Reçu 2 exemplaires.

Dactyl

N°351

Sc N. 72/14

UNIVERSITÉ DE NANCY I U.E.R. SCIENCES DE LA MATIÈRE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SPÉCIALITÉ

(Mention Physique)

par

Jacques GUYARD

UNIVERSITÉ NANCY BIBLIOTHÈQUE

Invariants adiabatiques à tout ordre pour l'oscillateur harmonique

Soutenue publiquement le 26 Février 1972, devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. A. HADNI
Examinateurs : MM. G. BAUMANN
M. FEIX
Invités : MM. M. BINEAU
J. BITOUN

UNIVERSITÉ DE NANCY I U.E.R. SCIENCES DE LA MATIÈRE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SPÉCIALITÉ

(Mention Physique)

par

Jacques GUYARD

Invariants adiabatiques à tout ordre pour l'oscillateur harmonique

---

Soutenue publiquement le 26 Février 1972, devant la Commission d'Examen

---

Membres du Jury :

Président : M. A. HADNI
Examinateurs : MM. G. BAUMANN
M. FEIX
Invités : MM. M. BINEAU
J. BITOUN

A Betty

INVARIANTS ADIABATIQUES A TOUT ORDRE POUR

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

RESUME

Le but de ce travail est essentiellement de trouver une méthode simple permettant de calculer le développement en série d'un petit paramètre ε de l'invariant adiabatique pour l'oscillateur harmonique.

La première partie, jusqu'à 1.D inclus est une introduction du concept d'invariance adiabatique; on montre - en suivant pour cela d'une part VANDERVOORT, d'autre part HERTWECK et SCHLÜTER - que la variation de l'invariant adiabatique tend vers zéro plus vite que toute puissance de ε, lorsque ε tend vers zéro. Ce résultat situe alors parfaitement les conditions d'application de la méthode. Le paragraphe 1.E est une présentation personnelle de l'auteur du concept d'invariant exact remplaçant, en la simplifiant, l'analyse de LEWIS basée sur le travail de KRUSKAL. Dans 1.F, on montre la connection entre le concept d'invariant exact, la méthode de CHANDRASEKHAR et le développement adiabatique de la fonction de Lewis; il est possible de remplacer le calcul complexe du développement de cette fonction par une simple formule de récurrence: c'est le point le plus original et le plus intéressant de cette thèse.

La seconde partie, effectuée en collaboration avec Jacky BITOUN et André NADEAU concerne la dérivation algébrique sur ordinateur de la formule de récurrence en vue de son application pour les calculs numériques.

La troisième partie, dûe à de nombreuses discussions avec André NADEAU et à sa collaboration amicale pour tous les caculs numériques, est d'abord une application à des calculs d'invariants adiabatiques; on obtient ensuite les valeurs propres de l'équation de Hill en utilisant les transformations qui aboutissent à l'invariant exact pour tout ordre d'adiabaticité.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE : La méthode adiabatique

1. A - Introduction
1. B - Invariance de l'intégrale d'action dans la limite adiabatique
1. C - Théorème fondamental de l'invariance adiabatique
1. D - Variation de l'intégrale d'action
1. E - Invariant exact du mouvement
1. E-A Position du problème
1. E-B Transformations canoniques et fonction de Lewis
1. F - Méthodes de perturbation
1.F1 Résolution de l'équation de Lewis
1.F2 Méthode de Chandrasekhar
1.F3 Equivalence des deux méthodes dans la limite adiabatique; formule de récurrence

DEUXIEME PARTIE : Traitement algèbrique sur ordinateur de la formule de récurrence

2. A - Nécessité d'employer un ordinateur travaillant avec un langage algèbrique
2. B - Brève description du langage

TROISIEME PARTIE : Etude numérique du développement de l'invariant Exemple d'application

3. A - Calcul des invariants à un ordre élevé
3.A1 L'invariant adiabatique converge vers l'invariant exact
3.A2 Présence d'effets non adiabatiques

3. B - Calcul des valeurs propres de l'équation de Hill. Application à l'équation de Mathieu

3.B1 Rappels sur l'équation de Hill

3.B2 Méthode de Hill pour résoudre cette équation et calculer les valeurs propres

3.B3 Application de l'invariant de Lewis à l'équation de Hill

3.B4 Cas où $\omega(t)$ varie lentement

3.B5 Test de la méthode sur l'équation de Mathieu

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

INTRODUCTION

L'étude d'un système physique et de son évolution au cours du temps sera grandement simplifiée si l'on connait une ou plusieurs constantes du mouvement. Ainsi, pour un système dont le mouvement est périodique avec un Hamiltonien constant, la surface de l'espace des phases,entourée par la trajectoire,donnée par:

$$J = \oint p \, dq \qquad (1)$$

(q coordonnée, p moment)

est une constante du mouvement.

Lorsque l'Hamiltonien n'est pas constant mais varie lentement au cours du temps, la trajectoire n'est plus une courbe fermée et J n'est plus défini (du moins par l'équation (1)). Cependant, si l'on considère un système dont l'Hamiltonien est d'abord constant, ensuite varie lentement, enfin est de nouveau constant, alors J est parfaitement défini avant et après la modification du système: J est un invariant adiabatique en ce sens que si la variation est infiniment lente, il aura la même valeur avant et après, bien que les courbes fermées décrites avant et après la modification du système puissent être très différentes.

La notion physique d'invariant adiabatique fut introduite par EINSTEIN /1/ au premier congrès Solvay en 1911 en réponse à une question de LORENTZ; la question était la suivante: "Quel est le comportement du pendule simple lorsque sa longueur est progressivement réduite ?". Le problème , fondamental en mécanique quantique, était de savoir si le nombre de quanta était modifié. EINSTEIN donna immédiatement la réponse, à savoir que le rapport E / ω où E est l'énergie du pendule et ω sa fréquence reste constant ainsi que le nombre des quanta, à condition que la longueur du pendule soit réduite de façon adiabatique, c'est à dire infiniment lentement; en d'autres termes, E / ω est un invariant adiabatique du mouvement. L'énergie variera proportionnellement à la fréquence et sera échangée avec le système qui cause la variation de longueur.

Un autre invariant adiabatique est donné par le moment magnétique d'une particule chargée tournant dans un champ magnétique variant lentement avec le temps. Les deux problèmes sont équivalents à condition d'identifier la fréquence de Larmor avec le double de la fréquence de l'oscillateur. Nous nous limiterons dans ce travail au cas du système unidimensionnel simple: l'oscillateur harmonique à fréquence lentement variable.

La constance de l'invariant adiabatique d'un tel système a fait l'objet de nombreuses investigations. Le problème est en général traité au moyen d'une méthode de perturbation dans laquelle un paramètre ε sans dimension représente la lenteur de la variation. Les solutions des équations du mouvement et l'invariant adiabatique sont exprimés sous forme de séries en puissances de ε et dans chaque cas, on montre que la variation est nulle à tout ordre de ε c'est à dire J a la même valeur avant et après la variation. KULSRUD /2/ fit remarquer qu'un tel résultat ne signifie pas que l'invariant adiabatique est une constante exacte du mouvement, mais seulement que sa variation tend vers zéro plus vite que toute puissance de ε , lorsque ε tend vers zéro. Le calcul effectif du développement de l'invariant adiabatique en vue des applications devient rapidement compliqué, le calcul à la main de l'ordre quatre étant déjà fastidieux. Nous nous sommes donc attachés à trouver une méthode permettant de tourner la difficulté.

Dans la première partie, nous rappellerons la définition mathématique précise de l'invariance adiabatique et nous montrerons que l'intégrale d'action pour l'oscillateur harmonique est un invariant adiabatique. Nous dérivons ensuite d'une façon très simple un invariant exact du mouvement primitivement introduit par LEWIS /3/ à la suite de calculs longs et compliqués, basés sur une méthode générale dûe à KRUSKAL /4/. Cet invariant exact dépend d'une fonction du temps w qui est connue comme solution d'une équation différentielle du second ordre non linéaire. On peut maintenant calculer w au moyen d'une méthode de perturbation

l'injection du développement dans l'expression de l'invariant exact redonnant l'invariant adiabatique du mouvement; malheureusement, cette méthode ne conduit pas à une simplification notable des calculs. A partir de l'analogie très étroite avec une méthode itérative de résolution de l'équation de l'oscillateur harmonique dûe à CHANDRASEKHAR /5/, nous introduisons alors une suite de fonctions ρ_n qui remplace avantageusement la suite des approximations adiabatiques W_n de w, les résultats étant équivalents dans la limite adiabatique. L'intérêt des fonctions ρ_n est qu'elles se déduisent l'une de l'autre par une formule de récurrence /6/.

La seconde partie aura pour objet le traitement de cette formule de récurrence au moyen d'un ordinateur travaillant avec un langage algébrique. Pour tester notre méthode, nous avons mené les calculs jusqu'à ε^{12}; il aurait été possible, pour ne pas dire facile de les mener plus loin.

Nous passerons aux applications dans la troisième partie tout d'abord en calculant effectivement l'invariant adiabatique de l'oscillateur harmonique dans deux cas distincts et spécifiques : d'abord lorsque l'invariant converge au cours du temps vers l'invariant exact défini par LEWIS; ensuite, lorsqu'il existe un effet veritablement nonadiabatique. Enfin, nous développerons une application intéressante de ces invariants, à savoir le calcul des valeurs propres de l'équation de Hill. Dans le domaine où l'adiabaticité est bonne, les résultats sont très précis et ce domaine est justement celui où le déterminant de Hill pose des problèmes de calcul numérique. Le test sur l'équation de Mathieu prouvera l'efficacité de la méthode.

PREMIERE PARTIE

LA METHODE ADIABATIQUE

---

1. A - INTRODUCTION

L'étude de l'évolution au cours du temps d'un oscillateur harmonique à fréquence variable peut se faire en général de deux façons différentes:

- on écrit les deux équations canoniques de Hamilton c'est à dire deux équations différentielles du premier ordre: c'est le schéma hamiltonien ou canonique.
- on écrit l'équation de l'oscillateur harmonique du second ordre: c'est le schéma newtonien.

L'une et l'autre de ces deux méthodes présentent des difficultés; il est intéressant alors de les utiliser ensemble en retenant de chacune ce qu'elles ont de plus efficace. Ainsi nous dériverons un invariant exact à l'aide des équations canoniques. Ce résultat n'étant pas directement utilisable, l'attaque directe de l'équation de l'oscillateur harmonique nous permettra alors de le développer en série et de retrouver l'invariant adiabatique.

Nous allons d'abord définir et établir l'invariance adiabatique de l'intégrale d'action.

1. B - Invariance de l'intégrale d'action dans la limite adiabatique.

Considérons toujours le système unidimensionnel de l'oscillateur harmonique caractérisé par un Hamiltonien $H(q, p, \omega)$ où q et p sont la position et l'impulsion conjuguée , ω étant la fréquence. Lorsque ω ne varie pas, le mouvement est périodique; dans ce cas, la trajectoire dans l'espace des phases est une courbe fermée stable. On peut donc définir une période, une énergie moyenne E et l'intégrale d'action

$$J = \oint p \, dq \qquad (1)$$

où l'intégration se fait sur une période. J est en fait la surface intérieure à la courbe à Hamiltonien constant décrite par le système: J est égal à E/ω et est strictement constant pourvu que ω le soit. En effet, la fonction de Hamilton vaut

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \qquad (2)$$

en prenant la masse égale à l'unité. La trajectoire dans l'espace des phases est une ellipse de demi axes $\sqrt{2E}$ et $\sqrt{2E/\omega^2}$ dont la surface (divisée par 2π) est

$$J = E / \omega \qquad (3)$$

Maintenant, si ω varie avec le temps, le mouvement du système n'est plus périodique et on ne peut plus définir avec précision un contour d'intégration. La notion d'intégrale d'action perd toute sa signification. Cependant cette notion peut être reprise et prolongée si la fréquence ω varie lentement (c'est à dire adiabatiquement) cela revient à postuler que la trajectoire dans l'espace des phases est "presque fermée": nous n'avons plus un invariant exact du mouvement, mais un invariant adiabatique.

Ecrivons l'équation de l'oscillateur harmonique:

$$\frac{d^2 q}{d t^2} + \omega^2 q = 0 \qquad (4)$$

Lorsque ω est constant, la solution générale de cette équation s'écrit:

$$q = A \cos (\omega t + \phi) \qquad (5)$$

où A et ϕ sont des constantes dépendant des conditions initiales.

Nous avons alors: (< > signifie valeur moyenne sur une période)

$$< (\frac{dq}{dt})^2 > = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \qquad (6)$$

$$< q^2 > = \frac{1}{2} A^2$$

$$< E > = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \qquad (7)$$

L'invariance adiabatique se traduit de la façon suivante: supposons que ω, au lieu d'être constant, varie lentement avec le temps de telle sorte que

$$\left| \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \right| \ll \omega \tag{8}$$

Alors, pour de telles variations le rapport E / ω est constant.

Il reste une ambiguité dans cet énoncé du fait que E n'est défini que lorsque ω est constant. Eliminons les éléments intuitifs en énonçant un théorème dû à CHANDRASEKHAR /5/.

1. C - Théorème fondamental de l'invariance adiabatique.

Supposons que ω (t) est une fonction du temps telle que

$$\omega(t) \to \omega_1 \quad \text{si} \quad t \to -\infty \tag{9}$$

$$\omega(t) \to \omega_2 \quad \text{si} \quad t \to +\infty$$

Supposons aussi que toutes les dérivées de ω s'annulent lorsque t tend vers plus ou moins l'infini.

$$\frac{d^n\omega}{dt^n} \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad t \to \pm\infty \qquad \forall\, n \geqslant 1 \tag{10}$$

Pour ces deux limites ($t \to \pm\infty$) nous pouvons définir une énergie moyenne et une intégrale d'action, donc un invariant.

Posons:

$$(J)_{t\to+\infty} = J_+$$
$$(J)_{t\to-\infty} = J_- \tag{11}$$

Nous allons alors considérer le rapport:

$$\lambda = \frac{J_+}{J_-} \tag{12}$$

Posons:

$$\sup_{t \,]-\infty,+\infty[} \left| \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} \right| = \frac{1}{T} \tag{13}$$

Le théorème d'invariance adiabatique s'exprime de la façon suivante:

$$\lambda \to 1 \qquad \text{lorsque } T \to \infty \tag{14}$$

On peut le formuler de façon un petit peu différente en introduisant un paramètre ε en posant

$$\omega = \omega(\varepsilon t) \tag{15}$$

Le théorème devient

$$\lambda \to 1 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \to 0$$

1. D - Variation de l'intégrale d'action.

Nous allons maintenant exposer une méthode pour obtenir la variation de l'intégrale d'action durant le changement de fréquence.

La méthode utilisée par VANDERVOORT /7/ sur une idée de SOMMERFELD /8/ est la suivante:

Pour éliminer la difficulté associée à la perte d'orbites fermées dans l'espace des phases, nous opèrons une transformation cano-

nique permettant de définir J même lorsque la fréquence varie. La transformation fait passer des variables (q, p) à de nouvelles variables (θ, J) de telle manière que ces dernières se réduisent à la variable angulaire et à la variable d'action ordinaires lorsque les orbites sont fermées dans l'espace des phases.

Pour le traitement de l'oscillateur harmonique le choix des variables de la fonction génératrice le plus indiqué conduit à introduire une fonction $F(q\theta\omega)$ pour passer de l'espace (p, q) à l'espace (θ, J) puisque F prend la forme simple (GOLDSTEIN /9/):

$$F = F(q, \theta, \omega) = \frac{1}{2}\,\omega q^2 \operatorname{cotg}\theta \tag{16}$$

L'impulsion p et l'action J sont données par:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial}{\partial q} F(q, \theta, \omega) = \omega q \operatorname{cotg}\theta \\ J &= -\frac{\partial}{\partial \theta} F(q, \theta, \omega) = \frac{1}{2}\,\omega q^2 \frac{1}{\sin^2\theta} \end{aligned} \tag{17}$$

et le nouvel Hamiltonien

$$\begin{aligned} H_1 &= H(q, p, \omega) + \frac{\partial}{\partial t} F(q, \theta, \omega) \\ &= \frac{1}{2}\,(p^2 + \omega^2 q^2) + \dot{\omega}\, q^2 \operatorname{cotg}\theta \end{aligned} \tag{18}$$

le point indique la dérivation par rapport au temps; $H(q, p, \omega)$ est donné par l'équation (2).

Les nouvelles équations canoniques sont données par:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial J} \\ \frac{dJ}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{19}$$

H_1 doit être exprimé en fonction de θ, J et ω

Il nous faut donc calculer p et q en fonction de J et θ.

D'après la seconde équation de (17) q est donné par

$$q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \sin \theta \tag{20}$$

ce qui, par substitution dans la première, donne p sous la forme

$$p = \sqrt{2\omega J} \cos\theta \tag{21}$$

En portant (20) et (21) dans l'équation, nous obtenons l'ancien Hamiltonien H en fonction des nouvelles variables θ et J:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$$

$$= \omega J \cos^2\theta + \omega J \sin^2\theta$$

$$= \omega J \tag{22}$$

H ne dépend pas de θ, ce qui est normal, puisque les transformations ont été choisies dans ce sens.

H_1 s'écrit alors

$$H_1(\theta, J, \omega) = \omega J + \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} J \sin 2\theta \tag{23}$$

On peut maintenant expliciter les nouvelles équations canoniques (19):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial J} = \omega + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right) \sin 2\theta \tag{24}$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \theta} = -\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right) J\cos 2\theta \qquad (25)$$

(24) ne contenant pas J, on peut donc la résoudre indépendamment de (25). On résoud par une méthode itérative, c'est à dire en négligeant le terme $1/2(\dot{\omega}/\omega)\sin 2\theta$ dans (24) et utilisant la solution obtenue pour calculer la nouvelle solution en tenant compte alors de ce terme.

A l'ordre zéro en $(\dot{\omega}/\omega)$ nous aurons:

$$\theta_0 = \int \omega dt + \Theta \qquad (26)$$

puis à l'ordre un:

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{1}{2}\int \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\theta_0 \, dt \qquad (27)$$

Pour reporter dans l'équation (25), nous devons développer le cosinus autour de $\theta=\theta_0$ d'où:

$$\cos 2\theta_1 \simeq \cos 2 \left(\theta_0 + \frac{1}{2}\int \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\theta_0 \, dt\right)$$

$$\simeq \cos 2\theta_0 - \sin 2\theta_0 \int \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\vartheta_0 \, dt \qquad (28)$$

Reportons (28) dans (25)

$$\frac{\dot{J}}{J} = -\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2\vartheta_0 + \frac{\dot{\omega}}{\omega}\sin 2\vartheta_0 \int \frac{\dot{\omega}}{\omega}\sin 2\vartheta_0 \, dt \qquad (29)$$

Intégrons cette équation:

$$\text{Log} \left| \frac{J}{J_0} \right| = -\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2\theta_0 \, dt + \frac{1}{2}\left\{ \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\theta_0 \, dt \right\}^2$$

(30)

où le second terme a été intégré par parties.

D'où:

$$\frac{J}{J_0} = \exp\left[- \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2\theta_0 \, dt + \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\theta_0 \, dt \right)^2 \right] \quad (31)$$

On développe le membre de droite de (31) jusqu'à l'ordre deux en $(\dot{\omega}/\omega)$ et on fait une moyenne sur Θ.

