

88 | 935

Sc N 88 / 353 A

Université de NANCY I

Département de Mathématiques
Appliquées et Informatique

Centre de Recherche en Informatique de Nancy

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ès SCIENCES



présentée à l'Université de Nancy I

par

Prosper Kwaku DOH

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès SCIENCES MATHÉMATIQUES (Informatique)

*Courbes paramétriques polynomiales et formes matricielles du théorème
binomial.*

*Nouveaux outils fondamentaux pour la conception et fabrication assistée
par ordinateur.*

Soutenue le 13 juillet 1988

Composition du jury :

Président : R. MOHR
Rapporteurs : Y. GARDAN
M. PIERRE

Examineurs : P. BEZIER
J.P. HATON
M.C. HATON
M. VERON

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1



D 095 145994 4

Université de NANCY I

Département de Mathématiques
Appliquées et Informatique

Centre de Recherche en Informatique de Nancy

THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ès SCIENCES

présentée à l'Université de Nancy I

par

Prosper Kwaku DOH

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès SCIENCES MATHÉMATIQUES (Informatique)



*Courbes paramétriques polynomiales et formes matricielles du théorème
binomial.*

*Nouveaux outils fondamentaux pour la conception et fabrication assistée
par ordinateur.*

Soutenu le 13 juillet 1988

Composition du jury :

Président : R. MOHR
Rapporteurs : Y. GARDAN
M. PIERRE

Examineurs : P. BEZIER
J.P. HATON
M.C. HATON
M. VERON

à

Grace

Delali, Du-Anyo et Eyram

+++

++++

AVANT-PROPOS

++++

AVANT - PROPOS



Ce travail a été réalisé au Centre de Recherche en Informatique de Nancy sous la direction de M. le Professeur J.P. HATON ; qu'il trouve ici, pour la bienveillance et l'aide incessante qu'il m'a toujours prodiguées, pour les suggestions judicieuses et les encouragements qu'il m'a donnés, l'expression de ma profonde et respectueuse gratitude.

Je remercie très vivement M.C. HATON, Maître de Conférences à l'Université de Nancy I, pour son amitié au fil des années, pour le très grand intérêt qu'elle a toujours manifesté pour ce travail, pour ses nombreux conseils irremplaçables et pour avoir accepté de me faire l'honneur de participer au jury.

Que M. le Professeur Y. GARDAN à l'Université de Metz et M. le Professeur M. PIERRE à l'Université de Nancy I soient assurés de toute ma reconnaissance pour avoir accepté d'être mes rapporteurs et de me faire l'honneur d'être membres du jury.

Je tiens à remercier M. le Professeur M. VERON de l'Université de Nancy I pour m'avoir autorisé l'accès à la riche documentation de son laboratoire en la matière de la CFAO. Je lui dois notamment une bonne partie de la bibliographie de base pour ce travail, parmi laquelle la thèse et l'ouvrage sur la commande numérique (version anglaise) du Professeur BEZIER, la thèse de CHEMLA, de RIS, de VERON ainsi que les revues de CAD. Je lui exprime aussi ma gratitude pour l'honneur qu'il me fait d'être membre du jury.

Que M. le Professeur R. MOHR à l'Institut Polytechnique de Lorraine soit assuré de ma profonde gratitude pour son amitié et pour avoir accepté d'examiner ce travail et de me faire l'honneur d'être membre du jury.

Je n'oublie pas le Professeur P. Bézier dont la contribution déterminante de pionnier dans le développement de la CFAO est universellement reconnue et dont les travaux restent pour moi une source irremplaçable d'inspiration et d'émulation. Je le remercie pour le très grand honneur qu'il me fait en acceptant de participer au jury.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble du personnel du CRIN, aux chercheurs, aux secrétaires, aux techniciens et en particulier à l'équipe RF-IA et à Madame Martine KUHLMANN qui a eu la gentillesse de mettre son bureau à ma disposition durant la préparation de ce travail.

Et, à Joseph DI MARTINO, mon ami de toujours, je dis un grand merci pour ses nombreuses séances de 'brain-storming' qui m'ont permis de mieux formuler mes idées.

Enfin, à ma famille qui a tant consenti et m'a tant soutenu, je dédie ce travail.

TABLE DES MATIERES

+++++

Table des matières

Introduction générale	1
 Partie I Transformations des courbes paramétriques polynomiales : Une approche unifiée	
 Chapitre 1 Présentation de l'étude	
Introduction	3
1. Formes paramétriques	3
2. Formes polynomiales	4
3. Opérations mathématiques courantes	5
3.1. Caractéristiques communes des opérations courantes	6
4. Objet de ce travail	6
5. Modèles de représentations de courbe étudiés	8
6. Huit choix classiques de fonctions de base	8
6.1. Formes Algébriques	9
6.1.1 Propriétés des $A_1\varphi_i$	9
6.2. Fonctions de Ball cubiques	11
6.2.1. Propriétés des $B_a\varphi_i$	11
6.3. Fonctions de Bernstein-Bézier cubiques	13
6.3.1. Propriétés des $B_b\varphi_i$	13
6.4. Fonctions de B-spline cubiques ou Fonctions cubiques de Riesenfeld	15
6.4.1. Propriétés des $B_s\varphi_i$	16
6.5. Fonctions de Hermite (aussi de Ferguson) cubique	19
6.5.1. Propriétés des $H_e\varphi_i$	19

6.6. Fonctions d'Overhauser	21
6.6.1. Propriétés des $_{Ov}\psi_i$	21
6.7. Fonctions de base de Taylor cubiques	23
6.7.1. Propriétés des $_{Tay}\psi_i$	23
6.8. Fonctions de Timmer cubiques	25
6.8.1. Propriétés des $_{Tim}\psi_i$	25
7. Triangle de Pascal et transformations linéaires paramétriques	27
Chapitre 2. Schémas Paramétriques Polynomiaux	34
Introduction	34
1. Spécification	34
1.1. Notion de schéma	34
1.2. Représentations de schéma	35
1.2.1. Forme vectorielle	35
1.2.2. Formes matricielles	36
1.2.3. Propriétés de la matrice \mathbf{R}	38
1.2.4. Choix d'une forme	45
2. Schéma de courbe	45
2.1. Deux décisions	45
2.2. Spécification de schéma de courbe	46
2.2.1. Expression du point courant	47
2.2.2. Intervalle normalisé et indicateurs de géométrie	49
2.3. Schéma de Bernstein-Bézier cubique	50
Conclusion	52

Chapitre 3. Groupes matriciels de transformation polynomiale	53
Introduction	53
1. Matrices de transformations homothétiques	54
2. Matrice binomiale et ses puissances banalisées	58
2.1. Etude de $f \cdot T_\alpha$ pour $\alpha = 0, 1$; définition de la matrice binomiale	60
2.1.1. Matrice binomiale et coefficients binomiaux	62
2.1.2. Propriétés élémentaires de \mathbf{G}	64
2.2. Généralisation : poursuite de l'étude de $f \cdot T_\alpha$	67
2.2.1. Puissance banalisée de \mathbf{G}	68
2.2.2. Définition de \mathbf{G}^α	70
2.2.3. Propriétés de \mathbf{G}^α	76
2.3. Groupe de translations	77
2.3.1. Conséquences immédiates	79
2.4. Transformations linéaires : solution générale	86
2.4.1. Identités remarquables	89
2.4.2. Propriétés de η	91
Conclusion	95
Chapitre 4. Matrice de Bernstein et matrice de Bézier	96
Introduction	96
1. Approximation de Bernstein	97
1.1. Matrice de Bernstein	99
1.2. Fonctions de Bernstein de degrés successifs	102
1.3. Huit décompositions canoniques de Bernstein(t)	111
1.3.1. Matrices rationnelles de Bernstein	117

2. Méthode UNISURF de Bézier	119
2.1. Propriétés de l'approximation de Bézier	124
2.2. Relations entre $B_{*,m}(t)$ et $\mathbb{B}_{*,m}(t)$	126
2.3. Fonctions de Bézier et fonction échelon-unité	129
2.3.1. Relation entre procédés de Bernstein et de Bézier	132
2.4. Famille de courbes de Bézier	134
Conclusion	139
Chapitre 5. Modèle de dérivation polynomiale : indicateurs de géométrie	141
Introduction	141
1. Polynôme dérivé	141
1.1. Propriétés de K	145
2. Dérivation des courbes paramétriques	159
2.1. Indicateurs de géométrie d'ordres supérieurs	160
2.1.1. Opérateur IG^α et un tableau fondamental pour l'analyse de courbe	163
2.2. Schéma cubique de Bernstein-Bézier	165
2.2.1. Conditions de raccordement de courbes cubiques de Bernstein-Bézier	166
2.3. Deux indicateurs spécifiques	168
2.3.1. Conditions de Cauchy	168
2.3.2. Symétrie par permutation par rapport à t et $t-1$	170
2.3.2.1. Caractérisation matricielle	171
3. Dérivation : modèle d'interaction concepteur	174
3.1. Matrices de dérivation et symétrie par permutation	179
Conclusion	180

Chapitre 6. Segmentation de courbes	182
Introduction	182
1. Bisegmentation : formulation du problème	182
1.1. Bisegmentation sur $[0, 1]$	187
1.1.2. Bisegmentation en $t_0 = 1/2$	189
1.1.3. Bisegmentation de schémas de Bernstein-Bézier en $t = 1/2$	190
1.1.4. Matrices de segmentation et symétrie par permutation	201
2. Segmentation multipoints : cas général	203
2.1. Segmentation multipoints à pas constant sur $[0, 1]$	205
2.1.2. Exemple de trisegmentation : courbe de Bernstein-Bézier cubique	206
Conclusion	209
Chapitre 7. Conversion de schémas et de représentations	211
Introduction	211
1. Conversion sur intervalles arbitraires	212
1.1. Notations et terminologie	212
1.2. Solution	213
1.3. g -schéma et h -schéma sur un même intervalle de paramètre	216
2. Relation entre conversion et segmentation	219
3. Base des schémas symétriques par permutation : aspects théoriques	222
3.1. Hypothèses	222
3.2. Terminologie	222
3.3. Objectifs poursuivis	223
3.4. Idée directrice	224
3.5. Choix d'un noyau S-I	224
3.5.1. Spécification intermédiaire	227

3.5.2.	Règles de calcul des matrices A_j , A_j^{-1} et $M_{j \rightarrow k}$ avec $j, k \neq ref$	227
3.5.3.	Construction de S-D : application de symétrie par permutation	228
3.5.4.	Codage et décodage de S-D : aspects algorithmiques	230
Conclusion	231
Transition entre partie I et partie I	231
Conclusion de la partie I	232
Partie II : Vers des nouvelles perspectives pratiques pour la CFAO.....		235
Chapitre 1. Analyse automatique de courbes : Une simulation sur neuf schémas classiques		236
1.1. Fonctions de lissage		237
1.2. Matrices caractéristiques		237
1.3. Vecteurs caractéristiques		238
1.4. Conditions aux bornes de la courbe canonique		239
1.5. Simulations		239
1.5.1. Schéma algébrique (Al)		240
1.5.2. Schéma de Ball cubique (Ba)		242
1.5.3. Schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)		244
1.5.4. Schéma de B-spline cubique (Bs)		246
1.5.5. Schéma de Hermite cubique (He)		248
1.5.6. Schéma modifié de Hermite cubique (mHe)		250
1.5.6.1. Préliminaire		251
1.5.6.2. Analyse du schéma modifié de Hermite cubique		254
1.5.7. Schéma cubique d'Overhauser (Ov)		256
1.5.8. Schéma de Taylor cubique (Tay)		258
1.5.9. Schéma de Timmer cubique (Tim)		260
1.6. Interprétation géométrique classiques des schémas étudiés		262
Conclusion		268
Chapitre 2 Relations entre paramètres homologues de six schémas classiques ..		270

Introduction	270
1. Conversion vers Ball Cubique	270
1.a. Inverse de sa matrice de lissage	270
1.b. Fonctions de lissage de Ball cubique (Ba)	271
1.1 Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)	271
1.1.1. Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique	271
1.1.2. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique	271
1.1.3. Matrice de passage $M_{Bé \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{Bé}$	271
1.1.4. Sommets de Ball exprimés en fonction des sommets de Bézier : $P_{Ba} = M_{Bé \rightarrow Ba} P_{Bé}$	272
1.1.5. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier exprimées dans la base de Ball : $\Phi_{Bé}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{Bé \rightarrow Ba}$	272
1.2. Schéma initial : schéma de B-spline cubique (Bs)	272
1.2.1. Matrice de lissage de B-spline cubique ABs	272
1.2.2. Fonctions de lissage de B-spline cubique	273
1.2.3. Matrice de passage $M_{Bs \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{Bs}$	273
1.2.4. Sommets de Ball exprimés en fonction des sommets de B-spline cubique : $P_{Ba} = M_{Bs \rightarrow Ba} P_{Bs}$	273
1.2.5. Fonctions de lissage de B-spline cubique exprimées dans la base de Ball : $\Phi_{Bs}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{Bs \rightarrow Ba}$	273
1.3. Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)	274
1.3.1. Matrice de lissage de Hermite cubique	274
1.3.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique	274
1.3.3. Matrice de passage $M_{He \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{He}$	274
1.3.4. Sommets de Ball exprimés en fonction des sommets de Hermite cubique : $P_{Ba} = M_{He \rightarrow Ba} P_{He}$	274
1.3.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans	

la base de Ball : $\Phi_{He}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{He \rightarrow Ba}$	275
1.4. Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)	275
1.4.1. Matrice de lissage de Hermite cubique modifié	275
1.4.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié	275
1.4.3. Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{mHe}$	276
1.4.4. Sommets de Ball exprimés en fonction des sommets de Hermite modifié : $P_{Ba} = M_{mHe \rightarrow Ba} P_{mHe}$	276
1.4.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de Ball : $\Phi_{mHe}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{mHe \rightarrow Ba}$	276
1.5. Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)	277
1.5.1. Matrice de lissage de Timmer cubique	277
1.5.2. Fonctions de lissage de Timmer cubique	277
1.5.3. Matrice de passage $M_{Tim \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{Tim}$	277
1.5.4. Sommets de Ball exprimés en fonction des sommets de Timmer: $P_{Ba} = M_{Tim \rightarrow Ba} P_{Tim}$	277
1.5.5. Fonctions de lissage de Timmer exprimées dans la base de Ball $\Phi_{Tim}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{Tim \rightarrow Ba}$	278
1.6. Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)	278
1.6.1. Matrice de lissage d'Overhauser cubique	278
1.6.2. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique	278
1.6.3. Matrice de passage $M_{Ov \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{Tim}$	279
1.6.4. Sommets de Ball exprimés en fonction des sommets de Timmer : $P_{Ba} = M_{Tim \rightarrow Ba} P_{Tim}$	279
1.6.5. Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base de Ball : $\Phi_{Tim}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{Tim \rightarrow Ba}$	279
2. Conversion vers Bernstein-Bézier cubique	280

2.a. Inverse de sa matrice de lissage	280
2.b. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique	280
2.1. Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)	280
2.1.1. Matrice de lissage de Ball cubique	280
2.1.2. Fonctions de lissage de Ball cubique	280
2.1.3. Matrice de passage $M_{Ba \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{Ba}$	280
2.1.4. Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets de Ball : $P_{B\acute{e}} = M_{Ba \rightarrow B\acute{e}} P_{Ba}$	281
2.1.5. Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base de Bernstein-Bézier : $\Phi_{Ba}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{Ba \rightarrow B\acute{e}}$	281
2.2. Schéma initial : schéma de B-spline cubique (Bs)	281
2.2.1. Matrice de lissage de B-spline cubique	281
2.2.2. Fonctions de lissage de B-spline cubique	281
2.2.3. Matrice de passage $M_{Bs \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{Bs}$	282
2.2.4. Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets de B-spline : $P_{B\acute{e}} = M_{Bs \rightarrow B\acute{e}} P_{Bs}$	282
2.2.5. Fonctions de lissage de B-spline cubique exprimées dans la base de Bernstein-Bézier : $\Phi_{Bs}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{Bs \rightarrow B\acute{e}}$	282
2.3. Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)	282
2.3.1. Matrice de lissage de Hermite cubique	282
2.3.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique	283
2.3.3. Matrice de passage $M_{He \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{He}$	283
2.3.4. Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets de Hermite : $P_{B\acute{e}} = M_{He \rightarrow B\acute{e}} P_{He}$	283
2.3.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans la base de Bernstein-Bézier : $\Phi_{He}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{He \rightarrow B\acute{e}}$	283
2.4. Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)	283

2.4.1.	Matrice de lissage de Hermite cubique modifié	283
2.4.2.	Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié	284
2.4.3.	Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{mHe}$	284
2.4.4.	Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets de Hermite : $P_{B\acute{e}} = M_{mHe \rightarrow B\acute{e}} P_{mHe}$	284
2.4.5.	Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de Bernstein-Bézier : $\Phi_{mHe}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{mHe \rightarrow B\acute{e}}$	284
2.5.	Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)	285
2.5.1.	Matrice de lissage d'Overhauser cubique	285
2.5.2.	Fonctions de lissage d'Overhauser cubique	285
2.5.3.	Matrice de passage $M_{Ov \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{Ov}$	285
2.5.4.	Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets d'Overhauser : $P_{B\acute{e}} = M_{Ov \rightarrow B\acute{e}} P_{Ov}$	285
2.5.5.	Fonctions de lissage d'Overhauser cubique exprimées dans la base de Bernstein-Bézier : $\Phi_{Ov}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{Ov \rightarrow B\acute{e}}$	285
2.6.	Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)	286
2.6.1.	Matrice de lissage de Timmer cubique	286
2.6.2.	Fonctions de lissage de Timmer cubique	286
2.6.3.	Matrice de passage $M_{Tim \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{Tim}$	286
2.6.4.	Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets de Timmer : $P_{B\acute{e}} = M_{Tim \rightarrow B\acute{e}} P_{Tim}$	286
2.6.5.	Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base de Bernstein-Bézier : $\Phi_{Tim}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{Tim \rightarrow B\acute{e}}$	286
3.	Conversion vers B-spline cubique	287
3.a.	Inverse de sa matrice de lissage	287
3.b.	Fonctions de lissage de B-spline cubique	287
3.1.	Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)	287

3.1.1.	Matrice de lissage de Ball cubique	287
3.1.2.	Fonctions de lissage de Ball cubique	287
3.1.3.	Matrice de passage $M_{Ba \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{Ba}$	287
3.1.4.	Sommets de B-spline exprimés en fonction des sommets de Ball : $P_{Bs} = M_{Ba \rightarrow Bs} P_{Ba}$	288
3.1.5.	Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base de B-spline : $\Phi_{Ba}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{Ba \rightarrow Bs}$	288
3.2.	Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)	288
3.2.1.	Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique	288
3.2.2.	Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique	288
3.2.3.	Matrice de passage $M_{B\acute{e} \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{B\acute{e}}$	288
3.2.4.	Sommets de B-spline exprimés en fonction des sommets de Bézier : $P_{Bs} = M_{B\acute{e} \rightarrow Bs} P_{B\acute{e}}$	289
3.2.5.	Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique exprimées dans la base de B-spline : $\Phi_{B\acute{e}}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{B\acute{e} \rightarrow Bs}$	289
3.3.	Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)	289
3.3.1.	Matrice de lissage de Hermite cubique	289
3.3.2.	Fonctions de lissage de Hermite cubique	289
3.3.3.	Matrice de passage $M_{He \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{He}$	289
3.3.4.	Sommets de B-spline exprimés en fonction des sommets de Hermite : $P_{Bs} = M_{He \rightarrow Bs} P_{He}$	290
3.3.5.	Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans la base de B-spline : $\Phi_{He}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{He \rightarrow Bs}$	290
3.4.	Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)	290
3.4.1.	Matrice de lissage de Hermite cubique modifié	290
3.4.2.	Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié	290
3.4.3.	Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{mHe}$	290
3.4.4.	Sommets de B-spline exprimés en fonction des sommets	

	de Hermite modifié : $P_{Bs} = M_{mHe \rightarrow Bs} P_{mHe}$	291
3.4.5.	Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de B-spline : $\Phi_{mHe}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{mHe \rightarrow Bs}$	291
3.5.	Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)	291
3.5.1.	Matrice de lissage d'Overhauser cubique	291
3.5.2.	Fonctions de lissage d'Overhauser cubique	291
3.5.3.	Matrice de passage $M_{Ov \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{Ov}$	291
3.5.4.	Sommets de B-spline exprimés en fonction des sommets d'Overhauser : $P_{Bs} = M_{Ov \rightarrow Bs} P_{Ov}$	292
3.5.5.	Fonctions de lissage d'Overhauser cubique exprimées dans la base de B-spline : $\Phi_{Ov}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{Ov \rightarrow Bs}$	292
3.6.	Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)	292
3.6.1.	Matrice de lissage de Timmer cubique	292
3.6.2.	Fonctions de lissage de Timmer cubique	292
3.6.3.	Matrice de passage $M_{Tim \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{Tim}$	292
3.6.4.	Sommets de B-spline exprimés en fonction des sommets de Timmer : $P_{Bs} = M_{Tim \rightarrow Bs} P_{Tim}$	293
3.6.5.	Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base de B-spline : $\Phi_{Tim}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{Tim \rightarrow Bs}$	293
4.	Conversion vers Hermite cubique	293
4.a.	Inverse de sa matrice de lissage	293
4.b	Fonctions de lissage de Hermite cubique	293
4.1.	Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)	294
4.1.1.	Matrice de lissage de Ball cubique	294
4.1.2.	Fonctions de lissage de Ball cubique	294
4.1.3.	Matrice de passage $M_{Ba \rightarrow He} = A_{He}^{-1} * A_{Ba}$	294

4.1.4.	Sommets de Hermite exprimés en fonction des sommets de Ball : $P_{He} = M_{Ba \rightarrow He} P_{Ba}$	294
4.1.5.	Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base de Hermite $\Phi_{Ba}(t) = \Phi_{He}(t) M_{Ba \rightarrow He}$	294
4.2.	Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)	295
4.2.1.	Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique	295
4.2.2.	Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique	295
4.2.3.	Matrice de passage $M_{Bé \rightarrow He} = A_{He}^{-1} * A_{Bé}$	295
4.2.4.	Sommets de Hermite exprimés en fonction des sommets de Bézier : $P_{He} = M_{Bé \rightarrow He} P_{Bé}$	295
4.2.5.	Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique exprimées dans la base de Hermite : $\Phi_{Bé}(t) = \Phi_{He}(t) M_{Bé \rightarrow He}$	295
4.3.	Schéma initial : schéma de B-spline cubique (Bs)	296
4.3.1.	Matrice de lissage de B-spline cubique	296
4.3.2.	Fonctions de lissage de B-spline cubique	296
4.3.3.	Matrice de passage $M_{Bs \rightarrow He} = A_{He}^{-1} * A_{Bs}$	296
4.3.4.	Sommets de Hermite exprimés en fonction des sommets de B-spline : $P_{He} = M_{Bs \rightarrow He} P_{Bs}$	296
4.3.5.	Fonctions de lissage de B-spline cubique exprimées dans la base de Hermite : $\Phi_{Bs}(t) = \Phi_{He}(t) M_{Bs \rightarrow He}$	296
4.4.	Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)	297
4.4.1.	Matrice de lissage d'Overhauser cubique	297
4.4.2.	Fonctions de lissage d'Overhauser cubique	297
4.4.3.	Matrice de passage $M_{Ov \rightarrow He} = A_{He}^{-1} * A_{Ov}$	297
4.4.4.	Sommets de Hermite exprimés en fonction des sommets d'Overhauser : $P_{He} = M_{Ov \rightarrow He} P_{Ov}$	297

4.4.5.	Fonctions de lissage d'Overhauser cubique exprimées dans la base de Hermite : $\Phi_{Ov}(t) = \Phi_{He}(t) M_{Ov \rightarrow He}$	297
4.5.	Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)	298
4.5.1.	Matrice de lissage de Timmer cubique	298
4.5.2.	Fonctions de lissage de Timmer cubique	298
4.5.3.	Matrice de passage $M_{Tim \rightarrow He} = A_{He}^{-1} * A_{Tim}$	298
4.5.4.	Sommets de Hermite exprimés en fonction des sommets de Timmer : $P_{He} = M_{Tim \rightarrow He} P_{Tim}$	298
4.5.5.	Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base de Hermite : $\Phi_{Tim}(t) = \Phi_{He}(t) M_{Tim \rightarrow He}$	298
5.	Conversion vers Overhauser cubique	299
5.a.	Inverse de matrice de lissage	299
5.b.	Fonctions de lissage d'Overhauser cubique	299
5.1.	Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)	299
5.1.1.	Matrice de lissage de Ball cubique	299
5.1.2.	Fonctions de lissage de Ball cubique	299
5.1.3.	Matrice de passage $M_{Ba \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{Ba}$	299
5.1.4.	Sommets d'Overhauser exprimés en fonction des sommets de Ball : $P_{Ov} = M_{Ba \rightarrow Ov} P_{Ba}$	300
5.1.5.	Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base d'Overhauser : $\Phi_{Ba}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{Ba \rightarrow Ov}$	300
5.2.	Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)	302
5.2.1.	Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique	300
5.2.2.	Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique	300
5.2.3.	Matrice de passage $M_{Bé \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{Bé}$	300
5.2.4.	Sommets d'Overhauser exprimés en fonction des sommets de Bézier : $P_{Ov} = M_{Bé \rightarrow Ov} P_{Bé}$	301

5.2.5.	Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique exprimées dans la base de Overhauser : $\Phi_{Bé}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{Bé \rightarrow Ov}$	301
5.3.	Schéma initial : schéma de B-spline (Bs)	301
5.3.1.	Matrice de lissage de B-spline	301
5.3.2.	Fonctions de lissage de B-spline	301
5.3.3.	Matrice de passage $M_{Bs \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{Bs}$	301
5.3.4.	Sommets d'Overhauser exprimés en fonction des sommets de B-pline : $P_{Ov} = M_{Bs \rightarrow Ov} P_{Bs}$	302
5.3.5.	Fonctions de lissage de B-spline exprimées dans la base d'Overhauser : $\Phi_{Bs}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{Bs \rightarrow Ov}$	302
5.4.	Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)	302
5.4.1.	Matrice de lissage de Hermite cubique	302
5.4.2.	Fonctions de lissage de Hermite cubique	302
5.4.3.	Matrice de passage $M_{He \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{He}$	302
5.4.4.	Sommets d'Overhauser exprimés en fonction des sommets de Hermite : $P_{Ov} = M_{He \rightarrow Ov} P_{He}$	303
5.4.5.	Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans la base d'Overhauser : $\Phi_{He}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{He \rightarrow Ov}$	303
5.5.	Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)	303
5.5.1.	Matrice de lissage de Hermite cubique modifié	303
5.5.2.	Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié	303
5.5.3.	Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{mHe}$	303
5.5.4.	Sommets d'Overhauser exprimés en fonction des sommets de Hermite modifié : $P_{Ov} = M_{mHe \rightarrow Ov} P_{mHe}$	304
5.5.5.	Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de Overhauser : $\Phi_{mHe}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{mHe \rightarrow Ov}$	304

5.6. Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)	304
5.6.1. Matrice de lissage de Timmer cubique	304
5.6.2. Fonctions de lissage de Timmer cubique	304
5.6.3. Matrice de passage $M_{Tim \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{Tim}$	304
5.6.4. Sommets d'Overhauser exprimés en fonction des sommets de Timmer : $P_{Ov} = M_{Tim \rightarrow Ov} P_{Tim}$	305
5.6.5. Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base d'Overhauser : $\Phi_{Tim}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{Tim \rightarrow Ov}$	305
6. Conversion vers Timmer cubique	305
6.a. Inverse de sa matrice de lissage	305
6.b. Fonctions de lissage de Timmer cubique	306
6.1. Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)	306
6.1.1. Matrice de lissage de Ball cubique	306
6.1.2. Fonctions de lissage de Ball cubique	306
6.1.3. Matrice de passage $M_{Ba \rightarrow Tim} = A_{Tim}^{-1} * A_{Ba}$	306
6.1.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction des sommets de Ball : $P_{Tim} = M_{Ba \rightarrow Tim} P_{Ba}$	306
6.1.5. Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base de Timmer : $\Phi_{Ba}(t) = \Phi_{Tim}(t) M_{Ba \rightarrow Tim}$	306
6.2. Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)	307
6.2.1. Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique	307
6.2.2. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique	307
6.2.3. Matrice de passage $M_{Bé \rightarrow Tim} = A_{Tim}^{-1} * A_{Bé}$	307
6.2.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction des sommets de Bézier : $P_{Tim} = M_{Bé \rightarrow Tim} P_{Bé}$	307
6.2.5. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique exprimées dans la base de Timmer : $\Phi_{Bé}(t) = \Phi_{Tim}(t) M_{Bé \rightarrow Tim}$	308

6.3. Schéma initial : schéma de B-spline (Bs)	308
6.3.1. Matrice de lissage de B-spline cubique	308
6.3.2. Fonctions de lissage de B-spline	308
6.3.3. Matrice de passage $M_{Bs \rightarrow Tim} = A_{Tim}^{-1} * A_{Bs}$	308
6.3.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction des sommets de B-spline : $P_{Tim} = M_{Bs \rightarrow Tim} P_{Bs}$	308
6.3.5. Fonctions de lissage de B-spline exprimées dans la base de Timmer : $\Phi_{Bs}(t) = \Phi_{Tim}(t) M_{Bs \rightarrow Tim}$	309
6.4. Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)	309
6.4.1. Matrice de lissage de Hermite cubique	309
6.4.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique	309
6.4.3. Matrice de passage $M_{He \rightarrow Tim} = A_{Tim}^{-1} * A_{He}$	309
6.4.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction des sommets de Hermite : $P_{Tim} = M_{He \rightarrow Tim} P_{He}$	309
6.4.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans la base de Timmer : $\Phi_{He}(t) = \Phi_{Tim}(t) M_{He \rightarrow Tim}$	310
6.5. Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)	310
6.5.1. Matrice de lissage de Hermite cubique modifié	310
6.5.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié	310
6.5.3. Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow Tim} = A_{Tim}^{-1} * A_{mHe}$	310
6.5.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction des sommets de Hermite modifié : $P_{Tim} = M_{mHe \rightarrow Tim} P_{mHe}$	310
6.5.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de Timmer : $\Phi_{mHe}(t) = \Phi_{Tim}(t) M_{mHe \rightarrow Tim}$	311
6.6. Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)	311
6.6.1. Matrice de lissage d'Overhauser cubique	311

6.6.2.	Fonctions de lissage d'Overhauser cubique	311
6.6.3.	Matrice de passage $M_{Ov \rightarrow Tim} = A_{Tim}^{-1} * A_{Ov}$	311
6.6.4.	Sommets de Timmer exprimés en fonction des sommets d'Overhauser $P_{Tim} = M_{Ov \rightarrow Tim} P_{Ov}$	311
6.6.5.	Fonctions de lissage d'Overhauser exprimées dans la base de Timmer : $\Phi_{Ov}(t) = \Phi_{Tim}(t) M_{Ov \rightarrow Tim}$	312
Chapitre 3 Base de six schémas cubiques classiques		313
Introduction		313
1.	Schémas accessibles	313
1.1.	Nombre de paramètres caractéristiques	313
1.2.	Typologie des composantes des matrices caractéristiques	313
1.3.	Choix de schéma de référence (ref)	314
1.4.	Spécification intermédiaire	314
1.4.1.	Pour changer schéma de référence	314
1.4.2.	Pour ajouter un nouveau schéma à la base	315
1.5.	Spécification définitive : algorithme de codage	315
2.	Décodage des paramètres caractéristiques	317
2.1.	Typologie de paramètres et d'opérations d'accès	317
2.2.	Requêtes et accès de base	318
2.3.	Retrouver la représentation externe	319
2.3.1.	Procédé de construction	319
2.3.2.	Exemple 1	321
2.4.	Paramètres de Hermite classique : décodage	324
2.4.1.	Interprétation géométrique de T	326

2.5.	Modèle d'interaction entre REP et programme d'application	328
Conclusion		328
Perspectives, critiques et conclusion générale		239
Bibliographie		337
Annexes		343

INTRODUCTION GENERALE

+++++

INTRODUCTION GENERALE

Nous présentons dans ce mémoire une approche de transformations de courbes paramétriques polynomiales reposant sur une nouvelle lecture du théorème binomial vu comme la composition d'une fonction polynomiale et d'une translation paramétrique.

Cette approche est caractérisée par le rôle explicite et incontournable joué par le "triangle" de Pascal et ses puissances banalisées dans l'évaluation, la dérivation, la segmentation et la conversion de représentations des courbes paramétriques polynomiales.

Il s'avère d'une part que les fonctions classiques de Bernstein-Bézier, qui jouent un rôle éminemment important en CFAO, dérivent presque directement des puissances banalisées du "triangle" de Pascal. D'autre part, l'inverse de ce même "triangle" modélise le calcul des différences finies, ouvrant ainsi la possibilité de dédier un processeur spécialisé à cette dernière tâche.

Les règles de calcul que sous-tend cette théorie, et qui d'ailleurs se généralisent aisément au corps commutatif \mathbb{C} , sont très simples et évitent notamment les longues manipulations directes des coefficients binomiaux. Ces manipulations sont souvent remplacées par de simples additions des exposants des puissances banalisées du "triangle" de Pascal. Celles-ci sont calculées à l'aide d'une généralisation naturelle de la récurrence binomiale classique.

Grâce à ce "triangle" et à ses puissances banalisées, on peut associer à tout point d'une courbe paramétrique polynomiale un opérateur matriciel (cf. §2., chap. 5, partie I) dont les lignes permettent de caractériser entièrement le point considéré (Annexes IX et X). On aboutit ainsi à un opérateur fort commode pour le calcul de trajectoires des machines-outils destinées à réaliser le tracé des courbes et à sculpter des surfaces complexes.

En s'appuyant toujours sur ce même opérateur, on peut d'une part cerner rapidement les qualités géométriques d'une représentation paramétrique polynomiale donnée ; d'autre part, on peut réaliser un logiciel d'éditeur de formules pour l'annotation des points caractéristiques de tracés de courbes et, par extension, de surfaces.

On peut également automatiser la recherche des conditions de raccordement à la jonction des

courbes définies par morceaux en s'appuyant sur deux spécialisations de cet opérateur.

Ainsi, d'abord sur le plan théorique, la nouvelle lecture du théorème binomial permet de dégager une vue homogène de la transcription des formes par des fonctions paramétriques polynomiales et conduit à une réduction importante des manipulations algébriques qui habituellement accompagnent la transformation des expressions polynomiales.

Ensuite, sur le plan pratique, elle conduit à un ensemble d'opérateurs de base partagés par une classe importante de systèmes de transcription de courbes et de surfaces, de sorte que l'on peut envisager l'intégration de plusieurs systèmes de transcription dans une même base pour accroître les possibilités et la souplesse des systèmes de CFAO. Et pour tout couronner, elle fournit un opérateur qui facilite le calcul de la trajectoire des machines-outils à commande numérique dont la finalité est de réaliser la surface qu'exprime la transcription mathématique.

L'exposé comprend deux parties. La première étudiera la transformation des courbes paramétriques polynomiales à la lumière de la nouvelle interprétation du théorème binomial tandis que dans la deuxième, on envisagera les perspectives pratiques qui en découlent.

PARTIE I

++++

Transformations des courbes paramétriques polynomiales

Une approche unifiée

++++

++++
CHAPITRE 1

++++
Présentation de l'étude

CHAPITRE 1

Présentation de l'étude

Introduction

Les méthodes de définition numérique de courbes et de surfaces développées notamment dans les industries de construction d'automobile, d'avions et des bateaux [Gordon-74, p.293] [Mortenson-85, p.7] destinées à remplacer des procédés anciens, essentiellement manuels et fondés principalement sur la géométrie descriptive [Gasson-83, pp.1- 41] emploient, à quelques exceptions près, des représentations mathématiques à base de fonctions paramétriques polynomiales à coefficients vectoriels [Bézier-77, pp.15, 177] [Bézier-81, p.207] [Bézier-86, p.14]. Le paramètre de ces fonctions varie normalement dans l'intervalle $[0, 1]$.

Parmi les systèmes les plus connus et les plus influents, on peut citer les systèmes de Ferguson [Ferguson-64] [Bézier-77] [Bézier-86] [Mortenson-85, p. 168], de Coons [Coons-67] [Bézier-77] [Bézier-86] ainsi que le système UNISURF de Bézier [Bézier-68][Forrest-71][Chemla-71] [Bézier-72] [Bézier-77] [Bézier-86].

Les courbes et les surfaces d'emploi courant dans les industries citées ci-dessus sont souvent de nature complexe et doivent répondre parfois à des exigences esthétiques, parfois à des contraintes des milieux fluides [Chemla-71] [Véron-73] [Bézier-81][Bézier-86]. Aussi leur définition nécessite-t-elle que l'on procède par morceaux pour ensuite raccorder les morceaux le long de leurs frontières communes à un ordre de continuité qui répond le mieux aux contraintes d'utilisation [Bézier-77][Newman-79, p.313]. Devant les exigences de cette démarche de définition par morceaux, les représentations analytiques classiques se révèlent insuffisantes [Véron-73].

1. Formes paramétriques

L'emploi presque exclusif des représentations paramétriques s'explique par leurs qualités :

- elles assurent l'indépendance de formes par rapport au système d'axe de coordonnées choisi pour les exprimer [Forrest-71, p.71] [Bézier-86, p. 15] [Newman-79, p.311] ;
- elles admettent une définition des formes fermées ayant des tangentes "verticales" sans poser de problème d'ordre analytique [Dube-79, p.287] [Mortenson-85, p.25] ;

- elles admettent un plus grand degré de liberté pour le contrôle de la forme d'une courbe (resp. surface) que ne le font les représentations non paramétriques.
- elles fournissent un cadre propice pour une définition interactive par morceaux. En effet :
 - pour limiter une courbe (resp. surface), il suffit de limiter l'intervalle de variation de son paramètre (resp. ses paramètres),
 - imposer des conditions de continuité le long des frontières communes se ramène à une paramétrisation appropriée de la représentation des morceaux à raccorder,
 - évaluer les points d'une courbe ou d'une surface se ramène à une suite de substitutions car à une valeur des (resp. du) paramètres correspond un point unique de la surface (resp. courbe) [Chemla-71, p. 5] ;
- elles facilitent les transformations géométriques ainsi que les modifications ;

Cette liste, bien que non exhaustive (cf. [Mortenson-85, pp.25-27]), met suffisamment en relief l'intérêt de la représentation paramétrique.

2. Formes polynomiales

On peut évoquer trois raisons pour justifier la préférence accordée aux fonctions polynomiales :

1. elles sont compatibles avec les caractéristiques techniques de l'ordinateur : en effet, les polynômes ont une représentation finie et sont faciles à stocker, à manipuler et à évaluer [Schumaker-81, chap. 1] ;
2. elles ont plusieurs qualités analytiques et algébriques intéressantes : les polynômes sont des fonctions continues, leurs dérivées et intégrales sont aussi des polynômes, les matrices engendrées lors de leur manipulation sont souvent non singulières. Toutefois, on se limite à n'employer que des polynômes de degré faible pour éviter de fâcheux problèmes d'oscillation intempestive des polynômes de degré élevé [idem]. Dans la plupart des applications courantes, on monte jusqu'au degré 3 et si l'on doit tenir compte des contraintes des milieux des fluides, on dépasse rarement le degré 5 ou 6.

3. elles fournissent une grande variété de formes.

Le choix de fonctions polynomiales de base (cf. chap. suivant) obéit à plusieurs motivations qui portent notamment sur les contraintes de calcul, d'affichage et de dialogue entre le concepteur et le modèle mathématique. On cherche souvent que ces fonctions :

- facilitent les modifications ; elles doivent notamment limiter la zone d'influence des modifications locales [Newman-79, p.312] et admettre une formulation aisée de celles-ci par des paramètres qui ont une signification immédiate pour le concepteur [Bézier-86, p.30] ;
- assurent l'invariance de forme lors des transformations de rotation et de translation [Newman-79, pp.311-312] ;
- admettent une expression aisée de conditions de raccordement le long de frontière commune des morceaux ;
- doivent admettre une représentation de courbe (resp. surface) qui suggère l'allure générale de la courbe résultante et permette d'anticiper l'effet des modifications éventuelles [Chemla-71, p. 8] ;
- permettent une esquisse rapide des courbes [Timmer-80] [Boëhm-82] ;
- admettent des formes géométriques variées et facilitent le traitement de cas dégénérés éventuels.

3. Opérations mathématiques courantes

L'analyse et la transformation des courbes (resp. surfaces) paramétriques polynomiales reposent sur un certain nombre d'opérations mathématiques courantes, parmi lesquelles :

- a. le calcul des dérivées en un point donné dans un souci, par exemple, de caractériser la géométrie locale et d'en déduire l'expression des contraintes (e.g. orientation et trajectoire de l'axe d'une machine-outil destinée à réaliser la forme [Bézier-72, p.192] [Faux-85, chap.4]) ;
- b. le calcul d'intégrale pour déterminer des caractéristiques métriques d'un arc de courbe ou d'un carreau de surface ;

- c. la génération de séquences de points, nécessaires également pour la définition de la trajectoire éventuelle d'une machine-outil ou pour affichage sur une périphérique de visualisation ;
- d. la subdivision d'un arc de courbe (resp. d'un morceau de surface) en sous-segments pour une éventuelle modification locale ou pour résoudre par itération des problèmes d'intersection des formes [Cohen-80] [Lane-80] [Carlson-82] [Peng-84] [Koparkar-84];
- e. l'extension d'une courbe (resp. surface) au-delà de son intervalle paramétrique initial de définition ;
- f. le passage d'une représentation à une représentation équivalente qui soit mieux adaptée au traitement en cours, ou bien qui soit plus familière pour l'utilisateur [Boëhm-82].

3.1. Caractéristiques communes des opérations courantes

Excepté le calcul d'intégrale, chacune des opérations énumérées ci-dessus peut être ramenée à un problème de transformation paramétrique linéaire. Les fonctions de base étant des polynômes, cela revient essentiellement à un problème d'application du théorème binomial.

4. Objet de ce travail

Etant donné l'importance des transformations paramétriques linéaires et la pratique quasi universelle d'exprimer la représentation des courbes et des surfaces par des modèles matriciels et de formuler leur transformation et leur manipulation aussi par des opérateurs matriciels, il semble alors raisonnable de rechercher des formulations matricielles également pour le théorème binomial. Tel est un premier objectif de ce travail.

De telles formulations devront conduire à une grande économie d'effort notamment dans un domaine où l'on est sans cesse amené à manier de nombreux polynômes à la fois.

Le deuxième objectif est de revoir les problèmes de dérivation, de segmentation et de changement de représentation de courbe à la lumière des modèles matriciels du théorème binomial sans privilégier la spécificité du choix de fonctions de base (cf. chap. suivant, §1.1).

Un troisième objectif est motivé par le souci de formaliser la recherche automatique des

qualités géométriques intrinsèques à un choix arbitraire de fonctions de base. A l'aide de quelques paramètres simples que nous appellerons *indicateurs de géométrie*, nous souhaitons qu'un système automatique puisse, par exemple, retrouver tout seul les conditions géométriques aux limites et aux points caractéristiques de l'arc de courbe associé à tout choix de fonctions de base.

D'une part, ces indicateurs de géométrie permettront l'automatisation de la recherche de conditions de raccordement entre morceaux de courbes (resp. surfaces).

D'autre part, nous sommes convaincu que les systèmes futurs de CFAO devront de plus en plus intégrer l'expertise du styliste-projecteur en s'associant à la démarche des systèmes experts. Les indicateurs de géométrie serviront alors à créer les *bases de faits géométriques* propres à chaque représentation et à guider ensuite l'utilisateur non-expert.

Ce travail comprend deux étapes de développement.

La première étape vise à découvrir ces indicateurs de géométrie que l'on pourra associer à l'ensemble des représentations paramétriques polynomiales. Elle vise également à découvrir pour chacun des trois problèmes énumérés ci-dessus un modèle standard de solution qui dépend très peu du choix de fonctions de base. Chaque solution devra être exprimée sous forme matricielle afin de favoriser sa traduction algorithmique ultérieure sur ordinateur. Cette étape correspond donc à une phase d'étude théorique.

La deuxième étape vise à soumettre ensuite l'ensemble des modèles dégagés dans l'étape précédente à une recherche de meilleure formulation algorithmique dans un système regroupant plusieurs choix de fonctions de base.

Ce mémoire rend compte principalement des résultats obtenus pour la phase théorique, bien que tout au long, nous proposerons et analyserons des formulations algorithmiques de certains aspects des solutions. En nous plaçant dans l'optique d'intégrer plusieurs représentations dans un même système, il nous paraît nécessaire de développer d'abord une vue théorique unifiée pour les trois opérations de base employées sans cesse pour transformer et analyser courbes et surfaces.

Face au nombre illimité de choix de fonctions de base, seule une approche unifiée qui s'affranchisse du choix spécifique des fonctions de base peut conduire à des solutions générales. Ainsi, pour la recherche systématique d'indicateurs de géométrie évoquée

ci-dessus et qui relève essentiellement de la dérivation paramétrique, une solution idéale serait de disposer d'un opérateur standard (voir opérateur IG^x , §2.1.1, chap. 5, part.I) qui permettrait d'analyser et de retrouver facilement les qualités géométriques associées à chaque choix de fonctions de base.

5. Modèles de représentations de courbe étudiés

Cette étude porte sur les représentations d'arc de courbes qui peuvent se mettre sous une des trois formes suivantes :

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t) P_i \quad a \leq t \leq b \quad (1)$$

$$C(t) = \Phi(t) P \quad a \leq t \leq b \quad (2)$$

$$C(t) = v_t A P \quad a \leq t \leq b \quad (3)$$

où :

$P_i \in \mathbb{R}^p$ ($p = 2$ pour les courbes planes ; $p = 3$ pour les courbes gauches),

$P = {}^t(P_0 \ P_1 \ \dots \ P_n)$,

$\varphi_i(t)$ sont les fonctions polynomiales de base,

$\Phi(t) = (\varphi_0(t) \ \varphi_1(t) \ \dots \ \varphi_n(t)) = v_t A$,

$v_t = (1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^n)$,

A est la matrice de lissage ; ses vecteurs colonnes sont les vecteurs coefficients des $\varphi_i(t)$ correspondants.

Nous employerons la forme (3). Cette forme a l'avantage d'indiquer clairement que l'effet de toute transformation paramétrique revient au fond à la transformation du vecteur v_t .

6. Huit choix classiques de fonctions de base

Nous allons présenter un résumé succinct des principales propriétés de huit choix courants de fonctions polynomiales de base. Celles-ci nous serviront de test. Sans que cela ne soustraie rien à la généralité des modèles de calcul proposés, nous nous sommes principalement limité aux représentations cubiques définies sur l'intervalle normalisé $[0, 1]$.

6.1. Formes Algébriques

[Timmer-80] [Lewis-81][Ball-82, p.202] [Mortenson-85, p.34].

Les fonctions de base associées à une représentation algébrique de degré n sont :

$${}_{A1}\varphi_i(t) = t^i ; \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Le point courant de l'arc de courbe s'écrit :

$$C(t) = \sum_{i=0}^n t^i P_i$$

6.1.1 Propriétés des ${}_{A1}\varphi_i$

On vérifie aisément que la dérivée d'ordre k des ${}_{A1}\varphi_i$, pour $k = 0, 1, \dots, n$, est donnée par :

$$\begin{aligned} {}_{A1}\varphi_i^{(k)}(t) &= \frac{i!}{(i-k)!} t^{i-k} && \text{pour } k \leq i \\ &= 0 && \text{pour } k > i \end{aligned}$$

Par conséquent :

$${}_{A1}\varphi_i^{(k)}(0) = \frac{i!}{(i-k)!} \delta_i^k \quad \text{où } \delta_i^k \text{ est le symbole Kronecker}$$

et :

$$\begin{aligned} {}_{A1}\varphi_i^{(k)}(1) &= \frac{i!}{(i-k)!} && \text{pour } k \leq i \\ &= 0 && \text{pour } k > i \end{aligned}$$

de sorte que :

$$C^{(k)}(0) = k! P_k$$

et que :

$$C^{(k)}(1) = \sum_{i=k}^n \frac{i!}{(i-k)!} P_i$$

L'intérêt principal de ce choix de fonctions de base est qu'il fournit une représentation de courbe qui est la mieux adaptée au traitement sur ordinateur [Bézier-72, p.121] [Bézier-86, p.87]. Son plus grand défaut réside dans l'impossibilité d'anticiper la forme de courbe à partir du polygone déterminé par les coefficients vectoriels P_i [Timmer-80, p.25] [Boëhm-82, p.202]. De plus, cette représentation ne facilite pas les modifications [Mortenson-85, p.34].

Il convient toutefois de reconnaître que tout opérateur exprimant pour la représentation algébrique, l'effet d'une transformation paramétrique donnée est le même opérateur qui traduit cet effet pour toute autre représentation de même degré et sans aucune modification supplémentaire. Pour voir cela, exprimons le point courant de l'arc de courbe sous la forme (3) ci-dessus, c'est-à-dire :

$$C(t) = v_t P$$

car le choix de $A_i \varphi_i(t) = t^i$ entraîne que la matrice A soit confondue avec la matrice identité I de même format.

Supposons ensuite que le paramètre t subisse une transformation notée $\omega(t)$. Cela conduit à la transformation du point courant en :

$$C(\omega(t)) = v_{\omega(t)} P$$

Pour tout autre choix de fonctions de base, dont $A \neq I$, le point courant de la courbe associée est transformé comme suit :

$$C_1(\omega(t)) = v_{\omega(t)} A P$$

Si dans le premier cas, l'on peut écrire :

$$C(\omega(t)) = v_t \Omega P,$$

il s'ensuit pour le deuxième cas que :

$$C_1(\omega(t)) = v_t \Omega * A P$$

Ainsi, dans un cas ou dans l'autre, l'opérateur Ω suffit pour exprimer l'effet de la

transformation paramétrique ω , en supposant que l'on peut écrire $v_{\omega(t)} = v_t \Omega$.

6.2. Fonctions de Base cubiques

[Bézier-77, Eqs. 48, 49]

$$\begin{aligned} B_a \varphi_0(t) &= 1 - 2t + t^2 &= (1-t)^2 \\ B_a \varphi_1(t) &= 2t - 4t^2 + 2t^3 &= 2t(1-t)^2 \\ B_a \varphi_2(t) &= 2t^2 - 2t^3 &= 2t^2(1-t) \\ B_a \varphi_3(t) &= t^3 \end{aligned}$$

Le point courant de la courbe s'écrit :

$$C(t) = \sum_{i=0}^3 B_a \varphi_i(t) P_i$$

6.2.1. Propriétés des $B_a \varphi_i$

1. Par inspection, on voit d'une part que :

$$\sum_{i=0}^3 B_a \varphi_i(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Les $B_a \varphi_i(t)$ vérifient ainsi la condition de Cauchy [Bézier-77, pp.41, 76-77].

2. D'autre part, on voit que :

$$B_a \varphi_0(1-t) = B_a \varphi_3(t) \quad \text{et} \quad B_a \varphi_1(1-t) = B_a \varphi_2(t),$$

conditions que l'on peut exprimer sous une forme plus condensée :

$$B_a \varphi_i(1-t) = B_a \varphi_{3-i}(t)$$

Les $B_a \varphi_i(t)$ sont donc *symétriques par rapport à l'inversion de l'ordre des $B_a \varphi_i$, et du sens de paramétrisation (i.e., sens de parcours de la courbe)*. En suivant Bézier de très près, nous dirons que les $B_a \varphi_i(t)$ sont symétriques par permutation [Bézier-77, p.45].

3. En $t = 0$, par dérivations successives des $B_a \varphi_i$, on obtient :

$$B_{a\varphi_0}(0) = 1; \quad B_{a\varphi_1}(0) = 0; \quad B_{a\varphi_2}(0) = 0; \quad B_{a\varphi_3}(0) = 0;$$

$$B_{a\varphi_0}^{(1)}(0) = -2; \quad B_{a\varphi_1}^{(1)}(0) = 2; \quad B_{a\varphi_2}^{(1)}(0) = 0; \quad B_{a\varphi_3}^{(1)}(0) = 0;$$

$$B_{a\varphi_0}^{(2)}(0) = 2; \quad B_{a\varphi_1}^{(2)}(0) = -8; \quad B_{a\varphi_2}^{(2)}(0) = 4; \quad B_{a\varphi_3}^{(2)}(0) = 2;$$

$$B_{a\varphi_0}^{(3)}(0) = 0; \quad B_{a\varphi_1}^{(3)}(0) = 12; \quad B_{a\varphi_2}^{(3)}(0) = -12; \quad B_{a\varphi_3}^{(3)}(0) = 0.$$

D'où, au point initial de la courbe, on obtient les conditions géométriques suivantes :

$$C(0) = P_0$$

$$C^{(1)}(0) = 2(P_1 - P_0)$$

$$C^{(2)}(0) = 2P_0 - 8P_1 + 4P_2 + 2P_3$$

$$C^{(3)}(0) = 12(P_1 - P_2)$$

4. En $t = 1$, par dérivations successives des $B_{a\varphi_i}$, on obtient :

$$B_{a\varphi_0}(1) = 0; \quad B_{a\varphi_1}(1) = 0; \quad B_{a\varphi_2}(1) = 0; \quad B_{a\varphi_3}(1) = 1;$$

$$B_{a\varphi_0}^{(1)}(1) = 0; \quad B_{a\varphi_1}^{(1)}(1) = 0; \quad B_{a\varphi_2}^{(1)}(1) = -2; \quad B_{a\varphi_3}^{(1)}(1) = 2;$$

$$B_{a\varphi_0}^{(2)}(1) = 2; \quad B_{a\varphi_1}^{(2)}(1) = 4; \quad B_{a\varphi_2}^{(2)}(1) = -8; \quad B_{a\varphi_3}^{(2)}(1) = 2;$$

$$B_{a\varphi_0}^{(3)}(1) = 0; \quad B_{a\varphi_1}^{(3)}(1) = 12; \quad B_{a\varphi_2}^{(3)}(1) = -12; \quad B_{a\varphi_3}^{(3)}(1) = 0.$$

D'où, au point terminal de la courbe, on obtient les conditions géométriques suivantes :

$$C(1) = P_3$$

$$C^{(1)}(1) = 2(P_3 - P_2)$$

$$C^{(2)}(1) = 2P_0 + 4P_1 - 8P_2 + 2P_3$$

$$C^{(3)}(1) = 12(P_1 - P_2)$$

5. De 3 et 4, il découle que deux arcs de courbes C_1 et C_2 sont tangents en leur point commun ($C_1(1) = C_2(0)$) si et seulement si :

$$P_1^2 - P_0^2 = \lambda(P_3^1 - P_2^1)$$

où $P^i = (P_0^i \ P_1^i \ P_2^i \ P_3^i)$ définit le polygone caractéristique (cf. chap. suivant) pour C avec $i \in \{1, 2\}$ et λ est un scalaire quelconque.

6. Seules les fonctions $B_{a\varphi_1}(t)$ et $B_{a\varphi_2}(t)$ contiennent de terme en t^3 . De plus, les coefficients des deux termes sont opposés. Par conséquent, en prenant $P_1 = P_2$, la courbe dégénère en une conique (i.e. une parabole).

6.3. Fonctions de Bernstein-Bézier cubiques

[Bézier-77, pp.73-80] [Mortenson-85, pp. 113-125] [Bézier-86, pp.80-86].

Les fonctions de base de Bernstein-Bézier de degré n sont définies par :

$$B_{\epsilon}^i \varphi_i(t) = (1-t)^i t^{n-i} C_n^i \quad \text{avec } i = 0, 1, \dots, n.$$

où l'on définit :

$$C_j^i = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ \frac{j!}{i!(j-i)!} & \text{pour } i \leq j \end{cases}$$

En particulier, les fonctions cubiques sont données par :

$$B_{\epsilon}^0 \varphi_0(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3 = (1-t)^3$$

$$B_{\epsilon}^1 \varphi_1(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3 = 3t(1-t)^2$$

$$B_{\epsilon}^2 \varphi_2(t) = 3t^2 - 3t^3 = 3t^2(1-t)$$

$$B_{\epsilon}^3 \varphi_3(t) = t^3$$

de sorte que le point courant de l'arc de courbe est défini par :

$$C(t) = \sum_{i=0}^3 B_{\epsilon}^i \varphi_i(t) P_i$$

6.3.1 Propriétés de $B_{\epsilon}^i \varphi_i$

Nous ne reproduisons pas ici toutes les propriétés de ces fonctions [Forrest-71] [Bézier-77] [Chang-82]. Toutefois, on les retrouve en grande partie dans le chapitre 4, partie I.

1. Par inspection, on voit que :

$$\sum_{i=0}^3 B_e \varphi_i(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1]$$

Les $B_e \varphi_i(t)$ vérifient donc la condition de Cauchy.

2. On voit aussi que :

$$B_e \varphi_i(1-t) = B_e \varphi_{3-i}(t) \quad 0 \leq i \leq 3$$

Ainsi, les $B_e \varphi_i(t)$ sont également symétriques par permutation.

3. En $t = 0$, par dérivations successives des $B_e \varphi_i$, on obtient :

$$B_e \varphi_0(0) = 1; \quad B_e \varphi_1(0) = 0; \quad B_e \varphi_2(0) = 0; \quad B_e \varphi_3(0) = 0;$$

$$B_e \varphi_0^{(1)}(0) = -3; \quad B_e \varphi_1^{(1)}(0) = 3; \quad B_e \varphi_2^{(1)}(0) = 0; \quad B_e \varphi_3^{(1)}(0) = 0;$$

$$B_e \varphi_0^{(2)}(0) = 6; \quad B_e \varphi_1^{(2)}(0) = -12; \quad B_e \varphi_2^{(2)}(0) = 6; \quad B_e \varphi_3^{(2)}(0) = 0;$$

$$B_e \varphi_0^{(3)}(0) = -6; \quad B_e \varphi_1^{(3)}(0) = 18; \quad B_e \varphi_2^{(3)}(0) = -18; \quad B_e \varphi_3^{(3)}(0) = 6.$$

D'où, au point initial de la courbe, on obtient les conditions géométriques suivantes :

$$C(0) = P_0$$

$$C^{(1)}(0) = 3(P_1 - P_0)$$

$$C^{(2)}(0) = 6(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

$$C^{(3)}(0) = 6(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

Ainsi, en $t = 0$, grâce à ce choix de fonctions de base, seuls les sommets P_0, \dots, P_3 déterminent la condition de continuité d'ordre i , avec $0 \leq i \leq 3$. En particulier, la courbe commence en P_0 et est tangente au premier côté du polygone caractéristique en ce point.

D'autre part, la courbure est fonction seulement de P_0, P_1 et P_2 puisque :

$$\kappa(0) = \frac{|C^{(1)}(0) \wedge C^{(2)}(0)|}{|C^{(1)}(0)|^3} = \frac{|3(P_1 - P_0) \wedge 6(P_0 - 2P_1 + P_2)|}{|3(P_1 - P_0)|^3}$$

4. En $t = 1$, par dérivations successives des $B_e \varphi_i$, on obtient :

$$B_e \varphi_0(1) = 0; \quad B_e \varphi_1(1) = 0; \quad B_e \varphi_2(1) = 0; \quad B_e \varphi_3(1) = 1;$$

$$B_e \varphi_0^{(1)}(1) = 0; \quad B_e \varphi_1^{(1)}(1) = 0; \quad B_e \varphi_2^{(1)}(1) = -3; \quad B_e \varphi_3^{(1)}(1) = 3;$$

$$B_e \varphi_0^{(2)}(1) = 0; \quad B_e \varphi_1^{(2)}(1) = 6; \quad B_e \varphi_2^{(2)}(1) = -12; \quad B_e \varphi_3^{(2)}(1) = 6;$$

$$B_e \varphi_0^{(3)}(1) = -6; \quad B_e \varphi_1^{(3)}(1) = 18; \quad B_e \varphi_2^{(3)}(1) = -18; \quad B_e \varphi_3^{(3)}(1) = 6.$$

D'où, au point terminal de la courbe, on obtient les conditions géométriques suivantes :

$$C(1) = P_3$$

$$C^{(1)}(1) = 3(P_3 - P_2)$$

$$C^{(2)}(1) = 6(P_1 - 2P_2 + P_3)$$

$$C^{(3)}(1) = 6(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3).$$

Ainsi, en $t = 1$, seuls les sommets P_{3-i}, \dots, P_3 déterminent la condition de continuité d'ordre i , avec $0 \leq i \leq 3$: l'arc de courbe termine en P_3 ; il est tangent, en ce point, au vecteur déterminé par les points P_2 et P_3 et la courbure est fonction de P_1, P_2 et P_3 .

5. Comme dans le cas de Ball, pour que deux segments de courbes C_1 et C_2 soient tangents en leur point commun ($C_1(1) = C_2(0)$), il faut et il suffit que :

$$P_1^2 - P_0^2 = \lambda(P_3^1 - P_2^1)$$

où λ est un scalaire quelconque.

6.4. Fonctions de B-spline cubiques ou Fonctions cubiques de Riesenfeld [Bézier-77, pp.42-55] [Mortenson-85, Eq. 2.296, p.139])

$$B_s \varphi_0(t) = 1/6(1 - 3t + 3t^2 - t^3) = 1/6(1-t)^3$$

$$B_s \varphi_1(t) = 1/6(4 - 6t^2 + 3t^3)$$

$$B_s \varphi_2(t) = 1/6(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3)$$

$$B_s \varphi_3(t) = 1/6t^3$$

Pour les B-splines périodiques (fonctions de Riesenfeld) d'ordres supérieurs définis sur l'intervalle normalisé, Bézier dans [Bézier-77, p.51] propose la formule générale suivante dans laquelle il emploie le symbole $R_{i,m}$:

$$B_s \varphi_i(t) = R_{i,m}(t) = (m+1) \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{(t+m-i-j)^m}{j!(m-j+1)} \quad i = 0, 1, \dots, m$$

où i rappelle le rang de la fonction et m le degré. Mortenson a également proposé une autre approche de calcul à partir de l'expression des B-splines non périodiques [Mortenson-85, pp. 133-140].

En nous limitant uniquement au cas cubique, le point courant de la courbe s'exprime par :

$$C(t) = \sum_{i=0}^3 B_s \varphi_i(t) P_i$$

6.4.1. Propriétés des $B_s \varphi_i$

1. Une simple addition des deux membres des quatre expressions des $B_s \varphi_i(t)$ montre que celles-ci vérifient la condition de Cauchy :

$$\sum_{i=0}^3 B_s \varphi_i(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

2. Symétrie par permutation : par inspection, on voit que :

$$B_s \varphi_0(1-t) = B_s \varphi_3(t)$$

Montrons que l'on a également :

$$B_s \varphi_1(1-t) = B_s \varphi_2(t).$$

En effet :

$$\begin{aligned} B_s \varphi_1(1-t) &= 1/6(4 - 5(1-t)^2 + 3(1-t)^3) \\ &= 1/6(4 - 6(1-2t+t^2) + 3(1-3t+3t^2-t^3)) \\ &= 1/6(1+3t+3t^2-3t^3) = B_s \varphi_2(t). \end{aligned}$$

Ainsi, les $B_s \varphi_i(t)$ sont symétriques par permutation. Ce résultat se vérifie aussi dans le cas

général [Bézier-77, p.45].

3. En $t = 0$, par dérivations successives des $B_s \varphi_i$, on obtient :

$$B_s \varphi_0(0) = 1/6; \quad B_s \varphi_1(0) = 2/3; \quad B_s \varphi_2(0) = 1/6; \quad B_s \varphi_3(0) = 0;$$

$$B_s \varphi_0^{(1)}(0) = -1/2; \quad B_s \varphi_1^{(1)}(0) = 0; \quad B_s \varphi_2^{(1)}(0) = 1/2; \quad B_s \varphi_3^{(1)}(0) = 0;$$

$$B_s \varphi_0^{(2)}(0) = 1; \quad B_s \varphi_1^{(2)}(0) = -2; \quad B_s \varphi_2^{(2)}(0) = 1; \quad B_s \varphi_3^{(2)}(0) = 0;$$

$$B_s \varphi_0^{(3)}(0) = -1; \quad B_s \varphi_1^{(3)}(0) = 3; \quad B_s \varphi_2^{(3)}(0) = -3; \quad B_s \varphi_3^{(3)}(0) = 1.$$

Par conséquent, au point initial de la courbe, on obtient les conditions géométriques suivantes :

$$C(0) = 1/6(P_0 + 4P_1 + P_2)$$

$$C^{(1)}(0) = 1/2(P_2 - P_0)$$

$$C^{(2)}(0) = P_0 - 2P_1 + P_2$$

$$C^{(3)}(0) = -P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3$$

Le point initial de la courbe est donc déterminé par les trois premiers sommets du polygone caractéristique. La tangente en ce point est spécifiée par le vecteur joignant le premier au troisième sommet et dont le module est deux fois celui de la tangente. On voit aussi que la courbure au point initial est fonction des trois premiers sommets seulement, de sorte qu'au point initial de la courbe, le dernier sommet P_3 n'exerce aucune influence sur les conditions de continuité allant jusqu'à l'ordre deux.

4. En $t = 1$, par dérivations successives des $B_s \varphi_i$, on obtient :

$$B_s \varphi_0(1) = 0; \quad B_s \varphi_1(1) = 1/6; \quad B_s \varphi_2(1) = 2/3; \quad B_s \varphi_3(1) = 1/6;$$

$$B_s \varphi_0^{(1)}(1) = 0; \quad B_s \varphi_1^{(1)}(1) = -1/2; \quad B_s \varphi_2^{(1)}(1) = 0; \quad B_s \varphi_3^{(1)}(1) = 1/2;$$

$$B_s \varphi_0^{(2)}(1) = 0; \quad B_s \varphi_1^{(2)}(1) = 1; \quad B_s \varphi_2^{(2)}(1) = -2; \quad B_s \varphi_3^{(2)}(1) = 1;$$

$$B_s \varphi_0^{(3)}(1) = -1; \quad B_s \varphi_1^{(3)}(1) = 3; \quad B_s \varphi_2^{(3)}(1) = -3; \quad B_s \varphi_3^{(3)}(1) = 1$$

Ces résultats correspondent aux conditions géométriques suivantes au point terminal de la courbe :

$$C(1) = 1/6(P_1 + 4P_2 + P_3)$$

$$C^{(1)}(1) = 1/2(P_3 - P_1)$$

$$C^{(2)}(1) = P_1 - 2P_2 + P_3$$

$$C^{(3)}(1) = -P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3$$

Ainsi, on voit que les trois derniers sommets du polygone caractéristique déterminent le point terminale de la courbe. Ces derniers déterminent aussi la courbure en ce point. Quant à la tangente, elle coïncide avec le vecteur joignant le deuxième sommet au dernier. Ainsi, du

fait de la nullité de la fonction $B_s\psi_0$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre deux en $t = 1$, le sommet P_0 n'influe pas sur la géométrie de la courbe en son point terminal.

5. On remarque que les $B_s\psi_i$ (resp. R_i , m) vérifient les propriétés générales suivantes [Bézier-86, p.64] :

$$B_s\psi_i^{(j)}(0) = B_s\psi_{i+1}^{(j)}(1) \text{ avec } i = 0, \dots, 2 \text{ (resp. } m-1 \text{)}.$$

6. Pour s'assurer que deux arcs de courbes C_1 et C_2 se raccordent jusqu'à l'ordre deux, il suffit d'imposer que :

$$P_i^2 = P_{i+1}^1 \text{ avec } i = 0, \dots, 2 \text{ (resp. } m-1 \text{)}.$$

En effet, pour C_1 , le point de raccordement correspond à la valeur paramétrique $t = 1$, tandis que pour C_2 , cela correspond à $t = 0$. Par conséquent :

$$C_1(1) = 1/6(P_1^1 + 4P_2^1 + P_3^1) = C_2(0)$$

$$C_1^{(1)}(1) = 1/2(P_3^1 - P_1^1) = C_2^{(1)}(0)$$

$$C_1^{(2)}(1) = P_1^1 - 2P_2^1 + P_3^1 = C_2^{(2)}(0)$$

6.5. Fonctions de Hermite (aussi de Ferguson) cubique

[Ferguson-64, p.227] [Mortenson-85, pp.34-37]

$$He\psi_0(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$$

$$He\psi_1(t) = + 3t^2 - 2t^3$$

$$He\psi_2(t) = t - 2t^2 + t^3$$

$$He\psi_3(t) = -t^2 + t^3$$

Le point courant de l'arc de courbe a pour expression :

$$C(t) = \sum_{i=0}^3 He\psi_i(t) P_i$$

6.5.1. Propriétés des $He\psi_i$

1. En $t = 0$, par dérivations successives des $He\psi_i$, on obtient :

$$He\psi_0(0) = 1; \quad He\psi_1(0) = 0; \quad He\psi_2(0) = 0; \quad He\psi_3(0) = 0;$$

$$He\psi_0^{(1)}(0) = 0; \quad He\psi_1^{(1)}(0) = 0; \quad He\psi_2^{(1)}(0) = 1; \quad He\psi_3^{(1)}(0) = 0;$$

$$He\psi_0^{(2)}(0) = -6; \quad He\psi_1^{(2)}(0) = 6; \quad He\psi_2^{(2)}(0) = -4; \quad He\psi_3^{(2)}(0) = -2;$$

$$He\psi_0^{(3)}(0) = 12; \quad He\psi_1^{(3)}(0) = -12; \quad He\psi_2^{(3)}(0) = 6; \quad He\psi_3^{(3)}(0) = 6.$$

D'où, au point initial de la courbe, on obtient les conditions géométriques suivantes :

$$C(0) = P_0$$

$$C^{(1)}(0) = P_2$$

$$C^{(2)}(0) = -6P_0 + 6P_1 - 4P_2 - 2P_3$$

$$C^{(3)}(0) = 6(2P_0 - 2P_1 + P_2 + P_3)$$

On voit donc que le point initial de la courbe est confondu avec le premier sommet du polygone caractéristique tandis que le troisième spécifie la tangente en ce point.

