ds_p - (\epsilon_1 + \epsilon_2) h(\xi_i) - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\pi} \int_{C_2} h(\xi_N) \frac{\cos(\overrightarrow{NN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r(N_i, N)} d\xi_N = 0$$

$$\text{Posons } f = \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_p})}{r(N_i, P)} = \frac{\overrightarrow{PN_i} \cdot \overrightarrow{n_p}}{\overrightarrow{PN_i}^2} = \frac{R - r \cos(\theta - \alpha_i)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha_i) + r^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{(R^2 + r^2) \cos(\theta - \alpha_i) - 2Rr}{[R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha_i) + r^2]^2}$$

Nous obtenons alors en divisant par ϵ_2

$$(22) \quad \frac{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}{\pi} R \int_0^{2\pi} g(R\theta) \frac{2rR - (R^2 + r^2) \cos(\theta - \alpha_i)}{[R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha_i) + r^2]^2} d\theta - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + 1\right) h(\xi_i) + \frac{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r\alpha) d\alpha = 0$$

Après discrétisation la relation (22) devient

$$(23) \quad 2 \frac{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}{n} R \sum_{j=1}^n \frac{2rR - (R^2 + r^2) \cos(\theta_j - \alpha_j)}{\left[R^2 - 2Rr \cos(\theta_j - \alpha_j) + r^2 \right]^2} g(R\theta_j) - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} + 1 \right) h(r_i) + \frac{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}{n} \sum_{j=1}^n h(r\alpha_j) = 0$$

La relation (23) écrite aux n points N_1, N_2, \dots, N_n régulièrement espacés sur $(0, 2\pi)$ de la quantité $\frac{2\pi}{n}$ donne l'expression matricielle

$$(24) \quad \begin{array}{l} [C] [g] + [D] [h] = [0] \\ \text{avec} \\ C_{ij} = 2 \frac{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}{n} R \frac{2rR - (R^2 + r^2) \cos(\theta_j - \alpha_i)}{\left[R^2 - 2Rr \cos(\theta_j - \alpha_i) + r^2 \right]^2} \\ D_{ij} = - \frac{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}{n} \quad \text{et} \quad D_{ii} = \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) - \frac{1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}{n} \\ i \neq j \end{array}$$

La remarque précédente relative à la matrice $[A]$ se retrouve pour la matrice $[D]$

Pour une matrice de dimension inférieure à 40, sur IBM 1130, la méthode de triangularisation de Gauss, pour la résolution du système matriciel (13) donne les densités g et h sous forme discrète.

Pour une matrice de dimension supérieure, il est nécessaire d'établir un programme de résolution de grand système linéaire utilisant le disque de l'ordinateur.

II. 2. CALCUL DU POTENTIEL EN UN POINT QUELCONQUE DU DOMAINE

Le potentiel est donné par la relation (7)

$$\phi(M) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} g(s_p) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} ds_p + \frac{1}{\pi} \int_{C_2} h(\xi_N) \text{LogNMd}\xi_N$$

M est repéré dans un système de coordonnées polaires (ρ, ψ)

II. 2. 2 ETUDE DE L'INTEGRALE LE LONG DE C₁

On utilise le résultat de I.3.2.1.

$$\frac{1}{\pi} \int_{C_1} g(s_p) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n_p})}{r(M, P)} ds_p = 2g(R_{\theta_k}) + \frac{2R}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{[R - \rho \cos(\theta_j - \psi)] [g(R_{\theta_j}) - g(R_{\theta_k})]}{R^2 - 2\rho R \cos(\theta_j - \psi) + \rho^2}$$

II.2.2. ETUDE DE L'INTEGRALE LE LONG DE C₂

On utilise le résultat de I.3.2.2.

Dans le cas du cercle $\int_C \text{LogNMd}\xi_N$ se calcule strictement

Pour le point M intérieur au cercle C₂, on utilise le théorème suivant :

La valeur d'une fonction harmonique au centre d'un cercle est égale à sa valeur moyenne sur le cercle.

$$\int_{C_2} \text{LogNMd}\xi_N = 2\pi r \text{Log}r \quad \text{si M est intérieur à } C_2$$

Remarque : Pour $r = 1$ le terme complémentaire disparaît ; pour cette raison, nous avons choisi dans les applications numériques un rayon r différent de l'unité.

$$\frac{1}{\pi} \int_{C_2} h(\xi_N) \text{LogNMd}\xi_N = 2rh(r\theta_k) \text{Logr} + \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} [h(\xi_N) - h(\xi_{N_k})] \text{LogNM}^2 d\xi_N$$

En discrétisant

$$\frac{1}{\pi} \int_{C_2} h(\xi_N) \text{LogNMd}\xi_N = 2rh(r\theta_k) \text{Logr} + \frac{r}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [h(r\theta_j) - h(r\theta_k)] \text{Log} [r^2 - 2\rho r \cos(\theta_j - \psi) + \rho^2]$$

Pour le point M extérieur au cercle C_2 , on montre en annexe que

$\int_{C_2} \text{Log NMd}\xi_N$ est égale à $2\pi r \text{Log} l$ où l représente la distance arithmétique du centre du cercle au point M

La discrétisation donne cette fois :

$$\frac{1}{\pi} \int_{C_2} h(\xi_N) \text{LogNMd}\xi_N = 2rh(r\theta_k) \text{Log} l + \frac{r}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [h(r\theta_j) - h(r\theta_k)] \text{Log} [r^2 - 2\rho r \cos(\theta_j - \psi) + \rho^2]$$

II. 3. APPLICATIONS NUMERIQUES

II.3.1. SOLUTION STRICTE

Nous avons construit pour le cercle un problème de barrière particulier et nous utiliserons cette solution pour toutes les vérifications numériques ultérieures.

Une fonction du type $\rho \sin \psi$ est harmonique à l'intérieur d'un cercle et une fonction du type $(k\rho + \frac{k'}{\rho}) \sin \psi$ est harmonique dans une couronne circulaire.

Soient deux cercles C_1 et C_2 concentriques de rayon $R = 4$ cm et $r = 2$ cm.

Les potentiels extérieur et intérieur valant à priori

$$\phi_{\text{int}} = 300 \rho \sin \psi$$

$$\phi_{\text{ext}} = 200 \left(\rho + \frac{2}{\rho} \right) \sin \psi$$

Ces deux potentiels sont continus au passage de C_2

$$(\phi_{\text{int}})_{C_2} = (\phi_{\text{ext}})_{C_2} = 600 \sin \psi$$

Au passage de C_2 , il y a bien conservation du flux

$$\left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{ext}} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)_{\text{ext}} = 200 \left(1 - \frac{2}{\rho^2} \right) \sin \psi$$

$$\left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{int } C_2} = 300 \sin \psi \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{ext } C_2} = 100 \sin \psi$$

Le potentiel sur C_1 est alors déterminé par

$$(\phi_{\text{ext}})_{C_1} = 900 \sin \psi$$

Nous avons donc résolu le problème étudié dans le cas

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad F(\psi) = 900 \sin \psi$$

II. 3. 2. CALCUL DES DENSITES

Les points de discrétisation correspondant aux angles polaires

$$\theta_i = \frac{2i - 1}{n} \pi \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Pour déterminer les densités de couche g et h, nous avons pris 50 points de discrétisation sur chacun des cercles. Le système matriciel (13) est alors du type

$$(25) \quad [A^*] [X] = [B^*]$$

Ne disposant pour ce calcul que d'un petit ordinateur, l'IBM 1130 (8k), nous avons dû utiliser la méthode de Richardson (Réf V) pour résoudre le système matriciel précédent. La matrice $[A^*]$ de dimension (100, 100) est bien conditionnée, ses valeurs propres sont toutes réelles, mais pas toutes de même signe. Nous avons remplacé le système (25) par le système équivalent.

$$(26) \quad [A^*]^t [A^*] [X] = [A^*]^t [B^*]$$

système dont les valeurs propres sont toutes positives. La plus grande valeur propre de la matrice $[A^*]^t [A^*]$ est égale à 4. la plus petite à 0,444. Le nombre de condition est égal à 9 et le nombre d'itérations à 2.

Dans un but de plus grande généralité, nous n'avons pas tenu compte des symétries du problème particulier traité. Les résultats sont alors les suivants :

i	gi	hi*
1	50.2324150	- 6.2790522
5	428.661453	- 53.5826804
9	701.045375	- 87.6306692
13	800.000030	- 100.000001
17	701.045367	- 87.6306702
21	428.661448	- 53.5836814
25	50.2324208	- 6.2905448
29	- 340.6234	42.5779267
33	- 647.213610	80.9016978
37	- 793.691779	99.2114686
41	- 743.821205	92.9776475
45	- 509.939205	63.7423990
49	- 149.905055	18.7381314

Tableau 1

II. 3. 3. CALCUL DU POTENTIEL EN UN POINT INTERIEUR DU DOMAINE

Les résultats obtenus sont donnés par le tableau 2.

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{49\pi}{50}$$

$$\frac{9\pi}{50}$$

$$\frac{89\pi}{50}$$

$$\frac{65\pi}{50}$$

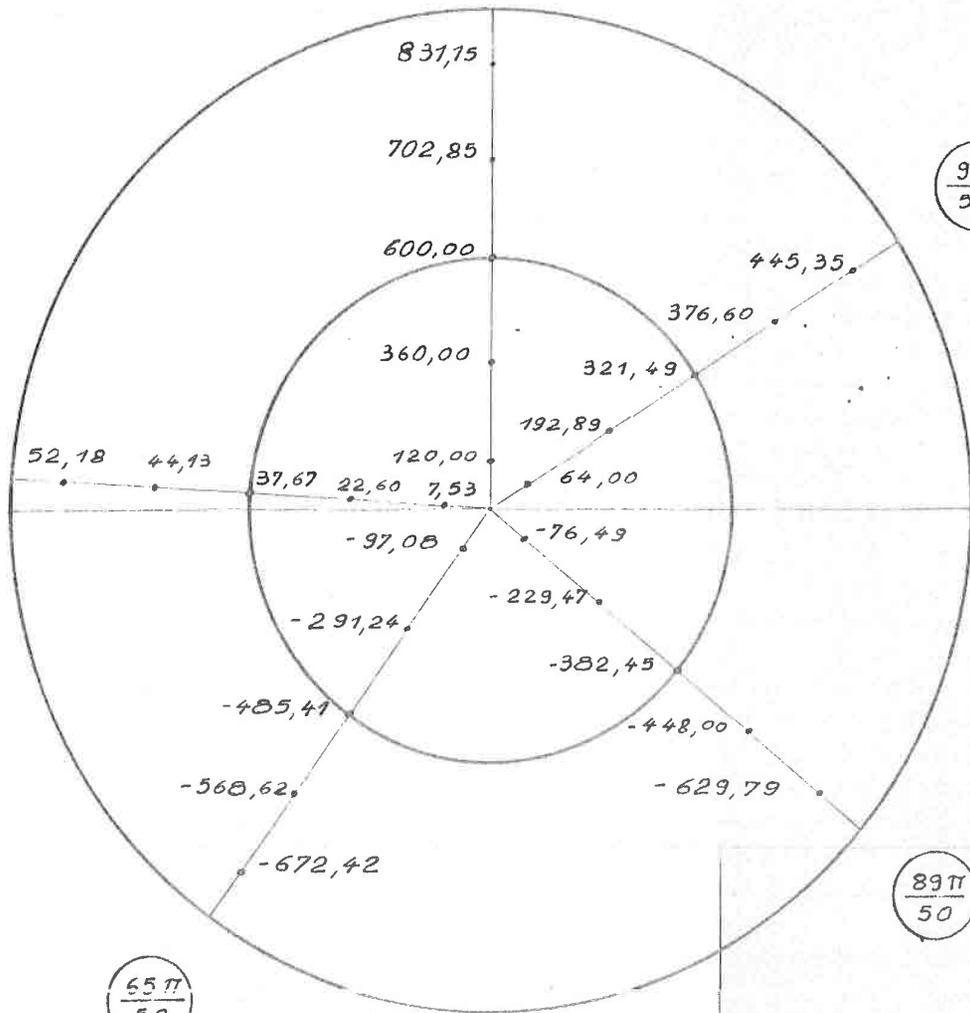


Tableau 2.