On obtient en posant

$$\tilde{\theta} = \int \omega \, dt \quad (32)$$

$$\left\langle \frac{J}{J_0} \right\rangle_\Theta = 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2\tilde{\theta} \, dt \right)^2 + \left(\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{\omega}}{\omega} \sin 2\tilde{\theta} \, dt \right)^2 \right] \quad (33)$$

HERTWECK et SCHLÜTER /10/ ont obtenu un résultat identique en travaillant directement sur l'équation de l'oscillateur harmonique que nous écrivons de nouveau:

$$\ddot{q} + \omega^2 (t) \, q = 0 \quad (34)$$

Posons: $t_1 = \int \omega dt$ (35)

(34) devient:

$$\frac{d^2 q}{dt_1^2} + q = - \left(\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt_1} \right) \frac{dq}{dt_1} \quad (36)$$

Nous résolvons par une méthode itérative analogue à la précèdente, c'est à dire en évaluant le membre de droite de (36) en fonction de la solution obtenue lorsque ce membre est pris égal à zéro, et on résoud l'équation résultante comme une équation non homogène.

La solution de (36) sans second membre est:

$$q = e^{it_1} \tag{37}$$

on reporte à droite de (36). Cela entraîne:

$$\frac{d^2q}{dt_1^2} + q = -i \left(\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt_1}\right) e^{it_1} \tag{38}$$

Posons:

$$q = \exp\left(\int \gamma dt_1\right) \tag{39}$$

(38) devient

$$\frac{d\gamma}{dt_1} + \gamma^2 + 1 + \left(\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt_1}\right)\gamma = 0 \tag{40}$$

Posons maintenant:

$$y = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{41}$$

Reportons dans (40), nous obtenons:

$$\frac{dy}{dt_1} + 2iy + \frac{1}{2}\frac{d\omega}{dt_1}(1-y^2) = 0 \tag{42}$$

Tenant compte du fait que $\gamma \simeq 1$ (car $\int \gamma dt_1 \simeq it_1$) on peut négliger y^2 devant 1 dans (42) et ainsi nous avons à résoudre l'équation du premier ordre linéarisée.

$$\frac{dy}{dt_1} + 2iy + \frac{1}{2\omega}\frac{d\omega}{dt_1} = 0 \tag{43}$$

La résolution de cette équation ne pose pas de problème et on obtient /10/:

$$\lambda = \frac{J_+}{J_-} = 1 + |P|^2 \tag{44}$$

où P est donné par

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\, e^{-2it}\, dt \qquad (44bis)$$

Montrons que ce résultat est identique à (31):

Posons $dt = \omega du$ (45)

lorsque $t \to \pm\infty$ u tend vers $\pm\infty$ car ω tend vers une constante différente de zéro pour ces deux limites
d'où

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{du}\, e^{-2i\int^{u}\omega du'}\, du \qquad (46)$$

Compte tenu de (46), l'équation (44) est alors identique au résultat de VANDERVOORT donné par (33) dans lequel on a pris des bornes infinies.

Regardons maintenant le comportement de P avec ε paramètre de lenteur que nous introduisons dans (45) en posant

$$u = \varepsilon t \qquad (47)$$

On a alors en suivant un calcul donné par HERTWECK et SCHLÜTER /10/

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{du}\, e^{-iu/\varepsilon}\, du \qquad (48)$$

Posons aussi:

$$f(u) = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{du} \qquad (49)$$

Supposons que la fonction f(z) où z est complexe, soit

analytique et intégrable dans le domaine

$$|\mathrm{Im}(z)| < \alpha_0 \tag{50}$$

Faisons alors la transformation

$$u \to u - i\alpha \tag{51}$$

avec $0 < \alpha < \alpha_0$ α étant constant, le chemin d'intégration sera déplacé parallèlement à lui-même.

On obtient alors pour l'intégrale (48)

$$P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-i\alpha) e^{-i \frac{u-i\alpha}{\varepsilon}} du \tag{52}$$

On peut sortir le terme constant $e^{-\alpha/\varepsilon}$:

$$P = \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-i\alpha) \; e^{-\frac{iu}{\varepsilon}} du$$

Majorons le module de l'intégrale :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-i\alpha) \; e^{-\frac{iu}{\varepsilon}} du \right| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-i\alpha) \; du \right| = 2M \tag{53}$$

M est une constante qui tend vers zéro avec ε

D'où :

$$|P| \leqslant e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}} M \tag{54}$$

Nous obtenons donc le double résultat important:

- P tend vers zéro plus vite que toute puissance de ε
- P, qui représente la variation non-adiabatique, n'est pas développable en série des puissances de ε.

On peut également déterminer P en identifiant l'équation de l'oscillateur harmonique avec l'équation de Schrödinger:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2(x)\,\psi = 0 \qquad (55)$$

pour le mouvement unidimensionnel d'une particule au-dessus d'une barrière de potentiel lentement variable (DYKHNE /11/). Les expressions asymptotiques de ψ lorsque $x \to \pm\infty$ sont liées entre elles par le facteur de réfléxion, et ce facteur a la forme $e^{-\alpha/\varepsilon}$ où ε est maintenant le paramètre caractérisant la lenteur de la variation dans l'espace du potentiel, ce qui est en accord avec les résultats prècèdents.

La variation de l'invariant adiabatique J échappera donc aux développements en série des puissances de ε, ce phénomène étant d'ailleurs lié au caractère asymptotique des séries le représentant (voir Annexe A).

Néanmoins, si, ε étant suffisament petit, la variation de J est négligeable, on peut alors s'intéresser à cette quantité comme un invariant du mouvement et les développements en série des puissances de ε sont utiles. Nous allons maintenant nous y intéresser en déterminant d'abord un invariant exact du mouvement.

1. E - Invariant exact du mouvement.

1. E-A Position du problème: en dynamique analytique, les constantes exactes du mouvement sont en général obtenues par la formulation canonique suivante: si l'Hamiltonien est indépendant de l'une des coordonnées, alors le moment conjugué est un invariant.

KRUSKAL /4/ a développé une méthode générale pour les systèmes différentiels "presque périodiques"(°) qui permet, dans le cas de systèmes hamiltoniens de trouver ces constantes. L'application de cette méthode au cas de l'oscillateur harmonique a conduit LEWIS /3/ à introduire une fonction w, l'invariant exact étant alors une fonction:

$$I = I(q, p, w) \tag{56}$$

Il est possible de retrouver simplement les résultats dérivés par LEWIS, de la manière suivante:

1. E-B Transformations canoniques et fonction de LEWIS.

Rappelons l'équation donnant l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique:

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2)$$

(°) On définit un système presque périodique comme un système d'oscillateurs linéaires dont les fréquences varient lentement avec le temps. Ici, presque périodique est synonyme d'adiabatique

On va chercher une transformation

$$(p,\ q,\ t) \rightarrow (P,\ Q,\ \theta) \tag{57}$$

telle que le nouvel Hamiltonien $K(P,\ Q,\ \theta)$ soit celui d'un oscillateur harmonique - donc indépendant de θ.

A ce moment en prenant la fréquence égale à 1, on pour ra écrire ·

$$K(P,\ Q,\ \theta) = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) \tag{58}$$

Les nouvelles équations canoniques seront données par:

$$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{\partial K}{\partial P} = P \tag{59}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -Q \tag{60}$$

L' Hamiltonien K est une constante et la fréquence étant égale à 1, l'invariant I du mouvement est:

$$I = K/1 = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) \tag{61}$$

Passons d'abord de

$$(P,\ Q, \theta\ ) \rightarrow (P,\ Q,\ t)$$

On doit avoir, si $L(P,Q,t)$ est le nouvel Hamiltonien

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial Q} \tag{63}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial L}{\partial P} \tag{64}$$

or, nous avons:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = - Q\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = P \frac{d\theta}{dt}$$

donc

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = Q \frac{d\theta}{dt} \tag{65}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} = P \frac{d\theta}{dt} \tag{66}$$

Intégrons (65) par rapport à Q:

$$L = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d\theta}{dt} + f_1(P, t) \tag{67}$$

Dérivons par rapport à P et identifions à (66)

$$\frac{\partial L}{\partial P} = \frac{\partial f_1}{\partial P}(P, t) = P \frac{d\theta}{dt} \tag{68}$$

Intégrons par rapport à P

$$f_1 (P,t) = \frac{1}{2} P^2 \frac{d\theta}{dt} + f_2(t) \tag{69}$$

On choisit $L = 0$ si $\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$

ce qui entraine $f_2 \equiv 0$ (70)

d'où

$$L = \frac{1}{2} (P^2 \frac{d\theta}{dt} + Q^2 \frac{d\theta}{dt})$$

$$L(P,Q, \theta) = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2) \frac{d\theta}{dt} \tag{71}$$

On a donc l'invariant I connecté à l'Hamiltonien K

$$I = \frac{1}{2}\,(P^2 + Q^2) = {}^{L}/\frac{d\theta}{dt} \qquad (72)$$

$\frac{d\theta}{dt}$ étant considéré comme une fréquence, I apparaît alors également comme un invariant adiabatique pour l'Hamiltonien L (rapport de l'énergie sur la fréquence)

Nous allons maintenant chercher une fonction génératrice permettant de revenir à l'Hamiltonien de départ H:

Nous allons poser avec LEWIS

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{w^2(t)} \qquad (73)$$

w est une fonction du temps qu'il s'agit de déterminer.

On cherche une transformation de la forme

$$q = Q \cdot \pi(t) \qquad (74)$$

(le bien fondé de cette transformation linéaire n'impliquant que q et Q apparaitra par la suite; il est certain que l'on pourrait en choisir d'autres)

π est une fonction du temps qu'il s'agit de déterminer et qui est reliée à w.

La fonction génératrice de la transformation est F(q,P,t) et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p \qquad (75)$$

$$\frac{\partial F}{\partial P} = Q \qquad (76)$$

On a également

$$p = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Q \cdot \pi)$$

$$p = \frac{dQ}{dt} \cdot \pi + \frac{d\pi}{dt} Q \qquad (77)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{P}{w^2}$$

$$p = \frac{P\pi}{w^2} + q\frac{d\pi}{dt}/\pi = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad (78)$$

$$Q = q/\pi = \frac{\partial F}{\partial P} \qquad (79)$$

Intégrons (79)

$$F = \frac{Pq}{\pi} + f(q,t) \qquad (80)$$

dérivons par rapport à q

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{\pi} + \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{P\pi}{w^2} + q/\pi \frac{d\pi}{dt}$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial q} = (\frac{\pi}{w^2} - \frac{1}{\pi}) P + \frac{q}{\pi} \frac{d\pi}{dt}$$

Intégrons par rapport à q :

$$f = (\frac{\pi}{w^2} - \frac{1}{\pi}) Pq + \frac{1}{2}q^2 \frac{d\pi}{dt}/\pi \qquad (81)$$

Notons qu'il s'introduit encore une fonction du temps que nous annulons en choisissant judicieusement les conditions initiales sur F : $F(0,0,t) = 0$)

Reportons (81) dans (80) et dérivons par rapport à P. Nous obtenons:

$$\frac{\partial F}{\partial P} = Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{q}{\pi} = \frac{q}{\pi} + \left(\frac{\pi}{w^2} - \frac{1}{\pi}\right) q$$

ce qui entraîne nécessairement:

$$\frac{\pi}{w^2} - \frac{1}{\pi} = 0 \quad \longrightarrow \quad \pi = w \tag{82}$$

(la détermination $\pi=-w$ n'apportant rien de nouveau, nous la laissons de côté).

w va être déterminé par la relation:

$$L = H + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{83}$$

$$L = \frac{1}{2w^2} (P^2 + Q^2)$$

$$= \frac{1}{2} (p^2 + w^2 q^2) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Calculons $\frac{\partial F}{\partial t}$

$$F = \frac{\pi}{w^2} Pq + \frac{q^2}{2\pi} \frac{d\pi}{dt}$$

$$= \frac{Pq}{w} + \frac{q^2}{2w} \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \frac{Pq}{w^2} \frac{dw}{dt} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{w} \frac{d^2w}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{w^2} \left(\frac{dw}{dt}\right)^2$$

Calculons:

$$H + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} (p^2+w^2q^2) + \frac{1}{2} q^2/w \frac{d^2w}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{q^2}{w^2} \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \frac{Pq}{w^2} \frac{dw}{dt}$$

$$p = \frac{P}{w} + q/w \frac{dw}{dt}$$

$$p^2 = \frac{P^2}{w^2} + \frac{q^2}{w^2} \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + 2\frac{Pq}{w^2} \frac{dw}{dt}$$

$$H + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{P^2}{w^2} + q^2 \left(\frac{\ddot{w}}{w} + \omega^2\right) \right) = L$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{P^2}{w^2} + \frac{Q^2}{w^2} \right)$$

En identifiant, on trouve qu'il faut que w obeisse à l'équation

$$\frac{1}{w^2} = w^2 \left(\frac{d^2w}{dt^2} /w + \omega^2 \right)$$

ou encore

$$\boxed{\ddot{w} + \omega^2 w = \frac{1}{w^3}} \qquad (84)$$

Equation primitivement dérivée sous cette forme par LEWIS /4/. Notons que COURANT et SNYDER /12/ avaient dérivés le même invariant exact d'une façon différente.

L'invariant I s'exprime alors en fonction de p q et w.

$$I = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2)$$

$$I(p,q,w) = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{w^2} + \left(q\frac{dw}{dt} - wp\right)^2 \right) \qquad (85)$$

w est une variable qui indique comment q et p doivent être combinés au cours du temps pour donner l'équation d'un oscillateur harmonique.

Le point correspondant à cet oscillateur décrit une courbe non fermée dans l'espace (q,p), un cercle dans l'espace (Q,P) et une droite dans (θ,I) avec la vitesse $d\theta/dt=1/w^2$

On peut penser que nous n'avons rien gagné à remplacer l'équation de l'oscillateur harmonique (34) par une équation différentielle non linéaire. Ce n'est pas tout à fait le cas pour trois raisons. Premièrement, on peut choisir pour w n'importe quelle solution particulière de l'équation (84). Deuxièmement, l'invariant exact I a une forme très simple en fonction de q, p et w. Enfin, pour le problème de l'invariant adiabatique, on peut résoudre directement (84) par une méthode de perturbation; en effet, anticipant sur sa solution, notons que l'hypothèse adiabatique où ω devient une fonction de εt consiste en première approximation ($\varepsilon=0$) à négliger le premier terme de (84) ce qui entraîne $w=\omega^{-1/2}$ qui n'est autre que WKB. (84) est donc plus simple que l'équation de départ.

1. F - Méthodes de perturbation.

1.F1 Résolution de l'équation de Lewis:
on pose de nouveau $u=\varepsilon t$, l'équation (84) devient:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2w}{du^2} + \omega^2(u)w = \frac{1}{w^3} \tag{86}$$

Nous cherchons une solution de la forme:

$$w = \sum_{n=0}^{+\infty} w_{2n}\, \varepsilon^{2n} \tag{87}$$

Il est facile de voir que la solution ne comportera que des puissances paires de ε. On obtient alors pour les deux premiers termes en identifiant dans (86) chaque coefficient du développement en ε :

$$w_0 = \omega^{-1/2}$$

$$w_2 = \frac{1}{8}\omega^{-7/2} \frac{d^2\omega}{du^2} - \frac{3}{16}\, \omega^{-9/2} \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \tag{88}$$

L'approximation $w_0=\omega^{-1/2}$ n'est autre que WKB /13/.

Il faut noter que l'application de la méthode de perturbation fixe le choix des conditions initiales sur w mais cela n'a pas d'importance puisque nous pouvions les prendre quelconques.

Revenons à $\frac{d\theta}{dt}$ que nous développons :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\theta_{2n}}{dt}\cdot\varepsilon^{2n} \tag{89}$$

Développons Q également:

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n}\ \varepsilon^{2n} = q/w \tag{90}$$

A l'ordre zéro nous aurons donc le changement de variable et de fonction.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_0}{dt} &= \omega \\ Q_0 &= q\omega^{1/2} \end{aligned} \tag{91}$$

On retrouve les transformations utilisées par CHANDRASEKHAR /5/ pour traiter par une méthode itérative, l'équation de l'oscillateur harmonique.

1.F2 Méthode de Chandrasekhar

Nous faisons dans l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2(t)\ q = 0 \tag{34}$$

les changements de variable et de fonction

$$\frac{dt_1}{dt} = \omega \tag{92}$$

$$q_1 = \omega^{1/2}\, q \tag{93}$$

identiques au système (91)

Nous obtenons alors:

$$\frac{d^2 q_1}{dt_1^2} + \omega_1^2\, q_1 = 0 \tag{94}$$

où l'on a posé:

$$\omega_1^2 = 1 + \omega^{-3/2}\, \frac{d^2}{dt^2}\, \omega^{-1/2} \tag{95}$$

Introduisons ε en posant de nouveau $u=\varepsilon t$

$$\omega_1^2 = 1 + \varepsilon^2\, \omega^{-3/2}\, \frac{d^2}{du^2}\, \omega^{-1/2} \tag{96}$$

Le nouvel Hamiltonien $H_1(p_1,q_1,u_1)$(avec $u_1=\varepsilon t_1$) associé à l'équation (94)

$$H_1(p_1,q_1,u_1) = \frac{1}{2}\,(p_1^2+\omega_1^2\, q_1^2)$$

$$= \frac{1}{2}\,(p_1^2 + q_1^2) + \varepsilon^2\, f_1(q_1,p_1,u_1) \tag{97}$$

Dans l'espace (q_1,p_1) le nouvel Hamiltonien est donc constant à des termes d'ordre ε^2 près.

Recommençons le processus; on introduit t_2 et q_2 tels que

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \omega_1 \tag{98}$$

$$q_2 = \omega_1^{1/2}\, q_1 \tag{99}$$

Nous obtenons alors

$$d^2q_2 + \omega_2^2\, q_2 = 0$$

avec $$\omega_2^2 = 1 + \omega_1^{-3/2} \frac{d^2}{dt_1^2}\, \omega_1^{-1/2} \tag{100}$$

ω_2 est égal à 1 plus des termes d'ordre ε^4 et si ε est assez petit, l'approximation $\omega_2=1$ est une amélioration à la solution précédente. le nouvel Hamiltonien

$$H(p_2,q_2,u_2) = \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \varepsilon^4 f_2(p_2 q_2 u_2) \tag{101}$$

est constant dans l'espace $(q_2 p_2)$ à des termes d'ordre ε^4 près.

Le processus peut être itéré indéfiniment et ω_N est égal à 1 plus un terme d'ordre ε^{2N}.

Posant $\omega_N=1$, nous avons alors

$$\frac{d^2q_N}{dt_N^2} + q_N = 0 \tag{102}$$

t_N étant donné par

$$t_N = \int_0^t (\omega_1 \ldots \omega_{N-1})\, dt' \tag{103}$$

Le dernier Hamiltonien s'écrit

$$H_N(p_N,q_N,u_N,) = \frac{1}{2}(p_N^2 + q_N^2) + \varepsilon^{2N}\, f_N(q_N p_N u_N) \tag{104}$$

H_N est le développement en série des puissances de ε de l'Hamiltonien

$$K(P,Q,\theta) = \frac{1}{2}\ (P^2+Q^2)$$

Les solutions P_N et Q_N étant elles-mêmes les développements de P et Q.

1.F3 Equivalence des deux méthodes dans la limite adiabatique; formule de récurrence /6/.