Quant à la courbure en ce point, elle est fonction de tous les P_i car en effet :

$$\kappa(0) = \frac{|C^{(1)}(0) \wedge C^{(2)}(0)|}{|C^{(1)}(0)|^3} = \frac{|P_2 \wedge (-6P_0 + 6P_1 - 4P_2 - 2P_3)|}{|P_2|^3}$$

2. En $t = 1$, par dérivations successives des $He\psi_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} He\psi_0(1) &= 0; & He\psi_1(1) &= 1; & He\psi_2(1) &= 0; & He\psi_3(1) &= 0; \\ He\psi_0^{(1)}(1) &= 0; & He\psi_1^{(1)}(1) &= 0; & He\psi_2^{(1)}(1) &= 0; & He\psi_3^{(1)}(1) &= 1; \\ He\psi_0^{(2)}(1) &= 6; & He\psi_1^{(2)}(1) &= -6; & He\psi_2^{(2)}(1) &= 2; & He\psi_3^{(2)}(1) &= 4; \\ He\psi_0^{(3)}(1) &= 12; & He\psi_1^{(3)}(1) &= -12; & He\psi_2^{(3)}(1) &= 6; & He\psi_3^{(3)}(1) &= 6. \end{aligned}$$

Ainsi, au point terminal de la courbe, on obtient les conditions géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} C(1) &= P_1 \\ C^{(1)}(1) &= P_3 \\ C^{(2)}(1) &= -6P_0 + 6P_1 + 2P_2 + 4P_3 \\ C^{(3)}(1) &= 6(2P_0 - 2P_1 + P_2 + P_3) \end{aligned}$$

De toute évidence, la courbe a pour extrémité le deuxième sommet du polygone caractéristique tandis que le dernier sommet représente en fait la tangente en ce point.

Comme au point initial, la courbure est, en ce point, aussi fonction de tous les P_i .

3. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux arcs de courbes C_1 et C_2 soient tangents en leur point commun découlent des conditions géométriques en $t = 0$ et $t = 1$. Elles sont les suivantes :

$$P_1^1 = P_0^2 \quad \text{et} \quad P_3^1 = \lambda P_2^2$$

6.6. Fonctions d'Overhauser

[Brewer-77]

$$\begin{aligned} O_V\psi_0(t) &= -1/2t + t^2 - 1/2t^3 = -1/2t(1-t)^2 \\ O_V\psi_1(t) &= 1 - 5/2t^2 + 3/2t^3 \\ O_V\psi_2(t) &= 1/2t + 2t^2 - 3/2t^3 \\ O_V\psi_3(t) &= -1/2t^2 + 1/2t^3 = -1/2t^2(1-t) \end{aligned}$$

Le point courant de l'arc de courbe a pour expression :

$$C(t) = \sum_{i=0}^3 O_V\psi_i(t) P_i$$

6.6.1. Propriétés des $O_V\psi_i$

1. Par inspection, on voit que :

$$\sum_{i=0}^3 O_V\psi_i(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1]$$

Les fonctions de base d'Overhauser vérifient ainsi la condition de Cauchy.

2. Symétrie par permutation : Grâce à la mise en facteur indiquée ci-dessus, on voit bien que :

$$O_V\psi_0(1-t) = O_V\psi_3(t)$$

Montrons maintenant que l'on a également $O_V\psi_1(1-t) = O_V\psi_2(t)$. En effet :

$$\begin{aligned} O_V\psi_1(1-t) &= 1 - 5/2(1-t)^2 + 3/2(1-t)^3 \\ &= 1 - 5/2(1 - 2t + t^2) + 3/2(1 - 3t + 3t^2 - t^3) \\ &= 1 - 5/2 + 3/2 + (5 - 9/2)t + (-5/2 + 9/2)t^2 - 3/2t^3 \\ &= 1/2t + 2t^2 - 3/2t^3 = O_V\psi_2(t) \end{aligned} \quad \text{CQFD.}$$

Ainsi, pour $0 \leq i \leq 3$ et pour $0 \leq t \leq 1$, $O_V\psi_i(1-t) = O_V\psi_{3-i}(t)$. Les fonctions d'Overhauser sont donc symétriques par permutation.

3. En $t = 0$, par dérivations successives des ${}_{O_V}\varphi_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{O_V}\varphi_0(0) &= 0; & {}_{O_V}\varphi_1(0) &= 1; & {}_{O_V}\varphi_2(0) &= 0; & {}_{O_V}\varphi_3(0) &= 0; \\ {}_{O_V}\varphi_0^{(1)}(0) &= -1/2; & {}_{O_V}\varphi_1^{(1)}(0) &= 0; & {}_{O_V}\varphi_2^{(1)}(0) &= 1/2; & {}_{O_V}\varphi_3^{(1)}(0) &= 0; \\ {}_{O_V}\varphi_0^{(2)}(0) &= 2; & {}_{O_V}\varphi_1^{(2)}(0) &= -5; & {}_{O_V}\varphi_2^{(2)}(0) &= 4; & {}_{O_V}\varphi_3^{(2)}(0) &= -1; \\ {}_{O_V}\varphi_0^{(3)}(0) &= -3; & {}_{O_V}\varphi_1^{(3)}(0) &= 9; & {}_{O_V}\varphi_2^{(3)}(0) &= -9; & {}_{O_V}\varphi_3^{(3)}(0) &= 3. \end{aligned}$$

De ces relations, on déduit les conditions géométriques suivantes au point initial :

$$\begin{aligned} C(0) &= P_1 \\ C^{(1)}(0) &= 1/2 (P_2 - P_0) \\ C^{(2)}(0) &= 2P_0 - 5P_1 + 4P_2 - P_3 \\ C^{(3)}(0) &= -3P_0 + 9P_1 - 9P_2 + 3P_3 \end{aligned}$$

On voit donc que la courbe débute au deuxième sommet du polygone caractéristique et est tangente, en ce point, au vecteur liant le premier sommet au troisième. Si besoin est, la deuxième et la troisième relations permettent de déterminer la courbure en ce point :

$$\kappa(0) = \frac{|C^{(1)}(0) \wedge C^{(2)}(0)|}{|C^{(1)}(0)|^3} = \frac{|1/2 (P_2 - P_0) \wedge (2P_0 - 5P_1 + 4P_2 - P_3)|}{|1/2 (P_2 - P_0)|^3}$$

On voit que cela est fonction de tous les P_i .

4. En $t = 1$, par dérivations successives des ${}_{O_V}\varphi_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{O_V}\varphi_0(1) &= 0; & {}_{O_V}\varphi_1(1) &= 0; & {}_{O_V}\varphi_2(1) &= 1; & {}_{O_V}\varphi_3(1) &= 0; \\ {}_{O_V}\varphi_0^{(1)}(1) &= 0; & {}_{O_V}\varphi_1^{(1)}(1) &= -1/2; & {}_{O_V}\varphi_2^{(1)}(1) &= 0; & {}_{O_V}\varphi_3^{(1)}(1) &= 1/2; \\ {}_{O_V}\varphi_0^{(2)}(1) &= -1; & {}_{O_V}\varphi_1^{(2)}(1) &= 4; & {}_{O_V}\varphi_2^{(2)}(1) &= -5; & {}_{O_V}\varphi_3^{(2)}(1) &= 2; \\ {}_{O_V}\varphi_0^{(3)}(1) &= -3; & {}_{O_V}\varphi_1^{(3)}(1) &= 9; & {}_{O_V}\varphi_2^{(3)}(1) &= -9; & {}_{O_V}\varphi_3^{(3)}(1) &= 3. \end{aligned}$$

De ces relations, on déduit les conditions géométriques suivantes au point terminal :

$$\begin{aligned} C(1) &= P_2 \\ C^{(1)}(1) &= 1/2 (P_3 - P_1) \\ C^{(2)}(1) &= -P_0 + 4P_1 - 5P_2 + 2P_3 \\ C^{(3)}(1) &= -3P_0 + 9P_1 - 9P_2 + 3P_3 \end{aligned}$$

On voit ici que l'arc de courbe se termine en P_2 ; il est tangente au vecteur déterminé P_1 et P_3 .

La courbure est fonction de tous les P_i .

5. En tenant compte des conditions géométriques aux points limites d'un arc de courbe, on aboutit aux conditions nécessaires et suffisantes suivantes pour que deux arcs C_1 et C_2 soient tangents en leur point commun :

$$P_2^1 = P_1^2 \quad \text{et} \quad P_2^2 - P_0^2 = \lambda(P_3^1 - P_1^1)$$

6.7. Fonctions de base de Taylor cubiques

[Lewis-81]

$${}_{\text{Tay}}\varphi_i(t) = t^i/i! \quad \text{avec } 0 \leq i \leq n$$

Pour $n = 3$, le point courant de l'arc de courbe a pour expression :

$$C(t) = \sum_{i=0}^3 {}_{\text{Tay}}\varphi_i(t) P_i$$

6.7.1. Propriétés des ${}_{\text{Tay}}\varphi_i$

1. En $t = 0$, par dérivations successives des ${}_{\text{Tay}}\varphi_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{\text{Tay}}\varphi_0(0) &= 1; & {}_{\text{Tay}}\varphi_1(0) &= 0; & {}_{\text{Tay}}\varphi_2(0) &= 0; & {}_{\text{Tay}}\varphi_3(0) &= 0; \\ {}_{\text{Tay}}\varphi_0^{(1)}(0) &= 0; & {}_{\text{Tay}}\varphi_1^{(1)}(0) &= 1; & {}_{\text{Tay}}\varphi_2^{(1)}(0) &= 0; & {}_{\text{Tay}}\varphi_3^{(1)}(0) &= 0; \\ {}_{\text{Tay}}\varphi_0^{(2)}(0) &= 0; & {}_{\text{Tay}}\varphi_1^{(2)}(0) &= 0; & {}_{\text{Tay}}\varphi_2^{(2)}(0) &= 1; & {}_{\text{Tay}}\varphi_3^{(2)}(0) &= 0; \end{aligned}$$

$$T_{ay}\psi_0^{(3)}(0) = 0; \quad T_{ay}\psi_1^{(3)}(0) = 0; \quad T_{ay}\psi_2^{(3)}(0) = 0; \quad T_{ay}\psi_3^{(3)}(0) = 1.$$

A ces relations correspondent les conditions géométriques suivantes au point initial de la courbe :

$$\begin{aligned} C(0) &= P_0 \\ C^{(1)}(0) &= P_1 \\ C^{(2)}(0) &= P_2 \\ C^{(3)}(0) &= P_3 \end{aligned}$$

Ainsi, le premier sommet précise le point initial de la courbe et le deuxième la tangente en ce point. Quant à la courbure, elle est simplement donnée par :

$$\kappa(0) = \frac{|C^{(1)}(0) \wedge C^{(2)}(0)|}{|C^{(1)}(0)|^3} = \frac{|P_1 \wedge P_2|}{|P_1|^3}$$

2. En $t = 1$, par dérivations successives des $T_{ay}\psi_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{ay}\psi_0(1) &= 1; & T_{ay}\psi_1(1) &= 1; & T_{ay}\psi_2(1) &= 1/2; & T_{ay}\psi_3(1) &= 1/6; \\ T_{ay}\psi_0^{(1)}(1) &= 0; & T_{ay}\psi_1^{(1)}(1) &= 1; & T_{ay}\psi_2^{(1)}(1) &= 1; & T_{ay}\psi_3^{(1)}(1) &= 1/2; \\ T_{ay}\psi_0^{(2)}(1) &= 0; & T_{ay}\psi_1^{(2)}(1) &= 0; & T_{ay}\psi_2^{(2)}(1) &= 1; & T_{ay}\psi_3^{(2)}(1) &= 1; \\ T_{ay}\psi_0^{(3)}(1) &= 0; & T_{ay}\psi_1^{(3)}(1) &= 0; & T_{ay}\psi_2^{(3)}(1) &= 0; & T_{ay}\psi_3^{(3)}(1) &= 1. \end{aligned}$$

A ces relations correspondent les conditions géométriques suivantes au point terminal de la courbe :

$$\begin{aligned} C(1) &= P_0 + P_1 + 1/2P_2 + 1/6P_3 \\ C^{(1)}(1) &= P_1 + P_2 + 1/2P_3 \\ C^{(2)}(1) &= P_2 + P_3 \\ C^{(3)}(1) &= P_3 \end{aligned}$$

Il ressort clairement de ces relations que la condition de continuité d'ordre i au point terminal

de la courbe est fonction des sommets P_i à P_3 .

6.8. Fonctions de Timmer cubiques

[Timmer-80, pp.25-28, Eq. 12]

$$\begin{aligned} T_{im}\psi_0(t) &= 1 - 4t + 5t^2 - 2t^3 = (1-t)^2(1-2t) \\ T_{im}\psi_1(t) &= 4t - 8t^2 + 4t^3 = 4t(1-t)^2 \\ T_{im}\psi_2(t) &= 4t^2 - 4t^3 = 4t^2(1-t) \\ T_{im}\psi_3(t) &= -t^2 + 2t^3 = t^2(2t-1) = t^2(1-2(1-t)) \end{aligned}$$

Comme pour les autres choix de fonctions de base, le point courant d'une courbe de Timmer s'écrit comme :

$$C(t) = \sum_{i=0}^3 T_{im}\psi_i(t) P_i$$

6.8.1. Propriétés des $T_{im}\psi_i$

1. En additionnant les premiers et deuxièmes membres des relations ci-dessus, on voit que :

$$\sum_{i=0}^3 T_{im}\psi_i(t) = 1 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1]$$

Ainsi, les fonctions de base de Timmer vérifient la condition de Cauchy.

2. Symétrie par permutation : La forme factorisée des $T_{im}\psi_i(t)$ (les troisièmes membres des expressions) permet de conclure que :

$$T_{im}\psi_i(1-t) = T_{im}\psi_{3-i}(t) \quad \text{pour tout } i = 0, 1, \dots, 3.$$

3. En $t = 0$, par dérivations successives des $T_{im}\psi_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{im}\psi_0(0) &= 1; & T_{im}\psi_1(0) &= 0; & T_{im}\psi_2(0) &= 0; & T_{im}\psi_3(0) &= 0; \\ T_{im}\psi_0^{(1)}(0) &= -4; & T_{im}\psi_1^{(1)}(0) &= 4; & T_{im}\psi_2^{(1)}(0) &= 0; & T_{im}\psi_3^{(1)}(0) &= 0; \end{aligned}$$

$$T_{im}\psi_0^{(2)}(0) = 10; \quad T_{im}\psi_1^{(2)}(0) = -16; \quad T_{im}\psi_2^{(2)}(0) = 8; \quad T_{im}\psi_3^{(2)}(0) = -2;$$

$$T_{im}\psi_0^{(3)}(0) = -12; \quad T_{im}\psi_1^{(3)}(0) = 24; \quad T_{im}\psi_2^{(3)}(0) = -24; \quad T_{im}\psi_3^{(3)}(0) = 12.$$

De ces relations découlent donc les conditions géométriques suivantes pour l'arc de courbe en son point initial :

$$C(0) = P_0$$

$$C^{(1)}(0) = 4(P_1 - P_0)$$

$$C^{(2)}(0) = 2(5P_0 - 8P_1 + 4P_2 - P_3)$$

$$C^{(3)}(0) = 12(-P_0 + 2P_1 - 2P_2 + P_3)$$

Les conditions de continuité d'ordres 0 et 1 sont similaires à celles de Ball et de Bernstein-Bézier dans la mesure où la courbe débute au premier sommet du polygone caractéristique et est tangente au premier côté de celui-ci. Toutefois, la courbure est déterminée par les quatre sommets.

4. En $t = 1$, par dérivations successives des $T_{im}\psi_i$, on obtient :

$$T_{im}\psi_0(1) = 0; \quad T_{im}\psi_1(1) = 0; \quad T_{im}\psi_2(1) = 0; \quad T_{im}\psi_3(1) = 1;$$

$$T_{im}\psi_0^{(1)}(1) = 0; \quad T_{im}\psi_1^{(1)}(1) = 0; \quad T_{im}\psi_2^{(1)}(1) = -4; \quad T_{im}\psi_3^{(1)}(1) = 4;$$

$$T_{im}\psi_0^{(2)}(1) = -2; \quad T_{im}\psi_1^{(2)}(1) = 8; \quad T_{im}\psi_2^{(2)}(1) = -16; \quad T_{im}\psi_3^{(2)}(1) = 10;$$

$$T_{im}\psi_0^{(3)}(1) = -12; \quad T_{im}\psi_1^{(3)}(1) = 24; \quad T_{im}\psi_2^{(3)}(1) = -24; \quad T_{im}\psi_3^{(3)}(1) = 12.$$

De ces relations découlent donc les conditions géométriques suivantes pour l'arc de courbe en son point terminal :

$$C(1) = P_3$$

$$C^{(1)}(1) = 4(P_3 - P_2)$$

$$C^{(2)}(1) = 2(-P_0 + 4P_1 - 8P_2 - 5P_3)$$

$$C^{(3)}(1) = 12(-P_0 + 2P_1 - 2P_2 + P_3)$$

On constate des conditions de continuité d'ordres 0 et 1 similaires à celles des représentations de Ball et Bernstein-Bézier : la courbe se termine au dernier sommet P_3 et est

tangente au dernier côté du polygone caractéristique.

5. En $t = 1/2$, la courbe passe par le milieu du deuxième côté du polygone caractéristique.

En effet, en $t = 1/2$, par dérivations successives des $T_{im}\psi_i$, on obtient :

$$T_{im}\psi_0(1/2) = 0; \quad T_{im}\psi_1(1/2) = 1/2; \quad T_{im}\psi_2(1/2) = 1/2; \quad T_{im}\psi_3(1/2) = 0;$$

$$T_{im}\psi_0^{(1)}(1/2) = -1/2; \quad T_{im}\psi_1^{(1)}(1/2) = -1; \quad T_{im}\psi_2^{(1)}(1/2) = 1; \quad T_{im}\psi_3^{(1)}(1/2) = 1/2;$$

$$T_{im}\psi_0^{(2)}(1/2) = 4; \quad T_{im}\psi_1^{(2)}(1/2) = -4; \quad T_{im}\psi_2^{(2)}(1/2) = -4; \quad T_{im}\psi_3^{(2)}(1/2) = 4;$$

$$T_{im}\psi_0^{(3)}(1/2) = -12; \quad T_{im}\psi_1^{(3)}(1/2) = 24; \quad T_{im}\psi_2^{(3)}(1/2) = -24; \quad T_{im}\psi_3^{(3)}(1/2) = 12.$$

Ces conditions correspondent aux conditions géométriques suivantes en $t = 1/2$:

$$C(1/2) = 1/2 (P_1 + P_2)$$

$$C^{(1)}(1/2) = 1/2 (-P_0 - 2P_1 + 2P_2 + P_3)$$

$$C^{(2)}(1/2) = 4 (P_0 - P_1 - P_2 + P_3)$$

$$C^{(3)}(1/2) = 12 (-P_0 + 2P_1 - 2P_2 + P_3)$$

Ainsi, on voit que la courbe passe bien par $1/2 (P_1 + P_2)$. Le fait que la courbe soit tangente au premier et au dernier côtés du polygone caractéristique aux extrémités et qu'elle passe par le milieu du deuxième permet de vite cerner son allure et de la tracer rapidement [Boëmh-82].

6. Deux arcs de courbes C_1 et C_2 se raccordant en un point commun sont tangents si seulement si le dernier côté du polygone caractéristique du premier est colinéaire avec le premier côté du second, c'est à dire :

$$P_3^1 = P_0^2 \quad \text{et} \quad P_1^2 - P_0^2 = \lambda(P_3^1 - P_2^1).$$

7. Triangle de Pascal et transformations linéaires paramétriques

L'analyse de la section précédente peut être menée aisément à l'aide d'un opérateur matriciel simple qui découle d'une des deux formulations matricielles du théorème binomial. Dans ces deux formulations, qui correspondent en fait à deux généralisations successives de la

réurrence binomiale classique, le triangle de Pascal, présenté sous forme d'une matrice triangulaire supérieure, joue un rôle capital et unificateur de la théorie de représentation paramétrique polynomiale.

La première généralisation de la réurrence binomiale engendre un ensemble de matrices généralisant le triangle de Pascal. Par rapport à la multiplication de matrices, cet ensemble forme un groupe abélien isomorphe au groupe additif \mathbb{R} (cf. chap. 3, part. I). Nous employerons désormais le symbole \mathbf{G} pour désigner le triangle de Pascal (cf. chap. 3, part. I).

La matrice \mathbf{G} , pouvant être élevée à une puissance réelle quelconque, rend bien compte de toute translation paramétrique de pas α . Pour cela, il suffit de faire précéder la matrice \mathbf{A} (de la forme (3) ci-dessus) de \mathbf{G}^α , ce qui donne le point de la courbe correspondant à la valeur paramétrique $(\alpha + t)$. Ainsi, on montrera que :

$$C(\alpha + t) = \mathbf{v}_t \mathbf{G}^\alpha \mathbf{A} \mathbf{P}$$

Partant, l'écriture \mathbf{G}^α n'est pas une notation symbolique de simple commodité. Elle désigne une véritable opération d'exponentiation (cf. Théorème 3.2, §2.2.2, chap.3, part. I). De ce fait, les longues et onéreuses manipulations habituelles des coefficients binomiaux se trouvent remplacées par des simples additions des exposants de \mathbf{G} pour traduire les suites de déplacements dans l'intervalle paramétrique. De surcroît, l'algorithme de calcul de \mathbf{G}^α est fondamentalement celui de la construction du triangle de Pascal.

Comme conséquence immédiate, \mathbf{G}^α modélise l'évaluation de l'arc de courbe, quel que soit le choix de fonctions de base. Pour les carreaux de surfaces bi-paramétriques, il suffirait de doubler l'opérateur \mathbf{G}^α par sa transposée.

Comme deuxième conséquence, l'opérateur matriciel, noté \mathbf{K} , obtenu en mettant à zéro tous les éléments de \mathbf{G} exceptés ceux de sa première sur-diagonale, est précisément tout ce qu'il faut pour traduire la dérivation paramétrique (cf. chap. 5, part. I).

Sur un tout autre plan, on découvre également que \mathbf{G}^{-1} est l'opérateur matriciel sous-jacent au procédé de calcul de différences finies (cf. §2.3.1, chap. 3, part. I).

Mais, à nos yeux, la conséquence la plus profonde de cette première forme du théorème binomial est la structure de données que représente l'opérateur noté symboliquement \mathbf{IG}^α et défini comme suit (cf. §2.2.1, chap. 5, part. I) :

La matrice de lissage (cf. chap. suivant) \mathbf{A} étant donnée et supposée de taille $(n+1) \times (n+1)$, on pose :

$$\mathbf{IG}^\alpha = \text{diag}(0! \ 1! \ 2! \ \dots \ n!) * \mathbf{G}^\alpha * \mathbf{A} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (1.1)$$

où \mathbf{G} (extensible par construction) est aussi rapportée au format $(n+1) \times (n+1)$.

Il s'avère que (cf. Eq. 5.44, chap. 5, part. I) :

$$\mathbf{IG}^\alpha \mathbf{P} = {}^t(C(\alpha) \ C^{(1)}(\alpha) \ \dots \ C^{(n)}(\alpha)) \quad (1.2)$$

Ainsi, au point de la courbe correspondant à la valeur paramétrique α , l'opérateur \mathbf{IG}^α permet d'obtenir *en même temps l'évaluation et toutes les dérivées depuis l'ordre 1 à l'ordre n* . Non seulement l'opérateur \mathbf{IG}^α remplace la dérivation paramétrique par un simple indexage de ses lignes, mais d'une manière fort commode, il se déplace le long de la courbe (comme le trièdre de Frenet dont il facilite d'ailleurs le calcul) et fournit les données nécessaires à l'analyse géométrique complète en tout point de la courbe (cf. Annexe X). On ne peut pas demander mieux pour décrire la trajectoire d'un outil dont l'extrémité devra sculpter la courbe.

Pour les carreaux de surfaces bi-paramétriques, il suffira de doubler \mathbf{IG}^α par l'opérateur ${}^t\mathbf{IG}^\beta$ déduit du précédent essentiellement par transposition (cf. ci-dessous). Si les arcs de courbes dans les deux directions paramétriques sont de même degré, alors \mathbf{IG}^α et ${}^t\mathbf{IG}^\beta$ sont de même format.

En particulier, l'analyse d'un arc de courbe en son point initial est fournie par $\mathbf{IG}^0 \mathbf{P}$ tandis que $\mathbf{IG}^1 \mathbf{P}$ en fait de même pour le point terminal. Ainsi, grâce à ces deux opérateurs, sans avoir à effectuer la dérivation explicite, nous obtenons rapidement la caractérisation géométrique complète de chaque arc en ses extrémités.

De plus, un simple examen de la structure de \mathbf{IG}^0 et de \mathbf{IG}^1 révèle d'une manière éloquente

les caractéristiques géométriques intrinsèques à chaque choix de fonctions de base (cf. Annexe IX). La recherche de conditions de raccordement à la frontière de courbes (resp. surfaces) composites peut ainsi être automatisée à l'aide de IG^0 et IG^1 .

La deuxième généralisation du théorème binomial rend compte des changements d'échelle paramétrique. En effet, pour tout $\beta \in \mathbb{R}^*$, on montrera (cf. §1, chap. 3, part. I) que :

$$C(\beta t) = v_t D(\beta) * A P$$

où $D(\beta) = \text{diag}(1 \ \beta \ \beta^2 \ \dots \ \beta^n)$. L'ensemble de matrices $D(\beta)$ ($\forall \beta \in \mathbb{R}^*$), par rapport à la multiplication de matrices, définit une structure de groupe abélien isomorphe au groupe multiplicatif \mathbb{R}^* .

En composant les opérateurs $D(\beta)$ et G^α , on obtient une formulation plus générale du théorème binomial :

$$C(\alpha + \beta t) = v_t D(\beta) * G^\alpha * A P = v_t \eta_{\alpha, \beta} * A P$$

L'opérateur composite $\eta_{\alpha, \beta} = D(\beta) * G^\alpha$ est engendré également par une deuxième généralisation de la récurrence binomiale et se particularise tantôt comme opérateur de subdivision (cf. chap. 6, part. I), tantôt comme opérateur de changement de base (cf. chap. 7, part. I).

De plus, sous la forme particulière $\eta_{1-\beta, \beta}$ avec $\beta \in [0, 1]$, on obtient la matrice de fonctions de Bernstein-Bézier (paramétrées en β) dont les colonnes successives fournissent toutes les fonctions de base pour le système UNISURF de Bézier (cf. chap. 4, part. I).

Les deux généralisations matricielles du théorème binomial allègent sans commune mesure les manipulations algébriques des schémas paramétriques polynomiaux. Les manipulations usuelles se résument dans les quatre règles simples suivantes (cf. §2.4, chap. 3, part. I) :

1. $G^\alpha * G^\beta = G^{\alpha+\beta}$
2. $D(\alpha) * D(\beta) = D(\alpha+\beta)$
3. $D(\beta) * G^\alpha = G^{\alpha/\beta} * D(\beta)$ pour tout $\beta \neq 0$

$$4. G^\alpha * D(\beta) = D(\beta) * G^{\alpha\beta}$$

Lorsqu'on est sûr que $\beta \in \mathbb{R}^*$, les règles 3 et 4 se fusionnent en une seule. D'autre part, les deux formes du théorème binomial ainsi que ses quatre règles de calcul se généralisent au corps commutatif \mathbb{C} sans aucune difficulté théorique. Toutefois, l'utilité pratique de cette extension reste toujours à imaginer.

Les chapitres restants de cette première partie formalisent avec plus de rigueur l'esquisse que nous venons de tracer.

Le premier chapitre de la deuxième partie simule une caractérisation automatique de la géométrie d'un arc de courbe spécifié tour à tour par chacun des huit choix de fonctions de base présentés ci-dessus. Le deuxième présente l'étude empirique qui a motivé la proposition d'une base de six représentations classiques comprenant les systèmes de Ball, de Bernstein-Bézier, de B-spline cubique, de Hermite (resp. Ferguson), d'Overhauser et de Timmer. Le dernier chapitre proposera ensuite les algorithmes de codage et de décodage de cette base à partir d'un noyau restreint des paramètres caractéristiques associés à cet ensemble de représentations.

Dans ce mémoire, nous nous sommes volontairement limité à l'étude approfondie des arcs de courbes. Cependant, il n'est pas difficile d'étendre ces résultats aux carreaux bi-paramétriques. La méthode consisterait essentiellement à doubler les opérateurs matriciels qui modélisent les différentes transformations des arcs de courbe par leurs transposées. Cela, pour couvrir une deuxième direction paramétrique. Il se peut parfois que le degré des courbes dans les deux directions paramétriques ne soit pas le même. Dans de tels cas, il sera nécessaire d'ajuster la taille des opérateurs selon la direction paramétrique.

A titre d'illustration et pour conclure, considérons l'important problème de dérivation bi-paramétrique :

Considérons un carreau de surface bi-paramétrique dont le point courant s'exprime sous la forme :

$$C(s, t) = v_s A P^t A^t v_t \quad (1.3)$$

où l'on suppose que :

1. s et $t \in [0, 1]$ sont les symboles respectifs des deux directions paramétriques ;
2. la représentation s'appuie sur le choix de $n + 1$ fonctions de base (caractérisées par la matrice de lissage A de format $(n + 1) \times (n + 1)$) ; ce choix est le même pour les deux directions paramétriques ; toutefois, on peut associer deux choix distincts ;
3. P est le réseau caractéristique [Bézier-86, pp.115-116] de $(n + 1)(n + 1)$ points $P_{i,j} \in \mathbb{R}^p$ où les indices i et j vont en croissant pour les directions paramétriques respectives s et t .

La dérivée partielle d'ordre j par rapport à s (évaluée à la valeur paramétrique $s = \alpha$) s'écrira tout simplement de la manière suivante :

$$\left. \frac{\partial^{(j)} C(s, t)}{\partial s^{(j)}} \right|_{s=\alpha} = v_\alpha K^j * A P^t A^t v_t \quad (1.4)$$

Pour la dérivée partielle d'ordre i par rapport à t (évaluée en $t = \beta$), on écrira :

$$\left. \frac{\partial^{(i)} C(s, t)}{\partial t^{(i)}} \right|_{t=\beta} = v_s A P^t A *^t K^i v_\beta \quad (1.5)$$

La dérivée partielle mixte au point paramétrique $(\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1]$ et d'ordres respectifs j et i par rapport à s et t s'écrira :

$$\left. \frac{\partial^{(j+i)} C(s, t)}{\partial s^{(j)} \partial t^{(i)}} \right|_{s=\alpha, t=\beta} = v_\alpha K^j * A P^t A *^t K^i v_\beta \quad (1.6)$$

Quant à l'analyse géométrique complète (i.e. le calcul de toutes les dérivées partielles, depuis

l'ordre 0 à l'ordre n , au point paramétrique (α, t) suivant la direction paramétrique s , elle est donnée par :

$$\left[\left. \frac{\partial^{(j)} C(s, t)}{\partial s^{(j)}} \right|_{s=\alpha} \right]_{j=0 \dots n} = I G^\alpha P^t A^t v_t \quad (1.7)$$

L'analyse analogue en (s, β) suivant la direction paramétrique t s'exprimera comme :

$$\left[\left. \frac{\partial^{(j)} C(s, t)}{\partial t^{(j)}} \right|_{t=\beta} \right]_{j=0 \dots n} = v_s A P^t I G^\beta \quad (1.8)$$

+ + + +

CHAPITRE 2

+ + + +

Schémas paramétriques polynomiaux

CHAPITRE 2

Schémas paramétriques polynomiaux

Introduction

Les objectifs de ce chapitre sont la définition du vocabulaire de base employé tout au long de ce mémoire, le choix de modèle de représentation pour les segments de courbes, la relation entre différentes représentations équivalentes ainsi que l'extraction des paramètres géométriques simples à partir de la représentation choisie afin de faciliter une analyse automatique éventuelle de la courbe. Les propriétés d'un opérateur permettant de passer d'une forme de représentation dite 'croissante' à la forme équivalente dite 'décroissante' sont étudiées avec une attention particulière. Ce même opérateur permet d'inverser le sens de paramétrisation des arcs de courbes et permet aussi une définition matricielle automatisable de la symétrie par permutation (cf. Théorème 5.12, §2.3.2.1, chap. 5). Pour clore le chapitre, on présentera un exemple en guise de résumé.

1. Spécification

1.1. Notion de schéma

Un schéma paramétrique polynomial de *degré* n repose sur l'espace linéaire \mathcal{P}_n des fonctions polynomiales mono-paramètres à valeurs réelles. Définir un schéma revient d'une part, à choisir une suite ordonnée de $n + 1$ polynômes *linéairement indépendants* $\phi_i, i = 0, \dots, n$, dans \mathcal{P}_n et d'autre part, à limiter la variation du paramètre à un sous-intervalle

$[a, b] \subset \mathbb{R}$. Les fonctions ϕ_i s'appellent **des fonctions de lissage**. On utilise aussi dans la littérature la terminologie suivante : *fonctions d'interpolation* [Bézier-86, p. 56], *fonctions de base* [Plastock-87, p. 170], terme que nous avons employé au chapitre précédent, *fonction de pondération*, (en anglais : *weighting functions* [Gordon-74, p. 294], *basis functions* [Boehm-82, p. 205], *shape functions* [Noweiler-84] [Norrie-73, pp. 26, 43], ce dernier terme est employé notamment pour les méthodes des éléments finis). La plage de variation du paramètre $[a, b]$ s'appelle **intervalle de paramètre** ou encore **espace de paramètre**.

En désignant par Φ la suite des ϕ_i et par t le paramètre, on écrira :

$$\Phi(t) = (\phi_i(t)) \quad i = 0, \dots, n, \text{ pour } t \in [a, b] \quad (2.1)$$

Ainsi un schéma \mathcal{S} est défini par la donnée :

$$\mathcal{S} = \{\Phi, [a, b]\} \quad (2.2)$$

Remarque 2.1 : Egalité de schémas

Au sens de l'équation (2.2), deux schémas sont identiques si et seulement s'ils possèdent les mêmes fonctions de lissage dans un ordre identique et si leurs intervalles de paramètre sont confondus.

Remarque 2.2 : Conversion de schémas

Au sens de la remarque 2.1, toute permutation de l'ordre des fonctions de lissage ainsi que de leur pondération par des scalaires constitue une *conversion* du schéma initial. Par ailleurs, toute modification de l'intervalle de paramètre est aussi une conversion.

1.2. Représentations de schéma.

1.2.1. Forme vectorielle

On emploie, souvent d'une manière implicite, l'interprétation vectorielle symbolisée par l'équation (2.1) rappelée ici :

$$\Phi(t) = (\phi_i(t)) \quad i = 0, \dots, n, \text{ pour } t \in [a, b]$$

pour représenter un schéma [Clark-76] [Goldman-84, p. 204] [Ferguson-64, p. 227] [Chang-82, p. 346]. Chaque valeur t du paramètre définit un vecteur obtenu en évaluant les $\phi_i(t)$ dans l'ordre des i .

La représentation vectorielle a l'inconvénient majeur suivant : lorsque l'intervalle de paramètre des ϕ_i subit une transformation (une translation par exemple), il est difficile de trouver un opérateur explicite qui produise la transformée équivalente sur $\Phi(t)$. Pour résoudre de tels problèmes, ou bien on change de représentation, ou bien on réévalue chaque $\phi_i(t)$ séparément. Cette dernière démarche, parce qu'elle s'appuie souvent sur la *spécificité* des fonctions de lissage, ne permet pas de *généraliser* les résultats à l'ensemble

des schémas paramétriques polynomiaux.

Un des *leitmotifs* de ce travail étant de caractériser, sous formes à la fois précises et générales, les modèles mathématiques sous-jacents aux transformations linéaires de l'espace de paramètre, nous n'emploierons dans la suite de cette thèse que d'une manière restreinte la représentation d'un schéma sous forme vectorielle.

1.2.2. Formes matricielles

La base canonique de l'espace \mathcal{P}_n s'écrit tantôt suivant le degré croissant des monômes t^i , tantôt suivant le degré décroissant. Par convention, nous écrirons :

$$v_i = (1, t, t^2, \dots, t^n)$$

pour désigner la forme croissante et :

$$u_i = (t^n, t^{n-1}, \dots, t, 1)$$

pour la forme décroissante.

Pour la forme croissante, chaque fonction de lissage ϕ_i est spécifiée par son vecteur coefficient dont l'ordre des composantes correspond au degré croissant des t^i . La suite de fonctions de lissage présentées sous forme croissante peut être alors exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\Phi(t) = (1, t, t^2, \dots, t^n) A = v_i A \quad \forall t \in [a, b] \quad (2.3)$$

La matrice A s'appelle **matrice de lissage**. Ses vecteurs colonnes sont les vecteurs coefficients des fonctions de lissage homologues. Une fois l'intervalle de paramètre fixé, la matrice de lissage caractérise donc la suite de fonctions de lissage par rapport à la base polynomiale standard. Cette matrice est non singulière compte tenu de l'indépendance linéaire des ϕ_i .

Le passage de la forme croissante à la forme décroissante peut être formalisé comme suit :

1. Définir la matrice carrée d'ordre $n+1$, notée R comme :

$$R_{i,j} = \delta_n^{i+j} \quad \text{pour}$$

$i, j = 0, \dots, n$

où δ_n^{i+j} désigne le symbole de Kronecker. Plus explicitement :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Le symbole 0, dans une matrice, signifiera souvent un sous-bloc de composantes nulles (ici deux sous-blocs triangulaires). Il dénote, parfois aussi, un vecteur nul. Le contexte aidant, on trouvera facilement la signification qui convient dans tous les cas.

2. Effectuer les transformations suivantes sur les paramètres de la forme croissante :

$$u_t = v_t R \quad (2.4)$$

$$B = R * A \quad (2.5)$$

pour obtenir la forme matricielle décroissante cherchée :

$$\Phi(t) = (t^n, t^{n-1}, \dots, t, 1) B = u_t B \quad \forall t \in [a,b] \quad (2.6)$$

La matrice B est la matrice de lissage correspondant à la forme décroissante. La matrice R de (2.4) et (2.5) s'appelle **matrice de réflexion** (en anglais, reflection matrix [Davis-65, p. 154]). La relation (2.4) est un corollaire de la propriété R3 (cf. §1.2.3 ci-après) tandis que (2.6) découle de R2 qui démontre que R est son propre inverse.

1.2.3 Propriétés de la matrice R

La matrice R possède de nombreuses propriétés d'intérêt pratique qu'il convient d'étudier amplement pour trois raisons. En premier lieu, elle facilite la conversion des résultats entre la forme croissante et la forme décroissante. En deuxième lieu, elle fournit un moyen simple pour inverser le sens de paramétrisation d'une courbe. Enfin, elle permet de caractériser certaines propriétés fondamentales des schémas. A titre d'exemple, elle permet une formulation opérationnelle de la propriété de symétrie par permutation [Bézier-77, p. 45] [Lane-80, p. 36 Lemma 2.2]. Celle-ci est notamment vérifiée par les cinq choix suivants de fonctions de base présentés au chapitre 1 :

- le schéma cubique de Ball [Ball-78, pp. 181-182][Bézier-77, pp. 38-42],
- les schémas de Bézier [Bézier-77, p. 80] [Bézier-86, p. 85] [Faux-85, pp.129-137],
- le schéma de B-spline [Catmull-78, p. 35],
- le schéma cubique d'Overhauser [Brewer-77, pp. 132-137],
- le schéma cubique de Timmer [Timmer-80, pp.25-28].

La symétrie par permutation (cf. § 2.3.2, chap. 5 et §3, chap. 7 Part. I) est à l'origine d'une représentation unifiée de ces schémas dans une même base. Les aspects théoriques et algorithmiques de cette base seront respectivement étudiés au chapitre 7 de cette première partie et au chapitre 3 de la deuxième.

Voici la liste des principales propriétés de la matrice R :

R1 : La matrice R est sa propre transposée : ${}^t R = R$

Par définition, on a :

$$R_{i,j} = \delta_n^{i+j} = \delta_n^{j+i} = R_{j,i} \Leftrightarrow {}^t R = R$$

R2 : La matrice R est son propre inverse : $R^{-1} = R$

Pour cela, il suffit de montrer que $R^2 = I$. Ceci se démontre comme suit :

$$\begin{aligned} R_{i,j}^2 &= R_{i,0} R_{0,j} + R_{i,1} R_{1,j} + \dots + R_{i,n-i} R_{n-i,j} + \dots + R_{i,n} R_{n,j} \\ &= R_{i,n-i} R_{n-i,j} && [\text{car } R_{i,k} = \delta_n^{i+k}] \\ &= R_{n-i,j} && [\text{car } R_{i,n-i} = \delta_n^{i+n-i} = \delta_n^n = I] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \delta_n^{-i+j} && [\text{car } R_{i,k} = \delta_n^{i+k}] \\
 &= \delta_0^{-i+j} && [\text{car } n-i+j=n \Leftrightarrow -i+j=0] \\
 &= \delta_i^j && [\text{car } -i+j=0 \Leftrightarrow j=i]
 \end{aligned}$$

Or

$$R_{i,j}^2 = \delta_i^j \Leftrightarrow R^2 = I \quad \text{CQFD.}$$

R est donc son propre inverse.

R3: $(a_0, a_1, \dots, a_n)R = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$: R renverse l'ordre des composantes de vecteurs lignes (voir fig. 2.1a)

En effet, soit $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et posons: $b = a * R = (b_0, b_1, \dots, b_n)$.

Pour $j = 0, \dots, n$, on a :

$$b_j = a_0 R_{0,j} + a_1 R_{1,j} + \dots + a_{n-j} R_{n-j,j} + \dots + a_n R_{n,j}$$

Comme $R_{i,j} = \delta_n^{i+j}$, on a $b_j = a_{n-j}$. D'où :

$$a * R = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) \quad (2.7)$$

La propriété est ainsi établie et par le même coup démontre la relation (2.4) car en prenant $v_i = (t^i)_{i=0,1,\dots,n}$ pour a dans (2.4), on obtient $b = (t^{n-i})_{i=0,1,\dots,n}$ qui est identique à la forme décroissante u_i .

R4: Multiplier un vecteur colonne à gauche par R revient à inverser l'ordre des composantes du vecteur (voir fig. 2.1b).

La démonstration consiste simplement à prendre la transposée de deux membres de l'équation (2.7) et à appliquer R1 pour simplifier le membre de gauche :

$${}^t(a * R) = {}^tR * {}^t a = R * {}^t a = {}^t(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) \quad (2.8)$$

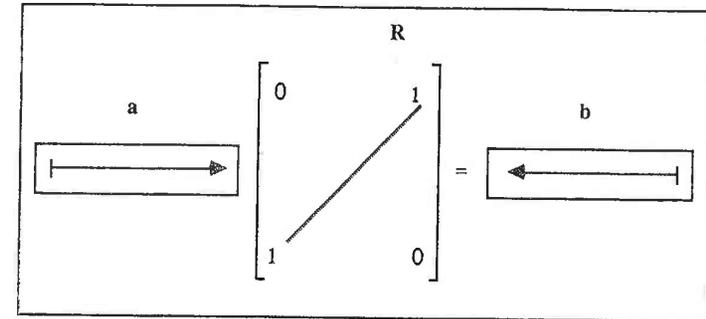


Figure 2.1a Multiplication à droite par R avec inversion de l'ordre des composantes du vecteur ligne a.

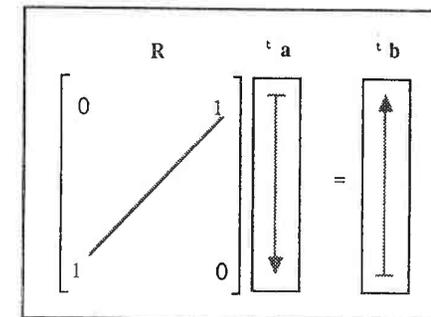


Figure 2.1b Multiplication à gauche par R avec inversion de l'ordre des composantes du vecteur colonne 'a.

R5: Multiplier une matrice B de n + 1 lignes à gauche par R revient à inverser l'ordre des composantes de chacun de ses vecteurs colonnes (voir Fig. 2.2.), c.-à-d. :

$$B' = R * B \Leftrightarrow B'_{i,j} = B_{n-i,j} \quad \text{pour } i = 0, \dots, n \quad \text{et } \forall j \in \mathbb{N}^* \quad (2.9)$$

En effet, il suffit d'appliquer la propriété R4 à chaque colonne de B.

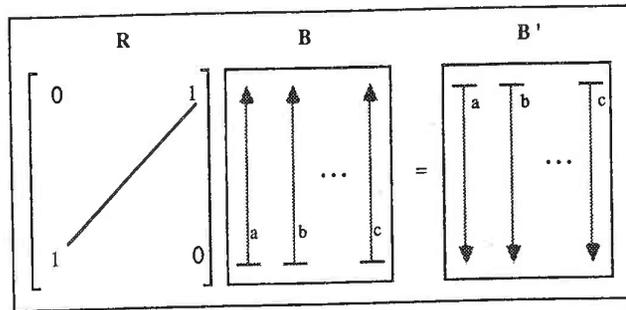


Figure 2.2. Multiplier une matrice B à gauche par R revient à inverser l'ordre des composantes de chacun de ses vecteurs colonnes.

R6 : Multiplier une matrice B de $n + 1$ colonnes à droite par R revient à inverser l'ordre des composantes de chacun de ses vecteurs lignes (voir Fig. 2.3.), c.-à-d. :

$$B' = B * R \Leftrightarrow B'_{i,j} = B_{i,n-j} \quad \text{pour } j = 0, \dots, n \text{ et } i \in \mathbb{N}^* \quad (2.10)$$

Il suffit d'appliquer la propriété R3 à chaque ligne de B .

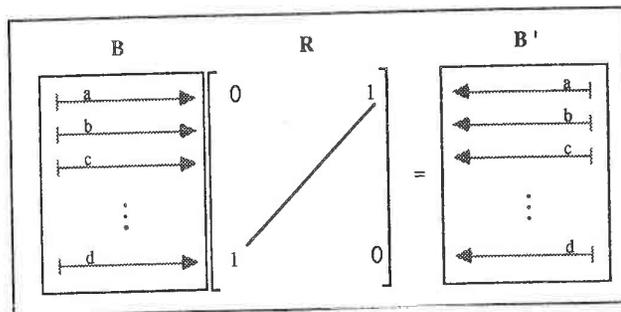


Figure 2.3. Agissant à droite, R inverse l'ordre des composantes de chaque vecteur ligne de B .

R7 : Multiplier une matrice carrée B d'ordre identique à celui de R de deux côtés par R

revient à inverser l'ordre des lignes suivi de l'inversion de l'ordre des colonnes de la matrice résultante (voir Fig. 2.4.). Que l'on inverse l'ordre des lignes d'abord avant d'inverser l'ordre des colonnes ou bien les colonnes d'abord avant les lignes n'a aucune importance. Dans tous les cas, on obtient :

$$B' = R * B * R \Leftrightarrow B'_{i,j} = B_{n-i, n-j} \quad \text{pour } i, j = 0, \dots, n \quad (2.11)$$

En effet, il suffit d'appliquer les propriétés R5 et R6 ci-dessus dans un ordre quelconque.

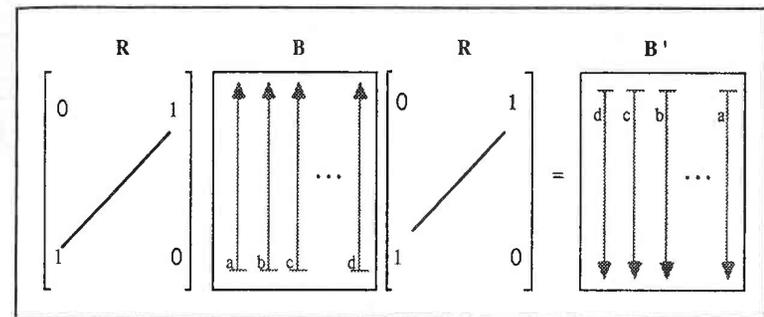


Figure 2.4. Multiplication d'une matrice carrée de deux côtés par R :

- l'ordre des composantes des vecteurs colonnes est inversé,
- l'ordre des vecteurs colonnes est ensuite inversé.

R8 : Décomposition cardinale de matrices carrées et propagation de permutation :

Les propriétés R1, ..., R7 résument les effets qu'a R sur les vecteurs et sur les matrices, ces dernières étant considérées comme formées soit de vecteurs lignes soit de vecteurs colonnes. A propos de la propriété R7, il existe cependant une autre interprétation de l'effet de R sur toute matrice carrée qu'elle prend en "sandwich".

$$R_{n+1} = \begin{bmatrix} 0_{\frac{n+1}{2}} & R_{\frac{n+1}{2}} \\ R_{\frac{n+1}{2}} & 0_{\frac{n+1}{2}} \end{bmatrix}$$

Figure 2.5 : Décomposition cardinale de R avec n supposé impair

En effet, toute matrice carrée M peut être décomposée en quatre sous-matrices cardinales $m_0, m_1, m_2,$ et m_3 comme le montre la figure 2.5 dans le cas de la matrice R. Voici la signification des sous-matrices m_i :

m_0 : sous-matrice cardinale nord-ouest, m_1 : sous-matrice cardinale nord-est,
 m_3 : sous-matrice cardinale sud-ouest, m_2 : sous-matrice cardinale sud-est.

En supposant que M soit d'ordre $n+1$, il existe deux cas à considérer : *n impair* et *n pair*.

n est impair :

Les quatre sous-matrices cardinales de format $[(n+1)/2] \times [(n+1)/2]$ forment une partition de M. De même pour la matrice R. Toutefois, dans ce dernier cas, les deux sous-blocs situés sur la diagonale principale sont des matrices nulles tandis que les deux autres sont identiques et de forme réduite de R (cf. fig. 2.5). Soit $M' = R * M * R$ et effectuons la multiplication matricielle par blocs (cf. fig. 2.6). Nous obtenons les quatres sous-matrices cardinales m'_i comme suit :

$$\begin{aligned} m'_0 &= r * m_2 * r & m'_1 &= r * m_3 * r \\ m'_2 &= r * m_0 * r & m'_3 &= r * m_1 * r \end{aligned}$$

avec :

$$r = R_{(n+1)/2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 & m_1 \\ m_3 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r m_2 r & r m_3 r \\ r m_1 r & r m_0 r \end{bmatrix}$$

R M R R M R

Figure 2.6 :Permutation récursive des sous-matrices cardinales diagonalement opposées.

De ces expressions, on voit que la matrice R effectue une permutation des matrices cardinales diagonalement opposées (m_0 et m_2 d'une part et m_1 et m_3 de l'autre). La matrice r effectue à son tour une permutation analogue des matrices cardinales des m_i . Ce processus se propage récursivement pour s'arrêter au niveau de sous-matrices singletons.

n est pair :

Les quatre sous-matrices cardinales de M et celles de R sont d'ordre $n/2$. Dans les deux cas, les sous-blocs de l'est (e.g. m_1 et m_2 pour M) sont séparés des sous-blocs de l'ouest (m_0 et m_3 pour M) par le vecteur de la colonne médiane (dont l'indice vaut $n/2$). Les composantes de celle-ci n'appartiennent à aucune des sous-matrices cardinales. De même, les sous-bloc du nord (m_0 et m_1 pour M) sont séparés de ceux du sud (m_2 et m_3 pour M) par le vecteur de la ligne médiane (d'indice $n/2$) de la matrice. Comme dans le cas impair, en faisant $M' = R * M * R$, les sous-matrices cardinales m'_i s'expriment de manière identique. Cependant, les vecteurs de la ligne médiane et de la colonne médiane doivent être inversés suivant R3 et R4 respectivement comme suit :

$$M'(n/2, j) = M(n/2, n - j) \qquad M'(i, n/2) = M(n - i, n/2)$$

Dans ce cas aussi, le processus se propage pour s'arrêter avec des sous-matrices singletons.

En définitive et quel que soit le format de M, l'opération $R * M * R$ a pour effet de permuter les deux composantes $M(i, j)$ et $M(n-i, n-j)$ entre eux. Ainsi, pour les positions

permutées entre elles, il s'agit d'une opération de symétrie centrale dont le centre coïncide avec l'intersection des médianes de la matrice.

Et si de plus, $M(i, j) = M(n-i, n-j)$, il s'ensuit alors que $R * M * R = M$. Dans ce cas, on dira que M a la propriété de **symétrie centrale** (cf. §1.2, chap. 7, part. I)

Remarque : Les propriétés R3 et R4 impliquent séparément R2.

1.2.4. Choix d'une forme

La forme croissante et la forme décroissante sont toutes deux d'emploi courant dans la littérature : [Faux-85][Lewis-81, p. 361 équ. (13)][Kjellander-83] emploient la forme croissante tandis que [Coons-74, p. 1-16] [Rogers-76] [Brewer-77] [Cohen-69, pp. 297-307] [Kochanek-84, pp. 33-41] [Mortenson-85] emploient la forme décroissante. Aucun texte dans la littérature ne mentionne les raisons qui conduisent à choisir l'une ou l'autre. Par habitude personnelle, nous utiliserons la forme croissante. Toutefois en s'appuyant sur l'opérateur R étudié ci-dessus, on retrouve facilement l'analogue de la forme décroissante pour tous les résultats présentés dans cette thèse. Aussi, nous ne reviendrons plus sur la forme décroissante.

2. Schéma de courbe

2.1. Deux décisions

Ayant choisi un schéma \mathcal{S} , deux décisions supplémentaires président au passage à un schéma de courbe :

- le choix de l'espace objet, c'est-à-dire l'espace euclidien \mathcal{E} où la courbe est entièrement définie,
- le choix du polygone caractéristique qui servira par la suite comme la transcription mathématique de la courbe résultante.

L'espace \mathcal{E} peut avoir une dimension finie quelconque mais on travaille habituellement dans 2D ou dans 3D. C'est à l'aide du polygone caractéristique que l'utilisateur contrôlera et modifiera la forme de tracé de la courbe. Il est formé d'une suite ordonnée de $n + 1$ points

$P_i \in \mathcal{E}$, $i = 0, \dots, n$. Considéré comme un vecteur colonne des points, on écrira :

$$P = {}^t(P_0, P_1, \dots, P_n) \quad (2.12)$$

Les P_i sont des vecteurs position de \mathcal{E} (cf. fig.2.7) et P les présente sous forme d'un tableau colonne. Dans la pratique, on a :

$$P_i = \begin{cases} (x_i, y_i) & \text{si } \mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \\ (x_i, y_i, z_i) & \text{si } \mathcal{E} = \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

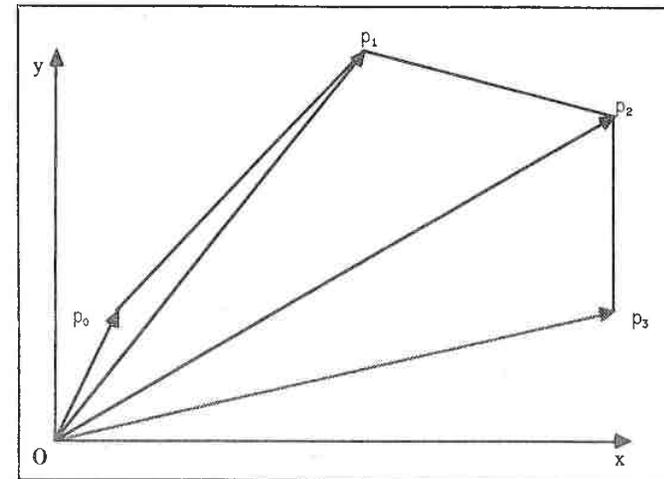


Figure 2.7 : Polygone caractéristique d'un schéma de degré trois

D'une manière plus générale, nous supposons que $P_i \in \mathbb{R}^p = \mathcal{E}$ avec $P_i = (P_i^1 \ P_i^2 \ \dots \ P_i^p)$ et $i = 0, 1, \dots, n$.

2.2. Spécification de schéma de courbe

Ainsi, un schéma de courbe est entièrement défini par la donnée :

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{S}, \mathcal{E}, P\} \quad (2.13)$$

Remarques 2.3. :

A priori, la seule signification géométrique que nous attribuons aux P_i est qu'ils désignent des vecteurs positions de l'espace objet. *Un système autonome de transcription mathématique de formes doit être en mesure de trouver les interprétations géométriques implicites à la spécification.*

A ce titre, nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1. :

La géométrie d'un schéma de courbe est déterminée a priori par le choix de ses fonctions de lissage et par l'ordre dans lequel elles se présentent. Nous partons de l'hypothèse supplémentaire évidente que la matrice de lissage contient les renseignements géométriques nécessaires pour caractériser cette géométrie.

2.2.1. Expression du point courant : interprétation matricielle

Partant de l'interprétation matricielle de \mathcal{S} , le point courant du tracé de courbe spécifiée par \mathcal{C} est donné par :

$$C(t) = v_t A P \quad \text{pour tout } t \in [a, b] \quad (2.14)$$

Définition 2.1.

On appelle courbe de base [Bézier-1986, p.67] ou encore arc de courbe le tracé de courbe déterminé par l'équation (2.14).

Il se peut que l'on connaisse d'avance, pour la courbe de base, l'origine $C(a)$ et l'extrémité $C(b)$ ainsi que d'autres contraintes géométriques en nombre suffisant en ces points pour déterminer le polygone caractéristique P en fonction de ces contraintes. On aboutit ainsi à la spécification de la courbe de base sous sa **forme géométrique** [Peters-74, pp. 262-264] [Mortenson-85, pp. 34-37]. C'est dans ce sens que, dans la littérature anglo-saxonne, P est habituellement aussi appelé matrice des coefficients géométriques (*geometry matrix* in [Forrest-80], *matrix of geometric coefficients* in [Mortenson-85] or again, *control points* in [Farin-83]). Nous verrons, notamment au chapitre 1 de la Partie II, comment retrouver la forme géométrique d'une courbe partant des indicateurs de géométrie.

D'autre part, en posant :

$$B = A P \quad (2.15)$$

on obtient une forme équivalente :

$$C(t) = v_t B = \sum_{i=0}^n B_i t^i \quad (2.16)$$

dite **forme algébrique** [Mortenson-85] ou encore **forme polynomiale** [Bézier-77, p. 80] dans laquelle B est la matrice des **coefficients algébriques**.

Il découle de l'équation (2.15) que :

$$P = A^{-1} * B \quad (2.17)$$

La spécification d'une courbe de base suivant l'équation (2.14) présente trois aspects intéressants pour la modélisation des schémas de courbes paramétriques polynomiales :

1. Elle permet une approche théorique homogène de l'ensemble de schémas de courbes car il est possible d'associer aux transformations linéaires de $[a, b]$ des opérateurs qui sont invariants par rapport à la matrice de lissage (cf. chapitre suivant où les éléments de cette théorie sont formalisés).
2. Toute matrice carrée inversible peut être considérée comme la matrice de lissage d'un schéma de courbe au sens de l'équation (2.14). Ce fait élargit le champ des schémas de courbes envisageables.
3. Elle permet de présenter dans une même moule théorique les modifications de schéma induites par des transformations linéaires de l'espace de paramètre.

Ce troisième aspect nous a paru intéressant et a constitué un axe principal de nos préoccupations tout au long de ce travail, comme nous l'avons souligné au chapitre précédent.

2.2.2 Intervalle normalisé et indicateurs de géométrie

Parce qu'il simplifie énormément les calculs, l'intervalle de paramètre normalisé $[0, 1]$ est devenu un standard quasi universel.

Cependant une particularité de cette intervalle demeure peu explorée d'une façon systématique :

En posant $t = 0$, d'après l'équation (2.3)

$$C(0) = (1, 0, \dots, 0) \mathbf{A} \quad * \mathbf{P} = \mathbf{A}(0, *) \mathbf{P} \quad (2.18)$$

où $\mathbf{A}(0, *)$ désigne la première ligne de la matrice de lissage. On voit bien que les composantes de $\mathbf{A}(0, *)$ déterminent le poids de chaque composante de \mathbf{P} dans le calcul du point initial de la courbe ($t = 0$). C'est dans ce sens que nous introduisons la terminologie suivante:

*La première ligne de toute matrice de lissage constitue un **indicateur de géométrie** pour l'expression de la condition de continuité d'ordre zéro à l'origine d'une courbe de base définie sur $[0, 1]$. Par abus de langage et pour plus de brièveté, nous dirons que $\mathbf{A}(0,*)$ est un **indicateur de géométrie (ou conditions) d'ordre zéro en $t = 0$** .*

De même en faisant $t = 1$ dans l'équation (2.3), on observe que :

$$C(1) = (1, 1, \dots, 1) \mathbf{A} \quad \mathbf{P} = \mathbf{v}_1 \mathbf{A} \quad \mathbf{P} \quad (2.19)$$

On vérifie que le produit $\mathbf{v}_1 \mathbf{A}$ donne un vecteur ligne dont les composantes sont la somme

des colonnes correspondantes de la matrice \mathbf{A} . En écrivant

$$csv(\mathbf{A}) = (1, 1, \dots, 1) \mathbf{A} = \mathbf{v}_1 \mathbf{A} \quad (2.20)$$

où l'opérateur csv (qui veut dire "column sum vector" en anglais), appliqué à une matrice, ramène le vecteur ligne de composantes égales aux sommes des colonnes respectives de la matrice.

*Par analogie avec $\mathbf{A}(0, *)$, nous dirons que $csv(\mathbf{A})$ est l'**indicateur de géométrie d'ordre zéro en $t = 1$** ou encore l'**indicateur de conditions d'ordre zéro en $t = 1$** .*

Avec une modélisation appropriée de la dérivation des schémas paramétriques polynomiaux (cf. chap. 5, partie I), on définira les indicateurs de géométrie d'ordre quelconque en $t = 0$ et en $t = 1$, en s'appuyant sur les lignes successives de la matrice de lissage. Moyenant la technique de segmentation (cf. chap. 6 de cette partie), les formules développés au points $t \in \{0, 1\}$ peuvent être appliqués en tout autre point de l'intervalle de paramètre comme l'a souligné Goldman dans [Goldman-83, p.159]. Mais, il y a de mieux encore : grâce à la généralisation du théorème binomial (objet du chapitre suivant), on définira un opérateur matriciel qui réunit tous les indicateurs de géométrie permettant d'effectuer une analyse géométrique complète en tout point paramétrique.

2.3. Schéma de Bernstein-Bézier cubique

En guise de résumé, illustrons les points essentiels de ce chapitre en considérant l'exemple du schéma cubique de Bernstein-Bézier [Gasson-83, pp. 480-481][Faux-85, pp.129-134][Forrest-71, pp. 71-79].

Fonctions de lissage :

On a vu au chapitre précédent que les fonctions de lissage (ou fonctions de base) sont :

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\ \phi_1(t) &= 3(1-t)^2 t = 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ \phi_2(t) &= 3(1-t)t^2 = 3t^2 - 3t^3 \\ \phi_3(t) &= t^3 = t^3 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\phi_i(t) = C_3^i (1-t)^{3-i} t^i \quad \text{pour } i = 0, \dots, 3$$

et :

$$\Phi_{Bé} = (\phi_i)_{i=0, \dots, 3}$$

L'intervalle de paramètre est normalisé, c'est-à-dire : $t \in [0, 1]$.

Matrice de lissage :

De l'expression explicite des $\phi_i(t)$, on voit que :

$$A_{B\acute{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, $\Phi_{B\acute{e}}(t) = (1 \ t \ t^2 \ t^3) A_{B\acute{e}}$ ce qui, sous forme décroissante, s'écrit comme :

$$\Phi_{B\acute{e}}(t) = (t^3 \ t^2 \ t \ 1) R * A_{B\acute{e}}$$

On vérifie aisément que :

$$R * A_{B\acute{e}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schéma cubique $\mathcal{S}_{B\acute{e}}$:

De ce qui précède, on déduit que :

$$\mathcal{S}_{B\acute{e}} = \{\Phi_{B\acute{e}}, [0, 1]\} = \{A_{B\acute{e}}, [0, 1]\}$$

Schéma de courbe $\mathcal{C}_{B\acute{e}}$:

Soit \mathcal{E} un espace objet de dimension quelconque et $P_i \in \mathcal{E}$ pour $i = 0, 1, \dots, 3$.

$$\mathcal{C}_{B\acute{e}} = \{\mathcal{S}_{B\acute{e}}, \mathcal{E}, P\}$$

Expression du point courant de la courbe :

$$C(t) = (0 \ t \ t^2 \ t^3) A_{B\acute{e}} P \quad (2.21)$$

Continuité d'ordre zéro en $t = 0$:

Puisque :

$$A_{B\acute{e}}(0, *) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

il s'ensuit que :

$$A_{B\acute{e}}(0, *) P = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot (P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3) = P_0$$

Ainsi, la première ligne de la matrice de lissage permet de déduire la condition classique de continuité d'ordre zéro, pour le schéma cubique de Bernstein-Bézier, en $t = 0$ (cf. §6.3.1, prop. 3, chapitre précédent ; aussi dans [Bézier-86, pp.70-71]).

Continuité d'ordre zéro en $t = 1$:

On vérifie aisément que :

$$\text{csv}(A) = (0 \ 0 \ 0 \ 1)$$

d'où :

$$\text{csv}(A) P = (0 \ 0 \ 0 \ 1) \cdot (P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3) = P_3$$

Cela donne bien $C(1)$ comme obtenu au chapitre précédent (voir aussi [idem] et [Gasson-83, pp.480-482]).

Conclusion

L'analyse menée dans la dernière section pour le schéma cubique de Bernstein-Bézier se généralise à tous les schémas paramétriques polynomiaux.

Il convient de souligner que le concept d'indicateurs de géométrie se généralise aisément au-delà de l'ordre zéro. Mais, cette généralisation dépend d'une modélisation appropriée de la dérivation paramétrique (cf. chap. 5, partie I). Cela est, à son tour, tributaire de la théorie centrale de transformations paramétriques linéaires, théorie faisant précisément l'objet du chapitre suivant.

++++

CHAPITRE 3

++++

Groupes matriciels de Transformation polynomiale

CHAPITRE 3

Groupes matriciels de transformation polynomiale

Introduction

Un grand nombre de manipulations effectuées sur la transcription paramétrique polynomiale des formes peuvent être ramenées à la résolution du problème général suivant :

Soit une fonction polynomiale f de paramètre $t \in \mathbb{R}$, et de degré n

$$f(t) = (1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^n) \mathbf{a} = \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{a} \quad (3.1)$$

où $\mathbf{a} = {}^t(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n)$, avec $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$. Soit pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la transformation linéaire paramétrique : $\tau_{\alpha, \beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \alpha + \beta t$

Trouver l'expression correspondante de $(f \circ \tau_{\alpha, \beta})(t)$, où $f \circ \tau_{\alpha, \beta}$ désigne la composition des deux applications f et $\tau_{\alpha, \beta}$.