L'erreur relative, due aux erreurs de discrétisation et aux erreurs de chute, ne dépend pratiquement pas du rayon polaire choisi ψ et sur le rayon polaire $\psi = \pi / 50$ le tableau 3 montre son évolution

ρ intérieur à C_1	Erreur relative	ρ couronne circulaire (C_1, C_2)	Erreur relative
0.2	$1.3 \cdot 10^{-6}$	2.2	$8.6 \cdot 10^{-7}$
0.4	$7.1 \cdot 10^{-7}$	2.4	$1.4 \cdot 10^{-7}$
0.6	$3.7 \cdot 10^{-7}$	2.6	$6.7 \cdot 10^{-8}$
0.8	$3.3 \cdot 10^{-7}$	2.8	$6.4 \cdot 10^{-8}$
1.0	$2.6 \cdot 10^{-7}$	3.0	$1.0 \cdot 10^{-7}$
1.2	$1.9 \cdot 10^{-7}$	3.2	$7.8 \cdot 10^{-7}$
1.4	$1.6 \cdot 10^{-7}$	3.4	$7.8 \cdot 10^{-6}$
1.6	$1.7 \cdot 10^{-7}$	3.6	$5.5 \cdot 10^{-5}$
1.8	$7.5 \cdot 10^{-7}$	3.8	$2.0 \cdot 10^{-4}$
2.0	$6.5 \cdot 10^{-6}$	4.0	$-7.5 \cdot 10^{-8}$

Tableau 3 (n = 50)

La modification de la formule de quadrature pour tenir compte du noyau en Log est très satisfaisante, celle due au terme en $\frac{\cos}{r}$ est nettement moins bonne. Une étude plus détaillée reste à faire.

Au voisinage du contour C_1 , l'erreur de discrétisation est nettement plus importante. Par contre, pour des valeurs de n plus faibles, l'erreur de discrétisation est sensiblement la même en tous les points du domaine

intérieur. Pour 12 points sur chaque cercle l'erreur relative, due aux erreurs de discrétisation et aux erreurs de chute, est donnée par le tableau 4 pour le rayon polaire $\psi = \pi/12$

ρ intérieur à C_1	Erreur relative	ρ couronne circulaire	Erreur relative
0.4	$3.0 \cdot 10^{-3}$	2.4	$3.0 \cdot 10^{-3}$
0.8	$3.0 \cdot 10^{-3}$	2.8	$3.4 \cdot 10^{-3}$
1.2	$3.1 \cdot 10^{-3}$	3.2	$4.6 \cdot 10^{-3}$
1.6	$3.3 \cdot 10^{-3}$	3.6	$4.5 \cdot 10^{-3}$
2.0	$3.7 \cdot 10^{-3}$	4.0	$-9.1 \cdot 10^{-6}$

Tableau 4 (n = 12)

III. CAS DE DEUX ELLIPSES HOMOFOCALES

Aucune simplification n'apparaît dans le cas de deux ellipses homofocales. Nous utiliserons les formules générales établies dans la partie I

III. 1. POSITION DU PROBLEME

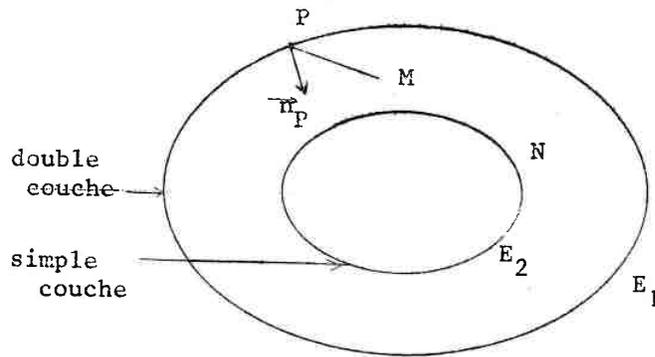
Nous nous proposons de trouver numériquement la solution $\phi(x,y)$ du problème défini par

$$(1e) \quad \Delta \phi = 0 \quad \text{à l'intérieur de } E_2$$

$$(2e) \quad \Delta \phi = 0 \quad \text{dans le domaine compris entre } E_1 \text{ et } E_2$$

$$(3e) \quad \phi \text{ sur l'ellipse } E_1 = F(\psi) \text{ fonction donnée}$$

$$(4e) \quad \epsilon_1 \left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{ext}} = \epsilon_2 \left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{int}} \quad \text{à la traversée de } E_2$$



Nous répartissons toujours un potentiel de simple couche (condition de Neumann) de densité $h(\xi)$ sur E_2 et un potentiel de double couche (condition de Dirichlet) de densité $g(s)$ sur E_1

Le potentiel induit en M est donné par la formule (7)

$$(7) \quad \phi(M) = \frac{1}{\pi} \int_{E_1} g(s_P) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{n}_P)}{r(M, P)} ds_P + \frac{1}{\pi} \int_{E_2} h(\xi_N) \text{Log} N M d\xi_N$$

III. 2. CALCUL DES DENSITES SOUS FORME DISCRETE

III. 2. 1. ECRIVONS QUE LE POTENTIEL EST CONNU AU POINT P_i de E_1

$$(8) \quad g(P_i) + \frac{1}{\pi} \int_{E_1} g(s_P) \frac{\cos(\overrightarrow{PP_i}, \overrightarrow{n}_P)}{r(P_i, P)} ds_P + \frac{1}{\pi} \int_{E_2} h(\xi_N) \text{Log} N P_i d\xi_N = F(\psi_i)$$

Soit encore :

$$(27) \quad g(P_i) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(R\theta) \frac{\cos(\overrightarrow{PP_i}, \overrightarrow{n}_P)}{r(P_i, P)} \left(\frac{ds_P}{d\theta} \right) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(r\alpha) \text{Log} N P_i \left(\frac{d\xi_N}{d\alpha} \right) d\alpha = F(\psi_i)$$

Appelons c le rapport du petit axe au grand axe de l'ellipse, le point courant P_j de E_1 est repéré par

$$(28) \quad \rho(\theta_j) = \frac{a c}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta_j + \sin^2 \theta_j}}$$

L'élément d'arc a pour expression

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + \rho'^2 = \frac{a^2 c^2 (c^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{(c^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^3}$$

La normale \vec{n}_p étant à prendre au "point courant" P (condition de Dirichlet).

Les paramètres directeurs de la normale \vec{n}_p^* au point courant P_j sont :

$$-\frac{\cos \theta_j}{a^2} \quad \text{et} \quad -\frac{\sin \theta_j}{a^2 c^2}$$

$$\frac{\cos(\widehat{PP_i}, \vec{n}_p^*)}{r(P_i, P)} \quad \text{s'évaluant à partir de} \quad \frac{\vec{PP_i} \cdot \vec{n}_p^*}{PP_i^2 ||\vec{n}_p^*||^{1/2}}$$

Dans un premier temps, nous discrétisons les deux intégrales intervenant dans la relation (27). Dans un second temps, nous écrivons cette relation en n points correspondant aux angles polaires utilisés pour la discrétisation.

On obtient :

$$(28) \quad [A] [g] + [B] [h] = [F]$$

D'une façon générale, lorsque le point P_j tend vers le point P_i , l'expres-

sion de $\frac{\cos(\overrightarrow{P_j P_i}, \overrightarrow{n_{P_j}})}{r(P_i, P_j)}$ tend vers $\frac{1}{2R(P_i)}$

R étant le rayon de courbure au point P_i de la courbe.

Le rayon de courbure pour une courbe en coordonnées polaires est donnée par

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'\rho'' - \rho\rho''^2}$$

On obtient alors pour l'ellipse

$$(29) \quad \frac{1}{2R(P_i)} = \frac{c}{2a} \left(\frac{c^2 \cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i}{c^4 \cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i} \right)^{3/2}$$

Les coefficients des matrices $[A]$ et $[B]$ sont après simplification

$$A_{ii} = 1 + \frac{c^2}{n} \frac{1}{c^4 \cos^2 \theta_i + \sin^2 \theta_i}$$

$$A_{ij} = \frac{2}{n} \frac{a_1^2 c^2 - \rho_j^2 (\theta_j) \rho_i (\theta_i) (c^2 \cos^2 \theta_j + \sin^2 \theta_j) \sin \theta_i \sin \theta_j}{d^2(P_i, P_j) \rho_j (\theta_j)} \frac{ca_1}{(c^2 \cos^2 \theta_j + \sin^2 \theta_j)^{3/2}}$$

$$\text{avec } \rho(\theta) = \frac{a_1 c}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} \quad \text{et } r(\theta) = \frac{a_2 c}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}$$

$$d^2(P_i, P_j) = \rho_j^2 + \rho_i^2 - 2\rho_i \rho_j \cos(\theta_j - \theta_i)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{n} \text{Log} \left[\rho_i^2 + r_j^2 - 2r_j \rho_i \cos(\theta_i - \alpha_j) \right] \frac{ca_2 \sqrt{c^4 \cos^2 \theta_j + \sin^2 \theta_j}}{(c^2 \cos^2 \theta_j + \sin^2 \theta_j)^{3/2}}$$

III. 2. 2. La continuité du flux à travers E_2 s'écrit :

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\pi} \int_{E_1} g(s_P) \frac{d}{dn} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_P})}{r(N_i, P)} ds_P - (\epsilon_1 + \epsilon_2) h(\xi_i) - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\pi} \int_{E_2} h(\xi_N) \frac{\cos(\overrightarrow{NN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r(N_i, N)} d\xi_N = 0$$

La normale $\overrightarrow{n_{N_i}}$ étant à prendre au "point de calcul" N_i (condition de Neumann). Les paramètres directeurs de la normale $\overrightarrow{n_{N_i}}$ intérieure sont cette fois $-\frac{\cos\theta_i}{a^2}$ et $-\frac{\sin\theta_i}{a^2 c}$

La relation (g) s'écrit

$$(31) \quad [C] [g] + [D] [h] = [0]$$

L'expression de la dérivée normale est :

$$\frac{df}{dn} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y}$$

où α et β sont les cosinus directeurs de la normale au point N_i

Pour une fonction $f(x, y)$ des deux variables x et y , le changement de variables $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ transforme la fonction $f(x, y)$ en une fonction $F(r, \theta)$

Les dérivées partielles de f par rapport à x et y s'expriment en fonction des dérivées partielles par rapport à r et θ par les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

L'expression simplifiée de la dérivée normale est

$$\frac{df}{dn} = \frac{1}{\sqrt{c^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} (c^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} (1-c^2) \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