Nous introduisons

$$\rho_n = (\omega\omega_1 \ldots \omega_n)^{-1/2} \tag{105}$$

$$\rho_{n+1}^{-4} = \rho_n^{-4}\omega_{n+1}^2$$

$$= \rho_n^{-4}(1 + \omega_n^{-3/2}\ \frac{d^2}{dt_n^2}\ \omega_n^{-1/2} \tag{106}$$

mais

$$\omega_n^{-1/2} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \tag{107}$$

$$\frac{d}{dt_n}\ \omega_n^{-1/2} = \frac{d}{dt}\ (\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}})\ \frac{dt}{dt_1} \ldots \frac{dt_{n-1}}{dt_n}$$

$$\frac{d}{dt_n}\ \omega_n^{-1/2} = \frac{d}{dt}\ (\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}})\ \rho_{n-1}^2 = \dot{\rho}_n\ \rho_{n-1} - \rho_n\ \dot{\rho}_{n-1}$$

Le point indique la dérivation par rapport au temps.

$$\frac{d^2}{dt_n^2}\ \omega_n^{-1/2} = \frac{d}{dt}\ (\dot{\rho}_n\ \rho_{n-1} - \rho_n\ \dot{\rho}_{n-1})\ \rho_{n-1}^2$$

$$\frac{d^2}{dt_n^2}\ \omega_n^{-1/2} = \ddot{\rho}_n\ \rho_{n-1}^3 - \rho_n\ \ddot{\rho}_{n-1}\ \rho_{n-1}^2 \tag{108}$$

Reportant (107) et (108) dans (106) nous obtenons

$$\rho_{n+1}^{-4} = \rho_n^{-4} \left(1 + \frac{\rho_n^3}{\rho_{n-1}^3} (\ddot{\rho}_n \rho_{n-1}^3 - \rho_n \ddot{\rho}_{n-1} \rho_{n-1}^2) \right. \quad (109)$$

$$\rho_{n+1}^{-4} = \rho_n^{-4} + \frac{\ddot{\rho}_n}{\rho_n} - \frac{\ddot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}} \quad (110)$$

Nous avons une formule de récurrence que nous pouvons encore simplifier; si on remplace successivement ρ_n^{-4}, ρ_{n-1}^{-4}, ..., ρ_1^{-4} dans la formule (110) par leur valeur issue de cette même formule, on obtient:

$$\rho_{n+1}^{-4} = \frac{\ddot{\rho}_n}{\rho_n} + \rho_1^{-4} - \frac{\ddot{\rho}_0}{\rho_0}$$

mais

$$\rho_1^{-4} = \rho_0^{-4} \omega_1^2 = \rho_0^{-4} + \frac{\ddot{\rho}_0}{\rho_0}$$

avec

$$\rho_0 = \omega^{-1/2}$$

donc

$$\rho_{n+1}^{-4} = \frac{\ddot{\rho}_n}{\rho_n} + \omega^2 \quad (111)$$

Cette formule de récurrence simple va nous permettre de calculer les invariants à un ordre élevé, tous les changements de variables ayant été supprimés.

Revenons maintenant à l'équation (84) que nous réécrivons sous la forme:

$$w^{-4} = \varepsilon^2 \frac{\ddot{w}}{w} + \omega^2 \quad (112)$$

Nous notons tout de suite l'analogie avec (111)

Appelons W_n la solution de (112) arrêtée à l'ordre ε^{2n}:

$$W_n = w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots + \varepsilon^{2n} w_{2n} \tag{113}$$

Pour calculer W_{n+1} connaissant W_n (c'est à dire trouver le terme w_{2n+2}) on doit reporter W_n dans (112),ce qui entraine(°):

$$W_{n+1}^{-4} + O(\varepsilon^{2n+4}) = \varepsilon^2 \frac{d^2 W_n}{du^2} / W_n + \omega^2 \tag{114}$$

Nous voyons que W_n est alors le développement de ρ_n en puissances de ε arrêté à l'ordre ε^{2n}

$$\rho_n = W_n + O(\varepsilon^{2n+2}) \tag{115}$$

Si l'on veut calculer exactement W_n et plus précisément, si l'on ne veut pas les termes d'ordre supérieur, alors il faut résoudre (111) ou (112) en développant toutes les quantités et s'arrêter à l'ordre désiré; c'est un calcul relativement délicat que LEWIS automatise à l'aide d'un langage algébrique sur ordinateur (FORMAC), mais qu'il est obligé d'arrêter assez rapidement (à l'ordre ε^6). Mais il n'y a pas d'inconvénient à utiliser des résultats corrects à l'ordre ε^{2n} même s'ils contiennent en plus des termes d'ordre supérieur erronés. On utilisera alors (111) qui résoud directement et bien plus simplement le problème d'obtenir les ordres élevés. Nous n'avons plus qu'à utiliser cette formule de récurrence que nous allons traiter pour une utilisation systématique sur un ordinateur travaillant avec le langage FORMAC.

(°) Le symbole $O(\varepsilon^i)$ représente une somme de termes qui s'annulent au moins aussi vite que ε^i.

DEUXIEME PARTIE

TRAITEMENT ALGEBRIQUE SUR ORDINATEUR

DE LA FORMULE DE RECURRENCE

Nous allons montrer la nécessité de recourir à un langage algébrique sur ordinateur pour pouvoir utiliser la formule de récurrence et nous donnerons une description rapide du langage utilisé. La partie purement technique du programme est reportée en Annexe B.

A - Nécessité d'employer un ordinateur travaillant avec un langage algébrique.

On se propose de calculer par récurrence ρ_i (i variant de 1 à n,n étant défini par les besoins et les possibilités du calcul) à partir de la formule suivante, issue de l'équation (111) :

$$\rho_{n+1} = \left(\frac{\ddot{\rho}_n}{\rho_n} + \rho_0^{-4} \right)^{-1/4} \qquad (116)$$

on a remplacé ω^2 par ρ_0^{-4} pour ne faire intervenir que des éléments de la suite ρ_i.

L'exploitation entiérement algébrique de cette formule, afin d'obtenir le développement :

$$\rho_{n+1}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{2i}^{(n+1)} \varepsilon^{2i} \qquad (117)$$

n'est pas plus simple que la recherche du développement de w donné par l'équation (87). Mais si nous désirons seulement avoir la valeur numérique de ρ_{n+1} à un instant t donné alors la connaissance explicite du développement (117) n'est pas indispensable. Il suffit de reporter dans (116) directement les valeurs prises par ρ_n, $\ddot{\rho}_n$ et ρ_0 à cet instant pour obtenir la valeur de ρ_{n+1}.

La présence d'une dérivée seconde dans (116) va néanmoins compliquer le problème par rapport à l'utilisation numérique habituelle d'une formule de récurrence; nous allons mettre ceci en évidence en examinant le calcul des trois premiers termes de la suite et nous généraliserons aisément pour tout n.

Pour bien distinguer la fonction avec la valeur numérique de cette fonction nous adopterons la notation suivante:

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$$

représentant la fonction: $t \rightsquigarrow \rho_i\ (t)$ (i de 1 à n)

$$\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \ldots, \tilde{\rho}_n$$

représentant la valeur numérique de cette fonction au point t donné. Ce système de notation est étendu à toutes les dérivées.

Par hypothèse on suppose connues les valeurs numériques à l'instant t de ρ_0 et de ses m premières dérivées, soit:

$$\tilde{\rho}_0, \tilde{\dot{\rho}}_0, \ldots, \overset{(\tilde{m})}{\rho}_0$$

où m dépend de n d'une manière que nous expliciterons. Ces valeurs se déduisent immédiatement de celles de ω et de ses dérivées.

Pour calculer ρ_1 nous devons utiliser l'équation (116) dans laquelle nous faisons n=0; ce qui entraîne:

$$\rho_1 = \left(\frac{\ddot{\rho}_0}{\rho_0} + \rho_0^{-4} \right)^{-1/4} \qquad (118)$$

qui donne la relation entre les valeurs numériques:

$$\tilde{\rho}_1 = \left(\frac{\tilde{\ddot{\rho}}_0}{\tilde{\rho}_0} + \tilde{\rho}_0^{-4} \right)^{-1/4} \qquad (119)$$

On obtient donc $\tilde{\rho}_1$ à partir de $\tilde{\rho}_0$ et $\tilde{\ddot{\rho}}_0$.

Calculons $\tilde{\rho}_2$; on utilise à nouveau (116) mais pour n=1, ce qui donne:

$$\rho_2 = \left(\frac{\ddot{\rho}_1}{\rho_1} + \rho_0^{-4} \right)^{-1/4} \tag{120}$$

et numériquement:

$$\tilde{\rho}_2 = \left(\frac{\tilde{\ddot{\rho}}_1}{\tilde{\rho}_1} + \tilde{\rho}_0^{-4} \right)^{-1/4} \tag{121}$$

Calculer $\tilde{\rho}_2$ revient donc à connaître $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\ddot{\rho}}_1$ et $\tilde{\rho}_0$. Le calcul précédent nous a fourni $\tilde{\rho}_1$ mais pas $\tilde{\ddot{\rho}}_1$. Pour le calculer il faut d'abord dériver deux fois (118) ou d'une façon plus générale (116). On obtient:

$$\dot{\rho}_{n+1} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\ddot{\rho}_n}{\rho_n} + \rho_0^{-4}\right)^{-5/4} \left(\frac{\dddot{\rho}_n}{\rho_n} - \frac{\dot{\rho}_n \ddot{\rho}_n}{\rho_n^2} - 4\, \rho_0^{-5} \dot{\rho}_0\right) \tag{122}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{n+1} = -\frac{1}{4} \Bigg[& -\frac{5}{4} \left(\frac{\ddot{\rho}_n}{\rho_n} + \rho_0^{-4}\right)^{-9/4} \left(\frac{\dddot{\rho}_n}{\rho_n} - \frac{\dot{\rho}_n \ddot{\rho}_n}{\rho_n^2} - 4\rho_0^{-5}\, \dot{\rho}_0\right)^2 \\ & + \left(\frac{\ddot{\rho}_n}{\rho_n} + \rho_0^{-4}\right)^{-5/4} \left(\frac{\ddddot{\rho}_n}{\rho_n} - \frac{2\dddot{\rho}_n \dot{\rho}_n}{\rho_n^2} - \frac{\ddot{\rho}_n^2}{\rho_n^2} + \frac{2\dot{\rho}_n^2 \ddot{\rho}_n}{\rho_n^3} \right. \\ & \left. + 20\rho_0^{-6}\, \dot{\rho}_0^2 - 4\rho_0^{-5}\, \ddot{\rho}_0 \right) \Bigg] \end{aligned} \tag{123}$$

Ces expressions sont déjà lourdes à obtenir à la main.

L'équation (123) nous permet alors de calculer numériquement $\tilde{\ddot{\rho}}_1$.

Finalement à cette étape du calcul, nous aurons dû:

- dériver deux fois l'équation (118) ou (116),
- connaître:

$$\tilde{\rho}_0,\ \tilde{\dot{\rho}}_0,\ \tilde{\ddot{\rho}}_0,\ \tilde{\overset{3}{\rho}}_0,\ \tilde{\overset{4}{\rho}}_0$$

Regardons maintenant le calcul de $\tilde{\rho}_3$. Nous appliquons (116) pour n=2; ce qui entraîne:

$$\rho_3 = \left(\frac{\ddot{\rho}_2}{\rho_2} + \rho_0^{-4}\right)^{-1/4} \tag{124}$$

qui donne pour les valeurs numériques:

$$\tilde{\rho}_3 = \left(\frac{\tilde{\ddot{\rho}}_2}{\tilde{\rho}_2} + \tilde{\rho}_0^{-4}\right)^{-1/4} \tag{125}$$

Il nous faut connaître :

- $\tilde{\rho}_2$: calculé à l'étape précédente
- $\tilde{\ddot{\rho}}_2$: pour le calculer il faut utiliser (123) pour n=1. On doit alors connaître $\tilde{\rho}_1,\ \tilde{\dot{\rho}}_1,\ \tilde{\ddot{\rho}}_1,\ \tilde{\overset{3}{\rho}}_1,\ \tilde{\overset{4}{\rho}}_1$ les deux dernières n'étant pas connues, il faut pour les obtenir, dériver deux fois (123). Il est alors prohibitif de le faire à la main; on le fait alors avec un ordinateur travaillant avec un langage algèbrique (FORMAC).

Pour calculer $\tilde{\rho}_3$ nous aurons donc dû:

- dériver quatre fois la formule de récurrence (116)
- connaître:

$$\tilde{\rho}_0,\ \tilde{\dot{\rho}}_0,\ \tilde{\ddot{\rho}}_0,\ \tilde{\overset{3}{\rho}}_0,\ \tilde{\overset{4}{\rho}}_0,\ \tilde{\overset{5}{\rho}}_0,\ \tilde{\overset{6}{\rho}}_0$$

Généralisons, n étant quelconque. Pour calculer ρ_{n+1} il faut:

- dériver 2n fois la formule de récurrence (116): ceci est parfaitement justiciable de FORMAC. Nous donnons en Annexe B le programme et les formules de dérivation obtenus jusque n=5 permettant donc de calculer $\rho_6(\varepsilon^{12})$.
- connaître:

$$\tilde{\rho}_0,\ \dot{\tilde{\rho}}_0,\ \ldots,\ \overset{m}{\tilde{\rho}} \quad \text{avec } m = 2n+2$$

Remarquons que l'on peut également utiliser FORMAC dans le cas où ω a une forme compliquée, pour dériver:

$$\rho_0 = \omega^{-1/2}$$

Présentons maintenant rapidement le langage FORMAC.

2. B - Brève description du langage.

FORMAC est un langage mis au point par les chercheurs de IBM (TOBEY et alii /14/) qui est utilisable sur les ordinateurs de la série 360. FORMAC est l'abbréviation de FORmula MAnipulation Compiler. Le langage de base est le PL/1 et FORMAC est en fait constitué d'une série de sous-programmes qui sont appelés à l'exécution et permettent de travailler sur les formules algébriques comme sur des chaînes de caractères. L'exécution est alors essentiellement la même qu'en PL/1 mais, alors qu'en PL/1 les expressions arithmétiques calculées donnent des nombres, les expressions FORMAC donnent de nouvelles expressions FORMAC. On retrouve les mêmes fonctions préconstruites qu'en PL/1 et la possibilité pour l'utilisateur de générer ses propres fonctions. L'intérêt du langage est donc de pouvoir travailler directement sur des variables algébriques et de réaliser les opérations mathématiques telles que substitution, détermination du coefficient d'une variable donnée, séparation de numérateur et dénominateur et surtout dérivation de fonctions de plusieurs variables. C'est donc un outil utile pour une algèbre systématique ennuyeuse.

TROISIEME PARTIE

ETUDE NUMERIQUE DU DEVELOPPEMENT DE L'INVARIANT

EXEMPLE D'APPLICATION

Nous avons dégagé une méthode simple permettant de résoudre à tout ordre l'équation de l'oscillateur harmonique dans l'approximation adiabatique. Nous allons l'utiliser pour calculer numériquement, sur des exemples, le développement de l'invariant du mouvement et ainsi, d'une part tester sa validité, d'autre part regarder l'intèrêt d'obtenir les ordres èlevés. Nous l'appliquerons ensuite au calcul des valeurs propres de l'équation de Hill, l'étude numérique étant faite sur le cas particulier de l'équation de Mathieu.

3. A - Calcul des invariants à un ordre èlevé.

Nous voulons obtenir le développement suivant:

$$J \sim \sum_{i=0}^{+\infty} j_i \, \varepsilon^i \tag{126}$$

où $$j_i = j_i(p,q,\omega) \tag{127}$$

On n'écrit pas le signe égal dans (126) car le développement n'est en général pas convergent mais asymptotiquement convergent (voir Annexe A). On sait cependant que les développements asymptotiques permettent d'approcher des fonctions avec une bonne approximation. Pratiquement on arrête le développement à l'ordre ε^N et on écrit:

$$J \# J_N = \sum_{i=0}^{N} j_i \, \varepsilon^i \tag{128}$$

Nous appellerons J_N: "approximation adiabatique d'ordre ε^N"

LEWIS /3/ suggère de calculer J_N en reportant l'approximation correspondante de w dans I donné par:

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{w^2} + (\dot{w}q - w\dot{q})^2 \right) \tag{85}$$

En effet, si dans I on reporte W_n (développement de w arrêté à l'ordre ε^{2n} = approximation adiabatique de w d'ordre ε^{2n}) et $\dot{W}_n$, on obtient alors un développement J^w_{2n+1} tel que

$$J^w_{2n+1} = J_{2n+1} + O\ (\varepsilon^{2(n+1)}) \tag{129}$$

J^w_{2n+1} est un développement infini en puissances de ε identique à celui de J jusqu'à l'ordre ε^{2n+1} inclus; si ε est suffisament petit la différence entre les deux l'est également et on pourra confondre les deux avec une bonne précision: nous dirons que J^w_{2n+1} constitue une "représentation asymptotique" de J d'ordre ε^{2n+2}. Si nous nous reportons à l'équation (115) nous constatons que ρ_n constitue une représentation asymptotique de w d'ordre ε^{2n+2}. On peut donc injecter ρ_n et $\dot{\rho}_n$ dans I à la place de W_n et $\dot{W}_n$ comme valeur de w et obtenir un développement J^ρ_{2n+1}:

$$J^\rho_{2n+1} = J^w_{2n+1} + O\ (\varepsilon^{2n+2}) \tag{130}$$

On déduit immédiatement de (129) et (130) que:

$$J^\rho_{2n+1} = J_{2n+1} + O\ (\varepsilon^{2n+2}) \tag{131}$$

qui montre que J^ρ_{2n+1} constitue une autre représentation asymptotique de J également d'ordre ε^{2n+2}.

Pour obtenir un J_{2n+1} quelconque il suffira d'utiliser soit w_n (et $\dot{w}_n$) soit ρ_n (et $\dot{\rho}_n$) dans I et de laisser tomber les termes

d'ordre supérieur à ε^{2n+1}. Remarquons que l'on obtient directement deux termes de la suite J_i car l'invariant exact contient à la fois w et $\dot{w}$ et la dérivation multiplie par ε.

Nous avons calculé, en utilisant W_n et ρ_n, l'approximation adiabatique d'ordre ε^2

$$J_2 = \frac{1}{2\omega}\,(p^2+\omega^2q^2)+\varepsilon\,\frac{q\dot{q}}{2\omega^2}\,\frac{d\omega}{du} + \frac{\varepsilon^2}{8\omega^3}\left(q^2\left(\frac{d\omega}{du}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega}\,\frac{d^2\omega}{du^2} - \frac{3}{2\omega^2}\left(\frac{d\omega}{du}\right)^2\right)\,(p^2-\omega^2q^2)\right) \tag{132}$$

Bien que le calcul algébrique de ρ_n soit, en raison de la formule de récurrence, plus simple que celui de W_n on retombe sur le problème des expressions longues à manipuler; toutefois on a, pour calculer ρ_n, beaucoup moins de manipulations à faire. LEWIS /3/ a utilisé FORMAC pour calculer W_3 (ε^6). On est limité pour le calcul d'ordres plus èlevés par la capacité de mémoire des ordinateurs même les plus puissants. On peut espèrer avec ρ_n gagner quelques ordres, mais de toute façon on doit, dans les deux cas, injecter le résultat dans I pour trouver J_{2n+1}; ce qui complique encore le calcul.