Nous présentons dans ce chapitre une solution simple et élégante qui, de plus, est facilement applicable dans des contextes divers et indépendamment du schéma de lissage considéré. Nous montrerons notamment que la solution au problème de transformation linéaire de paramètres se ramène à l'étude de deux groupes de matrices qui, par rapport à la multiplication matricielle, sont respectivement isomorphes aux deux structures classiques de groupe de \mathbb{R} . La solution préconisée est fondée sur la possibilité de décomposer une transformation linéaire arbitraire en une homothétie suivie d'une translation, soit : $\tau_{\alpha, \beta}(t) =$

$(T_\alpha \circ h_\beta)(t)$ où la transformation homothétique h_β est définie par : $h_\beta : t \mapsto \beta t$

tandis que la translation T_α est donnée par : $T_\alpha : t \mapsto \alpha + t$

On peut établir avec facilité les identités suivantes :

$$\text{a) } T_\alpha \circ h_\beta = h_\beta \circ T_{\alpha/\beta} = \tau_{\alpha, \beta} \quad \text{si } \beta \neq 0$$

$$\text{b) } T_{\alpha\beta} \circ h_\beta = h_\beta \circ T_\alpha = \tau_{\alpha\beta, \beta} \quad \text{pour tout } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}$$

$$c) T_{\alpha} \circ h_{\beta} = h_{\alpha} \circ T_1 \circ h_{\beta/\alpha} = \tau_{\alpha, \beta} \quad \text{si } \alpha \neq 0$$

1. Matrices de transformations homothétiques

La définition de la composition de fonctions [MacLane-68, p.5] permet d'écrire :

$$(f \circ h_{\beta})(t) = f(h_{\beta}(t)) = f(\beta t) = (1 \ (\beta t) \ (\beta t)^2 \ \dots \ (\beta t)^n) \mathbf{a}$$

ce qui peut s'écrire :

$$(f \circ h_{\beta})(t) = v_t D(\beta) \mathbf{a} \quad (3.2)$$

où la matrice $D(\beta)$ est définie par :

$$D(\beta)_{i,j} = \beta^i \delta_j^i \quad (3.3)$$

δ_j^i étant le symbole de Kronecker. Plus explicitement :

$$D(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta^n \end{bmatrix}$$

La matrice $D(\beta)$ sera appelée **matrice d'homothétie polynomiale**. C'est une matrice carrée d'ordre $n+1$, $n \geq 1$.

Théorème 3.1.

Soit l'ensemble des matrices d'homothétie polynomiale :

$$\mathcal{D} = \{ D(\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}^* \}$$

de dimension $(n+1) \times (n+1)$, avec $n \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$. \mathcal{D} muni de la loi de multiplication de matrices $(*)$ est alors un groupe abélien isomorphe au groupe multiplicatif de \mathbb{R}^* :

$$(\mathcal{D}, *, D(1), ^{-1}) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot, 1, ^{-1})$$

Remarques :

- dans $(\mathcal{D}, *, D(1), ^{-1})$, l'écriture $^{-1}$ désigne l'opérateur unaire :

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} : D(b) \mapsto D^{-1}(b)$$

- dans $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1, ^{-1})$, l'écriture $^{-1}$ désigne l'opérateur unaire :

$$\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* : \beta \mapsto 1/\beta = \beta^{-1}$$

- la notation adaptée pour la représentation de groupes suit celle employée par Bobrow et al. dans [Bobrow-74, p. 91] où un **groupe** est un quadruplet $(S, m, 1, i)$ dont $(S, m, 1)$ est un monoïde et i un opérateur unaire qui est l'inverse de m par rapport à 1 , c'est-à-dire :

$$m(s, i(s)) = 1 = m(i(s), s) \quad \text{pour tout } s \in S$$

On trouve dans [Lipson-81, p.70] une notation quasi identique à $(S, m, i, 1)$.

Démonstration 3.1

$(\mathcal{D}, *, D(1), ^{-1})$ est un groupe abélien.

En effet :

- soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Puisque $a^i b^i = (ab)^i$ pour $i = 0, 1, \dots, n$, on déduit que :

$$D(a) * D(b) = D(ab) \in \mathcal{D}$$

Il s'ensuit que la multiplication de matrices est donc une loi interne à $(\mathcal{D}, *, D(1), ^{-1})$.

- L'opérateur $*$ est commutatif : car $D(a) * D(b) = D(a.b) = D(b.a) = D(b) * D(a)$.

- $D(1)$ est la matrice identité : $D(1) * D(a) = D(1.a) = D(a) = D(a.1) = D(a) * D(1)$.

- La loi de multiplication de matrices étant associative dans l'algèbre des matrices d'ordre n , $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle l'est en particulier dans \mathcal{D} .

- $D(a)$ et $D^{-1}(a)$ sont mutuellement inverses car :

$$\begin{aligned} D(a) * D^{-1}(a) &= D(a) * D(a^{-1}) && \text{[où } a^{-1} \text{ est l'inverse de } a\text{]} \\ &= D(a . a^{-1}) && \text{[produit de matrices diagonales]} \\ &= D(1) = D(a^{-1} . a) = D(a^{-1}) * D(a). \end{aligned}$$

Il reste à exhiber un isomorphisme de groupe.

Considérons l'application : $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^* : D(\beta) \mapsto \beta$

C'est une bijection. En effet, elle est surjective par la définition de \mathcal{D} . De plus, elle est injective car $D(a) \neq D(b) \Rightarrow a \neq b$. Elle préserve aussi les deux opérations de groupe car :

$$g(D(a)) . g(D(b)) = (a.b) = g(D(a.b)) = g(D(a) * D(b))$$

Cela termine la démonstration.

Conséquences :

1. *Première identité fondamentale.*

Sur la base de l'isomorphisme $(\mathcal{D}, *, D(1),^{-1}) \cong (\mathbb{R}^*, ., 1,^{-1})$, l'équation (3.2) constitue une première identité fondamentale que l'on peut formuler de manière plus condensée comme suit :

$$v_{\beta t} = v_t D(\beta) \tag{3.4}$$

2. Symétrie entre le facteur d'homothétie β et le paramètre t :

$$v_{\beta t} = v_\beta D(t) = v_t D(\beta) \tag{3.5}$$

On remarquera que cette dernière identité est toujours vérifiée même pour $t = 0$ car :

$$\begin{aligned} v_\beta D(0) &= (1 \ \beta \ \beta^2 \ \dots \ \beta^n) D(0) \\ &= (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) D(\beta) = v_\beta \end{aligned}$$

En posant $\beta = 1$ dans l'équation (3.5), on a le cas particulier :

$$v_t = v_1 D(t)$$

3. *Homothétie paramétrée en t :*

En posant $\beta = t$ dans l'équation (3.5), on a :

$$(f \circ h_t)(t) = v_t D(t) a \tag{3.6}$$

En effet :

$$\begin{aligned} (f \circ h_t)(t) &= f(h_t(t)) = f(t.t) = f(t^2) = (1 \ t^2 \ t^4 \ \dots \ t^{2n}) a \\ &= (1 \ t^2 \ \dots \ t^n) D(t) a \end{aligned}$$

Cette conséquence, tout en soulignant la symétrie relevée en (3.5), illustre la facilité avec laquelle l'on peut traiter le cas d'homothétie dont le facteur peut être un monôme quelconque de la forme λt^k avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, (voire pour $k \in \mathbb{Z}$ si $t \neq 0$), sans précaution particulière. On vérifie facilement que :

$$v_{t^k} = v_{t^{k-1}} D(t) = v_t D(t^{k-1}) \tag{3.6.1}$$

2. Matrice binomiale et ses puissances banalisées

Une lecture, même sommaire, de la littérature sur les systèmes de transcription mathématique des formes géométriques fondées sur un lissage par des fonctions paramétriques polynomiales révèle la *quasi-omniprésence* des coefficients binomiaux, dès que les transcriptions et les manipulations associées sont exprimées sous formes algébriques explicites. Les fonctions de Bézier au sens étymologique [Bézier-68] [Bézier-72, p.118] [Bézier-77, p.65 équ. 68] [Chemla-71] [Vermet-71] [Véron-73, p.5 équ. A.1] [Ris-75, p. 4 équ. I.2], les fonctions "semi-classiques" de Bernstein [Davis-63, p.108 équ. 6.2.1] [Forrest-71, p.73 équ. 4.1] [Gordon-74] [Chang-82, p.346 équ.11] [Goldman-85, p. 35] [Bézier-86, p.82 équ. 4.29] [Cohen-85, p.177] sont *inséparables* des coefficients binomiaux. Les méthodes de segmentation de formes paramétriques polynomiales [Bézier-86 p.87 équ. 4.123] [Piegl-84] [Faux-85, pp.149-151] [Goldman-85 pp.33-40] [Lane-80], la conversion de la représentation d'une forme paramétrique [Goldman-85, p.13, problem 3], les méthodes d'évaluation progressive des points d'une forme ainsi que les calculs de différences finies ne font qu'exprimer (quoique souvent sous forme cachée) les relations intimes inhérentes aux coefficients binomiaux. A ce titre, ce formalisme permet :

- de mettre en évidence le lien étroit qui existe entre ces différents problèmes,
- de montrer que la généralisation du procédé de calcul du triangle de Pascal conduit aux fonctions de Bernstein et aux fonctions de Bézier qui se déduisent aisément des fonctions de Bernstein (cf. §2, chap.4),
- d'associer un opérateur matriciel explicite au procédé de calcul des différences finies,
- d'interpréter la matrice des fonctions de Bézier comme la réponse que fournit la matrice des fonctions de Bernstein aux sollicitations formées de la fonction échelon-unité et ses translatées (cf. fig. 3.1).

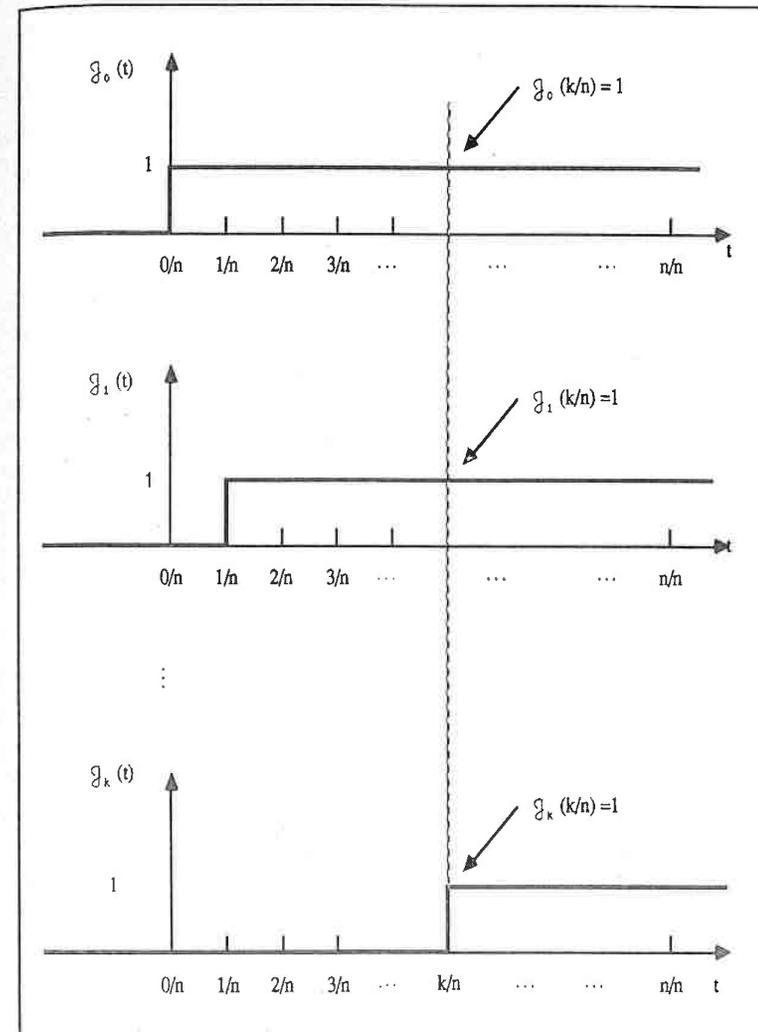


Figure 3.1 Fonction échelon-unité et ses translatées successives de pas égal à $1/n$, :

$$\begin{aligned} J_k(t) &= 0 && \text{pour } t < k/n \\ &= 1 && \text{pour } t \geq k/n \quad k = 0, 1, \dots, n \text{ et } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- de simplifier les manipulations algébriques des polynômes et de faciliter la généralisation des résultats,
- enfin, de déboucher sur un opérateur fondamental IG^α qui permet d'effectuer une analyse géométrique complète en tout point paramétrique α d'un arc courbe quelconque (cf. chap. 5).

Le formalisme est fondé sur une *interprétation géométrique explicite* attribuée au triangle de Pascal. Ce triangle, publié pour la première fois dans [Pascal-1665], sert principalement à engendrer des coefficients binomiaux. Cependant, par une organisation de ses composantes sous une forme de matrice triangulaire supérieure (à cause du modèle croissant adopté), le triangle de Pascal se transforme en un véritable opérateur géométrique par rapport aux fonctions polynomiales mono-paramètres. En effet, le théorème binomial sous sa forme classique [Girard-65, p.96] :

$$(a + x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} x^1 + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \dots + C_n^p a^{n-p} x^p + \dots + x^n$$

n'exprime-t-il au fond une identité fondamentale sur la composition d'une fonction polynomiale avec une translation de son paramètre x , certes sous une forme condensée et simplifiée ? Cette lecture géométrique du théorème binomial et la relation simple liant les exposants p et $n - p$ des facteurs des monômes $C_n^p a^{n-p}$ conduisent à une généralisation du triangle de Pascal transformé que nous baptisons désormais **matrice binomiale**. On va pouvoir élever cette matrice à une puissance quelconque et dans un corps (voire dans un anneau) commutatif quelconque, moyennant une généralisation de la récurrence binomiale :

$$C_j^i = C_{j-1}^{i-1} + C_{j-1}^i$$

Le reste de ce chapitre est consacré à la présentation des fondements de cette théorie dans le cadre concret du corps \mathbb{R} .

2.1. Etude de $f \circ T_\alpha$ pour $\alpha = 0, 1$; définition de la matrice binomiale

Cas de $\alpha = 0$:

Partant de l'équation (3.1), on voit que :

$$(f \circ T_0)(t) = f(0 + t) = f(t) = v_t \mathbf{I} \mathbf{a} \quad (3.7)$$

Cas de $\alpha = 1$:

Etant donné $T_1 : t \mapsto 1 + t$, on a :

$$(f \circ T_1)(t) = f(1 + t) = v_{1+t} \mathbf{a} = (1 \ (1+t) \ (1+t)^2 \ \dots \ (1+t)^n) \mathbf{a}$$

Le théorème binomial donne :

$$(1 + t)^j = \sum_{i=0}^j C_j^i t^i = (1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^j) \begin{bmatrix} C_j^0 \\ C_j^1 \\ \vdots \\ C_j^j \end{bmatrix}$$

pour $j = 0, 1, \dots, n$. Après avoir complété le vecteur colonne de coefficients binomiaux par $n - j$ zéros, on trouve :

$$(1 + t)^j = (1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^j \ \dots \ t^n) \begin{bmatrix} C_j^0 \\ C_j^1 \\ \vdots \\ C_j^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui peut être écrit sous une forme plus condensée comme suit :

$$(1 + t)^j = v_t \mathbf{G}_{*,j} \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n \quad (3.8)$$

où $\mathbf{G}_{*,j}$ est le $j^{\text{ième}}$ vecteur colonne de la **matrice binomiale** dont les composantes sont

définies par :

$$G_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ C_j^i & \text{pour } i \leq j \end{cases} \quad (3.8)$$

avec :

$$C_j^i = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ \frac{j!}{i!(j-i)!} & \text{pour } i \leq j \end{cases}$$

pour $(i, j = 0, 1, \dots, n)$ et sachant que $0! = 1$.

Il s'ensuit pour $(f \cdot T_1)(t)$ que :

$$(f \cdot T_1)(t) = v_{i+t} a = v_t G a \quad (3.9)$$

2.1.1. Matrice binomiale et coefficients binomiaux

La matrice binomiale G de l'équation (3.9) dont la définition explicite est donnée par :

$$G = \begin{bmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \dots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & \dots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

est donc le triangle de Pascal dont les entrées sont organisées sous forme d'une matrice triangulaire supérieure pour être conforme avec la forme croissante que nous avons adoptée pour la base polynomiale standard du chapitre précédent.

La récurrence binomiale classique :

$$C_j^i = C_{j-1}^{i-1} + C_{j-1}^i \quad (3.10)$$

se traduit pour la matrice binomiale G par :

$$G_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ 1 & \text{pour } i = 0 \\ G_{i-1,j-1} + G_{i-1,j} & \text{pour } i \leq j \end{cases} \quad (3.11)$$

La figure 3.2 souligne sous une forme imagée, la relation "triangulaire" liant les composantes de la matrice binomiale. Il résulte de cette relation que la matrice binomiale est *extensible* à une dimension finie quelconque. Aussi, pour ne considérer que le sous-bloc formé de ses $n+1$ premières lignes et des $n+1$ premières colonnes, écrivons-nous parfois ${}_n G$. Dans ce cas, les indices de lignes et de colonnes varieront de 0 à n . Le passage de ${}_n G$ à ${}_{n+1} G$ s'effectue à l'aide des relations suivantes :

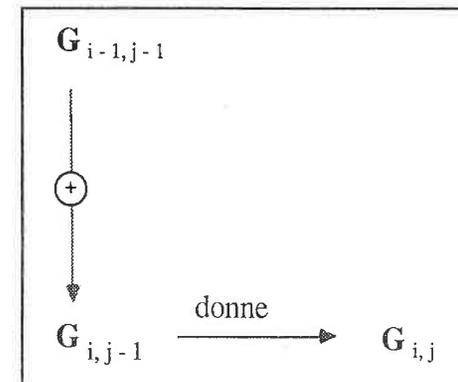


Figure 3.2 Relation triangulaire récurrente entre les composantes de G .

$${}_{n+1}G_{i,j} = \begin{cases} {}_nG_{i,j} & \text{pour } i, j = 0, \dots, n \\ 1 & \text{pour } i=0 \text{ et } j=n+1 \\ {}_nG_{i-1,n} + {}_nG_{i,n} & \text{pour } i=1, \dots, n \text{ et } j=n+1 \\ 1 & \text{pour } i, j = n+1 \\ 0 & \text{pour } i = n+1 \text{ et } j = 0, \dots, n \end{cases} \quad (3.12)$$

2.1.2. Propriétés élémentaires de G

Parmi les nombreuses propriétés de la matrice G, on doit toujours tenir présentes à l'esprit les suivantes :

P1 : G est une matrice triangulaire supérieure : $G_{i,j} = 0$ pour $i > j$, $i, j = 0, 1, \dots, n$.

$$G_{*,j} = \begin{bmatrix} G_{0,j} \\ G_{1,j} \\ \vdots \\ G_{j,j} \end{bmatrix} \quad I_j = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \diagdown & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} G_{*,j} \\ I_j \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} j+1 \\ \text{lignes} \end{matrix}$$

(a) (b)

$$[0]_j = \{ \underbrace{0 \dots 0}_{j+1 \text{ zéros}} \}$$

(c)

$$IE_{j \rightarrow j+1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \diagdown & & & \\ 1 & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \left. \vphantom{IE_{j \rightarrow j+1}} \right\} \begin{matrix} j+2 \\ \text{lignes} \end{matrix}$$

(d)

Figure 3.3 Notations employées dans la propriété P8 :

- (a) $G_{*,j}$: vecteur colonne des $j+1$ premières composantes de la colonne j ,
- (b) I_j : matrice identité de dimension $(j+1) \times (j+1)$,
- (c) $[0]_j$: vecteur ligne nul de $j+1$ composantes,
- (d) $IE_{j \rightarrow j+1}$: matrice exprimant la colonne $j+1$ en fonction de la colonne j .

P2 : $G_{i,i} = 1$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

P3 : $G_{0,j} = 1$ pour $j = 0, 1, \dots, n$.

P4 : $\det(\mathbf{G}) = 1$.

P5 : \mathbf{G} est extensible à l'aide de l'équation (3.12).

P6 : $G_{i,j}$ donne le coefficient du monôme x^i dans le développement binomial de $(1+x)^j$ $i, j = 0, 1, \dots, n$. Autrement dit, $\mathbf{G}_{*,j}$ est le vecteur coefficient du polynôme $(1+x)^j$ développé suivant le degré croissant des x^i .

P7 : $G_{0,j} + G_{1,j} + \dots + G_{j,j} = (1+1)^j = 2^j$ pour $j = 0, 1, \dots, n$.

P8 : Génération récurrente des colonnes (cf. fig. 3.3, p.65 pour les notations employées) :

$$\text{P8.1 : } \mathbf{G}_{*,j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{*,j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{*,j} \end{bmatrix}$$

Ceci ne fait qu'exprimer les relations de l'équation (3.11) en terme de colonnes. Une formulation matricielle équivalente est donnée par :

$$\text{P8.2 : } \mathbf{G}_{*,j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{*,j} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_j \end{bmatrix} \mathbf{G}_{*,j}$$

Cette forme a l'avantage de mettre en évidence la voie à suivre pour généraliser les propriétés de la matrice binomiale à un corps abstrait \mathbb{F} . Pour ce faire, il suffit de procéder aux *identifications* suivantes (voir fig. 3.3) :

1. remplacer 1 par $1_{\mathbb{F}}$ dans \mathbf{I}_j ,

2. remplacer 0 par $0_{\mathbb{F}}$ dans \mathbf{I}_j et dans $[\mathbf{0}]_j$,

3. poser $\mathbf{G}_{*,0} = [1_{\mathbb{F}}]$ pour initialiser le calcul de \mathbf{G} .

Le déroulement récurrent des calculs spécifiés par P8.1 ou bien par P8.2, ou encore par P8.3 formulé ci-après, permet de calculer $\mathbf{G}_{\mathbb{F}}$ à la taille que l'on veut. Une simplification de P8.2, en mettant $\mathbf{G}_{*,j}$ en facteur, conduit à la forme compacte suivante :

$$\text{P8.3 } \mathbf{G}_{*,j+1} = \mathbf{I}_{E^{j \rightarrow j+1}} * \mathbf{G}_{*,j}$$

2.2. Généralisation : poursuite de l'étude de $f \circ T_{\alpha}$

La translation T_2 :

$$T_2 : t \mapsto 2 + t$$

peut s'écrire :

$$T_2 = T_1 \circ T_1 \quad \text{avec } T_1 : t \mapsto 1 + t$$

d'où :

$$\begin{aligned} (f \circ T_2)(t) &= (f \circ (T_1 \circ T_1))(t) = (f \circ T_1)(T_1(t)) = (f \circ T_1)(1+t) \\ &= v_{1+t} \mathbf{G} \mathbf{a} \end{aligned}$$

[d'après (3.9)]

$$= (v_t \mathbf{G}) \mathbf{G} \mathbf{a} \quad \text{[une deuxième application]$$

de (3.9)]

$$= v_t \mathbf{G}^2 \mathbf{a}$$

Ainsi, on obtient :

$$(f \circ T_2)(t) = v_{2+t} \mathbf{a} = v_t \mathbf{G}^2 \mathbf{a}$$

que l'on peut mettre sous la forme condensée équivalente :

$$v_{2+t} = v_t \mathbf{G}^2$$

En procédant par récurrence, on voit que pour $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(f \cdot T_k)(t) &= v_{k+t} \cdot a \\ &= v_t \cdot G^k \cdot a\end{aligned}$$

ou encore :

$$v_{k+t} = v_t \cdot G^k$$

D'après l'équation (3.7), G^0 est assimilé à la matrice identité I . On voit donc que l'exposant de G suit le pas de la translation T_α pour $\alpha \in \mathbb{N}$. Cependant, on ne voit aucune justification ni théorique ni pratique pour imposer que $\alpha \in \mathbb{N}$ uniquement. On peut aussi bien avoir $\alpha \in \mathbb{R}$ car l'application :

$$T_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \alpha + t$$

est bien définie. Pourquoi ne peut-on pas écrire :

$$\begin{aligned}(f \cdot T_\alpha)(t) &= v_{\alpha+t} \cdot a = v_t \cdot G^\alpha \cdot a \\ (3.13)\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ comme pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ (donc pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$ aussi) ? Nous montrerons dans la suite que G^α existe effectivement pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ en proposant son calcul qui se déduit aisément du théorème binomial. En fin de compte, on découvre que les relations qui ont permis le calcul de G^α pour $\alpha \in \mathbb{Z}$ [Doh-85], s'appliquent également pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.2.1. Puissance banalisée de G

Pour déterminer G^α , explicitons le calcul de $(f \cdot T_\alpha)(t)$:

$$\begin{aligned}(f \cdot T_\alpha)(t) &= f(T_\alpha(t)) = f(\alpha + t) \\ &= v_{\alpha+t} \cdot a \\ &= (1 \quad [\alpha + t] \quad [\alpha + t]^2 \quad \dots \quad [\alpha + t]^n) \cdot a\end{aligned}$$

Appliquons le théorème binomial pour développer $(\alpha + t)^j$:

$$(\alpha + t)^j = \sum_{i=0}^j \alpha^{j-i} C_j^i t^i = (1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^j)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^j C_j^0 \\ \alpha^{j-1} C_j^1 \\ \vdots \\ \alpha C_j^{j-1} \\ C_j^j \end{bmatrix}$$

pour $i, j = 0, 1, \dots, n$. Complétons le vecteur colonne des $\alpha^{j-i} C_j^i$ avec $n-j$ zéros ajoutés en queue pour obtenir :

$$(\alpha + t)^j = \sum_{i=0}^j \alpha^{j-i} C_j^i t^i = (1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^j \quad \dots \quad t^n)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^j C_j^0 \\ \alpha^{j-1} C_j^1 \\ \vdots \\ \alpha C_j^{j-1} \\ C_j^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

On regroupe les calculs pour $j = 0, 1, \dots, n$ sous une forme matricielle qui permet d'identifier l'opérateur G^α , soit :

$$(f \cdot T_\alpha)(i) = v_i \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha C_1^0 & \alpha^2 C_2^0 & \dots & \alpha^n C_n^0 \\ & 1 & \alpha C_2^1 & \dots & \alpha^{n-1} C_n^1 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & \alpha C_n^{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{G^\alpha} \quad \mathbf{a} \quad (3.14)$$

2.2.2 Définition de G^α

Plusieurs procédés basés sur des généralisations des relations multiples qui relient les composantes de la matrice binomiale peuvent être proposés pour le calcul de G^α , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ [DOH-85]. Nous en retenons deux seulement dans le cadre de ce travail. Le premier se déduit aisément de l'équation (3.14) :

Définition 3.1.

La matrice binomiale élevée à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}^*$, et notée G^α , est la matrice dont les composantes sont définies par :

$$G_{i,j}^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ \alpha^{j-i} C_j^i & \text{pour } i \leq j \end{cases} \quad (3.15)$$

pour tout $i, j = 0, 1, \dots, n$. $G^0 = I$.

En comparant l'équation (3.11) aux équations (3.14) et (3.15), on voit bien que G^α coïncide avec G lorsque l'on pose $\alpha = 1$. Par ailleurs, puisque $C_j^i = G_{i,j}$, l'équation (3.15) peut s'écrire plus simplement sous la forme :

$$G_{i,j}^\alpha = \alpha^{j-i} G_{i,j} \quad \text{pour } i, j = 0, 1, \dots, n \quad (3.16)$$

En tenant compte de la relation récurrente de (3.10), on a :

$$\begin{aligned} \alpha^{j-i} C_j^i &= \alpha^{j-i} (C_{j-1}^{i-1} + C_{j-1}^i) \\ &= \alpha^{j-i} C_{j-1}^{i-1} + \alpha [\alpha^{(j-1)-i} C_{j-1}^i] \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$G_{i,j}^\alpha = G_{i-1,j-1}^\alpha + \alpha G_{i,j-1}^\alpha$$

On trouve ici une *première généralisation* naturelle de la récurrence binomiale sous sa forme matricielle exprimée par l'équation (3.11). Celle-ci conduit à la définition équivalente suivante de G^α :

Définition 3.2

La matrice binomiale élevée à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et notée G^α , est la matrice dont les composantes sont définies par :

$$G_{i,j}^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ \alpha^i & \text{pour } i = 0 \\ G_{i-1,j-1}^\alpha + \alpha G_{i,j-1}^\alpha & \text{pour } i \leq j \end{cases} \quad (3.17)$$

La matrice G^0 est identifiée à la matrice identité de même dimension.

Ainsi, comme le souligne la fig. 3.4, les composantes de G^α vérifient, au facteur et exposant α près, les mêmes relations triangulaires que la matrice G .

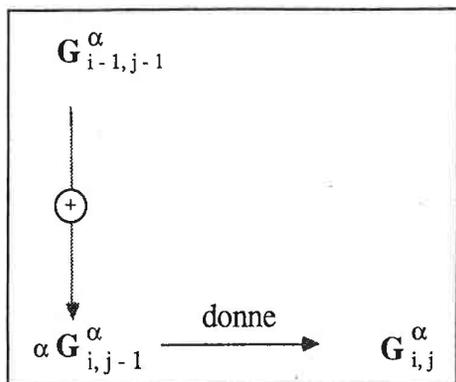


Figure 3.4 Relation triangulaire récurrente entre les composantes de G^α .

Par analogie avec les relations (3.12), le passage de ${}_n G^\alpha$ à ${}_{n+1} G^\alpha$ est assuré par les relations suivantes :

$${}_{n+1} G_{i,j}^\alpha = \begin{cases} {}_n G_{i,j}^\alpha & \text{pour } i, j = 0, \dots, n \\ \alpha {}_n G_{0,n}^\alpha & \text{pour } i = 0 \text{ et } j = n+1 \\ {}_n G_{i-1,n}^\alpha + \alpha {}_n G_{i,n}^\alpha & \text{pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j = n+1 \\ 1 & \text{pour } i, j = n+1 \\ 0 & \text{pour } i = n+1 \text{ et } j = 0, \dots, n \end{cases} \quad (3.18)$$

Le théorème suivant montre la compatibilité entre l'interprétation de G^α comme G élevé à la puissance α et la loi d'exponentiation.

Théorème 3.2

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soient G^α et G^β deux matrices de même ordre définies suivant l'équation (3.15), alors :

$$G^\alpha * G^\beta = G^{\alpha + \beta} \quad (3.19)$$

Démonstration 3.2

Lorsque α ou β est nul, le théorème est trivialement vérifié puisque l'une des deux matrices se confond avec la matrice identité. Il suffit donc de se limiter au cas où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ seulement.

$$G^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha C_1^\alpha & \alpha^2 C_2^\alpha & \dots & \alpha^n C_n^\alpha \\ & 1 & \alpha C_2^\alpha & \dots & \alpha^{n-1} C_n^\alpha \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 & \alpha C_n^{\alpha-1} \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Figure 3.5 La matrice binomiale à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$.

G^α et G^β étant toutes deux des matrices triangulaires supérieures (cf. fig. 3.5 pour G^α), leur produit en est une aussi. On a donc à démontrer que :

$$\sum_{k=i}^j G_{i,k}^\alpha \cdot G_{k,j}^\beta = (\alpha + \beta)^{j-i} C_j^i$$

Développons les deux facteurs du membre de gauche d'après la définition :

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^j G_{i,k}^\alpha \cdot G_{k,j}^\beta &= \sum_{k=i}^j (\alpha)^{k-i} C_k^i (\beta)^{j-k} C_j^k \\ &= \alpha^i \beta^j \sum_{k=i}^j (\alpha)^k (\beta)^{-k} C_k^i C_j^k \end{aligned}$$

L'identité binomiale : $C_k^i C_j^k = C_j^i C_{j-i}^{j-k}$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^j G_{i,k}^\alpha \cdot G_{k,j}^\beta &= \alpha^{-i} \beta^j \sum_{k=i}^j (\alpha)^k (\beta)^{-k} C_j^i C_{j-i}^{j-k} \\ &= \alpha^{-i} \beta^j C_j^i \sum_{k=i}^j (\alpha)^k (\beta)^{-k} C_{j-i}^{j-k} \end{aligned}$$

En posant $q = k - i$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^j G_{i,k}^\alpha \cdot G_{k,j}^\beta &= \alpha^{-i} \beta^j C_j^i \sum_{q=0}^{j-i} (\alpha)^{q+i} (\beta)^{-q-i} C_{j-i}^{j-i-q} \\ &= \alpha^{-i} \beta^j C_j^i \sum_{q=0}^{j-i} (\alpha/\beta)^{q+i} C_{j-i}^{j-i-q} \\ &= \alpha^{-i} \beta^j (\alpha/\beta)^i C_j^i \sum_{q=0}^{j-i} (\alpha/\beta)^q C_{j-i}^{j-i-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \beta^{j-i} C_j^i \sum_{q=0}^{j-i} (\alpha/\beta)^q C_{j-i}^{j-i-q} \\ &= \beta^{j-i} C_j^i \sum_{q=0}^{j-i} (\alpha/\beta)^q (1)^{j-i-q} C_{j-i}^{j-i-q} \end{aligned}$$

En appliquant le théorème binomial à la somme, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=i}^j G_{i,k}^\alpha \cdot G_{k,j}^\beta &= \beta^{j-i} C_j^i (\alpha/\beta + 1)^{j-i} \\ &= \beta^{j-i} (\alpha/\beta + 1)^{j-i} C_j^i \\ &= (\alpha + \beta)^{j-i} C_j^i \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

Corollaire 3.1

$$[G^\alpha]^{-1} = G^{-\alpha} \quad (3.20)$$

En effet :

$$G^\alpha * G^{-\alpha} = G^{\alpha-\alpha} = G^0 = I$$

Ce corollaire souligne la facilité avec laquelle $G^{-\alpha}$ peut être calculée à partir de G^α . En effet, il suffit de remplacer α par $-\alpha$ dans les équations (3.15) et (3.17). En tenant compte de l'équation (3.16) et du fait que la parité de $j - i$ détermine le signe de $(-1)^{j-i}$, il suffit dans la pratique, de multiplier par (-1) les composantes des sur-diagonales dont le rang $(j - i)$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$), est impair. En terme de coût, cela revient tout simplement au coût de $(n^2 - \rho(n))/4$ réaffectations des composantes de G^α avec changement de signe. La fonction $\rho(n)$ vaut 1 lorsque G^α est taillée à un ordre impair, 0 dans le cas contraire.

2.2.3. Propriétés de G^α

Les propriétés énumérées en section (2.1.2) pour G se généralisent facilement pour G^α quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (P1, P2 et P4 restent toutefois invariantes).

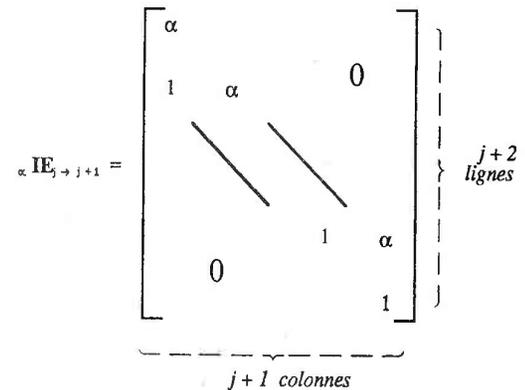
- P1 α : G^α étant une matrice triangulaire supérieure : $G_{i,j}^\alpha = 0$ pour $i > j$, $i, j = 0, 1, \dots, n$.
- P2 α : $G_{i,i}^\alpha = 1$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.
- P3 α : $G_{0,j}^\alpha = \alpha^j$ pour $j = 0, 1, \dots, n$.
- P4 α : $\det(G^\alpha) = 1$.
- P5 α : G^α est extensible à l'aide de l'équation (3.18).
- P6 α : $G_{i,j}^\alpha$ donne le coefficient du monôme x^i dans le développement binomial de $(\alpha + x)^j$, $i, j = 0, 1, \dots, n$. Autrement dit, $G_{*,j}^\alpha$ est le vecteur coefficient du polynôme $(\alpha + x)^j$ suivant les degrés croissants des x^i .
- P7 α : $G_{0,j}^\alpha + G_{1,j}^\alpha + \dots + G_{j,j}^\alpha = (\alpha + 1)^j$ pour $j = 0, 1, \dots, n$.
- P8 α : Génération récurrente des colonnes de G^α (cf. fig. 3.4 pour les notations employées en remplaçant partout G par G^α) :

$$P8.1\alpha \quad G_{*,j+1}^\alpha = \alpha \begin{bmatrix} G_{*,j}^\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_{*,j}^\alpha \end{bmatrix}$$

$$P8.2\alpha \quad G_{*,j+1}^\alpha = \begin{bmatrix} I_j \\ [0] \end{bmatrix} G_{*,j}^\alpha + \begin{bmatrix} [0] \\ I_j \end{bmatrix} G_{*,j}^\alpha$$

$$P8.3\alpha \quad G_{*,j+1}^\alpha = \alpha I_{j \rightarrow j+1} * G_{*,j}^\alpha$$

où :



Les trois *identifications* proposées en §2.1.2 pour généraliser les propriétés de G à un corps quelconque \mathbb{F} sont aussi le point de départ du calcul récurrent de G^α lorsque $\alpha \in \mathbb{F}$. Toutefois, il faudra dans ce cas, poursuivre le calcul jusqu'à l'ordre souhaité selon l'une des prescriptions P8.1 α , P8.2 α ou P8.3 α .

2.3. Groupe de translations

Soit ${}_n\mathcal{G}$ l'ensemble de toutes les matrices ${}_nG^\alpha$ de dimension $(n+1) \times (n+1)$, où $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$${}_n\mathcal{G} = \{ {}_nG^\alpha \mid \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \}$$

Soit $\mathcal{L} = ({}_n\mathcal{G}, *, {}_nG^0, {}^{-1})$ l'ensemble ${}_n\mathcal{G}$ muni de la loi de multiplication de matrices (*), où ${}_nG^0 = I_n$ compte tenu de la définition 3.1 et où ${}^{-1}$ est l'application unaire qui à ${}_nG^\alpha$ associe ${}_nG^{-\alpha}$, à savoir :

$${}^{-1} : {}_n\mathcal{G} \rightarrow {}_n\mathcal{G} : {}_nG^\alpha \mapsto {}_nG^{-\alpha}$$

Le théorème suivant indique que \mathcal{L} est un groupe abélien isomorphe au groupe additif \mathbb{R} .

Théorème 3.3

$$\mathcal{L} \cong (\mathbb{R}, +, 0, -)$$

Démonstration 3.3

Montrons d'abord que \mathcal{L} est un groupe abélien.

En effet :

D'après le théorème 3.2, la multiplication matricielle est une loi interne à \mathcal{L} .

- La loi $*$ est commutative car : ${}_nG^{\alpha+\beta} = {}_nG^{\beta+\alpha}$; l'addition étant commutative dans \mathbb{R} .

Puisque $\alpha + (\beta + \sigma) = (\alpha + \beta) + \sigma$ pour tout $\alpha, \beta, \sigma \in \mathbb{R}$, application successive du théorème 3.2 établit l'associativité dans \mathcal{L} .

- G^0 est l'élément neutre car il est confondu avec la matrice identité d'après la définition 3.1.
- D'après le corollaire 3.1, ${}_nG^\alpha$ et ${}_nG^{-\alpha}$ sont mutuellement inverses quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrons ensuite que \mathcal{L} est isomorphe à $(\mathbb{R}, +, 0, -)$

En effet, l'application : $\ell : \mathbb{R} \rightarrow {}_n\mathcal{G} : \alpha \mapsto {}_nG^\alpha$

- est d'une part bijective. En effet, elle est surjective d'après la définition de ${}_n\mathcal{G}$;
- elle est aussi injective car pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\ell(a) \neq \ell(b) \Leftrightarrow {}_nG^a \neq {}_nG^b \Rightarrow {}_nG^{-a} * {}_nG^a \neq {}_nG^{-a} * {}_nG^b$$

Or

$${}_nG^{-a} * {}_nG^a = {}_nG^{-a+a} \quad [\text{théorème 3.2}]$$

$$= {}_nG^0 \quad [\text{corollaire 3.1}]$$

et

$$G^{-a} * {}_nG^b = {}_nG^{-a+b} \quad [\text{théorème 3.2}]$$

$$\text{Ainsi } \ell(a) \neq \ell(b) \Rightarrow {}_nG^0 \neq {}_nG^{-a+b}$$

$$\Rightarrow 0 \neq -a + b \Rightarrow a \neq b \quad [\text{d'après l'unicité de l'élément neutre}]$$

ℓ est donc une bijection.

- D'autre part, elle préserve aussi les opérations des deux groupes car :

$$\begin{aligned} \ell(a+b) &= {}_nG^{a+b} \\ &= {}_nG^a * {}_nG^b \quad [\text{théorème 3.2}] \\ &= \ell(a) * \ell(b) \quad [\text{définition de } \ell] \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

2.3.1. Conséquences immédiates

1. *Deuxième identité fondamentale.*

Sur la base de l'isomorphisme $\mathcal{L} \cong (\mathbb{R}, +, 0, -)$, pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut associer à $f \cdot T_\alpha$ l'opérateur unique G^α , de sorte que l'on peut poser comme deuxième identité polynomiale matricielle :

$$(f \cdot T_\alpha)(t) = v_t G^\alpha a \quad (3.21)$$

ou si l'on préfère :

$$v_{\alpha+t} = v_t G^\alpha \quad (3.22)$$

2. *Symétrie entre paramètres t et α .*

$$v_{\alpha+t} = v_\alpha G^t \quad (3.23)$$

et en particulier (en posant $\alpha = 0$) :

$$v_t = v_0 G^t \quad (3.24)$$

3. *Identité de base pour le calcul des différences finies*

En posant $\alpha = -1$ dans (3.22) on obtient :

$$v_{-1+t} = v_t G^{-1} \quad (3.25)$$

En effet, considérons à titre d'exemple, le cas où G est de format 4×4 , dans quel cas on montre [Doh-85, p.15] que :

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -2 & 3 \\ & & 0 & 1 & -3 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Pour cela, il suffit de remplacer α par -1 et n par 3 dans l'équation (3.15).

Transformons l'identité (3.25) ensuite de la manière suivante :

1. remplacer le vecteur v_t par le vecteur $(f_0 \ f_1 \ f_2 \ f_3)$, où $f_i \in \mathbb{R}$,
2. effectuer le calcul indiqué.

On obtient un vecteur $\Delta \in \mathbb{R}^4$ dont les quatre composantes sont données par les quatre expressions :

$$\begin{aligned} \Delta^0 f_0 &= f_0 & \Delta^1 f_0 &= f_1 - f_0 \\ \Delta^2 f_0 &= f_0 - 2f_1 + f_2 & \Delta^3 f_0 &= -f_0 + 3f_1 - 3f_2 + f_3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

De toute évidence, ces expressions sont les éléments de la diagonale principale du tableau classique de calcul des différences finies [Nonweiler-84, p.101].

Au vu de l'équation (3.26), l'opérateur G^{-1} modélise le calcul des différences

finies. Grâce à la possibilité de son extension à une matrice carrée d'ordre quelconque, on peut choisir sa taille en fonction de la quantité d'information dont on dispose pour calculer toutes les différences nécessaires.

Plus formellement et d'une manière générale, soit $F = (f_0, f_1, \dots, f_m)$ avec $f_i \in \mathbb{R}$. Supposons que G^{-1} soit une matrice carrée d'ordre $m+1$. Montrons que pour tout $k = 0, \dots, m$ et $n = 0, \dots, m$ tels que $n+k \leq m$, on a :

$$\Delta^n f_k = \sum_{r=0}^n f_{k+r} G_{r,n}^{-1} \quad (3.26a)$$

Rappelons le théorème 2.7.1 dans [Davis-63, p.50] :

$$\Delta^n f_k = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} C_n^r f_{k+r} \quad (3.26b)$$

Sous la sommation, $r \leq n$. Par suite, en vertu de la définition 3.1, on a $(-1)^{n-r} C_n^r = G_{r,n}^{-1}$. Par conséquent :

$$\Delta^n f_k = \sum_{r=0}^n f_{k+r} G_{r,n}^{-1} \quad \text{CQFD.}$$

En clair, déterminer une différence d'ordre n à partir du terme de rang k , donc à partir de f_k , revient à calculer le produit scalaire du vecteur $(f_{k+r})_{r=0, \dots, n}$ par le vecteur colonne de rang n de G^{-1} (arrêté à la diagonale principale). Au fond donc, le problème de calcul d'une différence à l'aide de G^{-1} se réduit au choix du vecteur colonne de G^{-1} confondu avec le rang de la différence cherchée.

Il convient de souligner la forme généralisée des équations (3.26) :

$$F G^{-1} = (\Delta^n f_0)_{n=0, \dots, m} \quad (3.26c)$$

Le modèle de calcul des différences symbolisé par l'équation (3.26a) est intéressant à plus d'un titre. D'une part, il souligne et rend plus explicite le rôle de

la matrice G^{-1} en tant qu'opérateur sous-jacent aux méthodes de calcul de différences finies. D'autre part, il permet de construire les résultats classiques avec peu d'effort de mémoire. Chaque différence se calcule indépendamment des autres. Les différences peuvent donc être calculées en parallèle.

Par ailleurs, on peut dédier un processeur matriciel spécialisé à l'opérateur G^{-1} pour assurer ce calcul.

Exemple

Pour clore ce sujet, considérons le calcul de toutes les différences pour le cas de $F = (8 \ 7 \ 15 \ 22 \ 30 \ 40)$.

Dans cet exemple, on dispose de six valeurs, d'où $m = 5$ avec $f_0 = 8, f_1 = 7, f_2 = 15, f_3 = 22, f_4 = 30, f_5 = 40$. D'autre part, G^{-1} vaut :

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ & & 1 & -3 & 6 & -10 \\ & & & 1 & -4 & 10 \\ & & & & 1 & -5 \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Le problème revient à calculer, suivant (3.26a), les vecteurs :

$$\Delta^n = (\Delta^n f_0 \ \Delta^n f_1 \ \dots \ \Delta^n f_{m-n})$$

pour $n = 0, \dots, 5$.

De toute évidence $\Delta^0 = F = (8 \ 7 \ 15 \ 22 \ 30 \ 40)$.

Pour $n = 1$, on calcule le produit scalaire de $\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ successivement par $(f_0 \ f_1), (f_1 \ f_2), \dots$ et enfin par $(f_4 \ f_5)$:

$$\Delta^1 f_0 = (8 \ 7) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \quad \Delta^1 f_1 = (7 \ 15) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 8$$

$$\Delta^1 f_2 = (15 \ 22) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \quad \Delta^1 f_3 = (22 \ 30) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 8$$

$$\Delta^1 f_4 = (30 \ 40) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 10$$

D'où :

$$\Delta^1 = (-1 \ 8 \ 7 \ 8 \ 10).$$

Pour $n = 2$, on procédera de manière analogue en multipliant les vecteurs lignes $(8 \ 7 \ 15), (7 \ 15 \ 22), (15 \ 22 \ 30)$ et $(22 \ 30 \ 40)$ tour à tour par le troisième vecteur colonne de G^{-1} arrêté à la diagonale principale, c'est-à-dire, par $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient alors :

$$\Delta^2 = (9 \ -1 \ 1 \ 2).$$

Pour $n = 3$, les trois vecteurs lignes $(8 \ 7 \ 15 \ 22), (7 \ 15 \ 22 \ 30)$ et $(15 \ 30 \ 40)$ sont à multiplier chacun par le quatrième vecteur colonne $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ de G^{-1} . Cela donne :

$$\Delta^3 = (-10 \ 2 \ 1).$$

Pour $n = 4$, les deux vecteurs lignes $(8 \ 7 \ 15 \ 22 \ 30)$ et $(7 \ 15 \ 22 \ 30 \ 40)$ sont multipliés par le cinquième vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ de G^{-1} pour obtenir :

$$\Delta^4 = (12 \ -1)$$

Enfin, pour $n = 5$, on multiplie le vecteur ligne $F = (8 \ 7 \ 15 \ 22 \ 30 \ 40)$ par le dernier vecteur colonne $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ de G^{-1} pour obtenir :

$$\Delta^5 = (-13)$$

Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
8					
	-1				
7		9			
	8		10		
15		-1		12	
	7		2		-13
22		1		-1	
	8		1		
30		2			
	10				
40					

Tableau 3.1 Disposition classique de calcul de différences

On voit que les vecteurs $\Delta^0, \Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4$ et Δ^5 sont confondus avec les vecteurs correspondants du tableau 3.1 construit selon la récurrence classique :

$$\begin{aligned} \Delta^0 f_k &= f_k && \text{pour } k = 0, \dots, m \\ \Delta^1 f_k &= f_{k+1} - f_k && \text{pour } k = 0, \dots, m-1 \\ \Delta^{n+1} f_k &= \Delta^1(\Delta^n f_k) = \Delta^n f_{k+1} - \Delta^n f_k && \text{pour } k = 0, \dots, m-n-1 \\ &&& \text{et } n = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Cette définition est adaptée de Davis [Davis-63, p.50].

En définitive, le fait nouveau qu'apporte le modèle (3.26a) au calcul de différences est la mise en évidence qu'en toile de fond à ce procédé se trouve l'inverse de la matrice binomiale G^{-1} .

4. Translations paramétrées en t .

En posant $\alpha = t$ dans l'équation (3.22) on obtient :

$$v_{2t} = v_t G^t \quad (3.27)$$

On voit ici la jonction du problème de translations de paramètre avec celui de transformations homothétiques de paramètre. La cohérence de la théorie est assurée par le théorème :

Théorème 3.4

$$v_t G^{(k-1)t} = v_t D(k)$$

Démonstration 3.4

Développons le membre de gauche :

$$\begin{aligned} v_t G^{(k-1)t} &= (1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^n) G^{(k-1)t} \\ &= \left(\sum_{i=0}^n t^i G_{i,j}^{(k-1)t} \right)_{j=0,1,\dots,n} \\ &= \left(\sum_{i=0}^j t^i [(k-1)t]^{j-i} C_j^i \right)_{j=0,1,\dots,n} \quad [\text{d'après équ. (3.15)}] \\ &= \left(\sum_{i=0}^j t^i (k-1)^{j-i} t^{i-1} C_j^i \right)_{j=0,1,\dots,n} \\ &= \left(\sum_{i=0}^j (k-1)^{j-i} t^j C_j^i \right)_{j=0,1,\dots,n} \quad [\text{car } t^i t^{i-1} = t^j] \\ &= \left(t^j \sum_{i=0}^j (k-1)^{j-i} C_j^i \right)_{j=0,1,\dots,n} \\ &= (t^j \cdot [(k-1) + 1]^j)_{j=0,1,\dots,n} \quad [\text{d'après P7}\alpha] \\ &= ((kt)^j)_{j=0,1,\dots,n} \end{aligned}$$

$$= v_{k,t} = v_t D(k) \quad \text{[d'après (3.5)]}$$

Le théorème est établi. Ce théorème met en relief une dualité entre G^α et $D(\beta)$, ainsi qu'un certain nombre de symétries comme les expriment les trois identités du corollaire :

Corollaire 3.2

$$1. v_t G^{(k-1)t} = v_k D(t) \quad \text{[d'après équ. (3.4) et équ. (3.5)]}$$

$$2. v_{(k-1)t} G^t = v_k D(t) \quad \text{[d'après équ. (3.22) et équ. (3.23)]}$$

$$3. v_{(k-1)t} G^t = v_t D(k) \quad \text{[d'après équ. (3.4) et équ. (3.5)]}$$

C'est l'effet réciproque, voire croisé, de ces symétries et cette dualité qui, au fond, expliquent les nombreuses propriétés géométriques que possèdent les fonctions de Bernstein, propriétés dont héritent à leur tour les fonctions de Bézier. En effet, nous montrons au chapitre suivant que les fonctions de Bernstein jusqu'au degré n sont données par :

$$\text{Bernstein}(t) = D(t) * G^{t-t} \quad t \in [0, 1] \quad (3.28)$$

et que celles de Bézier s'en déduisent par :

$$\text{Bézier}(t) = \text{Sum} * \text{Bernstein}(t) \quad (3.29)$$

où Sum est la matrice triangulaire supérieure dont les composantes non nulles sont tous identiques à 1 :

$$\text{Sum}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{pour } i > j \end{cases} \quad (3.30)$$

2.4. Transformations linéaires : solution générale

Nous sommes maintenant en mesure de formuler une solution au problème de composition de fonctions polynomiales et de transformations linéaires de paramètres. Nous l'exprimons sous forme de théorèmes comme suit :

Théorème 3.5 (première forme)

Soit la fonction polynomiale f définie par l'équation (3.1). Pour toute transformation linéaire $\tau_{\alpha,\beta}$ définie par :

$$\tau_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \alpha + \beta t \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad (3.31)$$

on a :

$$(f \circ \tau_{\alpha,\beta})(t) = v_t D(\beta) * G^\alpha a \quad (3.32)$$

Démonstration 3.5

On a :

$$\begin{aligned} (f \circ \tau_{\alpha,\beta})(t) &= (f \circ (T_\alpha \circ h_\beta))(t) \\ &= (f \circ T_\alpha)(h_\beta(t)) \\ &= (f \circ T_\alpha)(\beta t) \\ &= v_{\beta t} G^\alpha a \quad \text{[par équ. (3.21)]} \end{aligned}$$

$$= v_t D(\beta) * G^\alpha a \quad \text{[par équ. (3.4)]}$$

CQFD.

Vu en termes de base standard polynomiale, ce théorème se résume sous la forme :

$$v_{\alpha+\beta t} = v_t D(\beta) G^\alpha \quad (3.33)$$

Si $\beta \in \mathbb{R}^*$ alors $\alpha/\beta \in \mathbb{R}$. Par conséquent on a $\alpha + \beta t = \beta(\alpha/\beta + t) \in \mathbb{R}$. Ces observations conduisent à une deuxième forme du problème général des transformations linéaires :

Théorème 3.6 (deuxième forme)

Si $\beta \neq 0$ alors $(f \circ \tau_{\alpha+\beta t})(t) = v_t G^{\alpha/\beta} * D(\beta) a$, ou en clair :

$$f(\alpha + \beta t) = v_t G^{\alpha/\beta} * D(\beta) a \quad (3.34)$$

Démonstration 3.6

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta t) &= v_{\alpha + \beta t} \mathbf{a} && \text{[d'après équ. (3.1)]} \\ &= v_{\beta(\alpha/\beta + t)} \mathbf{a} && \text{[car } \beta \in \mathbb{R}^* \text{]} \\ &= v_{(\alpha/\beta + t)} \mathbf{D}(\beta) \mathbf{a} && \text{[d'après équ. (3.4)]} \\ &= v_t \mathbf{G}^{\alpha/\beta} * \mathbf{D}(\beta) \mathbf{a} && \text{[d'après équ. (3.33)],} \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. Il découle de ce théorème que l'on a également :

$$v_{\alpha + \beta t} = v_t \mathbf{G}^{\alpha/\beta} * \mathbf{D}(\beta) \quad \text{pour tout } \beta \neq 0 \quad (3.35)$$

Dans le cas où $\alpha \neq 0$, on peut alors proposer une dernière forme à la solution du problème :

Théorème 3.7 (troisième forme)

Si $\alpha \neq 0$ alors $(f \circ \tau_{\alpha + \beta t})(t) = v_t \mathbf{D}(\beta/\alpha) * \mathbf{G} * \mathbf{D}(\beta) \mathbf{a}$ c'est-à-dire :

$$f(\alpha + \beta t) = v_t \mathbf{D}(\beta/\alpha) * \mathbf{G} * \mathbf{D}(\beta) \mathbf{a} \quad (3.36)$$

Démonstration 3.7

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta t) &= v_{\alpha + \beta t} \mathbf{a} = v_{\alpha(1 + \alpha/\beta t)} \mathbf{a} \\ &= v_{(1 + \alpha/\beta t)} \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{a} && \text{[par équ. (3.6)]} \\ &= v_{\alpha/\beta t} \mathbf{G} * \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{a} && \text{[par équ. (3.33)]} \\ &= v_t \mathbf{D}(\beta/\alpha) * \mathbf{G} * \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{a} && \text{[par équ. (3.4)],} \end{aligned}$$

terminant ainsi la démonstration.

En termes de la base polynomiale standard, le théorème peut s'écrire aussi sous la forme :

$$v_{\alpha + \beta t} \mathbf{a} = v_t \mathbf{D}(\beta/\alpha) * \mathbf{G} * \mathbf{D}(\alpha) \quad \text{si } \alpha \neq 0 \quad (3.37)$$

2.4.1. Identités remarquables

1. En comparant les équations (3.33) et (3.37), on voit que :

$$\mathbf{D}(\beta) * \mathbf{G}^\alpha = \mathbf{D}(\beta/\alpha) * \mathbf{G} * \mathbf{D}(\alpha) \quad \text{si } \alpha \neq 0 \quad (3.38)$$

2. Du fait que $\mathbf{G}^0 = \mathbf{I}$, la dernière identité permet d'obtenir une relation plus générale :

$$\mathbf{D}(\beta) * \mathbf{G}^\alpha = \begin{cases} \mathbf{D}(\beta) & \text{si } \alpha = 0 \\ \mathbf{D}(\beta/\alpha) * \mathbf{G} * \mathbf{D}(\alpha) & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (3.39)$$

3. En posant $\beta = 1$ dans l'équation (3.39) et en interprétant $\mathbf{D}(1) = \mathbf{I}$ conduit à :

$$\mathbf{G}^\alpha = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{si } \alpha = 0 \\ \mathbf{D}(1/\alpha) * \mathbf{G} * \mathbf{D}(\alpha) & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (3.40)$$

Cette dernière identité décompose la puissance généralisée de la matrice binomiale à un produit de matrices plus simples à manipuler.

4. En comparant les équations (3.33) et (3.35), on obtient :

$$\mathbf{D}(\beta) * \mathbf{G}^\alpha = \mathbf{G}^{\alpha/\beta} * \mathbf{D}(\beta) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad (3.41)$$

5. En faisant $\alpha = 1$ dans l'équation (3.41), nous obtenons :

$$\mathbf{D}(\beta) * \mathbf{G} = \mathbf{G}^{1/\beta} * \mathbf{D}(\beta) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^* \quad (3.42)$$

6. En posant $\alpha = \beta$ toujours dans l'équation (3.41), on obtient :

$$\overline{\mathbf{D}}(\beta) * \overline{\mathbf{G}}^\beta = \overline{\mathbf{G}} * \overline{\mathbf{D}}(\beta) \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad (3.43)$$

7. Retournons à l'équation (3.33) et posons $\alpha = 1 - t$ et $\beta = t$, nous obtenons l'identité polynomiale :

$$(3.44) \quad v_{1-t+t^2} = v_t D(t) * G^{1-t}$$

Plus généralement, on a l'identité :

$$(3.44.1) \quad v_{1-t+t^k} = v_{t^{k-1}} D(t) * G^{1-t}$$

En effet, on a :

$$(3.6.1) \quad v_{t^{k-1}} D(t) = v_{t^{k-1}} = v_{t^k} \quad \text{[d'après]}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} v_{t^{k-1}} D(t) * G^{1-t} &= v_{t^k} G^{1-t} \\ &= v_{1-t+t^k} \end{aligned}$$

d'après la deuxième identité fondamentale. Ceci démontre l'identité (3.44.1).

8. En posant $\eta = D(\beta) * G^\alpha$, on découvre par une heureuse coïncidence, que les composantes de l'opérateur de transformation linéaire généralisée η vérifient aussi une deuxième généralisation de la récurrence binomiale, à savoir :

$$(3.45) \quad \eta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ \alpha^j & \text{pour } i = 0 \\ \beta \eta_{i-1,j-1} + \alpha \eta_{i,j-1} & \text{pour } i \leq j \end{cases}$$

Par ailleurs, un simple rapprochement entre les figures (3.2), (3.4) et (3.6) montre que cette généralisation renferme les deux précédentes et permet d'établir les équivalences suivantes

$$8.1. \quad \beta = 1 \text{ et } \alpha = 1 \Leftrightarrow \eta = G,$$

$$8.2. \quad \beta = 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \eta = G^\alpha,$$

$$8.3. \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha = 0 \Leftrightarrow \eta = D(\beta), \quad \text{[car } G^0 = I]$$

$$8.4. \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha = 1 \Leftrightarrow \eta = D(\beta) * G.$$

$$8.5. \quad \beta = t \text{ et } \alpha = 1 - t \Leftrightarrow \eta = D(t) * G^{1-t}$$

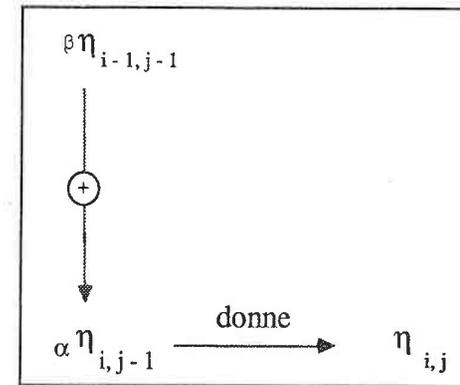


Figure 3.6 : Relation triangulaire entre composantes de l'opérateur généralisée $\eta = D(\beta) * G^\alpha$

2.4.2. Propriétés de η

Les propriétés de η s'obtiennent par une simple modification de celles de G^α . Ainsi pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

P1 η : η est une matrice triangulaire supérieure compte tenu de l'équation (3.45).

P2 η : $\eta_{i,i} = \beta^i$ pour $i = 0, 1, \dots, n$, car $G_{i,i}^\alpha = 1$ d'après P1, et $[D(\beta)]_{i,i} = \beta^i$ par définition.

P3 η : $\eta_{0,j} = \alpha^j$ pour $j = 0, 1, \dots, n$.

P4 η : $\det(\eta) = \prod_{i=0}^n \beta^i = \beta^{n(n+1)/2}$ compte tenu de P1 η et de P2 η .

P5 η : η est extensible à l'aide des relations suivantes (fig. 3.6, fig. 3.7 et équation 3.45 aidant):

$${}_{n+1}\eta_{i,j} = \begin{cases} {}_n\eta_{i,j} & \text{pour } i, j = 0, 1, \dots, n \\ \alpha {}_n\eta_{0,n} & \text{pour } i=0 \text{ et } j=n+1 \\ \beta {}_n\eta_{i-1,n} + \alpha {}_n\eta_{i,n} & \text{pour } i=1, \dots, n \text{ et } j=n+1 \\ \beta {}_n\eta_{n,n} & \text{pour } i=j=n+1 \\ 0 & \text{pour } i=n+1 \text{ et } j=0, \dots, n \end{cases}$$

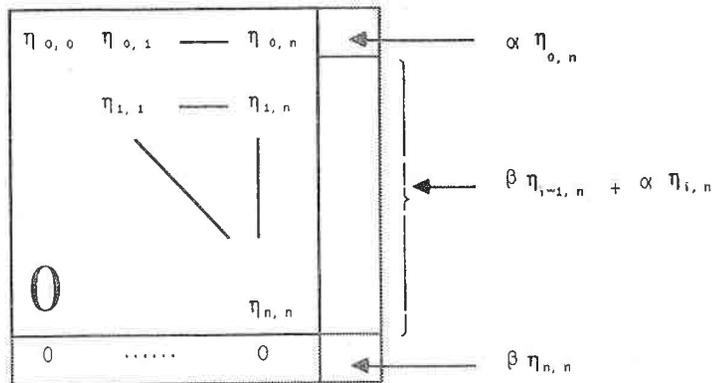


Figure 3.7 Extension de η

P6 η : $\eta_{i,j}$ donne le coefficient du monôme x^j dans le développement binomial de $(\alpha + \beta x)^i$ $i, j = 0, 1, \dots, n$. En effet, à partir de la définition de η , on a:

$$\begin{aligned} \eta_{i,j} &= \beta^i G_{i,j}^\alpha \\ &= \beta^i \alpha^{i-1} C_j^i \quad [\text{d'après la définition de } G^\alpha] \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

Autrement dit, $\eta_{*,j}$ est le vecteur coefficient du polynôme $(\alpha + \beta x)^j$ développé suivant les degrés croissants des x^i .

P7 η : $\eta_{0,j} + \eta_{1,j} + \dots + \eta_{j,j} = (\alpha + \beta)^j$ pour $j = 0, 1, \dots, n$.

En effet, en remplaçant x par 1 dans le développement de $(\alpha + \beta x)^j$, on obtient la somme des $\eta_{i,j}$ d'après P6 η .

P8 η : Génération de la colonne j en fonction de la colonne $j-1$. Une modification des relations d'extension qui ajoute une $(n+2)$ ème colonne et ligne à η pour le porter à l'ordre $n+2$ (voir P5 η ci-dessus) conduit à l'expression d'une colonne $\eta_{*,j}$ en fonction de la colonne précédente $\eta_{*,j-1}$, où le vecteur colonne $\eta_{*,j}$ est défini par:

$$\eta_{*,j} = {}^t(\eta_{0,j}, \eta_{1,j}, \dots, \eta_{j,j})$$

(On se volontairement débarrassé de la queue identiquement nulle).

En effet, l'équation (3.45), traduite pour les composantes de la colonne j , donne:

$$\begin{aligned} \eta_{0,j} &= \alpha \eta_{0,j-1} \\ \eta_{1,j} &= \beta \eta_{0,j-1} + \alpha \eta_{1,j-1} \\ \dots & \dots \\ \eta_{i,j} &= \beta \eta_{i-1,j-1} + \alpha \eta_{i,j-1} \quad (3.46) \\ \dots & \dots \\ \eta_{j-1,j} &= \beta \eta_{j-2,j-1} + \alpha \eta_{j-1,j-1} \\ \eta_{j,j} &= \beta \eta_{j-1,j-1} \end{aligned}$$

qui peuvent se mettre sous l'une des trois formes matricielles évidentes que voici :

$$P8.1\eta : \quad \eta_{*,j} = \alpha \begin{bmatrix} \eta_{*,j-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_{*,j-1} \end{bmatrix}$$

$$P8.2\eta : \quad \eta_{*,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{j-1} \\ [0]_{j-1} \end{bmatrix} \eta_{*,j-1} + \begin{bmatrix} [0]_{j-1} \\ \mathbf{I}_{j-1} \end{bmatrix} \eta_{*,j-1}$$

(\mathbf{I}_{j-1} et $[0]_{j-1}$ selon les notations de fig. 3.3)

$$P8.3\eta : \quad \eta_{*,j} = {}_{\alpha, \beta} \mathbf{IE}_{j-1 \rightarrow j} * \eta_{*,j-1}$$

où :

$${}_{\alpha, \beta} \mathbf{IE}_{j-1 \rightarrow j} = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & 0 \\ \beta & \alpha & & \\ & \beta & & \alpha \\ 0 & & & \beta \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & 0 \\ \beta & \alpha & & \\ & \beta & & \alpha \\ 0 & & & \beta \end{array}} \right\} \begin{array}{l} j+1 \\ \text{lignes} \end{array}$$

} j colonnes

On souligne que les trois identifications proposées en §2.1.2 pour généraliser les propriétés de \mathbf{G} à un corps quelconque \mathbb{F} sont aussi le point de départ du calcul récurrent de η lorsque $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Toutefois, il faudra, dans ce cas, poursuivre le calcul jusqu'à la taille souhaitée pour η et selon l'une des prescriptions P8.1 η , P8.2 η ou P8.3 η .

Conclusion

L'outil mathématique présenté dans ce chapitre avait, au départ, pour objectif principal d'unifier les transformations de transcription des formes paramétriques polynomiales lorsque le paramètre de l'expression polynomiale subit une transformation linéaire. Cependant sa portée et son champ d'application ainsi que ses prolongements sortent de ce cadre initial. En effet, les différentes identités polynomiales établies sont applicables dans tout domaine où on travaille sur des polynômes mono-paramètres. En outre, le modèle de calculs des différences finies et la possibilité de généralisations des résultats à d'autres structures algébriques peuvent intéresser les analystes numériques et les algébristes.

Quant à la transcription paramétrique proprement dite, en vue du dialogue homme-machine, on devra traduire la solution au problème de transformation linéaire en fonction de son effet sur le vecteur \mathbf{a} . Ainsi grâce à l'associativité de la multiplication matricielle, on interprétera l'équation (3.32) de la manière suivante :

$$\tau_{\alpha, \beta}(\mathbf{a}) = \mathbf{D}(\beta) * \mathbf{G}^\alpha \mathbf{a} \quad (3.47).$$

L'interprétation de ce dernier modèle pour un schéma donné se fera simplement en remplaçant le vecteur \mathbf{a} par $\mathbf{A} \mathbf{P}$. Dans de tels contextes, \mathbf{A} désignera la matrice de lissage associé au schéma et \mathbf{P} , le polygone caractéristique, celui-ci étant à identifier, du point de vue du concepteur, à la représentation des arcs de courbe.

Pour terminer, on peut déjà résumer la suite de cette étude comme étant centrée essentiellement autour de la recherche des interprétations concrètes diverses de l'opérateur :

$$\eta_{\alpha, \beta} = \mathbf{D}(\beta) * \mathbf{G}^\alpha$$

par rapport aux transformations courantes des courbes et schémas paramétriques polynomiaux ainsi que par rapport à leur analyse et leur caractérisation géométrique.

++++

CHAPITRE 4

++++

Matrice de Bernstein et matrice de Bézier

CHAPITRE 4

Matrice de Bernstein et matrice de Bézier

Introduction

Le développement du dernier chapitre conduit naturellement au procédé classique d'approximation de Bernstein. Les polynômes dits de Bernstein [Davis-63, pp.108-111] [Forrest-71, p.73] dans leur utilisation classique, sont souvent associés au *théorème d'approximation de Weierstrasse* [Davis-63] dont ils fournissent une démonstration élégante.