Les coefficients des matrices [C] et [D] sont dans le cas où $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{1}{3}$

$$C_{ij} = -\frac{2\pi}{n} \frac{u(\theta_i) Z Z 1 + \frac{1-c^2}{r(i)} \sin\theta_i \cos\theta_i Z Z 2}{\sqrt{v(\theta_i)} [u(\theta_j)]^{3/2}} \text{ ca}_1 \sqrt{v(\theta_j)}$$

$$\text{avec } u(\theta) = c^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$v(\theta) = c^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$w(\theta_i, \theta_j) = c^2 \cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j$$

$$d^2(P_j, N_i) = \rho^2(\theta_j) - 2r(\theta_i) \rho(\theta_j) \cos(\theta_i - \theta_j) + r^2(\theta_i)$$

$$Z(\theta_i, \theta_j) = -c^2 \sin\theta_i \cos\theta_j + \cos\theta_i \sin\theta_j$$

$$Z Z 1 = \frac{[2\rho(\theta_j)r(\theta_i) - \rho(\theta_j)\cos(\theta_i - \theta_j)] - [r^2(\theta_i) - \rho^2(\theta_j)] w(\theta_i, \theta_j)}{d^4(P_j, N_i) \sqrt{v(\theta_j)}}$$

$$Z Z 2 = \left\{ r^3(\theta_i) Z(\theta_i, \theta_j) - 2 r^2(\theta_i) \rho(\theta_j) [Z(\theta_i, \theta_j) \cos(\theta_i - \theta_j) - w(\theta_i, \theta_j) \sin(\theta_i - \theta_j)] + r(\theta_i) \rho^2(\theta_j) [Z(\theta_i, \theta_j) + 2u(\theta_j) \sin(\theta_i - \theta_j)] \right\} / d^4(P_j, N_i) \sqrt{v(\theta_j)}$$

$$d^2(N_i, N_j) = r^2(\theta_i) - 2 r(\theta_i) r(\theta_j) \cos(\theta_i - \theta_j) + r^2(\theta_j)$$

$$D_{ij} = - \frac{2\pi}{n} \frac{r(\theta_i) u(\theta_i) - r(\theta_j) w(\theta_i, \theta_j)}{d^2(N_i, N_j) \sqrt{v(\theta_i)}} \cdot \frac{ca_2 \sqrt{v(\theta_j)}}{u(\theta_j)^{3/2}}$$

$$D_{ii} = 2\pi + u(\theta_i) \left[\frac{w(\theta_i, \theta_i)}{v(\theta_i)} \right]^{3/2} \cdot \frac{ca_2 \sqrt{v(\theta_i)}}{u(\theta_i)^{3/2}}$$

III. 3. CALCUL DU POTENTIEL EN UN POINT QUELCONQUE DU DOMAINE

III. 3. 1. ETUDE DE L'INTEGRALE LE LONG DE E₁

Le principe est analogue à celui de I.3.2.1. (page 7), l'intégrale

$$\frac{\cos(\vec{PM}, \vec{n}_P)}{r(M, P)} ds_P \text{ valant } 2\pi \text{ pour tout point}$$

M intérieur au contour fermé C

$$(16) \quad \frac{1}{\pi} \int_{E_1} g(s_P) \frac{\cos(\vec{PM}, \vec{n}_P)}{r(M, P)} ds_P = 2g(s_{P_k}) + \frac{2}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{\cos(\vec{P_j}, \vec{n}_{P_j})}{r(M, P_j)} \left(\frac{ds}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_j} [g(s_{P_j}) - g(s_{P_k})]$$

III. 3. 2. ETUDE DE L'INTEGRAL LE LONG DE E₂

L'intégrale $\int \text{LogNMdN}$ ne peut pas se calculer aisément. On utilise alors le potentiel $V^*(M)$, égal à une constante, correspondant à un potentiel de simple couche $h^*(N)$ sur E_2 est solution du problème intérieur de Neumann (Réf II page 6) la fonction propre $h^*(N)$ vérifie la relation

$$(33) \quad \forall h^*(M) - \int_{E_2} h^*(N) \frac{\cos(\overrightarrow{NM}, \vec{n}_M)}{r(M,N)} d\xi_N = 0$$

Discretisons alors l'intégrale en n points N_1, \dots, N_n par la méthode d'interpolation trigonométrique. Ecrivons la relation discrétisée en n points M_1, \dots, M_n . Les mêmes angles polaires étant utilisés pour les points N_1, \dots, N_n et M_1, \dots, M_n

La relation (33) s'écrit

$$(34) \quad \begin{bmatrix} D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\begin{bmatrix} D' \end{bmatrix}$ se déduisant de la matrice $\begin{bmatrix} D \end{bmatrix}$ par modification des éléments de la diagonale.

Avec les notations de la page 27

$$(35) \quad \begin{aligned} D'_{ij} &= D_{ij} \\ i \neq j \\ D_{ij} &= \forall + u(\theta_i) \left[\frac{w(\theta_i, \theta_i)}{v(\theta_i)} \right]^{3/2} \text{ca}^2 \frac{\sqrt{v(\theta_i)}}{[u(\theta_i)]^{3/2}} \end{aligned}$$

La relation (34), traduit donc que la matrice $\begin{bmatrix} D' \end{bmatrix}$ admet la valeur propre 0. Les éléments de la matrice $\begin{bmatrix} h^* \end{bmatrix}$ sont donc les composantes du vecteur propre correspondant à la valeur propre 0. Le calcul numérique du vecteur propre est effectué en se fixant la dernière composante h^*_n égale à 1 et en résolvant le système d'ordre (n-1) obtenu en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice D'

$$\begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{12} & \dots & D'_{1,n-1} \\ & D'_{n-1,1} & D'_{n-1,2} & \dots & D'_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^*_1 \\ \vdots \\ h^*_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D'_{1,n} \\ \vdots \\ -D'_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

Connaissant maintenant les valeurs h_i^* ($i=1, \dots, n$), on calcule le potentiel constant V pour un point M éloigné du contour E_2 et par conséquent pour le point central O

$$(36) \quad V^*(0) = \frac{1}{\pi} \int_{E_2} h^*(\xi_N) \text{Log } ON \, d\xi_N$$

Le calcul de l'intégrale $\frac{1}{\pi} \int_{E_2} h(\xi_N) \text{Log } N M d\xi_N$ s'effectue de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{E_2} h(\xi_N) \text{Log } N M d\xi_N &= \frac{1}{\pi} \int_{E_2} [h(\xi_N) - kh^*(\xi_N)] \text{Log } N M d\xi_N + \frac{k}{\pi} \int_{E_2} h^*(\xi_N) \text{Log } N M d\xi_N \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{E_2} [h(\xi_N) - kh^*(\xi_N)] \text{Log } N M d\xi_N + kV^* \end{aligned}$$

Le noyau de l'intégrale précédente est continu et s'annule en prenant pour valeur de k la quantité

$$k = \frac{h(N_i)}{h^*(N_i)}$$

k dépendant du rayon vecteur considéré.

Remarque : Les formules démontrées utilisant le vecteur propre h^* ne s'appliquent qu'à l'intérieur de E_2 . Il est naturel d'obtenir des résultats médiocres légèrement à l'extérieur de E_2 .

III. 4. RESULTATS NUMERIQUES :

Le rapport c du grand axe au petit axe de l'ellipse est égal à 0,5. La donnée du potentiel sur E_1 est $F(\psi) = 450 \sin \psi$. Les points de discrétisation correspondent aux angles polaires.

$$\theta_i = \frac{2i - 1}{n} \pi \quad i = 1, 2, \dots, n$$

En prenant 16 points sur chacune des ellipses, le système matriciel

$$[A] [X] = [B] \quad \text{de dimension 32 est résolu par la méthode}$$

de Gauss.

Les composantes du vecteur propre h^* sont données par le tableau 5 ainsi que les densités de couche g et h . La valeur de $V(0)$ est - 0,3415909 pour une ellipse de grand axe égal à 1

i	g_i	h_i	h_i
1	119.2722	- 185.1909	0.9985567
2	293.9209	- 347.7578	0.6939345
3	403.6503	- 262.8475	0.6167643
4	467.1173	- 140.2916	0.5952366
5	467.1172	- 140.2911	0.5952160
6	403.6511	- 262.8473	0.6166952
7	293.9218	- 347.7578	0.6937822
8	119.2725	- 185.1935	0.9982172
9	- 119.2720	185.1902	0.9982132
10	- 293.9211	347.7570	0.6937719
11	- 403.6509	262.8481	0.6166793
12	- 467.1180	140.2919	0.5951941
13	- 467.1177	140.2915	0.5952067
14	- 403.6511	262.8472	0.6167225
15	- 293.9215	347.7578	0.6938685
16	- 119.2727	185.1931	1.000000

TABLEAU 5 -

Le tableau 6 indique les valeurs du potentiel pour des angles appartenant

à $\left[0, + \pi/2 \right]$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{7\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{8}$$