Dans une optique purement numérique du problème, c'est à dire si l'on veut seulement pouvoir connaître la valeur numérique de J_N à l'instant t, alors la connaissance explicite du développement (128) n'est pas indispensable; il suffit d'injecter les valeurs numériques de W_n, $\dot{W}_n$ (ou ρ_n $\dot{\rho}_n$) à l'instant t dans I pour obtenir le résultat. En faisant ceci nous ne pouvons plus éliminer les corrections dûes aux termes d'ordres supérieurs mais si nous pouvons négliger ces corrections alors le processus est correct. Numériquement ρ_n est alors beaucoup plus simple à calculer que W_n; en effet calculer W_n à l'instant t exige de toute façon la connaissance du développement (113), alors que le calcul de ρ_n à l'instant t est facile à l'aide de la procèdure mise au point

dans la seconde partie et qui nous a permis de calculer ρ jusqu'à l'ordre ε^{12} inclus sans difficulté.

3. A - 1 <u>L'invariant adiabatique converge vers l'invariant exact.</u>

Considèrons la fréquence suivante

$$\omega(t) = (\varepsilon t)^{-2n/(2n+1)} = u^{-2n/(2n+1)} \tag{133}$$

On peut trouver analytiquement w associé à cette fonction (LEWIS /3/)

$$w = u^{n/(2n+1)} \; |G(u,\varepsilon)|^2 \tag{134}$$

avec

$$G(u,\varepsilon) = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\varepsilon}{2i(2n+1)}\right)^k u^{-\frac{k}{2n+1}} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{135}$$

w a donc une forme analytique qui définit parfaitement sa valeur $\forall\, t \in [0,\infty[$ mais le développement en ε n'est pas toujours convergent. Si l'on considère $z=w^2$ alors le développement de z en puissances de ε est un polynôme donc s'arrête et a un rayon de convergence infini.

Regardons quelle va être la convergence du développement de w pour le cas n=1

On a alors

$$G(u,\varepsilon) = \left(1 + \frac{i}{3}\,\varepsilon\, u^{-1/3}\right)^{1/2}$$

$$|G(u,\varepsilon)|^2 = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{9}\, u^{-2/3}\right)^{1/2} \tag{136}$$

On sait que $(1+x)^{1/2}$ converge si $|x|<1$ donc il faut ici

$$\frac{\varepsilon^2}{9} u^{-2/3} < 1$$

donc $$t > \frac{\varepsilon^2}{27} \tag{137}$$

Il ne nous paraît pas possible de calculer le rayon de convergence pour ρ_n; mais compte tenu de (115) ρ_n ne peut pas converger si W_n ne converge pas. C'est en quelque sorte le prix payé à la simplicité du calcul. De toute façon au bout d'un temps suffisament grand, l'invariant calculé soit à partir de W_n, soit à partir de ρ_n va converger vers l'invariant exact.

Remarquons que la fonction $\omega(t)$ choisie ici ne répond pas complètement aux critères d'adiabaticité, définis au paragraphe 1.C, en raison de la singularité à l'origine. En effet au voisinage de zéro le critère d'adiabaticité est violé $(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}>1)$ et la méthode n'est plus applicable alors que la fonction w et l'invariant exact I restent parfaitement définis.

Nous avons choisi pour illustrer cet exemple, les valeurs $\varepsilon=1$ et $n=1$ (la fonction correspondante $\omega(t)=t^{-2/3}$ est tracée en figure 1).

Le tableau de la page suivante montre la convergence de ρ_n vers la solution exacte w de l'équation de Lewis donnée par (134). Nous avons tracé deux réseaux de courbes représentant les approximations J_1, J_3, ..., J_{11} de l'invariant.

D'abord (Figure 2) pour des temps allant de 0 à 8, on est dans la zone où le critère d'adiabaticité est violé:

$$\text{pour } t < 8 \qquad \left|\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right| > \frac{1}{3} \tag{138}$$

TEMPS	APPROXIMATION ADIABATIQUE					SOLUTION
	ORDRE 0	ORDRE 1	ORDRE 2	ORDRE 3	ORDRE 4	EXACTE
2.5	1.3572068E 00	1.4015387E 00	1.3960807E 00	1.3987998E 00	1.3955152E 00	1.3975432E 00
5.0	1.7099759E 00	1.7441020E 00	1.7417461E 00	1.7423632E 00	1.7419846E 00	1.7421621E 00
7.5	1.9574338E 00	1.9868914E 00	1.9854095E 00	1.9856844E 00	1.9855673E 00	1.9856128E 00
10.0	2.1544347E 00	2.1810217E 00	2.1799457E 00	2.1801037E 00	2.1800511E 00	2.1800688E 00
12.5	2.3207944E 00	2.3453696E 00	2.3445268E 00	2.3446305E 00	2.3446018E 00	2.3446104E 00
15.0	2.4662121E 00	2.4892677E 00	2.4885757E 00	2.4886496E 00	2.4886320E 00	2.4886368E 00
17.5	2.5962471E 00	2.6180976E 00	2.6175111E 00	2.6175668E 00	2.6175551E 00	2.6175580E 00
20.0	2.7144176E 00	2.7352792E 00	2.7347706E 00	2.7348142E 00	2.7348060E 00	2.7348079E 00
22.5	2.8231081E 00	2.8431372E 00	2.8426884E 00	2.8427236E 00	2.8427175E 00	2.8427188E 00
25.0	2.9240177E 00	2.9433323E 00	2.9429307E 00	2.9429598E 00	2.9429552E 00	2.9429561E 00
27.5	3.0184054E 00	3.0370968E 00	3.0367335E 00	3.0367581E 00	3.0367545E 00	3.0367552E 00
30.0	3.1072325E 00	3.1253737E 00	3.1250421E 00	3.1250632E 00	3.1250603E 00	3.1250608E 00
32.5	3.1912521E 00	3.2089022E 00	3.2085973E 00	3.2086156E 00	3.2086132E 00	3.2086136E 00
35.0	3.2710663E 00	3.2882742E 00	3.2879920E 00	3.2880080E 00	3.2880060E 00	3.2880064E 00
37.5	3.3471648E 00	3.3639714E 00	3.3637088E 00	3.3637230E 00	3.3637213E 00	3.3637216E 00
40.0	3.4199519E 00	3.4363921E 00	3.4361466E 00	3.4361592E 00	3.4361578E 00	3.4361580E 00
42.5	3.4897460E 00	3.5058697E 00	3.5056391E 00	3.5056505E 00	3.5056493E 00	3.5056494E 00
45.0	3.5568933E 00	3.5726862E 00	3.5724689E 00	3.5724792E 00	3.5724781E 00	3.5724783E 00
47.5	3.6215782E 00	3.6370829E 00	3.6368775E 00	3.6368868E 00	3.6368859E 00	3.6368860E 00
50.0	3.6840315E 00	3.6992678E 00	3.6990730E 00	3.6990816E 00	3.6990807E 00	3.6990809E 00

TABLEAU: Convergence de l'approximation adiabatique ρ_n (ordres $\varepsilon^0, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^8$) vers la solution exacte de l'équation:

$$\ddot{w} + t^{-4/3} w = 1/w^3$$

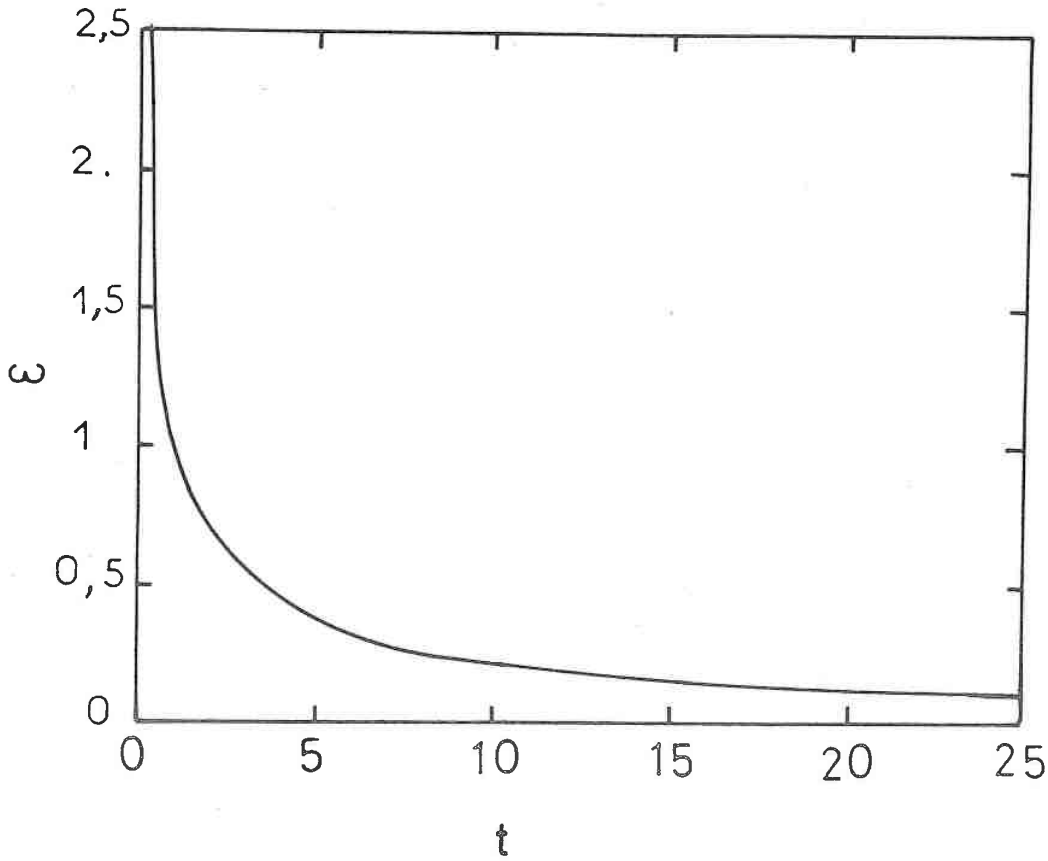

Fig 1 : $\omega(t) = t^{-2/3}$

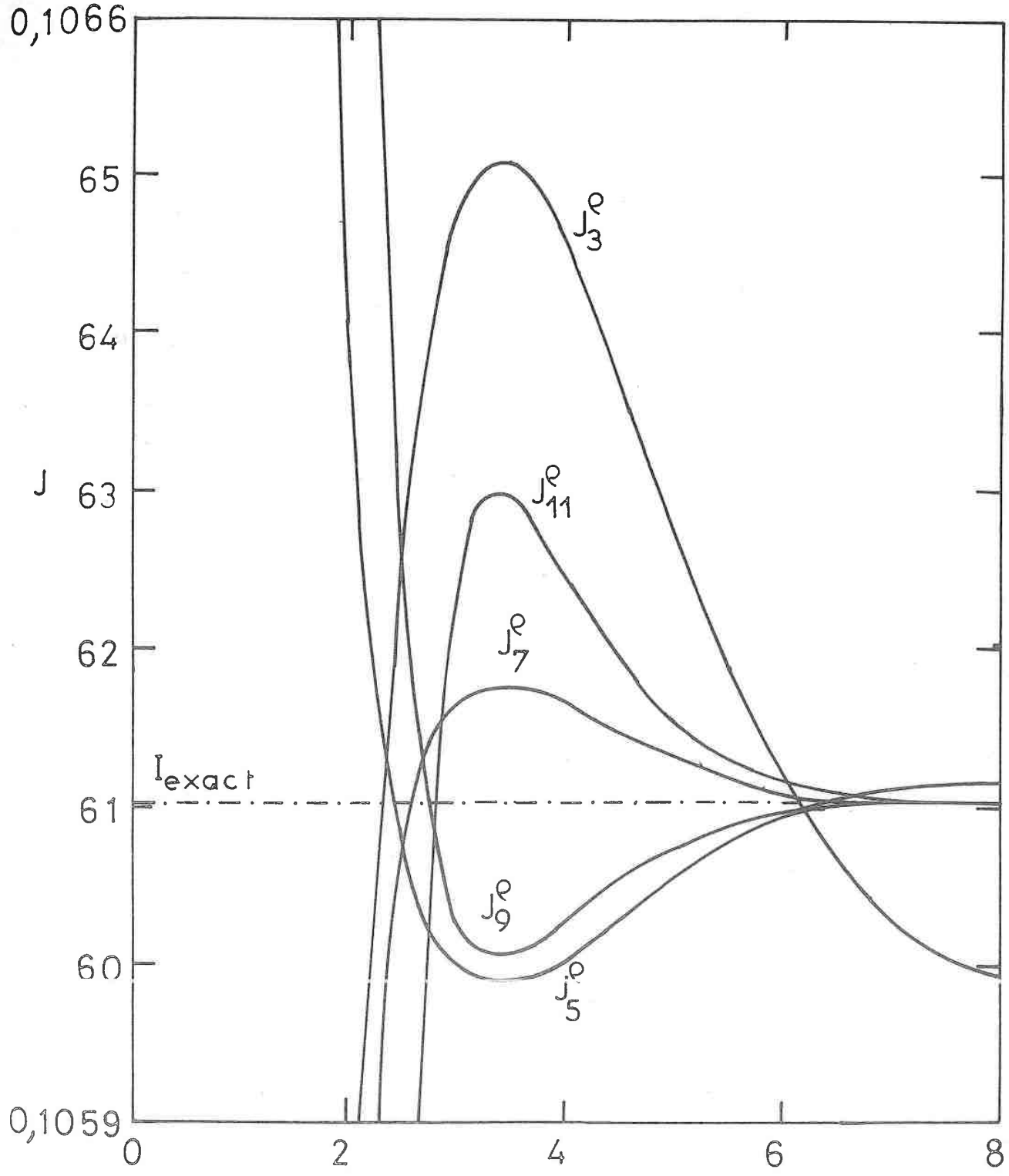

Fig 2 : Invariant adiabatique : J_{2n+1}^ρ
frequence : $t^{-2/3}$

On note la divergence qui apparaît à partir de J_{11}. Pour des temps inférieurs à 2, tous les ordres sortent de l'échelle.

Le second réseau (Figure 3) couvre l'intervalle de temps $[0,50]$ et montre la convergence attendue de l'invariant adiabatique J_n vers l'invariant exact I que nous avons calculé et qui vaut:

$$I = 0.1061033 \tag{139}$$

La convergence évidemment s'améliore au cours du temps.

3. A - 2 Présence d'effets non-adiabatiques

Il existe deux sortes d'effets que l'on qualifie de non-adiabatiques. Les premiers ne sont pas de vrais effets non-adiabatiques mais plutôt une manifestation des termes d'ordre élevé dans les séries asymptotiques; nous avons constaté ce phénomène pour des temps petits sur l'exemple précèdent et nous avons vu qu'ils pouvaient être très importants. Les seconds sont des vrais effets non-adiabatiques et ne sont pas représentables par les termes d'ordre élevé. Cela se traduit par un saut de la valeur de l'invariant lorsque l'on passe d'une région où la fréquence est constante à une autre par une variation lente.

Nous avons choisi comme fonction amenant de tels effets (Figure 4)

$$\omega(t) = \alpha - \beta e^{-\varepsilon^2 t^2} \tag{140}$$

α et β sont des constantes.

Cette fonction est paire; nous pouvons étudier le comportement de l'invariant sur l'intervalle $[0,+\infty]$.

Nous prenons comme valeurs numériques:

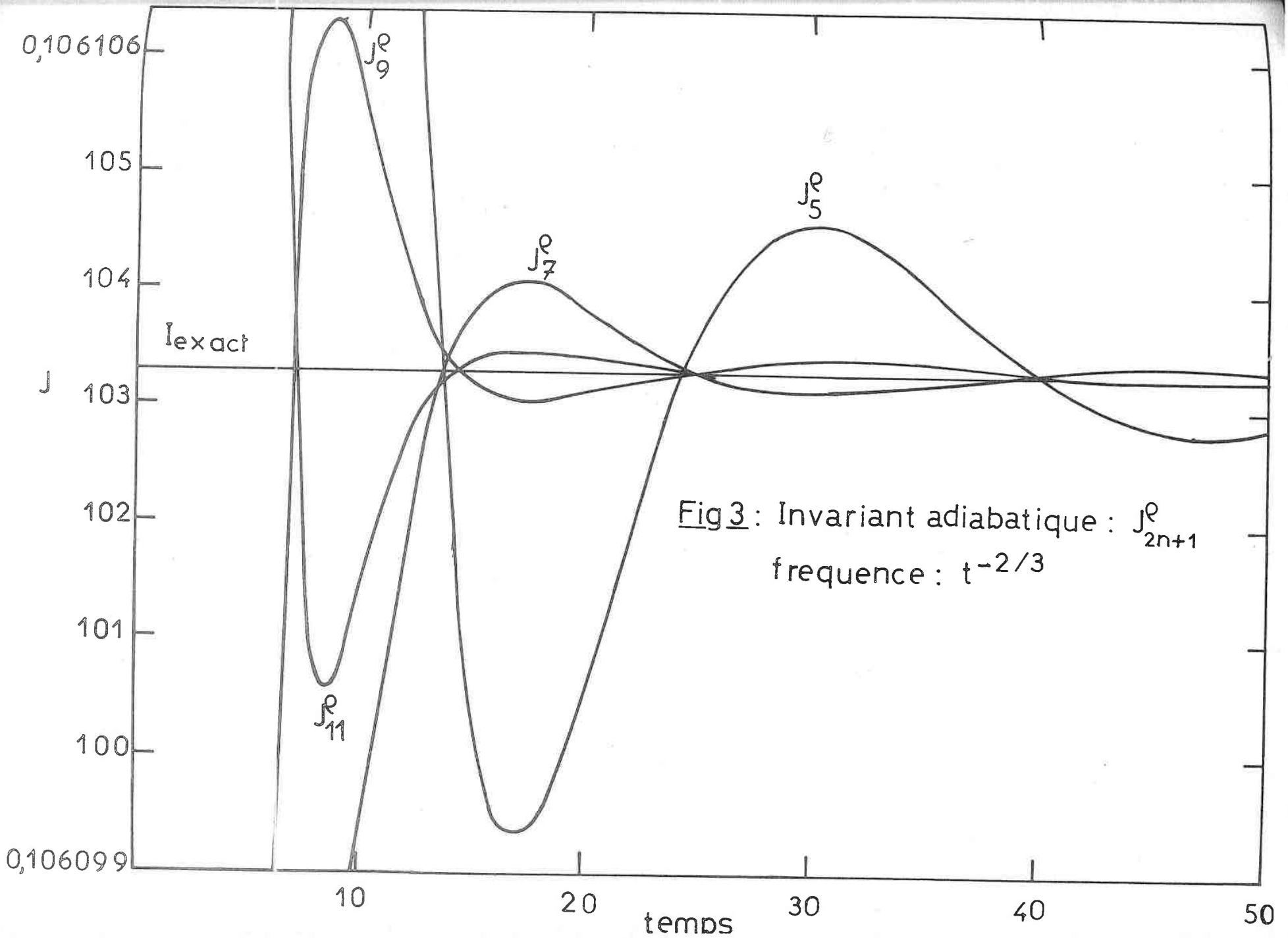

Fig 3 : Invariant adiabatique : J^{ρ}_{2n+1}

frequence : $t^{-2/3}$

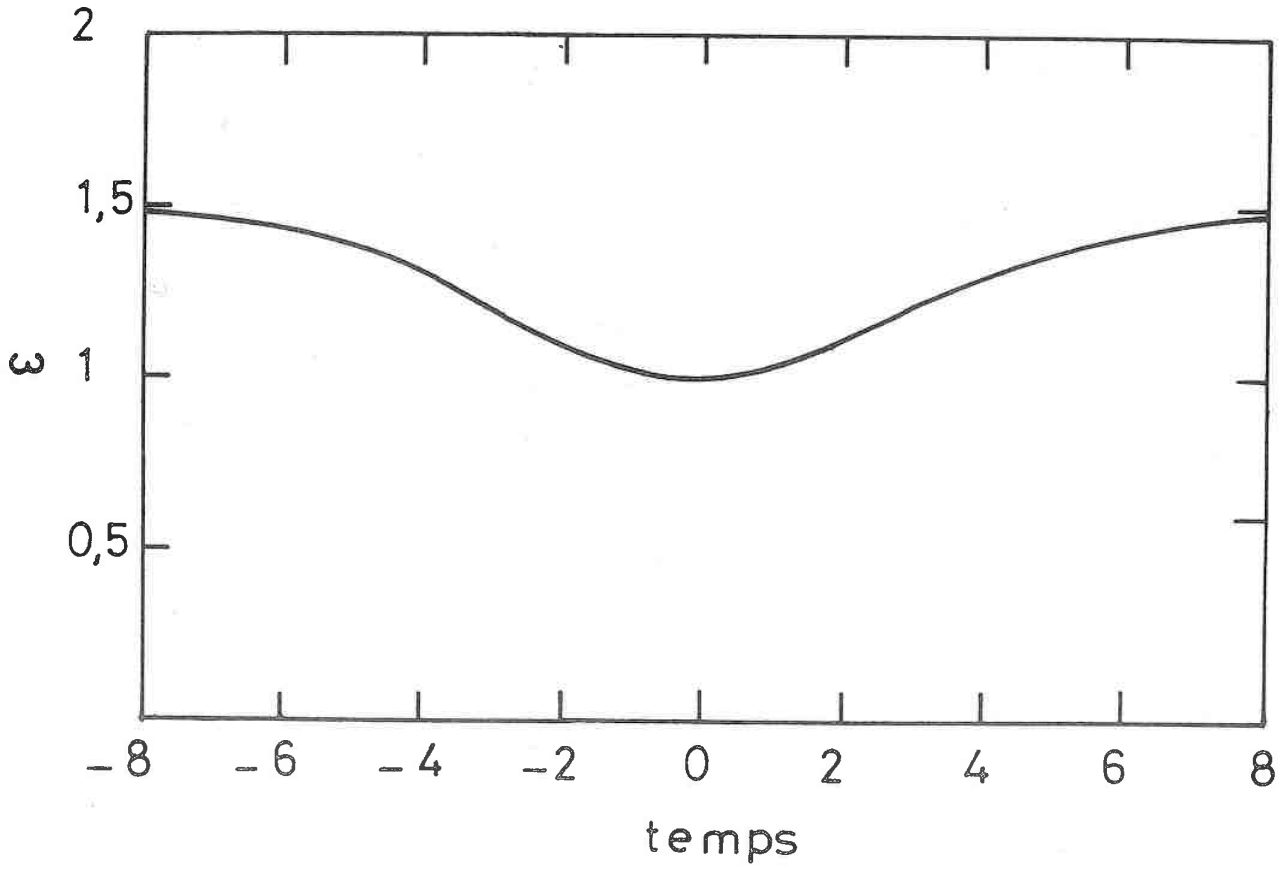

Fig 4 : $\omega(t) = 1{,}5 - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}0625 \cdot t^2}$

$$\alpha = 1,5 \qquad \beta = 0,5 \qquad \text{et} \qquad J_0(0) = 0,5$$

Nous apellerons ΔJ (saut non-adiabatique) la différence entre la valeur de l'invariant adiabatique lorsque $t \to +\infty$ et sa valeur pour $t=0$ déterminée par la convergence de la série à l'origine, convergence asymptotique mais suffisament bonne pour déterminer sa valeur avec une précision meilleure que le millième du saut, ce qui est suffisant ici. Nous pouvons choisir cette valeur comme invariant exact puisqu'il en existe toute une famille et que nous avons le choix.

HOWARD /15/ a calculé l'intégrale (31) par une méthode de col; il obtient:

$$\left(\frac{\Delta J}{J}\right) = (A_0 - A_1\sqrt{\varepsilon})\ \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\ \sin 2\theta_0 \tag{141}$$

avec

$$\gamma = 2\alpha\left(\sqrt{\mathrm{Log}\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^{\sqrt{\mathrm{Log}\frac{\alpha}{\beta}}} \exp(t^2)\ dt\right.$$

et les deux coefficients (142)

$$A_0 = \pi \qquad ; \qquad A_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\cdot\frac{1 + 2\mathrm{Log}(\alpha/\beta)}{(2\alpha\mathrm{Log}^3(\alpha/\beta))^{1/2}}$$

θ_0 représente les conditions initiales, à savoir:

$$\mathrm{tg}\ \theta_0 = \omega(0)\frac{q(0)}{\dot{q}(0)} = \frac{q(0)}{\dot{q}(0)} \tag{143}$$

puisque $\omega(0) = 1$

La valeur du saut dépend des conditions initiales sur q et $\dot{q}$. L'équation (141) indique qu'il est maximum si $\theta_0=\pi/4$ donc si $q(0)=\dot{q}(0)$. Etant donné que:

$$J_0(0) = \frac{H(0)}{\omega(0)} = \frac{1}{2}\ (q^2(0)\,\omega^2(0) + \dot{q}^2(0)/\omega(0) = \frac{1}{2}$$

cela entraîne

$$q(0) = \dot{q}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{144}$$

conditions initiales que nous prendrons.

Nous avons tracé plusieurs réseaux de courbes correspondant à différentes valeurs de ε:

- pour ε=0,1 et 0,15 (Figures 5 et 6) les conditions sont très adiabatiques, la série converge bien et les oscillations qui existent pour les premiers termes sont absentes pour J_{11} qui prend rapidement sa valeur finale.
- pour ε plus grand (ε=0,25; Figure 7), le caractère asymptotique (°) des séries apparaît et le saut est élevé.

On peut tirer de ces courbes et des calculs annexes les conclusions suivantes:

- l'apport des ordres élevés est intéressant pour obtenir une excellente précision (donc un excellent invariant du mouvement) dès que les conditions sont réellement adiabatiques (ici ε<0,15). Quelque soit l'ordre d'approximation, le saut non-adiabatique a la même valeur; la précision sur la constance au cours du temps de cette approximation sera donc limitée par l'amplitude de ce saut. La figure 6 montre alors, et ceci justifie nos calculs, que J_{11} est constant pour cette précision (c'est à dire que les oscillations ne dépassent pas l'amplitude du saut) alors que J_3 oscille avec une amplitude vingt fois plus grande, les termes d'ordre inférieurs étant en dehors de l'échelle.
- dans les calculs plus courants où une telle précision serait un luxe, on peut remarquer que sans aucun effort analytique supplémentaire (il suffit de connaître ω et $\dot{\omega}$) il est plus judicieux d'utiliser comme invariant J_1^w donné par:

$$J_1^w = \frac{1}{2}\left[q^2\omega + (\dot{q}\omega+\frac{1}{2}\, q\, \frac{\dot{\omega}}{\omega})^2 / \omega\right]$$

qui est bien meilleur que l'invariant historique: $J_0 = E/\omega$

D'autre part, l'utilisation de ρ_n pour calculer la solution de l'équation de l'oscillateur harmonique donne pour des temps très élevés une excellente approximation de la solution, alors que les

---

(°) Nous entendons par caractère asymptotique le fait que la série commence à converger, puis, à partir d'une valeur donnée de n, diverge (Annexe A).

méthodes par pas (exemple: méthode de Runge et Kutta) sont prohibitives; le nombre de pas à utiliser entraîne des erreurs d'arrondis qui, s'additionnant, peuvent masquer la variation.

Nous avons juste à calculer

$$q_n(t) = \rho_n \quad A\cos\int_0^t \frac{1}{\rho_n^2(t')}\, dt' + B \sin\int_0^t \frac{1}{\rho_n^2(t')}\, dt' \qquad (145)$$

A et B sont donnés par les conditions initiales; l'intégrale $\int_0^t dt/\rho_n^2$ est calculable rapidement et avec une excellente précision par une méthode numérique classique en raison du caractère lentement variable de ω, donc de ρ_n. (Pour la fonction $\omega=\alpha-\beta e^{-\varepsilon^2 t^2}$ nous avons obtenu une précision relative de 10^{-8} avec seulement 15 points pour le partage de l'intervalle d'intégration)

3. B - Calcul des valeurs propres de l'équation de Hill; application à l'équation de Mathieu.

3. B1 : Rappels sur l'équation de Hill:

On va s'occuper de l'équation de l'oscillateur harmonique

$$q + \omega^2(t)q = 0 \qquad (146)$$

où ω est maintenant une fonction périodique du temps. Le théorème de Floquet dit qu'une telle équation différentielle a pour solution générale

$$q = C_1\, e^{i\mu t}\, \Phi\,(t) + C_2\, e^{-i\mu t}\, \Phi\,(-t) \qquad (147)$$

Revenons en effet sur la démonstration de Floquet:

Soit g(t) et h(t) un système de solutions de l'équation (146), alors si F(t) est une autre solution on doit avoir:

$$F(t) = A\, g(t) + B\, h(t) \qquad (148)$$

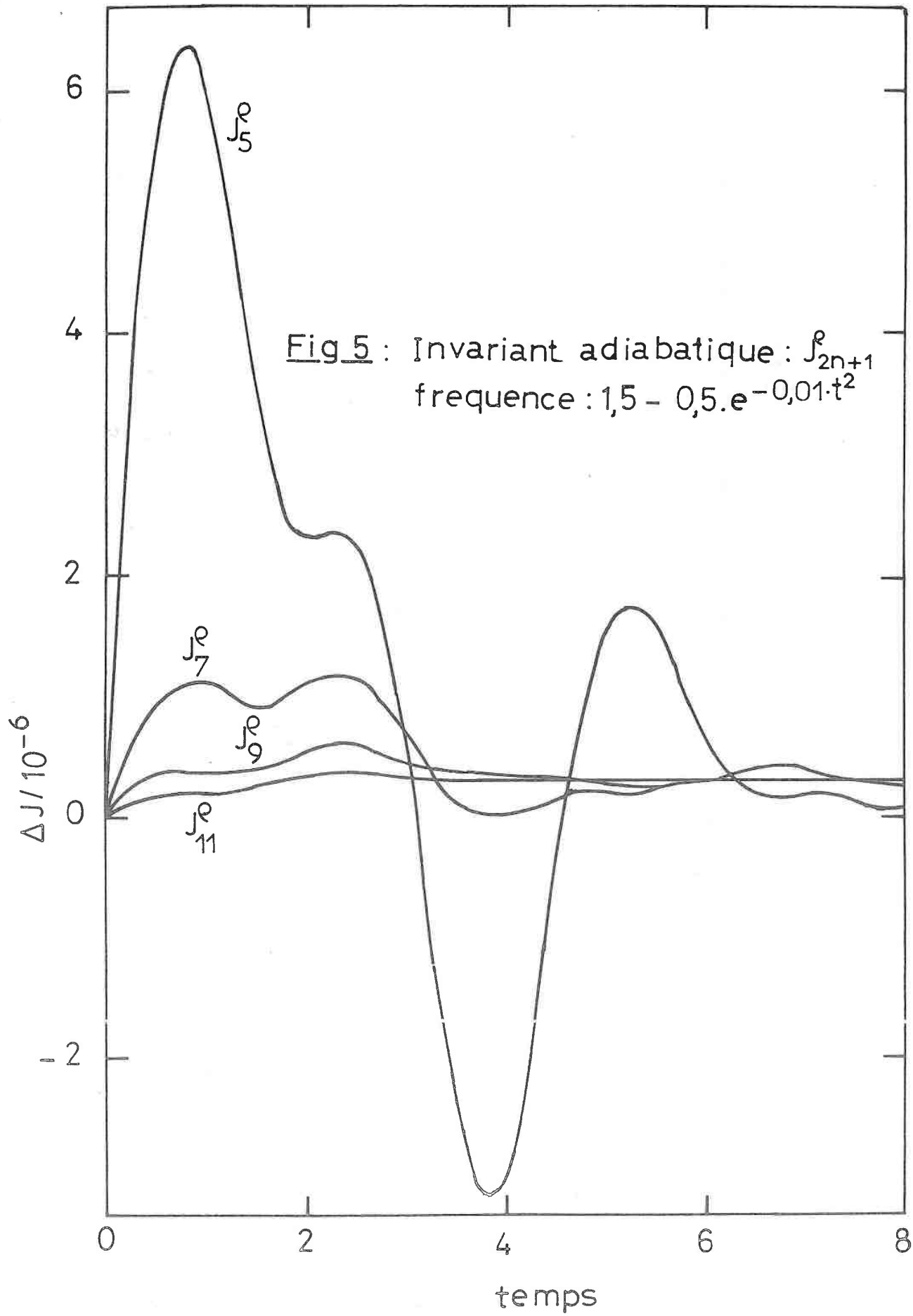

Fig 5 : Invariant adiabatique : J^ρ_{2n+1}
frequence : $1{,}5 - 0{,}5 . e^{-0{,}01 \cdot t^2}$

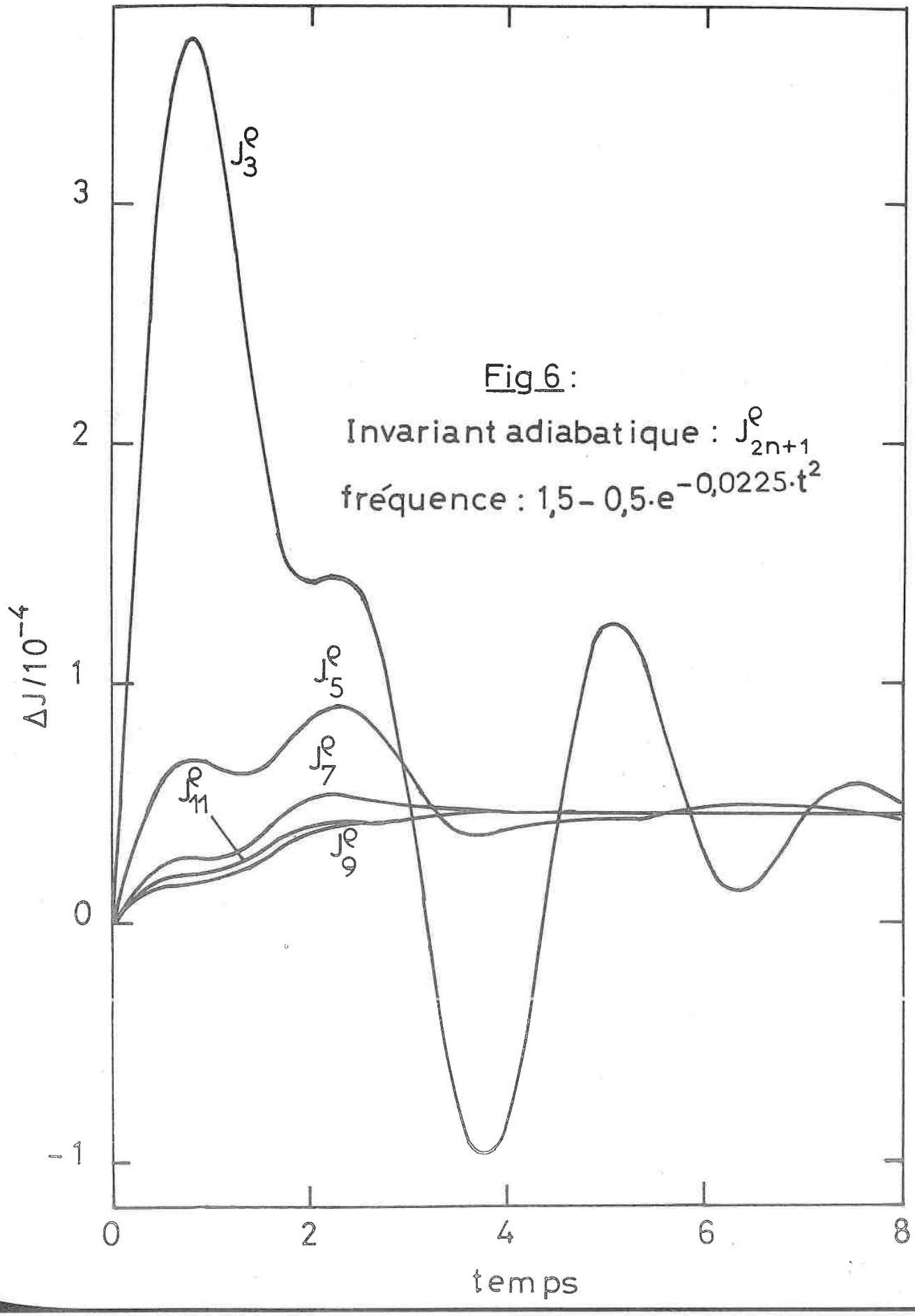

Fig 6 :

Invariant adiabatique : J^ρ_{2n+1}

fréquence : $1{,}5 - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}0225 \cdot t^2}$

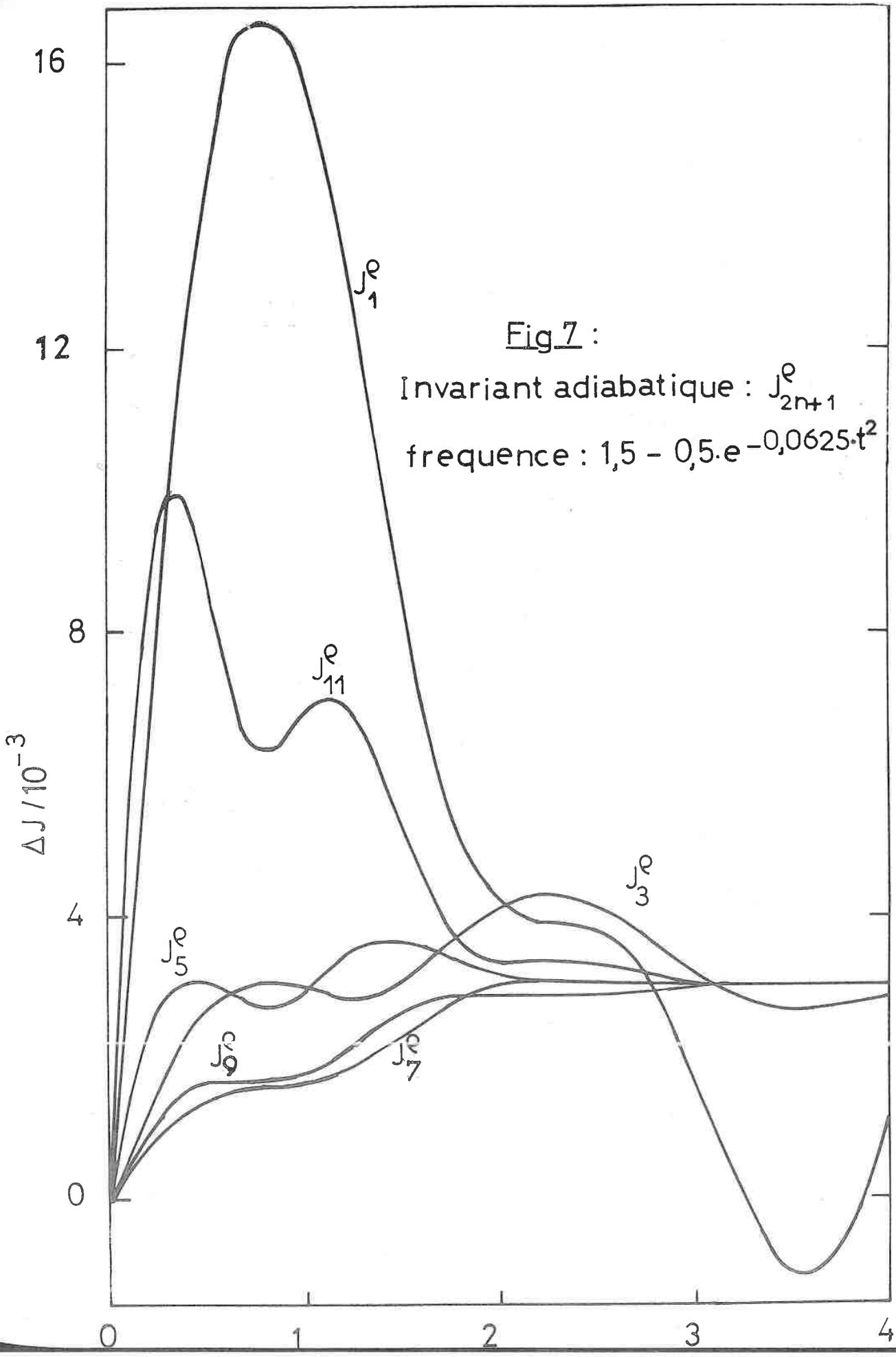

Fig 7 :

Invariant adiabatique : J^ρ_{2n+1}

frequence : $1{,}5 - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}0625 \cdot t^2}$

A et B sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

$g(t+2\pi)$ et $h(t+2\pi)$ doivent également être solutions de l'équation de Hill.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} g(t+2\pi) &= \alpha_1\, g(t) + \alpha_2\, h(t) \\ h(t+2\pi) &= \beta_1\, g(t) + \beta_2\, h(t) \end{aligned} \qquad (149)$$

Reportons dans (148)

$$F(t+2\pi) = (A\alpha_1+B\beta_1)\, g(t) + (A\alpha_2+B\beta_2)\, h(t) \qquad (150)$$

On pourra donc trouver des solutions particulières telles que:

$$F(t+2\pi) = k\, F(t)$$

$$\text{si} \quad \begin{cases} A\alpha_1 + B\beta_1 = kA \\ A\alpha_2 + B\beta_2 = kB \end{cases} \qquad (151)$$

Ces deux équations ont une solution autre que A=0 B=0 si:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - k & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - k \end{vmatrix} = 0 \qquad (152)$$

Posons $k=e^{i2\pi\mu}$

$$\text{et} \quad \Phi(t) = e^{-i\mu t}\, F(t) \qquad (153)$$

$$\Phi\ (t+2\pi) = e^{-i\mu(t+2\pi)}\ F(t+2\pi)$$

$$= e^{-i\mu t}\ e^{-2i\pi\mu}\ F(t)\ e^{2i\pi\mu}$$

$$= \Phi\ (t)$$

Φ est donc une fonction périodique de période 2π.