Bien que le procédé de Bernstein possède plusieurs qualités intéressantes, du fait de sa lente vitesse de convergence, il n'a trouvé d'applications pratiques qu'avec l'avènement de la CFAO. La représentation d'une forme en CFAO étant *nécessairement finie*, la faible vitesse de convergence de ce procédé se relativise devant la combinaison de ses autres qualités parmi lesquelles on peut citer notamment les suivantes :

- une remarquable capacité d'imiter l'allure générale d'une forme [Gordon-74, p.296],
- la possibilité qu'il offre pour contrôler et limiter la variation d'une forme [Schoenberg-59, pp.249-274],
- la possibilité d'anticiper les effets des modifications à effectuer sur une forme,

R. A. Forrest a établi, pour la première fois à notre connaissance, les liens explicites entre le procédé de Bernstein et le procédé de Bézier [Forrest-71]. La similitude entre les deux procédés est telle que l'on les assimile parfois à un même procédé dans la littérature. C'est ainsi que l'on parle parfois de *méthode de Bernstein-Bézier* [Gordon-74] [Piegl-84].

Ce chapitre, prolongeant le développement du précédent, fait le lien avec le procédé d'approximation de Bernstein. Après l'étude des propriétés des matrices dites des fonctions de Bernstein, une nouvelle interprétation géométrique du procédé de génération des fonctions de Bézier proprement dites, à partir des fonctions de Bernstein, est proposée. La dualité entre ces deux classes de fonctions est ensuite étudiée.

Ces résultats nous ont apparus nouveaux et s'agissant des procédés de Bernstein et de Bézier qui exercent une influence théorique et pratique considérable sur le développement de la CFAO, nous avons estimé nécessaire de leur consacrer un chapitre entier.

1. Approximation de Bernstein

Soit f une fonction arbitraire définie comme suit : $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$. Son approximation par un polynôme de Bernstein de degré m est définie par [Davis-63, p.108] :

$$\mathfrak{B}_m(f, t) = \sum_{i=0}^m f_i \cdot \mathbb{B}_{i, m}(t) \quad (4.1)$$

où $f_i = f_i(i/m)$, $i = 0, 1, \dots, m$, et où les $m+1$ fonctions $\mathbb{B}_{i, m}(t)$ appelées **fonctions de Bernstein**, sont formellement définies comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{0, m}(t) &= (1-t)^m = t^0 [C_m^0 (1-t)^m] \\ \mathbb{B}_{1, m}(t) &= C_m^1 t (1-t)^{m-1} = t^1 [C_m^1 (1-t)^{m-1}] \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbb{B}_{i, m}(t) &= C_m^i t^i (1-t)^{m-i} = t^i [C_m^i (1-t)^{m-i}] \quad (4.2) \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbb{B}_{m-1, m}(t) &= C_m^{m-1} t^{m-1} (1-t) = t^{m-1} [C_m^{m-1} (1-t)] \\ \mathbb{B}_{m, m}(t) &= t^m = t^m [C_m^m (1-t)^0] \end{aligned}$$

On trouvera une ample présentation des principales qualités du procédé d'approximation de Bernstein dans les classiques en la matière, comme dans [Schoenberg-59, pp.249-274] [Davis-63, pp.108-118] [Kelisky-67, pp.511-520].

Par rapport au procédé de Bézier, on remarquera que le procédé de Bernstein s'appuie sur une équi-repartition des f_i sur l'intervalle $[0, 1]$ et (il va de soit) que la fonction f est *nécessairement connue d'avance*, ce qui n'est pas forcément le cas pour le procédé de Bézier. On trouvera dans [Forrest-71, p.73] une comparaison détaillée et instructive entre ces deux procédés.

Pour illustrer le procédé de Bernstein, considérons l'exemple simple de l'approximation de la fonction échelon-unité $\mathcal{J}_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \mathcal{J}_0(t) = 1$ par un polynôme de Bernstein de degré m . Une forme légèrement modifiée de cet exemple (voir fig. 4.1) permettra de retrouver les fonctions de Bézier à partir des fonctions de Bernstein.

Dans le cas présent, $f_i = 1$ pour $i = 0, 1, \dots, m$. D'après (4.1), on obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_m(\mathcal{J}_0, t) &= \sum_{i=0}^m \mathbb{B}_{i, m}(t) \\ &= \sum_{i=0}^m C_m^i t^i (1-t)^{m-i} = 1 \quad \text{[théorème binomial]} \end{aligned}$$

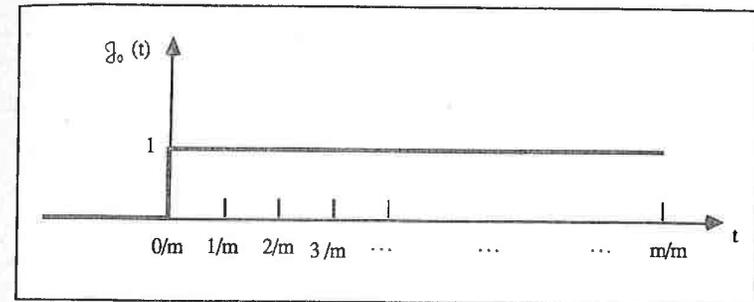


Figure 4.1 : Fonction échelon-unité : $\mathcal{J}_0(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$, $\mathcal{J}_0(t) = 0$ sinon.

Cet exemple révèle déjà certaines propriétés fondamentales du procédé de Bernstein :

1. il reproduit toute fonction constante,
2. les fonctions de Bernstein d'un ordre donné vérifient la condition dite de "Cauchy" [Bézier-86, p.83], soit :

$$\sum_{i=0}^m \mathbb{B}_{i, m}(t) \equiv 1$$

Pour une présentation plus complète des propriétés de $\mathbb{B}_{i, m}(t)$, nous renvoyons le lecteur aux références classiques suivantes [Bézier-86] [Bézier-77] [Forrest-71] [Gordon-74]

1.1. Matrice de Bernstein

Définition 4.1

On appelle matrice de Bernstein de degré n paramétrée en $t \in [0, 1]$ la matrice, désignée $Bernstein(t)$, dont les composantes sont définies comme suit :

$$Bernstein(t) = \begin{cases} B_{i,j}(t) & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{pour } i > j \end{cases}$$

$i, j = 0, 1, \dots, n$

Ainsi, la matrice des fonctions de Bernstein de degré n est la matrice carrée de format $(n+1) \times (n+1)$, donnée explicitement par :

$$Bernstein(t) = \begin{bmatrix} B_{0,0}(t) & B_{0,1}(t) & \dots & B_{0,n}(t) \\ & B_{1,1}(t) & \dots & B_{1,n}(t) \\ & & \ddots & \\ & & & B_{n,n}(t) \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Les $B_{i,j}(t)$ sont les fonctions définies dans (4.2), en prenant $m = n$.

Le développement du précédent chapitre conduit au théorème suivant :

Théorème 4.1

Soit $\eta = D(\beta) * G^\alpha$ avec α et $\beta \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 1-t$ et $\beta = t$ alors $\eta = Bernstein(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Démonstration 4.1

Les hypothèses sont les suivantes :

$$H1 : \eta = D(t) * G^{1-t}$$

$$H2 : [Bernstein(t)]_{i,j} = \begin{cases} t^i C_j^i (1-t)^{j-i} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{pour } i > j \end{cases}$$

Il suffit donc de démontrer que :

$$\eta_{i,j} = \begin{cases} t^i C_j^i (1-t)^{j-i} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{pour } i > j \end{cases}$$

En effet, pour $i, j = 0, 1, \dots, n$, d'après H1, on a :

$$\eta_{i,j} = (0 \underbrace{\dots 0}_i \text{ zéros} \ t^i \ 0 \underbrace{\dots 0}_{n-i} \text{ zéros}) \begin{bmatrix} G_{0,j}^{1-t} \\ G_{1,j}^{1-t} \\ \vdots \\ G_{i,j}^{1-t} \\ \vdots \\ G_{j,j}^{1-t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = t^i G_{i,j}^{1-t}$$

ce qui donne :

$$\eta_{i,j} = t^i C_j^i (1-t)^{j-i}$$

compte tenu de (3.16) et de (3.8).

CQFD.

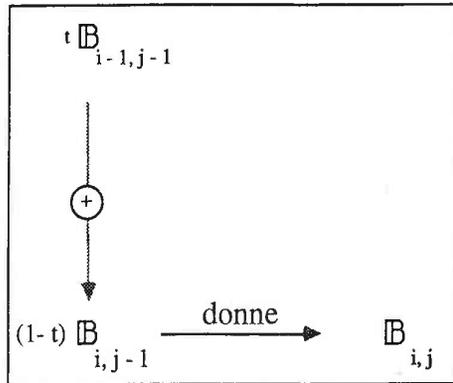


Figure 4.2 : Fonctions de Bernstein et deuxième généralisation de la récurrence binomiale.

De ce théorème découlent trois conséquences intéressantes :

1. Il montre que la matrice de Bernstein, comme l'opérateur η , est *inscrite* dans la généralisation du procédé de calcul de la matrice binomiale. En effet, compte tenu de ce théorème, les composantes de la matrice de Bernstein vérifient une récurrence triangulaire (cf fig. 4.2) qui n'est qu'une spécialisation de la récurrence de (3.45), à savoir :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ t B_{i-1, j-1} + (1-t) B_{i, j-1} & \text{pour } i \leq j \end{cases} \quad (4.4)$$

Remarque

Par souci d'allègement des notations, lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, nous n'indiquerons pas systématiquement le paramètre des fonctions.

2. Le théorème permet de déduire les propriétés fondamentales de la matrice de Bernstein à partir des propriétés de l'opérateur η (cf. §2.4.2 du chapitre 3), moyennant les deux substitutions suivantes : $\alpha = 1-t$ et $\beta = t$. C'est dans cette optique que nous examinerons dans la section suivante les formulations homologues des propriétés

P8.1 η , P8.2 η et P8.3 η (cf. §2.4.2 du chapitre 3) qui sous-tendent plusieurs techniques de la méthode de Bernstein-Bézier. Quant aux propriétés homologues respectives de P1 η , ..., P7 η , elles se déduisent facilement par des simples substitutions.

3. Compte tenu de ce théorème, la matrice de Bernstein vérifie l'identité polynomiale suivante :

$$v_{1-t+t^2} = v_t \text{Bernstein}(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1]$$

Cette identité est une conséquence directe de l'interprétation géométrique explicite attribuée aux opérateurs $D(\beta)$ et G^α . D'une manière générale, puisque

$$v_t^k = v_{t^{k-1}} D(t)$$

on a le résultat général suivant :

$$v_{1-t+t^k} = v_{t^{k-1}} \text{Bernstein}(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1] \quad (4.5)$$

1.2. Fonctions de Bernstein de degrés successifs

Soit à déterminer les fonctions de Bernstein de degré j connaissant celles de degré $j-1$.

Cela revient à déterminer le vecteur $B_{*,j} = (B_{0,j}, B_{1,j}, \dots, B_{j,j})$ à partir du vecteur

$B_{*,j-1} = (B_{0,j-1}, B_{1,j-1}, \dots, B_{j-1,j-1})$. Aux trois propriétés P8.1 η , P8.2 η et P8.3 η

(cf. §2.4.2 du chapitre précédent) correspondent trois formulations équivalentes que nous illustrons dans la suite à travers le calcul des fonctions de Bernstein de degrés un, deux et trois.

A. Première formulation :

En posant $\alpha = 1-t$ et $\beta = t$ dans la propriété P8.1 η (cf. § 2.4.2 du chapitre précédent) on

obtient : $\eta_{*,j-1} = B_{*,j-1}$ et $\eta_{*,j} = B_{*,j}$ ainsi que la relation récurrente suivante :

$$\mathbb{B}_{*,j} = (1-t) \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{*,j-1} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B}_{*,j-1} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

On retrouve ici les fondements d'une généralisation intéressante de la méthode de Bernstein-Bézier proposée par Piegl [Piegl-84].

Le calcul des fonctions de degrés 1, 2 et 3 procédera alors comme suit :

Initialisation :

On posera :

$$\mathbb{B}_{*,0} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire : $\mathbb{B}_{0,0} = 1$

Calcul de $\mathbb{B}_{*,1}$

Une première itération de (4.6) donnera :

$$\mathbb{B}_{*,1} = (1-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}$$

D'où les deux fonctions de degré un :

$$\mathbb{B}_{0,0} = 1 - t$$

$$\mathbb{B}_{0,1} = t$$

Calcul de $\mathbb{B}_{*,2}$

Une deuxième itération de (4.6) conduira à :

$$\mathbb{B}_{*,2} = (1-t) \begin{bmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ 2t(1-t) \\ t^2 \end{bmatrix}$$

D'où les trois fonctions de degré deux :

$$\mathbb{B}_{0,2} = (1-t)^2$$

$$\mathbb{B}_{0,1} = 2t(1-t)$$

$$\mathbb{B}_{0,1} = t^2$$

Calcul de $\mathbb{B}_{*,3}$

La troisième itération de (4.6) donnera :

$$\mathbb{B}_{*,3} = (1-t) \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ 2t(1-t) \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ (1-t)^2 \\ 2t(1-t) \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix}$$

D'où les quatre fonctions de degré trois :

$$\mathbb{B}_{0,3} = (1-t)^3$$

$$\mathbb{B}_{1,3} = 3t(1-t)^2$$

$$\mathbb{B}_{2,3} = 3t^2(1-t)$$

(4.6.1)

$$\mathbb{B}_{3,3} = t^3$$

Et si l'on veut faire ces mêmes calculs dans un corps arbitraire \mathbb{F} , il suffira d'effectuer l'initialisation suivante :

$$\mathbb{B}_{*,0}(t_{\mathbb{F}}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbb{F} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

En tenant compte des identifications proposées au chapitre 3, partie I, §2.1.1, l'itération de (4.6) se traduira comme suit :

$$\mathbb{B}_{*,1}(t_{\mathbb{F}}) = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{F}} & -t_{\mathbb{F}} \\ 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix} + t_{\mathbb{F}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{F} \\ 1_{\mathbb{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\mathbb{F}} & -t_{\mathbb{F}} \\ & t_{\mathbb{F}} \end{bmatrix}$$

pour le calcul de $\mathbb{B}_{*,1}(t_{\mathbb{F}})$, les opérations d'addition et de multiplication étant naturellement celles définies sur le corps \mathbb{F} . On voit bien comment l'on pourra poursuivre le calcul dans les autres cas.

B. Deuxième formulation :

En posant $\alpha = 1 - t$ et $\beta = t$ dans la propriété P8.2 η (cf. § 2.4.2 du chapitre précédent), on obtient : $\eta_{*,j-1} = \mathbb{B}_{*,j-1}$ et $\eta_{*,j} = \mathbb{B}_{*,j}$. Dans ces conditions, on a :

$$\mathbb{B}_{*,j} = (1-t) \begin{bmatrix} I_{j-1} \\ [0]_{j-1} \end{bmatrix} \mathbb{B}_{*,j-1} + t \begin{bmatrix} [0]_{j-1} \\ I_{j-1} \end{bmatrix} \mathbb{B}_{*,j-1} \quad (4.8)$$

Le calcul des fonctions de degrés un, deux et trois procédera alors comme suit :

Initialisation :

On posera :

$$\mathbb{B}_{*,0} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Calcul de $\mathbb{B}_{*,1}$

Une première itération de (4.8) donnera :

$$\mathbb{B}_{*,1} = (1-t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}$$

conduisant aux mêmes fonctions de degré un que la formulation précédente.

Calcul de $\mathbb{B}_{*,2}$

La deuxième itération de (4.8) donnera :

$$\mathbb{B}_{*,2} = (1-t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ 2t(1-t) \\ t^2 \end{bmatrix}$$

Les fonctions de degré deux obtenues dans ce cas aussi sont identiques à celles fournies par la formulation précédente.

Calcul de $\mathbb{B}_{*,3}$

La troisième itération de (4.8) conduira à :

$$\mathbb{B}_{*,3} = (1-t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ 2t(1-t) \\ t^2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ 2t(1-t) \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix}$$

On constate une fois encore l'identité entre les résultats de cette formulation et celles de la

formulation précédente.

Pour effectuer les mêmes itérations dans un corps quelconque \mathbb{F} , on commencera dans ce cas aussi avec l'initialisation (4.7). Le calcul des fonctions de degré un se présentera à titre d'exemple, comme suit :

$$\mathbb{B}_{*,j+1}(t_{\mathbb{F}}) = (1_{\mathbb{F}} - t_{\mathbb{F}}) \begin{bmatrix} 1_{\mathbb{F}} \\ 0_{\mathbb{F}} \end{bmatrix} + t_{\mathbb{F}} \begin{bmatrix} 0_{\mathbb{F}} \\ 1_{\mathbb{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\mathbb{F}} - t_{\mathbb{F}} \\ t_{\mathbb{F}} \end{bmatrix}$$

Le calcul dans les autres cas s'effectuera de manière analogue, en s'appuyant sur (4.8).

Remarque :

Comme le montre (4.8), les deux matrices scalaires de cette formulation sont liées par une relation de *permutation de sous-blocs*. Grâce à la matrice \mathbf{R} étudiée au chapitre 2, cette relation peut être formulée également comme suit :

$$\left. \begin{array}{c} j+1 \\ \text{lignes} \end{array} \right\} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{j \text{ colonnes}} = \mathbf{R}_{j+1} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & 1 \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_j \quad (4.8.1)$$

Puisque $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}$, on peut également écrire :

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & 1 \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{j+1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & & 0 \\ & \diagdown & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_j \quad (4.8.2)$$

Cela dit, abordons maintenant la troisième formulation.

C. Troisième formulation :

En imposant les conditions suivantes : $\alpha = 1-t$ et $\beta = t$ dans P8.3 η (§ 2.4.2, chap.3) et en identifiant $\eta_{i,j}$ à $\mathbb{B}_{i,j}$, on obtient pour $j > 0$, la relation suivante :

$$\mathbb{B}_{*,j} = \mathbf{T}_j \mathbb{B}_{*,j-1} \quad (4.9)$$

On remarquera que nous avons écrit \mathbf{T}_j à la place de ${}_{\alpha,\beta} \mathbf{I}E_{j \rightarrow j+1}$ dans le souci de simplifier la notation. Ceci donne :

$$\mathbf{T}_j = \left. \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1-t & & & 0 \\ & t & 1-t & \\ & & \diagdown & \\ 0 & & & t & 1-t \\ & & & & & t \end{array} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{c} j+1 \\ \text{lignes} \end{array} \quad (4.10)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{j \text{ colonnes}}$

Le calcul des fonctions de degrés un, deux et trois procédera comme suit :

Initialisation :

On posera :

$$\mathbb{B}_{*,0} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Calcul de $\mathbb{B}_{*,1}$

Etant donné que $j = 1$, on a :

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} \quad (4.10.1)$$

D'où :

$$\mathbb{B}_{*,1} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{0,1} \\ \mathbb{B}_{1,1} \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi les mêmes fonctions de degré un que dans les deux cas précédents.

Calcul de $\mathbb{B}_{*,2}$

Etant donné que $j = 2$, la matrice \mathbf{T}_2 est donnée par :

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1-t & 0 \\ t & 1-t \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

d'où on obtient pour les fonctions de degré deux :

$$\mathbb{B}_{*,2} = \begin{bmatrix} 1-t & 0 \\ t & 1-t \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ 2t(1-t) \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{0,2} \\ \mathbb{B}_{1,2} \\ \mathbb{B}_{2,2} \end{bmatrix}$$

qui sont identiques à celles obtenues à l'aide des deux premières formulations.

Calcul de $\mathbb{B}_{*,3}$

Etant donné que $j = 3$, la matrice \mathbf{T}_3 est donnée par :

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

d'où les quatre fonctions de degré trois sont données par :

$$\mathbb{B}_{*,3} = \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ 2t(1-t) \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{0,3} \\ \mathbb{B}_{1,3} \\ \mathbb{B}_{2,3} \\ \mathbb{B}_{3,3} \end{bmatrix}$$

On voit qu'elles sont confondues avec les résultats obtenus à l'aide des deux premières formulations.

Remarque

En prenant comme convention $T_0 = [I]$, on constate que la troisième formulation peut s'écrire également sous une forme plus condensée comme suit :

$${}^t\mathbb{B}_{*,j} = \prod_{k=0}^j {}^t\mathbf{T}_k \quad (4.11)$$

où le symbole \prod désigne le produit matriciel généralisé. Ce produit est bien défini pour la suite des matrices ${}^t\mathbf{T}_0, {}^t\mathbf{T}_1, \dots, {}^t\mathbf{T}_j$, car d'une part, le produit matriciel est associatif et d'autre part, pour tout $k > 0$, le nombre de lignes de T_{k-1} est identique au nombre de

colonnes de T_x (d'après 4.10).

Il est intéressant de noter que l'itération de la matrice suivante notée par K :

$$K = \begin{bmatrix} 1-u & u & & & 0 \\ & 1-u & u & & \\ & & & & \\ & & & 1-u & u \\ 0 & & & & 1-u \end{bmatrix}$$

est à la base d'une démonstration élégante du théorème [dit "méthode de Vernet" [Bézier-86, p.77]] de construction du point courant d'une courbe de Bézier [Bézier-72, pp.121-122] proposée par Chang et al. dans [Chang-81, p.135]. De toute évidence, cette matrice, au symbole u près, n'est autre que la transposée de la matrice T . La transposition s'explique par le simple fait que notre modèle considère la suite des fonctions de Bernstein d'un ordre donné comme un vecteur colonne tandis que Chang et al. l'ont considérée comme un vecteur ligne.

1.3. Huit décompositions canoniques de Bernstein(t)

Les différentes identités établies à la section 2.4.1 du précédent chapitre conduisent à huit décompositions équivalentes d'une matrice de Bernstein en produit de deux ou trois matrices. Chaque décomposition, dite *canonique*, est composée *uniquement* d'une matrice d'homothétie polynomiale et d'une ou de deux matrices binomiales à puissance banalisée. Les huit décompositions sont récapitulées dans la figure 4.3 disposées aux sommets d'un octogone numérotés arbitrairement dans le sens positif trigonométrique.

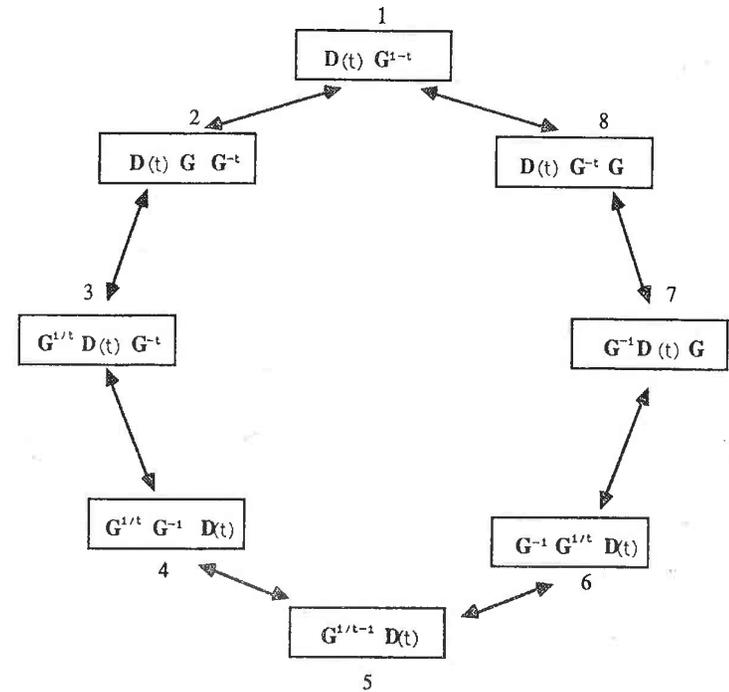


Figure 4.3 : Huit décompositions de la matrice de Bernstein avec $t \in [0, 1]$; les décompositions 3, 4, 5 et 6 doivent être assorties de la condition : $t \neq 0$.

En commençant par placer au premier sommet la décomposition proposée par le théorème 4.1, les sept autres décompositions peuvent en être déduites par l'application des identités suivantes :

$$D(\beta) * G^\alpha = G^{\alpha/\beta} * D(\beta) \quad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad (4.12)$$

[cf.(3.41), §2.4.1, chap.3]

$$G^\alpha * D(\beta) = D(\beta) * G^{\alpha\beta} \quad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (4.13)$$

$$X^{\alpha+\beta} = X^\alpha X^\beta \quad (4.14a)$$

$$= X^\beta X^\alpha \quad (4.14b)$$

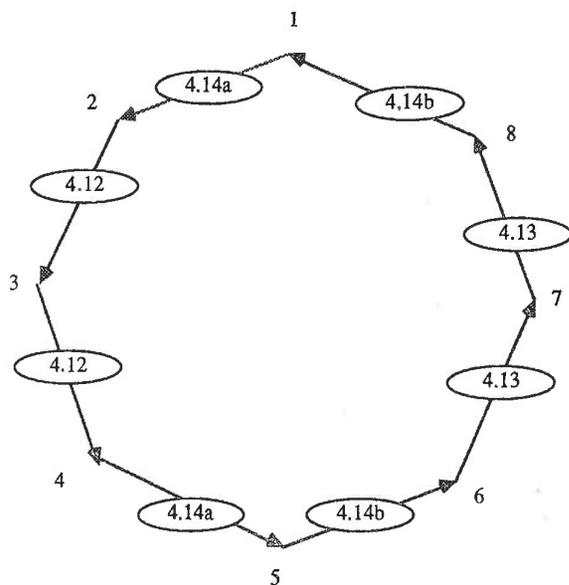


Figure 4.4 : Calcul ordonné des décompositions canoniques par un parcours positif :

- 1, 2, ..., 8 : les sommets de l'octogone,
- 4.12 : pour l'emploi de l'équation (4.12),
- 4.13 : pour l'emploi de l'équation (4.13),
- 4.14a : pour l'emploi de l'équation (4.14a),
- 4.14b : pour l'emploi de l'équation (4.14b).

La méthode de construction est schématisée par les "graphes de passage" des figures 4.4 et 4.5 où les étiquettes portées par les branches indiquent le numéro de l'identité employée pour passer d'un sommet au suivant. La figure 4.4 présente un parcours dans le sens positif tandis que la figure 4.5 effectue un parcours dans sens négatif.

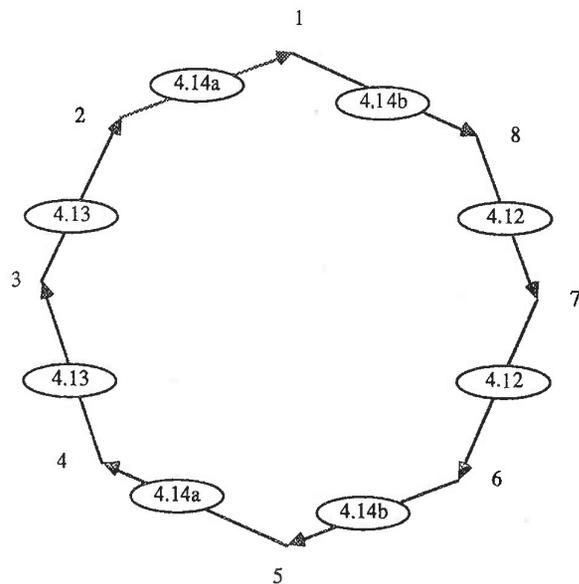


Figure 4.5 : Calcul ordonné des décompositions canoniques par un parcours négatif :

- 1, 2, ..., 8 : les sommets de l'octogone,
- 4.12 : pour l'emploi de l'équation (4.12),
- 4.13 : pour l'emploi de l'équation (4.13),
- 4.14a : pour l'emploi de l'équation (4.14a),
- 4.14b : pour l'emploi de l'équation (4.14b).

Chaque décomposition canonique étant identique à chacune des sept autres décompositions, on obtient vingt-huit identités. En ajoutant les huit identités liant chaque décomposition à Bernstein(t), on aboutit à un total de trente-six identités standard engendrées par la matrice de Bernstein.

Ces décompositions permettent de démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.2

Pour tout s et $t \in]0, 1]$, $Bernstein(s) * Bernstein(t) = Bernstein(s.t)$

Démonstration 4.2

D'après la huitième décomposition canonique, on a : $\text{Bernstein}(s) = \mathbf{D}(s) * \mathbf{G}^{-s} * \mathbf{G}$ tandis que la septième décomposition canonique conduit à :

$$\text{Bernstein}(t) = \mathbf{G}^{-1} * \mathbf{D}(t) * \mathbf{G}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \text{Bernstein}(s) * \text{Bernstein}(t) &= [\mathbf{D}(s) * \mathbf{G}^{-s} * \mathbf{G}] * [\mathbf{G}^{-1} * \mathbf{D}(t) * \mathbf{G}] \\ &= [\mathbf{D}(s) * \mathbf{G}^{-s}] * [\mathbf{G} * \mathbf{G}^{-1}] * [\mathbf{D}(t) * \mathbf{G}] \\ &= [\mathbf{D}(s) * \mathbf{G}^{-s}] * \mathbf{I} * [\mathbf{D}(t) * \mathbf{G}] \\ &= [\mathbf{D}(s) * \mathbf{G}^{-s}] * [\mathbf{D}(t) * \mathbf{G}] \\ &= [\mathbf{G}^{-1} * \mathbf{D}(s)] * [\mathbf{D}(t) * \mathbf{G}] \quad [\text{d'après 4.12}] \\ &= \mathbf{G}^{-1} * [\mathbf{D}(s) * \mathbf{D}(t)] * \mathbf{G} \\ &= \mathbf{G}^{-1} * \mathbf{D}(s.t) * \mathbf{G} \end{aligned}$$

[produit de deux matrices diagonales].

Or $\mathbf{G}^{-1} * \mathbf{D}(s.t) * \mathbf{G}$ est précisément la septième décomposition canonique de $\text{Bernstein}(s.t)$. Il s'ensuit donc que :

$$\text{Bernstein}(s) * \text{Bernstein}(t) = \text{Bernstein}(s.t) \quad \text{CQFD.}$$

Ainsi le produit de deux matrices de Bernstein est aussi une matrice de Bernstein.

Corollaire 4.2

$$[\text{Bernstein}(t)]^2 = \text{Bernstein}(t^2)$$

En procédant par récurrence, on démontre également le théorème suivant :

Théorème 4.3

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, $[\text{Bernstein}(t)]^k = \text{Bernstein}(t^k)$.

Les décompositions canoniques sont intéressantes à plus d'un titre. En premier lieu, elles formalisent de toute évidence la possibilité d'associer à la matrice de Bernstein des interprétations géométriques standard diverses. En deuxième lieu, comme vient de l'illustrer la démonstration du théorème 4.2, elles constituent un outil théorique de base pour la manipulation du procédé de Bernstein. En troisième lieu, elles soulèvent un certain nombre de problèmes théoriques et pratiques qui ne sont pas abordés dans le cadre de cette thèse, problèmes que nous formulons sous forme d'un projet qui consiste à :

1. dénombrer l'ensemble de schémas de calcul de la matrice de Bernstein que sous-tend chaque décomposition canonique,
2. étudier pour chaque schéma de calcul identifié, les aspect suivants :

- la complexité,
- la stabilité numérique,
- l'interprétation géométrique à associer au déroulement

de l'algorithme sous-jacent et sous les deux hypothèses successives suivantes :

- H1. la matrice $\text{Bernstein}(t)$ agit uniquement à gauche (resp. à droite),
- H2. la matrice $\text{Bernstein}(t)$ peut agir à la fois à gauche et à droite.

A titre d'exemple, il est clair que pour la troisième décomposition canonique qu'est

$$\text{Bernstein}(t) = \mathbf{G}^{1/t} * \mathbf{D}(t) * \mathbf{G}^{-t}$$

les deux schémas de calcul suggérés par les parenthésages :

$$\text{Bernstein}(t) = [\mathbf{G}^{1/t} * \mathbf{D}(t)] * \mathbf{G}^{-t}$$

et :

$$\text{Bernstein}(t) = G^{1/t} * [D(t) * G^{-1}]$$

sous-tendent deux algorithmes différents. Au déroulement de chacun d'entre eux correspond donc une interprétation spécifique de l'opérateur Bernstein(t).

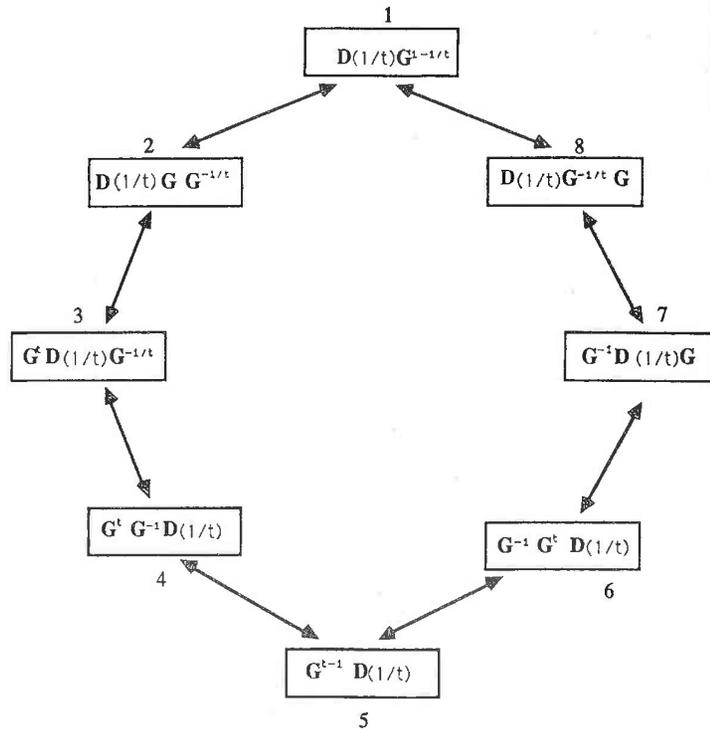


Figure 4.6 : Huit décompositions canoniques d'une matrice rationnelle de Bernstein, $t \in]0, 1[$

1.3.1. Matrices rationnelles de Bernstein

En remplaçant t par $1/t$ dans le théorème 4.1 sous condition que $t \in]0, 1[$ et par conséquent $1/t \in [1, \infty[$, la matrice résultante, tout en vérifiant le même théorème et tout en possédant huit décompositions canoniques homologues, comme l'illustre la figure 4.6, n'est plus une

matrice de Bernstein au sens de la définition 4.1. En revanche, par ce procédé simple, on parvient à une nouvelle généralisation des matrices de Bernstein que sont les matrices rationnelles de Bernstein désignées par $\mathfrak{B}\text{ernstein}(1/t)$.

Par exemple, la matrice de Bernstein rationnelle jusqu'au degré trois est donnée par :

$$\mathfrak{B}\text{ernstein}(1/t) = \begin{bmatrix} 1 & (1-1/t) & (1-1/t)^2 & (1-1/t)^3 \\ & 1/t & 2(1-1/t)(1/t) & 3(1-1/t)^2(1/t) \\ & & (1/t)^2 & 3(1-1/t)(1/t)^2 \\ 0 & & & (1/t)^3 \end{bmatrix}$$

Le terme générale de $\mathfrak{B}\text{ernstein}(1/t)$, de dimension $(n+1) \times (n+1)$, est défini par :

$$[\mathfrak{B}\text{ernstein}(1/t)]_{i,j} = C_j^i (t-1)^{j-1} t^{-j} \quad \text{pour } i \leq j$$

$$= 0 \quad \text{pour } i > j$$

$i, j = 0, 1, \dots, n$

Si l'on admet dans la définition 4.1 que $t \in \mathbb{R}^*$, on obtient des matrices rationnelles généralisées de Bernstein dont les propriétés ressemblent à la fois à celles des matrices d'homothétie polynomiales et à celles des matrices binomiales à puissances banalisées. L'étude systématique de ces matrices sort cependant du cadre de cette thèse. Leur étude est un prolongement naturel de ce travail. Dans l'immédiat, l'intérêt pratique des matrices rationnelles de Bernstein est souligné par le théorème suivant :

Théorème 4.4

Pour tout $t \in]0, 1[$, $\text{Bernstein}(t) * \mathfrak{B}\text{ernstein}(1/t) = I$

Démonstration 4.4

On peut écrire :

$\text{Bernstein}(t) = \mathbf{D}(t) * \mathbf{G}^{-1} * \mathbf{G}$ d'après la huitième décomposition canonique et

$\text{Bernstein}(1/t) = \mathbf{G}^{-1} * \mathbf{D}(1/t) * \mathbf{G}$ d'après la septième décomposition canonique (cf. fig. 4.6). D'où :

$$\begin{aligned} \text{Bernstein}(t) * \text{Bernstein}(1/t) &= [\mathbf{D}(t) * \mathbf{G}^{-1} * \mathbf{G}] * [\mathbf{G}^{-1} * \mathbf{D}(1/t) * \mathbf{G}] \\ &= [\mathbf{D}(t) * \mathbf{G}^{-1}] * [\mathbf{G} * \mathbf{G}^{-1}] * [\mathbf{D}(1/t) * \mathbf{G}] \\ &= [\mathbf{D}(t) * \mathbf{G}^{-1}] * \mathbf{I} * [\mathbf{D}(1/t) * \mathbf{G}] \\ &= [\mathbf{D}(t) * \mathbf{G}^{-1}] * [\mathbf{D}(1/t) * \mathbf{G}] \\ &= [\mathbf{D}(t) * \mathbf{G}^{-1}] * [\mathbf{G}^t * \mathbf{D}(1/t)] \quad [\text{d'après 4.12}] \\ &= \mathbf{D}(t) * [\mathbf{G}^{-t} * \mathbf{G}^t] * \mathbf{D}(1/t) \\ &= \mathbf{D}(t) * \mathbf{I} * \mathbf{D}(1/t) \\ &= \mathbf{D}(t) * \mathbf{D}(1/t) \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad \text{CQFD.}$$

Corollaire 4.4

Pour tout $t \in]0, 1[$: $[\text{Bernstein}(t)]^{-1} = \text{Bernstein}(1/t)$

Ainsi déterminer l'inverse d'une matrice de Bernstein revient simplement à remplacer le paramètre par son inverse multiplicatif. Il s'ensuit que tout procédé qui calcule une matrice de Bernstein est confondu avec le procédé qui calcule son inverse.

2. Méthode UNISURF de Bézier

UNISURF est le nom de la méthode mise au point par P. Bézier à la Régie Nationale des Usines Renault. Le champ d'application initial était le tracé de carrosserie automobile et le fraisage d'outils d'emboutissage correspondant [Ris-75].

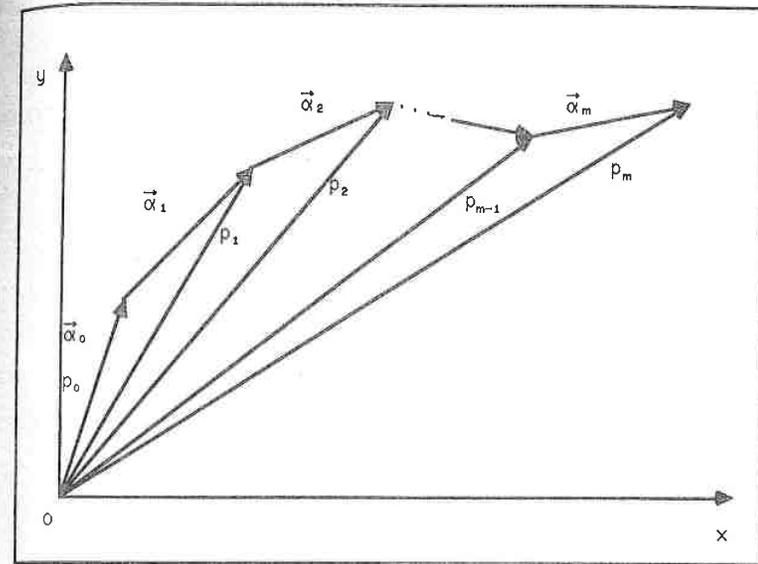


Figure 4.7 : Deux représentations équivalentes du polygone caractéristique

Dans la méthode UNISURF, un arc de courbe $C(t)$ est représenté paramétriquement par :

$$C(t) = \sum_{j=0}^m \vec{\alpha}_j \cdot \text{Bé}_{j,m}(t) \quad \text{avec } t \in [0, 1] \quad (4.15)$$

où les vecteurs $\vec{\alpha}_j$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^2 (courbes planes) ou de \mathbb{R}^3 (courbes gauches), et les $\text{Bé}_{j,m}(t)$ des polynômes de degré m . Par rapport à la notation convenue dans le chapitre deux, on remarquera que les vecteurs $\vec{\alpha}_j$ correspondent aux vecteurs définis par $\overline{P_{j-1}P_j}$ (cf. fig. 4.7).

L'idée de Bézier consiste à imposer un certain nombre de contraintes géométriques aux polynômes $\text{Bé}_{j,m}(t)$ pour que le polygone caractéristique formé par les vecteurs $\vec{\alpha}_j$ mis bout à bout, dans l'ordre des indices, donne immédiatement l'allure générale de la courbe et facilite ainsi le travail de conception de l'utilisateur [Véron-73, p.3] [Ris-75, pp.3-4].

Les nombreuses contraintes imposées aux $Bé_{j,m}(t)$ concernent les conditions de continuité que doit satisfaire l'arc de courbe à ses deux extrémités $C(0)$ et $C(1)$. Exprimées sous forme générale, elles se résument ainsi [Bézier-86, p. 72] :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad Bé_{0,m}(t) = 1 \\ 2. \quad Bé_{j,m}(0) = 0 \quad j = 1, \dots, m \\ 3. \quad Bé_{j,m}(1) = 0 \quad j = 1, \dots, m \\ 4. \quad Bé_{j,m}^{(i)}(0) = 0 \quad j = i, \dots, m \quad i = 1, \dots, m-1 \\ 5. \quad Bé_{j,m}^{(i)}(1) = 0 \quad j = i, \dots, m \quad i = 1, \dots, m-1 \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

où $Bé_{j,m}^{(i)}(t_0)$ désigne la valeur de la dérivée $i^{\text{ème}}$ de $Bé_{j,m}(t)$ en $t = t_0$. L'ensemble des fonctions $Bé_{j,m}(t)$ définies par les conditions de l'expression (4.16) s'appellent **fonctions de Bézier de degré m** , pour $t \in [0, 1]$. Pour leur calcul, Bézier a proposé les formules suivantes :

$$Bé_{j,m}(t) = \frac{(-t)^j [(1-t)^m - 1]^{(j-1)}}{(j-1)! \begin{bmatrix} t \\ \end{bmatrix}} \quad (4.17)$$

où, compte tenu de son rôle, l'expression entre crochets s'appelle **fonction génératrice** des $Bé_{j,m}(t)$.

En s'appuyant sur (4.17), les fonctions de Bézier de degrés 0, 1, ..., 6 s'obtiennent facilement comme suit :

$m = 0$:

$$\begin{bmatrix} Bé_{0,0}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$m = 1$:

$$\begin{bmatrix} Bé_{0,1}(t) \\ Bé_{1,1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$m = 2$:

$$\begin{bmatrix} Bé_{0,2}(t) \\ Bé_{1,2}(t) \\ Bé_{2,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t^2 + 2t \\ t^2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$m = 3$:

$$\begin{bmatrix} Bé_{0,3}(t) \\ Bé_{1,3}(t) \\ Bé_{2,3}(t) \\ Bé_{3,3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t^3 - 3t^2 + 3t \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$m = 4$:

$$\begin{bmatrix} Bé_{0,4}(t) \\ Bé_{1,4}(t) \\ Bé_{2,4}(t) \\ Bé_{3,4}(t) \\ Bé_{4,4}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t^4 + 4t^3 - 6t^2 + 4t \\ 3t^4 - 8t^3 + 6t^2 \\ -3t^4 + 4t^3 \\ t^4 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$m = 5 :$

$$\begin{bmatrix} B_{0,5}^{\acute{e}}(t) \\ B_{1,5}^{\acute{e}}(t) \\ B_{2,5}^{\acute{e}}(t) \\ B_{3,5}^{\acute{e}}(t) \\ B_{4,5}^{\acute{e}}(t) \\ B_{5,5}^{\acute{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t^5 - 5t^4 + 10t^3 - 10t^2 + 5t \\ -4t^5 + 15t^4 - 20t^3 + 10t^2 \\ 6t^5 - 15t^4 + 10t^3 \\ -4t^5 + 5t^4 \\ t \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$m = 6 :$

$$\begin{bmatrix} B_{0,6}^{\acute{e}}(t) \\ B_{1,6}^{\acute{e}}(t) \\ B_{2,6}^{\acute{e}}(t) \\ B_{3,6}^{\acute{e}}(t) \\ B_{4,6}^{\acute{e}}(t) \\ B_{5,6}^{\acute{e}}(t) \\ B_{6,6}^{\acute{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t^6 + 6t^5 - 15t^4 + 20t^3 - 15t^2 + 6t \\ 5t^6 - 24t^5 + 45t^4 - 40t^3 + 15t^2 \\ -10t^6 + 36t^5 - 45t^4 + 20t^3 \\ 10t^6 - 24t^5 + 15t^4 \\ -5t^6 + 6t^5 \\ t^6 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Moyennant la convention : $B_{j,m}^{\acute{e}}(t) \equiv 0$ pour tout $j > m$, les suites des fonctions de Bézier de degrés 0, 1, ..., n, considérées dans l'ordre de leurs degrés respectifs, définissent une matrice dite **matrice (des fonctions) de Bézier**, l'analogue de la matrice de Bernstein. Nous employerons la notation $\bar{B}^{\acute{e}}(t)$ pour la désigner.

A titre d'exemple, la matrice des fonctions de Bézier jusqu'au degré trois est donnée par :

$$[\bar{B}^{\acute{e}}(t)]_{n=3} = \begin{bmatrix} B_{0,0}^{\acute{e}}(t) & B_{0,1}^{\acute{e}}(t) & B_{0,2}^{\acute{e}}(t) & B_{0,3}^{\acute{e}}(t) \\ & B_{1,1}^{\acute{e}}(t) & B_{1,2}^{\acute{e}}(t) & B_{1,3}^{\acute{e}}(t) \\ & & B_{2,2}^{\acute{e}}(t) & B_{2,3}^{\acute{e}}(t) \\ 0 & & & B_{3,3}^{\acute{e}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Dans l'espace vectoriel \mathcal{P}_n des polynômes de degré n au plus, Chemla [Chemla-71] a démontré que seule la famille de polynômes $B_{j,m}^{\acute{e}}(t)$ définie par :

$$\begin{aligned} B_{0,m}^{\acute{e}}(t) &\equiv 1 \\ B_{j,m}^{\acute{e}}(t) &= \sum_{i=0}^m (-1)^{i+j} C_m^i C_{j-1}^{i-1} \cdot t^i \end{aligned} \quad (4.26)$$

proposée par Bézier répond à l'ensemble de contraintes géométriques imposées par l'expression (4.16). Sous cette forme, le lien entre les fonctions de Bézier et les composantes de la matrice binomiale commence à émerger. Mais ce lien ne devient explicite que lorsque les fonctions de Bézier sont exprimées à l'aide des fonctions de Bernstein qui ont l'avantage d'être plus simples à retenir et de faciliter les manipulations et la programmation du procédé de Bézier [Forrest-71, p. 72].

2.1. Propriétés de l'approximation de Bézier

Des nombreuses études ont été consacrées au procédé de Bézier et aux propriétés des polynômes de Bézier, à commencer par les travaux de P. Bézier lui-même [Bézier-68, pp. 190-191] [Bézier-72, pp. 115-136] [Bézier-77, pp. 64-73] [Bézier-86, pp.70-80]. On citera aussi : [Chemla-71, pp.] [Forrest-71, pp. 72-73] [Véron-73, pp.3-9] [Chang-81, pp. 133-136] [Chang-82, pp.345-350]. Le procédé de Bézier a par ailleurs connu plusieurs généralisations : [Hartley-78] [Piegl-84] [Goldman-82] [Goldman-83] [Farin-83] [Harada-82] [Hering-83].

Parmi les nombreuses propriétés du procédé de Bézier on peut noter les cinq principales suivantes [Plastock-87, p.175] [Mortenson-85, pp.113-114] :

1. La courbe de Bézier a les mêmes extrémités que son polygone caractéristique, c'est-à-dire :

$$\vec{\alpha}_0 = C(0) \qquad \vec{\alpha}_m = C(1) \qquad (4.27)$$

2. Les vecteurs tangentes aux extrémités $C(0)$, $C(1)$ ont même direction que $\vec{\alpha}_1$ et $\vec{\alpha}_m$, c'est-à-dire :

$$C^{(1)}(0) = m \cdot \vec{\alpha}_1 \qquad C^{(1)}(1) = m \cdot \vec{\alpha}_m \qquad (4.28)$$

3. La courbe de Bézier se tient entièrement à l'intérieur de la courbure de l'enveloppe convexe définie par le polygone caractéristique. En dimension deux, l'enveloppe convexe est le polygone qui se forme si l'on tend un élastique autour d'un ensemble de clous plantés aux extrémités des $\vec{\alpha}_j$ [Plastock-87, p.176].

4. Les courbes de Bézier sont adaptées au dessin interactif. En effet, on peut les enchaîner tout en garantissant la continuité de leurs dérivées à leur point de jonction dès l'instant où les côtés adjacents sont colinéaires. On a la possibilité de généraliser les conditions de continuité aux jonctions des segments à un ordre quelconque [Mortenson-85, p.113]. Les propriétés de l'hodographe (la courbe de polygone caractéristique dont les sommets sont les extrémités des $\vec{\alpha}_j$ lorsque les origines de ceux-ci sont ramenées à une origine commune) permettent de cerner les singularités éventuelles de la courbe et de caractériser la courbe plus finement [Bézier-72, pp.128-133].

5. Les polynômes $Bé_{j,m}(t)$ sont symétriques par rapport au milieu $t = 1/2$ de l'intervalle de paramètre. Par conséquent, l'inversion de l'ordre des indices des $\vec{\alpha}$ n'a simplement pour effet que d'inverser le sens du parcours de la courbe sans pour autant affecter sa forme. Nous dirons que la courbe de Bézier vérifie la propriété de symétrie par permutation [Bézier-77, p.45].

2.2. Relations entre $Bé_{*,m}(t)$ et $B_{*,m}(t)$

Considérons les quatre fonctions de Bézier de degré trois (cf. Eq. 4.21) et construisons une suite de quatre nouvelles fonctions comme suit :

$$\begin{aligned} s_0 &= Bé_{0,3}(t) - Bé_{1,3}(t) = 1 - (t^3 - 3t^2 + 3t) = (1-t)^3 \\ s_1 &= Bé_{1,3}(t) - Bé_{2,3}(t) = (t^3 - 3t^2 + 3t) - (-2t^3 + 3t^2) = 3t(1-t)^2 \\ s_2 &= Bé_{2,3}(t) - Bé_{3,3}(t) = (-2t^3 + 3t^2) - t^3 = 3t^2(1-t) \\ s_3 &= Bé_{3,3}(t) = t^3 \end{aligned}$$

De toute évidence, on peut grouper ces quatre expressions sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bé_{0,3}(t) \\ Bé_{1,3}(t) \\ Bé_{2,3}(t) \\ Bé_{3,3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix} \qquad (4.29)$$

En comparaison avec l'équation 4.5.1, on voit bien que l'équation 4.29 conduit à l'identité matricielle suivante entre les fonctions de Bézier de degré trois et celles de Bernstein de même degré :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bé_{0,3}(t) \\ Bé_{1,3}(t) \\ Bé_{2,3}(t) \\ Bé_{3,3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{0,3}(t) \\ B_{1,3}(t) \\ B_{2,3}(t) \\ B_{3,3}(t) \end{bmatrix} \qquad (4.30)$$

Cette identité n'est nullement fortuite. En effet, on démontre [Bézier-86, pp.81-82] [Chang-81, p.133] les relations générales suivantes :

$$B_{j,m}(t) - B_{j+1,m}(t) = \mathbb{B}_{j,m}(t) \quad (4.31)$$

$j=0, 1, \dots, m$

en adoptant comme convention que $B_{j,m}(t) = 0$ pour tout $j > m$. Celles-ci se traduisent sous la forme matricielle générale suivante :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{E}) * \mathbf{B}_{*,m}(t) = \mathbb{B}_{*,m}(t) \quad (4.32)$$

où plus explicitement, on a :

$$(\mathbf{I} - \mathbf{E}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & -1 & & \\ & & \diagdown & \diagdown & \\ & & & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & -1 & & \\ & & \diagdown & \diagdown & \\ & & & 1 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} m+1 \\ \text{lignes} \end{array} \quad (4.33)$$

$m+1$ colonnes

avec les vecteurs $B_{*,m}(t)$ et $\mathbb{B}_{*,m}(t)$ ainsi que la matrice \mathbf{E} définies explicitement par :

$$\mathbf{B}_{*,m}(t) = \begin{bmatrix} B_{0,m}(t) \\ B_{1,m}(t) \\ \vdots \\ B_{m-1,m}(t) \\ B_{m,m}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbb{B}_{*,m}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{0,m}(t) \\ \mathbb{B}_{1,m}(t) \\ \vdots \\ \mathbb{B}_{m-1,m}(t) \\ \mathbb{B}_{m,m}(t) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

et

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \diagdown & \diagdown & & \\ & & \diagdown & \diagdown & \\ & & & 1 & \\ 0 & \dots & \dots & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

La matrice $\mathbf{I} - \mathbf{E}$, désignée désormais par \mathbf{Sum}^{-1} , est une matrice bidiagonale la diagonale principale ayant des entrées non nulles. Elle est donc inversible. En effet, on montre [Chang-82, p.347] que \mathbf{Sum}^{-1} a pour inverse la matrice suivante :

$$\mathbf{Sum} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \diagdown & \diagdown & \\ & & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \diagdown & \diagdown & \\ & & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} m+1 \\ \text{lignes} \end{array} \quad (4.36)$$

$m+1$ colonnes

L'équation 4.32 conduit donc à la relation :

$$B_{*,m}(t) = \text{Sum} \cdot B_{*,m}(t) = \left(\sum_{k=j}^m B_{k,m}(t) \right)_{j=0, \dots, m} \quad (4.37)$$

En faisant $m = 0, \dots, n$ dans 4.37, on obtient l'expression correspondante de la matrice des fonctions de Bézier jusqu'au degré n en fonction de Bernstein(t) comme suit :

$$\text{Bézier}(t) = \text{Sum} * \text{Bernstein}(t) \quad (4.38)$$

Dans ce dernier cas, la matrice de passage Sum a pour dimension $(n+1) \times (n+1)$ et pour composantes :

$$\text{Sum}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{pour } i > j \end{cases} \quad (4.39)$$

pour i et $j = 0, 1, \dots, n$.

Inversement à l'équation 4.38, la matrice Bernstein(t) s'exprime également en fonction de Bézier(t) comme suit :

$$\text{Bernstein}(t) = \text{Sum}^{-1} * \text{Bézier}(t) \quad (4.40)$$

Cette équation indique que la matrice de Bernstein peut avoir des décompositions intéressantes, autres que les décompositions canoniques (cf. §1.3 de ce chap.).

La matrice Sum^{-1} étant identique à $(\mathbf{I} - \mathbf{E})$, ses composantes sont définies par :

$$\text{Sum}^{-1}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i=j \\ -1 & \text{pour } j-i=1 \\ 0 & \text{pour } i \neq j \text{ ou } j-i \neq 1 \end{cases} \quad (4.41)$$

2.3. Fonctions de Bézier et fonction échelon-unité

L'interprétation classique du procédé de Bernstein (cf. 4.1) permet d'attribuer une interprétation explicite aux composantes des lignes successives de la matrice Sum de l'équation 4.37. En effet, les composantes de Sum peuvent être considérées comme les suites de valeurs de la famille de $m+1$ fonctions $(\mathcal{J}_j)_{j=0, \dots, m}$ (cf. fig. 4.8) engendrée par la fonction échelon-unité définie par :

$$\mathcal{J}_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{pour } t \notin [0, 1] \end{cases} \quad (4.42)$$

Les éléments successifs de la famille se déduisent de $\mathcal{J}_0(t)$ par des translations avec des pas successifs égaux à $0/m, 1/m, \dots, m/m$. C'est ainsi que l'élément $\mathcal{J}_j(t)$ (cf. fig. 4.8) est défini par :

$$\mathcal{J}_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in [j/m, 1] \\ 0 & \text{pour } t \notin [j/m, 1] \end{cases} \quad (4.43)$$

Les valeurs de $\mathcal{J}_j(t)$ en $t = 0/m, 1/m, \dots, m/m$ sont donc définies par :

$$\mathcal{J}_j(i/m) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i < j \\ 1 & \text{pour } j \leq i \leq m \end{cases} \quad (4.44)$$

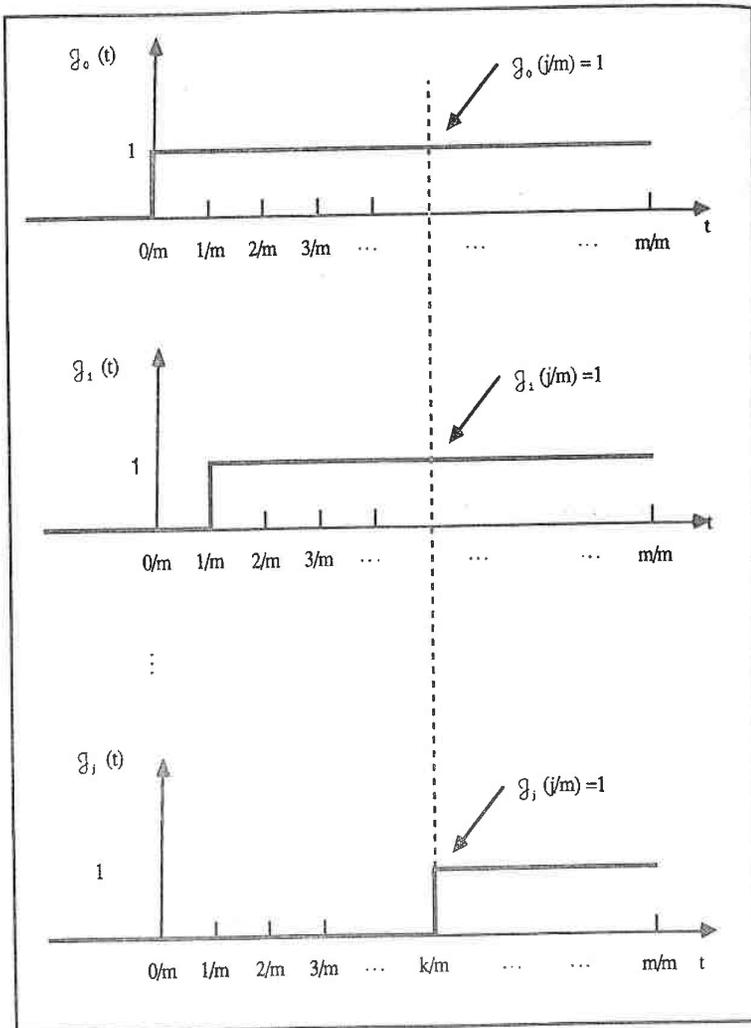


Figure 4.8 : Fonction échelon-unité et ses translatées

Partant de cette interprétation de la matrice Sum, obtenir la fonction $Bé_{j,m}(t)$ se ramène au calcul de $\mathfrak{B}_m(\mathcal{G}_j, t)$. Plus formellement on a le théorème suivant dont la démonstration découle du développement présenté ci-dessus :

Théorème 4.5

Soit $\mathcal{G}_j(t)$ la fonction définie par l'équation 4.44. On a alors : $Bé_{j,m}(t) = \mathfrak{B}_m(\mathcal{G}_j, t)$.

Démonstration 4.5

D'après l'équation 4.1 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_m(\mathcal{G}_j, t) &= \sum_{i=0}^m \mathcal{G}_j(i/m) \cdot \mathbb{B}_{i,m}(t) \\ &= \sum_{i=j}^m 1 \cdot \mathbb{B}_{i,m}(t) && \text{[d'après 4.44]} \\ &= Bé_{j,m}(t) && \text{[d'après 4.34 et 4.37] CQFD.} \end{aligned}$$

Comme le schématise la figure 4.9, lorsque l'on présente à l'entrée de l'opérateur de Bernstein \mathfrak{B}_m la translatée $\mathcal{G}_j(t)$ de la fonction échelon-unité, on obtient en sortie la fonction de Bézier $Bé_{j,m}(t)$.

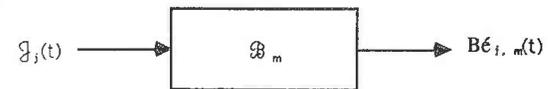


Figure 4.9 : Génération des fonctions de Bézier par l'opérateur de Bernstein appliqué aux translatées $\mathcal{G}_j(t)$ de la fonction échelon-unité.

2.3.1. Relation entre procédés de Bernstein et de Bézier

L'équation 4.38, à savoir :

$$\text{Bézier}(t) = \text{Sum} * \text{Bernstein}(t)$$

renferme les liens fondamentaux entre le procédé de Bézier au sens étymologique et celui de Bernstein. En premier lieu, elle montre qu'à chacune des décompositions canoniques de la matrice de Bernstein correspond une décomposition homologue de la matrice de Bézier : la décomposition homologue s'obtient en prémultipliant la décomposition de Bernstein(t) par Sum. Plus encore, tout théorème vérifié par la matrice de Bernstein trouve un ré pondant pour la matrice de Bézier par le biais de ce dernier procédé.

En deuxième lieu, pour un degré donné, elle formalise le passage entre les fonctions de lissage de l'un à l'autre :

$$\begin{aligned} M_{B\acute{e} \rightarrow B} &= \text{Sum} \quad \text{est la matrice de passage de B\acute{e}zier vers Bernstein,} \\ M_{B \rightarrow B\acute{e}} &= \text{Sum}^{-1} \quad \text{est la matrice de passage de Bernstein vers B\acute{e}zier.} \end{aligned}$$

En troisième lieu, elle permet d'\u00e9tablir la relation explicite entre les deux repr\u00e9sentations \u00e9quivalentes du polygone caract\u00e9ristique (cf. fig. 4.7). En effet, en \u00e9crivant l'expression 4.15 sous forme d'un produit scalaire, on obtient :

$$C(t) = (\vec{\alpha}_0 \vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_m) \cdot B_{*,m}(t)$$

Gr\u00e2ce \u00e0 la matrice de passage Sum, C(t) peut s'\u00e9crire \u00e9galement comme :

$$C(t) = (\vec{\alpha}_0 \vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_m) \cdot \text{Sum} * B_{*,m}(t) \quad (4.45)$$

Un calcul direct montre que :

$$(\vec{\alpha}_0 \vec{\alpha}_1 \dots \vec{\alpha}_m) \cdot \text{Sum} = (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_m) \quad (4.46)$$

c'est-\u00e0-dire :

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \vec{\alpha}_0 \\ p_1 &= \vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_1 \\ p_2 &= \vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 \\ &\dots \\ p_m &= \vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \dots + \vec{\alpha}_m \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

comme l'indique la figure 4.7 et comme \u00e9tabli par ailleurs dans [B\u00e9zier-72, p.119] [B\u00e9zier-86, p.87]. Les p_i sont les *vecteurs positions* des sommets successifs du polygone caract\u00e9ristique (cf. fig. 4.7).

Une courbe param\u00e9trique polynomiale exprim\u00e9e sous la forme :

$$C(t) = \sum_{i=0}^m p_i \cdot B_{i,m}(t) \quad (4.48)$$

est dite de **B\u00e9zier-Bernstein** [Plastock-87, p.175]. En fait, c'est cette forme qui est de plus en plus entendue lorsque l'on se r\u00e9f\u00e8re aux sch\u00e9mas de B\u00e9zier. *C'est dans ce sens que nous employons les expressions **courbe de B\u00e9zier**, **sch\u00e9ma de B\u00e9zier** ou le plus souvent, de **Bernstein-B\u00e9zier**.*

En guise de synth\u00e8se et en tenant compte des formes *transpos\u00e9es \u00e9quivalentes*, la dualit\u00e9 entre les deux proc\u00e9d\u00e9s peut \u00eatre r\u00e9sum\u00e9e de la mani\u00e8re suivante :

$$\begin{aligned} \text{Sum} * \text{Bernstein}(t) &= \text{B\u00e9zier}(t) && \Leftrightarrow \quad {}^t\text{Bernstein}(t) * {}^t\text{Sum} &= {}^t\text{B\u00e9zier}(t) \\ \text{Sum}^{-1} * \text{B\u00e9zier}(t) &= \text{Bernstein}(t) && \Leftrightarrow \quad {}^t\text{B\u00e9zier}(t) * {}^t\text{Sum}^{-1} &= {}^t\text{Bernstein}(t) \\ (\vec{\alpha}_i)_{i=0, \dots, m} \cdot \text{Sum} &= (p_i)_{i=0, \dots, m} && \Leftrightarrow \quad {}^t\text{Sum} \cdot {}^t(\vec{\alpha}_i)_{i=0, \dots, m} &= {}^t(p_i)_{i=0, \dots, m} \\ (p_i)_{i=0, \dots, m} \cdot \text{Sum}^{-1} &= (\vec{\alpha}_i)_{i=0, \dots, m} && \Leftrightarrow \quad {}^t\text{Sum}^{-1} \cdot {}^t(p_i)_{i=0, \dots, m} &= {}^t(\vec{\alpha}_i)_{i=0, \dots, m} \end{aligned}$$

2.4. Famille de courbes de B\u00e9zier

Consid\u00e9rons $m+1$ vecteurs positions $(p_i)_{i=0, \dots, m}$ avec $p_i \in \mathcal{E}$. Soient $t \in [0, 1]$ et le vecteur $\mathcal{F}\text{B\u00e9zier}(t)$ d\u00e9fini par :

$$\mathcal{F}\text{B\u00e9zier}(t) = (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_m) * \text{Bernstein}(t) \quad (4.49)$$

De toute \u00e9vidence, lorsque t parcourt l'intervalle $[0, 1]$, les composantes du vecteur $\mathcal{F}\text{B\u00e9zier}(t)$ engendrent une famille de courbes de B\u00e9zier d'ordre $0, 1, \dots, m$. La composante $[\mathcal{F}\text{B\u00e9zier}(t)]_j$ repr\u00e9sente la courbe B\u00e9zier de degr\u00e9 j engendr\u00e9e par le polygone caract\u00e9ristique $(p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j)$. D'une fa\u00e7on explicite, on a :

$$[\mathcal{F}\text{B\u00e9zier}(t)]_j = (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \cdot B_{*,j}(t) \quad (4.50)$$

Compte tenu du d\u00e9veloppement de la section 1.2, on peut d'embl\u00e9e proposer les trois

modèles suivants pour une génération récurrente d'une courbe de Bézier d'un degré donné :

A. Premier modèle

Il résulte de l'équation 4.6 que :

$$\begin{aligned} (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \cdot \mathbb{B}_{*,j} &= (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{*,j-1} \\ 0 \end{bmatrix} (1-t) + (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B}_{*,j-1} \end{bmatrix} t \\ &= (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_{j-1}) \cdot [\mathbb{B}_{*,j-1}] (1-t) + (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_j) [\mathbb{B}_{*,j-1}] t \end{aligned} \quad (4.51)$$

Adoptons la notation suivante en prenant $k \in \{0,1\}$:

$$\text{Bé}(p_k \ p_{k+1} \ \dots \ p_{k+j-1}, t) = (p_k \ p_{k+1} \ \dots \ p_{k+j-1}) \cdot [\mathbb{B}_{*,j-1}] \quad (4.52)$$

La relation (4.51) pourra s'écrire alors comme suit :

$$\text{Bé}(p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j, t) = [\text{Bé}(p_0 \ p_1 \ \dots \ p_{j-1}, t)] (1-t) + [\text{Bé}(p_1 \ p_2 \ \dots \ p_j, t)] t \quad (4.53)$$

B. Deuxième modèle :

L'équation 4.8 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \cdot \mathbb{B}_{*,j} &= (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \cdot \left\{ \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{j-1} \\ [0]_{j-1} \end{bmatrix} \cdot (1-t) + \begin{bmatrix} [0]_{j-1} \\ \mathbb{I}_{j-1} \end{bmatrix} \cdot t \right\} \mathbb{B}_{*,j-1} \\ & \quad (4.54) \end{aligned}$$

$$= (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_{j-1}) \cdot [\mathbb{I}_{j-1}] [\mathbb{B}_{*,j-1}] \cdot (1-t) + (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_j) \cdot [0]_{j-1} [\mathbb{B}_{*,j-1}] \cdot t$$

$$= (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_{j-1}) \cdot [\mathbb{B}_{*,j-1}] \cdot (1-t) + (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_j) \cdot [\mathbb{B}_{*,j-1}] \cdot t$$

Compte tenu de (4.52), ceci revient à (4.53).

C. Troisième modèle :

L'équation 4.9 permet d'écrire :

$$(p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \cdot \mathbb{B}_{*,j} = (p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \cdot T_j \mathbb{B}_{*,j-1} \quad (4.55)$$

où T_j définie par l'équation 4.10. La possibilité d'éclater la matrice T_j en sommes de matrices permet d'envisager la construction récurrente d'une courbe de degré j de différentes manières. Une méthode simple d'éclater T_j consiste à la considérer comme la somme de j matrices, de même dimension, construites à partir de T_j en conservant la première colonne et en annulant toutes les autres, puis la deuxième colonne et en annulant toutes les autres, et ainsi de suite jusqu'à la dernière colonne (cf. fig. 4.10).