$$\frac{3\pi}{10}$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{16}$$

$$\frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{10}$$

$$\frac{\pi}{12}$$

450

441

418

364

318

249

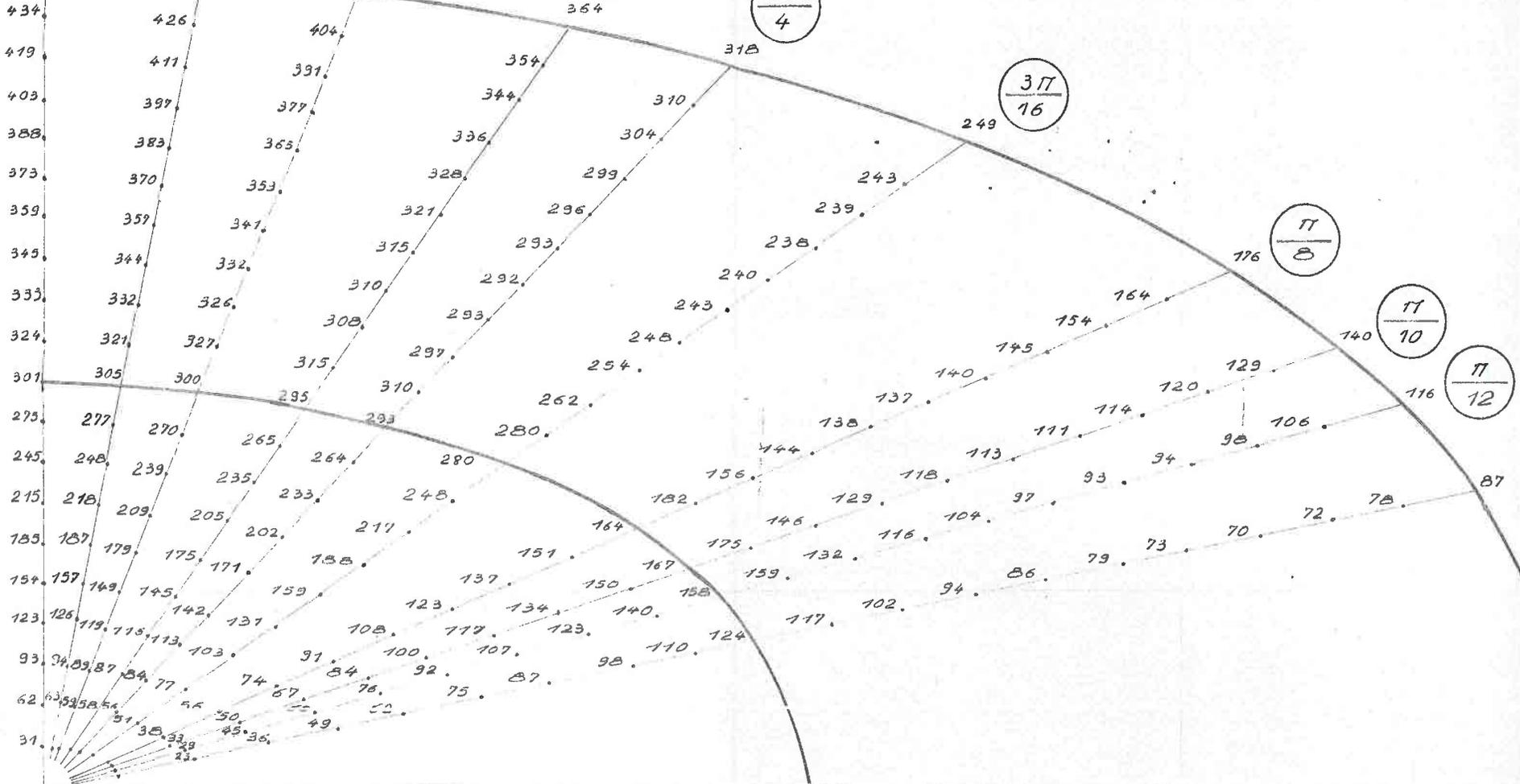
176

140

116

87

20



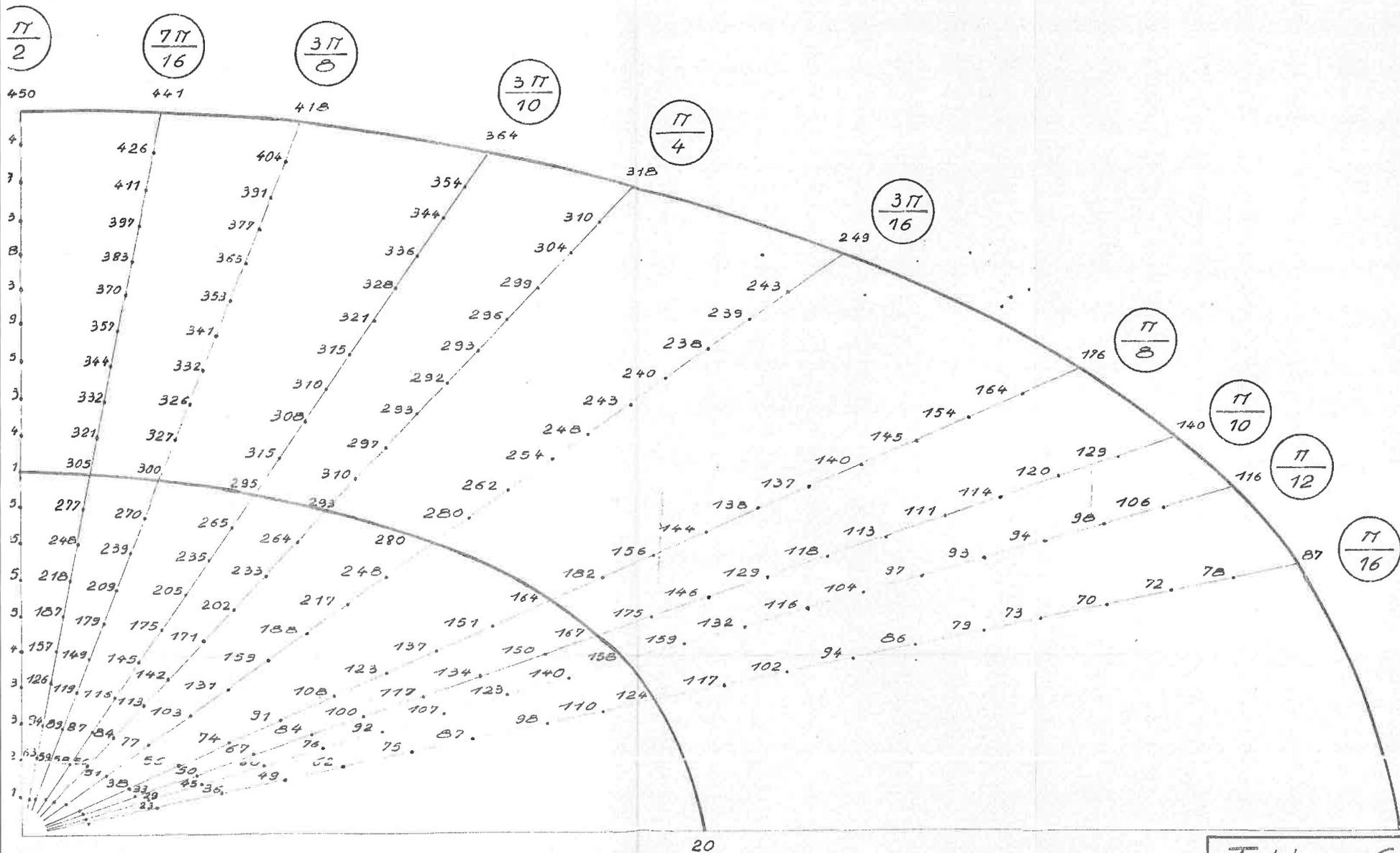


Tableau 6.

B - PROBLEMES TRIDIMENSIONNELS DE REVOLUTION

Les formules générales de la théorie du potentiel à trois variables (Réf I) sont analogues à celles établies pour deux variables. Les courbes Γ sont remplacées par les surfaces S , l'élément différentiel ds par $d\sigma$. Les noyaux des potentiels de simple et de double couche étant cette fois $\frac{\cos}{r^2}$ et $\frac{1}{r}$ au lieu de $\frac{\cos}{r}$ et $\text{Log } r$

Envisageons un système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) . Le problème est de révolution s'il ne dépend pas de θ .

Nous avons directement envisagé un problème de barrière particulier : celui de deux cylindres de révolution concentriques. Ce problème ayant pour avantage de nous permettre de tester nos résultats à l'aide d'une solution stricte que nous serons en mesure de construire.

I - Cas de deux cylindres de révolution concentriques

I - 1. Position du problème

Nous nous proposons de trouver numériquement la solution $\phi(\rho, z)$, indépendante de θ , du problème défini par les quatre relations :

$$(1cy) \quad \Delta\phi = 0 \text{ à l'intérieur de } S_2$$

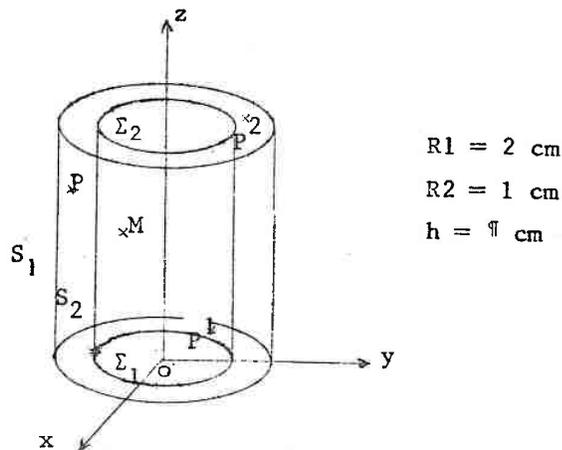
$$(2cy) \quad \Delta\phi = 0 \text{ dans la couronne cylindrique } S_1, S_2$$

$$(3cy) \quad \phi \text{ donné égal à}$$

$$\begin{cases} F(z) \text{ sur la surface cylindrique extérieure } S_1 \\ 0 \text{ sur les faces extrêmes du cylindre } \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2 \end{cases}$$

$$(4cy) \quad \epsilon_1 \left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{ext.}} = \epsilon_2 \left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{int.}} \quad \text{à la traversée de } S_2$$

L'unité de longueur sur Oz a été choisie pour que la hauteur du cylindre soit égale à π cm. Les rayons des 2 cylindres sont $R_1 = 2$ cm et $R_2 = 1$ cm



Répartissons continument pour les conditions de Dirichlet

- { sur S_1 un potentiel de double couche de densité g
- { sur Σ_1 un potentiel de double couche de densité g_1
- { sur Σ_2 un potentiel de double couche de densité g_2

pour la condition de Neumann

sur S_2 un potentiel de simple couche de densité h

I.2 Calcul des densités sous forme discrète

Nous allons écrire successivement :

- la donnée du potentiel sur S_1
- la nullité du potentiel sur Σ_1
- la nullité du potentiel sur Σ_2
- la continuité du flux à travers S_2

Nous obtenons un système intégral de 4 équations à 4 inconnues

Dans le cas d'un cylindre de révolution, les intégrales doubles intervenant se ramènent à des intégrales simples en utilisant les intégrales elliptiques.

En annexe, nous montrons que chacune des intégrales

$$CI1 (A,B) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A+B \cos \theta)^{1/2}} \quad A > |B| > 0$$

$$CI2 (A,B) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A+B \cos \theta)^{3/2}} \quad A > |B| > 0$$

$$CI3 (A,B) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A+B \cos \theta)^{5/2}} \quad A > |B| > 0$$

peuvent s'évaluer en fonction des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad 0 < m < 1$$

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}} \quad 0 < m < 1$$

Nous sommes donc en mesure d'exprimer les deux intégrales suivantes en fonction des intégrales CI1, CI2, CI3

$$CY(A,B) = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha + \beta \cos \theta}{(A+B \cos \theta)^{3/2}} d\theta = \frac{\beta}{B} CI1(A,B) + \frac{(\alpha - A\beta)}{B} CI2(A,B)$$

$$CZ(A,B) = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha' + \beta' \cos \theta + \gamma' \cos^2 \theta}{(A+B \cos \theta)^{5/2}} d\theta = \frac{\gamma'}{B^2} CI1(A,B) +$$

$$\left(\frac{\beta'}{B} - \frac{2A\gamma'}{B^2} \right) CI2(A,B) + \left(\alpha' - \frac{A\beta'}{B} + \frac{A^2\gamma'}{B^2} \right) CI3(A,B)$$

La première quadrature des intégrales doubles est donc effectuée à l'aide des intégrales elliptiques. La seconde quadrature se fait numériquement en discrétisant par la méthode d'interpolation trigonométrique (cf page 6). En écrivant les 4 relations en n points correspondant aux angles polaires utilisés pour la discrétisation, on obtient le système matriciel

$$(39) \quad \begin{bmatrix} AD^{10} & AD^{20} & AD^{30} & AD^{40} \\ AD^{50} & AD^{60} & AD^{70} & AD^{80} \\ AD^{90} & AD^{100} & AD^{110} & AD^{120} \\ AD^{130} & AD^{140} & AD^{150} & AD^{160} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice AD étant construite bloc par bloc comme pour les problèmes plans. Les coordonnées cylindriques des différents points sont :

$$P(2, \psi, z), N(1, \omega, z), P^1(\delta^1, \eta^1, 0) \text{ et } P^2(\delta^2, \eta^2, \pi)$$

I. 2. 1. Ecrivons la donnée du potentiel sur S_1

Ecrivons d'abord que le potentiel est connu en un point fixe

$$P_i (2 \cos \psi_i, 2 \sin \psi_i, z_i) \text{ de } S_1$$

$$2g(P_i) + \frac{1}{\pi} \int_{S_1} g(P) \frac{\cos(\overrightarrow{PP_i}, n_P)}{r^2(P_i, P)} dP + \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{h(N)}{r(P_i, N)} dN$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_1} g_1(P^1) \frac{\cos(\overrightarrow{P^1P_i}, n_P^1)}{r^2(P_i, P^1)} dP^1 + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_2} g_2(P^2) \frac{\cos(\overrightarrow{P^2P_i}, n_P^2)}{r^2(P_i, P^2)} dP^2 = F(z_i)$$

les normales \vec{n} étant dirigées vers l'intérieur

La discrétisation de la relation (40) permet de déterminer la première ligne de la matrice [AD]

Considérons l'intégrale sur S_1 , la fonction sous le signe somme devient infinie quand le point P tend vers le point P_i . On montre (Réf I) que cette intégrale est absolument convergente. Le calcul des éléments du bloc AD^{10} ne peut s'effectuer par la méthode générale. Il faut avant de déterminer les éléments du bloc AD^{10} connaître ceux des blocs AD^{30} et AD^{40} .