La fonction $e^{i\mu t}\,\Phi(t)$ et, comme il est aisé de le voir, $e^{-i\mu t}\,\Phi(-t)$ sont solutions de l'équation de Hill.

La solution générale s'écrira donc:

$$q = q_1 + q_2 = C_1\ e^{i\mu t}\ \Phi\ (t) + C_2\ e^{-i\mu t}\ \Phi\ (-t) \qquad (147)$$

<u>3. B2</u> - Méthode de Hill pour résoudre cette équation et calculer les valeurs propres:

Le calcul de μ sera donc le point crucial de la recherche de la solution et c'est ce paramètre que nous nous proposons de déterminer par notre méthode.

Développons Φ en série de Fourier; on obtient pour la solution q_1:

$$q_1 = e^{i\mu t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\ e^{2nit} \qquad (154)$$

En portant dans l'équation différentielle (146) on obtient un système infini d'équations qui admet des solutions non nulles si son déterminant est nul

$$\Delta(\mu) = 0 \qquad (155)$$

Si on développe $\omega^2(t)$

$$\omega^2(t) = A_0 + 2A_1 \cos 2t + 2A_2 \cos 4t + \ldots + 2A_n \cos 2nt. \qquad (156)$$

$$\Delta(\mu) = \{B_{m,n}\} \tag{157}$$

avec

$$B_{m,m} = \frac{(\mu-2m)^2 - A_0}{4m^2 - A_0}$$

$$B_{m,n} = \frac{-A_{m-n}}{4m^2-A_0} \qquad (m \neq n)$$

WHITTAKER et WATSON montrent /16/ que l'on peut obtenir pour le déterminant une expression simple:

$$\Delta(\mu) = \Delta(0) - \frac{\sin^2 (\pi\mu/2)}{\sin^2 (\frac{1}{2}\mu\sqrt{A_0})} \tag{158}$$

Les racines du déterminant de Hill sont alors les racines de l'équation

$$\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi\mu) = \Delta(0) \sin^2(\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{A_0}) \tag{159}$$

Cette équation est évidemment beaucoup plus simple à résoudre numériquement. Néanmoins, lorsque A_0 est grand, le calcul de $\Delta(0)$ devient pénible (le nombre de rangées qu'il faut prendre pour que le déterminant converge est d'autant plus grand) et les erreurs de chute importantes; dans ce domaine la méthode adiabatique va se présenter comme un complèment intéressant de celle de Hill.

3. B3 - Application de l'invariant de Lewis à l'équation de Hill.

Nous allons écrire les solutions de (146) sous une forme matricielle

$$\begin{bmatrix} q \\ \dot{q}(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{bmatrix} \tag{160}$$

T étant la période de ω

Posons

$$q_0 = q(0) \quad ; \quad \Phi_0 = \Phi(0)$$
$$\dot{q}_0 = \dot{q}(0) \quad ; \quad \Phi_0 = \Phi(0) \tag{161}$$

Nous avons

$$q_0 = (C_1 + C_2)\ \Phi_0$$

$$\dot{q}_0 = (C_1 - C_2)\,|\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\left|\frac{q_0}{\Phi_0} + \frac{q_0}{\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0}\right|$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\left|\frac{q_0}{\Phi_0} - \frac{q_0}{\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0}\right| \tag{162}$$

si T est la période

$$q(T) = q_T = C_1\ e^{i\mu t}\ \Phi_0 + C_2\ e^{-i\mu T}\ \Phi_0$$

$$= q_0 \cos\mu T + i\dot{q}_0 \frac{\Phi_0}{\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0} \sin\mu T$$

de même

$$\dot{q}(T) = \dot{q}_T = C_1\ e^{i\mu T}\ \Phi_0 - C_2\ e^{-i\mu T}\ \Phi_0$$

$$+ i\mu\, C_1\, e^{i\mu T}\ \Phi_0 - i\mu\ C_2\ e^{-i\mu T}\ \Phi_0$$

$$= C_1\ (\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0)\ e^{i\mu T} - C_2\ e^{-i\mu T}\ (\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0)$$

$$\dot{q}_T = \frac{1}{2}\ q_0/\Phi_0\ (e^{i\mu T} - e^{-i\mu T})\ (\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0) + \frac{1}{2}\dot{q}_0\ (e^{i\mu T} + e^{-i\mu T})$$

$$\dot{q}_T = q_0 \; i \; \frac{(\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0)}{\Phi_0} \; \mathrm{Sin}\mu T + \dot{q}_0 \; \cos\mu T$$

Ce qui donne sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} q_T \\ \\ \dot{q}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\mu T & i\dfrac{\Phi_0}{\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0} \sin\mu T \\ \\ i\dfrac{\dot{\Phi}_0 + i\mu\Phi_0}{\Phi_0} \sin\mu T & \cos\mu T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix} \qquad (163)$$

Les valeurs propres λ de la matrice sont solutions de l'équation

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos\mu T + 1 = 0$$

$$\lambda = \exp\,(\pm i\mu T) \qquad (164)$$

Une autre méthode pour calculer q_T et $\dot{q}_T$ est d'utiliser la transformation de Lewis.

$$q = Qw$$

$$\dot{q} = Qw + wQ$$

mais $$\dot{Q} = \left(\frac{dQ}{d\theta}\right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{w^2} \frac{dQ}{d\theta}$$

$$\dot{q} = \left(\frac{dQ}{d\theta}\right) /w + \dot{w}Q$$

au bout d'un temps T

$$q_T = Q_T \; w_T$$

$$\dot{q}_T = \left(\frac{dQ}{d\theta}\right)_T /w_T + \dot{w}_T \; Q_T$$

On peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} q_T \\ \dot{q}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_T & 0 \\ \dot{w}_T & \frac{1}{w_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_\Theta \\ (\frac{dQ}{d\theta})_{\theta=\Theta} \end{bmatrix} \tag{165}$$

Où on a posé

$$\Theta = \int_0^T \frac{1}{w^2(t)} \, dt \tag{166}$$

Mais Q est la solution de

$$\frac{d^2Q}{d\theta^2} + Q = 0$$

$$Q = A \cos\theta + B \sin\theta$$

$$\frac{dQ}{d\theta} = - A \sin\theta + B \cos\theta$$

$$Q_0 = Q(0) = A = q_0/w_0$$

$$(\frac{dQ}{d\theta})_{\theta=0} = B = (\dot{q}_0 - \dot{w}_0 Q_0) w_0 = w_0 \dot{q}_0 - \dot{w}_0 q_0$$

$$\begin{bmatrix} Q_\Theta \\ \frac{dQ}{d\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w_0} & 0 \\ -\dot{w}_0 & w_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix}$$

d'où l'expression matricielle finale

$$\begin{bmatrix} q_T \\ \dot{q}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_T & 0 \\ \dot{w}_T & \frac{1}{w_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{w_0} & 0 \\ -\dot{w}_0 & w_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix} \qquad (167)$$

La recherche des valeurs propres μ se ramène donc à résoudre l'équation de Lewis pour connaître w_T et $\dot{w}_T$ et chercher alors les valeurs propres de $[M]$.

3.B4 - Cas où $\omega(t)$ varie lentement

Nous avons vu (1.F) que l'on peut développer alors w en puissances de ε (paramètre de variation lente) les coefficients du développement sont des fonctions de ω et de ses dérivées. Les approximations adiabatiques de w sont donc périodiques avec la période de ω.

On peut donc écrire:

$$\begin{cases} w_T = w_0 \\ \dot{w}_T = \dot{w}_0 \end{cases} \qquad (168)$$

La matrice $[M]$ prend alors la forme simple:

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos\Theta - \sin\Theta w_0 \dot{w}_0 & w_0^2 \sin\Theta \\ -\sin\Theta(w_0^{-2} + \dot{w}_0^2) & \cos\Theta + \sin\Theta w_0 \dot{w}_0 \end{bmatrix} \tag{169}$$

Calculons les valeurs propres de cette matrice; elles sont données par:

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\Theta + 1 = 0 \tag{170}$$

dont les solutions sont:

$$\lambda = \exp\ (\pm i\theta)$$

Comparant avec (164) il vient

$$\mu T = \Theta$$

donc

$$\mu_{ad} = T^{-1} \int_0^T \frac{dt}{w^2_{ad}} \tag{171}$$

On met l'abbréviation ad. pour indiquer que cette formule qui est valable à tout ordre en ε, n'a de sens que pour une approximation adiabatique. En effet pour obtenir cette formule remarquablement simple il faut supposer que $w_T = w_0$ ce qui a permis la simplification de la matrice $[M]$.

Notons que à l'ordre zéro nous avons:

$$w = \omega^{-1/2}$$

donc

$$\mu = \frac{1}{T} \int_0^T \omega dt \tag{172}$$

On reconnait l'approximation WKB d'ordre zéro.

3. B5 - Test de la méthode sur l'équation de Mathieu.

Nous prenons:

$$\omega^2(t) = A - 2Q\cos 2t \tag{173}$$

Le déterminant de Hill prend la forme simple:

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \frac{Q}{4^2 - A} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \frac{Q}{2^2 - A} & 1 & \frac{Q}{2^2 - A} & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \frac{Q}{0^2 - A} & 1 & \frac{Q}{0^2 - A} & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \frac{Q}{2^2 - A} & 1 & \frac{Q}{2^2 - A} & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \frac{Q}{4^2 - A} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{174}$$

On peut calculer numériquement ce déterminant par une méthode classique telle que la méthode du pivot, mais étant donné qu'il s'agit en fait d'un déterminant infini on doit prendre un rang suffisament grand pour obtenir la précision désirée. Il est facile de voir que la convergence ne sera pas atteinte avant que $4n^2 > A$, ce qui signifie que plus A sera grand, plus le rang nécessaire à l'obtention de la valeur du déterminant sera élevé. Pour des valeurs de A très grandes, il est judicieux de trouver une formule de récurrence (voir Annexe C) qui utilise le fait que le déterminant, dans le cas de l'équation de Mathieu, a une forme particulière (seulement trois diagonales non nulles, symétries) et qui permet d'obtenir le résultat à la précision voulue quelque soit A, même très grand.

Cette méthode nous permet donc d'obtenir des valeurs de μ très précises que nous pouvons comparer aux valeurs adiabatiques. L'accord est très bon, allant jusqu'à une précision relative de 10^{-8}.

Nous avons tracé le rapport $\mu/\sqrt{A}$ en fonction de $1/\sqrt{A}$ pour une valeur

$$2Q/A = 0,4$$

L'approximation WKB est constante et égale à:

$$\mu/\sqrt{A} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(A - 2Q\cos 2t)^{1/2}}{\sqrt{A}} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - 0,4 \cos 2t)^{1/2} dt$$

$$= 0,98959875$$

Nous avons tracé deux figures:

- sur la première (Figure 8: A>30) les approximations adiabatiques à tout ordre sont confondues avec la solution exacte directement obtenue par résolution du déterminant de Hill.
- sur la seconde (Figure 9: A<30) nous représentons les deux premières approximations adiabatiques, les approximations d'ordre supérieur sont confondues avec μ_2. Pour A<10 la limite adiabatique ne signifie plus rien. Nous avons l'apparition des fameuses zones instables de l'équation de Mathieu pour A voisin d'un carré parfait; dans ces zones, μ devient imaginaire et la solution correspondante de l'équation de Mathieu (146) devient exponentiellement croissante ou décroissante suivant le signe de μ, donc instable. Ce phénomène existe déjà sur la figure (8) mais il n'est pas visible étant trop petit pour l'échelle utilisée. Il est remarquable que la méthode adiabatique, et ceci indépendamment de l'ordre d'approximation traverse ces zones sans discontinuité, en quelque sorte sans les voir. Ceci est dû au fait que la solution adiabatique impose à w d'être périodique, donc à μ d'être toujours réel et donc aux solutions d'être toujours stables.

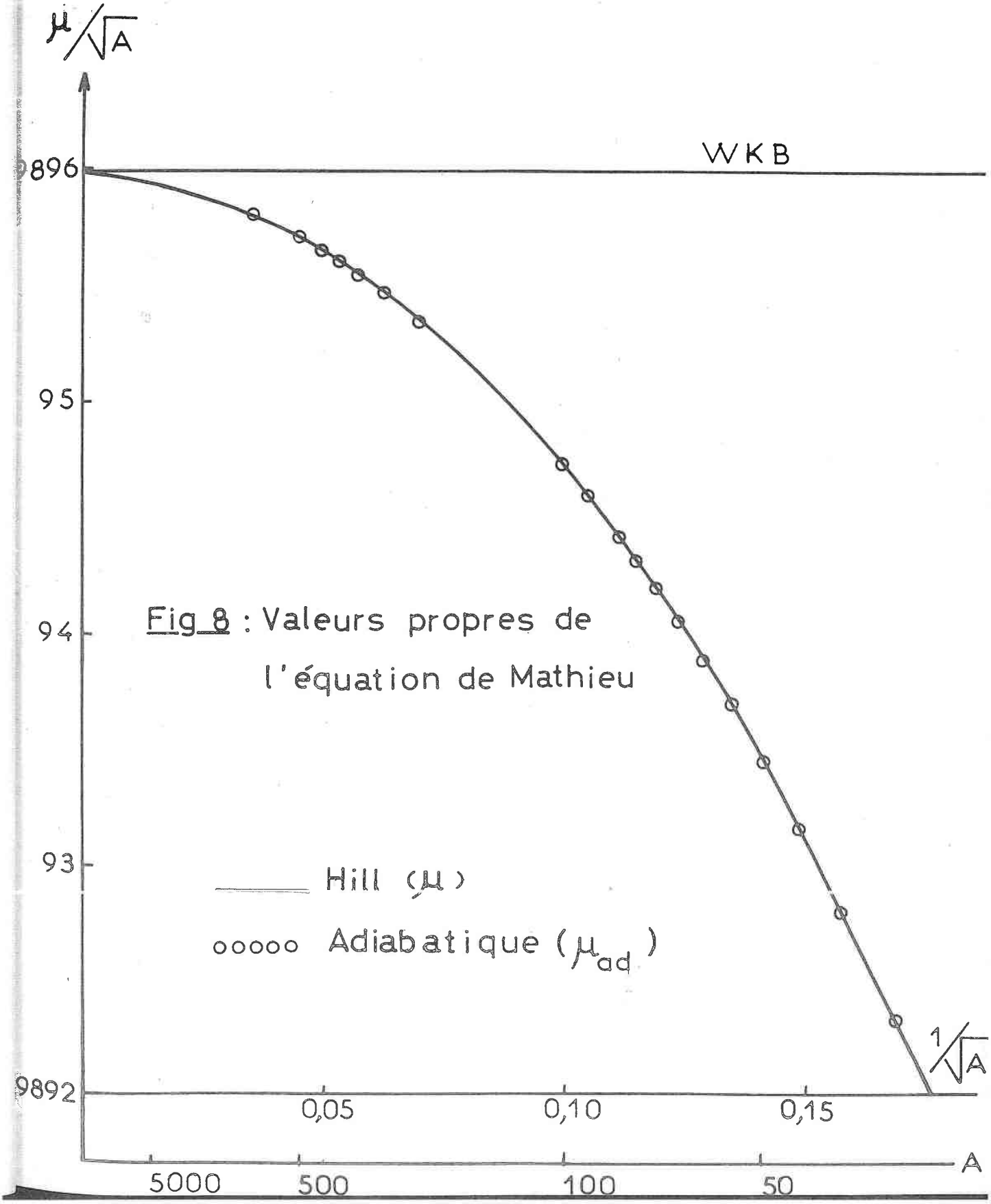

Fig 8 : Valeurs propres de l'équation de Mathieu

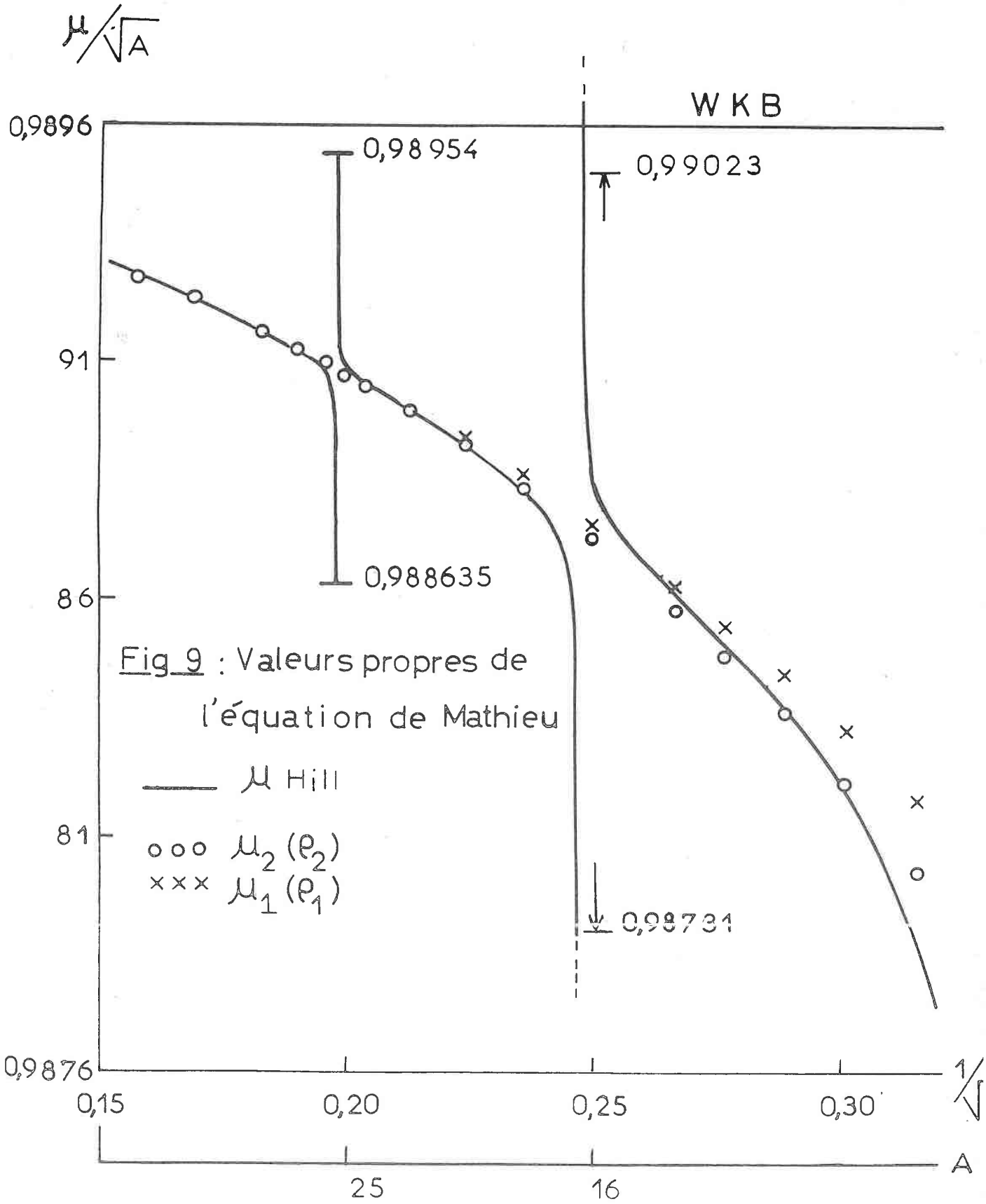

Fig 9 : Valeurs propres de l'équation de Mathieu

CONCLUSION

Nous avons donné dans ce travail une méthode permettant de calculer le développement en série de l'invariant adiabatique pour l'oscillateur harmonique.