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Figure 4.10 Eclatement de T_j en somme de trois matrices ; chaque matrice terme a une seule colonne non nulle : celle qui correspond à son rang

On remarquera la présence du sous-vecteur T_1 dans chaque colonne non nulle de l'éclatement proposé :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

décalé d'une ligne vers le bas par rapport à sa position dans la colonne précédente. Dans la première colonne, T_1 occupe les deux premières lignes. Un tel éclatement de T_1 conduit à l'expression équivalente suivante de (4.55) :

$$(p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \cdot \mathbb{B}_{*,j} = ((p_0 \ p_1) \cdot T_1 \ (p_1 \ p_2) \cdot T_1 \ \dots \ (p_{j-1} \ p_j) \cdot T_1) \mathbb{B}_{*,j-1} \quad (4.57)$$

On peut écrire cette équation d'une façon plus condensée comme suit :

$$(p_0 \ p_1 \ \dots \ p_j) \cdot \mathbb{B}_{*,j} = ((p_i \ p_{i+1}) \cdot T_1) \mathbb{B}_{*,j-1} \quad (4.58)$$

$i=0, \dots, j-1$

Il reste à démontrer que, pour $i = 0, 1, \dots, j$, le membre de droite de (4.58) (de même pour 4.57) associe le facteur $\mathbb{B}_{i,j}$ à p_i , comme le fait le membre de gauche. Pour ce faire, les trois cas suivants doivent être considérés :

1. $i = 1$ pour le calcul de la fonction associée à p_0 ,
2. $i = j - 1$ pour le calcul de la fonction associée à p_j ,
3. $1 \leq i \leq j - 2$ pour le calcul de la fonction associée dans les autres cas.

Cas 1 : la fonction associée à p_0 .

En remontant à (4.57) qui donne la forme explicite de (4.58), on voit bien que le terme en p_0 provient uniquement du produit suivant :

$$\begin{aligned} [(p_0 \ p_1) \cdot T_1] \cdot \mathbb{B}_{0,j-1}(t) &= [p_0(1-t) + p_1 t] \cdot \mathbb{B}_{0,j-1}(t) && \text{[d'après (4.56)]} \\ &= [p_0(1-t) + p_1 t] \cdot (1-t)^{j-1} && \text{[d'après (4.2)]} \\ &= p_0(1-t)^j + p_1 t(1-t)^{j-1} \\ &= p_0 \mathbb{B}_{0,j}(t) + p_1 t(1-t)^{j-1} && \text{[d'après (4.2)]} \end{aligned}$$

Ainsi les deux membres de (4.57) (et de 4.58) associent à p_0 la fonction $\mathbb{B}_{0,j}(t)$.

Cas 2 : la fonction associée à p_j .

Le vecteur position p_j figure seulement dans l'expression :

$$\begin{aligned} [(p_{j-1} \ p_j) \cdot T_1] \cdot \mathbb{B}_{j-1,j-1}(t) &= [(1-t)p_{j-1} + t p_j] \cdot \mathbb{B}_{j-1,j-1}(t) && \text{[d'après (4.56)]} \\ &= [(1-t)p_{j-1} + t p_j] \cdot t^{j-1} && \text{[d'après (4.2)]} \\ &= [(1-t) t^{j-1} p_{j-1} + t^j p_j] \\ &= (1-t) t^{j-1} p_{j-1} + p_j \mathbb{B}_{j,j}(t) && \text{[d'après (4.2)]} \end{aligned}$$

Les deux membres de (4.57) (et de 4.58) associent bien à p_j la fonction $\mathbb{B}_{j,j}(t)$.

Cas 3 : la fonction associée à p_i , pour $1 \leq i \leq j - 2$.

Dans le membre de droite de (4.57), le vecteur position p_i figure dans les deux termes consécutifs suivants :

$$[(p_{i-1} \ p_i) \cdot T_1] \cdot \mathbb{B}_{i-1,j-1}(t) \quad \text{et} \quad [(p_i \ p_{i+1}) \cdot T_1] \cdot \mathbb{B}_{i,j-1}(t)$$

dont les coefficients respectifs sont :

$$t \cdot \mathbb{B}_{i-1,j-1}(t) \quad \text{et} \quad (1-t) \cdot \mathbb{B}_{i,j-1}(t)$$

La fonction associée par le deuxième membre de (4.57) à p_i est évidemment la somme de ces deux expressions, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} t \cdot \mathbb{B}_{i-1,j-1}(t) + (1-t) \cdot \mathbb{B}_{i,j-1}(t) &= t [C_{j-1}^{i-1} t^{j-1} (1-t)^{i-1}] + (1-t) \cdot \mathbb{B}_{i,j-1}(t) \\ &= t [C_{j-1}^{i-1} t^{j-1} (1-t)^{i-1}] + (1-t) [C_{j-1}^i t^i (1-t)^{j-i-1}] \\ &= t^i (1-t)^{j-i} [C_{j-1}^{i-1} + C_{j-1}^i] \\ &= t^i (1-t)^{j-i} C_j^i && \text{[d'après (3.10)]} \\ &= \mathbb{B}_{i,j}(t) && \text{[d'après (4.2)]} \end{aligned}$$

Ainsi dans ce cas aussi, le membre de droite de (4.57) associe le même coefficient à p_i . On vient donc de démontrer formellement que les deux membres de (4.57) reproduisent bien la même courbe.

On remarquera qu'après chaque itération du membre de droite de (4.55), le polygone

caractéristique a un côté de moins. Par conséquent, le procédé détermine un point de la courbe après la $j^{\text{ème}}$ itération. Cette construction est au fond une autre formalisation de la méthode dite "de Vernet" [Bézier-86, pp.77-78].

Ces modèles de génération récurrente des courbes de Bernstein-Bézier soulignent une fois de plus le lien étroit qui existe entre les manipulations algébriques de la matrice binomiale à puissance banalisée et les manipulations géométriques de schémas de Bézier.

Pour terminer ce chapitre démontrons un dernier résultat :

Théorème 4.6

Pour tout $\rho_k \in \mathcal{E}$ et pour tout $t \in [0, 1]$

$$(\rho_k \ \rho_k \ \dots \ \rho_k) \text{Bernstein}(t) = (\rho_k \ \rho_k \ \dots \ \rho_k) \quad (4.59)$$

Démonstration 4.6

De toute évidence :

$$\begin{aligned} (\rho_k \ \rho_k \ \dots \ \rho_k) \text{Bernstein}(t) &= \rho_k \cdot (1 \ 1 \ \dots \ 1) \text{Bernstein}(t) \\ &= \rho_k \cdot v_1 \text{Bernstein}(t) \end{aligned}$$

En remplaçant $\text{Bernstein}(t)$ par la décomposition canonique $D(t) * G^{1-t}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_k \cdot v_1 \text{Bernstein}(t) &= \rho_k \cdot v_1 D(t) * G^{1-t} \\ &= \rho_k \cdot v_{1-t+t} \quad [d'après (3.33)] \\ &= \rho_k \cdot v_1 \\ &= (\rho_k \ \rho_k \ \dots \ \rho_k) \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

En clair donc, tout schéma de Bézier-Bernstein reproduit le point quel que soit le degré.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que la solution au problème général de la transformation linéaire de paramètre qui s'appuie sur des généralisations progressives de la récurrence binomiale conduit au procédé classique de Bernstein et, de là, au procédé de Bézier. Cette approche a favorisé la dérivation des nouvelles relations pour la matrice de Bernstein avec la proposition de huit décompositions canoniques qui formalisent des

interprétations géométriques standard que l'on peut attribuer à ce procédé. Elles expliquent aussi la grande souplesse de l'approximation de Bernstein.

Nous avons établi, par le biais de la matrice de passage Sum, le lien étroit entre le procédé classique de Bézier et l'approximation de Bernstein et proposé une interprétation nouvelle sur la génération des fonctions de Bézier à partir des fonctions de Bernstein. Cette interprétation conçoit les fonctions de Bézier classiques comme des réponses du procédé de Bernstein aux sollicitations de la fonction échelon-unité et ses translatées. La matrice Bernstein fournit également la possibilité de manier toute une famille de schémas de Bézier et permet d'établir des résultats vérifiés par l'ensemble de ces schémas.

Ce chapitre a également soulevé plusieurs problèmes qui méritent d'être approfondis. Parmi ceux-ci, il y a la nécessité d'étudier les décompositions canoniques sur le plan algorithmique et d'approfondir l'étude de la matrice rationnelle généralisée de Bernstein pour en tirer des enseignements utiles et pratiques pour le procédé de Bernstein-Bézier.

+ + + +

CHAPITRE 5

+ + + +

Modèle de dérivation polynomial

Indicateurs de géométrie

CHAPITRE 5

Modèle de dérivation polynomiale

Indicateurs de géométrie

Introduction

L'expression du théorème binomial sous formes matricielles (cf. chap. 3) permet une approche homogène et méthodique de la dérivation des courbes paramétriques polynomiales, quel que soit le schéma considéré. Elle conduit notamment à l'opérateur matriciel noté K qui transforme la dérivation en un simple problème d'indexage des lignes des matrices de lissage associées aux schémas. L'étude des propriétés de K fera l'objet de la section 1 de ce chapitre.

Lorsque l'on associe les propriétés de l'opérateur K à l'interprétation géométrique des puissances banalisées de la matrice binomiale, on aboutit à une puissante généralisation du concept d'indicateur de géométrie amorcé au chapitre 2. Cela conduit en effet au deuxième opérateur noté IG^a dont les lignes fournissent les données indispensables pour l'analyse géométrique complète d'une courbe à chacun de ses points. La section 2 sera consacrée principalement à l'étude de cet opérateur fondamental.

Le modèle de dérivation que préconise l'opérateur K écarte l'intervention active de l'utilisateur. Pour palier à cela, nous proposerons dans la section 3 un modèle équivalent qui pourra lui restituer un rôle plus actif.

1. Polynôme dérivé

On peut définir la dérivée d'un polynôme f (cf. l'équation 3.1 du chap. 3) comme étant le polynôme f' tel que [Faure-64, p.192] :

$$f(t+h) - f(t) \equiv hf'(t) \pmod{h^2} \quad (5.1)$$

Grâce à l'équation (3.21) de la §2.3.1, chapitre 3, le premier membre de l'équation (5.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$f(t+h) - f(t) \equiv v_t G^h a - v_t I a \equiv v_t [G^h - I] a \quad (5.2)$$

avec :

$$G^h = \begin{bmatrix} 1 & h C_1^0 & \dots & h^n C_n^0 \\ & 1 & h C_2^1 & \dots & h^{n-1} C_n^1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & h C_n^{n-1} \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

On voit bien que :

$$G^h - I = \begin{bmatrix} 0 & h C_1^0 & \dots & h^n C_n^0 \\ & 0 & h C_2^1 & \dots & h^{n-1} C_n^1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & h C_n^{n-1} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$[G^h - I] \text{ mod } (h^2) = \begin{bmatrix} 0 & h C_1^0 & & & 0 \\ & 0 & h C_2^1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & h C_n^{n-1} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} = h K$$

où la matrice K est définie par :

$$K_{i,j} = C_j^i \delta_i^{j-1} \quad \text{pour } i, j = 0, 1, \dots, n \quad (5.3)$$

Plus explicitement encore :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & n \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, en tenant compte de (5.2), on obtient :

$$[f(t+h) - f(t)] \text{ mod } (h^2) \equiv h [v_t K] a \quad (5.4)$$

Grâce aux relations (5.1) et (5.4), on aboutit au théorème suivant :

Théorème 5.1

Soit la fonction polynôme f de degré n définie par :

$$f(t) = v_t a$$

avec $v_t = (t^i)_{i=0, \dots, n}$ et a le vecteur coefficient. La fonction polynôme dérivée f' est alors donnée par :

$$f'(t) = [v_t a]' = v_t K a \quad (5.5)$$

Il existe une deuxième méthode pour démontrer le théorème 5.1. Pour ce faire, on pose $v_t = (1, t, \dots, t^n)$. Par la définition formelle du polynôme dérivé on a :

$$[v_t]' = (0, 1, 2t, 3t^2, \dots, nt^{n-1}) = (0, 1, t, \dots, t^{n-1}) B \quad (5.6)$$

où la matrice B est donnée par :

$$B = \begin{bmatrix} c & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & n \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

La composante c est une constante arbitraire. Soit la matrice carrée E définie comme suit :

$$E_{i,j} = \delta_1^{j-i} \quad \text{pour } i \text{ et } j = 0, 1, \dots, n \quad (5.8)$$

qui se met sous la forme matricielle explicite suivante :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Nous allons montrer dans la suite que :

$$[v_t]' = v_t E * B \quad (5.10)$$

Compte tenu de (5.6) il suffit de démontrer que :

$$(0 \ 1 \ t, \dots, t^{n-1}) = v_t E \quad (5.11)$$

Posons $b = v_t E$ et désignons par $E_{*,j}$ le vecteur formé par la $j^{\text{ième}}$ colonne de E . Deux cas se présentent : $j = 0$ et $1 \leq j \leq n$.

Pour $j = 0$, puisque $E_{*,0} = 0$, il s'ensuit que $v_t \cdot E_{*,0} = 0 = b_0$.

Pour $1 \leq j \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} b_j &= v_t \cdot E_{*,j} \\ &= 1 \cdot E_{0,j} + t \cdot E_{1,j} + t^2 \cdot E_{2,j} + \dots + t^{j-1} \cdot E_{j-1,j} + \dots + t^n \cdot E_{n,j} \\ &= t^{j-1} \quad \text{[à partir de (5.8)]} \end{aligned}$$

Les deux cas réunis, on obtient $b = (0, 1, t, \dots, t^{n-1}) = v_t E$. En vertu de ce résultat et de (5.6), on a :

$$[v_t]' = v_t E * B$$

Par conséquent :

$$[v_t a]' = v_t E * B a \quad (5.12)$$

On vérifie aisément que :

$$E * B = K \quad (5.13)$$

Discussion

La matrice K est ainsi un opérateur qui permet d'obtenir la dérivée d'un polynôme. Dans l'équation (5.5), K peut aussi bien être associée à gauche avec v_t qu'à droite avec le vecteur coefficient a . La dérivation peut donc être conçue de deux manières équivalentes : soit comme une transformation du vecteur v_t en $v_t K$, soit comme une transformation du vecteur coefficient a en $K a$.

1.1. Propriétés de K

Les deux interprétations du procédé de dérivation soulignées ci-dessus nous conduisent à étudier les propriétés multiplicatives de la matrice K . A ce titre, nous examinerons l'effet de K sur les composantes des vecteurs ligne (**multiplication à droite par K**) et sur celles des vecteurs colonne (**multiplication à gauche par K**). Ces résultats seront ensuite généralisés à la multiplication d'une matrice par K .

$$\begin{array}{c}
 (c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_n) \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 0 & 1 & & 0 \\
 & & 2 & \\
 & & & \dots \\
 & & & n \\
 0 & & & 0
 \end{array} \right] \\
 \mathbf{K}
 \end{array}
 = (0 \quad c_0 \quad 2c_1 \quad \dots \quad nc_{n-1})$$

Figure 5.1 : Multiplication d'un vecteur à droite par \mathbf{K} .

Propriété K1 : Multiplication à droite par \mathbf{K} :

D'une manière générale, multiplier un vecteur ligne par \mathbf{K} revient à un décalage de chaque composante d'une colonne vers la droite suivie d'une multiplication par son nouvel indice de colonne (voir fig. 5.1). Plus formellement, on a le théorème suivant :

Théorème 5.2.

Pour tout vecteur ligne $l = (c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$l \mathbf{K} = (0 \quad c_0 \quad 2c_1 \quad \dots \quad nc_{n-1})$$

Démonstration 5.2

Par définition :

$$(c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n) \mathbf{K} = \left(\sum_{i=0}^n c_i \cdot \mathbf{K}_{i,j} \right)_{j=0, \dots, n}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n c_i \cdot \mathbf{K}_{i,j} &= c_0 \mathbf{K}_{0,j} + c_1 \mathbf{K}_{1,j} + \dots + c_{j-1} \mathbf{K}_{j-1,j} + c_j \mathbf{K}_{j,j} + \dots + c_n \mathbf{K}_{n,j} \\
 &= c_{j-1} C_j^{j-1} && \text{[en vertu de (5.3)]} \\
 &= j \cdot c_{j-1} && \text{[car } C_j^{j-1} = j]
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n) \mathbf{K} = (j \cdot c_{j-1})_{j=0, \dots, n}$$

c'est-à-dire : $l \mathbf{K} = (0 \quad c_0 \quad 2c_1 \quad \dots \quad nc_{n-1})$

CQFD.

Tableau 5.1 Un vecteur multiplié à droite par \mathbf{K}

Algorithme 5.1 (Déca-mul)

Données :

- n entier positif ;
- in vecteur de n + 1 composantes ;

Résultat :

- out vecteur de n + 1 composantes.

Début

1. Entrer in ;
2. out(0) := 0 ;
3. Pour j := 1 à n faire

$$\text{out}(j) := j * \text{in}(j - 1) ;$$

Fin

Le tableau 5.1 propose une traduction algorithmique du théorème 5.2. On vérifie aisément que cela entraîne n multiplications et autant de soustractions (les soustractions proviennent du calcul des indices des composantes).

Propriété K2 : Multiplication d'un vecteur à gauche par K :

Chaque composante du vecteur est d'abord multipliée par son indice (de ligne) ; chaque composante est ensuite décalée d'une ligne vers le haut ; pour terminer, on remet à zéro la dernière composante. Cela donne plus explicitement (cf. fig. 5.2) :

Théorème 5.3

Pour tout vecteur colonne $c = {}^t(l_0 \ l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$Kc = {}^t(l_1 \ 2l_2 \ \dots \ nl_n \ 0).$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 2l_2 \\ \vdots \\ nl_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figure 5.2 : Multiplication d'un vecteur à gauche par K .

Démonstration 5.3

Par définition :

$$Kc = \left(\sum_{j=0}^n l_j \cdot K_{i,j} \right)_{i=0, \dots, n}$$

Une simplification du membre de droite s'obtient en le décomposant en deux cas : $i = n$ et $0 \leq i < n$.

Pour $i = n$:

Puisqu' en vertu de (5.3), $K_{n,j} = 0$ pour $0 \leq j < n$

$$\sum_{j=0}^n l_j \cdot K_{n,j} = 0.$$

Pour $0 \leq i < n$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n l_j \cdot K_{i,j} &= l_0 \cdot K_{i,0} + l_1 \cdot K_{i,1} + \dots + l_{i+1} \cdot K_{i,i+1} + \dots + l_n \cdot K_{i,n} \\ &= l_{i+1} \cdot C_{i+1}^i && \text{[en vertu de (5.3)]} \\ &= (i+1) \cdot l_{i+1} \end{aligned}$$

La synthèse des deux cas donne donc :

$$\sum_{j=0}^n l_j \cdot K_{i,j} = \begin{cases} (i+1) \cdot l_{i+1} & \text{pour } 0 \leq i < n \\ 0 & \text{pour } i = n \end{cases}$$

Par conséquent :

$$Kc = \left(\sum_{j=0}^n l_j \cdot K_{i,j} \right)_{i=0, \dots, n} = {}^t(l_1 \ 2l_2 \ \dots \ nl_n \ 0) \quad \text{CQFD.}$$

Le tableau 5.2 propose une traduction algorithmique du théorème 5.3. Cet algorithme est de même complexité que le précédent : n multiplications et n soustractions.

Propriété K3 : Multiplication d'une matrice à droite par K :

Soit M une matrice dont les vecteurs lignes appartiennent à \mathbb{R}^{n+1} . Lorsque l'on multiplie M à droite par K , chaque vecteur ligne de M est transformé suivant la propriété K1 et on obtient une matrice transformée M' selon le procédé suivant :

1. décaler chaque colonne de M d'une colonne vers la droite (la dernière colonne disparaît),

2. mettre la première colonne à zéro,
3. multiplier chaque colonne par son indice.

Tableau 5.2 Prémultiplication d'un vecteur par K

Algorithme 5.2 (Mul-déca)

Données :

n entier positif ;
 in vecteur de $n + 1$ composantes :

Résultat :

out vecteur de $n + 1$ composantes.

Début

1. Entrer in ;
2. $\text{out}(n) := 0$;
3. Pour $i := 1$ à n faire
 $\text{out}(i - 1) := i \cdot \text{in}(i)$;

Fin

Pour fixer les idées, supposons que M soit une matrice carrée d'ordre $n + 1$. Sous cette condition, on obtient le théorème suivant :

Théorème 5.4

Soit $M' = M * K$. Pour $i = 0, 1, \dots, n$

$$M'_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } j = 0 \\ j \cdot M_{i,j-1} & \text{pour } j \neq 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Démonstration 5.4

Désignons par $M_{i,*}$ et par $M'_{i,*}$ les vecteurs formés par les i ^{ième} lignes respectives de M et de M' . Par définition, on a $M' = (M_{i,*} K)_{i=0,1,\dots,n}$, c'est-à-dire :

$$M'_{i,*} = M_{i,*} K \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

En vertu de K1 (cf. théorème 5.2), on obtient, pour $i = 0, 1, \dots, n$:

$$M'_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } j = 0 \\ j \cdot M_{i,j-1} & \text{pour } j \neq 0 \end{cases} \quad \text{CQFD.}$$

Le tableau 5.3 donne une traduction algorithmique du théorème 5.4. Tout compte fait, l'algorithme 5.3 entraîne $n^2 - 1$ multiplications et autant de soustractions.

Algorithme 5.3

Données :

n entier positif ;
 M matrice carrée d'ordre $n + 1$;

Résultat :

M' matrice carrée d'ordre $n + 1$;

Début

1. Entrer M
2. Pour $i := 0$ à n faire
 Début
 2.1. $M'(i, 0) := 0$; $M'(i, 1) := M(i, 0)$;
 2.2. Pour $j := 2$ à n faire
 2.2.1. $M'(i, j) := j \cdot M(i, j - 1)$

Fin

Fin

Tableau 5.3 : Algorithme de multiplication d'une matrice à droite par K

Propriété K4 : Multiplication à gauche par K :

Soit $M' = K * M$. Multiplier M à gauche par K revient à appliquer K2 à chacune des colonnes de M. Le procédé sous-jacent se résume donc comme suit :

1. multiplier chaque ligne de M par son indice de ligne,
2. décaler chaque ligne d'un cran vers le haut (le premier vecteur ligne de M disparaît),
3. mettre à zéro la dernière ligne de M.

Pour fixer les idées, nous supposons que M (et par conséquent M' aussi) soit une matrice carrée d'ordre $n + 1$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 5.5

Soit $M' = K * M$. Alors pour $j = 0, 1, \dots, n$

$$M'_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i = n \\ (i+1) \cdot M_{i+1,j} & \text{pour } i \neq n \end{cases} \quad (5.15)$$

Démonstration 5.5

Désignons par $M_{*,j}$ et par $M'_{*,j}$ les vecteurs respectifs formés par la $j^{\text{ième}}$ colonne de chacune des matrices correspondantes. Le produit $K * M$ peut s'écrire alors comme :

$$M' = (K M_{*,j})_{j=0, \dots, n}$$

c'est-à-dire :

$$M'_{*,j} = K M_{*,j} \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n$$

En vertu de K2 (cf. le théorème 5.3), on obtient, pour $j = 0, 1, \dots, n$:

$$M'_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i = n \\ (i+1) \cdot M_{i+1,j} & \text{pour } i \neq n \end{cases} \quad \text{CQFD.}$$

Le tableau 5.4 donne une traduction algorithmique de ce théorème. Cette traduction comprend : $n^2 - 1$ multiplications ; n^2 additions (on assimile addition et soustraction dans ce cas).

Algorithme 5.4

Données :

n entier positif ;
M matrice carrée d'ordre $n + 1$;

Résultat :

M' matrice carrée d'ordre $n + 1$;

Début

1. Entrer M;
2. Pour j := 0 à n faire

Début

- 2.1. $M'(n, j) := 0$; $M'(i, 0) := M(1, j)$; $m := n - 1$;
- 2.2. Pour i := 1 à m faire

Début

- 2.2.1. $k := i + 1$;
- 2.2.2. $M'(i, j) := k \cdot M(k, j)$

Fin

Fin

Fin

Tableau 5.4 : Algorithme de multiplication à gauche par K

Remarque :

Il convient de noter que la matrice K ne figure de façon explicite dans aucun des quatre algorithmes 5.1, ..., 5.4. Son utilité réside plutôt dans la formulation de la dérivation qu'elle facilite.

Propriété K5 : Itération de la matrice K :

K5.1 : Faisons la convention $K^0 = I$ et remplaçons la matrice M du

théorème 5.4 ou du théorème 5.5 par K^0 : nous retrouvons la matrice K.

K5.2 : Remplaçons M ensuite par K : nous obtenons K^2 . En procédant par récurrence, nous parvenons à calculer les puissances successives de K .
D'une manière générale, on a le théorème suivant pour le calcul de K^k pour tout $k \in \mathbb{N}$:

Théorème 5.6 (K-itéré)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(K^k)_{i,j} = \left[\prod_{l=j-k+1}^j 1 \right] \delta_k^{j-i} \quad \text{pour } i \text{ et } j = 0, \dots, n$$

avec la convention que $\prod_{l=a}^j l = 1$ pour $a > j$.

Démonstration 5.6

Nous procédons par récurrence.

Base de la récurrence : Par convention, $K^0 = I$. Le théorème est donc vérifié pour $k = 0$.

De plus, pour $k = 1$, et pour tout i et $j = 0, \dots, n$, on a :

$$\left[\prod_{l=j}^j 1 \right] \delta_1^{j-i} = j \delta_1^{j-i} = K_{i,j}$$

La propriété est donc vérifiée aussi pour $k = 1$.

Hypothèse de récurrence :

$$(K^{k-1})_{i,j} = \left[\prod_{l=j-k+2}^j 1 \right] \delta_{k-1}^{j-i}$$

Calculons $(K^k)_{i,j}$:

$(K^k)_{i,j}$ étant le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de K par la $j^{\text{ème}}$ colonne de K^{k-1} , on a :

$$(K^k)_{i,j} = \sum_{q=0}^n K_{i,q} \cdot K_{q,j}^{k-1} = \sum_{q=0}^n K_{i,q} \left[\prod_{l=j-k+2}^j 1 \right] \delta_{k-1}^{j-q} \quad \text{(Hypothèse de récurrence)}$$

$$= \sum_{q=0}^n q \delta_1^{q-i} \left[\prod_{l=j-k+2}^j 1 \right] \delta_{k-1}^{j-q} \quad \text{(Base de récurrence)}$$

$$= \left[\prod_{l=j-k+2}^j 1 \right] \sum_{q=0}^n q \delta_1^{q-i} \delta_{k-1}^{j-q}$$

$$= \left[\prod_{l=j-k+2}^j 1 \right] \sum_{q=0}^n q \delta_{i+1}^q \delta_{j-k+1}^q \quad \text{(puisque } \delta_x^{a-b} = \delta_{x+b}^a)$$

$$= \left[\prod_{l=j-k+2}^j 1 \right] (j-k+1) \delta_{i+1}^{j-k+1} \delta_{j-k+1}^{j-k+1}$$

$$= \left[\prod_{l=j-k+2}^j 1 \right] (j-k+1) \delta_{i+1}^{j-k+1}$$

$$= \left[\prod_{l=j-k+1}^j 1 \right] \delta_{i+1}^{j-k+1} = \left[\prod_{l=j-k+1}^j 1 \right] \delta_i^{j-k}$$

$$= \left[\prod_{i=j-k+1}^j 1 \right] \delta_k^{j-i}$$

CQFD.

On a en particulier le corollaire suivant :

Corollaire 5.1

Pour tout $k \leq n$ $(K^k)_{o,j} = (k!) \cdot \delta_k^j = (j!) \cdot \delta_k^j$ (5.17)

En effet, $i = 0 \Leftrightarrow j - i = j \Leftrightarrow \delta_k^{j-i} = \delta_k^j$. Puisque $\delta_k^j = 1 \Leftrightarrow k = j$, pour $i = 0$, le produit (5.16) est différent de zéro si et seulement si $k = j$. Dans ces conditions, le produit peut s'écrire comme suit :

$$(K^k)_{o,j} = \left(\prod_{i=1}^j 1 \right) \cdot \delta_k^j = (k!) \cdot \delta_k^j = (j!) \cdot \delta_k^j$$

K5.3 : K est nilpotente. La figure 5.4 suggère que les composantes non nulles de K^k se trouvent toutes sur la sur-diagonale de rang k . K étant une matrice carrée d'ordre $n + 1$, on a le théorème suivant :

Théorème 5.7

Pour tout $k > n$, on a : $K^k = 0$.

Démonstration 5.7

Il suffit de démontrer que le terme général $(K^k)_{i,j}$ est nul pour tout i et $j = 0, 1, \dots, n$ lorsque $k > n$.

En effet :

$$0 \leq i \leq n \text{ et } 0 \leq j \leq n \Rightarrow j - i \leq n < k.$$

Ainsi :

$$n < k \Rightarrow j - i < k \quad \text{pour tout } i \text{ et } j = 0, 1, \dots, n$$

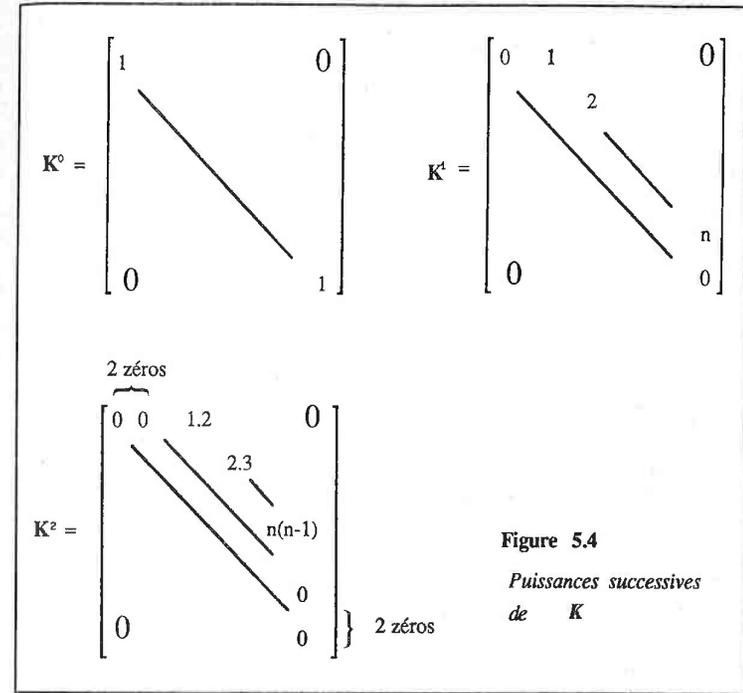


Figure 5.4
Puissances successives de K

Or :

$$j - i < k \Rightarrow \delta_k^{j-i} = 0$$

En vertu du théorème 5.6, on a, par conséquent :

$$\begin{aligned} (K^k)_{i,j} &= 0 && \text{pour tout } i \text{ et } j = 0, 1, \dots, n \\ \Leftrightarrow K^k &= 0 && \text{pour } k > n \end{aligned} \quad \text{CQFD.}$$

Propriété K6 : K et G^α commutent pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

En effet, considérons les trois fonctions suivantes :

$$f(t) = v_t \mathbf{a} \quad (5.18)$$

$$T_\alpha(t) = \alpha + t \quad (5.19)$$

$$g(t) = (f \circ T_\alpha)(t) = v_{\alpha+t} a \quad (5.20)$$

Calculons la dérivée de g en tant que fonction composée :

$$g'(t) = (f \circ T_\alpha)'(t) = f'[T_\alpha(t)] \cdot T_\alpha'(t)$$

Comme $T_\alpha'(t) = 1$ et $f'(t) = v_t K a$ en vertu de (5.5) :

$$g'(t) = f'(T_\alpha(t)) = v_{\alpha+t} K a \quad (5.21)$$

$$= v_t G^\alpha K a \quad (5.22)$$

car, en vertu de (3.22), chapitre 3, $v_{\alpha+t} = v_t G^\alpha$. Pour cette même raison, $g(t)$ peut s'écrire aussi comme suit :

$$g(t) = v_t G^\alpha a \quad (5.23)$$

Dérivons (5.23) directement par rapport à t :

$$g'(t) = v_t K G^\alpha a \quad (5.24)$$

Les équations (5.22) et (5.24) conduisent au théorème :

Théorème 5.8

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$K G^\alpha = G^\alpha K \quad (5.25)$$

Ainsi, K et G^α commutent. La chaîne de $(j+1)/2$ identités suivantes découlent directement de ce théorème :

$$G^\alpha K^j = K G^\alpha K^{j-1} = K^2 G^\alpha K^{j-2} = \dots = K^{j-1} G^\alpha K = K^{j-1} G^\alpha$$

Mettons-les sous forme plus condensée :

$$G^\alpha K^i = K^i G^\alpha K^{j-i} \quad \text{avec } i = 0, 1, \dots, j \quad (5.26)$$

A titre d'exemple, pour $j = 2$, on obtient les trois identités :

$$G^\alpha K^2 = K G^\alpha K = G^\alpha K^2 \quad (5.27)$$

Les identités de (5.26) conduisent au théorème suivant :

Théorème 5.9

Soit $f(t) = v_t a$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$f^{(j)}(\alpha) = v_\alpha K^j a = v_\alpha K^i G^\alpha K^{j-i} a \quad \text{avec } i = 0, \dots, j \quad (5.28)$$

Démonstration 5.9

Comme $f^{(j)}(\alpha) = f^{(j)}(t)|_{t=\alpha} = v_\alpha K^j a$ et comme $v_\alpha = v_\alpha G^\alpha$ d'après l'équation (3.24) du chapitre 3, on obtient :

$$f'(\alpha) = v_\alpha K^j a = v_\alpha G^\alpha K^j a \quad (5.29)$$

Lorsqu'on tient compte de (5.26), on obtient (5.28), terminant ainsi la démonstration du théorème.

En faisant $\alpha = 1$, on obtient en particulier :

$$f^{(j)}(1) = v_1 K^j a = v_1 G^\alpha K^i G^\alpha K^{j-i} a \quad \text{avec } i = 0, \dots, j \quad (5.30)$$

2. Dérivation des courbes paramétriques

Généraliser les résultats du développement précédent à la dérivation des courbes paramétriques polynomiales revient tout simplement à remplacer le vecteur coefficient a par $A P$. Le nombre de ces fonctions polynômes correspond à la dimension de l'espace objet \mathcal{E} . Ainsi, pour un segment de courbe défini sur l'intervalle normalisé par :

$$C(t) = v_t A P \quad \text{pour } t \in [0, 1] \quad (5.31)$$

on a, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$C^{(j)}(t)|_{t=\alpha} = v_\alpha K^j A P$$

Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, l'équation :

$$C^{(j)}(t) = v_t \cdot K^j * A P \quad (5.32)$$

définit la courbe dérivée d'ordre j . C'est l'hodographe d'ordre j . Compte tenu de la nilpotence de K , la courbe dérivée d'ordre j est réduite à l'origine de \mathcal{E} dès que $j > n$.

En vertu de l'équation (5.32), on peut assimiler le calcul de la dérivée d'ordre j à la transformation de la matrice de lissage A en $K^j * A$. Nous introduisons la notation et la terminologie suivante :

Définition 5.2

Soit A la matrice de lissage d'un schéma donné. On appelle matrice d'ordre j associée (par dérivation) à A , la matrice :

$$A^{(j)} = K^j * A \quad (5.33)$$

Avec la notation précédente, l'équation (5.32) peut s'écrire alors comme suit :

$$C^{(j)}(t) = v_t \cdot A^{(j)} P \quad (5.34)$$

2.1. Indicateurs de géométrie d'ordres supérieurs

En faisant $t = 0$ dans l'équation (5.34), on déduit le résultat suivant pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$C^{(j)}(0) = v_0 \cdot A^{(j)} P$$

Comme $v_0 \cdot A^{(j)} = (1, 0, \dots, 0) A^{(j)} = A^{(j)}(0, *)$, ce résultat peut s'écrire encore sous la forme suivante :

$$C^{(j)}(0) = A^{(j)}(0, *) \cdot P \quad (5.35)$$

Ainsi, partant de la première ligne de la matrice $A^{(j)}$, on obtient les vecteurs $C^{(j)}(0)$, une fois que le polygone caractéristique P est donné. Comme les $C^{(j)}(0)$ spécifient les conditions nécessaires pour raccorder un segment de courbe en son point initial à un segment qui le précède, nous dirons que $A^{(j)}(0, *)$ est un **indicateur de géométrie d'ordre j** .

Au vu de l'équation (5.35), pour calculer $C^{(j)}(0)$, il faudra tout d'abord calculer $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., $A^{(j-1)}$, $A^{(j)}$. On peut cependant faire mieux. En effet, comme le démontre le théorème suivant, le vecteur $A^{(j)}(0, *)$ est identique au vecteur $(j!)A(j, *)$:

Théorème 5.10

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} A^{(j)}(0, *) &= (j!) A(j, *) && \text{pour } 0 \leq j \leq n \\ &= (0, 0, \dots, 0) && \text{pour } j > n \end{aligned}$$

Démonstration 5.10

Le cas de $j > n$ est une conséquence directe de la nilpotence de K . En effet, puisque :

$$j > n \Rightarrow K^j = 0 \Rightarrow K^j * A = A^{(j)} = 0$$

tout vecteur ligne de $A^{(j)}$ est nul. D'où $A^{(j)}(0, *) = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$ pour $j > n$.

Pour $j \leq n$, selon (5.33), on a :

$$A^{(j)} = K^j * A$$

D'où, pour tout $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} A^{(j)}(0, k) &= (K^j)_{0,*} * A \\ &= \sum_{i=0}^n (j!) \cdot \delta_j^i \cdot A(i, k) && \text{[en vertu de l'équation (5.17)]} \\ &= (j!) \cdot A(j, k) && \text{pour } 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

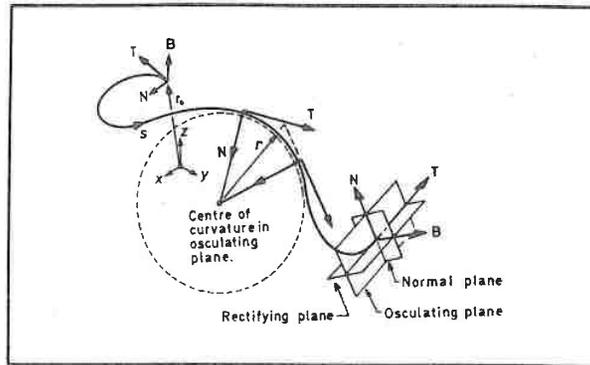
Il s'ensuit que :

$$A^{(j)}(0, *) = (j!) \cdot A(j, *) \quad \text{CQFD.}$$

Ainsi, grâce à ce théorème et à l'équation (5.35), on a :

$$C^{(j)}(0) = (j!) \cdot A(j, *) \cdot P \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n \quad (5.36)$$

osculateur et autres paramètres caractéristiques au point paramétrique α peuvent tous être calculés aisément, grâce à IG^α , et cela, quel que soit le schéma (voir fig. 5.5 et l'annexe X).



(d'après [Gasson-83, p.467, fig.10.26])

Figure 5.5 Trièdre de Frenet : en tout point $C(\alpha)$ de la courbe S , les trois vecteurs T , N et B définissant ce trièdre sont déterminés par le deuxième et le troisième vecteurs lignes de IG^α appliqués au polygone caractéristique P . Ainsi, par exemple :

$$T_\alpha = C^{(1)}(\alpha) / |C^{(1)}(\alpha)| = (IG_{1,2}^\alpha \cdot P) / |IG_{1,2}^\alpha \cdot P|$$

2. **Sur le plan de la dérivation paramétrique :** IG^α transforme la dérivation successive d'un arc de courbe à représentation paramétrique polynomiale en un simple indexage de ses lignes, le rang des lignes déterminant l'ordre des dérivées.
3. **Sur le plan de recherche automatique des conditions aux frontières d'un arc de courbe défini par un schéma arbitraire :** la structure des vecteurs lignes successifs de IG^0 caractérise en particulier les conditions géométriques d'un arc de courbe en son point initial. Parallèlement, celle des vecteurs lignes de IG^1 fait de même pour le point terminal. De ce fait, IG^0 et IG^1 fournissent un outil théorique fort commode pour cerner rapidement les qualités de base de tout schéma (cf.

Annexe IX pour les huit schémas présentés au chapitre 1).

4. **Sur le plan de relations entre l'expression des conditions géométriques aux bornes d'un même arc de courbe par deux schémas distincts de même degré :** cela se ramène à comparer la structure de lignes successives des opérateurs homologues IG^0 et IG^1 associés aux deux schémas.

2.2 Schéma cubique de Bernstein-Bézier

Nous considérons l'exemple du schéma cubique de Bernstein-Bézier pour illustrer la facilité avec laquelle on peut analyser un segment de courbe en ses bornes en s'appuyant sur le développement présenté ci-dessus.

Etude de conditions en $t = 0$

Matrice de lissage $A_{Bé}$:

$$A_{Bé} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Posons $P = {}^t(P_0 \ P_1 \ P_2 \ P_3)$. Puisque $IG^0 = \text{diag}(1 \ 1 \ 2 \ 6) * A_{Bé}$, on multiplie les lignes successives de $A_{Bé}$ respectivement par 1, 1, 2 et 6 pour en déduire les conditions classiques suivantes obtenues autrement au chapitre 1, §6.3.1 :

$$\begin{aligned} C(0) &= (1 \ 0 \ 0 \ 0) P &= P_0 \\ C^{(1)}(0) &= (-3 \ 3 \ 0 \ 0) P &= 3(P_1 - P_0) \\ C^{(2)}(0) &= 2(3 \ -6 \ 3 \ 0) P &= 6(P_0 - 2P_1 + P_2) \\ C^{(3)}(0) &= (3!)(-1 \ 3 \ -3 \ 1) P &= 6(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) \end{aligned}$$

Etude de conditions en $t = 1$

Le calcul de $\mathbf{IG}^1 = \text{diag}(1 \ 1 \ 2 \ 6) * \mathbf{G} * \mathbf{A}_{B\acute{e}}$ donne:

$$\mathbf{IG}^1_{B\acute{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

En multipliant ensuite les lignes successives de \mathbf{IG}^1 par \mathbf{P} , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(1) &= (0 \ 0 \ 0 \ 1) \mathbf{P} &= \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{C}^{(1)}(1) &= (0 \ 0 \ -3 \ 3) \mathbf{P} &= 3(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \\ \mathbf{C}^{(2)}(1) &= 2(0 \ 3 \ -6 \ 3) \mathbf{P} &= 6(\mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) \\ \mathbf{C}^{(3)}(1) &= (3!) (-1 \ 3 \ -3 \ 1) \mathbf{P} &= 6(-\mathbf{P}_0 + 3\mathbf{P}_1 - 3\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) \end{aligned}$$

Des résultats analogues peuvent être établis avec la même aisance pour tout schéma paramétrique polynomial. C'est ce que nous ferons dans le premier chapitre de la partie II pour notre ensemble de neuf schémas tests (voir également Annexe IX).

Partant de ces résultats, il est facile de traduire les conditions de continuité à imposer aux jonctions d'une courbe composite. En théorie, chaque segment peut provenir d'un schéma distinct, mais pour des considérations pratiques, les segments sont presque toujours tous spécifiés par rapport à un même schéma. Cela facilite la création et la manipulation des courbes composites puisque la formulation des conditions aux frontières de segments reste homogène dans ce cas.

2.2.1. Conditions de raccordement de courbes cubiques de Bernstein-Bézier

Etant donné deux polygones caractéristiques \mathbf{P} comme définis ci-dessus et $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_0 \ \mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2 \ \mathbf{Q}_3)$, on retrouve facilement les conditions de raccordement d'ordre j entre les deux segments de courbe de Bézier cubique respectifs à partir des relations ci-dessus.

Ainsi, pour une jonction d'ordre zéro (C^0), la condition est :

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_0 \quad (5.45)$$

Pour une jonction d'ordre un, les deux segments doivent avoir la même direction tangente en plus de la condition d'ordre zéro. Les conditions sont donc les suivantes :

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 = \lambda(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) \quad (5.46)$$

où λ est une constante. Cela revient à imposer que $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 (= \mathbf{Q}_0)$ et \mathbf{Q}_1 soient colinéaires (cf. fig 5.6) [Bézier-72, p.175] [Plastock-87, fig. 9-9, p.176] [Mortenson-85, p.123].

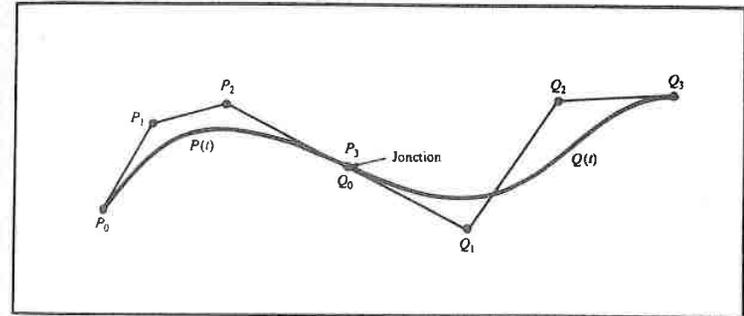


Figure 5.6 : Conditions de raccordement d'ordre un à la jonction de deux segments de courbes Bernstein-Bézier cubiques (d'après [Plastock-87, p.176, fig. 9-9]).

Les conditions pour une jonction de C^2 sont :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_3 &= \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 &= \lambda_1 (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) \\ \mathbf{P}_1 - 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 &= \lambda_2 (\mathbf{Q}_0 - 2\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

Les cinq points $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3 (= \mathbf{Q}_0), \mathbf{Q}_1$ et \mathbf{Q}_2 doivent donc être coplanaires. A cela, il faut ajouter l'identité de rayons de courbure des deux segments au point de jonction. Chemla dans [Chemla-71, pp.52-56] et Bézier dans [Bézier-72, p.176] ont présenté une formulation précise de ces conditions. Voir aussi [Mortenson-85, pp.123].

2.3. Deux indicateurs spécifiques

2.3.1. Conditions de Cauchy

Pour que la forme des arcs de courbes définies par un schéma donné soit préservée lorsque les polygones caractéristiques correspondants subissent en bloc des transformations linéaires (de translation et de rotation), les fonctions de lissage doivent vérifier une condition dite "de Cauchy" [Bézier-77, pp.41, 44] [Bézier-86, p.83], à savoir :

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) \equiv 1 \quad (5.48)$$

Exprimée en terme de matrices de lissage, cela revient à ce que le vecteur obtenu en additionnant les composantes d'une même ligne soit identique au vecteur colonne ${}^t(1, 0, \dots, 0) = {}^t(\delta_0^i)_{i=0, \dots, n}$, comme le démontre le théorème suivant :

Théorème 5.11 (Condition de Cauchy)

Les fonctions de lissage $\varphi_i(t)$ d'un schéma paramétrique polynomial vérifient la condition :

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) \equiv 1$$

dite "de Cauchy", si et seulement si les composantes de sa matrice de lissage vérifient les conditions suivantes :

$$\sum_{j=0}^n A(i, j) = \delta_0^i \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n \quad (5.49)$$

Démonstration 5.11

En vertu des équations (2.1) et (2.2) du chapitre 2, on a :

$$\varphi_j(t) = v_t A(*, j)$$

où $A(*, j)$ est le $j^{\text{ième}}$ vecteur colonne de A . D'où :

$$\sum_{j=0}^n \varphi_j(t) = \sum_{j=0}^n v_t A(*, j)$$

$$= \sum_{j=0}^n \left[\sum_{i=0}^n A(i, j) t^i \right] = \sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n A(i, j) \right] t^i$$

En vertu de l'hypothèse, on en déduit que :

$$\sum_{i=0}^n \left[\sum_{j=0}^n A(i, j) \right] t^i \equiv 1 \quad (5.50)$$

Or, l'identité entre deux fonctions polynômes est équivalente à l'identité des coefficients homologues. Il suit de là que :

$$\sum_{j=0}^n \varphi_j(t) \equiv 1 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n A(i, j) = \delta_0^i \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n \quad \text{CQFD.}$$

Le vecteur $(\sum_{j=0}^n A(i, j))_{i=0, 1, \dots, n}$ caractérise bien les schémas paramétriques polynomiaux

par rapport à la propriété de Cauchy. Aussi, nous introduisons l'opérateur rsv (pour "row sum vector") qui prend pour argument une matrice et ramène comme résultat le vecteur dont les composantes sont les sommes de composantes des lignes correspondantes. Appliqué à une matrice de lissage A , on obtient un indicateur de la condition de Cauchy :

$$\sum_{j=0}^n \varphi_j(t) \equiv 1 \Leftrightarrow rsv(A) = (\delta_0^i)_{i=0, 1, \dots, n}$$

A titre d'exemple, pour le schéma cubique de Bernstein-Bézier, où la matrice de lissage est :

$$A_{B\acute{e}z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

on voit bien que $rsv(A_{B\acute{e}z}) = {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$. Il vérifie la propriété de Cauchy, comme

d'ailleurs tous les schémas de Bernstein-Bézier [Bézier-86, p.83].

On a les conséquences suivantes pour les matrices associées d'ordre supérieur à zéro :

$$\text{rsv}(\mathbf{A}) = (\delta_0^i)_{i=0, \dots, n} \Rightarrow \text{rsv}(\mathbf{K}^j * \mathbf{A}) = \mathbf{0} \text{ pour } j \geq 1 \quad (5.51)$$

Une démonstration formelle que nous ne détaillons pas ici peut s'appuyer sur les deux considérations suivantes :

1. en vertu de l'équation (5.15), les n premières lignes de la matrice $[\mathbf{K} * \mathbf{A}]$ sont les multiples des n dernières lignes de \mathbf{A} , chacune décalée d'un cran vers le haut, avec la disparition de la première ligne et la remise à zéro de la dernière ;
2. quel que soit $k \in \mathbb{R}$: $\sum a_i = 0 \Rightarrow \sum ka_i = k \sum a_i = 0$.

En raisonnant par récurrence sur j , on termine facilement la démonstration.

2.3.2. Symétrie par permutation par rapport à t et $t-1$

Un nombre important de schémas paramétriques polynomiaux préservent la forme géométrique de leur courbes lorsque l'on inverse l'ordre des sommets du polygone caractéristique. Parmi les plus connus sont les cinq suivants signalés au premier chapitre :

- le schéma cubique de Ball [Ball-78, pp.181-182] [Bézier-77, pp.38-42],
- les schémas de Bernstein-Bézier d'ordre quelconque [Faux-85, pp.129-137] [Gasson-83, p.480],
- le schéma de B-spline cubique [Catmull-78, p.351],
- le schéma cubique d'Overhauser [Brewer-77, pp.132-137] [Bowyer-83, pp.80-82],
- le schéma cubique de Timmer [Timmer-80, pp. 25-28].

Cela est une conséquence directe de la propriété de symétrie par permutation vérifiée par les fonctions de lissage associées à ces schémas. Nous rappelons ici sa définition formelle :

Définition 5.1 (Symétrie par permutation)

Un schéma paramétrique polynomial a la propriété de symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$ si ses fonctions de lissage vérifient les conditions suivantes :

$$\varphi_i(t) = \varphi_{n-i}(1-t) \text{ pour tout } t \in [0, 1] \text{ et } i = 0, 1, \dots, n \quad (5.52)$$

2.3.2.1 Caractérisation matricielle

Ecrivons les $n+1$ relations de (5.56) sous la forme :

$$[\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] = [\varphi_n(1-t), \varphi_{n-1}(1-t), \dots, \varphi_0(1-t)] \quad (5.53)$$

On voit bien que dans le membre de droite les fonctions de lissage se présentent en ordre inversé par rapport au membre de gauche. Les propriétés de la matrice \mathbf{R} étudiée au chapitre 2 permettent de rétablir l'ordre naturel sans modifier la relation. Ceci conduit à :

$$[\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] = [\varphi_0(1-t), \varphi_1(1-t), \dots, \varphi_n(1-t)] * \mathbf{R} \quad (5.54)$$

En vertu des équations (2.1) et (2.3) du chapitre 2, on obtient l'interprétation matricielle :

$$\mathbf{v}_t \mathbf{A} = \mathbf{v}_{1-t} \mathbf{A} * \mathbf{R} \text{ pour tout } t \in [0, 1] \quad (5.55)$$

Or, en vertu du théorème 3.5 du chapitre 3, $\mathbf{v}_{1-t} = \mathbf{v}_t \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G}$. L'équation (5.55) peut s'écrire donc comme suit :

$$\mathbf{v}_t \mathbf{A} = \mathbf{v}_t \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G} * \mathbf{A} * \mathbf{R} \text{ pour tout } t \in [0, 1] \quad (5.56)$$

Puisque :

$$\mathbf{v}_t \mathbf{A} = \mathbf{v}_t \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G} * \mathbf{A} * \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G} * \mathbf{A} * \mathbf{R}$$

la propriété de symétrie par permutation est caractérisée par l'équation matricielle :

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G} * \mathbf{A} * \mathbf{R} \quad (5.57)$$

Compte tenu de la propriété R2, chapitre 2, $R^{-1} = R$. Par conséquent, (5.57) est équivalent à :

$$A * R = D(-1) * G * A \quad (5.58)$$

La matrice de lissage d'un schéma étant par définition non singulière, on peut, en définitive, caractériser la propriété de symétrie par permutation comme suit :

Théorème 5.12 (Symétrie par permutation)

Soit A la matrice de lissage d'un schéma paramétrique polynomial défini sur $[0, 1]$. Le schéma a la propriété de symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$ si et seulement si A vérifie l'équation matricielle :

$$A * R * A^{-1} = D(-1) * G \quad (5.59)$$

Il convient de noter que pour un schéma symétrique par permutation dont l'intervalle paramètre est $[a, b]$, les conditions (5.53) sont remplacées par :

$$[\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)] = [\varphi_n(a+b-t), \varphi_{n-1}(a+b-t), \dots, \varphi_0(a+b-t)]$$

tandis que (5.59) prend la forme générale suivante :

$$A * R * A^{-1} = D(-1) * G^{a+b}$$

L'avantage de la formulation matricielle par rapport à la définition formelle de (5.52) réside dans la possibilité d'automatiser le test de symétrie pour tout schéma. Les points de $[0, 1]$ (resp. $[a, b]$) étant en nombre infini et de surcroît, n'étant pas tous machine représentables, la définition formelle n'est pas pratique pour ce faire.

La propriété de symétrie par permutation a une conséquence immédiate sur la matrice de passage M (cf. chap. 7, part. I) reliant deux schémas ayant la propriété : la matrice de passage M commute avec R . Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 5.13

Soient A_n et A_g les matrices de lissage de deux schémas ayant la propriété de symétrie par permutation. La matrice de passage $M_{g \rightarrow n}$ permettant d'exprimer le schéma g en fonction du schéma n vérifie alors l'identité matricielle : $M_{g \rightarrow n} = R * M_{g \rightarrow n} * R$. (5.60)

Démonstration 5.13

Par hypothèse, on a :

$$A_n * R * A_n^{-1} = D(-1) * G \quad \text{et} \quad A_g * R * A_g^{-1} = D(-1) * G$$

D'où :

$$\begin{aligned} A_n * R * A_n^{-1} &= A_g * R * A_g^{-1} \\ \Leftrightarrow A_n * R * A_n^{-1} * A_g &= A_g * R * A_g^{-1} * A_g \\ \Leftrightarrow A_n * R * A_n^{-1} * A_g &= A_g * R \\ \Leftrightarrow A_n^{-1} * A_n * R * A_n^{-1} * A_g &= A_n^{-1} * A_g * R \\ \Leftrightarrow R * A_n^{-1} * A_g &= A_n^{-1} * A_g * R \end{aligned} \quad (5.61)$$

Puisque $R^{-1} = R$, (5.61) équivaut à :

$$A_n^{-1} * A_g = R * A_n^{-1} * A_g * R \quad (5.62)$$

Comme $M_{g \rightarrow n} = A_n^{-1} * A_g$ [Lewis-81, p.361], on conclut donc que :

$$M_{g \rightarrow n} = R * M_{g \rightarrow n} * R \quad \text{CQFD.}$$

Grâce à la relation (5.61), on déduit également que :

$$R * M_{g \rightarrow n} = M_{g \rightarrow n} * R$$

Ainsi, on voit que $M_{g \rightarrow n}$ et R commutent.

La décomposition cardinale des deux membres de l'équation (5.60), (cf. fig. 5.7 ci-dessous et R8 chap. 2), conduit, pour $i, j = 0, \dots, 3$, aux relations suivantes :

$$m_i = r * m_j * r \quad i \neq j \text{ et } i = j \text{ mod } 2 \quad (5.63)$$

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{R}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\frac{n+1}{2}} & \mathbf{R}_{\frac{n+1}{2}} \\ \mathbf{R}_{\frac{n+1}{2}} & \mathbf{0}_{\frac{n+1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{r} \\ \mathbf{r} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{g \rightarrow h} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_0 & \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_3 & \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{m}_0 & \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_3 & \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r m}_0 \mathbf{r} & \mathbf{r m}_1 \mathbf{r} \\ \mathbf{r m}_3 \mathbf{r} & \mathbf{r m}_2 \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad \text{(c)}
 \end{array}$$

Figure 5.7 : Symétrie par permutation et décomposition cardinale de \mathbf{R} et \mathbf{M} :

- (a) décomposition cardinale de la matrice de réflexion \mathbf{R}_{n+1} , n impaire ;
- (b) décomposition cardinale de la matrice de passage $\mathbf{M}_{g \rightarrow h}$;
- (c) relation entre sous-matrices cardinales de $\mathbf{M}_{g \rightarrow h}$ et de $\mathbf{R}_{n+1} \mathbf{M}_{g \rightarrow h} \mathbf{R}_{n+1}$.

On a ici affaire à la symétrie centrale (cf. chap. 2 précédent). Aussi, la paire de sous-matrices cardinales $(\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1)$ suffit-elle pour déterminer entièrement la matrice de passage lorsque les deux schémas vérifient la propriété de symétrie par permutation. Ce résultat sera utilisé, au chapitre 3, Partie II, pour construire des algorithmes de codage et de décodage des matrices caractéristiques d'une base formée des six schémas classiques présentés ci-dessus (cf. §3.2, chap. 7, partie I pour une spécification précise de cette base).

3. Dérivation : modèle d'interaction concepteur

Le modèle de dérivation adopté jusqu'ici ne permet pas une participation active du concepteur. En effet, en posant $j = 1$ dans le modèle (5.32), on ne peut associer à l'opérateur \mathbf{K} qu'une des deux interprétations immédiates suivantes :

- 1. \mathbf{K} transforme le vecteur \mathbf{v}_i en agissant vers sa gauche ;
- 2. \mathbf{K} transforme la matrice de lissage \mathbf{A} en agissant vers la droite .

Puisque le concepteur ne contrôle la forme d'une courbe qu'en modifiant la forme du polygone caractéristique associé, aucune des deux interprétations possibles du modèle (5.32) ne permet au concepteur de commander la dérivation d'une façon interactive. Pour obvier à cet inconvénient, on peut employer la méthode suivante pour remplacer le modèle (5.32) par un modèle approprié qui lui soit équivalent :

Définir la matrice notée Δ comme suit :

$$\Delta = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{K} * \mathbf{A} \quad (5.64)$$

et remplacer le modèle (5.32) par le modèle :

$$\mathbf{C}^j(t) = \mathbf{v}_i \mathbf{A} * \Delta^j \mathbf{P} \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N} \quad (5.65)$$

Le bien fondé de ce procédé est formellement démontré dans le théorème 5.14 ci-après. Dans l'immédiat, on voit que ce modèle est susceptible des deux interprétations immédiates suivantes :

- 1. Δ transforme la matrice de lissage \mathbf{A} en agissant vers la gauche ;
- 2. Δ transforme le polygone caractéristique \mathbf{P} en agissant vers la droite.

Un choix volontaire de la deuxième interprétation permet de formuler une dérivation initiée par le concepteur. Pour certains schémas, la matrice Δ peut être d'une structure suffisamment simple pour rendre la transformation $\Delta \mathbf{P}$ intuitivement accessible, géométriquement parlant, même à un concepteur non mathématicien. Dans ces cas, le concepteur pourra évoquer le tracé d'une courbe dérivée en remplaçant le polygone caractéristique \mathbf{P} par $\Delta \mathbf{P}$.

Considérons pour un premier exemple le schéma cubique de Taylor défini sur $[0, 1]$ [Lewis-81, Eq. 15 p.361]. On a vu au chapitre 1 (cf. §6.7) que ses fonctions de lissage sont définies par :

$$\Phi_{\tau_{0,y}}(t) = (t^i / i!)_{i=0, \dots, 3}$$

La matrice de lissage associée est donnée par :

$$A_{\tau_{ay}}(i, j) = (1/i!) \delta^j_i \quad \text{pour } i \text{ et } j = 0, \dots, 3$$

Plus explicitement :

$$A_{\tau_{ay}} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1/2 & \\ 0 & & & 1/6 \end{bmatrix}$$

De toute évidence, l'inverse de $A_{\tau_{ay}}$ est donnée par :

$$A_{\tau_{ay}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 6 \end{bmatrix}$$

Ainsi, par un calcul direct (cf. éq.(5.64)), on obtient pour $\Delta_{\tau_{ay}}$:

$$\Delta_{\tau_{ay}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, on obtient avec facilité :

$$\Delta_{\tau_{ay}} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On voit bien que dans ce cas le concepteur peut aisément commander le tracé de la courbe dérivée (l'hodographe) en demandant simplement le tracé de la nouvelle courbe dont le polygone caractéristique est $\Delta_{\tau_{ay}} \mathbf{P}$.

Pour un deuxième exemple, retournons une fois de plus au schéma cubique de Bernstein-Bézier défini sur $[0, 1]$. Comme :

$$A_{B\acute{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{B\acute{e}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

on vérifie aisément que :

$$\Delta_{B\acute{e}} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, le polygone caractéristique de la courbe dérivée est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta_{B\acute{e}} \mathbf{P} &= {}^t(3[P_1 - P_0], [2P_2 - P_1 - P_0], [P_3 + P_2 - 2P_1], 3[P_3 - P_2]) \\ &= {}^t(3\alpha_1, 2\alpha_2 + \alpha_1, \alpha_3 + 2\alpha_2, 3\alpha_3) \end{aligned}$$

avec $\alpha_1 = P_1 - P_0$, $\alpha_2 = P_2 - P_1$ et $\alpha_3 = P_3 - P_2$, vecteurs des côtés successifs du polygone caractéristique (cf. fig. 4.7 chap. 4).

L'équation (5.64) découle du théorème général suivant sur le passage d'un modèle de transformation dit "à base de moteur" au modèle équivalent dit "à base de matrice de transformation" :

Théorème 5.14

Soit A la matrice de lissage d'un schéma arbitraire de degré n défini sur $[a, b]$. Pour toute matrice T_1 de format $(n+1) \times (n+1)$, il existe une matrice unique T_2 de format $(n+1) \times (n+1)$ telle que :

$$v_t T_1 * A P = v_t A * T_2 P \quad \text{pour tout } t \in [a, b] \quad (5.66)$$

Démonstration 5.14

Existence :

$$T_2 = A^{-1} * T_1 * A \quad (5.67)$$

car les deux membres de (5.66) sont identiques pour tout $t \in [a, b]$ si et seulement si :

$$T_1 * A = A * T_2$$

Compte tenu de la non singularité de A , (5.67) est bien défini. Par conséquent T_2 l'est également.

Unicité : Elle découle de la non singularité de A .

CQFD.

Corollaire 5.14

$$T_1 = A * T_2 * A^{-1} \quad (5.68)$$

Remarques

Premièrement, non seulement la démonstration 5.14 établit le bien fondé du procédé employé pour déduire le modèle (5.65), elle propose en même temps, par le biais de (5.67), une méthode pour passer d'un modèle de transformation de type T_1 au modèle équivalent de type T_2 par lequel le concepteur peut exprimer sa volonté.

Deuxièmement, les opérateurs T_1 et T_2 sont tout à fait arbitraires et peuvent représenter des transformations géométriques quelconques.

Troisièmement, le choix de recourir à la forme T_2 pour favoriser l'intervention active du concepteur devra être décidé en fonction de la simplicité de formuler la transformation $T_2 P$ géométriquement.

Enfin, puisque du point de vue du concepteur les deux opérateurs recouvrent deux sémantiques distinctes, nous employerons l'expression **moteur** de transformation pour désigner tout opérateur de type T_1 en ce sens que le modèle de calcul que celui-ci sous-tend échappe à un éventuel contrôle du concepteur. L'expression **matrice** de transformation désignera plutôt les opérateurs de type T_2 . Selon cette terminologie, K est moteur de dérivation (elle ne dépend des schémas). Mais, la matrice Δ , qui est la *matrice de dérivation* équivalant à K pour un schéma donné, varie de schéma à schéma.

D'une manière générale, les moteurs de transformation sont indépendants des schémas. Par contre, les matrices de transformation en sont tributaires.

3.1. Matrices de dérivation et symétrie par permutation

La matrice de dérivation de tout schéma symétrique par permutation défini sur l'intervalle normalisé vérifie une propriété très voisine de celle vérifiée par les matrices de passage. Nous énonçons cette propriété sous forme de théorème sans démonstration formelle :

Théorème 5.15

Soit Δ la matrice de dérivation d'un schéma symétrique par permutation défini sur $[0, 1]$.

Alors :

$$R * \Delta * R = -\Delta \quad (5.69)$$

La démonstration se déduit facilement à partir des théorèmes 5.8 et 5.12 ainsi que du lemme suivant qui se démontre aisément également :

Lemme 5.15

$$D(-1) * K * D(-1) = -K \quad (5.70)$$

$$\begin{array}{cccc}
 -m_0 & & r & & m_2 & & r \\
 \left[\begin{array}{cc} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{array} \right] & = & \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \\
 -m_1 & & r & & m_3 & & r
 \end{array}$$

Figure 5.8 Matrice de dérivation et symétrie par permutation :
exemple du schéma de Bernstein-Bézier cubique.

En terme de composantes, la relation (5.69) se met sous la forme suivante :

$$\Delta(i, j) = -\Delta(n-i, n-j) \quad \text{pour } i \text{ et } j = 0, 1, \dots, n \quad (5.71)$$

L'exemple du schéma de Bernstein-Bézier cubique fournit une justification intuitive pour le théorème 5.15. En effet, une comparaison des sous-blocs cardinaux de $\Delta_{B\acute{e}}$ révèle les relations présentées dans la figure 5.8.

On peut se rapporter à l'annexe I pour les matrices de dérivation de nos schémas cubiques tests définis sur $[0, 1]$.

Conclusion

Ce chapitre a proposé une approche homogène au problème de dérivation des courbes paramétriques polynomiales. Elle est fondée sur l'opérateur matriciel K , appelé *moteur de dérivation*. Une fois le degré des schémas engendrant les courbes est fixé, le moteur de dérivation reste invariant par rapport aux schémas ; il est tributaire uniquement de la représentation matricielle que nous avons imposée aux schémas. Les propriétés multiplicatives du moteur de dérivation ont conduit à la définition des indicateurs de géométrie d'ordres supérieurs, extraits à partir de la matrice de lissage des schémas. Ceux-ci

permettent d'effectuer une analyse automatique de tout segment de courbe.

En particulier, l'opérateur $IG^\alpha = \text{diag}(1 \ 1 \ 2! \ \dots \ n!) * G^\alpha * A$ présente une structure de donnée extrêmement commode pour l'analyse complète d'un arc de courbe en tout point paramétrique α . En effet, il se déplace le long de l'arc de courbe (comme le trièdre de Frenet dont il permet d'ailleurs le calcul), et par simple indexage de ses lignes successives, permet d'évaluer les points successifs correspondant aux valeurs successives de α , et d'obtenir toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n , à chacun des points. Plus spécialement, IG^0 et IG^1 permettent de retrouver rapidement les conditions géométriques aux limites de l'arc de courbe.

La comparaison de la géométrie aux bornes des arcs de courbes de deux schémas arbitraires est facilitée à travers la comparaison de leur couples respectifs d'opérateurs IG^0 et IG^1 .

Nous avons montré que le modèle de dérivation $C^{(i)}(t) = v_i K * A P$ peut être remplacé par le modèle équivalent $C^{(i)}(t) = v_i A * \Delta^i P$, où la matrice de dérivation $\Delta = A^{-1} * K * A$ est calculée une fois pour toute. Avec ce nouveau modèle, le concepteur pourra étudier les hodographes d'ordres successifs [Bézier-86, pp.88-93] de l'arc de courbe en remplaçant P successivement par $\Delta P, \Delta^2 P, \Delta^3 P, \dots$, sans avoir à changer de schémas. Toutefois, cette approche n'est d'intérêt pratique que dans les cas où les $\Delta^i P$ sont de construction intuitivement simple à réaliser à partir de P .