Détermination des éléments du bloc AD^{30} : intégrale double due au potentiel de double couche g_1 sur Σ_1

$$P_1 \begin{vmatrix} \delta^1 \cos \eta_1 \\ \delta^1 \sin \eta_1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad P_i \begin{vmatrix} 2 \cos \psi_i \\ 2 \sin \psi_i \\ z_i \end{vmatrix} \quad P^1 P_i \begin{vmatrix} 2 \cos \psi_i - \delta^1 \cos \eta^1 & \vec{n}_p^1 \\ 2 \sin \psi_i - \delta^1 \sin \eta^1 & \\ z_i & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$dP^1 = \delta^1 d\delta^1 d\eta^1$$

$$\frac{\cos(\vec{P}_i^1 P^1, \vec{n}_p^1)}{r^2(P_i^1, P^1)} = \frac{z_i}{\left[4 + (\delta^1)^2 + z_i^2 - 4\delta^1 \cos(\eta^1 - \psi_i)\right]^{3/2}}$$

$$(41) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_1} g_1(P^1) \frac{\cos(\vec{P}_i^1 P^1, \vec{n}_p^1)}{r^2(P_i^1, P^1)} dP^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta^1 g_1(\delta^1) \frac{z_i d\eta^1}{\left[4 + (\delta^1)^2 + z_i^2 - 4\delta^1 \cos(\eta^1 - \psi_i)\right]^{3/2}}$$

L'intégrale en η^1 étant prise sur une période ne dépend pas de la valeur ψ_i (problème de révolution). L'intégrale double se ramène alors grâce à CI2 à une intégrale simple.

$$(42) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} z_i \delta^1 \text{CI2} \left[A_i(\delta^1), B_i(\delta^1) \right] g_1(\delta^1) d\delta^1$$

avec $A_i(\delta^1) = 4 + (\delta^1)^2 + z_i^2$ et $B_i(\delta^1) = -4\delta^1$

La technique de quadrature utilisée pour les intégrales simples dans les problèmes plans s'applique ici pour l'intégrale (42)

$$(43) \quad \frac{2}{\pi n} \sum_j z_i \delta_j^1 \text{CI2}(A_{ij}, B_{ij}) g^1(\delta_j^1)$$

En écrivant la relation (43) en n points $P_1 \dots P_n$, on obtient

$$AD_{ij}^{30} = \frac{2}{\pi n} z_i \delta_j^1 \text{CI2}(A_{ij}, B_{ij})$$

avec $A_{ij} = 4 + (\delta_j^1)^2 + z_i^2$

et $B_{ij} = -4\delta_j^1$

Un calcul analogue conduit

$$AD_{ij}^{40} = \frac{2}{\pi n} (\pi - z_i) \delta_j^2 \text{CI2}(A_{ij}, B_{ij})$$

avec $A_{ij} = 4 + (\delta_j^2)^2 + (\pi - z_i)^2$

et $B_{ij} = -4\delta_j^2$

Détermination des éléments du bloc AD^{10} : intégrale double due au potentiel de double couche g sur S_1

$P_i \left \begin{array}{l} 2 \cos \psi_i \\ 2 \sin \psi_i \\ z_i \end{array} \right.$	$P \left \begin{array}{l} 2 \cos \psi \\ 2 \sin \psi \\ z \end{array} \right.$	$PP_i \left \begin{array}{l} 2(\cos \psi_i - \cos \psi) \\ 2(\sin \psi_i - \sin \psi) \\ z_i - z \end{array} \right.$	$n_p \left \begin{array}{l} -\cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{array} \right.$
-----------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------

$$\frac{\cos(\vec{PP}_i, \vec{n}_p)}{r^2(P_i, P)} = \frac{2 [1 - \cos(\psi - \psi_i)]}{[8 + (z_i - z)^2 - 8\cos(\psi - \psi_i)]^{3/2}} \quad \text{et } dP_{\text{sur } S_1} = 2d\psi dz$$

Les éléments AD^{10} se déterminent de la même façon que précédemment

$$\begin{matrix} ij \\ i \neq j \end{matrix}$$

$$AD_{ij}^{10} = \frac{1}{2n} \left[CI1(A_{ij}, B_{ij}) - (z_i - z_j)^2 CI2(A_{ij}, B_{ij}) \right]$$

$$\text{avec } A_{ij} = 8 + (z_i - z_j)^2$$

$$\text{et } B_{ij} = -8$$

La détermination des éléments AD_{ii}^{10} de la sous matrice 10 conduit à une forme indéterminée avec les formules précédentes. Le calcul aboutissant du reste à la valeur $m = 1$ (intégrale divergente) pour les intégrales elliptiques.

L'intégrale $\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\cos(\overrightarrow{KP_i}, \overrightarrow{n_K})}{r^2(P_i, K)} dK$ est égale à 2 si K appartient à la

frontière du domaine fermé D . Nous prendrons comme domaine fermé D , la surface latérale S_1 ainsi que les 2 surfaces Σ_1 et Σ_2

On décompose alors l'intégrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{S_1} \frac{\cos(\overrightarrow{PP_i}, \overrightarrow{n_P})}{r^2(P_i, P)} dP + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_1} \frac{\cos(\overrightarrow{P^1P_i}, \overrightarrow{n_{P^1}})}{r^2(P_i, P^1)} dP^1 + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_2} \frac{\cos(\overrightarrow{P^2P_i}, \overrightarrow{n_{P^2}})}{r^2(P_i, P^2)} dP^2 = 2$$

Le terme de la diagonale AD_{ii}^{10} provient du terme en $2g(P_i)$ et du terme provenant de l'intégrale sur S_1 pour P en P_i . Soit pour i fixé

$$AD_{ii}^{10} = 4 - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n AD_{ij}^{10} + \sum_{j=1}^n AD_{ij}^{30} + \sum_{j=1}^n AD_{ij}^{40} \right)$$

La discrétisation de cette relation permet de construire la deuxième ligne de la matrice [AD]

$$AD_{ij}^{50} = \frac{1}{2n} \left\{ CI1(A_{ij}, B_{ij}) + \left[4 - (\delta_i^1) - z_j^2 \right] CI2(A_{ij}, B_{ij}) \right\}$$

$$\text{avec } A_{ij} = 4 + (\delta_i^1)^2 + z_j^2$$

$$\text{et } B_{ij} = -4 \delta_i^1$$

De même

$$AD_{ij}^{60} = \frac{1}{n} CI1(A_{ij}, B_{ij})$$

$$\text{avec } A_{ij} = 1 + (\delta_i^1)^2 + z_j^2$$

$$\text{et } B_{ij} = -2 \delta_i^1$$

$$AD_{ij}^{70} = 0 \quad \text{et } AD_{ii}^{70} = 2$$

$$AD_{ij}^{80} = \frac{2}{n} \delta_j^2 CI2(A_{ij}, B_{ij})$$

$$\text{avec } A_{ij} = (\delta_i^1)^2 + (\delta_j^2)^2 + n^2$$

$$\text{Et } B_{ij} = -2 \delta_j^2 \delta_i^1$$

I. 2. 3. Ecrivons que le potentiel est nul au point $P_i^2; (\delta_i^2, r_i^2, \varphi)$ de Σ_2

$$(45) \frac{1}{\pi} \int_{S_1} g(P) \frac{\cos(\overrightarrow{PP_i^2}, \overrightarrow{n_p})}{r^2(P_i^2, P)} dP + \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{h(N)dN}{r(P_i^2, N)} + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_1} g_i(P^1) \frac{\cos(\overrightarrow{P_i^2 P^1}, \overrightarrow{n_{P^1}})}{r^2(P_i^2, P^1)} dP^1 + 2g(P_i^2) =$$

La discrétisation de cette relation permet de construire la troisième ligne de la matrice $[AD]$

$$AD^{90}_{ij} = \frac{1}{2n} \left\{ CI1(A_{ij}, B_{ij}) - \left[4 - (\delta_i^2)^2 - (\pi - z)^2 \right] CI2(A_{ij}, B_{ij}) \right\}$$

$$\text{avec } A_{ij} = (\delta_i^2)^2 + (\pi - z_j)^2 + 4$$

$$\text{Et } B_{ij} = -4\delta_i^2$$

$$AD^{100}_{ij} = \frac{1}{n} CI1(A_{ij}, B_{ij})$$

$$\text{avec } A_{ij} = (\delta_i^2)^2 + 1 + (\pi - z_j)^2$$

$$\text{et } B_{ij} = -2\delta_i^2$$

$$AD^{110} = \frac{2}{n} \delta_j^1 CI2(A_{ij}, B_{ij})$$

$$\text{avec } A_{ij} = (\delta_i^2)^2 + (\delta_j^1)^2 + \pi^2$$

$$\text{et } B_{ij} = -2\delta_i^1 \delta_j^2$$

$$AD^{120}_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad AD^{120}_{ii} = 2$$

$i \neq j$

I. 2. 4. TRADUISONS MAINTENANT LA CONTINUITÉ DU FLUX A TRAVERS S₂ AU

POINT N_i (1, ω_i, Z_i)

La continuité du flux s'exprime par

$$(46) \quad \epsilon_1 \left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{ext}} = \epsilon_2 \left(\frac{d\phi}{dn} \right)_{\text{int}}$$

Dans le cas d'un cylindre de révolution, l'expression de la dérivée normale $\frac{d\phi}{dn}$ se réduit à $\frac{d\phi}{d\rho}$

La relation (46) devient donc

$$(47) \quad \epsilon_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)_{\text{ext}} = \epsilon_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)_{\text{int}}$$

Soit pour la continuité du flux

$$\int_{S_1} g(P) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_P})}{r^2(N_i, P)} dP + 2 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} \Phi(N_i) + \int_{S_2} h(N) \frac{\cos(\overrightarrow{NN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r^2(N_i, N)} dN$$

$$+ \int_{\Sigma_1} g_1(P) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\cos(\overrightarrow{P^1 N_i}, \overrightarrow{n_{P^1}})}{r^2(N_i, P^1)} dP^1 + \int_{\Sigma_2} g_2(P^2) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\cos(\overrightarrow{P^2 N_i}, \overrightarrow{n_{P^2}})}{r^2(N_i, P^2)} dP^2 = 0$$

La relation (48) permet cette fois de déterminer les éléments de la quatrième ligne de la matrice [AD]. Détermination des éléments du bloc AD¹³⁰. Les coordonnées cylindriques de r sont (2, ψ, z) celles de N_i (ρ, ω_i, Z_i)

$$\frac{\cos(\vec{PN}_i, \vec{nP})}{r^2(N_i, P)} = \frac{2 - \rho \cos(\psi - \omega_i)}{[\rho^2 + 4 - (Z_i - z)^2 - 4\rho \cos(\psi - \omega_i)]^{3/2}}$$

$$\int_{S_1} g(P) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\cos(\vec{PN}_i, \vec{nP})}{r^2(N_i, P)} dP =$$

$$= 2 \int_0^\pi g(z) \left[\int_0^{2\pi} \frac{-6 + [10 - (Z_i - z)^2 \cos(\psi - \omega_i) - 2 \cos^2(\psi - \omega_i)] d\psi}{|5 + (Z_i - z)^2 - 4 \cos(\psi - \omega_i)|^{5/2}} \right] dz$$

L'intégrale en ψ est indépendante de ω_i , elle s'exprime en fonction de CZ(A, B) (formule 38) avec $\alpha' = -6$, $\beta' = 10 - (Z_i - z)^2$, $\gamma' = -2$.

$$\int_{S_1} g(P) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\cos(\vec{PN}_i, \vec{nP})}{r^2(N_i, P)} dP = 2 \int_0^\pi CZ[A_i(z), B_i(z)] g(z) dz$$

soit

$$AD_{ij}^{130} = \frac{2\pi}{n} CZ[A_{ij}, B_{ij}]$$

$$\text{avec } A_{ij} = 5 + (Z_i - z_j)^2$$

$$\text{et } B_{ij} = -4$$

Détermination des éléments du bloc AD^{140} . Nous sommes en présence de la même difficulté qu'au bloc AD^{10}

$$\text{L'intégrale } \int_{S_2} \frac{\cos(\vec{NN}_i, \vec{NN}_i)}{r^2(N_i, N)} dN \text{ est absolument}$$

convergente lorsque $N \rightarrow N_i$. La normale étant cette fois à prendre au point de calcul N_i .