Puisque les solutions des équations du mouvement sont obtenues sous forme de séries asymptotiques en ε, où ε est un paramètre petit caractérisant la lenteur de la variation de ω, il est raisonnable de chercher les constantes approchées du mouvement également sous forme de développement. Le processus formel consiste à développer l'Hamiltonien de telle sorte que, à chaque étape, il soit indépendant de l'une des coordonnées; le moment conjugué est alors constant. Nous avons montré que le développement de l'invariant exact trouvé par LEWIS et notre généralisation de la méthode itérative de CHANDRASEKHAR réalisent effectivement ce processus, les deux voies étant strictement identiques dans la limite adiabatique. Dans cette optique nous avons pu nous débarasser des multiples changements de variables de la méthode de CHANDRASEKHAR et il en est découlé une formule de récurrence qui permet, à l'aide d'un langage algébrique, de résoudre le problème du calcul technique des ordres élevés.

L'utilisation de ces calculs est un problème délicat. En effet, si l'on s'intéresse à la résolution de l'équation de l'oscillateur, on peut considérer que la constance au cours du temps des invariants d'ordre successif est une indication de l'erreur que l'on fait en employant l'approximation $\omega_{n+1}=1$. Dans ces conditions le saut non-adiabatique représente l'erreur inévitable quelque soit l'ordre auquel on travaille. Cependant, l'erreur est non seulement indiquée par le saut non-adiabatique, mais également par l'amplitude des oscillations de J_n pour l'intervalle considéré. On a vu que l'utilisation de J_{11}, par exemple, permet, dans certains cas, de limiter cette variation au saut non-adiabatique alors que les premiers termes de la suite donnent des oscillations d'amplitudes pouvant être cent ou mille fois supérieures au saut. Il serait d'ailleurs utile de préciser la connexion entre l'erreur sur

la solution et les variations au cours du temps des invariants adiabatiques successifs. Notre travail indique clairement que les ordres élevés sont surtout intéressants pour la résolution de l'équation.

De toute manière, la nature des séries obtenues étant asymptotique, les ordres élevés ne sont utiles que pour ε suffisament petit. Ces ordres élevés devront être utilisés pour obtenir des solutions très précises dans des problèmes où les conditions d'adiabaticité sont excellentes (par exemple, en Astronomie).

Pour l'utilisation usuelle, les premiers termes de la suite sont les plus intéressants. Notons en particulier que J_1 est obtenu sans plus de travail que $J_0=E/\omega$ mais est invariant à l'ordre ε^1 (alors que J_0 n'est invariant qu'à l'ordre ε^0). De même μ_1 (plutôt que $\mu_0=1/T \oint \omega dt$) donne une bien meilleure approximation de la valeur propre de l'équation de Mathieu. Nous pensons qu'il serait maintenant justifié de les utiliser comme approximation courante.

Néanmoins, dans un traitement purement adiabatique, certains phénomènes échappent totalement au développement (saut non-adiabatique de l'invariant, zones instables de l'équation de Mathieu). Il est alors possible de les retrouver en utilisant une méthode plus modeste qui est une combinaison de manipulations algébriques et numériques, permettant d'exhiber la solution sous forme de série $x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots$ valable seulement sur un intervalle $[0,T]$. A l'instant zéro, les conditions initiales sont totalement absorbées par x_0. La validité de ce développement est limitée par l'apparition des termes séculaires sur $\varepsilon^n x_n$ qui croissent au maximum comme $(\varepsilon t)^n$. On s'en débarasse en réinitialisant à l'instant T, c'est à dire en réintroduisant sur x_0 l'écart entre la valeur à l'ordre zéro et la valeur exacte. Nous avons alors une véritable méthode numérique, mais le pas T que l'on peut utiliser doit simplement être tel que $\varepsilon T \ll 1$ (au lieu de $T \ll 1$). Le fait que l'on renonce à obtenir un développement en ε valable quelque soit T (c'est la philosophie de la méthode adiabatique) semble modifier profondé-

ment la nature des séries obtenues. L'avantage est que l'on peut optimiser le processus. En effet, on a un compromis à trouver entre l'effort analytique et numérique (plus l'algèbre sera poussée, plus grand sera l'intervalle de validité, donc T). T prendra des valeurs d'autant plus grandes que ε est petit, même avec peu de termes car la convergence de la série est liée au produit εT. La méthode, testée sur l'équation de Mathieu, a fourni de très bons résultats et encourage à son utilisation pour d'autres problèmes: en particulier le problème fondamental en physique des plasmas du mouvement d'une particule dans un champ magnétique lentement variable dans l'espace.

BIBLIOGRAPHIE

/1/ LANGEVIN P. et De BROGLIE M.,
"La théorie du rayonnement et les quanta"-Gauthier-Villars, Paris, p.450, (1912).

/2/ KULSRUD R. M.,
Phys. Rev. 106, 205 (1957).

/3/ LEWIS H. R.,
J. Math. Phys. 9, 1976 (1968).

/4/ KRUSKAL M.,
J. Math. Phys. 3, 806 (1962)

/5/ CHANDRASEKHAR S.,
"The Plasma in a Magnetic Field" - R.K.M. Landshoff, Ed. (Stanford U.P., Palo Alto, California (1958)

/6/ GUYARD J., NADEAU A., BAUMANN G. et FEIX M. R.,
J. Math. Phys. 12, 488 (1971)

/7/ VANDERVOORT P. O.,
Ann. of Phys. 12, 436 (1961)

/8/ SOMMERFELD A.,
"Atomic Structure and Spectral Lines" - Methuen and Co, Vol.1, p.341-344, (1934)

/9/ GOLDSTEIN H.,
"Classical Mechanics" - Chapitre 8, Addison-Wesley, Cambridge (1956)

/10/HERTWECK F. et SCHLÜTER A.,
Z. Naturforsch. 12a, 844 (1957)

/11/ DYKHNE A. M.,
Sov. Phys. J.E.T.P., 11, 411 (1960).

/12/ COURANT et SNYDER,
Ann. Phys. 3, 1 (1958).

/13/ WKB : Le nom de la méthode se réfère aux auteurs qui l'ont développée (WENTZEL, KRAMERS et BRILLOUIN).
Pour une étude synthétique voir, par exemple:
MORSE P. M. et FESCHBACH H., "Methods of Theoretical Physics", 2 vol., Mc Graw Hill Book Company, Inc, New York (1953).

/14/ TOBEY et al.,
PL/1 FORMAC Interpreter, SHARE Contributed Program Library (SHARE 360D, 03.3.004).

/15/ HOWARD J. E.,
Phys. of Fluids, 2407 (1970).

/16/ WHITTAKER E. T. et WATSON G. N.,
"A Course of Modern Analysis"- Cambridge U. P.
Cambridge (1966).

ANNEXES

ANNEXE A : Développements asymptotiques

Nous nous sommes largement inspirés, dans ce qui suit, de WHITTAKER et WATSON (Référence /16/ p. 150-154)

1. Définition d'un développement asymptotique:

Soit la série divergente

$$a_0 + a_1\varepsilon + \ldots + a_n\varepsilon^n + \ldots$$

et S_n la somme des (n+1) premiers termes (série arrêtée à l'ordre ε^n)

On dit que la série est le développement asymptotique d'une fonction $f(\varepsilon)$ si l'expression R_n suivante

$$R_n(\varepsilon) = |f(\varepsilon) - S_n(\varepsilon)| / \varepsilon^n$$

satisfait les conditions

$$- \lim_{\varepsilon \to 0} R_n(\varepsilon) = 0 \qquad (n \text{ fixé})$$

$$- \lim_{n \to \infty} R_n(\varepsilon) = \infty \qquad (\varepsilon \text{ fixé})$$

Si nous pouvons nous exprimer ainsi, la série va commencer à converger (lorsque l'on augmente n) puis à diverger.

Pour ε petit, nous pourrons alors approcher la valeur de la fonction $f(\varepsilon)$ avec une grande précision en prenant une valeur de n correcte.

2. Unicité du développement.

Un même développement asymptotique peut représenter plusieurs fonctions. Il existe des fonctions $L(\varepsilon)$ qui sont représentées asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls, c'est à dire des fonctions telles que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon^n} = 0 \qquad (\forall n \text{ fixé})$$

La fonction $e^{-1/\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ est une telle fonction.

Le développement asymptotique d'une fonction $J(\varepsilon)$ est alors également le développement asymptotique de

$$J(\varepsilon) + L(\varepsilon)$$

Inversement il est facile de voir qu'une fonction ne peut pas être représentée par plus d'un développement asymptotique.

ANNEXE B : Dérivation FORMAC de la formule de récurrence.

Pour éviter d'avoir à dériver $\rho_0=\omega^{-1/2}$ nous avons préféré travailler sur une formule de récurrence différente de (116) en posant

$$R_i = (\omega\omega_1 \ldots\omega_1)^2 = \rho_i^{-4} \qquad \text{(B1)}$$

l'équation (116) devient alors:

$$R_{n+1} = \frac{5}{16} R_n^{-2} \left(\frac{dR_n}{dt}\right)^2 - \frac{1}{4} R_n^{-1} \left(\frac{d^2R_n}{dt^2}\right) + R_0 \qquad \text{(B2)}$$

On aura donc à dériver formellement l'expression:

$$V = \frac{5}{16} U^{-2} \left(\frac{dU}{dt}\right)^2 - \frac{1}{4} U^{-1} \frac{d^2U}{dt^2} \qquad \text{(B3)}$$

On met les dérivées sous la forme

$$\frac{d^kV}{dt^k} = \sum_{j=1}^{k+2} ZC\ (k,j\ )\ /\ U^j \qquad \text{(B4)}$$

Le programme FORMAC ci-dessous calcule les expressions algèbriques des ZC(k,j) qui sont fonctions des dérivées de U notées

$$\frac{d^jU}{dt^i} = D(j) \qquad \text{(B5)}$$

On donne dans les pages suivantes les résultats du calcul pour k allant de 1 à 10.

INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR

```
EKAL:    PROCEDURE OPTIONS(MAIN);
       FORMAC_OPTIONS;
       OPTSET(LINELENGTH=70);
       OPTSET(EDIT) ;
    OPTSET(EXPND) ;
    L=2 ;
    LET(P(2)=5/16*DP(1).(T)** 2 ;P(1)= -1/4*DP(2).(T) );
    DO IP=1 TO 10; LET(I="IP") ;
    DO J=1 TO L  ; LET(J="J") ;
    LET(SP(J)= DERIV(P(J),T) ; SS(J+1)=-J*P(J)*DP(1).(T)); END;
    L=L+1 ; LET( SP("L")=0 );
    LET(SS(1)=0 );
    DO J=1 TO L  ; LET(J="J") ;
    LET(P(J)=SP(J)+SS(J)); ATOMIZE(SP(J) ;SS(J)) ;
    DO M=IP+1 TO 1 BY -1 ; LET(M="M");
    LET(A=CHAIN(DERIV(DP(M).(T),T),DP(M+1).(T) ) ) ;
    LET(P(J)=REPLACE(P(J),A)) ; END;
    SAVE(P(J));
    LET(ZC(I,J)=P(J));
    SAVE(P(J));
    DO M=IP+2 TO 1 BY -1 ; LET(M="M");
    LET(B=CHAIN(DP(M).(T),D(M)));
    LET(ZC(I,J)=REPLACE(ZC(I,J),B));END;
    PRINT_OUT(ZC(I,J)) ;
    ATOMIZE(ZC(I,J)); END;END;
    STOP ;
    END EKAL ;
```

$$ZC(1,1) = -1/4\ D(3)$$

$$ZC(1,2) = 7/8\ D(1)\ D(2)$$

$$ZC(1,3) = -5/8\ D(1)^{3}$$

$$ZC(2,1) = -1/4\ D(4)$$

$$ZC(2,2) = 9/8\ D(1)\ D(3) + 7/8\ D(2)^{2}$$

$$ZC(2,3) = -29/8\ D(1)^{2}\ D(2)$$

$$ZC(2,4) = 15/8\ D(1)^{4}$$

$$ZC(3,1) = -1/4\ D(5)$$

$$ZC(3,2) = 11/8\ D(1)\ D(4) + 23/8\ D(2)\ D(3)$$

$$ZC(3,3) = -47/8\ D(1)^{2}\ D(3) - 9\ D(1)\ D(2)^{2}$$

$$ZC(3,4) = 147/8\ D(1)^{3}\ D(2)$$

$$ZC(3,5) = -15/2\ D(1)^{5}$$

$$ZC(4,1) = -1/4\ D(6)$$

$$ZC(4,2) = 13/8\ D(1)\ D(5) + 17/4\ D(2)\ D(4) + 23/8\ D(3)^{2}$$

$$ZC(4,3) = -69/8\ D(1)^{2}\ D(4) - 71/2\ D(1)\ D(2)\ D(3) - 9\ D(2)^{3}$$

$$ZC(4,4) = 36\ D(1)^{3}\ D(3) + 657/8\ D(1)^{2}\ D(2)^{2}$$

$$ZC(4,5) = -111\ D(1)^{4}\ D(2)$$

$$ZC(4,6) = 75/2\ D(1)^{6}$$

$$ZC(5,1) = -1/4\ D(7)$$

$$ZC(5,2) = 15/8\ D(1)\ D(6) + 47/8\ D(2)\ D(5) + 10\ D(3)\ D(4)$$

$$ZC(5,3) = -95/8\ D(1)^2\ D(5) - 245/4\ D(1)\ D(2)\ D(4) - 125/2\ D(2)^2\ D(3) - 165/4\ D(1)\ D(3)^2$$

$$ZC(5,4) = 495/8\ D(1)^3\ D(4) + 1515/4\ D(1)^2\ D(2)\ D(3) + 765/4\ D(1)\ D(2)^3$$

$$ZC(5,5) = -255\ D(1)^4\ D(3) - 1545/2\ D(1)^3\ D(2)^2$$

$$ZC(5,6) = 780\ D(1)^5\ D(2)$$

$$ZC(5,7) = -225\ D(1)^7$$

$$ZC(6,1) = -1/4\ D(8)$$

$$ZC(6,2) = 17/8\ D(1)\ D(7) + 31/4\ D(2)\ D(6) + 127/8\ D(3)\ D(5) + 10\ D(4)^2$$

$$ZC(6,3) = -125/8\ D(1)^2\ D(6) - 387/4\ D(1)\ D(2)\ D(5) - 655/4\ D(1)\ D(3)\ D(4) - 495/4\ D(2)^2\ D(4) - 665/4\ D(2)\ D(3)^2$$

$$ZC(6,4) = 195/2\ D(1)^3\ D(5) + 5985/8\ D(1)^2\ D(2)\ D(4) + 6075/4\ D(1)\ D(2)^2\ D(3) + 1005/2\ D(1)^2\ D(3)^2 + 765/4\ D(2)^4$$

$$ZC(6,5) = -1005/2\ D(1)^4\ D(4) - 4080\ D(1)^3\ D(2)\ D(3) - 6165/2\ D(1)^2\ D(2)^3$$

$$ZC(6,6) = 2055\ D(1)^5\ D(3) + 15525/2\ D(1)^4\ D(2)^2$$

$$ZC(6,7) = -6255\ D(1)^6\ D(2)$$

$$ZC(6,8) = 1575\ D(1)^8$$

$$ZC(7,1) = -1/4\ D(9)$$

$$ZC(7,2) = 19/8\ D(1)\ D(8) + 79/8\ D(2)\ D(7) + 189/8\ D(3)\ D(6) + 287/8\ D(4)\ D(5)$$

$$ZC(7,3) = -159/8\ D(1)^2\ D(7) - 287/2\ D(1)\ D(2)\ D(6) - 1169/4\ D(1)\ D(3)\ D(5) - 441/2\ D(2)^2\ D(5) - 2975/4\ D(2)\ D(3)\ D(4) - 735/4\ D(1)\ D(4)^2 - 665/4\ D(3)^3$$

$$ZC(7,4) = 1155/8\ D(1)^3\ D(6) + 10647/8\ D(1)^2\ D(2)\ D(5) + 17955/8\ D(1)^2\ D(3)\ D(4) + 13545/4\ D(1)\ D(2)^2\ D(4) + 9135/4\ D(2)^3\ D(3) + 18165/4\ D(1)\ D(2)\ D(3)^2$$

$$ZC(7,5) = -1785/2\ D(1)^4\ D(5) - 18165/2\ D(1)^3\ D(2)\ D(4) - 55125/2\ D(1)^2\ D(2)^2\ D(3) - 6090\ D(1)^3\ D(3)^2 - 6930\ D(1)\ D(2)^4$$