++++

CHAPITRE 6

++++

Segmentation de courbes

CHAPITRE 6

Segmentation de courbes

Introduction

La subdivision d'un arc de courbe en plusieurs sous-segments joue un rôle important dans la création des courbes et des surfaces. Elle facilite notamment leur affinage local [Chemla-73], leur évaluation et leur visualisation ainsi que la recherche d'intersections des courbes et des surfaces [Catmull-78] [Lane-80] [Cohen-80] [Carlson-82][Koparkar-84]. Pour les schémas paramétriques polynomiaux, le problème de segmentation est essentiellement un problème de transformation d'une expression polynomiale à l'aide de transformations linéaires de son intervalle de paramètre. Aussi, sa solution, comme celle de la dérivation présentée au chapitre précédent, découle-t-elle directement du développement du chapitre 3.

Ce chapitre présente une solution générale dans le cas de schémas paramétriques polynomiaux en donnant l'expression explicite des opérateurs de segmentation que nous appelons conformément à la terminologie introduite dans le chapitre précédent (cf. §3) **moteurs** et **matrices de segmentation**. Les expressions des polygones caractéristiques des sous-segments obtenus sont également explicitées. La segmentation récursive d'un segment de courbe peut se construire par une séquence d'applications de moteurs et matrices de segmentation moyennant un critère d'arrêt approprié choisi d'avance.

Dans la première section, nous étudierons le problème de la segmentation d'un segment initial en deux sous-segments. C'est ce que nous appellerons par la suite une **bisegmentation**. Nous considérerons ensuite le cas général de **segmentation multipoints**.

1. Bisegmentation : formulation du problème

Soit A la matrice de lissage d'un schéma polynomial quelconque de degré n dont l'intervalle de paramètre est $[a, b]$. Soit :

$$C(t) = v_t A P \quad \text{pour } t \in [a, b] \quad (6.1)$$

le point courant du segment initial à segmenter.

Soit $t_0 \in [a, b]$. Le point $C(t_0)$ divise la courbe (6.1) en deux sous-segments symbolisés par :

$$C_1 = \{C(t) \mid t \in [a, t_0]\} \quad \text{appelé segment gauche ;}$$

$$C_2 = \{C(t) \mid t \in [t_0, b]\} \quad \text{appelé segment droit.}$$

Segmenter la courbe (6.1) revient à déterminer les deux polygones caractéristiques P^1 et P^2 tels que :

$$\{v_r A P^1 \mid r \in [a, b]\} \equiv C_1 \quad (6.2)$$

$$\{v_s A P^2 \mid s \in [a, b]\} \equiv C_2$$

En d'autres termes, il s'agit de trouver P^1 tel que :

$$\begin{aligned} v_r A P^1 &= v_t A P \\ r \in [a, b] & \quad t \in [a, t_0] \end{aligned} \quad (6.3)$$

et P^2 tel que :

$$\begin{aligned} v_s A P^2 &= v_t A P \\ s \in [a, b] & \quad t \in [t_0, b] \end{aligned} \quad (6.4)$$

La solution des deux problèmes a pour point de départ la bijection suivante :

$$[a, b] \rightarrow [c, d] : \varrho \mapsto t = (bc - ad)/(b - a) + (d - c)/(b - a)\varrho \quad (6.5)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \varrho = r, \quad c = a \text{ et } d = t_0 & \text{ pour la contrainte (6.3)} \\ \varrho = s, \quad c = t_0 \text{ et } d = b & \text{ pour la contrainte (6.4).} \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Pour condenser l'écriture, posons d'une part :

$$\alpha_1 = \frac{a(b - t_0)}{b - a} = \frac{\begin{vmatrix} a & t_0 \\ a & b \end{vmatrix}}{b - a} \quad \text{et} \quad \beta_1 = \frac{t_0 - a}{b - a} \quad (6.7)$$

et :

$$\alpha_2 = \frac{b(t_0 - a)}{b - a} = \frac{\begin{vmatrix} t_0 & b \\ a & b \end{vmatrix}}{b - a} \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{b - t_0}{b - a} \quad (6.8)$$

de l'autre.

Avec ces notations, (6.4) se traduit par :

$$v_r A P^1 = v_{\alpha_1 + \beta_1 r} A P \quad r \in [a, b] \quad (6.9)$$

et en tenant compte de (3.33) du chapitre 3, §2.4, cela revient à :

$$v_r A P^1 = v_r D(\beta_1) * G^{\alpha_1} * A P \quad r \in [a, b] \quad (6.10)$$

Il s'ensuit que :

$$A P^1 = D(\beta_1) * G^{\alpha_1} * A P \quad (6.11)$$

Du fait que A est non singulière, on obtient pour le sous-segment gauche :

$$P^1 = A^{-1} * D(\beta_1) * G^{\alpha_1} * A P \quad (6.12)$$

Remplaçons ensuite dans le développement précédent les paramètres α_1, β_1 et r respectivement par α_2, β_2 et s pour obtenir les expressions homologues suivantes pour le sous-segment droit :

$$v_s A P^2 = v_{\alpha_2 + \beta_2 s} A P \quad s \in [a, b] \quad (6.13)$$

$$v_s A P^2 = v_s D(\beta_2) * G^{\alpha_2} * A P \quad s \in [a, b] \quad (6.14)$$

$$A P^2 = D(\beta_2) * G^{\alpha_2} * A P \quad (6.15)$$

$$P^2 = A^{-1} * D(\beta_2) * G^{\alpha_2} * A P \quad (6.16)$$

avec α_2 et β_2 définis par (6.8) ci-dessus.

Il ressort des développements qui précèdent que les matrices :

$$m_{[a, t_0]} = D(\beta_1) * G^{\alpha_1} \quad (6.17)$$

$$s_{[a, t_0]} = A^{-1} * m_{[a, t_0]} * A \quad (6.18)$$

caractérisent la segmentation à gauche tandis que les suivantes :

$$m_{[t_0, b]} = D(\beta_2) * G^{\alpha_2} \quad (6.19)$$

$$s_{[t_0, b]} = A^{-1} * m_{[t_0, b]} * A \quad (6.20)$$

en font de même pour la segmentation à droite.

Toutefois, il convient de remarquer qu'à une nuance près, $m_{[a, t_0]}$ et $m_{[t_0, b]}$ ne dépendent pas du schéma considéré tandis que $s_{[a, t_0]}$ et $s_{[t_0, b]}$ sont de toute évidence fonction du schéma. Par ailleurs, dans le langage de la section 3 du chapitre précédent, les deux premières sont les moteurs respectifs de segmentation gauche et droit tandis que $s_{[a, t_0]}$ et $s_{[t_0, b]}$ représentent les matrices de segmentation respectives tout court.

En effet, en lisant (6.10) et (6.14) de la droite vers la gauche, on voit que $m_{[a, t_0]}$ et $m_{[t_0, b]}$ correspondent bien à un opérateur de type T_1 . Si l'on applique ensuite l'équation (5.67) (cf. §3, chap. 5 précédent) à ces deux matrices, on retrouve bien les matrices $s_{[a, t_0]}$ et $s_{[t_0, b]}$, qui sont donc des opérateurs de type T_2 .

A propos de l'indépendance des moteurs de segmentation vis à vis des schémas, il convient de souligner la nuance suivante : ces matrices sont en fait à la fois moteurs et matrices de segmentation pour le schéma algébrique [Lewis-82] dont la matrice de lissage est confondue avec la matrice identité (cf. §6.1, chap. 1 part. I).

En guise de vérification de la cohérence des notations introduites dans les développements qui précèdent, le théorème suivant montre que le point terminal du sous-segment gauche, le point initial du sous-segment droit ainsi que le point $C(t_0)$ du segment initial coïncident

effectivement.

Théorème 6.1

Soient P^1 et P^2 les polygones caractéristiques respectifs du sous-segment gauche et du sous-segment droit de la courbe initiale :

$$C(t) = v_t A P \quad t \in [a, b]$$

segmentée en $t_0 \in [a, b]$. On a alors :

$$C(t_0) = v_b A P^1 = v_a A P^2 \quad (6.21)$$

Démonstration 6.1

D'une part, d'après (6.9) :

$$v_r A P^1 = v_{\alpha_1 + \beta_1 r} A P$$

D'où, en remplaçant r par b , on obtient :

$$v_b A P^1 = v_{\alpha_1 + \beta_1 b} A P \quad (6.22)$$

Or, en vertu de (6.7), on a :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 b &= a(b - t_0)/(b - a) + (t_0 - a)b/(b - a) \\ &= [ab - at_0 + bt_0 - ab]/(b - a) = [b - a]t_0/(b - a) = t_0 \end{aligned}$$

D'où :

$$v_b A P^1 = v_{t_0} A P = C(t_0) \quad (6.23)$$

D'autre part, en remplaçant s par a dans (6.13), on obtient :

$$v_a A P^2 = v_{\alpha_2 + \beta_2 a} A P \quad (6.24)$$

Or, en vertu de (6.8) :

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 a &= b(t_0 - a)/(b - a) + (b - t_0)a/(b - a) \\ &= [bt_0 - ab + ab - at_0]/(b - a) = [b - a]t_0/(b - a) = t_0 \end{aligned}$$

Par suite :

$$v_a A P^2 = v_{t_0} A P = C(t_0) \quad (6.25)$$

Ainsi, en vertu de (6.23) et (6.25), on voit bien que :

$$v_b A P^1 = v_a A P^2 = C(t_0)$$

CQFD.

Ainsi, la bisegmentation préserve une continuité de position.

En guise de résumé, le tableau 6.1 réunit les relations de base pour la bisegmentation en t_0 . Les sept premières (resp. dernières) se rapportent au sous-segment gauche (resp. droit).

Tableau 6.1. Bisegmentation en t_0 , relations de base : on suppose s et $r \in [a, b]$.

Paramètre	Formule	Equation dans le texte
1. α_1	$= a[b - t_0]/(b - a)$	(6.7)
2. β_1	$= [t_0 - a]/(b - a)$	(6.7)
3. $m_{[a, t_0]}$	$= D(\beta_1) * G^{\alpha_1}$	(6.17)
4. $s_{[a, t_0]}$	$= A^{-1} m_{[a, t_0]} * A$	(6.21)
5. $v_r A P^1$	$= v_r m_{[a, t_0]} * A P$	(6.17) et (6.10)
6. $A P^1$	$= m_{[a, t_0]} * A P$	(6.17) et (6.12)
7. P^1	$= s_{[a, t_0]} * A P$	(6.17) et (6.11)
8. α_2	$= a[b - t_0]/(b - a)$	(6.8)
9. β_2	$= [b - t_0]/(b - a)$	(6.8)
10. $m_{[t_0, b]}$	$= D(\beta_2) * G^{\alpha_2}$	(6.18)
11. $s_{[t_0, b]}$	$= A^{-1} m_{[t_0, b]} * A$	(6.22)
12. $v_s A P^2$	$= v_s m_{[t_0, b]} * A P$	(6.18) et (6.14)
13. $A P^2$	$= m_{[t_0, b]} * A P$	(6.18) et (6.15)
14. P^2	$= A^{-1} * s_{[t_0, b]} * A P$	(6.18) et (6.16)

1.1. Bisegmentation sur $[0, 1]$

La transposition du développement précédent sur l'intervalle normalisé conduit à une simplification considérable des relations de segmentation (cf. tableau 6.2) et, par là, souligne l'intérêt pratique de cet intervalle. Les moteurs et matrices de segmentation se réduisent en particulier à des formes plus simples. On obtient notamment :

$$m_{[0, t_0]} = D(t_0) \quad (6.26)$$

$$m_{[t_0, 1]} = D(1 - t_0) * G^{t_0} \quad (6.27)$$

pour les deux moteurs de segmentation, et :

$$s_{[0, t_0]} = A^{-1} * m_{[0, t_0]} * A = A^{-1} * D(t_0) * A \quad (6.28)$$

$$s_{[t_0, 1]} = A^{-1} * m_{[t_0, 1]} * A = A^{-1} * D(1 - t_0) * G^{t_0} * A \quad (6.29)$$

pour les deux matrices de segmentation.

Tableau 6.2. Bisegmentation en t_0 , relations de base : on suppose s et $r \in [0, 1]$.

Paramètre	Formule	Equation générale dans le texte
1. α_1	$= 0$	(6.7)
2. β_1	$= t_0$	(6.7)
3. $m_{[0, t_0]}$	$= D(t_0)$	(6.17)
4. $s_{[0, t_0]}$	$= A^{-1} m_{[0, t_0]} * A$	(6.21)
5. $v_r A P^1$	$= v_r m_{[0, t_0]} * A P$	(6.17) et (6.10)
6. $A P^1$	$= m_{[0, t_0]} * A P$	(6.17) et (6.12)
7. P^1	$= s_{[0, t_0]} * A P$	(6.17) et (6.11)
8. α_2	$= t_0$	(6.8)
9. β_2	$= 1 - t_0$	(6.8)
10. $m_{[t_0, 1]}$	$= D(1 - t_0) * G^{t_0}$	(6.18)
11. $s_{[t_0, 1]}$	$= A^{-1} m_{[t_0, 1]} * A$	(6.22)
12. $v_s A P^2$	$= v_s m_{[t_0, 1]} * A P$	(6.18) et (6.14)
13. $A P^2$	$= m_{[t_0, 1]} * A P$	(6.18) et (6.15)
14. P^2	$= A^{-1} * s_{[t_0, 1]} * A P$	(6.18) et (6.16)

On remarque ici un autre fait caractéristique de l'intervalle normalisé :

Le moteur de segmentation droite (cf. (6.27) ci-dessus) est tout simplement la matrice de

Bernstein évaluée en $(1 - t_0)$, c'est-à-dire :

$$m_{[t_0, 1]} = \text{Bernstein}(1 - t_0) \quad (6.30)$$

En effet, en faisant $t = 1 - t_0$, on se retrouve dans les conditions du théorème 4.1, chapitre 4, §1.1. La segmentation à droite par rapport à la valeur paramétrique t_0 revient donc à appliquer la matrice $s_{[t_0, 1]} = A^{-1} * \text{Bernstein}(1 - t_0) * A$ au polygone caractéristique de la courbe de départ. Ce résultat rejoint l'une des conclusions tirées par R. N. Goldman dans une intéressante étude récente [Goldman-84] et [Goldman-85, p.39] consacrée à l'emploi de chaînes de Markov pour modéliser les transformations de courbes et de schémas paramétriques polynomiaux.

1.1.2. Bisegmentation en $t_0 = 1/2$

Le plus souvent, la segmentation est effectuée par rapport au milieu de l'intervalle normalisé, i. e., $t_0 = 1/2$ [Catmul-78] [Lane-80] [Cohen-80] [Peng-84]. Avec ce choix, les

$$m_{[0, 1/2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 2^{-1} \\ & & 2^{-2} \\ 0 & & & 2^{-3} \end{bmatrix} \quad m_{[1/2, 1]} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Figure 6.1. Moteurs de segmentation de schémas cubiques en $t_0 = 1/2$.

composantes de deux moteurs de segmentation sont données par :

$$m_{[0, 1/2]}(i, j) = 2^{-i} \delta_j^i \quad (6.31)$$

$$m_{[1/2, 1]}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ 2^{-j} & \text{pour } i = j \\ 2^{-j} C_j^i & \text{pour } i < j \end{cases} \quad (6.32)$$

Ainsi, le calcul des moteurs de segmentation peut s'effectuer par simple décalage de registres. Ceci conduit à des algorithmes rapides de visualisation qui assurent aussi une meilleure précision. La figure 6.1 donne les deux moteurs de segmentation pour les schémas cubiques.

Par sa définition, les puissances entières du moteur de segmentation à gauche peuvent toujours se calculer aussi par simples décalages de registres. D'autre part, pour le moteur de segmentation à droite, un calcul long que nous ne reproduisons pas ici montre que, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on a :

Théorème 6.2.

$$m_{[1/2, 1]}^k(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > j \\ 2^{-kj} & \text{pour } i = j \\ 2^{-kj} (2^k - 1)^{j-i} C_j^i & \text{pour } i < j \end{cases} \quad (6.33)$$

Ainsi, des décalages de registres suffisent également pour calculer les $m_{[1/2, 1]}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1.1.3. Bisegmentation de schémas de Bernstein-Bézier en $t = 1/2$

Pour les schémas de Bernstein-Bézier, il existe une relation simple entre les matrices de segmentation et les moteurs de segmentation. En effet, la matrice de segmentation à gauche est toute simplement la transposée du moteur de segmentation à droite, ceci quel que soit le degré du schéma. D'autre part la matrice de segmentation à droite est égale à la matrice de segmentation à gauche prise en "sandwich" par la matrice de réflexion R . D'une manière plus précise, on a le théorème suivant :

Théorème 6.3 (Matrices de bisegmentation de Bernstein-Bézier)

Soient $B^S_{[0, 1/2]}$ et $B^S_{[1/2, 1]}$ les matrices respectives de segmentation gauche et droite pour un schéma de Bernstein-Bézier de degré n . Soient $m_{[0, 1/2]}$ et $m_{[1/2, 1]}$ les moteurs de segmentation homologues. On a alors :

$$1. \quad B^S_{[0, 1/2]} = {}^t[m_{[1/2, 1]}] \quad (6.34)$$

$$2. \quad B^S_{[1/2, 1]} = R * B^S_{[0, 1/2]} * R \quad (6.35)$$

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin de l'expression explicite des composantes de

la matrice ${}_n A_{B\delta}$. D'où la nécessité du lemme suivant que l'on peut facilement démontrer :

Lemme 6.1

$${}_n A_{B\delta}(i, j) = \begin{cases} 0 & i < j \\ (-1)^{i+j} C_{n-j}^{i-j} C_n^j & i \geq j \end{cases} \quad (6.36)$$

pour i et $j = 0, 1, \dots, n$.

Ce lemme se déduit par ailleurs de la formule (4.29) dans [Bézier-86, p.82] en identifiant le coefficient de u^i . De plus la matrice $A_{B\delta}$ se confond essentiellement avec la matrice M_1 de Chemla telle qu'il l'a définie dans [Chemla-71, p.59]. Sa matrice M_2 correspond aux moteurs de segmentations.

On rappelle également sans démonstration les identités binomiales suivantes :

$$C_p^\alpha = C_p^{\beta-\alpha} \quad (6.37)$$

$$C_p^\alpha C_r^\beta = C_r^\alpha C_{r-\alpha}^{\beta-\alpha} \quad (6.38)$$

Démonstration 6.3

Démontrons d'abord que : ${}_B \delta^s(0, 1/2) = {}^t[m_{[1/2, 1]}]$

Compte tenu de (6.27) et de (6.28), cela revient à démontrer que :

$$A_{B\delta}^{-1} * D(1/2) * A_{B\delta} = {}^t[D(1/2) * G^{1/2}] \quad (6.39)$$

Or, en vertu de (3.41), chapitre 3, §2.4.1, on a : $D(1/2) * G^{1/2} = G * D(1/2)$. Par conséquent, (6.39) équivaut à :

$$A_{B\delta}^{-1} * D(1/2) * A_{B\delta} = {}^t[G * D(1/2)] = D(1/2) * {}^tG$$

c'est-à-dire :

$$A_{B\delta}^{-1} * D(1/2) * A_{B\delta} = D(1/2) * {}^tG$$

Par conséquent, la relation (6.39) est équivalente à la relation suivante :

$$D(1/2) * A_{B\delta} = A_{B\delta} * D(1/2) * {}^tG \quad (6.40)$$

Pour démontrer (6.40), introduisons les notations suivantes :

$$M = D(1/2) * A_{B\delta} \quad ; \quad M' = [D(1/2) * {}^tG] \quad ; \quad M'' = A_{B\delta} * [D(1/2) * {}^tG]$$

Ainsi la relation matricielle (6.40) peut s'écrire comme une relation entre composantes des matrices M et M'' :

$$M(i, j) = M''(i, j) \quad \text{pour } i \text{ et } j = 0, 1, \dots, n \quad (6.41)$$

Calculons les deux membres de (6.41) séparément. Au vu du lemme 6.1 et du fait que $D(1/2)$ est une matrice diagonale (cf. (3.3) chap. 3 §1), on a pour le membre de gauche :

$$M(i, j) = \begin{cases} 0 & i < j \\ (-1)^{i+j} (1/2)^i C_{n-j}^{i-j} C_n^j & i \geq j \end{cases} \quad (6.42)$$

Compte tenu de (3.8) chapitre 3, §2.1 (définition de G) et du fait que $D(1/2)$ est une matrice diagonale (cf. (3.3) chap. 3 §1), on a :

$$M'(k, j) = \begin{cases} 0 & i < j \\ (1/2)^k C_k^j & i \geq j \end{cases} \quad (6.43)$$

Le lemme 6.1, l'équation (6.43) et le fait que M' et $A_{B\delta}$ sont toutes deux des matrices triangulaires inférieures conduisent à :

$$M''(i, j) = \begin{cases} 0 & i < j \\ \sum_{k=j}^i A_{B\delta}(i, k) M'(k, j) & i \geq j \end{cases} \\ = \begin{cases} 0 & i < j \\ \sum_{k=j}^i [(-1)^{i+k} C_{n-k}^{i-k} C_n^k] [(1/2)^k C_k^j] & i \geq j \end{cases} \quad (6.44)$$

Au vu de (6.42) et de (6.44), il suffit donc de démontrer que :

$$\sum_{k=j}^i (-1)^{i+k} C_{n-k}^{i-k} C_n^k [(1/2)^k C_k^i] = (-1)^{i+j} (1/2)^j C_{n-j}^{i-j} C_n^j \quad (6.45)$$

Or :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=j}^i [(-1)^{i+k} C_{n-k}^{i-k} C_n^k] [(1/2)^k C_k^i] = \sum_{k=j}^i (-1)^{i+k} [C_{n-k}^{i-k} C_n^k C_k^i] (1/2)^k \\ & = \sum_{k=j}^i (-1)^{i+k} (1/2)^k [C_{n-k}^{i-k} C_n^k C_k^i] \\ & = \sum_{k=j}^i (-1)^j (-1)^k (1/2)^k [C_{n-k}^{i-k} C_k^i C_n^k] \quad [a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta \text{ et } ab = ba] \\ & = \sum_{k=j}^i (-1)^j (-1)^k (1/2)^k C_{n-k}^{i-k} [C_k^i C_n^k] \quad [abc = a[bc]] \\ & = \sum_{k=j}^i (-1)^j (-1)^k (1/2)^k C_{n-k}^{i-k} [C_n^{n-k} C_k^i] \quad [\text{grâce à (6.38)}] \\ & = (-1)^j C_n^j \sum_{k=j}^i (-1)^k (1/2)^k C_{n-k}^{i-k} C_n^{n-k} \quad [\text{mise en facteur de } (-1)^j C_n^j] \\ & = (-1)^j C_n^j \sum_{k=j}^i (-1)^k (1/2)^k C_{n-k}^{n-i} C_n^{n-k} \quad [\text{grâce à (6.37)}] \\ & = (-1)^j C_n^j \sum_{k=j}^i (-1)^k (1/2)^k C_{n-k}^{n-i} C_k^{i-j} \quad [\text{grâce à (6.38)}] \\ & = (-1)^j C_n^j \sum_{k=j}^i (-1)^k (1/2)^k C_{n-j}^{i-j} C_k^{k-j} \quad [\text{grâce à (6.37)}] \\ & = (-1)^j C_n^j C_{n-j}^{i-j} \sum_{k=j}^i (-1)^k (1/2)^k C_{i-j}^{k-j} \quad [\text{mise en facteur de } C_{n-j}^{i-j}] \\ & = (-1)^j C_n^j C_{n-j}^{i-j} \sum_{q=0}^{i-j} (-1)^{q+j} (1/2)^{q+j} C_{i-j}^q \quad [\text{en posant } q = k - j] \\ & = (-1)^{i+j} (1/2)^j C_n^j C_{n-j}^{i-j} \sum_{q=0}^{i-j} (-1)^q (1/2)^q C_{i-j}^q \quad [\text{mise en facteur de } (-1)^j (1/2)^j] \\ & = (-1)^{i+j} (1/2)^j C_n^j C_{n-j}^{i-j} \sum_{q=0}^{i-j} (-1/2)^q C_{i-j}^q \quad [\text{mise en facteur de } (-1)^j (1/2)^j] \\ & = (-1)^{i+j} (1/2)^j C_n^j C_{n-j}^{i-j} (1 - 1/2)^{i-j} \quad [\text{théorème binomial}] \\ & = (-1)^{i+j} (1/2)^j C_n^j C_{n-j}^{i-j} (1/2)^{i-j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = (-1)^{i+j} (1/2)^j C_{n-j}^{i-j} C_n^i (1/2)^{i-j} \quad [ab = ba] \\ & = (-1)^{i+j} (1/2)^j (1/2)^{i-j} C_{n-j}^{i-j} C_n^i \quad [\text{regroupement de termes en } (1/2)] \\ & = (-1)^{i+j} (1/2)^i C_{n-j}^{i-j} C_n^i \quad [(1/2)^j (1/2)^{i-j} = (1/2)^i] \quad (6.46) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le membre droit de (6.45) et par conséquent (6.34) est démontré.

Il reste à démontrer (6.35). Pour cela, développons le membre de droite. En se rapportant au (4) du tableau 6.2, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} * \mathbf{B}_e^{\mathcal{S}_{[0, 1/2]}} * \mathbf{R} &= \mathbf{R} * \mathbf{A}_{B_e}^{-1} * \mathbf{B}_e^{\mathcal{M}_{[0, 1/2]}} * \mathbf{A}_{B_e} * \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R} * \mathbf{A}_{B_e}^{-1} * \mathbf{D}(1/2) * \mathbf{A}_{B_e} * \mathbf{R} \quad [\text{grâce au(4) du tableau 6.2}] \end{aligned}$$

Les schémas de Bernstein-Bézier étant symétriques par permutation [Bézier-77, pp.38-42], il découle du théorème 5.12 que :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} * \mathbf{A}_{B_e}^{-1} &= \mathbf{A}_{B_e}^{-1} * \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G} \\ \mathbf{A}_{B_e} * \mathbf{R} &= \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G} * \mathbf{A}_{B_e} \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{R} * \mathbf{B}_e^{\mathcal{S}_{[0, 1/2]}} * \mathbf{R} = [\mathbf{A}_{B_e}^{-1} * \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G}] * \mathbf{D}(1/2) * [\mathbf{D}(-1) * \mathbf{G} * \mathbf{A}_{B_e}] \quad (6.47)$$

Or, d'après (3.41), chapitre 3, §2.4.1, on a : $\mathbf{D}(\beta) * \mathbf{G}^\alpha = \mathbf{G}^{\alpha+\beta} * \mathbf{D}(\beta)$. Après deux applications successives de cette identité, l'équation (6.47) revient donc à :

$$\mathbf{R} * \mathbf{B}_e^{\mathcal{S}_{[0, 1/2]}} * \mathbf{R} = [\mathbf{A}_{B_e}^{-1} * \mathbf{D}(-1) * \mathbf{D}(1/2) * \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G}^{-1/2} * \mathbf{G} * \mathbf{A}_{B_e}] \quad (6.48)$$

Les matrices $\mathbf{D}(-1)$ et $\mathbf{D}(1/2)$ étant diagonales, l'équation (6.48) revient à :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} * \mathbf{B}_e^{\mathcal{S}_{[0, 1/2]}} * \mathbf{R} &= [\mathbf{A}_{B_e}^{-1} * \mathbf{D}(1/2) * \mathbf{G}^{-1/2} * \mathbf{G} * \mathbf{A}_{B_e}] \\ &= [\mathbf{A}_{B_e}^{-1} * \mathbf{D}(1/2) * \mathbf{G}^{1/2} * \mathbf{A}_{B_e}] \quad [a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{Bé}^{-1} * [D(1/2) * G^{1/2}] * A_{Bé} \\
&= A_{Bé}^{-1} * m_{[1/2, 1]} * A_{Bé} && \text{[cf. (10) tableau 6.2]} \\
&= B_e^{S_{[1/2, 1]}} && \text{[d'après (11), tableau 6.2] CQFD.}
\end{aligned}$$

Pour illustrer ce théorème, retournons une fois de plus au cas cubique. D'après la figure 6.1, le moteur de segmentation cubique sur $[1/2, 1]$ vaut :

$$m_{[1/2, 1]} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

Selon ce théorème la matrice de segmentation sur $[0, 1/2]$ vaut donc :

$$B_e^{S_{[0, 1/2]}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

Selon les propriétés multiplicatives de R (cf. chap. 2, §1.2.3) $R * B_e^{S_{[0, 1/2]}} * R$ vaut :

$$R * B_e^{S_{[0, 1/2]}} * R = \begin{bmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Ainsi, par ce théorème, la matrice du membre droite de (6.51) est confondue avec la matrice de restriction $B_e^{S_{[1/2, 1]}}$ pour un arc de courbe Bernstein-Bézier cubique à l'intervalle $[1/2, 1]$. Ces résultats se vérifient facilement par un calcul direct, comme le montrent les figures 6.2 et 6.3.

$$\begin{aligned}
B_e^{S_{[0, 1/2]}} &= \begin{bmatrix} A_{Bé}^{-1} & m_{[0, 1/2]} & A_{Bé} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2^{-1} & \\ 2^{-2} & \\ 0 & 2^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{bmatrix}}_{m_{[1/2, 1]}}
\end{aligned}$$

Figure 6.2
Calcul direct de $B_e^{S_{[0, 1/2]}}$

$$\begin{aligned}
B_e^{S_{[1/2, 1]}} &= \begin{bmatrix} A_{Bé}^{-1} & m_{[1/2, 1]} & A_{Bé} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R * B_e^{S_{[0, 1/2]}} * R}
\end{aligned}$$

Figure 6.3
Calcul direct de $B_e^{S_{[1/2, 1]}}$

Au vu de ce théorème, P^1 et P^2 peuvent être déterminés uniquement à l'aide de la matrice de segmentation de gauche dans le cas des schémas de Bernstein-Bézier. C'est pour cette raison que nous adoptons la matrice $_{Be}S_{\{0, 1/2\}}$ comme l'opérateur standard de segmentation dans ce cas. Les quatre affectations suivantes formalisent le procédé de calcul de P^1 et de P^2 :

1. $P^1 \leftarrow _{Be}S_{\{0, 1/2\}} * P$
2. $Q \leftarrow R * P$
3. $Q \leftarrow _{Be}S_{\{0, 1/2\}} * Q$
4. $P^2 \leftarrow R * Q$

avec le signe \leftarrow symbolisant une affectation de tableau de vecteurs.

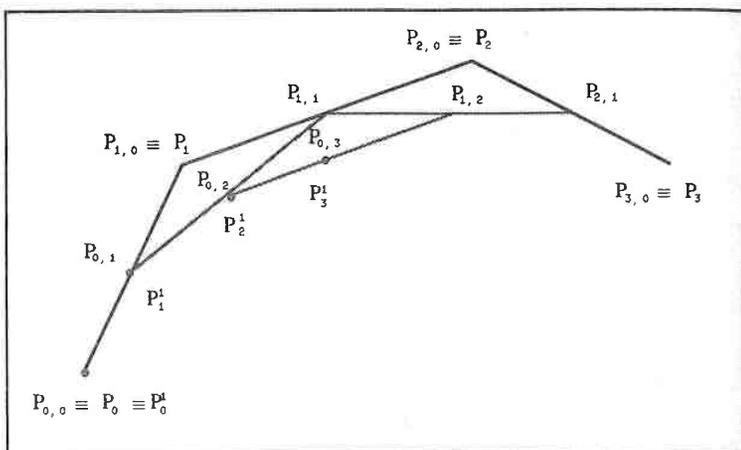


Figure 6.4 Bisegmentation d'une courbe Bernstein-Bézier cubique : construction géométrique du polygone caractéristique $P^1 = (P_0^1, P_1^1, P_2^1, P_3^1)$ du segment de gauche (\odot) :

$$\begin{aligned}
 P_1^1 &= P_{0,1} : \text{milieu de } [P_0 P_1] ; & P_{1,1} &= \text{milieu de } [P_1 P_2] ; \\
 P_{2,1} &= \text{milieu de } [P_2 P_3] ; & P_2^1 &= P_{0,2} : \text{milieu de } [P_{0,1} P_{1,1}] ; \\
 P_{1,2} &= \text{milieu de } [P_{1,1} P_{2,1}] ; & P_3^1 &= P_{0,3} : \text{milieu de } [P_{0,2} P_{1,2}] .
 \end{aligned}$$

Lorsque on explicite ces affectations en termes de composantes de P^1 et de P^2 , on retrouve la méthode classique de construction de courbe de Bernstein-Bézier [Peng-84], pp. 191-192] (méthode dite "de Vernet" [Bézier-86, p.77] ; on retrouve cette construction dans

de Casteljaou [Casteljaou-85, p.49] qui en est l'auteur [Farin-83, p.73]). A titre d'exemple, développons le calcul explicite des composantes de P^1 dans le cas cubique. Les notations employées pour ce faire sont celles des figures 6.4 et 6.5 :

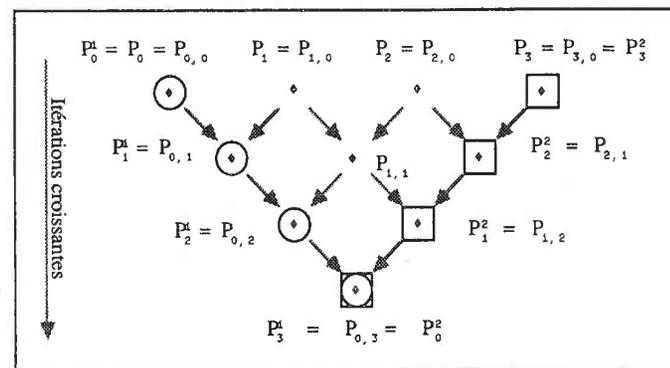


Figure 6.5 Arbre de bisegmentation d'un arc de courbe de Bernstein-Bézier cubique en $t_0 = r$:

- $\diamond = P_{i,j}$ sommet de rang i engendré à l'itération j , $0 \leq j \leq 3$ et $0 \leq i \leq 3-j$
- $\odot = P_i^1$ sommet de rang i du segment gauche, $0 \leq i \leq 3$,
- $\square = P_i^2$ sommet de rang i du segment droit, $0 \leq i \leq 3$,
- \swarrow multiplier sommet précédent par $1-r$,
- \searrow multiplier sommet précédent par r ,
- ∇ additionner résultat des deux multiplications,
- P_i sommet de rang i du polygone caractéristique initial.

$$P_0^1 = P_0 = P_{0,0}$$

$$P_1^1 = 1/2 (P_0 + P_1) = P_{0,1}$$

$$\begin{aligned} P_2^1 &= 1/4 P_0 + 1/2 P_1 + 1/4 P_2 = 1/2 [1/2 (P_0 + P_1) + 1/2 (P_1 + P_2)] \\ &= 1/2 [P_{0,1} + P_{1,1}] \\ &= P_{0,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3^1 &= 1/8 P_0 + 3/8 P_1 + 3/8 P_2 + 1/8 P_3 \\ &= 1/2 \{ [1/4 P_0 + 1/2 P_1 + 1/4 P_2] + [1/4 P_1 + 1/2 P_2 + 1/4 P_3] \} \\ &= 1/2 \{ 1/2 [1/2 (P_0 + P_1) + 1/2 (P_1 + P_2)] + 1/2 [1/2 (P_1 + P_2) + 1/2 (P_2 + P_3)] \} \\ &= 1/2 \{ 1/2 [P_{0,1} + P_{1,1}] + 1/2 [P_{1,1} + P_{2,1}] \} \\ &= 1/2 \{ P_{0,2} + P_{1,2} \} \\ &= P_{0,3} \end{aligned}$$

On voit que $P_{0,3}$ est confondu avec $C(1/2)$ et on détermine ainsi un point de la courbe.

Ces résultats se généralisent à une courbe de degré n , les composantes du polygone du segment gauche se définissant à l'aide de l'itération suivante :

Debut

1. Pour $i := 0$ à n faire

1.1 $P_{i,0} := P_i$;

2. $P_0^1 := P_{0,0}$;

3. Pour $k := 1$ à n faire

Debut

3.1 Pour $i := 0$ à $n-k$ faire

3.1.1 $P_{i,k} := 1/2(P_{i,k-1} + P_{i+1,k-1})$;

3.2 $P_k^1 = P_{k,0}$;

Fin

Fin

On vérifie aisément que cet algorithme comprend $n(n+1)/2$ décalages de registres pour chaque axe de l'espace objet et autant d'additions. Ainsi pour une courbe cubique (i.e. $n = 3$) en 3-D, le calcul du polygone caractéristique du segment gauche entraîne dix-huit décalages de registre et dix-huit additions.

L'ensemble de sommets engendrés par l'algorithme précédent se présentent aussi sous forme d'un arbre de bisegmentation comme l'illustre la figure 6.5 dans le cas cubique avec $t_0 = r$.

Par ailleurs, les matrices de segmentation de courbes de degrés successifs peuvent être déterminées de façon récursive. Le principe de calcul repose sur le procédé d'extension de la matrice η (cf. la propriété P5 η et fig. 3.7, §2.4.2, chap. 3) rappelé ici :

$${}_{n+1}\eta_{i,j} = \begin{cases} {}_n\eta_{i,j} & \text{pour } i, j = 0, 1, \dots, n \\ \alpha {}_n\eta_{0,n} & \text{pour } i=0 \text{ et } j=n+1 \\ \beta {}_n\eta_{i-1,n} + \alpha {}_n\eta_{i,n} & \text{pour } i = 1, \dots, n \text{ et } j=n+1 \\ \beta {}_n\eta_{n,n} & \text{pour } i=j=n+1 \\ 0 & \text{pour } i=n+1 \text{ et } j=0, \dots, n \end{cases} \quad (6.52)$$

où ${}_n\eta = D(\beta) * G^\alpha$ (cf. (3.45), §2.4.1, chap. 3). Au vu de (6.27) et du théorème 6.3, $\eta = B e^{S_{[0,1/2]}} = B e^{m_{[1/2,1]}}$ lorsque l'on pose $\alpha = \beta = 1/2$.

$$B e^{S_{[0,1/2]}} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1/4 & 1/2 & 3/8 & 0 & 0 & & & \\ 1/8 & 3/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & & & \\ \hline 1/16 & 1/4 & 3/8 & 1/4 & 1/16 & & & \end{array} \right] \\ \uparrow \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1/2 & (1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 & 0) & + & 1/2 (0 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8) \end{array} \right] \end{array}$$

Figure 6.6. Extension de la matrice de segmentation de Bernstein-Bézier d'ordre quatre à celle d'ordre cinq. Le sous-bloc nord-ouest est la matrice initiale d'ordre quatre à étendre à l'ordre cinq.

La transposition des matrices ${}_n\eta$ et ${}_{n+1}\eta$ dans l'équation (6.52) conduit au procédé d'extension de la matrice de segmentation de format $(n+1) \times (n+1)$ à celle de format

$(n+2) \times (n+2)$. Ce procédé engendre les composantes de la ligne et de la colonne supplémentaire à ajouter pour passer d'un format au suivant (voir Fig. 6.6 pour le passage de 4×4 à 5×5). Le procédé de base en œuvre ici est une traduction directe de la récurrence binomiale généralisée (cf. les figures 3.2, 3.4, 3.6 et les équations (3.12), (3.18) ainsi que la propriété P5 η du chap. 3 en intervertissant le rôle des lignes et des colonnes).

1.1.4. Matrices de segmentation et symétrie par permutation

Pour un schéma ayant la propriété de symétrie par permutation, une fois que ses matrices de segmentation en t_0 sont déterminées, une simple permutation de leurs lignes et colonnes permet de retrouver les matrices analogues pour une bisection en $1 - t_0$. Nous formalisons ce résultat à l'aide du théorème suivant :

Théorème 6.4

Soient $s_{[t_0, t_0]}$ et $s_{[t_0, 1]}$ les matrices respectives de segmentation à gauche et à droite pour un schéma paramétrique polynomial en $t_0 \in [0, 1]$. Si le schéma a la propriété de symétrie par permutation alors :

$$1. \quad R * s_{[t_0, t_0]} * R = s_{[1-t_0, 1]} \quad (6.53)$$

$$2. \quad R * s_{[t_0, 1]} * R = s_{[t_0, 1-t_0]} \quad (6.54)$$

Démonstration 6.4

Démontrons d'abord que $R * s_{[t_0, t_0]} * R = s_{[1-t_0, 1]}$. En effet, par définition, on a :

$$s_{[t_0, t_0]} = A^{-1} * D(t_0) * A \quad [\text{grâce à (6.28)}]$$

Par conséquent :

$$R * s_{[t_0, t_0]} * R = R * [A^{-1} * D(t_0) * A] * R \quad (6.55)$$

Comme le schéma considéré a la propriété de symétrie par permutation, il découle du théorème 5.12 que :

$$\left. \begin{aligned} R * A^{-1} &= A^{-1} * D(-1) * G \\ A * R &= D(-1) * G * A \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

Il suit de (6.55) et de (6.56) que :

$$\begin{aligned} R * s_{[t_0, t_0]} * R &= [A^{-1} * D(-1) * G] * D(t_0) * [D(-1) * G * A] \\ &= A^{-1} * [D(-1) * G * D(t_0) * D(-1) * G] * A \end{aligned}$$

Or, d'après (3.41) du chapitre 3, §2.4.1, $D(\beta) * G^\alpha = G^{\alpha/\beta} * D(\beta)$, on obtient par applications successives de cette identité au deuxième membre de la dernière relation :

$$\begin{aligned} R * s_{[t_0, t_0]} * R &= A^{-1} * [D(-1) * D(t_0) * G^{t_0} * D(-1) * G] * A \\ &= A^{-1} * [D(-1) * D(t_0) * D(-1) * G^{-t_0} * G] * A \\ &= A^{-1} * [D(-1) * D(t_0) * D(-1) * G^{1-t_0}] * A \end{aligned}$$

Or, on vérifie aisément que : $D(-1) * D(t_0) * D(-1) = D(t_0)$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} R * s_{[t_0, t_0]} * R &= A^{-1} * D(t_0) * G^{1-t_0} * A \\ &= s_{[1-t_0, 1]} \quad [\text{d'après (6.29)}]. \end{aligned}$$

La première partie du théorème est ainsi démontrée. Quant à la deuxième partie, elle ne fait que généraliser la deuxième partie du théorème 6.3. La démonstration s'en déduit donc en remplaçant $A_{B\ell}$ par A et $B_{\ell S}$ par s . CQFD.

Sur le plan pratique, on peut s'appuyer sur cette propriété pour accélérer la segmentation récursive car une fois $s_{[t_0, t_0]}$ et $s_{[t_0, 1]}$ déterminées, on obtient gratuitement les deux matrices $s_{[t_0, 1-t_0]}$ et $s_{[1-t_0, 1]}$ à l'aide des affectations suivantes :

$$s_{[t_0, 1-t_0]}(i, j) = s_{[t_0, 1]}(n-i, n-j) \quad (6.57)$$

$$s_{[1-t_0, 1]}(i, j) = s_{[t_0, t_0]}(n-i, n-j) \quad (6.58)$$

Les indices i et j varient de 0 à n . On vérifie aisément que les relations (6.57) et (6.58) sont une spécialisation de celles de (2.11) du chapitre 2, §1.2.3 de la présente partie.

Au vu des équations (6.28) et (6.29), le calcul des matrices de segmentation s_{t_0, t_j} et $s_{t_0, 1-t_j}$ est plus simple que celui de s_{t_0, t_j} et $s_{t_1-t_0, t_j}$ compte tenu du coût supplémentaire qu'entraînent les facteurs respectifs G^{t_0} et G^{1-t_0} dans ces deux derniers cas. Puisque $N = R * M * R \Leftrightarrow R * N * R = M$, on peut donc retourner (6.57) pour simplifier le calcul de s_{t_0, t_j} selon le procédé suivant :

1. calculer d'abord $s_{t_0, 1-t_j}$ suivant (6.28) ;
2. effectuer ensuite les affectations :

$$s_{t_0, t_j}(i, j) = s_{t_0, 1-t_j}(n-i, n-j) \text{ pour } i \text{ et } j = 0, 1, \dots, n. \quad (6.59)$$

Il convient de noter qu'en prenant $t_0 = 1/2$, les matrices s_{t_0, t_j} et $s_{t_0, 1-t_j}$ se confondent. C'est le cas également pour s_{t_0, t_j} et $s_{t_1-t_0, t_j}$.

2. Segmentation multipoints : cas général

Revenons au segment de courbe (6.1) et considérons la suite de points $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$. Le problème de la segmentation multipoint consiste à déterminer les polygones caractéristiques P^i des segments de courbes qui reproduisent les restrictions respectives du segment initial (6.1) aux sous-intervalles $[t_{i-1}, t_i]_{i=1, 2, \dots, k}$. Désignons par C_i la restriction à $[t_{i-1}, t_i]$, c'est-à-dire :

$$C_i = \{C(t) \mid t \in [t_{i-1}, t_i]\} = \mathbf{v}_i \mathbf{A} \mathbf{P} \quad (6.60)$$

La segmentation multipoints revient donc à déterminer, pour $i = 1, 2, \dots, k$, les P^i tels que :

$$\mathbf{v}_r \mathbf{A} * \mathbf{P}^i = \mathbf{v}_i \mathbf{A} \mathbf{P} \quad (6.61)$$

$$r \in [a, b] \quad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

Les outils mathématiques qui permettent de résoudre ce problème généralisent essentiellement ceux employés dans la résolution du problème de bisegmentation, à commencer par la bijection (6.5) dans les conditions analogues suivantes :

$$c = r ; \quad c = t_{i-1} ; \quad d = t_i$$

En procédant par analogie avec les relations (6.7), (6.9), (6.10) et (6.11), on obtient :

$$\mathbf{A} \mathbf{P}^i = \mathbf{D}(\beta_i) * \mathbf{G}^{\alpha_i} * \mathbf{A} \mathbf{P} \quad (6.62)$$

avec :

$$\alpha_i = \frac{bt_{i-1} - at_i}{b-a} = \frac{\begin{vmatrix} t_{i-1} & t_i \\ a & b \end{vmatrix}}{b-a} \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{t_{i-1} - t_i}{b-a} \quad (6.63)$$

De (6.62), on tire la relation analogue à (6.12) comme suit :

$$\mathbf{P}^i = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{D}(\beta_i) * \mathbf{G}^{\alpha_i} * \mathbf{A} \mathbf{P} \quad (6.64)$$

pour $i = 1, \dots, k$. En poussant cette analogie un peu plus loin, on obtient les expressions suivantes :

$$\mathbf{m}_{[t_{i-1}, t_i]} = \mathbf{D}(\beta_i) * \mathbf{G}^{\alpha_i} \quad (6.65)$$

$$s_{[t_{i-1}, t_i]} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{D}(\beta_i) * \mathbf{G}^{\alpha_i} * \mathbf{A} \quad (6.66)$$

Ce sont les expressions respectives du moteur et de la matrice de segmentation pour le sous-intervalle $[t_{i-1}, t_i]$.

Discussion

En laissant les t_i prendre des valeurs à l'extérieur de $[a, b]$, les relations (6.62) à (6.66) permettent aussi de résoudre le problème d'extrapolation d'un arc de courbe au-delà de son intervalle de paramètre. Par ailleurs, le procédé par lequel les t_i sont déterminés n'a aucune importance.

Comme pour la bisegmentation, lorsqu'on se ramène à l'intervalle normalisé, ces relations prennent une forme plus simple. Nous considérons ce cas dans la section suivante sous l'hypothèse que t_i évolue à un pas constant de $1/k$.

2.1. Segmentation multipoints à pas constant sur $[0, 1]$

En posant $[a, b] = [0, 1]$, les relations (6.62) à (6.66) se réduisent aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} A P^i &= D(t_i - t_{i-1}) * G^{i-1} * A P \\ P^i &= A^{-1} * D(t_i - t_{i-1}) * G^{i-1} * A P \\ m_{[t_{i-1}, t_i]} &= D(t_i - t_{i-1}) * G^{i-1} \\ s_{[t_{i-1}, t_i]} &= A^{-1} * D(t_i - t_{i-1}) * G^{i-1} * A \end{aligned} \quad (6.67)$$

pour $i = 1, 2, \dots, k$. Faisons l'hypothèse que $t_i = i/k$. Compte tenu de l'identité :

$D(\beta) * G^\alpha = G^{\alpha/\beta} * D(\beta)$ (cf. (3.41), §2.4.1 chapitre 3), les relations (6.67) peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$A P^i = m_{[(i-1)/k, i/k]} * A P \quad (6.68)$$

$$P^i = s_{[(i-1)/k, i/k]} * P \quad (6.69)$$

où :

$$m_{[(i-1)/k, i/k]} = D(1/k) * G^{(i-1)/k} = G^{(i-1)} * D(1/k) \quad (6.70)$$

$$s_{[(i-1)/k, i/k]} = A^{-1} * D(1/k) * G^{(i-1)/k} * A = A^{-1} * G^{(i-1)} * D(1/k) * A \quad (6.71)$$

avec i allant de 1 à k . On vérifie aisément qu'en faisant $k = 2$, on retrouve l'ensemble de relations de bisegmentation par rapport à la valeur paramétrique $1/2$.

Remarques :

1. Les relations de segmentation présentées dans le développement ci-dessus possèdent de nombreuses formulations équivalentes. Pour les retrouver, il

suffit de faire appel aux identités remarquables énumérées au chapitre 3, §2.4.1.

2. Sur le plan pratique, l'exposant de la matrice binomiale figurant dans la forme du troisième membre de (6.70) (resp. (6.71)) fournit un moyen simple pour étiqueter les sous-segments. En effet, il vient de (6.70) que :

$$m_{[(i-1)/k, i/k]} = G * m_{[(i-2)/k, (i-1)/k]}$$

3. En prenant k suffisamment grand, les relations (6.68) et (6.70) se transforment en un procédé d'évaluation des points successifs du segment de courbe. Plus concrètement, $cvs(m_{[(i-1)/k, i/k]} * A)P$ fournit les points successifs.

2.1.2 Exemple de trisegmentation : courbe de Bernstein-Bézier cubique

Illustrons en détail l'application pratique des relations (6.68) à (6.71) dans le cas du schéma de Bernstein-Bézier cubique et avec $k = 3$. Désignons par P le polygone caractéristique du segment initial.

Premier sous-segment : $i = 1$.

D'après (6.70) avec $k = 3$, $Bé m_{[0, 1/3]} = D(1/3)$. D'où :

$$\begin{aligned} Bé m_{[0, 1/3]} * A_{Bé} &= D(1/3) * A_{Bé} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/27 & 1/9 & -1/9 & 1/27 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$Bé s_{[0, 1/3]} = A_{Bé}^{-1} * Bé m_{[0, 1/3]} * A_{Bé}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/27 & 1/9 & -1/9 & 1/27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 4/9 & 4/9 & 1/9 & 0 \\ 8/27 & 4/9 & 2/9 & 1/27 \end{bmatrix}$$

Le premier sous-segment a donc pour polygone caractéristique :

$$P^1 = \begin{bmatrix} P_0 \\ 1/3 (2P_0 + P_1) \\ 1/9 (4P_0 + 4P_1 + P_2) \\ 1/27 (8P_0 + 12P_1 + 6P_2 + P_3) \end{bmatrix}$$

Deuxième sous-segment : $i = 2$.

Compte tenu de la deuxième remarque ci-dessus, on a : $B_e^{m_{[1/3, 2/3]}} = G * B_e^{m_{[0, 1/3]}}$.

Par conséquent :

$$B_e^{m_{[1/3, 2/3]}} * A_{B_e} = G * [B_e^{m_{[0, 1/3]}} * A_{B_e}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/27 & 1/9 & -1/9 & 1/27 \end{bmatrix} = 1/27 \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 & 1 \\ -12 & 0 & 9 & 3 \\ 6 & -9 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$B_e^{S_{[1/3, 2/3]}} = A_{B_e}^{-1} * B_e^{m_{[1/3, 2/3]}} * A_{B_e}$$

$$= 1/27 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 & 1 \\ -12 & 0 & 9 & 3 \\ 6 & -9 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = 1/27 \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 & 1 \\ 4 & 12 & 9 & 2 \\ 2 & 9 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Par suite, le deuxième sous-segment a pour polygone caractéristique :

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/27 (8P_0 + 12P_1 + 6P_2 + P_3) \\ 1/27 (4P_0 + 12P_1 + 9P_2 + 2P_3) \\ 1/27 (2P_0 + 9P_1 + 12P_2 + 4P_3) \\ 1/27 (P_0 + 6P_1 + 12P_2 + 8P_3) \end{bmatrix}$$

Troisième sous-segment : $i = 3$.

Compte tenu toujours de la deuxième remarque ci-dessus, on a :

$$B_e^{m_{[2/3, 1]}} = G * B_e^{m_{[1/3, 2/3]}}$$

Par conséquent :

$$B_e^{m_{[2/3, 1]}} * A_{B_e} = G * [B_e^{m_{[1/3, 2/3]}} * A_{B_e}]$$

$$= 1/27 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 & 1 \\ -12 & 0 & 9 & 3 \\ 6 & -9 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = 1/27 \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 & 8 \\ -3 & -9 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & -9 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$B_e^{S_{[2/3, 1]}} = A_{B_e}^{-1} * B_e^{m_{[2/3, 1]}} * A_{B_e}$$

$$= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/27 & 1/9 & -1/9 & 1/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 & 8 \\ -3 & -9 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & -9 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

Enfin, le troisième sous-segment a donc pour polygone caractéristique :

$$P^3 = \begin{bmatrix} 1/27 (P_0 + 6P_1 + 12P_2 + 8P_3) \\ 1/9 (P_1 + 4P_2 + 4P_3) \\ 1/3 (P_2 + 2P_3) \\ P_3 \end{bmatrix}$$

On voit à travers cet exemple que la segmentation multipoint préserve également la continuité de position aux jonctions des sous-segments. En effet, on constate que la dernière composante d'un sous-segment se confond toujours avec la première composante du sous-segment suivant. Plus concrètement, on relève d'une part les relations suivantes :

$$P_3^1 = P_0^2 = 1/27 (8P_0 + 12P_1 + 6P_2 + P_3)$$

$$P_3^2 = P_0^3 = 1/27 (P_0 + 6P_1 + 12P_2 + 8P_3)$$

et de l'autre :

$$P_0^1 = P_0 \quad \text{et} \quad P_3^3 = P_3$$

On aurait pu par ailleurs appliquer le théorème 6.4 pour contourner le calcul explicite de $B_{\mathcal{S}(2/3, 1)}$, le schéma de Bernstein-Bézier étant symétrique par permutation.

Conclusion

Ce chapitre s'est appuyé une fois de plus sur le développement du chapitre 3 pour proposer une solution générale au problème de la segmentation. Une fois l'intervalle de segmentation fixé, on déduit pour l'ensemble des schémas de même degré un moteur de segmentation

unique, généralement de la forme $D(\alpha) * G^d$. Pour une bisegmentation en $t = 1/2$, les deux moteurs peuvent être calculés uniquement par décalage de registres. Dans tous les cas, la matrice de segmentation associée à un moteur de segmentation permet le calcul de la spécification du sous-segment.

Dans le cas de bisegmentation, lorsque le schéma a la propriété de symétrie par permutation, les deux matrices de segmentation se déduisent l'une de l'autre par de simples affectations.

+ + + +

CHAPITRE 7

+ + + +

Conversion de schémas et de représentations

Proposition d'une base de schémas symétriques par
permutation.

CHAPITRE 7

Conversion de schémas et de représentations : Proposition d'une base de schémas symétriques par permutation

Introduction

Des nombreuses considérations pratiques peuvent conduire à changer le schéma dans lequel est exprimée la représentation d'un arc de courbe (resp. d'un carreau de surface). Ainsi une conversion peut vouloir prendre en compte :

- la convenance personnelle de l'utilisateur : l'utilisateur est plus familier avec le schéma *hôte* qui accueille la nouvelle représentation ;
- le souci de standardiser les représentations : on décide de traiter toute transcription à l'aide d'un schéma standard. De ce fait, les transcriptions s'appuyant sur d'autres schémas devront être converties au schéma standard (schéma hôte d'office) ;
- la popularité du schéma hôte : le schéma hôte est tout simplement plus connu, e.g., un schéma de Bernstein-Bézier ;
- le schéma hôte permet une meilleure souplesse : il offre plus de degré de liberté (e.g., la possibilité d'augmenter le degré des courbes soit pour optimiser le volume de données à manipuler [Farin-83, p.73], soit pour être en mesure de mieux contrôler la forme des courbes [Goldman-84, p.210], soit pour avoir une plus grande variété de formes [Bézier-86, p.149]) ;
- la nécessité d'assurer une meilleure interactivité entre l'utilisateur et le schéma hôte : une plus grande facilité dans la formulation des modifications (e.g., schéma de Bernstein-Bézier [Forrest-71]) ;
- la possibilité de réaliser plus aisément avec le schéma hôte certaines formes particulières requises pour des applications spécifiques ;
- la possibilité d'assurer un meilleur contrôle local (le schéma hôte limite la zone d'influence d'une modification locale, comme c'est le cas des B-splines [Clark-76, p.455] [Hartley-78, p.130]) ;

- ou la simple nécessité liée à un contexte de base de schémas : le passage d'un schéma à un autre s'impose dans ce cas comme une opération indispensable si l'on veut tirer avantage de toutes les possibilités d'une telle base .

A propos de la dernière motivation, il convient de souligner sa nature futuriste dans la mesure où, à notre connaissance, de telles bases n'existent pas encore. Toutefois, l'étude du problème de conversion nous a conduit à proposer une base compacte des schémas possédant la propriété de symétrie par permutation. Sa spécification sera exposée dans la troisième section de ce chapitre.

Auparavant, nous présenterons dans la première section une solution de conversion de schémas en nous appuyant sur les outils développés au chapitre 3. Ensuite, dans la deuxième section, nous présenterons la jonction entre le problème de conversion et celui de segmentation exposée dans le chapitre précédent.

1. Conversion sur intervalles arbitraires

1.1. Notations et terminologie

Soit P_g la représentation d'un arc de courbe à l'aide d'un schéma caractérisé par la matrice de lissage A_g et dont $[a_g, b_g]$ est l'intervalle paramétrique associé. Ainsi, on a :

$\mathcal{S}_g = \{A_g, [a_g, b_g]\}$ et $\mathcal{C}_g = \{A_g, [a_g, b_g], P_g\}$ (cf. équation (2.2) du chapitre 2). Soit s le paramètre associé à l'intervalle $[a_g, b_g]$.

Soit également $\mathcal{S}_h = \{A_h, [a_h, b_h]\}$ un deuxième schéma, appelé par la suite **schéma hôte**, dont le degré est identique à celui de $\mathcal{S}_g = \{A_g, [a_g, b_g]\}$. Soit $t \in [a_h, b_h]$.

Le problème de conversion de représentation se formule alors dans les termes suivants :

Etant donnée la transcription initiale :

$$\mathcal{C}_g = \{A_g, [a_g, b_g], P_g\} \quad (7.1)$$

et le schéma hôte :

$$\mathcal{S}_h = \{A_h, [a_h, b_h]\} \quad (7.2)$$

trouver P_h pour que la transcription :

$$\mathcal{C}_h = \{A_h, [a_h, b_h], P_h\} \quad (7.3)$$

définisse la même courbe que \mathcal{C}_g .

Exprimé en fonction des points courants, le problème de conversion revient à déterminer P_t tel que :

$$v_t A_h P_h = v_s A_g P_g \quad (7.4)$$

où $t \in [a_h, b_h]$ et $s \in [a_g, b_g]$.

1.2. Solution

Comme dans le cas de la segmentation, le premier pas dans la solution consiste à définir la bijection suivante entre les deux intervalles $[a_h, b_h]$ et $[a_g, b_g]$:

$$[a_h, b_h] \rightarrow [a_g, b_g] : t \mapsto s = \alpha + \beta t \quad (7.5)$$

où :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{a_g b_h - a_h b_g}{b_h - a_h} = \frac{\begin{vmatrix} a_g & b_g \\ a_h & b_h \end{vmatrix}}{\ell_h} \\ \beta &= \frac{b_g - a_g}{b_h - a_h} = \frac{\ell_g}{\ell_h} \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Compte tenu de cette bijection, (7.4) équivaut à :

$$v_t A_h P_h = v_{\alpha + \beta t} A_g P_g \quad \text{pour tout } t \in [a_h, b_h] \quad (7.7)$$

Or, d'après (3.33) du chapitre 3, on a l'identité : $v_{\alpha+\beta t} = D(\beta) * G^\alpha$. Par conséquent, (7.7) revient à :

$$v_t A_n P_n = v_t [D(\beta) * G^\alpha] * A_g P_g \quad \text{pour tout } t \in [a_n, b_n] \quad (7.8)$$

Par suite :

$$A_n P_n = [D(\beta) * G^\alpha] * A_g P_g \quad (7.9)$$

La matrice A_n , étant non singulière, la solution générale du problème de conversion se présente comme :

$$P_n = A_n^{-1} * [D(\beta) * G^\alpha] * A_g P_g \quad (7.10)$$

La matrice :

$$cm_{\alpha, \beta} = D(\beta) * G^\alpha \quad (7.11)$$

est le **moteur de conversion** (au sens de la section 3 du chapitre 5) paramétré en α et β . Ces paramètres sont fonction uniquement des valeurs extrêmes des deux intervalles $[a_g, b_g]$ et $[a_n, b_n]$ (voir eq. (7.6) ci-dessus).

Définition 7.1

La matrice :

$$M_{g \rightarrow n} = A_n^{-1} * cm_{\alpha, \beta} * A_g \quad (7.12)$$

s'appelle **matrice de conversion** (ou encore **matrice de passage**).

Avec cette notation, la solution (7.10) s'écrit :

$$P_n = M_{g \rightarrow n} P_g \quad (7.13)$$

Discussion

Au vu des équations (7.10) et (7.11), le calcul de la nouvelle représentation peut se

décomposer en trois étapes : d'abord, on applique A_g à la représentation initiale P_g ; on applique ensuite le moteur de conversion au résultat de l'étape précédente ; et pour finir, on applique A_n^{-1} au résultat de la deuxième étape. Cette interprétation suppose que le moteur de conversion soit connu d'avance.

En revanche, en supposant calculée d'avance la matrice $M_{g \rightarrow n}$ selon (7.12), le modèle (7.13) pose le calcul de P_n en une seule étape. Cela entraîne $(n+1)^2$ opérations de multiplications et autant d'additions pour chaque axe de l'espace objet \mathcal{G} .

Plaçons-nous maintenant dans un contexte de base des schémas. Connaître $M_{g \rightarrow n}$ d'avance présente un aspect avantageux dans un tel contexte : en effet, étant donnée la matrice A_n , on déduit tout simplement que :

$$A_g = cm_{\alpha, \beta}^{-1} * A_n * M_{g \rightarrow n} \quad (7.14)$$

Ajoutons ensuite à cela l'hypothèse simplificatrice suivante : $cm_{\alpha, \beta}^{-1} = cm_{\alpha, \beta} = I$ (c'est souvent le cas dans la pratique car les deux schémas sont généralement définis sur le même intervalle de paramètre (cf. §1.3 ci-après pour preuve)). La matrice A_g se déduit aisément alors à partir de $M_{g \rightarrow n}$ et A_n sans avoir à recourir à une inversion de matrice. On a en particulier :

$$A_g = A_n * M_{g \rightarrow n} \quad (7.15)$$

Si, de plus, les deux schémas ont la propriété de symétrie par permutation, on a montré que (cf. Théorème 5.13, chap. 5, §2.3.2) :

$$M_{g \rightarrow n} = R * M_{g \rightarrow n} * R$$

ou encore que :

$$M_{g \rightarrow n}(i, j) = M_{g \rightarrow n}(n-i, n-j) \quad (7.16)$$

avec i et $j = 0, \dots, n$. On peut alors tirer avantage de cette propriété de symétrie centrale pour coder les matrices de passage dans un espace *deux fois moins encombrant*. Les

résultats (7.15) et (7.16) jouent un rôle capital dans le codage et décodage de la base proposé en section 3.

1.3. g-schéma et h-schéma d'un même intervalle paramétrique

Une première simplification des relations de conversion s'obtient lorsque les deux intervalles paramétriques $[a_n, b_n]$ et $[a_g, b_g]$ se déduisent l'un de l'autre par un simple changement d'échelle, c'est à dire, $(a_n, b_n) = (ka_g, kb_g)$ avec $k \in \mathbb{R}$. En effet, dans ce cas, on vérifie aisément (à l'aide de (7.6)) que :

$$cm_{\alpha, \beta} = cm_{0, k} = D(k)$$

et par conséquent :

$$M_{g \rightarrow h} = A_n^{-1} * D(k) * A_g \quad (7.17)$$

En particulier, lorsque $k = 1$, on voit que $cm_{\alpha, \beta} = cm_{0, 1} = I$ et on retrouve la définition classique d'une matrice de passage [Lewis-82, p.360] :

$$M_{g \rightarrow h} = A_n^{-1} * A_g \quad (7.18)$$

La nouvelle représentation de la courbe se simplifie alors comme suit :

$$P_h = M_{g \rightarrow h} P_g = A_n^{-1} * A_g P_g \quad (7.19)$$

Ainsi, les vecteurs lignes successifs $M_{g \rightarrow h}$ permettent d'écrire directement l'expression des sommets correspondants de P_h en fonction de ceux de P_g .

Les colonnes successives de $M_{g \rightarrow h}$ permettent également d'exprimer les fonctions de lissage du schéma initial en fonction de celles du schéma hôte. Dans ce dernier cas, on a, en termes plus précis, le théorème suivant :

Théorème 7.1

Soient A_g et A_n les matrices de lissage de deux schémas définis sur un même intervalle de paramètre $[a, b]$. Soit $M_{g \rightarrow h} = A_n^{-1} * A_g$. Si $\Phi_g(t)$ et $\Phi_h(t)$ sont les suites respectives des fonctions de lissage, alors :

$$\Phi_g(t) = [\Phi_h(t)] M_{g \rightarrow h} \quad (7.20)$$

Démonstration 7.1

En vertu de (7.15), $A_g = A_n * M_{g \rightarrow h}$. Par suite, pour tout $t \in [a, b]$, on a :

$$v_t A_g = v_t A_n * M_{g \rightarrow h}$$

Or, d'après (2.3), chapitre 2, §1.2.2, $v_t A_g = \Phi_g(t)$ et $v_t A_n = \Phi_h(t)$. Il s'ensuit que :

$$\Phi_g(t) = \Phi_h(t) M_{g \rightarrow h} \quad \text{CQFD.}$$

Exemple 1.

Pour illustrer le théorème précédent, considérons la conversion du schéma de Ball cubique en schéma de Bernstein-Bézier cubique, tous deux définis sur $[0, 1]$. Le schéma hôte dans cet exemple est le schéma de Bernstein-Bézier. Ainsi, par définition :

$$M_{Ba \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{Ba}$$

Le schéma de Ball a pour matrice de lissage [cf. Annexe 2] :

$$A_{Ba} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

et pour fonctions de lissage (voir §6.1, chap. 1) :

$$\begin{aligned} B_a \psi_0(t) &= 1 - 2t + t^2 \\ B_a \psi_1(t) &= 2t - 4t^2 + 2t^3 \\ B_a \psi_2(t) &= 2t^2 - 2t^3 \\ B_a \psi_3(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Quant au schéma de Bernstein-Bézier, les fonctions de lissage sont (cf. §6.2, chap.1, part.I):

$$B_{\hat{e}}\varphi_i(t) = C_3^i (1-t)^i t^{3-i} \quad 0 \leq i \leq 3$$

et que (cf. Lemme 6.1, §1.1.3, chap. 6) :

$$A_{B_{\hat{e}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{B_{\hat{e}}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit que :

$$M_{B_a \rightarrow B_{\hat{e}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, en s'aidant des colonnes successives de $M_{B_a \rightarrow B_{\hat{e}}}$, on peut écrire :

$$B_a\varphi_0(t) = B_{\hat{e}}\varphi_0(t) + 1/3 B_{\hat{e}}\varphi_1(t)$$

$$B_a\varphi_1(t) = 2/3 B_{\hat{e}}\varphi_1(t)$$

$$B_a\varphi_2(t) = 1/3 B_{\hat{e}}\varphi_2(t)$$

$$B_{\hat{e}}\varphi_3(t) = 2/3 B_{\hat{e}}\varphi_0(t) + B_{\hat{e}}\varphi_3(t)$$

Quant aux relations entre les sommets de Ball et ceux de Bézier pour une même courbe, elles s'obtiennent à l'aide des lignes homologues de $M_{B_a \rightarrow B_{\hat{e}}}$. Ainsi, on a :

$$P_{B_{\hat{e}}}(0) = P_{B_a}(0)$$

$$P_{B_{\hat{e}}}(1) = 1/3 P_{B_a}(0) + 2/3 P_{B_a}(1) = P_{B_a}(0) + 2/3 [P_{B_a}(1) - P_{B_a}(0)]$$

$$P_{B_{\hat{e}}}(1) = 2/3 P_{B_a}(2) + 1/3 P_{B_a}(3) = P_{B_a}(3) + 2/3 [P_{B_a}(2) - P_{B_a}(3)]$$

$$P_{B_{\hat{e}}}(3) = P_{B_a}(3)$$

Dans le cas général où les deux schémas du théorème 7.1 ne partagent pas un même intervalle de paramètre, on peut s'appuyer sur les théorèmes 3.5 et 3.6 du chapitre 3, §2.4 et sur le fait que $cm_{\alpha, \beta}^{-1} = cm_{-\alpha/\beta, 1/\beta}$ pour remplacer l'équation (7.20) par :

$$\Phi_g(s) = \Phi_h(-\alpha/\beta + s/\beta) M_{g \rightarrow h} \quad (7.21)$$

et ceci pour tout $s \in [a_g, b_g]$ pourvu que $\beta \neq 0 \Leftrightarrow a_g \neq b_g$.