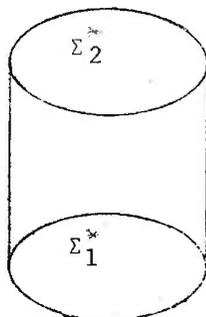
Les termes AD_{ij}^{140} se calculent par la méthode habituelle. On obtient :

$$AD_{ij}^{140} = \frac{\pi}{2n} [-CI1(A_{ij}, B_{ij}) + (Z_i - Z_j)^2 CI2(A_{ij}, B_{ij})]$$

$$\text{avec } A_{ij} = 2 + (Z_i - Z_j)^2 \quad \text{et } B_{ij} = -2$$

Calculons ensuite les éléments diagonaux AD_{ii}^{140}

Soit la surface fermée constituée par la surface latérale S_2 et les 2 faces Σ_1^* et Σ_2^* du plus petit cylindre.



Calculons $\frac{1}{\pi} \int_{S_2 + \Sigma_1^* + \Sigma_2^*} \frac{\cos(\vec{PN}_i, \vec{n}_{N_i})}{r^2(N_i, P)} dP$

$$\begin{aligned}
 (49) \quad & \frac{1}{\pi} \int_{S_2 + \Sigma_1^* + \Sigma_2^*} \frac{\cos(\vec{PN}_i, \vec{n}_{N_i})}{r^2(N_i, P)} dP = \\
 & = \frac{1}{\pi} \int_{S_2 + \Sigma_1^*} \frac{\cos(\vec{PN}_i, \vec{n}_{N_i}) - \cos(\vec{PN}_i, \vec{n}_p)}{r^2(N_i, P)} dP \\
 & \quad + \frac{1}{\pi} \int_{S_2 + \Sigma_1^* + \Sigma_2^*} \frac{\cos(\vec{PN}_i, \vec{n}_p)}{r^2(N_i, P)} dP
 \end{aligned}$$

La seconde intégrale qui apparaît dans le membre de droite de la précédente égalité est connue strictement et vaut 2.

Transformons la relation (49)

$$\frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{\cos(\vec{PN}_i, \vec{n}_{N_i})}{r^2(N_i, P)} dP + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_1^*} \frac{\cos(\vec{P}^1 \vec{N}_i, \vec{n}_{N_i})}{r^2(N_i P^2)} dP^1 + \dots$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_2^*} \frac{\cos(\overrightarrow{P^2 N_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r^2(N_i, P^2)} dP^2 =$$

$$(50) \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}}) - \cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_p})}{r^2(N_i, P)} dP +$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_1^*} \frac{\cos(\overrightarrow{P^1 N_i}, \overrightarrow{n_{N_i}}) - \cos(\overrightarrow{P^1 N_i}, \overrightarrow{n_p})}{r^2(N_i, P^1)} dP^1 +$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_2} \frac{\cos(\overrightarrow{P^2 N_i}, \overrightarrow{n_{N_i}}) - \cos(\overrightarrow{P^2 N_i}, \overrightarrow{n_p})}{r^2(N_i, P^2)} dP^2 + 2$$

Simplifions par les termes communs aux 2 membres de la relation (50). On obtient

$$(51) \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r^2(N_i, P)} dP = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}}) - \cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_p})}{r^2(N_i, P)} dP$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_1^*} \frac{\cos(\overrightarrow{P^1 N_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r^2(N_i, P^1)} dP^1 - \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_2^*} \frac{\cos(\overrightarrow{P^2 N_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})}{r^2(N_i, P^2)} dP^2 + 2$$

Lorsque le point $P \in S_2$, évaluons $\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}})$ et $\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_p})$

$$\cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}}) = \frac{\cos(\omega - \omega_i) - 1}{PN_i} \quad \text{et} \quad \cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_p}) = \frac{1 - \cos(\omega - \omega_i)}{PN_i}$$

$$\text{donc} \quad \cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_{N_i}}) = - \cos(\overrightarrow{PN_i}, \overrightarrow{n_p})$$

La relation (51) se simplifie et devient

$$\int_{S_2} \frac{\cos(\vec{PN}_i, \vec{n}_{N_i})}{r^2(N_i, P)} dP = -2\pi + \int_{\Sigma_1^*} \frac{\cos(\vec{P}^1 \vec{N}_i, \vec{n}_{P^1})}{r^2(N_i, P^1)} dP^1 +$$

$$+ \int_{\Sigma_2^*} \frac{\cos(\vec{P}^2 \vec{N}_i, \vec{n}_{P^2})}{r^2(N_i, P^2)} dP^2$$

Le terme en AD_{ii}^{140} provient de $2 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \pi h(N_i)$ et du terme de l'intégrale sur S_2 pour N en N_i . Pour i fixé

$$AD_{ii}^{140} = 2 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \pi - 2\pi + \sum_j AD_{ij}^{*150} + \sum_j AD_{ij}^{*160} - \sum_{j \neq i} AD_{ij}^{140}$$

AD_{ij}^{*150} et AD_{ij}^{*160} correspondant à la discrétisation sur \sum_1^* et \sum_2^*

Détermination des éléments des blocs AD^{150} et AD^{160}

Elle se fait d'une façon identique à celle de AD^{130} . Les résultats sont :

$$AD_{ij}^{150} = -\frac{6}{n} Z_i \delta_j^1 CZ [A_{ij}, B_{ij}]$$

$$\text{avec } A_{ij} = 1 + (\delta_j^1)^2 + Z_i^2 \quad \text{et } B_{ij} = -2 \delta_j^1$$

$$AD_{ij}^{160} = \frac{6}{n} (Z_i - \pi) \delta_j^2 CZ(A_{ij}, B_{ij})$$

$$\text{avec } A_{ij} = 1 + (\delta_j^2)^2 + (Z_i - \pi)^2 \quad \text{et } B_{ij} = -2 \delta_j^2$$

La résolution du système matriciel $[AD][X] = |BD|$ détermine les densités de couche g, h, g_1, g_2 .

I.3 - CALCUL DU POTENTIEL EN UN POINT QUELCONQUE DU DOMAINE

Le potentiel en un point M du domaine intérieur est donné par

$$\begin{aligned}
 \phi(M) = & \frac{1}{\pi} \int_{S_1} g(P) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{np})}{r^2(M,P)} dP + \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{h(N)}{r(N,M)} dN \\
 (52) \quad & + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_1} g_1(P^1) \frac{\cos(\overrightarrow{P^1M}, \overrightarrow{np^1})}{r^2(M,P^1)} dP^1 \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_2} g_2(P^2) \frac{\cos(\overrightarrow{P^2M}, \overrightarrow{np^2})}{r^2(M,P^2)} dP^2
 \end{aligned}$$

M est repéré en coordonnées cylindriques par (ρ, θ, h)

I.3.1 - Etude de l'intégrale sur la surface S₁

Soit P_k le point parmi les P₁...P_n le plus proche de M. La technique utilisée précédemment ne s'applique plus.

$$\text{L'intégrale } \frac{1}{\pi} \int_{S_1} [g(P) - g(P_k)] \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{np})}{r^2(M,P)} dP \text{ est}$$

encore régulière mais son noyau tend vers une quantité finie non nulle (vraisemblablement difficile à déterminer) lorsque P est en P_k.

Nous discrétiserons donc directement l'intégrale sur S₁

$$V_1 = \frac{1}{\pi} \int_{S_1} g(P) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{np})}{r^2(M,P)} dP$$

$$V_1 = \frac{1}{2n} \sum_j \{CI1(A_j, B_j) + [4 - \rho^2 - (h - z_j)^2] CI2(A_j, B_j)\} g(z_j)$$

$$\text{avec } A_j = \rho^2 + 4 + (h - z_j)^2$$

$$B_j = -4\rho$$

I.3.2 - Etude de l'intégrale sur S_2

$$V_2 = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \frac{h(N)}{r(N,M)} dN$$

Le calcul de cette intégrale s'effectue sans difficulté si le point M n'est pas sur la surface S_2

$$(53) \quad V_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(Z) \int_0^{2\pi} \frac{d\omega dZ}{[\rho^2 + 1 + (h-Z)^2 - 2\rho \cos(\omega-\theta)]^{1/2}}$$

En utilisant l'expression de CII

$$V_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n CII(A_j, B_j)$$

$$\text{avec } A_j = \rho^2 + 1 + (h - Z_j)^2$$

$$B_j = -2\rho$$

Le potentiel de simple couche V_2 est continu dans tout l'espace. Cependant lorsque le point M est confondu avec le point N, la quantité à intégrer tend vers l'infini. Pour résoudre cette difficulté d'interpolation, on utilise le développement asymptotique de l'intégrale elliptique de première espèce.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{A + B \cos\theta}} = \frac{4}{\sqrt{A + |B|}} K\left(\sqrt{\frac{2|B|}{A + |B|}}\right)$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} \left[K(m) - \frac{1}{2} \text{Log} \frac{16}{1-m^2} \right] = 0$$

Lorsque M est sur la surface S_2 , $\rho = 1$

$$V_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \frac{h(Z) K\left(\sqrt{\frac{4}{4+(h-Z)^2}}\right)}{\sqrt{4 + (h-Z)^2}} dZ$$

Posons alors
$$h_1(Z) = \frac{h(Z)}{\sqrt{4 + (h-Z)^2}}$$

d'où
$$1 - m^2 = \frac{(h-Z)^2}{4 + (h-Z)^2}$$

Transformons alors l'intégrale V_2

$$(54) \quad V_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi h_1(Z) \left[K \left(\sqrt{\frac{4}{4+(h-Z)^2}} \right) + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{(h-Z)^2}{4+(h-Z)^2} \right] dz$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [h_1(Z) - h_1(h)] \text{Log} \frac{(h-Z)^2}{4+(h-Z)^2} dz$$

$$- \frac{2h_1(h)}{\pi} \int_0^\pi \text{Log} \frac{(h-Z)^2}{4+(h-Z)^2} dz$$

La dernière intégrale se calcule strictement par voie élémentaire

$$\int_0^\pi \text{Log} \frac{(h-Z)^2}{4+(h-Z)^2} dz = 2h \text{Log} h + 2(\pi-h) \text{Log} (\pi-h)$$

$$- \pi \text{Log} [4+(h-\pi)^2] + h \text{Log} \frac{4+(\pi-h)^2}{4+h^2}$$

$$- 4 \text{Arc tg} \frac{\pi-h}{2} - 4 \text{Arc tg} \frac{h}{2}$$

Dans la première intégrale de la relation (54) le crochet vaut $2 \text{Log} 2$ lorsque $Z = h$, la quantité à intégrer dans la seconde intégrale est nulle pour $Z = h$.