$$ZC(7,6) = 9135/2\ D(1)^5\ D(4) + 46200\ D(1)^4\ D(2)\ D(3) + 92925/2\ D(1)^3\ D(2)^3$$

$$ZC(7,7) = -18585\ D(1)^6\ D(3) - 84105\ D(1)^5\ D(2)^2$$

$$ZC(7,8) = 56385\ D(1)^7\ D(2)$$

$$ZC(7,9) = -12600\ D(1)^9$$

$$ZC(8,1) = -1/4\ D(10)$$

$$ZC(8,2) = 21/8\ D(1)\ D(9) + 49/4\ D(2)\ D(8) + 67/2\ D(3)\ D(7) + 119/2\ D(4)\ D(6) + 287/8\ D(5)^2$$

$$ZC(8,3) = -197/8\ D(1)^2\ D(8) - 203\ D(1)\ D(2)\ D(7) - 483\ D(1)\ D(3)\ D(6) - 364\ D(2)^2\ D(6) - 1463/2\ D(1)\ D(4)\ D(5) - 1477\ D(2)\ D(3)\ D(5) -$$

$$2485/2\ D(3)^2\ D(4) - 1855/2\ D(2)\ D(4)^2$$

$$ZC(8,4) = 204\ D(1)^3\ D(7) + 4389/2\ D(1)^2\ D(2)\ D(6) + 4452\ D(1)^2\ D(3)\ D(5) + 13419/2\ D(1)\ D(2)^2\ D(5) + 22575\ D(1)\ D(2)\ D(3)\ D(4) + 5670\ D(2)^3\ D(4) + 22365/8\ D(1)^2\ D(4)^2 + 22785/2\ D(2)^2\ D(3)^2 + 5040\ D(1)\ D(3)^3$$

$$ZC(8,5) = -1470\ D(1)^4\ D(6) - 17976\ D(1)^3\ D(2)\ D(5) - 30240\ D(1)^3\ D(3)\ D(4) - 68355\ D(1)^2\ D(2)^2\ D(4) - 91980\ D(1)\ D(2)^3\ D(3) - 91560\ D(1)^2\ D(2)\ D(3)^2 - 6930\ D(2)^5$$

$$ZC(8,6) = 9030\ D(1)^5\ D(5) + 114450\ D(1)^4\ D(2)\ D(4) + 462000\ D(1)^3\ D(2)^2\ D(3) + 76650\ D(1)^4\ D(3)^2 + 348075/2\ D(1)^2\ D(2)^4$$

$$ZC(8,7) = -45990\ D(1)^6\ D(4) - 556920\ D(1)^5\ D(2)\ D(3) - 699300\ D(1)^4\ D(2)^3$$

$$ZC(8,8) = 186480\ D(1)^7\ D(3) + 983430\ D(1)^6\ D(2)^2$$

$$ZC(8,9) = -564480\ D(1)^8\ D(2)$$

$$ZC(8,10) = 113400\ D(1)^{10}$$

$$ZC(9,1) = -1/4\ D(11)$$

$$ZC(9,2) = 23/8\ D(1)\ D(10) + 119/8\ D(2)\ D(9) + 183/4\ D(3)\ D(8) + 93\ D(4)\ D(7) + 525/4\ D(5)\ D(6)$$

$$ZC(9,3) = -239/8\ D(1)^2\ D(9) - 1107/4\ D(1)\ D(2)\ D(8) - 753\ D(1)\ D(3)\ D(7) - 567\ D(2)^2\ D(7) - 2667/2\ D(1)\ D(4)\ D(6) - 2688\ D(2)\ D(3)\ D(6) - 8127/2\ D(2)\ D(4)\ D(5) - 5439/2\ D(3)^2\ D(5) - 3213/4\ D(1)\ D(5)^2 - 6825/2\ D(3)\ D(4)^2$$

$$ZC(9,4) = 2223/8\ D(1)^3\ D(8) + 6831/2\ D(1)^2\ D(2)\ D(7) + 16191/2\ D(1)^2\ D(3)\ D(6) + 24381/2\ D(1)\ D(2)^2\ D(6) + 48951/4\ D(1)^2\ D(4)\ D(5) + 49329\ D(1)\ D(2)\ D(3)\ D(5) + 24759/2\ D(2)^3\ D(5) + 62370\ D(2)^2\ D(3)\ D(4) + 82845/2\ D(1)\ D(3)^2\ D(4) + 123795/4\ D(1)\ D(2)\ D(4)^2 + 27825\ D(2)\ D(3)^3$$

$$ZC(9,5) = -2286\ D(1)^4\ D(7) - 32634\ D(1)^3\ D(2)\ D(6) - 66024\ D(1)^3\ D(3)\ D(5) - 149121\ D(1)^2\ D(2)^2\ D(5) - 500850\ D(1)^2\ D(2)\ D(3)\ D(4) - 251370\ D(1)\ D(2)^3\ D(4) - 126630\ D(2)^4\ D(3) - 82845/2\ D(1)^3\ D(4)^2 - 504630\ D(1)\ D(2)^2\ D(3)^2 - 111720\ D(1)^2\ D(3)^3$$

$$ZC(9,6) = 16380\ D(1)^5\ D(6) + 249480\ D(1)^4\ D(2)\ D(5) + 418950\ D(1)^4\ D(3)\ D(4) + 1261575\ D(1)^3\ D(2)^2\ D(4) + 2542050\ D(1)^2\ D(2)^3\ D(3) + 1688400\ D(1)^3\ D(2)\ D(3)^2 + 382725\ D(1)\ D(2)^5$$

$$ZC(9,7) = -100170\ D(1)^6\ D(5) - 1519560\ D(1)^5\ D(2)\ D(4) - 7654500\ D(1)^4\ D(2)^2\ D(3) - 1016820\ D(1)^5\ D(3)^2 - 3841425\ D(1)^3\ D(2)^4$$

$$ZC(9,8) = 508410\ D(1)^7\ D(4) + 7170660\ D(1)^6\ D(2)\ D(3) + 10795680\ D(1)^5\ D(2)^3$$

$$ZC(9,9) = -2056320\ D(1)^8\ D(3) - 12383280\ D(1)^7\ D(2)^2$$

$$ZC(9,10) = 6214320\ D(1)^9\ D(2)$$

$$ZC(9,11) = -1134000\ D(1)^{11}$$

$$ZC(10,1) = -1/4\ D(12)$$

$$ZC(10,2) = 25/8\ D(1)\ D(11) + 71/4\ D(2)\ D(10) + 485/8\ D(3)\ D(9) + 555/4\ D(4)\ D(8) + 897/4\ D(5)\ D(7) + 525/4\ D(6)^2$$

$$ZC(10,3) = -285/8\ D(1)^2\ D(10) - 1465/4\ D(1)\ D(2)\ D(9) - 4485/4\ D(1)\ D(3)\ D(8) - 3375/4\ D(2)^2\ D(8) - 4545/2\ D(1)\ D(4)\ D(7) - 4575\ D(2)\ D(3)\ D(7) - 6405/2\ D(1)\ D(5)\ D(6) - 8085\ D(2)\ D(4)\ D(6) - 10815/2\ D(3)^2\ D(6) - 32655/2\ D(3)\ D(4)\ D(5) - 19467/4\ D(2)\ D(5)^2 - 6825/2\ D(4)^3$$

$$ZC(10,4) = 735/2\ D(1)^3\ D(9) + 40635/8\ D(1)^2\ D(2)\ D(8) + 13770\ D(1)^2\ D(3)\ D(7) + 41445/2\ D(1)\ D(2)^2\ D(7) + 97335/4\ D(1)^2\ D(4)\ D(6) + 97965\ D(1)\ D(2)\ D(3)\ D(6) + 24570\ D(2)^3\ D(6) + 295785/2\ D(1)\ D(2)\ D(4)\ D(5) + 297675/2\ D(2)^2\ D(3)\ D(5) + 98910\ D(1)\ D(3)^2\ D(5) + 499275/2\ D(2)\ D(3)^2\ D(4) + 29295/2\ D(1)^2\ D(5)^2 + 496125/4\ D(1)\ D(3)\ D(4)^2 + 373275/4\ D(2)^2\ D(4)^2 + 27825\ D(3)^4$$

$$ZC(10,5) = -6795/2\ D(1)^4\ D(8) - 55440\ D(1)^3\ D(2)\ D(7) - 131040\ D(1)^3\ D(3)\ D(6) - 295785\ D(1)^2\ D(2)^2\ D(6) - 197820\ D(1)^3\ D(4)\ D(5) - 1194480\ D(1)^2\ D(2)\ D(3)\ D(5) - 599130\ D(1)\ D(2)^3\ D(5) - 3014550\ D(1)\ D(2)^2\ D(3)\ D(4) - 1001700\ D(1)^2\ D(3)^2\ D(4) - 378000\ D(2)^4\ D(4) - 1497825/2\ D(1)^2\ D(2)\ D(4)^2 - 1011150\ D(2)^3\ D(3)^2 - 1344000\ D(1)\ D(2)\ D(3)^3$$

$$ZC(10,6) = 27810\, D(1)^5\, D(7) + 494550\, D(1)^4\, D(2)\, D(6) + 998550\, D(1)^4\, D(3)\, D(5) + 3005100\, D(1)^3\, D(2)^2\, D(5) + 10080000\, D(1)^3\, D(2)\, D(3)\, D(4) + 7583625\, D(1)^2\, D(2)^3\, D(4) + 7630875\, D(1)\, D(2)^4\, D(3) + 1252125/2\, D(1)^4\, D(4)^2 + 15214500\, D(1)^2\, D(2)^2\, D(3)^2 + 2247000\, D(1)^3\, D(3)^3 + 382725\, D(2)^6$$

$$ZC(10,7) = -198450\, D(1)^6\, D(6) - 3617460\, D(1)^5\, D(2)\, D(5) - 6066900\, D(1)^5\, D(3)\, D(4) - 22821750\, D(1)^4\, D(2)^2\, D(4) - 61236000\, D(1)^3\, D(2)^3\, D(3) - 30523500\, D(1)^4\, D(2)\, D(3)^2 - 13820625\, D(1)^2\, D(2)^5$$

$$ZC(10,8) = 1209600\, D(1)^7\, D(5) + 21366450\, D(1)^6\, D(2)\, D(4) + 128992500\, D(1)^5\, D(2)^2\, D(3) + 14288400\, D(1)^6\, D(3)^2 + 80868375\, D(1)^4\, D(2)^4$$

$$ZC(10,9) = -6123600\, D(1)^8\, D(4) - 98582400\, D(1)^7\, D(2)\, D(3) - 173048400\, D(1)^6\, D(2)^3$$

$$ZC(10,10) = 24721200\, D(1)^9\, D(3) + 167378400\, D(1)^8\, D(2)^2$$

$$ZC(10,11) = -74617200\, D(1)^{10}\, D(2)$$

$$ZC(10,12) = 12474000\, D(1)^{12}$$

ANNEXE C : Calcul du déterminant de Hill pour l'équation de Mathieu

On se propose de calculer le déterminant donné par l'équation (174). Ce déterminant infini converge et il suffit de s'arrêter à un rang donnant la prècision voulue.

Il faut donc savoir calculer le déterminant de rang (2n+1):

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & a_n & 0 & \cdot & & & \\ a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & \cdot & & & \\ 0 & a_{n-2} & 1 & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & 1 & a_{n-2} & 0 \\ & & & \cdot & a_{n-1} & 1 & a_{n-1} \\ & & & \cdot & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{où } a_i = \frac{Q}{(2i)^2 - A} \qquad (C-1)$$

$$i = 0, 1, \ldots, n$$

Lorsque A est grand, pour obtenir une bonne convergence, il faut prendre des déterminants de rang élevé; les méthodes classiques (méthode du pivot, par exemple) risquent de ne pas pouvoir fournir la précision désirée. Il est alors très utile de calculer les A_i par récurrence; remarquons que cette méthode fera gagner également beaucoup de temps au point de vue calcul.

Développons A_n par rapport à la première colonne; on obtient deux déterminants de rang 2n (Eq. C-2 ; page 77)

Développons le premier par rapport à la dernière ligne et le second par rapport à la première ligne. On obtient (Eq. C-3) trois nouveaux déterminants de rang (2n-1), le premier n'est autre

que A_{n-1}; le second et le troisième définissent deux nouvelles suites de déterminants que nous appellerons B_i et C_i.

On peut donc schématiser l'équation (C-3) par:

$$A_n = A_{n-1} - a_n B_{n-1} - a_n a_{n-1} C_{n-1} \qquad \text{(C-4)}$$

Développons maintenant B_n par rapport à la dernière colonne; on obtient un déterminant de rang 2n (Eq. C-5) que l'on développe par rapport à la première colonne, ce qui fournit (Eq. C-6) deux déterminants de rang(2n-1), le premier étant A_{n-1} et le second définissant une suite D_i. Réécrivons alors (C-5) sous la forme:

$$B_n = a_n (A_{n-1} - a_{n-1} D_{n-1}) \qquad \text{(C-7)}$$

Développons également C_n par un processus anologue aux prècèdents; le résultat donné par l'équation (C-8) peut être mis sous la forme:

$$C_n = A_{n-1} - a_n B_{n-1} - a_n a_{n+1} A_{n-1} \qquad \text{(C-9)}$$

Développons enfin D_n, ce qui entraîne (Eq. C-10) ou d'une façon équivalente:

$$D_n = a_{n+1} (A_{n-1} - a_n B_{n-1}) \qquad \text{(C-11)}$$

Le système des équations (C-4, C-7, C-9 et C-11) nous permet alors, connaissant A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1} de calculer A_n, B_n, C_n, D_n ce qui résoud notre problème.

Notons que l'on pourrait s'affranchir des déterminants B_n, C_n, D_n. Le résultat est alors pour A_n une série de n termes de terme général compliqué dont l'utilisation purement numérique ne facilite pas les calculs.

$$
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_n & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-2} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-2} & 0 \\
 & & \cdot & a_{n-1} & 1 & a_{n-1} \\
 & & \cdot & 0 & a_n & 1
\end{vmatrix}}_{(A_n)}
=
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-2} & 0 \\
 & & \cdot & a_{n-1} & 1 & a_{n-1} \\
 & & \cdot & 0 & a_n & 1
\end{vmatrix}}_{(B_{n-1})}
-a_{n-1}
\underbrace{\begin{vmatrix}
a_n & 0 & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-2} & 0 \\
 & & \cdot & a_{n-1} & 1 & a_{n-1} \\
 & & \cdot & 0 & a_n & 1
\end{vmatrix}}_{(C_{n-1})}
\qquad (C-2)
$$

$$
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 \\
 & & \cdot & a_{n-2} & 1 & a_{n-2} \\
 & & \cdot & 0 & a_{n-1} & 1
\end{vmatrix}}_{(A_{n-1})}
-a_n
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 \\
 & & \cdot & a_{n-2} & 1 & 0 \\
 & & \cdot & 0 & a_{n-1} & a_{n-1}
\end{vmatrix}}_{(B_{n-1})}
-a_n a_{n-1}
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-2} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-3} & 1 & a_{n-3} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-4} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-2} & 0 \\
 & & \cdot & a_{n-1} & 1 & a_{n-1} \\
 & & \cdot & 0 & a_n & 1
\end{vmatrix}}_{(C_{n-1})}
\qquad (C-3)
$$

$$
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_n & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-2} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & 1 & a_{n-2} & 0 \\
 & & & \cdot & a_{n-1} & 1 & 0 \\
 & & & \cdot & 0 & a_n & a_n
\end{vmatrix}}_{(B_n)}
= a_n \underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_n & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-2} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 \\
 & & & \cdot & a_{n-2} & 1 & a_{n-2} \\
 & & & \cdot & 0 & a_{n-1} & 1
\end{vmatrix}}_{} \qquad \text{(C-5)}
$$

$$
= a_n \left[\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 \\
 & & & \cdot & a_{n-2} & 1 & a_{n-2} \\
 & & & \cdot & 0 & a_{n-1} & 1
\end{vmatrix}}_{(A_{n-1})}
- a_{n-1} \underbrace{\begin{vmatrix}
a_n & 0 & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 \\
 & & & \cdot & a_{n-2} & 1 & a_{n-2} \\
 & & & \cdot & 0 & a_{n-1} & 1
\end{vmatrix}}_{(D_{n-1})} \right] \qquad \text{(C-6)}
$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-1} & 0 & \\
 & & \cdot & a_n & 1 & a_n & \\
 & & \cdot & 0 & a_{n+1} & 1 &
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-2} & 0 & \\
 & & \cdot & a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & \\
 & & \cdot & 0 & a_n & 1 &
\end{vmatrix}
- a_{n+1}
\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-2} & 0 & \\
 & & \cdot & a_{n-1} & 1 & 0 & \\
 & & \cdot & 0 & a_n & a_n &
\end{vmatrix}
$$

$$
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 & \\
 & & \cdot & a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \\
 & & \cdot & 0 & a_{n-1} & 1 &
\end{vmatrix}}_{(A_{n-1})}
-a_n
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 & \\
 & & \cdot & a_{n-2} & 1 & 0 & \\
 & & \cdot & 0 & a_{n-1} & a_{n-1} &
\end{vmatrix}}_{(B_{n-1})}
-a_n a_{n+1}
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 & \\
 & & \cdot & a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \\
 & & \cdot & 0 & a_{n-1} & 1 &
\end{vmatrix}}_{(A_{n-1})}
\qquad (C-8)
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{n+1} & 0 & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-2} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & 1 & a_{n-2} & 0 \\
 & & & \cdot & a_{n-1} & 1 & a_{n-1} \\
 & & & \cdot & 0 & a_n & 1
\end{vmatrix}
= a_{n+1}
\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & 1 & a_{n-1} & 0 \\
 & & & \cdot & a_{n-1} & 1 & a_{n-1} \\
 & & & \cdot & 0 & a_n & 1
\end{vmatrix}
$$

$$
= a_{n+1}
\left[
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 \\
 & & & \cdot & a_{n-2} & 1 & a_{n-2} \\
 & & & \cdot & 0 & a_{n-1} & 1
\end{vmatrix}}_{(A_{n-1})}
- a_n
\underbrace{\begin{vmatrix}
1 & a_{n-1} & 0 & \cdot & & & \\
a_{n-2} & 1 & a_{n-2} & \cdot & & & \\
0 & a_{n-3} & 1 & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & 1 & a_{n-3} & 0 \\
 & & & \cdot & a_{n-2} & 1 & a_{n-2} \\
 & & & \cdot & 0 & a_{n-1} & a_{n-1}
\end{vmatrix}}_{(B_{n-1})}
\right]
\qquad \text{(C-10)}
$$

Ce travail a été élaboré à l'initiative et sous la responsabilité scientifique de Monsieur Marc FEIX, Maître de Recherches au CNRS; je lui sais gré d'avoir su à tout moment lui donner l'impulsion nécessaire à son bon déroulement.

Il a été réalisé dans le laboratoire de Monsieur le Professeur BAUMANN à qui je dois beaucoup pour m'avoir accueilli à un moment difficile de ma vie de chercheur.

Je tiens spécialement à citer en exemple leur conception originale des relations au sein du laboratoire qui tiennent plus de l'amitié que de la hiérarchie.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur HADNI d'avoir bien voulu présider ce jury.

Monsieur Michel BINEAU, Physicien EURATOM, a accepté la tâche ingrate de relire un manuscrit fort imparfait et en donner, malgré tout, des critiques très constructives; je tiens à l'en remercier, ainsi que pour sa participation au jury.

Je suis heureux de voir également dans ce jury Monsieur Jacky BITOUN, Ingénieur au CNET, qui fut mon guide amical dans l'utilisation de FORMAC et contribua, en particulier,de façon décisive au programme utilisé ici.

Je tiens surtout à préciser que les résultats présentés sont issus d'une collaboration constante et amicale avec André NADEAU et doivent être pour cette raison considérés comme le fruit d'un travail en équipe.

Je remercie le service de reproduction de l'Ecole des Mines, qui s'est acquitté avec beaucoup de compétence du tirage offset.