Voici une justification intuitive pour (7.21) :

$$[a_g, b_g] = [a_h, b_h] \Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = 1 \quad [d'après (7.6)]$$

Par suite, $-\alpha/\beta + s/\beta = s$. D'où (7.21) \Rightarrow (7.20).

2. Relation entre conversion et segmentation

Le tableau 7.1 ci-dessous met en évidence le lien étroit entre le problème de conversion de représentation et celui de segmentation d'un arc de courbe en plusieurs sous-segments. Les trois relations de conversion proviennent des équations (7.11), (7.12) et (7.10) dans cet ordre. Parallèlement, les relations homologues de segmentation rappellent dans l'ordre les équations (6.65), (6.66) et (6.64) du chapitre précédent.

Conversion	Segmentation
$cm_{\alpha, \beta} = D(\beta) * G^{\alpha}$	$m_{[t_{i-1}, t_i]} = D(\beta_i) * G^{\alpha_i}$
$M_{g \rightarrow h} = A_h^{-1} * D(\beta) * G^{\alpha} * A_g$	$s_{[t_{i-1}, t_i]} = A^{-1} * D(\beta_i) * G^{\alpha_i} * A$
$P_h = A_h^{-1} * D(\beta) * G^{\alpha} * A_g * P_g$	$P^i = A^{-1} * D(\beta_i) * G^{\alpha_i} * A * P$

Tableau 7.1 Rapprochement entre conversion et segmentation.

Ainsi, le problème de segmentation multipoints (cf. §2, chap. 6) peut se traduire en terme de conversion de la manière suivante :

Soit la transcription :

$$\tilde{C}_i = \{A, [t_{i-1}, t_i], P\}_{i=1, 2, \dots, k}$$

avec $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$. Soit également le schéma hôte :

$$\tilde{S} = \{A, [a, b]\}.$$

Déterminer P^i pour que la transcription :

$$\tilde{C}_h = \{A, [a, b], P^i\}$$

définisse la même courbe que \tilde{C}_i .

Ainsi, moyennant les identifications suivantes :

$$A_g = A ; \quad A_h = A ; \quad [a_g, b_g] = [t_{i-1}, t_i] ; \quad [a_h, b_h] = [a, b]$$

on traduit un problème de segmentation en un problème de conversion. Les relations (7.6), (7.10), (7.11) et (7.12) aidant, on vérifie que dans ces conditions, on a :

$$cm_{\alpha, \beta} = m_{[t_{i-1}, t_i]} ; \quad M_{g \rightarrow h} = S_{[t_{i-1}, t_i]} \\ P_h = P^i$$

Considérons à titre d'exemple la bi-segmentation en $t = 1/2$.

Pour le sous-segment gauche, les termes du problème exprimé en tant que problème de conversion sont :

$$[a_g, b_g] = [0, 1/2], \quad [a_h, b_h] = [0, 1], \quad A_g = A_h = A \quad \text{et} \quad P_g = P$$

Montrons que dans ce cas, $cm_{\alpha, \beta}$, $M_{g \rightarrow h}$ et P_h se confondent respectivement avec

$$m_{[0, 1/2]}, S_{[0, 1/2]} \text{ et } P^i.$$

Pour cela, commençons par calculer $cm_{\alpha, \beta}$:

Au vu de (7.6), $\alpha = 0$ et $\beta = 1/2$. D'où, en appliquant (7.11) : $cm_{0, 1/2} = D(1/2)$. En remontant à l'équation (6.26) de §1.1 du chapitre précédent, on voit bien que :

$$cm_{0, 1/2} = D(1/2) = m_{[0, 1/2]}$$

Les moteurs de conversion et de segmentation sont donc confondus.

Calculons ensuite la matrice de passage $M_{g \rightarrow h}$:

D'après (7.12) :

$$M_{g \rightarrow h} = A^{-1} * D(1/2) * A \\ = S_{[0, 1/2]} \quad [d'après (6.28) \text{ du chap. précédent}]$$

On voit également que les matrices de conversion et de segmentation se confondent.

Enfin, d'après (7.10) :

$$P_h = A^{-1} * D(1/2) * A P \\ = P^i \quad [selon les lignes 4 et 7, Tab. 6.2, \text{ du chap. précédent}]$$

Pour le sous-segment droit, les données sont les suivantes :

$$[a_g, b_g] = [1/2, 1], \quad [a_h, b_h] = [0, 1], \quad A_g = A_h = A \quad \text{et} \quad P_g = P$$

Montrons dans ce cas aussi que $cm_{\alpha, \beta}$, $M_{g \rightarrow h}$ et P_h se confondent respectivement avec $m_{[1/2, 1]}$, $S_{[1/2, 1]}$ et P^2 .

Pour cela, calculons d'abord $cm_{\alpha, \beta}$:

Comme en vertu de (7.6), $\alpha = \beta = 1/2$, on obtient $cm_{\alpha, \beta} = D(1/2) * G^{1/2}$ qui est identique à $m_{[1/2, 1]}$ d'après (6.27) du chapitre précédent.

On calcule ensuite $M_{g \rightarrow h}$:

D'après (7.12) :

$$\begin{aligned} M_{g \rightarrow h} &= A^{-1} * D(1/2) * G^{1/2} * A \\ &= S_{\{1/2, 1\}} \quad [d'après (6.29) \text{ du chap. précédent}] \end{aligned}$$

$M_{g \rightarrow h}$ et $S_{\{1/2, 1\}}$ sont également confondus dans ce cas. Par suite, d'après (7.10) :

$$\begin{aligned} P_n &= A^{-1} * D(1/2) * G^{1/2} * A P \\ &= P^2 \quad [selon les lignes 11 et 14 du Tab. 6.2, chap. précédent] \end{aligned}$$

Ainsi donc, moyennant les identifications posées ci-dessus, segmenter une courbe (ou restreindre sa variation à un sous-intervalle paramétrique) se ramène à un problème de conversion de schéma.

3. Base des schémas symétriques par permutation : aspects théoriques

3.1. Hypothèses

Les schémas à représenter dans la base sont de degré identique ; ils sont tous définis sur l'intervalle normalisé et vérifient la propriété de symétrie par permutation. Enfin, il y a m schémas à représenter.

3.2. Terminologie

Nous distinguons les trois catégories suivantes de matrices caractéristiques :

1. l'ensemble des matrices de lissage des m schémas : A_i , pour $i = 1, \dots, m$;
2. l'inverse des m matrices de lissage : A_i^{-1} ;
3. l'ensemble des matrices de passage liant les m schémas deux à deux et dans les deux sens :

$$M_{j \rightarrow k} = A_k^{-1} * A_j \quad \text{pour } j \text{ et } k = 1, \dots, m \text{ avec } j \neq k.$$

Tout sous-ensemble de matrices caractéristiques à partir duquel on peut retrouver toutes les autres matrices caractéristiques forme un noyau que nous appellerons **spécification intermédiaire (S-I)** de la base.

Nous ferons aussi la distinction entre forme externe et forme interne d'une matrice caractéristique. La première correspond à sa structure de donnée habituelle tandis que la deuxième correspond à sa forme codée dans la base. La forme spécifique de ce codage sera

essentiellement motivée par diverses considérations d'efficacité parmi lesquelles le souci d'accès rapide, d'une représentation précise ou de réduction de l'encombrement de la base.

Ainsi, la forme externe des matrices $A_{B\ell}$ et $A_{B\ell}^{-1}$ pour le schéma cubique de Bernstein-Bézier est donnée par :

$$A_{B\ell} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{B\ell}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quant à leur codage interne, on pourra prendre, à titre d'exemple, ces mêmes matrices multipliées par un facteur entier approprié (disons 3 pour fixer les idées), pour assurer une représentation précise (cf. chap. 3, part. II) de leur composantes.

Par des transformations de compactage ou de changement d'échelle effectuées sur les éléments de la spécification intermédiaire, on obtient la spécification dite définitive (**S-D**) qui est plus près du codage interne de la base.

3.3. Objectifs poursuivis

Les quatre objectifs poursuivis dans la recherche d'une spécification définitive sont les suivants :

1. la spécification définitive doit être peu encombrante ;
2. elle doit limiter la redondance aussi bien dans le choix des matrices caractéristiques que dans les valeurs qui codent les composantes de ces dernières ;
3. elle doit également assurer le calcul des autres matrices caractéristiques par une logique simple et à temps de réponse rapide ;
4. elle doit enfin admettre un codage de valeurs numériques par des entiers

uniquement pour assurer un codage précis.

3.4. Idée directrice

En tenant compte des quatre critères énumérés ci-dessus, l'idée consiste donc à extraire de l'ensemble des trois catégories de matrices caractéristiques un noyau ayant un nombre réduit de matrices, capable d'être codé d'une façon condensée et facilitant un calcul rapide des autres matrices.

3.5. Choix d'un noyau S-I

Parmi les différents choix possibles, trois retiennent notre attention. Le premier consiste simplement à adopter pour noyau l'ensemble de matrices de la première catégorie. Ceci conduit à la spécification intermédiaire suivante :

$$S-I = \{A_i \mid i = 1, \dots, m\} \quad (7.23)$$

Cette solution a le mérite de fournir un noyau contenant le nombre minimum de matrices caractéristiques. Elle est également peu redondante. Néanmoins, la détermination des matrices des autres catégories impose une inversion de matrice. Cette nécessité nuit à un meilleur temps de réponse et peut entraîner des risques d'erreur de chute, etc.

La deuxième solution, visant à pallier le principal défaut de la précédente, réunit les matrices des deux premières catégories pour la spécification intermédiaire :

$$S-I = \{(A_i, A_i^{-1}) \mid i = 1, \dots, m\} \quad (7.24)$$

Bien que cette solution aussi admette une représentation précise, elle présente toutefois deux défauts majeurs : elle est éminemment redondante et nécessite deux fois plus de place mémoire que la première. Nous l'abandonnons pour une troisième solution qui répond mieux aux critères posés ci-dessus.

Cette troisième solution est fondée sur une spécification intermédiaire qui tire avantage de la symétrie centrale des matrices de passage. Le codage de sa spécification définitive peut être ramenée à un encombrement comparable à celui de la première solution. Elle admet une réduction de la redondance et de surcroît, a le grand mérite de contourner le problème d'inversion de matrices. Elle conduit ainsi à un meilleur temps de réponse également. La section suivante sera dédiée à exposer cette solution.

Le tableau 7.2 donne les résultats d'une étude prospective de coûts des trois solutions comparées. Les règles de ce tableau sont basées sur l'analyse de types de paramètres caractéristiques dont peut avoir besoin un programme d'application pour la solution trois. Pour anticiper sur le chapitre 3, partie II (cf. Tab. 3A), on identifie dans ce cas les sept requêtes suivantes :

- | | | | |
|--------------|-------------------|--|----------------------------|
| 1. A_{ref} | 2. A_{ref}^{-1} | 3. $M_{i \rightarrow ref}$ | 4. $M_{ref \rightarrow i}$ |
| 5. A_i | 6. A_i^{-1} | 7. $M_{i \rightarrow j}$ avec $i \neq j \neq ref \neq i$ | |

Pour les deux premières solutions présentées ci-dessus, il y a trois types de requêtes correspondant aux trois catégories de paramètres caractéristiques, aucun schéma n'étant privilégié comme schéma de référence. Par conséquent, requêtes 1 et 5 se confondent, de même pour 2 et 6, ainsi que pour 3, 4 et 7 dans les deux cas.

On a retenu les trois hypothèses suivantes dans le calcul du nombre des multiplications pour les trois solutions :

1. Les composantes des matrices de S-I sont toutes multipliées par un facteur entier f pour les convertir en matrices entières ; par suite, pour les décoder, on devra multiplier les formes internes par $1/f$. Pour des matrices 4×4 (resp. $n \times n$) cela fait 16 (resp. n^2) multiplications par matrice.
2. Les matrices de passage vérifient la symétrie de (7.16), de sorte qu'il suffit de calculer uniquement leurs sous-blocs nord pour en déduire le reste par symétrie. Pour déterminer $M_{i \rightarrow j}$ suivant (7.18) et dans le cas de schémas cubiques, il faudra effectuer $(4 \times 4 \times 4)/2 = 32$ (resp. $1/2 n^3$) multiplications.
3. L'inversion de matrice est par la méthode de décomposition de la matrice en produit d'une matrice triangulaire inférieure L par une matrice triangulaire supérieure U [Aitkinson-83, pp. 115-117] entraînant, pour une matrice d'ordre 4 (resp. n), $1/3(4 \cdot 4^3 - 4) = 84$ (resp. $1/3(4n^3 - n)$) multiplications.

On souligne que bien que les solutions 2 et 3 semblent comparables de point de vue du coût, la solution 2 est pratiquement deux fois plus encombrante que la solution 3. D'autre part, dans le cas de la solution 3, du fait que les autres paramètres caractéristiques sont codés à

travers ceux du schéma de référence, celui-ci est plus favorisé par rapport aux autres schémas comme le montre le faible coût de décodage des requêtes 1, 2, 3 et 4.

Tableau 7.2 Coûts comparés des trois choix de spécification intermédiaire.
(Voir §2.3.1, chap.3, partie II pour les détails des sept règles d'accès)

Complexités comparées de 3 solutions :			
Base de schémas cubiques symétriques par permutation			
Coût de multiplications par règle et par solution			
Voir §2.1, chap. 3, partie II pour les règles détaillées			
Paramètres	valeurs	significations	Formules d'analyse
n	4	dimension des matrices	n lignes et colonnes
p	16	coût de rep. entière =	n*n
inv	84	coût inverse matrice =	(4*n*n*n - n)/3 †
prod_matrice	64	coût produit matrice =	n*n*n
Règles	solution 1*	solution 2*	solution 3
1	16	16	16
2	100	16	16
3	148	64	8
4	148	64	8
5	16	16	88
6	100	16	88
7	148	64	48

† Formule du coût d'inversion de matrice est fondée sur la méthode de décomposition LU de la matrice à inverser (cf. [Atkinson-83, pp.115-117]).

L pour matrice triangulaire inférieure
U pour matrice triangulaire supérieure

⊗ pour solutions 1 et 2 les règles suivantes de décodage sont identiques :
1 et 5; 2 et 6; 3, 4 et 7

* pour les trois solutions, on a tiré avantage de la symétrie centrale des matrices de passage pour remplacer prod_matrice par 1/2prod_matrice dans le calcul de ces derniers lorsque n est pair.

3.5.1. Spécification intermédiaire

Elle est fondée sur le choix d'un schéma de référence pris parmi l'ensemble des schémas à représenter dans la base. Cela conduit à la spécification intermédiaire suivante :

$$S-I = \{(A_{ref}, A_{ref}^{-1})\} \cup \{(M_{i \rightarrow ref}, M_{ref \rightarrow i}) | i = 1, \dots, m \text{ et } i \neq ref\} \quad (7.25)$$

où l'on désigne par :

A_{ref} : la matrice de lissage du schéma de référence,

A_{ref}^{-1} : l'inverse de A_{ref} ,

$M_{i \rightarrow ref}$: la matrice de passage qui transforme un schéma i au schéma ref ,

$M_{ref \rightarrow i}$: la matrice de passage qui transforme le schéma ref au schéma i . Il

convient de noter que $M_{ref \rightarrow i} = M_{i \rightarrow ref}^{-1}$ par construction.

En supposant $m > 1$, un calcul simple montre qu'il existe $m(m+1)$ matrices caractéristiques pour m schémas à représenter dans la base. S-I n'en recense que $2m$. Les $m(m-1)$ autres matrices comprennent les matrices de la forme :

$$A_j, A_j^{-1} \text{ et } M_{j \rightarrow k} \text{ avec } j \text{ et } k = 1, \dots, m \text{ et } j \neq k \neq ref \neq j.$$

3.5.2. Règles de calcul des matrices A_j, A_j^{-1} et $M_{j \rightarrow k}$ avec $j, k \neq ref$

Matrices caractéristiques	Formules de calcul
A_j	$A_{ref} * M_{j \rightarrow ref}$
A_j^{-1}	$M_{ref \rightarrow j} * A_{ref}^{-1}$
$M_{j \rightarrow k}$	$M_{ref \rightarrow k} * M_{j \rightarrow ref}$

Tableau 7.3 Détermination des matrices caractéristiques à partir de :

$$\{(A_{ref}, A_{ref}^{-1}), (M_{j \rightarrow ref}, M_{ref \rightarrow j}), (M_{k \rightarrow ref}, M_{ref \rightarrow k})\}$$

Le tableau 7.3 résume les trois règles de calcul de ces matrices caractéristiques. Ces règles sont les conséquences directes de la définition de matrice de passage. Pour cette raison, nous donnons la démonstration détaillée uniquement pour la troisième règle. Une démarche

voisine permet de démontrer les deux autres.

Démontrons que :

$$M_{j \rightarrow k} = M_{ref \rightarrow k} * M_{j \rightarrow ref} \quad (7.26)$$

En effet, par définition :

$$M_{ref \rightarrow k} = A_k^{-1} * A_{ref} \quad \text{et} \quad M_{j \rightarrow ref} = A_{ref}^{-1} * A_j$$

D'où :

$$\begin{aligned} M_{ref \rightarrow k} * M_{j \rightarrow ref} &= [A_k^{-1} * A_{ref}] * [A_{ref}^{-1} * A_j] \\ &= A_k^{-1} * [A_{ref} * A_{ref}^{-1}] * A_j \\ &= A_k^{-1} * A_j = M_{j \rightarrow k} \end{aligned} \quad \text{CQFD.}$$

3.5.3 Construction de S-D : application de la symétrie par permutation

La condition de symétrie par permutation se traduit par les relations :

$$M_{j \rightarrow k} = R * M_{j \rightarrow k} * R \quad (7.27)$$

Traduites en terme de décomposition cardinale de $M_{j \rightarrow k}$, ces conditions équivalent aux quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} m_0 &= r * m_2 * r & \Leftrightarrow & & m_2 &= r * m_0 * r \\ m_1 &= r * m_3 * r & \Leftrightarrow & & m_3 &= r * m_1 * r \end{aligned} \quad (7.28)$$

En vertu de ces relations, chaque matrice de passage $M_{j \rightarrow k}$ est entièrement déterminée, entre autres, par ses deux sous-blocs nord m_0 et m_1 . Par conséquent, on peut adopter la solution standard qui consiste à coder chacune des matrices de passage par ces derniers. Ainsi (cf. fig. 7.1), à $M_{j \rightarrow ref}$, nous associerons la représentation interne $(j \rightarrow ref m_0, j \rightarrow ref m_1)$ et à $M_{ref \rightarrow j}$, nous associerons la représentation interne $(ref \rightarrow j m_0, ref \rightarrow j m_1)$. Nous réunirons ensuite ces deux couples ordonnés de matrices dans une matrice unique de même format que $M_{j \rightarrow ref}$. Désignons la matrice ainsi obtenue par $M_{j \leftrightarrow ref}$ (cf. fig. 7.1). Ses

deux sous-blocs nord seront occupés par les sous-blocs nord de la matrice $M_{j \rightarrow ref}$. Par contre, ses deux sous-blocs sud seront occupés par les sous-blocs nord de $M_{ref \rightarrow j}$. D'une manière plus précise, les sous-blocs de $M_{j \leftrightarrow ref}$ se définissent comme suit :

$$\begin{aligned} j \leftrightarrow ref m_0 &= j \rightarrow ref m_0 & j \leftrightarrow ref m_1 &= j \rightarrow ref m_1 \\ j \leftrightarrow ref m_3 &= ref \rightarrow j m_0 & j \leftrightarrow ref m_2 &= ref \rightarrow j m_1 \end{aligned} \quad (7.29)$$

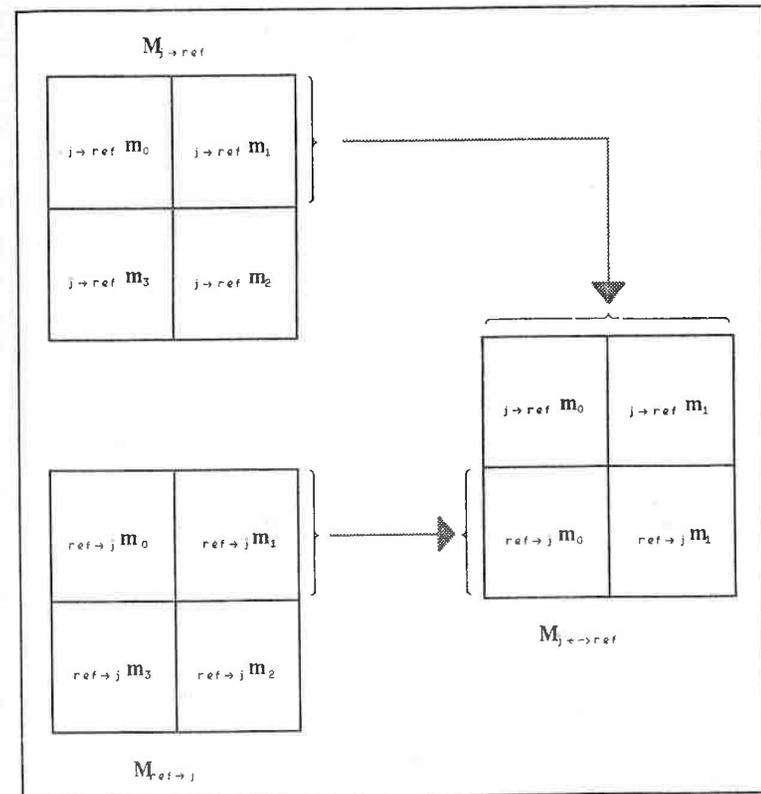


Figure 7.1 Principe de codage des $(M_{j \rightarrow ref}, M_{ref \rightarrow j})$. Les grandes flèches symbolisent l'affectation.

A un facteur entier près, la matrice $M_{j \leftrightarrow ref}$ peut être assimilée à la représentation interne du couple ordonné $(M_{j \rightarrow ref}, M_{ref \rightarrow j})$. L'ensemble des $M_{j \leftrightarrow ref}$ ainsi obtenues condense S-I dans l'espace de $m+1$ matrices seulement. Nous assimilons cet ensemble à la spécification définitive, c'est-à-dire à :

$$S-D = (A_{ref}, A_{ref}^{-1}) \cup \{M_{i \leftrightarrow ref} \mid i = 1, \dots, m \text{ et } i \neq ref\}$$

Il convient de noter le double usage que l'on peut faire des affectations (7.29) :

1. elles permettent le codage de la spécification définitive comme nous venons de le voir ;
2. elles proposent également le principe de décodage des représentations externes des $M_{j \rightarrow ref}$ et $M_{ref \rightarrow j}$ à partir de $M_{i \leftrightarrow ref}$. Au vu de la figure 7.1, cela revient à inverser le sens des grandes flèches et à appliquer ensuite les relations appropriées de (7.28) pour compléter la construction de ces matrices.

3.5.4. Codage et décodage de S-D : aspects algorithmiques

Nous proposerons dans le chapitre 3 de la partie II des algorithmes pour coder et décoder la spécification définitive S-D dans le cas d'une base de six schémas cubiques comprenant le schéma cubique de Ball, de Bernstein-Bézier, de B-spline, de Hermite, d'Overhauser et de Timmer.

Si l'on choisit comme référence pour cette base le schéma de Bernstein-Bézier, on peut ramener l'encombrement du codage de S-D à six matrices carrées de format 4×4 au lieu de sept comme le prévoit le cas général ($m = 6$). En effet, les matrices $A_{B\acute{e}}$ et $A_{B\acute{e}}^{-1}$ peuvent être déduites à partir de leurs sous-blocs ouest uniquement (cf. éq. (7.22)) car les sous-blocs nord-est sont identiquement nuls dans les deux cas. De plus, les sous-blocs nord-ouest et sud-est se déduisent l'un de l'autre par simple permutation des deux entrées de la diagonale principale et ceci pour les deux matrices. Cependant, l'exposé du chapitre 3 de la partie II ne tiendra pas compte de cette possibilité.

Il convient aussi de souligner que de tous les schémas faisant partie de cette base, seul le schéma de Hermite ne vérifie pas la propriété de symétrie par permutation. Néanmoins, une simple permutation "signée" (cf. §1.5.6.1, chap. 1 Partie II) des lignes de sa matrice de

lissage conduit à une forme modifiée vérifiant cette propriété. Nous pourrions ainsi coder et décoder le schéma de Hermite à l'aide de sa forme modifiée. Si nous avons jugé nécessaire de l'inclure, c'est pour son importance à la fois pratique et historique.

En effet, Ferguson a fondé sur ce schéma un des premiers systèmes de transcription des courbes et des surfaces [Ferguson-64] s'appuyant sur une représentation paramétrique polynomiale. Coons l'a employé également dans son procédé de définition de carreaux de surfaces (cf. Eq. A2.9 dans l'appendice 2 ajouté sur les surfaces de Coons par Forrest dans [Bézier-72, p. 232]). Depuis, le schéma de Hermite est couramment employé dans des nombreux systèmes pratiques et est souvent évoqué dans la littérature [Lee-69, p.312] [Peters-74] [Forrest-80, p.167] [Gasson-83, p.479] [Mortenson-85, p.37] [Lancaster-86] pour ne citer que ceux-ci.

Le chapitre 2 de la deuxième partie II présentera la quasi-totalité des relations entre paramètres homologues des six schémas cubiques auxquels on ajoutera le schéma modifié de Hermite. A partir de ces relations, on peut apprécier la géométrie des différents schémas représentés et retrouver également leurs interprétations géométriques habituelles.

Conclusion

L'étude de conversion de schémas permet de mettre en évidence la relation entre deux spécifications équivalentes d'un même segment de courbe. Elle embrasse également le problème de segmentation dans la mesure où celui-ci peut toujours être traduit comme un problème de conversion.

Les matrices de passage reliant un ensemble de schémas fournissent un outil commode pour les intégrer dans une même base. En particulier, la propriété de symétrie par permutation offre la possibilité de réaliser une base dont le codage réduit l'encombrement des paramètres caractéristiques et assure en même temps un décodage rapide.

+++

Conclusion de la partie I

+++

CONCLUSION DE LA PARTIE I

L'expression du théorème binomial sous formes matricielles a permis de dégager une vue homogène de la transformation de courbes paramétriques polynomiales et a fourni un ensemble d'opérateurs de base sur lesquels on peut s'appuyer pour analyser et transformer courbes et surfaces, quel que soit le schéma choisi pour exprimer leur transcription mathématique.

Ainsi, l'opérateur IG^α appliqué au polygone caractéristique P fournit d'un seul coup l'analyse géométrique complète de la courbe (représentée par P) au point paramétrique α . Et cela, quel que soit le choix de schéma. De là, il n'y a qu'un pas pour établir la trajectoire d'une machine-outil à commande numérique destinée à réaliser l'arc de courbe déterminé par le schéma. De surcroît, le calcul de IG^α se ramène essentiellement à l'algorithme de construction du triangle de Pascal suivie d'un produit de matrices.

Ensuite, les systèmes de transcription peuvent désormais s'appuyer en particulier sur l'indexage des lignes de IG^0 et de IG^1 pour déterminer rapidement les conditions géométriques aux extrémités d'un segment de courbe et, si nécessaire, en déduire de façon autonome, les conditions de raccordement à la jonction de deux segments de courbes.

Ou encore, en comparant la matrice $D(-1) * G$ au produit $A * R * A^{-1}$, on peut décider si le schéma caractérisé par la matrice de lissage A vérifie ou non la propriété de symétrie par permutation. La matrice $D(-1) * G$ fournit ainsi un test opérationnel pour cette dernière propriété. L'opérateur rsv fait de même pour la condition de Cauchy car un schéma vérifie cette condition si et seulement si $rsv(A) = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$.

Quant à la transformation de courbes, l'opérateur composite $\eta_{\alpha, \beta} = D(\beta) * G^\alpha$ modélise à la fois la segmentation, la conversion de représentation ainsi que l'évaluation de courbe (dans ce dernier cas, il suffit de poser $\beta = 1$ et de faire évoluer α à un pas constant, par exemple), quel que soit le schéma.

Ainsi donc, le développement de la première partie a posé les bases pour la réalisation de systèmes de transcription de courbes pouvant intégrer plusieurs schémas classiques pour lesquels les transformations et manipulations de base peuvent être formulées de façon

standard. Grâce aux indicateurs de géométrie, ces systèmes pourront retrouver eux-mêmes les faits géométriques intrinsèques à tout choix de schéma.

Ce dernier point nous amène à l'objectif du premier chapitre de la deuxième partie qui est de simuler la caractérisation géométrique de neuf schémas classiques à partir des indicateurs de géométrie définis dans les chapitres 2 et 5 de la première partie.

Par ailleurs, nous avons vu également que si deux schémas vérifient la propriété de symétrie par permutation, la matrice de passage qui convertit l'un vers l'autre a la propriété de symétrie centrale. Nous avons montré au chapitre 7, partie I, que l'on peut tirer avantage de cette propriété pour réaliser une base compacte de schémas symétriques par permutation codée à l'aide d'un noyau restreint de l'ensemble des matrices de passage reliant ces schémas. Le codage proposé a l'avantage d'admettre un temps de réponse rapide pour retrouver toutes les autres matrices caractéristiques associées qui ne sont pas directement codées dans la base et d'éviter l'inversion de matrice.

Dans le deuxième chapitre de la deuxième partie, on étudiera les relations explicites entre les sommets des deux polygones caractéristiques respectifs associés à un même arc de courbe par deux schémas quelconques faisant partie de la base de six schémas cubiques classiques (cf. §3, chapitre 7, partie I). On y étudiera également les relations explicites entre les fonctions de lissage respectives des deux schémas. Une telle étude permet de cerner les qualités relatives de deux représentations équivalentes d'un même arc de courbe.

Le chapitre 3 de la deuxième partie se proposera de définir les algorithmes de codage et de décodage de la base de ces six schémas cubiques classiques, avec l'analyse de complexité de chacun des algorithmes proposés.

Enfin, il convient de souligner un prolongement théorique intéressant du modèle de dérivation exposé au chapitre 5, un prolongement qui donne une interprétation plus analytique de l'opérateur G . Pour définir l'opérateur de dérivation paramétrique K , nous avons simplement annulé toutes les composantes de la matrice binomiale sauf celles de sa première sur-diagonale. En remplaçant la première sur-diagonale par la sur-diagonale de rang k , on obtient un opérateur K_k qui conduit à :

$$v_t K_k = \frac{v_t^{(k)}}{k!} \quad (A)$$

Lorsque l'on explicite cette dernière relation pour $k = 0, \dots, n$ et on additionne d'un côté les membres de gauche et, de l'autre, les membres de droite, on obtient :

$$v_t \left(\sum_{k=0}^n K_k \right) = \frac{v_t^{(0)}}{0!} + \frac{v_t^{(1)}}{1!} + \dots + \frac{v_t^{(k)}}{k!} + \dots + \frac{v_t^{(n)}}{n!} \quad (B)$$

Comme par construction :

$$\left(\sum_{k=0}^n K_k \right) = G \quad (C)$$

et comme d'après (3.23), on a $v_t G = v_{t+1}$, il s'ensuit que G agit également comme un opérateur de développement limité de Taylor pour v_{t+1} . Puisque la matrice G est de dimension $(n+1) \times (n+1)$ et v_{t+1} est de degré n , le développement est exact dans ce cas.

Cependant, en se contentant de ne retenir que les sur-diagonales depuis la diagonale principale jusqu'à celle de rang k , avec toutes les autres mises à zéro, on obtient précisément l'opérateur de développement limité de Taylor à l'ordre k pour v_{t+1} . Cela, autour de la valeur t , si $k < n$. Dans le cas contraire ($k \geq n$), l'opérateur résultant fournit le développement exact.

En ce sens, on peut dire que la matrice G simule un opérateur de développement limité de Taylor pour les fonctions polynomiales uni-variables.

PARTIE II

++++

Vers de nouvelles perspectives pratiques pour

la CFAO

++++

++++

CHAPITRE 1

++++

Analyse automatique de courbes

Simulation sur neuf schémas classiques

CHAPITRE 1

Analyse automatique de courbes

Simulation sur neuf schémas classiques

Introduction

L'étude de dérivation de schémas exposée au chapitre 5, (Partie I) a confirmé l'hypothèse selon laquelle la matrice de lissage d'un schéma contient les renseignements géométriques pertinents pour caractériser les courbes définies par le schéma. Ces renseignements sont fournis par des paramètres que nous avons appelés indicateurs de géométrie. L'objet de ce chapitre est de simuler la caractérisation automatique d'un segment de courbe défini par un schéma classique quelconque. Nous nous proposons d'effectuer cette simulation sur les huit schémas cubiques quasi classiques présentés au chapitre 1 de la partie I auxquels nous ajouterons une version modifiée du schéma de Hermite. La simulation va donc embrasser les schémas suivants :

- schéma algébrique [Timmer-80, p.25] [Lewis-81, p.361] ;
- schéma cubique de Ball [Ball-78, pp.181-182] [Bézier-77, pp.38-42] ;
- schéma cubique de Bernstein-Bézier [Newman-79] [Faux-85, pp.129-137] [Gasson-83, p.480] ;
- schéma de B-spline cubique [Catmull-78, p.351] ;
- schéma cubique de Hermite [Ball-78, p.181][Faux-85, pp. 127-129, 205-210] [Mortenson-85, pp.35-36] ;
- version modifiée de Hermite cubique (à préciser en §1.5.6.1 plus loin) ;
- schéma cubique d'Overhauser [Brewer-77, pp.132-137] [Bowyer-83, pp.80-82] ;
- schéma cubique de Taylor [Lewis-81, 361] [Davis-65, pp.28,37-38] ;
- schéma cubique de Timmer [Timmer-80, pp. 25-28].

Chaque schéma est supposé défini sur l'intervalle normalisé $[0, 1]$. La spécification de

chaque schéma comprend les quatre catégories suivantes de paramètres : ses fonctions de lissage, ses matrices caractéristiques, ses vecteurs caractéristiques et les conditions aux bornes de son arc de courbe. Une fois la matrice de lissage spécifiée, tous les paramètres caractéristiques s'en déduisent.

1.1. Fonctions de lissage

Elles sont présentées suivant les degrés croissants des monômes t^i . L'indice qui préfixe le symbole φ rappelle d'une manière évidente la désignation habituelle associée au schéma dans la littérature. A titre d'exemple, les fonctions de lissage du schéma de Bernstein-Bézier cubique sont désignées par ${}_{B\phi}\varphi_i(t)$. Dans tous les cas, les fonctions de lissage ne font pas partie de la caractérisation automatique. Nous les donnons pour être complet et pour faciliter toute vérification éventuelle des résultats par un calcul direct.

1.2. Matrices caractéristiques

Pour les besoins de la simulation, elles comprennent les matrices suivantes :

- 1 : La matrice de lissage A du schéma dont la désignation suit la même convention que les fonctions de lissage, sauf que l'indice qui rappelle la désignation habituelle postfixe le paramètre. Ainsi on écrit :

$$A_{\text{désignation}}$$

La matrice de lissage est la donnée de départ pour la simulation.

- 2 : L'inverse de la matrice de lissage : A^{-1} .
- 3 : Les matrices IG^0 et IG^1 (cf. (5.41) chap. 5 Partie I) dont la $j^{\text{ième}}$ ligne permet d'exprimer la dérivée d'ordre j respectivement en $t=0$ et $t=1$.
- 4 : La matrice $[A * R * A^{-1}]$ pour qualifier le schéma par rapport à la propriété de symétrie par permutation. On rappelle qu'un schéma vérifie la propriété de symétrie par permutation si et seulement si $A * R * A^{-1} = D(-1) * G$ (cf. Théorème 5.12, chap. 5, Partie I). Dans le cas cubique, la matrice $[D(-1) * G]$ est donnée par :

$$D(-1) * G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & -1 & -2 & -3 \\ & & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A})$$

avec :

$$D(-1) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B})$$

tandis que R est la matrice de réflexion dont les composantes sont définies par :

$$R_{i,j} = \delta_{i,j}^3 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 3$$

1.3. Vecteurs caractéristiques

Il existe deux types de vecteurs caractéristiques. Le premier type est le vecteur colonne noté $rsv(A)$. Les composantes de celui-ci sont définies par :

$$rsv(A)_i = \left(\sum_{j=0}^3 A_{i,j} \right) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 3$$

Ce vecteur est confondu avec le vecteur $(1 \ 0 \dots 0)$ lorsque le schéma vérifie la condition de Cauchy (cf. Théorème 5.11, chap. 5, Partie I), ce qui veut dire simplement que la forme de la courbe ne change pas lorsque les sommets du polygone caractéristique subissent, en bloc, une transformation linéaire.

Le deuxième type de vecteurs caractéristiques comprend les vecteurs suivants:

- $A^{(j)}(0, *)$ (cf. Théorème 5.10, chap.5, Partie I),
- $csv(A^{(j)})$ (cf. (5.38) et (5.39), chap.5, Partie I).

Ceux-ci permettent de retrouver facilement les dérivées successives ($j = 0, 1, 2, 3$) de la courbe en ses bornes. $A^{(j)}(0, *)$ et $csv(A^{(j)})$ sont respectivement identiques aux $j^{\text{ième}}$ vecteurs lignes de IG^0 et IG^1 (cf. Eq. 5.44, chap. 5, part. I). Pour cette raison, il n'est plus nécessaire pour la suite de revenir explicitement aux paramètres $A^{(j)}(0, *)$ et $csv(A^{(j)})$ employés jusqu'ici à fin didactique pour faciliter le développement progressif du concept d'indicateur de géométrie.

L'analyse d'une courbe à la valeur paramétrique α se fera désormais à l'aide de l'opérateur IG^α en tirant avantage de l'interprétation géométrique de l'exposant de G^α : α traduit le pas de translation paramétrique.

1.4. Conditions aux bornes de la courbe

Elles donnent les expressions explicites des $C^{(j)}(0)$ et des $C^{(j)}(1)$, avec $j = 0, \dots, 3$:

$$C^{(j)}(0) = IG^0(j, *) \cdot P \quad [\text{cf. Eq. (5.44) chap. 5 Partie I}]$$

$$C^{(j)}(1) = IG^1(j, *) \cdot P \quad [\text{cf. Eq. (5.44) chap. 5 Partie I}]$$

Ces expressions donnent les dérivées successives de la courbe en ses bornes. Elles facilitent le calcul des conditions de raccordement des courbes composites.

Bien que les simulations proposées ne portent que sur des schémas cubiques, la démarche se généralise aisément à un schéma de degré quelconque.

1.5. Simulations

En nous appuyant sur les paramètres caractéristiques étudiés ci-dessus, présentons maintenant l'analyse de chacun des schémas énumérés ci-dessus. Nous procédons schéma par schéma.

1.5.1. Schéma algébrique (A1)

Fonctions de lissage

$${}_{A1}\psi_0(t) = 1$$

$${}_{A1}\psi_1(t) = t$$

$${}_{A1}\psi_2(t) = t^2$$

$${}_{A1}\psi_3(t) = t^3$$

Matrice de lissage

$$A_{A1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse de la matrice de lissage

$$A_{A1}^{-1} = A_{A1}$$

Matrices $[G * A_{A1}]$ et $[A_{A1} * R * A_{A1}^{-1}]$

$$G * A_{A1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{A1} * R * A_{A1}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & / \\ & & & / \\ & & & / \\ 1 & & & / \end{bmatrix}$$

De toute évidence, $G * A_{A_1} = G$. Puisque $IG^1 = \text{diag}(1 \ 1 \ 2 \ 6) * G * A_{A_1}$, on obtient :

$${}_{A_1}IG^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 2 & 6 \\ \mathbf{0} & & & 6 \end{bmatrix}$$

D'autre part, $A_{A_1} = I$, $IG^0 = \text{diag}(1 \ 1 \ 2 \ 6)$. Par conséquent :

$${}_{A_1}IG^0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ \mathbf{0} & & & 6 \end{bmatrix}$$

Il convient de remarquer que $A_{A_1} * R * A_{A_1}^{-1} = R$.

Symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$

Etant donné que $A_{A_1} * R * A_{A_1}^{-1} \neq D(-1) * G$ (cf. (A), §1.2 ci-dessus), on voit que le schéma algébrique ne vérifie pas cette propriété.

Condition de Cauchy

La somme des composantes de vecteurs lignes de A_{A_1} donne le vecteur caractéristique :

$$\text{rsv}(A_{A_1}) = {}^t(1 \ 1 \ 1 \ 1) \neq {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

La forme de la courbe est donc sensible aux transformations linéaires du polygone caractéristique.

Conditions aux bornes de la courbe

En $t = 0$, il suffit de multiplier ${}_{A_1}IG^0$ par P pour obtenir :

$$C(0) = P_0$$

$$C^{(1)}(0) = P_1$$

$$C^{(2)}(0) = 2P_2$$

$$C^{(3)}(0) = 6P_3$$

En $t = 1$, il suffit de multiplier ${}_{A_1}IG^1$ par P pour obtenir :

$$C(1) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$$

$$C^{(1)}(1) = P_1 + 2P_2 + 3P_3$$

$$C^{(2)}(1) = 2P_2 + 6P_3$$

$$C^{(3)}(1) = 6P_3$$

1.5.2. Schéma de Ball cubique (Ba)

Fonctions de lissage

$${}_{Ba}\varphi_0(t) = 1 - 2t + t^2$$

$${}_{Ba}\varphi_1(t) = 2t - 4t^2 + 2t^3$$

$${}_{Ba}\varphi_2(t) = 2t^2 - 2t^3$$

$${}_{Ba}\varphi_3(t) = t^2$$

Matrice de lissage et son inverse

$$A_{Ba} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{Ba}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices $[G * A_{Ba}]$ et $[A_{Ba} * R * A_{Ba}^{-1}]$

$$G * A_{Ba} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{Ba} * R * A_{Ba}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \\ & & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{bmatrix}$$

En prémultipliant A_{Ba} et $G * A_{Ba}$ par $\text{diag}(0 \ 1 \ 2 \ 6)$, on obtient respectivement :

$${}_{Ba}IG^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

et :

$${}_{Ba}IG^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -8 & 2 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

Symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$

Etant donné que $A_{Bo} * R * A_{Bo}^{-1} = D(-1) * G$ (cf. (A), §1.2 ci-dessus), on voit que le schéma de Ball cubique vérifie cette propriété.

Condition de Cauchy

La somme des composantes de vecteurs lignes de A_{Bo} donne le vecteur caractéristique :

$$\text{rsv}(A_{Bo}) = {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

La forme de la courbe du schéma de Ball cubique est invariante par rapport aux

transformations linéaires du polygone caractéristique.

Conditions aux bornes de la courbe

En $t = 0$: il suffit de multiplier ${}_{Ba}IG^0$ par P pour obtenir :

$$C(0) = P_0$$

$$C^{(1)}(0) = 2(P_1 - P_0)$$

$$C^{(2)}(0) = 2(P_0 - 4P_1 + 2P_2 + P_3)$$

$$C^{(3)}(0) = 12(P_1 - P_2)$$

En $t = 1$: il suffit de multiplier ${}_{Ba}IG^1$ par P pour obtenir :

$$C(1) = P_3$$

$$C^{(1)}(1) = 2(P_3 - P_2)$$

$$C^{(2)}(1) = 2(P_0 + 2P_1 - 4P_2 + P_3)$$

$$C^{(3)}(1) = 12(P_1 - P_2)$$

1.5.3. Schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)

Fonctions de lissage

$${}_{Bé}\psi_0(t) = (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$$

$${}_{Bé}\psi_1(t) = 3t(1-t)^2 = 3t - 6t^2 + 3t^3$$

$${}_{Bé}\psi_2(t) = 3t^2(1-t) = 3t^2 - 3t^3$$

$${}_{Bé}\psi_3(t) = t^3$$

Matrice de lissage et son inverse

$$A_{Bé} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{Bé}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices $[G * A_{B\acute{e}}]$ et $[A_{B\acute{e}} * R * A_{B\acute{e}}^{-1}]$

$$G * A_{B\acute{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{B\acute{e}} * R * A_{B\acute{e}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \\ & & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{bmatrix}$$

En prémultipliant $A_{B\acute{e}}$ et $G * A_{B\acute{e}}$ par $\text{diag}(0 \ 1 \ 2 \ 6)$, on obtient respectivement :

$${}_{B\acute{e}}IG^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & -12 & 6 & 0 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

et :

$${}_{B\acute{e}}IG^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

Symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$

Etant donné que $A_{B\acute{e}} * R * A_{B\acute{e}}^{-1} = D(-1) * G$ (cf. (A), §1.2 ci-dessus), on voit que le schéma de Bernstein-Bézier cubique vérifie cette propriété.

Condition de Cauchy

La somme des composantes de vecteurs lignes de $A_{B\acute{e}}$ donne le vecteur caractéristique :

$$\text{rsv}(A_{B\acute{e}}) = {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

La forme de la courbe du schéma de Bernstein-Bézier cubique est invariante par rapport aux transformations linéaires du polygone caractéristique.

Conditions aux bornes de la courbe

En $t = 0$: il suffit de multiplier ${}_{B\acute{e}}IG^0$ par P pour obtenir :

$$C(0) = P_0$$

$$C^{(1)}(0) = 3(P_1 - P_0)$$

$$C^{(2)}(0) = 6(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

$$C^{(3)}(0) = 6(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

En $t = 1$: il suffit de multiplier ${}_{B\acute{e}}IG^1$ par P pour obtenir :

$$C(1) = P_3$$

$$C^{(1)}(1) = 3(P_3 - P_2)$$

$$C^{(2)}(1) = 6(P_1 - 2P_2 + P_3)$$

$$C^{(3)}(1) = 6(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

1.5.4. Schéma de B-spline cubique (Bs)

Fonctions de lissage

$${}_{Bs}\varphi_0(t) = 1/6(1 - 3t + 3t^2 - t^3)$$

$${}_{Bs}\varphi_1(t) = 1/6(4 - 6t^2 + 3t^3)$$

$${}_{Bs}\varphi_2(t) = 1/6(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3)$$

$${}_{Bs}\varphi_3(t) = 1/6t^3$$

Matrice de lissage et son inverse

$$A_{Bs} = 1/6 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{Bs}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 2/3 & 0 \\ 1 & 2 & 11/3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrices $[G * A_{Bs}]$ et $[A_{Bs} * R * A_{Bs}^{-1}]$

$$G * A_{Bs} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \quad A_{Bs} * R * A_{Bs}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \\ & 1 & 3 & \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{bmatrix}$$

En prémultipliant A_{Bs} et $G * A_{Bs}$ par $\text{diag}(0 \ 1 \ 2 \ 6)$, on obtient respectivement :

$${}_{Bs}IG^0 = 1/6 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

et :

$${}_{Bs}IG^1 = 1/6 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

Symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$

Etant donné que $A_{Bs} * R * A_{Bs}^{-1} = D(-1) * G$ (cf. (A), §1.2 ci-dessus), on voit que le schéma de B-spline cubique vérifie cette propriété.

Condition de Cauchy

La somme des composantes de vecteurs lignes de A_{Bs} donne le vecteur caractéristique :

$$\text{rsv}(A_{Bs}) = {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

La forme de la courbe du schéma de B-spline cubique est invariante par rapport aux transformations linéaires du polygone caractéristique.

Conditions aux bornes de la courbe

En $t = 0$: il suffit de multiplier ${}_{Bs}IG^0$ par P pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(0) &= 1/6(P_0 + 4P_1 + P_2) \\ C^{(1)}(0) &= 1/2(P_2 - P_0) \\ C^{(2)}(0) &= (P_0 - 2P_1 + P_2) \\ C^{(3)}(0) &= (-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) \end{aligned}$$

En $t = 1$: il suffit de multiplier ${}_{Bs}IG^1$ par P pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(1) &= 1/6(P_1 + 4P_2 + P_3) \\ C^{(1)}(1) &= 1/2(P_3 - P_1) \\ C^{(2)}(1) &= (P_1 - 2P_2 + P_3) \\ C^{(3)}(1) &= (-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) \end{aligned}$$

1.5.5. Schéma de Hermite cubique (He)

Fonctions de lissage [modèle dit "de Faux et Pratt" [Gasson-83, p.480]]

$$\begin{aligned} {}_{He}\varphi_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ {}_{He}\varphi_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ {}_{He}\varphi_2(t) &= t - 2t^2 + t^3 \\ {}_{He}\varphi_3(t) &= -t^2 + t^3 \end{aligned} \quad (C)$$

Matrice de lissage et son inverse

$$A_{He} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{He}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrices $[G * A]$ et $[A_{He} * R * A_{He}^{-1}]$

$$G * A_{He} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{He} * R * A_{He}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -8 & -11 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

En prémultipliant A et $G * A$ par $\text{diag}(0 \ 1 \ 2 \ 6)$, on obtient respectivement :

$${}_{He}IG^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & -4 & -2 \\ 12 & -12 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

et :

$${}_{He}IG^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 2 & 4 \\ 12 & -12 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$

Etant donné que $A_{He} * R * A_{He}^{-1} \neq D(-1) * G$ (cf. (A), §1.2 ci-dessus), on voit que le schéma de Hermite cubique ne vérifie pas cette propriété.

Condition de Cauchy

La somme des composantes de vecteurs lignes de A_{He} donne le vecteur caractéristique :

$$\text{rsv}(A_{He}) = {}^t(1 \ 1 \ -3 \ 2) \neq {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

La forme de la courbe est donc sensible aux transformations linéaires du polygone caractéristique.

Conditions aux bornes de la courbe

En $t = 0$: il suffit de multiplier ${}_{He}IG^0$ par P pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(0) &= P_0 \\ C^{(1)}(0) &= P_2 \\ C^{(2)}(0) &= 2(-3P_0 + 3P_1 - 2P_2 - P_3) \\ C^{(3)}(0) &= 6(2P_0 - 2P_1 + P_2 + P_3) \end{aligned}$$

En $t = 1$: il suffit de multiplier ${}_{He}IG^1$ par P pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(1) &= P_1 \\ C^{(1)}(1) &= P_3 \\ C^{(2)}(1) &= 2(3P_0 - 3P_1 + P_2 + 2P_3) \\ C^{(3)}(1) &= 6(2P_0 - 2P_1 + P_2 + P_3) \end{aligned}$$

1.5.6. Schéma modifié de Hermite cubique (mHe)

1.5.6.1 Préliminaire

Il existe, dans la littérature, plusieurs spécifications pour le schéma de Hermite cubique : [Peters-74, p.263] [Faux-85, p.127] [Lewis-81, p.361] [Foley-82, p.517] [Gasson-83, p.480]. Les différentes spécifications s'appuient sur un même ensemble de fonctions de lissage mais présentées dans un ordre différent. Aussi, l'interprétation géométrique attribuée aux sommets du polygone caractéristique varie-t-elle selon le modèle considéré [Forrest-80, p.165].

Gasson dans [Gasson-83, p.480] a notamment relevé les deux modèles suivants :

- le modèle dit "de Sabin",
- le modèle dit "de Faux et Pratt".

Nous prenons comme modèle standard le modèle dit "de Faux et Pratt", ceci pour nous donner un point de repère, mais aussi pour des raisons de familiarité. En effet, c'est ce modèle que nous avons utilisé tout au long de cette étude pour vérifier nos hypothèses et nos résultats théoriques.

Les fonctions de lissage du modèle classique de Hermite cubique sont donc celles indiquées en (C) ci-dessus. En remplaçant t par $1-t$ dans ces expressions, on obtient les relations caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} {}_{H_e}\psi_0(1-t) &= {}_{H_e}\psi_1(t) \\ {}_{H_e}\psi_1(1-t) &= {}_{H_e}\psi_0(t) \\ {}_{H_e}\psi_2(1-t) &= - {}_{H_e}\psi_3(t) \\ {}_{H_e}\psi_3(1-t) &= - {}_{H_e}\psi_2(t) \end{aligned} \quad (D)$$

Exprimons-les sous une forme plus condensée comme suit :

$${}_{H_e}\Phi(1-t) = {}_{H_e}\Phi(t)\tau \quad (E)$$

où τ est la matrice suivante :

$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Revenons à l'interprétation matricielle de ${}_{H_e}\Phi(t)$ dans les deux membres de (E) ci-dessus :

$$v_{1-t} A_{H_e} = v_t A_{H_e} * \tau \quad (F)$$

Et comme $v_{1-t} = v_t D(-1) * G$, il s'ensuit que :

$$v_t D(-1) * G * A_{H_e} = v_t A_{H_e} * \tau$$

D'où la caractérisation spécifique suivante du modèle de Faux et Pratt :

$$A_{H_e} * \tau * A_{H_e}^{-1} = D(-1) * G \quad (G)$$

Au vu des relations (D) (ou de la matrice τ) ci-dessus, lorsque l'on remplace t par $1-t$, afin de conserver la forme de la courbe, il faut, d'une part, permuter les deux sommets P_0 et P_1 du polygone caractéristique, et de l'autre, remplacer P_2 par $-P_3$ et $-P_2$ par P_3 . Autrement dit, le modèle de Faux et Pratt est *symétrique* par permutation par rapport à t et $1-t$ pour les deux premiers sommets et *anti-symétrique* pour les deux derniers. En termes de conditions aux bornes, cela revient à permuter l'origine de la courbe avec son point terminal, à inverser le sens des tangentes aux bornes pour les permuter ensuite.

Partant du modèle (C) ci-dessus, on définit les fonctions de lissage du schéma modifié comme suit :

$$\begin{aligned} {}_{mH_e}\psi_0(t) &= - {}_{H_e}\psi_2(t) \\ {}_{mH_e}\psi_1(t) &= {}_{H_e}\psi_1(t) \\ {}_{mH_e}\psi_2(t) &= {}_{H_e}\psi_0(t) \\ {}_{mH_e}\psi_3(t) &= {}_{H_e}\psi_3(t) \end{aligned} \quad (H)$$

Par construction, les ${}_{mH_e}\psi_i(t)$ vérifient les relations suivantes :

$${}_{mH_e}\psi_i(t) = {}_{mH_e}\psi_{3-i}(1-t) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, 3 \quad (J)$$

Au sens de la Définition 5.1 du chapitre 5, Partie 1, le schéma correspondant vérifie la propriété de symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$.

Les relations (H) peuvent s'écrire aussi comme suit :

$${}_{mH_e}\Phi(t) = {}_{H_e}\Phi(t) T \quad (K)$$

où la matrice T se définit par :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme T se décompose de la façon suivante :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nous dirons que c'est une matrice de permutation "signée". Exprimée en fonction des matrices de lissage, la relation (K) prend la forme matricielle suivante :

$$A_{mHe} = A_{He} * T \quad (L)$$

tandis qu'en vertu du Théorème 5.12, chapitre 5, Partie I, les relations (J) se traduisent par :

$$A_{mHe} * R * A_{mHe}^{-1} = D(-1) * G \quad (M)$$

Remarques :

- Il convient de noter, à propos de (L), que la matrice T et son inverse permettent la conversion entre le modèle de Faux et Pratt et le modèle modifié. En incorporant le schéma modifié dans une base des schémas ayant la propriété de symétrie par permutation au sens de la Définition 5.1, chapitre 5, Partie I, on peut donc retrouver facilement le modèle de Faux et Pratt du schéma de Hermite cubique. Ce fait sera utilisé dans le chapitre 3 de la Partie II.
- On vérifie par un calcul direct que les matrices R , T et τ sont liées par la relation suivante :

$$T * \tau * T^{-1} = -R \quad (N)$$

1.5.6.2 Analyse du schéma modifié de Hermite cubique

Donnons maintenant la spécification explicite du schéma modifié de Hermite cubique suivant la même démarche que pour les autres schémas.

Fonctions de lissage

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= -t + 2t^2 - t^3 \\ \varphi_1(t) &= 3t^2 - 2t^3 \\ \varphi_2(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ \varphi_3(t) &= -t^2 + t^3 \end{aligned}$$

Matrice de lissage et son inverse

$$A_{mHe} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{mHe}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrices $[G * A_{mHe}]$ et $[A_{mHe} * R * A_{mHe}^{-1}]$

$$G * A_{mHe} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{mHe} * R * A_{mHe}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \\ & 1 & 3 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}$$

En prémultipliant A_{mHe} et $G * A_{mHe}$ par $\text{diag}(0 \ 1 \ 2 \ 6)$, on obtient respectivement :

$${}_{mHe}IG^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & -6 & -2 \\ -6 & -12 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

et :

$${}_{mHc} \mathbf{I}G^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & 6 & 4 \\ -6 & -12 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$

Etant donné que $A_{mHc} * R * A_{mHc}^{-1} = D(-1) * G$ (cf. (A), §1.2 ci-dessus), on voit que le schéma modifié de Hermite cubique vérifie cette propriété.

Condition de Cauchy

La somme des composantes de vecteurs lignes de A_{mHc} donne le vecteur caractéristique :

$$rsv(A_{mHc}) = {}^t(1 \ -1 \ 1 \ 0) \neq {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

La forme de la courbe du schéma modifié de Hermite cubique est sensible aux transformations linéaires du polygone caractéristique.

Conditions aux bornes de la courbe

En $t = 0$: il suffit de multiplier ${}_{mHc} \mathbf{I}G^0$ par P pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(0) &= P_2 \\ C^{(1)}(0) &= -P_0 \\ C^{(2)}(0) &= 2(2P_0 + 3P_1 - 3P_2 - P_3) \\ C^{(3)}(0) &= 6(-P_0 - 2P_1 + 2P_2 + P_3) \end{aligned}$$

En $t = 1$: il suffit de multiplier ${}_{mHc} \mathbf{I}G^1$ par P pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(1) &= P_1 \\ C^{(1)}(1) &= P_3 \\ C^{(2)}(1) &= 2(-P_0 - 3P_1 + 3P_2 + 2P_3) \end{aligned}$$

$$C^{(3)}(1) = 6(-P_0 - 2P_1 + 2P_2 + P_3)$$

1.5.7. Schéma cubique d'Overhauser (Ov)

Fonctions de lissage

$$\begin{aligned} {}_{Ov} \varphi_0(t) &= -1/2t + t^2 - 1/2t^3 \\ {}_{Ov} \varphi_1(t) &= 1 - 5/2t^2 + 3/2t^3 \\ {}_{Ov} \varphi_2(t) &= 1/2t + 2t^2 - 3/2t^3 \\ {}_{Ov} \varphi_3(t) &= -1/2t^2 + 1/2t^3 \end{aligned}$$

Matrice de lissage et son inverse

$$A_{Ov} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad A_{Ov}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrices $[G * A_{Ov}]$ et $[A_{Ov} * R * A_{Ov}^{-1}]$

$$G * A_{Ov} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 2 & -5/2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad A_{Ov} * R * A_{Ov}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \\ & & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{bmatrix}$$

En prémultipliant A_{Ov} et $G * A_{Ov}$ par $\text{diag}(0 \ 1 \ 2 \ 6)$, on obtient respectivement :

$${}_{Ov} \mathbf{I}G^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -3 & 9 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

et :

$${}_{O_V}IG^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

Symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$

Etant donné que $A_{O_V} * R * A_{O_V}^{-1} = D(-1) * G$ (cf. (A), §1.2 ci-dessus), on voit que le schéma cubique d'Overhauser vérifie cette propriété.

Condition de Cauchy

La somme des composantes de vecteurs lignes de A_{O_V} donne le vecteur caractéristique :

$$rsv(A_{O_V}) = {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

La forme de la courbe du schéma cubique d'Overhauser est invariante par rapport aux transformations linéaires du polygone caractéristique.

Conditions aux bornes de la courbe

En $t = 0$: il suffit de multiplier ${}_{O_V}IG^0$ par P pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(0) &= P_1 \\ C^{(1)}(0) &= 1/2(P_2 - P_0) \\ C^{(2)}(0) &= (2P_0 - 5P_1 + 4P_2 - P_3) \\ C^{(3)}(0) &= 3(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) \end{aligned}$$

En $t = 1$: il suffit de multiplier ${}_{O_V}IG^1$ par P pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(1) &= P_2 \\ C^{(1)}(1) &= 1/2(P_3 - P_1) \\ C^{(2)}(1) &= (-P_0 + 4P_1 - 5P_2 + 2P_3) \\ C^{(3)}(1) &= 3(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3) \end{aligned}$$

1.5.8. Schéma de Taylor cubique (Tay)

Fonctions de lissage

$$\begin{aligned} \tau_{\text{Tay}}\psi_0(t) &= 1 \\ \tau_{\text{Tay}}\psi_1(t) &= t \\ \tau_{\text{Tay}}\psi_2(t) &= 1/2t^2 \\ \tau_{\text{Tay}}\psi_3(t) &= 1/6t^3 \end{aligned}$$

Matrice de lissage et son inverse

$$A_{\text{Tay}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 1/6 \end{bmatrix} \quad A_{\text{Tay}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 6 \end{bmatrix}$$

Matrices $[G * A_{\text{Tay}}]$ et $[A_{\text{Tay}} * R * A_{\text{Tay}}^{-1}]$

$$G * A_{\text{Tay}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ & 1 & 1 & 1/2 \\ & & 1/2 & 1/2 \\ \mathbf{0} & & & 1/6 \end{bmatrix} \quad A_{\text{Tay}} * R * A_{\text{Tay}}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & 6 \\ & & & 2 \\ & & 1/2 & \\ 1/6 & & & \end{bmatrix}$$

En prémultipliant A_{Tay} et $G * A_{\text{Tay}}$ par $\text{diag}(0 \ 1 \ 2 \ 6)$, on obtient respectivement :

$${}_{\text{Tay}}IG^0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \emptyset \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix}$$

et :

$${}_{\text{Tay}} \mathbf{IG}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ & 1 & 1 & 1/2 \\ & & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$

Etant donné que $\mathbf{A}_{\text{Tay}} * \mathbf{R} * \mathbf{A}_{\text{Tay}}^{-1} \neq \mathbf{D}(-1) * \mathbf{G}$ (cf. (A), §1.2 ci-dessus), on voit que le schéma de Taylor cubique ne vérifie pas cette propriété.

Condition de Cauchy

La somme des composantes de vecteurs lignes de \mathbf{A}_{Tay} donne le vecteur caractéristique :

$$\text{rsv}(\mathbf{A}_{\text{Tay}}) = {}^t(1 \ 1 \ 1/2 \ 1/6) \neq {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

La forme de la courbe est donc sensible aux transformations linéaires du polygone caractéristique.

Conditions aux bornes de courbes canoniques

En $t = 0$: il suffit de multiplier ${}_{\text{Tay}} \mathbf{IG}^0$ par \mathbf{P} pour obtenir :

$$\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0$$

$$\mathbf{C}^{(1)}(0) = \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{C}^{(2)}(0) = \mathbf{P}_2$$

$$\mathbf{C}^{(3)}(0) = \mathbf{P}_3$$

En $t = 1$: il suffit de multiplier ${}_{\text{Tay}} \mathbf{IG}^1$ par \mathbf{P} pour obtenir :

$$\mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + 1/2\mathbf{P}_2 + 1/6\mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{C}^{(1)}(1) = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + 1/2\mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{C}^{(2)}(1) = \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$$

$$\mathbf{C}^{(3)}(1) = \mathbf{P}_3$$

1.5.9. Schéma de Timmer cubique (Tim)

Fonctions de lissage

$$\tau_{\text{Tim}} \rho_0(t) = 1 - 4t + 5t^2 - 2t^3$$

$$\tau_{\text{Tim}} \rho_1(t) = 4t - 8t^2 + 4t^3$$

$$\tau_{\text{Tim}} \rho_2(t) = 4t^2 - 4t^3$$

$$\tau_{\text{Tim}} \rho_3(t) = -t^2 + 2t^3$$

Matrice de lissage et son inverse

$$\mathbf{A}_{\text{Tim}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\text{Tim}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices $[\mathbf{G} * \mathbf{A}_{\text{Tim}}]$ et $[\mathbf{A}_{\text{Tim}} * \mathbf{R} * \mathbf{A}_{\text{Tim}}^{-1}]$

$$\mathbf{G} * \mathbf{A}_{\text{Tim}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -8 & 5 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\text{Tim}} * \mathbf{R} * \mathbf{A}_{\text{Tim}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \\ & 1 & 3 & \\ \mathbf{0} & & & -1 \end{bmatrix}$$

En prémultipliant \mathbf{A}_{Tim} et $\mathbf{G} * \mathbf{A}_{\text{Tim}}$ par $\text{diag}(0 \ 1 \ 2 \ 6)$, on obtient respectivement :

$${}_{\text{Tim}} \mathbf{IG}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 10 & -16 & 8 & -2 \\ -12 & 24 & -24 & 12 \end{bmatrix}$$

et :

$${}_{\text{Tim}} \mathbf{IG}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ -2 & 8 & -16 & 10 \\ -12 & 24 & -24 & 12 \end{bmatrix}$$

Symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$

Etant donné que $A_{\text{Tim}} * R * A_{\text{Tim}}^{-1} = D(-1) * G$ (cf. (A), §1.2 ci-dessus), on voit que le schéma cubique de Timmer vérifie cette propriété.

Condition de Cauchy

La somme des composantes de vecteurs lignes de A_{Tim} donne le vecteur caractéristique :

$$\text{rsv}(A_{\text{Tim}}) = {}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

La forme de la courbe du schéma de Timmer cubique est invariante par rapport aux transformations linéaires du polygone caractéristique.

Conditions aux bornes de la courbe

En $t = 0$: il suffit de multiplier ${}_{\text{Tim}} \mathbf{IG}^0$ par \mathbf{P} pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(0) &= P_0 \\ C^{(1)}(0) &= 4(P_1 - P_0) \\ C^{(2)}(0) &= 2(5P_0 - 8P_1 + 4P_2 - P_3) \\ C^{(3)}(0) &= 12(-P_0 + 2P_1 - 2P_2 + P_3) \end{aligned}$$

En $t = 1$: il suffit de multiplier ${}_{\text{Tim}} \mathbf{IG}^1$ par \mathbf{P} pour obtenir :

$$\begin{aligned} C(1) &= P_3 \\ C^{(1)}(1) &= 4(P_3 - P_2) \\ C^{(2)}(1) &= 2(-P_0 + 4P_1 - 8P_2 + 5P_3) \\ C^{(3)}(1) &= 12(-P_0 + 2P_1 - 2P_2 + P_3) \end{aligned}$$

Discussion

Les simulations précédentes montrent que, muni de l'opérateur \mathbf{IG}^α avec $\alpha \in \{0, 1\}$, il est mathématiquement possible qu'un système automatique puisse caractériser la géométrie d'une courbe canonique en ses bornes, quel que soit le schéma considéré. Au vu de l'équation (5.42), on peut aller plus loin car en laissant le paramètre α prendre une valeur quelconque dans l'intervalle normalisé, on obtient l'analyse locale de la courbe au point $C(\alpha)$. Nous illustrerons ce dernier point, dans la suite, dans le cas de trois schémas cubiques avec l'étude de leurs courbes canoniques respectives au point caractéristique $C(1/2)$. On sait que ce point, appelé "shoulder point" en anglais, se trouve toujours dans le plan médian défini par l'ensemble de couples de points déterminés par les deux vecteurs tangentes $C^{(1)}(0)$ et $C^{(1)}(1)$ [Boehm-82, p.214]. Comme l'a souligné Boehm, ce point permet de contrôler et corriger la forme de courbes cubiques.

D'autre part, le vecteur caractéristique $\text{rsv}(A)$ permet d'identifier les schémas dont les courbes canoniques sont invariantes par rapport aux transformations linéaires des sommets du polygone caractéristique tandis que la relation matricielle $A * R * A^{-1} = D(-1) * G$ permet d'identifier les schémas ayant la propriété de symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$.

1.6. Interprétations géométriques classiques des schémas étudiés

Nous résumons dans le tableau A les principaux traits de chacun des neuf schémas étudiés notamment par rapport à la propriété de symétrie par permutation, à la condition de Cauchy et à l'expression des $C^{(i)}(i)$ pour i et $j \in \{0, 1\}$.