On regroupe alors les deux premières intégrales de (54)

$$V_2 = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \left[h_1(Z) K \left(\sqrt{\frac{4}{4+(h-Z)^2}} \right) + \frac{1}{2} h_1(h) \text{Log} \frac{(h-Z)^2}{4+(h-Z)^2} \right] dz$$

$$- \frac{2h_1(h)}{\pi} \int_0^\pi \text{Log} \frac{(h-Z)^2}{4+(h-Z)^2} dz$$

On discrétise alors la première intégrale

$$V_2 = \frac{4}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ h_1(Z_i) K \left(\sqrt{\frac{4}{4+(h-Z_i)^2}} \right) + \frac{1}{2} h_1(h) \text{Log} \frac{(h-Z_i)^2}{4+(h-Z_i)^2} \right\}$$

$$+ \frac{8}{N} h_1(h) \text{Log} 2 - \frac{2 h_1(h)}{\pi} \int_0^\pi \text{Log} \frac{(h-Z)^2}{4+(h-Z)^2} dz$$

I.3.3. Etude de l'intégrale sur Σ_1

$$V_3 = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_1} g_1(P^1) \frac{\cos(\vec{PM}, \vec{np}^1)}{r^2(M, P^1)} dP^1$$

$$V_3 = \frac{2\Gamma}{n\pi} \sum_{j=1}^n \delta_j^1 \text{CI2} [A_j, B_j] g_1(\delta_j^1)$$

$$\text{avec } A_j = \rho^2 + (\delta_j^1)^2 + h^2$$

$$\text{et } B_j = -2\rho \delta_j^1$$

I.3.4. Etude de l'intégrale sur Σ_2

$$V_4 = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_2} g_2(P^2) \frac{\cos(\vec{PM}, \vec{np}^2)}{r^2(M, P^2)} dP^2$$

$$V_4 = \frac{2}{n\pi} (\pi-h) \sum_{j=1}^n \delta_j^2 \text{CI2} [A_j, B_j] g_2(\delta_j^2)$$

$$\text{avec } A_j = \rho^2 + (\delta_j^2)^2 + (h-\pi)^2$$

$$\text{et } B_j = -2\rho \delta_j^2$$

I.4 - APPLICATIONS NUMERIQUES

1.4.1. - Solution stricte

Nous avons construit, dans le cas de 2 cylindres de révolution, une solution stricte que nous utiliserons pour les vérifications numériques ultérieures.

Envisageons le cas traité dans la partie A où $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{1}{3}$

Une solution particulière de $\Delta\phi = 0$, à l'intérieur d'un cylindre de révolution, s'annulant sur les 2 faces $z = 0$ et $z = \pi$ et prenant des valeurs données sur la surface cylindrique (réf. III page 170 b) est :

$$(55) \quad \phi_{\text{int}} = I_0(\rho) \sin z$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'indice zéro.

De même une solution particulière de $\Delta\phi = 0$ dans la couronne cylindrique est

$$(56) \quad \phi_{\text{ext}} = [\alpha I_0(\rho) + \beta K_0(\rho)] \sin z$$

I_0 et K_0 fonctions de Bessel modifiées de première et de seconde espèce et d'indice zéro.

Ecrivons d'abord la continuité du potentiel à travers S_2

$$(57) \quad \alpha I_0(1) + \beta K_0(1) = I_0(1)$$

Ensuite la continuité du flux à travers S_2

$$\left(\frac{d\phi}{dn}\right)_{\text{ext}} = \frac{1}{3} \left(\frac{d\phi}{dn}\right)_{\text{ext}} \implies \left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)_{\text{ext}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)_{\text{int}}$$

$$(58) \quad \alpha I'_0(1) + \beta K'_0(1) = \frac{1}{3} I'_0(1)$$

On utilise les relations entre les fonctions de Bessel modifiées

$$I_1(x) = I'_0(x)$$

$$K_1(x) = -K'_0(x)$$

Regroupons alors les relations (57) et (58)

$$59 \quad \begin{cases} \alpha I_0(1) + \beta K_0(1) = I_0(1) \\ \alpha I_1(1) - \beta K_1(1) = \frac{1}{3} I_1(1) \end{cases}$$

Le déterminant du système précédent étant non nul, il existe donc une solution unique en α et β

$$\alpha = 0,84136963$$

$$\beta = 0,47701931$$

Nous avons résolu le problème dans le cas

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{1}{3} \quad F(z) = [\alpha I_0(2) + \beta K_0(2)] \sin z$$

α et β ayant les valeurs précédentes.

Le potentiel étant donné en tout point du domaine par les relations (55) et (56).

1.4.2. - Calcul des densités

Les points de discrétisation correspondent

- aux points de côte $z_i = \frac{\pi i}{n+1}$ $i = 1, 2, \dots, n$

- aux cercles concentriques de rayon $\rho_i = \frac{2i}{n+1}$ $i=1 \dots n$

Nous avons pris 25 points de discrétisation sur chacune des 4 surfaces. Le système matriciel (39) est du type

$$[AD] [X] = [B]$$

La matrice $[AD]$ de dimension (100,100) est bien conditionnée. Ses valeurs propres ne sont pas toutes positives. Le système (39) est remplacé par le système.

$$(60) \quad [AD]^t [AD] [X] = [B]$$

La résolution du système (60) est effectuée par la méthode de Richardson. Les résultats sont les suivants :

La plus grande valeur propre de la matrice $[AD]^t [AD]$ est 338,9

La plus petite valeur propre de la matrice $[AD]^t [AD]$ est 1

Le nombre d'itérations est égal à 2

Les densités sont données dans le tableau 7.

I	I	G POTENTIEL	I	H POTENTIEL	I	G1 POTENTIEL	I	G2 POTENTIEL	I	
I	I	DE DOUBLE COUCHE	I	DE SIMPLE COUCHE	I	DE DOUBLE COUCHE	I	DE DOUBLE COUCHE	I	
I	I	SUR S1	I	SUR S2	I	SUR Σ_1	I	SUR Σ_2	I	
I	1	I	0.0119109	I	0.0128199	I	-0.4370907	I	-0.4370907	I
I	2	I	0.1220251	I	0.0244221	I	-0.4368863	I	-0.4368863	I
I	3	I	0.2202044	I	0.0357254	I	-0.4365355	I	-0.4365355	I
I	4	I	0.3105970	I	0.0465015	I	-0.4360230	I	-0.4360231	I
I	5	I	0.3937456	I	0.0566114	I	-0.4353267	I	-0.4353267	I
I	6	I	0.4693050	I	0.0659207	I	-0.4344168	I	-0.4344168	I
I	7	I	0.5366464	I	0.0742986	I	-0.4332552	I	-0.4332552	I
I	8	I	0.5950701	I	0.0816215	I	-0.4317937	I	-0.4317937	I
I	9	I	0.6439021	I	0.0877770	I	-0.4299720	I	-0.4299720	I
I	10	I	0.6825452	I	0.0926690	I	-0.4277137	I	-0.4277137	I
I	11	I	0.7105109	I	0.0962200	I	-0.4249199	I	-0.4249199	I
I	12	I	0.7274379	I	0.0983735	I	-0.4214507	I	-0.4214507	I
I	13	I	0.7331050	I	0.0990951	I	-0.4170837	I	-0.4170837	I
I	14	I	0.7274379	I	0.0983735	I	-0.4116228	I	-0.4116228	I
I	15	I	0.7105109	I	0.0962200	I	-0.4051222	I	-0.4051222	I
I	16	I	0.6825453	I	0.0926690	I	-0.3976077	I	-0.3976077	I
I	17	I	0.6439021	I	0.0877770	I	-0.3889811	I	-0.3889811	I
I	18	I	0.5950701	I	0.0816215	I	-0.3790617	I	-0.3790617	I
I	19	I	0.5366464	I	0.0742986	I	-0.3675928	I	-0.3675929	I
I	20	I	0.4693050	I	0.0659207	I	-0.3542271	I	-0.3542271	I
I	21	I	0.3937456	I	0.0566114	I	-0.3384972	I	-0.3384972	I
I	22	I	0.3105970	I	0.0465015	I	-0.3197681	I	-0.3197681	I
I	23	I	0.2202044	I	0.0357254	I	-0.2971692	I	-0.2971692	I
I	24	I	0.1220251	I	0.0244221	I	-0.2695507	I	-0.2695507	I
I	25	I	0.0119109	I	0.0128199	I	-0.2356827	I	-0.2356827	I

I N=25 I
I TABLEAU 7 I

I.4.3 POTENTIEL EN UN POINT QUELCONQUE DU NOMBRE

LES RESULTATS SONT DONNES POUR 3 VALEURS de h

h = 3 $\pi/26$		V		V		ERREUR		
I	I	I	I	I	I	I	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	
		CALCULE		EXACT		RELATIVE		
I	0.100	I	0.3466	I	0.3554	I	0.028	I
I	0.300	I	0.3528	I	0.3626	I	0.026	I
I	0.500	I	0.3676	I	0.3771	I	0.025	I
I	0.700	I	0.3913	I	0.3993	I	0.020	I
I	0.900	I	0.4244	I	0.4301	I	0.013	I
I	1.000	I	0.4360	I	0.4489	I	0.028	I
I	1.100	I	0.4538	I	0.4668	I	0.027	I
I	1.300	I	0.4836	I	0.5095	I	0.050	I
I	1.500	I	0.5291	I	0.5625	I	0.059	I
I	1.700	I	0.5904	I	0.6273	I	0.058	I
I	1.900	I	0.6718	I	0.7060	I	0.048	I

h = 4 $\pi/13$		V		V		ERREUR		
I	I	I	I	I	I	I	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	
		CALCULE		EXACT		RELATIVE		
I	0.100	I	0.8431	I	0.8250	I	0.021	I
I	0.300	I	0.8606	I	0.8416	I	0.022	I
I	0.500	I	0.8963	I	0.8752	I	0.024	I
I	0.700	I	0.9512	I	0.9269	I	0.026	I
I	0.900	I	1.0269	I	0.9982	I	0.028	I
I	1.000	I	1.0744	I	1.0419	I	0.032	I
I	1.100	I	1.0933	I	1.0835	I	0.009	I
I	1.300	I	1.1602	I	1.1826	I	0.018	I
I	1.500	I	1.2618	I	1.3055	I	0.033	I
I	1.700	I	1.3991	I	1.4559	I	0.039	I
I	1.900	I	1.5893	I	1.6386	I	0.030	I

h = $\pi/2$		V		V		ERREUR		
I	I	I	I	I	I	I	I	
I	I	I	I	I	I	I	I	
		CALCULE		EXACT		RELATIVE		
I	0.100	I	1.0312	I	1.0025	I	0.028	I
I	0.300	I	1.0525	I	1.0226	I	0.029	I
I	0.500	I	1.0958	I	1.0634	I	0.030	I
I	0.700	I	1.1623	I	1.1263	I	0.032	I
I	0.900	I	1.2542	I	1.2129	I	0.034	I
I	1.000	I	1.2085	I	1.2660	I	0.045	I
I	1.100	I	1.3347	I	1.3166	I	0.013	I
I	1.300	I	1.4157	I	1.4370	I	0.014	I
I	1.500	I	1.5390	I	1.5863	I	0.029	I
I	1.700	I	1.7058	I	1.7691	I	0.035	I
I	1.900	I	1.9374	I	1.9910	I	0.026	I

C O N C L U S I O N

Pour des problèmes plans, lorsque les domaines n'ont pas de points anguleux, les résultats sont bons et peuvent se généraliser facilement pour des domaines plus délicats que ceux de deux cercles concentriques ou de deux ellipses homofocales.

La détermination des potentiels de simple couche et de double couche ne pose pas de difficultés. Seuls, le calcul de la dérivée normale en chacun des points du contour intérieur, et le calcul du rayon de courbure, par l'intermédiaire du cercle osculateur, pour le contour extérieur, sont assez lourds. Par contre, le calcul du potentiel au voisinage des frontières des domaines est souvent délicat, par suite des intégrales pseudo-singulières qui interviennent.

Pour le problème tridimensionnel de deux cylindres de révolution que nous avons envisagé, nous avons rencontré des difficultés par suite de la présence d'angles. L'ordinateur auquel nous avons accès (IBM 1130 8k) n'a pas permis de prendre un nombre de points de discrétisation supérieur à 25. Il est fortement vraisemblable que les résultats seront considérablement améliorés lorsque comme pour les problèmes plans, nous pourrons prendre au moins 50 points de discrétisation sur chacune des surfaces, c'est-à-dire résoudre un système linéaire de dimension minimum (200,200).

Nous espérons reprendre le problème tridimensionnel de révolution avec un plus gros ordinateur et envisager le problème plus général des isolateurs.

Annexe 1. Calcul de l'intégrale $\phi = \int_{C_2} \text{Log MN} dH$ pour M extérieur au cercle C_2 .

$$\phi = \frac{1}{2} \int_{C_2} \text{Log MN}^2 dH = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{Log}(r^2 + \ell^2 - 2\ell r \cos \theta) r d\theta$$

$r \neq \ell$

$$\frac{d\phi}{d\ell} = \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2(\ell - r \cos \theta)}{r^2 + \ell^2 - 2\ell r \cos \theta} d\theta$$

$$= \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{\ell} [r^2 + \ell^2 - 2\ell r \cos \theta] + \ell - \frac{r^2}{\ell}}{[r^2 + \ell^2 - 2\ell r \cos \theta]^2} d\theta$$

$$= \frac{r}{2} \cdot \frac{2\pi}{\ell} + \frac{r(\ell^2 - r^2)}{2\ell} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r^2 + \ell^2 - 2\ell r \cos \theta}$$

$$= \frac{r}{\ell} \pi + \frac{2r(\ell^2 - r^2)}{2\ell} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{r^2 + \ell^2 - 2\ell r \cos \theta}$$

Posons $\text{tg} \frac{\theta}{2} = t$ d'où $\frac{1}{2} (1 + t^2) d\theta = dt$

$$\frac{d\phi}{d\ell} = \frac{r\pi}{\ell} + \frac{2r(\ell^2 - r^2)}{2\ell} \int_0^{\infty} \frac{2 dt}{(1+t^2) \left[r^2 + \ell^2 - 2\ell r \frac{1-t^2}{1+t^2} \right]}$$

$$= \frac{\pi r}{\ell} + \frac{2r(\ell^2 - r^2)}{\ell} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(r-\ell)^2 + (r+\ell)^2 t^2}$$

On pose alors $t = \frac{r-l}{r+l} u$

- pour $l < r$, on trouve $\frac{d\phi}{dl} = 0$

soit $\phi(l) = \phi(0) = 2\pi r \text{ Log } r$ pour $l < r$

- pour $l > r$

$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{\pi r}{l} + \frac{2r(l^2 - r^2)}{l} \int_0^{-\infty} \frac{(r-l) du}{(r+l)(r-l)^2(1+u^2)} = \frac{2\pi r}{l}$$

$$\phi(l) = 2\pi r \text{ Log } l + \text{Cte}$$

$$\phi(r-\varepsilon) = \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \text{Log} \left[r^2 + (r-\varepsilon)^2 - 2(r-\varepsilon)r \cos \theta \right] d\theta$$

$$= \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \text{Log} \left[2(r^2 - \varepsilon r)(1 - \cos \theta) + \varepsilon^2 \right] d\theta$$

$$\phi(r+\varepsilon) = \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \text{Log} \left[2(r^2 + \varepsilon r)(1 - \cos \theta) + \varepsilon^2 \right] d\theta$$

$$\phi(r+\varepsilon) - \phi(r-\varepsilon) = \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \text{Log} \frac{[2(r^2 - \varepsilon r)(1 - \cos \theta) + \varepsilon^2] + 4\varepsilon r(1 - \cos \theta)}{2(r^2 - \varepsilon r)(1 - \cos \theta) + \varepsilon^2} d\theta$$

$$= \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \text{Log} \left[1 + \frac{4\varepsilon r(1 - \cos \theta)}{2(r^2 - \varepsilon r)(1 - \cos \theta) + \varepsilon^2} \right] d\theta$$

$$h > 0 \Rightarrow \text{Log}(1+h) < h$$

$$0 < \phi(r+\varepsilon) - \phi(r-\varepsilon) < \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \frac{4\varepsilon r(1 - \cos \theta)}{2(r^2 - \varepsilon r)(1 - \cos \theta) + \varepsilon^2} d\theta$$

$$0 < \phi(r+\varepsilon) - \phi(r-\varepsilon) < \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \frac{4\varepsilon r(1-\cos\theta)}{2(r^2-\varepsilon r)(1-\cos\theta)} d\theta \rightarrow 0$$

$\text{q}^d \varepsilon \rightarrow 0$

Donc $\phi(r+\varepsilon) \rightarrow 2\pi r \text{ Log } r$ donc $C = 0$

$\phi(l) = 2\pi r \text{ Log } l$ pour $l > r$

Annexe 2. Calcul des intégrales CI1, CI2, CI3, se ramenant aux intégrales elliptiques

$$CI1(A, B) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A + B \cos\theta)^{1/2}}$$

$$CI2(A, B) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A + B \cos\theta)^{3/2}}$$

$$CI3(A, B) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A + B \cos\theta)^{5/2}}$$

1. Intervalle de définition

La quantité $\sqrt{A + B \cos \theta}$ n'est définie, quel que soit $\theta \in [0, 2\pi]$ que si $A + B > 0$ et $A - B > 0$

$$\text{soit } A > |B| > 0$$

2. Réduction de l'intervalle d'intégration

Chacune des intégrales CI1, CI2, CI3 est égale à deux fois l'intégrale de 0 à π

$$CI1(A, B) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A+B \cos\theta)^{1/2}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(A+B \cos \theta)^{1/2}}$$

Effectuons le changement de variable $\phi = \pi - \theta$

$$CI1(A, B) = 2 \int_{+\pi}^0 \frac{-d\phi}{[A+B\cos(\pi-\phi)]^{1/2}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{(A-B\cos\phi)^{1/2}} = CI1(A, B)$$

Nous pouvons donc étudier les 3 intégrales CI1, CI2, et CI3 uniquement dans le cas où B est positif.

3. Utilisation des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce

Figurent dans les tables

$$(A1) \quad K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta}} \quad \text{et} \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m^2 \sin^2 \theta} \, d\theta$$

$$0 < m < 1$$

En posant $\text{tg } \theta = t$, nous obtenons

$$K(m) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2) \sqrt{1-m^2 \frac{t^2}{1+t^2}}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)[(1-m^2)t^2+1]}}$$

De même

$$E(m) = \int_0^{+\infty} \sqrt{1 - \frac{m^2 t^2}{t^2+1}} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1 - m^2 \frac{t^2}{1+t^2}}{(1+t^2) \sqrt{1 - \frac{m^2 t^2}{1+t^2}}} dt$$

$$E(m) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-m^2)t^2 + (1-m^2) + m^2}{(1+t^2) \sqrt{(1+t^2)[(1-m^2)t^2+1]}} dt$$

$$E(m) = (1-m^2) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)[(1-m^2)t^2+1]}} + m^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2) \sqrt{(1+t^2)[(1-m^2)t^2+1]}}$$

donc pour $0 < m < 1$

$$(A2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)[(1-m^2)t^2+1]}} = K(m)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2) \sqrt{(1+t^2)[(1-m^2)t^2+1]}} = \frac{1}{m^2} E(m) + \frac{m^2-1}{m^2} K(m)$$

4. Calcul de $CI1(A, B)$

Etude pour $B > 0$

$$\begin{aligned} CI1(A, B) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{A+B\cos\theta}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{A+B-2B\sin^2\frac{\theta}{2}}} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{A+B-2B\sin^2\phi}} = \frac{4}{\sqrt{A+B}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{2B}{A+B}\sin^2\phi}} \end{aligned}$$

$$\text{Or } A - B > 0 \Leftrightarrow 2B < A + B \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\frac{2B}{A+B}} < 1$$

$$\text{Soit pour } B > 0 \quad CI1(A, B) = \frac{4}{\sqrt{A+B}} K\left(\sqrt{\frac{2B}{A+B}}\right)$$

et quel que soit $B \neq 0$

$$CI1(A, B) = \frac{4}{\sqrt{A+|B|}} K\left(\sqrt{\frac{2|B|}{A+|B|}}\right)$$

5. Calcul de $CI2(A, B)$

Etude pour $B > 0$

$$CI2(A, B) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A+B\cos\theta)^{3/2}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(A+B\cos\theta)^{3/2}}$$

$$\text{Posons alors } t = \text{tg } \frac{\theta}{2} \quad \text{d'où } dt = \frac{1}{2} (1+t^2) d\theta$$

$$CI2(A, B) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2) \left[A+B \frac{1-t^2}{1+t^2} \right]^{3/2}} = 4 \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) dt}{\left[A+B+(A-B)t^2 \right] \sqrt{(1+t^2)} \sqrt{A+B+(A-B)t^2}}$$

$$\text{Posons alors } C^2 = \frac{A+B}{A-B} \quad \text{puisque } A+B > 0 \text{ et } A-B > 0$$

C^2 étant différent de 1 sinon pour $C^2 = 1$, la racine carrée disparaît.

$$CI_2(A, B) = \frac{4}{(A-B)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{(1+t^2) dt}{(t^2+c^2)\sqrt{(t^2+1)(t^2+c^2)}}$$

$$CI_2(A, B) = \frac{4}{(A-B)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+c^2)}} + \frac{4(1-c^2)}{(A-B)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2+c^2)\sqrt{(t^2+1)(t^2+c^2)}}$$

$$t = cu$$

$$CI_2(A, B) = \frac{4}{c(A-B)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+\frac{t^2}{c^2})}} + \frac{4(1-c^2)}{(A-B)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{c du}{c^2(u^2+1)\sqrt{(1+c^2u^2) \times \sqrt{(1+u^2)c^2}}}$$

On retrouve alors les intégrales E et K et après simplification, quel que soit $B \neq 0$

$$CI_2(A, B) = \frac{4}{(A-|B|)\sqrt{A+|B|}} E\left(\sqrt{\frac{2|B|}{A+|B|}}\right)$$

6. Calcul de $CI_3(A, B)$

$$CI_3(A, B) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(A+B \cos \theta)^{5/2}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(A+B \cos \theta)^{5/2}}$$

On pose toujours $t = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ puis $c^2 = \frac{A+B}{A-B}$, $c^2 \neq 1$

On trouve le résultat suivant, quel que soit $B \neq 0$

$$CI_3(A, B) = \frac{4}{3[A-|B|]^2[A+|B|]^{3/2}} \left[4AE \sqrt{\frac{2|B|}{A+|B|}} + (|B|-A)K \sqrt{\frac{2|B|}{A+|B|}} \right]$$

NOM DE L'ETUDIANT : Gérard HIRSCH

Nature de la thèse : Spécialité

"Méthode du potentiel - Application à des problèmes de
"Barrière" plans et de révolution".

Cachet : Université de Nancy
Faculté des Sciences

Vu, Approuvé
et Permis d'imprimer

NANCY, le 4 Novembre 1969

Le Doyen,

J. AUERY