Ce tableau est intéressant à plus d'un titre. Premièrement, il permet de retrouver facilement l'interprétation géométrique immédiate à attribuer aux sommets du polygone caractéristique. En effet, les quatre contraintes géométriques $C^{(i)}(i)$ avec i et $j \in \{0, 1\}$ suffisent pour spécifier une courbe cubique. Ce problème revient simplement à trouver les quatre P_i qui répondent à ces contraintes, en résolvant un système linéaire obtenu en égalant respectivement à $C(0)$, $C(1)$, $C^{(1)}(0)$ et à $C^{(1)}(1)$ à l'expression correspondante de la quatrième, cinquième, sixième et septième colonne du tableau pour le schéma considéré.

Tableau A : Traits fondamentaux des neuf schémas paramétriques.

Symétrie	Cauchy	$C(0)$	$C(1)$	$C^{(1)}(0)$	$C^{(1)}(1)$	
Al	non	non	P_0	$\sum_{i=0}^3 P_i$	P_1	$\sum_{i=0}^3 i \cdot P_i$
Ba	oui	oui	P_0	P_3	$2(P_1 - P_0)$	$2(P_3 - P_2)$
Bé	oui	oui	P_0	P_3	$3(P_1 - P_0)$	$3(P_3 - P_2)$
Bs	oui	oui	$1/6(P_0 + 4P_1 + P_2)$	$1/6(P_1 + 4P_2 + P_3)$	$1/2(P_1 - P_0)$	$1/2(P_3 - P_2)$
He	non	non	P_0	P_1	P_2	P_3
mHe	oui	non	P_2	P_1	$-P_0$	P_3
Ov	oui	oui	P_1	P_2	$1/2(P_2 - P_0)$	$1/2(P_3 - P_1)$
Tay	non	non	P_0	$\sum_{i=0}^3 (1/i!) P_i$	P_1	$\sum_{i=1}^3 (1/(i-1)!) P_i$
Tim	oui	oui	P_0	P_3	$4(P_1 - P_0)$	$4(P_3 - P_2)$

Considérons à titre d'exemple le schéma cubique de Bernstein-Bézier. Pour retrouver l'interprétation géométrique de ce schéma, il suffit de poser et résoudre pour $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} P_0 &= C(0) \\ P_3 &= C(1) \\ 3(P_1 - P_0) &= C^{(1)}(0) \\ 3(P_3 - P_2) &= C^{(1)}(1) \end{aligned}$$

Ainsi, après calcul, on obtient :

$$P = (C(0), C(0) + 1/3C^{(1)}(0), C(1) - 1/3C^{(1)}(1), C(1))$$

La signification géométrique des sommets successifs du polygone caractéristique est évidente.

Par un procédé analogue, on retrouve facilement l'interprétation géométrique usuelle de chacun des huit autres schémas, le système linéaire analogue étant obtenu simplement à partir de ce tableau.

Le second intérêt de ce tableau est qu'il permet de relever les traits qui rapprochent les différents schémas. Ainsi, par exemple, on voit que le schéma de Ball, de Bernstein-Bézier et de Timmer se ressemblent étroitement sur les points suivants :

1. les trois vérifient la propriété de symétrie par permutation par rapport à t et à $1-t$;
2. la forme de leurs courbes canoniques est invariante par rapport aux transformations linéaires des sommets de leurs polygones caractéristiques ;
3. dans les trois cas, la courbe commence au premier sommet du polygone caractéristique et se termine au dernier :

$$C(0) = P_0 \quad \text{et} \quad C(1) = P_3$$

4. dans chaque cas, la courbe est tangente au premier et au dernier côté du polygone caractéristique :

$$C^{(1)}(0) = \mu(P_1 - P_0) \quad \text{et} \quad C^{(1)}(1) = \mu(P_3 - P_2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu = 2 & \quad \text{pour Ball,} \\ \mu = 3 & \quad \text{pour Bernstein-Bézier et} \\ \mu = 4 & \quad \text{pour Timmer.} \end{aligned}$$

L'analyse des courbes canoniques en $t = 1/2$ met d'avantage en évidence la ressemblance entre ces trois schémas, comme le montre le tableau B ci-dessous.

Tableau B : Analyse comparée des schémas de Ball (Ba), de Bernstein-Bézier (Bé) et de Timmer (Tim) en $t = 1/2$.

Schéma	$C^{(0)}(1/2)$	$C^{(1)}(1/2)$	$C^{(2)}(1/2)$	$C^{(3)}(1/2)$
Ba	$1/4(P_0 + P_3) + 1/4(P_1 + P_2)$	$(P_3 - P_0) + 5/4(P_2 - P_1)$	$2(P_0 - P_1 - P_2 + P_3)$	$12(P_1 - P_2)$
Bé	$1/8(P_0 + P_3) + 3/8(P_1 + P_2)$	$3/8(P_3 - P_0) + 15/8(P_2 - P_1)$	$3(P_0 - P_1 - P_2 + P_3)$	$6(P_3 - P_0) + 18(P_1 - P_2)$
Tim	$1/2(P_1 + P_2)$	$-1/4(P_3 - P_0) + 5/2(P_2 - P_1)$	$4(P_0 - P_1 - P_2 + P_3)$	$12(P_3 - P_0) + 24(P_1 - P_2)$

Les paramètres $C^{(j)}(1/2)$, $j = 0, 1, 2, 3$, sont calculés à l'aide de l'opérateur $IG^{1/2}$. Calculée suivant l'équation (3.17) du chapitre 3, Partie I, la matrice $G^{1/2}$ dans le cas cubique vaut :

$$G^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1 & 1 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Développons le calcul de $IG^{1/2}$ seulement dans le cas de Ball. Calculons en premier la matrice $[G^{1/2} * A_{Ba}]$:

$$G^{1/2} * A_{Ba} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1 & 1 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons :

$$G^{1/2} * A_{Ba} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & -5/4 & 5/4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ensuite, pré-multiplions $[G^{1/2} * A_{Ba}]$ par $\text{diag}(1 \ 1 \ 2 \ 6)$ pour obtenir :

$${}_{Ba}IG^{1/2} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

Explicitons enfin les $C^{(j)}(1/2)$ comme suit (en multipliant ${}_{Ba}IG^{1/2}$ par P) :

$$\begin{aligned} C^{(0)}(1/2) &= 1/4(P_0 + P_3) + 1/4(P_1 + P_2) \\ C^{(1)}(1/2) &= (P_3 - P_0) + 5/4(P_2 - P_1) \\ C^{(2)}(1/2) &= 2(P_0 - P_1 - P_2 + P_3) \\ C^{(3)}(1/2) &= 12(P_1 - P_2) \end{aligned}$$

Revenons maintenant aux trois schémas. Il ressort du tableau B une paramétrisation similaire des expressions de $C^{(j)}(1/2)$ pour ces trois schémas. On observe notamment que :

pour $j = 0$:

$$C(1/2) = \varrho_1(P_0 + P_3) + \varrho_2(P_1 + P_2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varrho_1 = \varrho_2 = 1/4 & \quad \text{pour Ball,} \\ \varrho_1 = 1/8 \text{ et } \varrho_2 = 3/8 & \quad \text{pour Bernstein-Bézier,} \end{aligned}$$

$$\varrho_1 = 0 \quad \text{et} \quad \varrho_2 = 1/2 \quad \text{pour Timmer ;}$$

pour $j = 1$:

$$C^{(1)}(1/2) = \lambda_1 (P_3 - P_0) + \lambda_2 (P_2 - P_1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 5/4 & \quad \text{pour Ball,} \\ \lambda_1 = 3/8 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 15/8 & \quad \text{pour Bernstein-Bézier,} \\ \lambda_1 = -1/4 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 5/2 & \quad \text{pour Timmer ;} \end{aligned}$$

pour $j = 2$:

$$C^{(2)}(1/2) = \mu (P_0 - P_1 - P_2 + P_3)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu = 2 & \quad \text{pour Ball,} \\ \mu = 3 & \quad \text{pour Bernstein-Bézier,} \\ \mu = 4 & \quad \text{pour Timmer ;} \end{aligned}$$

pour $j = 3$:

$$C^{(3)}(1/2) = \zeta_1 (P_3 - P_0) + \zeta_2 (P_1 - P_2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \zeta_1 = 0 \quad \text{et} \quad \zeta_2 = 12 & \quad \text{pour Ball,} \\ \zeta_1 = 6 \quad \text{et} \quad \zeta_2 = 18 & \quad \text{pour Bernstein-Bézier,} \\ \zeta_1 = 12 \quad \text{et} \quad \zeta_2 = 24 & \quad \text{pour Timmer.} \end{aligned}$$

Dans le cas de Timmer, du fait que $C(1/2) = 1/2(P_1 + P_2)$, la courbe passe par le milieu du deuxième côté du polygone caractéristique, ce qui n'est pas le cas pour les deux autres [Boëhm-82, p.204]. Puisque la courbe est aussi tangente en ses extrémités aux deux autres côtés du polygone caractéristique, elle se racolle mieux au polygone caractéristique défini par les sommets de Timmer que ceux définis par les sommets de Bernstein-Bézier et de Ball. De ce fait, le schéma de Timmer permet une esquisse plus rapide des courbes paramétriques cubiques [Timmer-80, p.26] [Boëhm-82, p.214].

Toutefois, le schéma cubique de Bernstein-Bézier est généralement préféré pour les nombreuses propriétés intéressantes que possèdent ses fonctions de lissage [idem]. Notamment parce qu'il permet de traduire avec des paramètres simples les idées du

styliste-projecteur.

Quant au schéma de Ball, il permet de tracer des coniques, i.e., des paraboles [idem]. En effet, les deux fonctions de lissage $_{\theta\theta}\varphi_1(t)$ et $_{\theta\theta}\varphi_2(t)$ sont les seules à contenir de termes cubiques qui, de plus, sont opposés. En choisissant $P_1 = P_2$ conduit par conséquent à une cubique dégénérée en conique. D'autre part, le point $s = C(1/2)$ se trouve toujours à mi-distance entre le milieu m de la corde P_0P_3 et celui du deuxième côté du polygone caractéristique. Ces trois points sont toujours colinéaires.

Nous n'avons pas la prétention d'effectuer une comparaison exhaustive des neuf schémas entre eux. L'idée ici est d'illustrer l'intérêt pratique des outils théoriques présentés dans la première partie de cette étude. Par ailleurs, exception faite aux schémas de Taylor, d'Overhauser et de Hermite modifié, on trouve dans [Boëhm-82] une étude approfondie consacré à ces schémas, avec des généralisations aux schémas rationnels.

Conclusion

Pour un schéma arbitraire $\{A, [0, 1]\}$ donné, les lignes successives des deux matrices associées :

$$IG^0 = \text{diag}(0! \ 1! \ 2! \ \dots \ n!) * A \quad \text{et} \quad IG^1 = \text{diag}(0! \ 1! \ 2! \ \dots \ n!) * G * A$$

permettent de spécifier les conditions géométriques aux extrémités de son arc de courbe.

Leur forme généralisée $IG^\alpha = \text{diag}(0! \ 1! \ 2! \ \dots \ n!) * G^\alpha * A$ permet de conduire l'analyse analogue à toute autre point paramétrique α .

La propriété de symétrie par permutation par rapport à t et $1-t$ équivaut à la relation matricielle suivante vérifiée par la matrice de lissage A :

$$A * R * A^{-1} = D(-1) * G$$

L'invariance de la forme d'une courbe canonique par rapport aux transformations linéaires des sommets de son polygone caractéristique se caractérise par la relation suivante :

$$\text{rsv}(A) = {}^t(1, 0, \dots, 0)$$

avec

$$\text{rsv}(A)_i = \left(\sum_{j=0}^n A_{i,j} \right) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n$$

Ce sont ces trois résultats théoriques, établis notamment au chapitre 5, Partie I, qui permettent la caractérisation automatique des neuf schémas étudiés, le procédé pouvant être généralisé à tout autre schéma. Le résultat ainsi obtenu peut servir d'un point de départ pour une étude comparée de schémas.

Dans une base de schémas, ces mêmes résultats permettraient également de caractériser les schémas y représentés et de déterminer les conditions de raccordement aux jonctions de courbes composites selon l'ordre de continuité souhaité.

Enfin, l'opérateur IG^{∞} permet de s'affranchir de la spécificité des schémas à analyser.

+ + + +

CHAPITRE 2

+ + + +

Relations de passage : Base de six schémas

CHAPITRE 2

Relations de passage : Base de six schémas cubiques

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les relations explicites reliant les paramètres caractéristiques (au sens du chapitre 7, partie I, §3) des schémas inclus dans la base des schémas cubiques proposée au chapitre 7, partie I. Les deux relations suivantes de passage président à leur calcul :

$$P_n(i) = M_{g \rightarrow n}(i, *) P_g \quad i = 0, 1, \dots, 3$$

$${}_g\psi_j(t) = {}_n\Phi(t) M_{g \rightarrow n}(*, j) \quad j = 0, 1, \dots, 3$$

Dans chaque cas la matrice de passage $M_{g \rightarrow n}$ est la donnée de départ. Toutefois, pour faciliter les vérifications éventuelles, nous préciserons également :

- l'inverse de la matrice de lissage du schéma hôte (A_n^{-1});
- la matrice de lissage du schéma initial (A_g);
- les fonctions de lissage du schéma hôte (${}_n\psi_j(t)$) et du schéma initial (${}_g\psi_j(t)$).

Il est vrai que des paramètres tels que les fonctions de lissage, par exemple, sont déjà donnés dans les chapitres I de la partie I et II. Cette redondance nous paraît cependant nécessaire pour limiter les fréquents retours en arrière.

1. Conversion vers Ball Cubique

Schéma hôte : Schéma de Ball cubique (Ba).

- Inverse de sa matrice de lissage :

$$A_{Ba}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.b. Fonctions de lissage de Ball cubique (Ba) :

$${}_{Ba}\varphi_0(t) = 1 - 2t + t^2$$

$${}_{Ba}\varphi_1(t) = 2t - 4t^2 + 2t^3$$

$${}_{Ba}\varphi_2(t) = 2t^2 - 2t^3$$

$${}_{Ba}\varphi_3(t) = t^3$$

1.1 Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé):

1.1.1. Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

$$A_{Bé} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.2. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

$${}_{Bé}\varphi_0(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$$

$${}_{Bé}\varphi_1(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3$$

$${}_{Bé}\varphi_2(t) = 3t^2 - 3t^3$$

$${}_{Bé}\varphi_3(t) = t^3$$

1.1.3. Matrice de passage $M_{Bé \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{Bé}$:

$$M_{Bé \rightarrow Ba} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.4. Sommets de Ball exprimés en fonction de sommets de Bézier : $P_{Ba} = M_{Bé \rightarrow Ba} * P_{Bé}$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Ba}(0) = P_{Bé}(0)$$

$$P_{Ba}(1) = -1/2 P_{Bé}(0) + 3/2 P_{Bé}(1)$$

$$P_{Ba}(2) = 3/2 P_{Bé}(2) - 1/2 P_{Bé}(3)$$

$$P_{Ba}(3) = P_{Bé}(3)$$

On peut arranger ces expressions de la manière suivante pour suggérer une méthode de construction géométrique :

$$P_{Ba}(0) = P_{Bé}(0)$$

$$P_{Ba}(1) = 3/2 [P_{Bé}(1) - P_{Bé}(0)] + P_{Bé}(0)$$

$$P_{Ba}(2) = 3/2 [P_{Bé}(2) - P_{Bé}(3)] + P_{Bé}(3)$$

$$P_{Ba}(3) = P_{Bé}(3)$$

1.1.5. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier exprimées dans la base de Ball :

$$\Phi_{Bé}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{Bé \rightarrow Ba}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$${}_{Bé}\varphi_0(t) = {}_{Ba}\varphi_0(t) - 1/2 {}_{Ba}\varphi_1(t)$$

$${}_{Bé}\varphi_1(t) = 3/2 {}_{Ba}\varphi_1(t)$$

$${}_{Bé}\varphi_2(t) = 3/2 {}_{Ba}\varphi_2(t)$$

$${}_{Bé}\varphi_3(t) = -1/2 {}_{Ba}\varphi_2(t) + {}_{Ba}\varphi_3(t)$$

1.2. Schéma initial : schéma de B-spline cubique (Bs)

1.2.1. Matrice de lissage de B-spline cubique A_{Bs} :

$$A_{Bs} = 1/6 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.2. Fonctions de lissage de B-spline cubique :

$${}_{Bs}\varphi_0(t) = 1/6(1 - 3t + 3t^2 - t^3)$$

$${}_{Bs}\varphi_1(t) = 1/6(4 - 6t^2 + 3t^3)$$

$${}_{Bs}\varphi_2(t) = 1/6(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3)$$

$${}_{Bs}\varphi_3(t) = 1/6t^3$$

1.2.3. Matrice de passage $M_{Bs \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{Bs}$:

$$M_{Bs \rightarrow Ba} = 1/12 \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 & 0 \\ -1 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2.4. Sommets de Ball exprimés en fonction de sommets de B-spline cubique :

$$P_{Ba} = M_{Bs \rightarrow Ba} P_{Bs}$$

$$P_{Ba}(0) = 1/6 [P_{Bs}(0) + 4P_{Bs}(1) + P_{Bs}(2)]$$

$$P_{Ba}(1) = 1/12 [-P_{Bs}(0) + 8P_{Bs}(1) + 5P_{Bs}(2)]$$

$$P_{Ba}(2) = 1/12 [5P_{Bs}(1) + 8P_{Bs}(2) - P_{Bs}(3)]$$

$$P_{Ba}(3) = 1/6 [P_{Bs}(1) + 4P_{Bs}(2) + P_{Bs}(3)]$$

1.2.5. Fonctions de lissage de B-spline cubique exprimées dans la base de Ball :

$$\Phi_{Bs}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{Bs \rightarrow Ba}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$${}_{Bs}\varphi_0(t) = 1/12[2 {}_{Ba}\varphi_0(t) - {}_{Ba}\varphi_1(t)]$$

$${}_{Bs}\varphi_1(t) = 1/12[8 {}_{Ba}\varphi_0(t) + 8 {}_{Ba}\varphi_1(t) + 5 {}_{Ba}\varphi_2(t) + 2 {}_{Ba}\varphi_3(t)]$$

$${}_{Bs}\varphi_2(t) = 1/12[2 {}_{Ba}\varphi_0(t) + 5 {}_{Ba}\varphi_1(t) + 8 {}_{Ba}\varphi_2(t) + 8 {}_{Ba}\varphi_3(t)]$$

$${}_{Bs}\varphi_3(t) = 1/12[- {}_{Ba}\varphi_2(t) + 2 {}_{Ba}\varphi_3(t)]$$

1.3. Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)

1.3.1. Matrice de lissage de Hermite cubique :

$$A_{He} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique :

$${}_{He}\varphi_0(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$$

$${}_{He}\varphi_1(t) = 3t^2 - 2t^3$$

$${}_{He}\varphi_2(t) = t - 2t^2 + t^3$$

$${}_{He}\varphi_3(t) = -t^2 + t^3$$

1.3.3. Matrice de passage $M_{He \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{He}$:

$$M_{He \rightarrow Ba} = 1/2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.4. Sommets de Ball exprimés en fonction de sommets de Hermite cubique :

$$P_{Ba} = M_{He \rightarrow Ba} P_{He}$$

$$P_{Ba}(0) = P_{He}(0)$$

$$P_{Ba}(1) = P_{He}(0) + 1/2 P_{He}(2)$$

$$P_{Ba}(2) = P_{He}(1) - 1/2 P_{He}(3)$$

$$P_{Ba}(3) = P_{He}(1)$$

1.3.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans la base de Ball :

$$\Phi_{He}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{He \rightarrow Ba}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$He \varphi_0(t) = Ba \varphi_0(t) + Ba \varphi_1(t)$$

$$He \varphi_1(t) = Ba \varphi_2(t) + Ba \varphi_3(t)$$

$$He \varphi_2(t) = 1/2 Ba \varphi_1(t)$$

$$He \varphi_3(t) = -1/2 Ba \varphi_2(t)$$

1.4. Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)

1.4.1. Matrice de lissage de Hermite cubique modifié :

$$A_{mHe} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié :

$$mHe \varphi_0(t) = -t + 2t^2 - t^3$$

$$mHe \varphi_1(t) = 3t^2 - 2t^3$$

$$mHe \varphi_2(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3$$

$$mHe \varphi_3(t) = -t^2 + t^3$$

1.4.3. Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{mHe}$:

$$M_{mHe \rightarrow Ba} = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4.4. Sommets de Ball exprimés en fonction de sommets de Hermite modifié :

$$P_{Ba} = M_{mHe \rightarrow Ba} P_{mHe}$$

$$P_{Ba}(0) = P_{mHe}(2)$$

$$P_{Ba}(1) = -1/2 P_{mHe}(0) + P_{mHe}(2)$$

$$P_{Ba}(2) = P_{mHe}(1) - 1/2 P_{mHe}(3)$$

$$P_{Ba}(3) = P_{mHe}(1)$$

1.4.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de Ball :

$$\Phi_{mHe}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{mHe \rightarrow Ba}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$mHe \varphi_0(t) = -1/2 Ba \varphi_1(t)$$

$$mHe \varphi_1(t) = Ba \varphi_2(t) + Ba \varphi_3(t)$$

$$mHe \varphi_2(t) = Ba \varphi_0(t) + Ba \varphi_1(t)$$

$$mHe \varphi_3(t) = -1/2 Ba \varphi_2(t)$$

1.5. Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)

1.5.1. Matrice de lissage d'Overhauser cubique :

$$A_{Ov} = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

1.5.2. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique :

$$Ov\varphi_0(t) = -1/2t + t^2 - 1/2t^3$$

$$Ov\varphi_1(t) = 1 - 5/2t^2 + 3/2t^3$$

$$Ov\varphi_2(t) = 1/2t + 2t^2 - 3/2t^3$$

$$Ov\varphi_3(t) = -1/2t^2 + 1/2t^3$$

1.5.3. Matrice de passage $M_{Ov \rightarrow Ba} = A_{Ba}^{-1} * A_{Tim}$:

$$M_{Ov \rightarrow Ba} = 1/4 \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

1.5.4. Sommets de Ball exprimés en fonction de sommets d'Overhauser :

$$P_{Ba} = M_{Ov \rightarrow Ba} P_{Ov}$$

$$P_{Ba}(0) = P_{Ov}(1)$$

$$P_{Ba}(1) = -1/4 P_{Ov}(0) + P_{Ov}(1) + 1/4 P_{Ov}(2) = P_{Ov}(1) + 1/4 [P_{Ov}(2) - P_{Ov}(0)]$$

$$P_{Ba}(2) = 1/4 P_{Ov}(1) + P_{Ov}(2) - 1/4 P_{Ov}(3) = P_{Ov}(2) - 1/4 [P_{Ov}(3) - P_{Ov}(1)]$$

$$P_{Ba}(3) = P_{Ov}(2)$$

1.5.5. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique exprimées dans la base de Ball :

$$\Phi_{Ov}(t) = \Phi_{Ba}(t) M_{Ov \rightarrow Ba}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Ov\varphi_0(t) = -1/4 Ba\varphi_1(t)$$

$$Ov\varphi_1(t) = Ba\varphi_0(t) + Ba\varphi_1(t) + 1/4 Ba\varphi_2(t)$$

$$Ov\varphi_2(t) = 1/4 Ba\varphi_1(t) + Ba\varphi_2(t) + Ba\varphi_3(t)$$

$$Ov\varphi_3(t) = -1/4 Ba\varphi_2(t)$$

1.6. Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)

1.6.1. Matrice de lissage de Timmer cubique :

$$A_{Tim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

1.6.2. Fonctions de lissage de Timmer cubique :

$$Tim\varphi_0(t) = 1 - 4t + 5t^2 - 2t^3$$

$$Tim\varphi_1(t) = 4t - 8t^2 + 4t^3$$

$$Tim\varphi_2(t) = 4t^2 - 4t^3$$

$$Tim\varphi_3(t) = -t^2 + 2t^3$$

1.6.3. Matrice de passage $M_{\text{Tim} \rightarrow \text{Ba}} = A_{\text{Ba}}^{-1} * A_{\text{Tim}}$:

$$M_{\text{Tim} \rightarrow \text{Ba}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.6.4. Sommets de Ball exprimés en fonction de sommets de Timmer :

$$P_{\text{Ba}} = M_{\text{Tim} \rightarrow \text{Ba}} P_{\text{Tim}}$$

$$P_{\text{Ba}}(0) = P_{\text{Tim}}(0)$$

$$P_{\text{Ba}}(1) = -P_{\text{Tim}}(0) + 2P_{\text{Tim}}(1) = P_{\text{Tim}}(0) + 2[P_{\text{Tim}}(1) - P_{\text{Tim}}(0)]$$

$$P_{\text{Ba}}(2) = P_{\text{Tim}}(2) - P_{\text{Tim}}(3) = P_{\text{Tim}}(3) - 2[P_{\text{Tim}}(3) - P_{\text{Tim}}(2)]$$

$$P_{\text{Ba}}(3) = P_{\text{Tim}}(3)$$

1.6.5. Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base de Ball :

$$\Phi_{\text{Tim}}(t) = \Phi_{\text{Ba}}(t) M_{\text{Tim} \rightarrow \text{Ba}}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$\text{Tim}^{\psi_0}(t) = \text{Ba}^{\psi_0}(t) - \text{Ba}^{\psi_1}(t)$$

$$\text{Tim}^{\psi_1}(t) = 2 \text{Ba}^{\psi_1}(t)$$

$$\text{Tim}^{\psi_2}(t) = 2 \text{Ba}^{\psi_2}(t)$$

$$\text{Tim}^{\psi_3}(t) = -\text{Ba}^{\psi_2}(t) + \text{Ba}^{\psi_3}(t)$$

2. Conversion vers Bernstein-Bézier cubique

Schéma hôte : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)

2.a. Inverse de sa matrice de lissage :

$$A_{\text{Bé}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.b. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

Voir §1.1.2.

2.1. Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)

2.1.1. Matrice de lissage de Ball cubique :

$$A_{\text{Ba}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.2. Fonctions de lissage de Ball cubique :

Voir §1.b.

2.1.3. Matrice de passage $M_{\text{Ba} \rightarrow \text{Bé}} = A_{\text{Bé}}^{-1} * A_{\text{Ba}}$:

$$M_{B_a \rightarrow B'_e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.4. Sommets de Bézier exprimés en fonction de sommets de Ball :

$$P_{B'_e} = M_{B_a \rightarrow B'_e} P_{B_a}$$

$$P_{B'_e}(0) = P_{B_a}(0)$$

$$P_{B'_e}(1) = 1/3 P_{B_a}(0) + 2/3 P_{B_a}(1) = P_{B_a}(0) + 2/3 [P_{B_a}(1) - P_{B_a}(0)]$$

$$P_{B'_e}(2) = 2/3 P_{B_a}(2) + 1/3 P_{B_a}(3) = P_{B_a}(3) - 2/3 [P_{B_a}(3) - P_{B_a}(2)]$$

$$P_{B'_e}(3) = P_{B_a}(3)$$

2.1.5. Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base de Bernstein-Bézier :

$$\Phi_{B_a}(t) = \Phi_{B'_e}(t) M_{B_a \rightarrow B'_e}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$B_a \varphi_0(t) = B'_e \varphi_0(t) + 1/3 B'_e \varphi_1(t)$$

$$B_a \varphi_1(t) = 2/3 B'_e \varphi_1(t)$$

$$B_a \varphi_2(t) = 2/3 B'_e \varphi_2(t)$$

$$B_a \varphi_3(t) = 1/3 B'_e \varphi_2(t) + B'_e \varphi_3(t)$$

2.2. Schéma initial : schéma de B-spline cubique (Bs)

2.2.1. Matrice de lissage de B-spline cubique :

Voir §1.2.1.

2.2.2. Fonctions de lissage de B-spline cubique :

Voir §1.2.2.

2.2.3. Matrice de passage $M_{B_s \rightarrow B'_e} = A_{B'_e}^{-1} * A_{B_s}$:

$$M_{B_s \rightarrow B'_e} = 1/6 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.4. Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets de B-spline :

$$P_{B'_e} = M_{B_s \rightarrow B'_e} P_{B_s}$$

$$P_{B'_e}(0) = 1/6 [P_{B_s}(0) + 4P_{B_s}(1) + P_{B_s}(2)]$$

$$P_{B'_e}(1) = 2/3 P_{B_s}(1) + 1/3 P_{B_s}(2)$$

$$P_{B'_e}(2) = 1/3 P_{B_s}(1) + 2/3 P_{B_s}(2)$$

$$P_{B'_e}(3) = 1/6 [P_{B_s}(1) + 4P_{B_s}(2) + P_{B_s}(3)]$$

2.2.5. Fonctions de lissage de B-spline cubique exprimées dans la base de Bernstein-Bézier :

$$\Phi_{B_s}(t) = \Phi_{B'_e}(t) M_{B_s \rightarrow B'_e}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$B_s \varphi_0(t) = 1/6 B'_e \varphi_0(t)$$

$$B_s \varphi_1(t) = 1/6 [4 B'_e \varphi_0(t) + 4 B'_e \varphi_1(t) + 2 B'_e \varphi_2(t) + B'_e \varphi_3(t)]$$

$$B_s \varphi_2(t) = 1/6 [B'_e \varphi_0(t) + 2 B'_e \varphi_1(t) + 4 B'_e \varphi_2(t) + 4 B'_e \varphi_3(t)]$$

$$B_s \varphi_3(t) = 1/6 B'_e \varphi_3(t)$$

2.3. Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)

2.3.1. Matrice de lissage de Hermite cubique :

Voir §1.3.1.

2.3.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique :

Voir §1.3.2.

2.3.3. Matrice de passage $M_{Hc \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{Hc}$:

$$M_{Hc \rightarrow B\acute{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.4. Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets de Hermite :

$$P_{B\acute{e}} = M_{Hc \rightarrow B\acute{e}} P_{Hc}$$

$$P_{B\acute{e}}(0) = P_{Hc}(0)$$

$$P_{B\acute{e}}(1) = P_{Hc}(0) + 1/3 P_{Hc}(2)$$

$$P_{B\acute{e}}(2) = P_{Hc}(1) - 1/3 P_{Hc}(3)$$

$$P_{B\acute{e}}(3) = P_{Hc}(1)$$

2.3.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans la base de

Bernstein-Bézier : $\Phi_{Hc}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{Hc \rightarrow B\acute{e}}$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Hc\psi_0(t) = B\acute{e}\psi_0(t) + B\acute{e}\psi_1(t)$$

$$Hc\psi_1(t) = B\acute{e}\psi_2(t) + B\acute{e}\psi_3(t)$$

$$Hc\psi_2(t) = 1/3 B\acute{e}\psi_1(t)$$

$$Hc\psi_3(t) = -1/3 B\acute{e}\psi_2(t)$$

2.4. Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)

2.4.1. Matrice de lissage de Hermite cubique modifié:

Voir §1.4.1.

2.4.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié :

Voir §1.4.2.

2.4.3. Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{mHe}$:

$$M_{mHe \rightarrow B\acute{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4.4. Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets de Hermite :

$$P_{B\acute{e}} = M_{mHe \rightarrow B\acute{e}} P_{mHe}$$

$$P_{B\acute{e}}(0) = P_{mHe}(2)$$

$$P_{B\acute{e}}(1) = -1/3 P_{mHe}(0) + P_{mHe}(2)$$

$$P_{B\acute{e}}(2) = P_{mHe}(1) - 1/3 P_{mHe}(3)$$

$$P_{B\acute{e}}(3) = P_{mHe}(1)$$

2.4.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de

Bernstein-Bézier : $\Phi_{mHe}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{mHe \rightarrow B\acute{e}}$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$mHe\psi_0(t) = -1/3 B\acute{e}\psi_1(t)$$

$$mHe\psi_1(t) = B\acute{e}\psi_2(t) + B\acute{e}\psi_3(t)$$

$$mHe\psi_2(t) = B\acute{e}\psi_0(t) + B\acute{e}\psi_1(t)$$

$$mHe\psi_3(t) = -1/3 B\acute{e}\psi_2(t)$$

2.5. Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)

2.5.1. Matrice de lissage d'Overhauser cubique:

Voir §1.5.1.

2.5.2. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique :

Voir §1.5.2.

2.5.3. Matrice de passage $M_{Ov \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{Ov}$:

$$M_{Ov \rightarrow B\acute{e}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5.4. Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets d'Overhauser :

$$P_{B\acute{e}} = M_{Ov \rightarrow B\acute{e}} P_{Ov}$$

$$P_{B\acute{e}}(0) = P_{Ov}(1)$$

$$P_{B\acute{e}}(1) = -1/6 P_{Ov}(0) + P_{Ov}(1) + 1/6 P_{Ov}(2) = P_{Ov}(1) + 1/6 [P_{Ov}(2) - P_{Ov}(0)]$$

$$P_{B\acute{e}}(2) = 1/6 P_{Ov}(1) + P_{Ov}(2) - 1/6 P_{Ov}(3) = P_{Ov}(2) - 1/6 [P_{Ov}(3) - P_{Ov}(1)]$$

$$P_{B\acute{e}}(3) = P_{Ov}(2)$$

2.5.5. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique exprimées dans la base de

$$\text{Bernstein-Bézier : } \Phi_{Ov}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{Ov \rightarrow B\acute{e}}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Ov \varphi_0(t) = -1/6 B\acute{e} \varphi_1(t)$$

$$Ov \varphi_1(t) = B\acute{e} \varphi_0(t) + B\acute{e} \varphi_1(t) + 1/6 B\acute{e} \varphi_2(t)$$

$$Ov \varphi_2(t) = 1/6 B\acute{e} \varphi_1(t) + B\acute{e} \varphi_2(t) + B\acute{e} \varphi_3(t)$$

$$Ov \varphi_3(t) = -1/6 B\acute{e} \varphi_2(t)$$

2.6. Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)

2.6.1. Matrice de lissage de Timmer cubique:

Voir §1.6.1.

2.6.2. Fonctions de lissage de Timmer cubique :

Voir §1.6.2.

2.6.3. Matrice de passage $M_{Tim \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_{Tim}$:

$$M_{Tim \rightarrow B\acute{e}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.6.4. Sommets de Bézier exprimés en fonction des sommets de Timmer : $P_{B\acute{e}} =$

$$M_{Tim \rightarrow B\acute{e}} P_{Tim}$$

$$P_{B\acute{e}}(0) = P_{Tim}(0)$$

$$P_{B\acute{e}}(1) = -1/3 P_{Tim}(0) + 4/3 P_{Tim}(1) = P_{Tim}(0) + 4/3 [P_{Tim}(1) - P_{Tim}(0)]$$

$$P_{B\acute{e}}(2) = 4/3 P_{Tim}(2) - 1/3 P_{Tim}(3) = P_{Tim}(3) - 4/3 [P_{Tim}(3) - P_{Tim}(2)]$$

$$P_{B\acute{e}}(3) = P_{Tim}(3)$$

2.6.5. Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base de

$$\text{Bernstein-Bézier : } \Phi_{Tim}(t) = \Phi_{B\acute{e}}(t) M_{Tim \rightarrow B\acute{e}}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Tim \varphi_0(t) = B\acute{e} \varphi_0(t) - 1/3 B\acute{e} \varphi_1(t)$$

$$Tim \varphi_1(t) = 4/3 B\acute{e} \varphi_1(t)$$

$$Tim \varphi_2(t) = 4/3 B\acute{e} \varphi_2(t)$$

$$Tim \varphi_3(t) = -1/3 B\acute{e} \varphi_2(t) + B\acute{e} \varphi_3(t)$$

3. Conversion vers B-spline cubique

Schéma hôte : schéma de B-spline cubique (Bs)

3.a. Inverse de sa matrice de lissage :

$$A_{Bs}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 2/3 & 0 \\ 1 & 2 & 11/3 & 6 \end{bmatrix}$$

3.b. Fonctions de lissage de B-spline cubique :

Voir §1.2.2.

3.1. Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)

3.1.1. Matrice de lissage de Ball cubique :

Voir 2.1.1.

3.1.2. Fonctions de lissage de Ball cubique :

Voir §1.b.

3.1.3. Matrice de passage $M_{Ba \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{Ba}$:

$$M_{Ba \rightarrow Bs} = 1/3 \begin{bmatrix} 11 & -14 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -14 & 11 \end{bmatrix}$$

3.1.4. Sommets de B-spline exprimés en fonction de sommets de Ball : $P_{Bs} =$

$$M_{Ba \rightarrow Bs} P_{Ba}$$

$$P_{Bs}(0) = 1/3 [11P_{Ba}(0) - 14P_{Ba}(1) + 4P_{Ba}(2) + 2P_{Ba}(3)]$$

$$P_{Bs}(1) = 1/3 [2P_{Ba}(0) + 4P_{Ba}(1) - 2P_{Ba}(2) - P_{Ba}(3)]$$

$$P_{Bs}(2) = 1/3 [-P_{Ba}(0) - 2P_{Ba}(1) + 4P_{Ba}(2) + 2P_{Ba}(3)]$$

$$P_{Bs}(3) = 1/3 [2P_{Ba}(0) + 4P_{Ba}(1) - 14P_{Ba}(2) + 11P_{Ba}(3)]$$

3.1.5. Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base de B-spline :

$$\Phi_{Ba}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{Ba \rightarrow Bs}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Ba \varphi_0(t) = 1/3 [11_{Bs} \varphi_0(t) + 2_{Bs} \varphi_1(t) -_{Bs} \varphi_2(t) + 2_{Bs} \varphi_3(t)]$$

$$Ba \varphi_1(t) = 1/3 [-14_{Bs} \varphi_0(t) + 4_{Bs} \varphi_1(t) - 2_{Bs} \varphi_2(t) + 4_{Bs} \varphi_3(t)]$$

$$Ba \varphi_2(t) = 1/3 [4_{Bs} \varphi_0(t) - 2_{Bs} \varphi_1(t) + 4_{Bs} \varphi_2(t) - 14_{Bs} \varphi_3(t)]$$

$$Ba \varphi_3(t) = 1/3 [2_{Bs} \varphi_0(t) -_{Bs} \varphi_1(t) + 2_{Bs} \varphi_2(t) + 11_{Bs} \varphi_3(t)]$$

3.2. Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)

3.2.1. Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

Voir §1.1.1.

3.2.2. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

Voir §1.1.2.

3.2.3. Matrice de passage $M_{Bé \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{Bé}$:

$$M_{Bé \rightarrow Bs} = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

3.2.4. Sommets de B-spline exprimés en fonction de sommets de Bézier : $P_{B_s} =$

$$M_{Bé \rightarrow B_s} P_{Bé}$$

$$P_{B_s}(0) = 6P_{Bé}(0) - 7P_{Bé}(1) + 2P_{Bé}(2)$$

$$P_{B_s}(1) = 2P_{Bé}(1) - P_{Bé}(2)$$

$$P_{B_s}(2) = -P_{Bé}(1) + 2P_{Bé}(2)$$

$$P_{B_s}(3) = 2P_{Bé}(1) - 7P_{Bé}(2) + 6P_{Bé}(3)$$

3.2.5. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique exprimées dans la base de

$$\text{B-spline : } \Phi_{Bé}(t) = \Phi_{B_s}(t) M_{Bé \rightarrow B_s}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Bé\psi_0(t) = 6B_s\psi_0(t)$$

$$Bé\psi_1(t) = -7B_s\psi_0(t) + 2B_s\psi_1(t) - B_s\psi_2(t) + 2B_s\psi_3(t)$$

$$Bé\psi_2(t) = 2B_s\psi_0(t) - B_s\psi_1(t) + 2B_s\psi_2(t) - 7B_s\psi_3(t)$$

$$Bé\psi_3(t) = 6B_s\psi_3(t)$$

3.3. Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)

3.3.1. Matrice de lissage de Hermite cubique :

Voir §1.3.1.

3.3.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique :

Voir §1.3.2.

3.3.3. Matrice de passage $M_{He \rightarrow B_s} = A_{B_s}^{-1} * A_{He}$:

$$M_{He \rightarrow B_s} = 1/3 \begin{bmatrix} -3 & 6 & -7 & -2 \\ 6 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -1 & -2 \\ 6 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

3.3.4. Sommets de B-spline exprimés en fonction de sommets de Hermite :

$$P_{B_s} = M_{He \rightarrow B_s} P_{He}$$

$$P_{B_s}(0) = -P_{He}(0) + 2P_{He}(1) - 7/3P_{He}(2) - 2/3P_{He}(3)$$

$$P_{B_s}(1) = 2P_{He}(0) - P_{He}(1) + 2/3P_{He}(2) + 1/3P_{He}(3)$$

$$P_{B_s}(2) = -P_{He}(0) + 2P_{He}(1) - 1/3P_{He}(2) - 2/3P_{He}(3)$$

$$P_{B_s}(3) = 2P_{He}(0) - P_{He}(1) + 2/3P_{He}(2) + 7/3P_{He}(3)$$

3.3.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans la base de B-spline :

$$\Phi_{He}(t) = \Phi_{B_s}(t) M_{He \rightarrow B_s}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$He\psi_0(t) = -B_s\psi_0(t) + 2B_s\psi_1(t) - B_s\psi_2(t) + 2B_s\psi_3(t)$$

$$He\psi_1(t) = 2B_s\psi_0(t) - B_s\psi_1(t) + 2B_s\psi_2(t) - B_s\psi_3(t)$$

$$He\psi_2(t) = 1/3 [-7B_s\psi_0(t) + 2B_s\psi_1(t) - B_s\psi_2(t) + 2B_s\psi_3(t)]$$

$$He\psi_3(t) = 1/3 [-2B_s\psi_0(t) + B_s\psi_1(t) - 2B_s\psi_2(t) + 7B_s\psi_3(t)]$$

3.4. Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)

3.4.1. Matrice de lissage de Hermite cubique modifié :

Voir §1.4.1.

3.4.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié :

Voir §1.4.2.

3.4.3. Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow B_s} = A_{B_s}^{-1} * A_{mHe}$:

$$M_{mHe \rightarrow B_s} = 1/3 \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

3.4.4. Sommets de B-spline exprimés en fonction de sommets de Hermite modifié :

$$P_{Bs} = M_{mHe \rightarrow Bs} P_{mHe}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Bs}(0) = 7/3 P_{mHe}(0) + 2 P_{mHe}(1) - P_{mHe}(2) - 2/3 P_{mHe}(3)$$

$$P_{Bs}(1) = -2/3 P_{mHe}(0) - P_{mHe}(1) + 2 P_{mHe}(2) + 1/3 P_{mHe}(3)$$

$$P_{Bs}(2) = 1/3 P_{mHe}(0) + 2 P_{mHe}(1) - P_{mHe}(2) - 2/3 P_{mHe}(3)$$

$$P_{Bs}(3) = -2/3 P_{mHe}(0) - P_{mHe}(1) + 2 P_{mHe}(2) + 7/3 P_{mHe}(3)$$

3.4.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de

B-spline : $\Phi_{mHe}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{mHe \rightarrow Bs}$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$${}_{mHe}\varphi_0(t) = 1/3 [7 {}_{Bs}\varphi_0(t) - 2 {}_{Bs}\varphi_1(t) + {}_{Bs}\varphi_2(t) - 2 {}_{Bs}\varphi_3(t)]$$

$${}_{mHe}\varphi_1(t) = 2 {}_{Bs}\varphi_0(t) - {}_{Bs}\varphi_1(t) + 2 {}_{Bs}\varphi_2(t) - {}_{Bs}\varphi_3(t)$$

$${}_{mHe}\varphi_2(t) = - {}_{Bs}\varphi_0(t) + 2 {}_{Bs}\varphi_1(t) - {}_{Bs}\varphi_2(t) + 2 {}_{Bs}\varphi_3(t)$$

$${}_{mHe}\varphi_3(t) = 1/3 [-2 {}_{Bs}\varphi_0(t) + {}_{Bs}\varphi_1(t) - 2 {}_{Bs}\varphi_2(t) + 7 {}_{Bs}\varphi_3(t)]$$

3.5. Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)

3.5.1. Matrice de lissage d'Overhauser cubique :

Voir §1.5.1.

3.5.2. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique :

Voir 1.5.2.

3.5.3. Matrice de passage $M_{Ov \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{Ov}$:

$$M_{Ov \rightarrow Bs} = 1/6 \begin{bmatrix} 7 & -4 & 5 & -2 \\ -2 & 11 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 11 & -2 \\ -2 & 5 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

3.5.4. Sommets de B-spline exprimés en fonction de sommets d'Overhauser :

$$P_{Bs} = M_{Ov \rightarrow Bs} P_{Ov}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Bs}(0) = 1/6 [7 P_{Ov}(0) - 4 P_{Ov}(1) + 5 P_{Ov}(2) - 2 P_{Ov}(3)]$$

$$P_{Bs}(1) = 1/6 [-2 P_{Ov}(0) + 11 P_{Ov}(1) - 4 P_{Ov}(2) + P_{Ov}(3)]$$

$$P_{Bs}(2) = 1/6 [P_{Ov}(0) - 4 P_{Ov}(1) + 11 P_{Ov}(2) - 2 P_{Ov}(3)]$$

$$P_{Bs}(3) = 1/6 [-2 P_{Ov}(0) + 5 P_{Ov}(1) - 4 P_{Ov}(2) + 7 P_{Ov}(3)]$$

3.5.5. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique exprimées dans la base de B-spline :

$$\Phi_{Ov}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{Ov \rightarrow Bs}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$${}_{Ov}\varphi_0(t) = 1/6 [7 {}_{Bs}\varphi_0(t) - 2 {}_{Bs}\varphi_1(t) + {}_{Bs}\varphi_2(t) - 2 {}_{Bs}\varphi_3(t)]$$

$${}_{Ov}\varphi_1(t) = 1/6 [-4 {}_{Bs}\varphi_0(t) + 11 {}_{Bs}\varphi_1(t) - 4 {}_{Bs}\varphi_2(t) + 5 {}_{Bs}\varphi_3(t)]$$

$${}_{Ov}\varphi_2(t) = 1/6 [5 {}_{Bs}\varphi_0(t) - 4 {}_{Bs}\varphi_1(t) + 11 {}_{Bs}\varphi_2(t) - 4 {}_{Bs}\varphi_3(t)]$$

$${}_{Ov}\varphi_3(t) = 1/6 [-2 {}_{Bs}\varphi_0(t) + {}_{Bs}\varphi_1(t) - 2 {}_{Bs}\varphi_2(t) + 7 {}_{Bs}\varphi_3(t)]$$

3.6. Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)

3.6.1. Matrice de lissage de Timmer cubique :

Voir §1.6.1.

3.6.2. Fonctions de lissage de Timmer cubique :

Voir §1.6.2.

3.6.3. Matrice de passage $M_{Tim \rightarrow Bs} = A_{Bs}^{-1} * A_{Tim}$:

$$M_{Tim \rightarrow Bs} = 1/3 \begin{bmatrix} 25 & -28 & 8 & -2 \\ -2 & 8 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 8 & -2 \\ -2 & 8 & -28 & 25 \end{bmatrix}$$

3.6.4. Sommets de B-spline exprimés en fonction de sommets de Timmer : $P_{Bs} =$

$$M_{Timmer \rightarrow Bs} P_{Timmer}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Bs}(0) = 1/3 [25P_{Timmer}(0) - 28P_{Timmer}(1) + 8P_{Timmer}(2) - 2P_{Timmer}(3)]$$

$$P_{Bs}(1) = 1/3 [-2P_{Timmer}(0) + 8P_{Timmer}(1) - 4P_{Timmer}(2) + P_{Timmer}(3)]$$

$$P_{Bs}(2) = 1/3 [P_{Timmer}(0) - 4P_{Timmer}(1) + 8P_{Timmer}(2) - 2P_{Timmer}(3)]$$

$$P_{Bs}(3) = 1/3 [-2P_{Timmer}(0) + 8P_{Timmer}(1) - 28P_{Timmer}(2) + 25P_{Timmer}(3)]$$

3.6.5. Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base de B-spline :

$$\Phi_{Timmer}(t) = \Phi_{Bs}(t) M_{Timmer \rightarrow Bs}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Timmer \varphi_0(t) = 1/3 [25B_s \varphi_0(t) - 28B_s \varphi_1(t) + B_s \varphi_2(t) - 2B_s \varphi_3(t)]$$

$$Timmer \varphi_1(t) = 1/3 [-28B_s \varphi_0(t) + 8B_s \varphi_1(t) - 4B_s \varphi_2(t) + 8B_s \varphi_3(t)]$$

$$Timmer \varphi_2(t) = 1/3 [8B_s \varphi_0(t) - 4B_s \varphi_1(t) + 8B_s \varphi_2(t) - 28B_s \varphi_3(t)]$$

$$Timmer \varphi_3(t) = 1/3 [-2B_s \varphi_0(t) + B_s \varphi_1(t) - 2B_s \varphi_2(t) + 25B_s \varphi_3(t)]$$

4. Conversion vers Hermite cubique

Schéma hôte : schéma de Hermite cubique (He)

4.a. Inverse de sa matrice de lissage :

$$A_{He}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4.b. Fonctions de lissage de Hermite cubique :

Voir §1.3.2.

4.1. Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)

4.1.1. Matrice de lissage de Ball cubique :

Voir §2.1.1.

4.1.2. Fonctions de lissage de Ball cubique :

Voir §1.b.

4.1.3. Matrice de passage $M_{Ba \rightarrow He} = A_{He}^{-1} * A_{Ba}$:

$$M_{Ba \rightarrow He} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

4.1.4. Sommets de Hermite exprimés en fonction de sommets de Ball : $P_{He} =$

$$M_{Ba \rightarrow He} P_{Ba}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{He}(0) = P_{Ba}(0)$$

$$P_{He}(1) = P_{Ba}(3)$$

$$P_{He}(2) = 2 [P_{Ba}(1) - P_{Ba}(0)]$$

$$P_{He}(3) = 2 [P_{Ba}(3) - P_{Ba}(2)]$$

4.1.5. Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base de Hermite :

$$\Phi_{Ba}(t) = \Phi_{He}(t) M_{Ba \rightarrow He}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Ba \varphi_0(t) = He \varphi_0(t) - 2 He \varphi_2(t)$$

$$Ba \varphi_1(t) = 2 He \varphi_2(t)$$

$$Ba \varphi_2(t) = -2 He \varphi_3(t)$$

$$Ba \varphi_3(t) = He \varphi_1(t) + 2 He \varphi_3(t)$$

4.2. Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)

4.2.1. Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

Voir §1.1.1.

4.2.2. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

Voir §1.1.2.

4.2.3. Matrice de passage $M_{Bé \rightarrow Hé} = A_{Hé}^{-1} * A_{Bé}$:

$$M_{Bé \rightarrow Hé} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

4.2.4. Sommets de Hermite exprimés en fonction de sommets de Bézier : $P_{Hé} =$

$$M_{Bé \rightarrow Hé} P_{Bé}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Hé}(0) = P_{Bé}(0)$$

$$P_{Hé}(1) = P_{Bé}(3)$$

$$P_{Hé}(2) = 3 [P_{Bé}(1) - P_{Bé}(0)]$$

$$P_{Hé}(3) = 3 [P_{Bé}(3) - P_{Bé}(2)]$$

4.2.5. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique exprimées dans la base de

$$\text{Hermite} : \Phi_{Bé}(t) = \Phi_{Hé}(t) M_{Bé \rightarrow Hé}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Bé^0(t) = Hé^0(t) - 3 Hé^2(t)$$

$$Bé^1(t) = 3 Hé^2(t)$$

$$Bé^2(t) = -3 Hé^3(t)$$

$$Bé^3(t) = Hé^1(t) + 3 Hé^3(t)$$

4.3. Schéma initial : schéma de B-spline cubique (Bs)

4.3.1. Matrice de lissage de B-spline cubique :

Voir §1.2.1.

4.3.2. Fonctions de lissage de B-spline cubique :

Voir §1.2.2.

4.3.3. Matrice de passage $M_{Bs \rightarrow Hé} = A_{Hé}^{-1} * A_{Bs}$:

$$M_{Bs \rightarrow Hé} = 1/6 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4.3.4. Sommets de Hermite exprimés en fonction de sommets de B-spline :

$$P_{Hé} = M_{Bs \rightarrow Hé} P_{Bs}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Hé}(0) = 1/6 [P_{Bs}(0) + 4P_{Bs}(1) + P_{Bs}(2)]$$

$$P_{Hé}(1) = 1/6 [P_{Bs}(1) + 4P_{Bs}(2) + P_{Bs}(3)]$$

$$P_{Hé}(2) = 1/6 [-3P_{Bs}(0) + 3P_{Bs}(2)] = 1/2 [P_{Bs}(2) - P_{Bs}(0)]$$

$$P_{Hé}(3) = 1/6 [-3P_{Bs}(1) + 3P_{Bs}(3)] = 1/2 [P_{Bs}(3) - P_{Bs}(1)]$$

4.3.5. Fonctions de lissage de B-spline cubique exprimées dans la base de Hermite :

$$\Phi_{Bs}(t) = \Phi_{Hé}(t) M_{Bs \rightarrow Hé}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Bs^0(t) = 1/6 [Hé^0(t) - 3 Hé^2(t)]$$

$$Bs^1(t) = 1/6 [4 Hé^0(t) + Hé^1(t) - 3 Hé^3(t)]$$

$$Bs^2(t) = 1/6 [Hé^0(t) + 4 Hé^1(t) + 3 Hé^2(t)]$$

$$Bs^3(t) = 1/6 [Hé^1(t) + 3 Hé^3(t)]$$

4.4. Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)

4.4.1. Matrice de lissage d'Overhauser cubique :

Voir §1.5.1.

4.4.2. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique :

Voir §1.5.2.

4.4.3. Matrice de passage $M_{Ov \rightarrow He} = A_{He}^{-1} * A_{Ov}$:

$$M_{Ov \rightarrow He} = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4.4. Sommets de Hermite exprimés en fonction de sommets d'Overhauser : $P_{He} =$

$$M_{Ov \rightarrow He} P_{Ov}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{He}(0) = P_{Ov}(1)$$

$$P_{He}(1) = P_{Ov}(2)$$

$$P_{He}(2) = 1/2 [- P_{Ov}(0) + P_{Ov}(2)] = 1/2 [P_{Ov}(2) - P_{Ov}(0)]$$

$$P_{He}(3) = 1/2 [- P_{Ov}(1) + P_{Ov}(3)] = 1/2 [P_{Ov}(3) - P_{Ov}(1)]$$

4.4.5. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique exprimées dans la base de Hermite :

$$\Phi_{Ov}(t) = \Phi_{He}(t) M_{Ov \rightarrow He}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Ov \psi_0(t) = - 1/2 He \psi_2(t)$$

$$Ov \psi_1(t) = He \psi_0(t) - 1/2 He \psi_3(t)$$

$$Ov \psi_2(t) = He \psi_1(t) + 1/2 He \psi_2(t)$$

$$Ov \psi_3(t) = 1/2 He \psi_3(t)$$

4.5. Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)

4.5.1. Matrice de lissage de Timmer cubique :

Voir §1.6.1.

4.5.2. Fonctions de lissage de Timmer cubique :

Voir §1.6.2.

4.5.3. Matrice de passage $M_{Tim \rightarrow He} = A_{He}^{-1} * A_{Tim}$:

$$M_{Tim \rightarrow He} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

4.5.4. Sommets de Hermite exprimés en fonction de sommets de Timmer : $P_{He} =$

$$M_{Tim \rightarrow He} P_{Tim}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{He}(0) = P_{Tim}(0)$$

$$P_{He}(1) = P_{Tim}(3)$$

$$P_{He}(2) = 4 [P_{Tim}(1) - P_{Tim}(0)]$$

$$P_{He}(3) = 4 [P_{Tim}(3) - P_{Tim}(2)]$$

4.5.5. Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base de Hermite :

$$\Phi_{Tim}(t) = \Phi_{He}(t) M_{Tim \rightarrow He}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Tim \psi_0(t) = He \psi_0(t) - 4 He \psi_2(t)$$

$$Tim \psi_1(t) = 4 He \psi_2(t)$$

$$Tim \psi_2(t) = - 4 He \psi_3(t)$$

$$Tim \psi_3(t) = He \psi_1(t) + 4 He \psi_3(t)$$

5. Conversion vers Overhauser cubique

Schéma hôte : schéma d'Overhauser cubique (Ov)

5.a. Inverse de sa matrice de lissage :

$$A_{Ov}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

5.b. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique :

Voir §1.6.2.

5.1. Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)

5.1.1. Matrice de lissage de Ball cubique :

Voir §2.1.1.

5.1.2. Fonctions de lissage de Ball cubique :

Voir §1.b.

5.1.3. Matrice de passage $M_{Ba \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{Ba}$:

$$M_{Ba \rightarrow Ov} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

5.1.4. Sommets d'Overhauser exprimés en fonction de sommets de Ball :

$$P_{Ov} = M_{Ba \rightarrow Ov} P_{Ba}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Ov}(0) = -4[P_{Ba}(1) - P_{Ba}(0)] + P_{Ba}(3)$$

$$P_{Ov}(1) = P_{Ba}(0)$$

$$P_{Ov}(2) = P_{Ba}(3)$$

$$P_{Ov}(3) = P_{Ba}(0) + 4[P_{Ba}(3) - P_{Ba}(2)]$$

5.1.5. Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base d'Overhauser :

$$\Phi_{Ba}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{Ba \rightarrow Ov}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Ba \varphi_0(t) = 4_{Ov} \varphi_0(t) + {}_{Ov} \varphi_1(t) + {}_{Ov} \varphi_3(t)$$

$$Ba \varphi_1(t) = -4_{Ov} \varphi_0(t)$$

$$Ba \varphi_2(t) = -4_{Ov} \varphi_3(t)$$

$$Ba \varphi_3(t) = {}_{Ov} \varphi_0(t) + {}_{Ov} \varphi_2(t) + 4_{Ov} \varphi_3(t)$$

5.2. Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)

5.2.1. Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

Voir §1.1.1.

5.2.2. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

Voir §1.1.2.

5.2.3. Matrice de passage $M_{Bé \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{Bé}$:

$$M_{Bé \rightarrow Ov} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

5.2.4. Sommets d'Overhauser exprimés en fonction de sommets de Bézier : $P_{Ov} =$

$$M_{Bé \rightarrow Ov} P_{Bé}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Ov}(0) = -6[P_{Bé}(1) - P_{Bé}(0)] + P_{Bé}(3)$$

$$P_{Ov}(1) = P_{Bé}(0)$$

$$P_{Ov}(2) = P_{Bé}(3)$$

$$P_{Ov}(3) = P_{Bé}(0) + 6[P_{Bé}(3) - P_{Bé}(2)]$$

5.2.5. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique exprimées dans la base de

$$\text{Overhauser : } \Phi_{Bé}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{Bé \rightarrow Ov}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Bé\psi_0(t) = 6_{Ov}\psi_0(t) + 0_{Ov}\psi_1(t) + 0_{Ov}\psi_3(t)$$

$$Bé\psi_1(t) = -6_{Ov}\psi_0(t)$$

$$Bé\psi_2(t) = -6_{Ov}\psi_3(t)$$

$$Bé\psi_3(t) = 0_{Ov}\psi_0(t) + 0_{Ov}\psi_2(t) + 6_{Ov}\psi_3(t)$$

5.3. Schéma initial : schéma de B-spline (Bs)

5.3.1. Matrice de lissage de B-spline :

Voir §1.2.1.

5.3.2. Fonctions de lissage de B-spline :

Voir §1.2.2.

5.3.3. Matrice de passage $M_{Bs \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{Bs}$:

$$M_{Bs \rightarrow Ov} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

5.3.4. Sommets d'Overhauser exprimés en fonction de sommets de B-pline : $P_{Ov} =$

$$M_{Bs \rightarrow Ov} P_{Bs}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Ov}(0) = 1/6 [6P_{Bs}(0) + P_{Bs}(1) - 2P_{Bs}(2) + P_{Bs}(3)]$$

$$P_{Ov}(1) = 1/6 [P_{Bs}(0) + 4P_{Bs}(1) + P_{Bs}(2)]$$

$$P_{Ov}(2) = 1/6 [P_{Bs}(1) + 4P_{Bs}(2) + P_{Bs}(3)]$$

$$P_{Ov}(3) = 1/6 [P_{Bs}(0) - 2P_{Bs}(1) + P_{Bs}(2) + 6P_{Bs}(3)]$$

5.3.5. Fonctions de lissage de B-spline exprimées dans la base d'Overhauser :

$$\Phi_{Bs}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{Bs \rightarrow Ov}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Bs\psi_0(t) = 1/6 [6_{Ov}\psi_0(t) + 0_{Ov}\psi_1(t) + 0_{Ov}\psi_3(t)]$$

$$Bs\psi_1(t) = 1/6 [0_{Ov}\psi_0(t) + 4_{Ov}\psi_1(t) + 0_{Ov}\psi_2(t) - 2_{Ov}\psi_3(t)]$$

$$Bs\psi_2(t) = 1/6 [-2_{Ov}\psi_0(t) + 0_{Ov}\psi_1(t) + 4_{Ov}\psi_2(t) + 0_{Ov}\psi_3(t)]$$

$$Bs\psi_3(t) = 1/6 [0_{Ov}\psi_0(t) + 0_{Ov}\psi_2(t) + 6_{Ov}\psi_3(t)]$$

5.4. Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)

5.4.1. Matrice de lissage de Hermite cubique :

Voir §1.3.1.

5.4.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique :

Voir §1.3.2.

5.4.3. Matrice de passage $M_{He \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{He}$:

$$M_{He \rightarrow Ov} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5.4.4. Sommets d'Overhauser exprimés en fonction de sommets de Hermite :

$$P_{Ov} = M_{He \rightarrow Ov} P_{He}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Ov}(0) = P_{He}(1) - 2P_{He}(2)$$

$$P_{Ov}(1) = P_{He}(0)$$

$$P_{Ov}(2) = P_{He}(1)$$

$$P_{Ov}(3) = P_{He}(0) + 2P_{He}(3)$$

5.4.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans la base d'Overhauser :

$$\Phi_{He}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{He \rightarrow Ov}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$He \psi_0(t) = Ov \psi_1(t) + Ov \psi_3(t)$$

$$He \psi_1(t) = Ov \psi_0(t) + Ov \psi_2(t)$$

$$He \psi_2(t) = -2 Ov \psi_0(t)$$

$$He \psi_3(t) = 2 Ov \psi_3(t)$$

5.5. Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)

5.5.1. Matrice de lissage de Hermite cubique modifié :

Voir §1.4.1.

5.5.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié :

Voir §1.4.2.

5.5.3. Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{mHe}$:

$$M_{mHe \rightarrow Ov} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5.5.4. Sommets d'Overhauser exprimés en fonction de sommets de Hermite modifié :

$$P_{Ov} = M_{mHe \rightarrow Ov} P_{mHe}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Ov}(0) = 2P_{mHe}(0) + P_{mHe}(1)$$

$$P_{Ov}(1) = P_{mHe}(2)$$

$$P_{Ov}(2) = P_{mHe}(1)$$

$$P_{Ov}(3) = P_{mHe}(2) + 2P_{mHe}(3)$$

5.5.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de

Overhauser : $\Phi_{mHe}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{mHe \rightarrow Ov}$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$mHe \psi_0(t) = 2 Ov \psi_0(t)$$

$$mHe \psi_1(t) = Ov \psi_0(t) + Ov \psi_2(t)$$

$$mHe \psi_2(t) = Ov \psi_1(t) + Ov \psi_3(t)$$

$$mHe \psi_3(t) = 2 Ov \psi_3(t)$$

5.6. Schéma initial : schéma de Timmer cubique (Tim)

5.6.1. Matrice de lissage de Timmer cubique :

Voir §1.6.1.

5.6.2. Fonctions de lissage de Timmer cubique :

Voir §1.6.2.

5.6.3. Matrice de passage $M_{Tim \rightarrow Ov} = A_{Ov}^{-1} * A_{Tim}$:

$$M_{Tim \rightarrow Ov} = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

5.6.4. Sommets d'Overhauser exprimés en fonction de sommets de Timmer :

$$P_{Ov} = M_{Timmer \rightarrow Ov} P_{Timmer}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Ov}(0) = -8[P_{Timmer}(1) - P_{Timmer}(0)] + P_{Timmer}(3)$$

$$P_{Ov}(1) = P_{Timmer}(0)$$

$$P_{Ov}(2) = P_{Timmer}(3)$$

$$P_{Ov}(3) = P_{Timmer}(0) + 8[P_{Timmer}(3) - P_{Timmer}(2)]$$

5.6.5. Fonctions de lissage de Timmer cubique exprimées dans la base d'Overhauser :

$$\Phi_{Timmer}(t) = \Phi_{Ov}(t) M_{Timmer \rightarrow Ov}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Timmer \varphi_0(t) = 8_{Ov} \varphi_0(t) + {}_{Ov} \varphi_1(t) + {}_{Ov} \varphi_3(t)$$

$$Timmer \varphi_1(t) = -8_{Ov} \varphi_0(t)$$

$$Timmer \varphi_2(t) = -8_{Ov} \varphi_3(t)$$

$$Timmer \varphi_3(t) = {}_{Ov} \varphi_0(t) + {}_{Ov} \varphi_2(t) + 8_{Ov} \varphi_3(t)$$

6. Conversion vers Timmer cubique

Schéma hôte : schéma de Timmer cubique (Timmer)

6.a. Inverse de sa matrice de lissage :

$$A_{Timmer}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6.b. Fonctions de lissage de Timmer cubique :

Voir §1.6.1.

6.1. Schéma initial : schéma de Ball cubique (Ba)

6.1.1. Matrice de lissage de Ball cubique :

Voir §2.1.1.

6.1.2. Fonctions de lissage de Ball cubique

Voir §1.b.

6.1.3. Matrice de passage $M_{Ba \rightarrow Timmer} = A_{Timmer}^{-1} * A_{Ba}$:

$$M_{Ba \rightarrow Timmer} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.1.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction de sommets de Ball : $P_{Timmer} =$

$$M_{Ba \rightarrow Timmer} P_{Ba}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Timmer}(0) = P_{Ba}(0)$$

$$P_{Timmer}(1) = 1/2 [P_{Ba}(0) + P_{Ba}(1)] = P_{Ba}(0) + 1/2 [P_{Ba}(1) - P_{Ba}(0)]$$

$$P_{Timmer}(2) = 1/2 [P_{Ba}(2) + P_{Ba}(3)] = P_{Ba}(3) - 1/2 [P_{Ba}(3) - P_{Ba}(2)]$$

$$P_{Timmer}(3) = P_{Ba}(3)$$

6.1.5. Fonctions de lissage de Ball cubique exprimées dans la base de Timmer :

$$\Phi_{Ba}(t) = \Phi_{Timmer}(t) M_{Ba \rightarrow Timmer}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Ba \varphi_0(t) = Timmer \varphi_0(t) + 1/2 Timmer \varphi_1(t)$$

$$Ba \varphi_1(t) = 1/2 Timmer \varphi_1(t)$$

$$B_a^{\varphi_2}(t) = 1/2 T_{\text{Tim}}^{\varphi_2}(t)$$

$$B_a^{\varphi_3}(t) = 1/2 T_{\text{Tim}}^{\varphi_2}(t) + T_{\text{Tim}}^{\varphi_3}(t)$$

6.2. Schéma initial : schéma de Bernstein-Bézier cubique (Bé)

6.2.1. Matrice de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

Voir §1.1.1.

6.2.2. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique :

Voir §1.1.2.

6.2.3. Matrice de passage $M_{Bé \rightarrow \text{Tim}} = A_{\text{Tim}}^{-1} * A_{Bé}$:

$$M_{Bé \rightarrow \text{Tim}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.2.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction de sommets de Bézier : $P_{\text{Tim}} =$

$$M_{Bé \rightarrow \text{Tim}} P_{Bé}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{\text{Tim}}(0) = P_{Bé}(0)$$

$$P_{\text{Tim}}(1) = 1/4 [P_{Bé}(0) + 3P_{Bé}(1)] = P_{Bé}(0) + 3/4 [P_{Bé}(1) - P_{Bé}(0)]$$

$$P_{\text{Tim}}(2) = 1/4 [3P_{Bé}(2) + P_{Bé}(3)] = P_{Bé}(3) - 3/4 [P_{Bé}(3) - P_{Bé}(2)]$$

$$P_{\text{Tim}}(3) = P_{Bé}(3)$$

6.2.5. Fonctions de lissage de Bernstein-Bézier cubique exprimées dans la base de

$$\text{Timmer} : \Phi_{Bé}(t) = \Phi_{\text{Tim}}(t) M_{Bé \rightarrow \text{Tim}}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Bé^{\varphi_0}(t) = T_{\text{Tim}}^{\varphi_0}(t) + 1/4 T_{\text{Tim}}^{\varphi_1}(t)$$

$$Bé^{\varphi_1}(t) = 3/4 T_{\text{Tim}}^{\varphi_1}(t)$$

$$Bé^{\varphi_2}(t) = 3/4 T_{\text{Tim}}^{\varphi_2}(t)$$

$$Bé^{\varphi_3}(t) = 1/4 T_{\text{Tim}}^{\varphi_2}(t) + T_{\text{Tim}}^{\varphi_3}(t)$$

6.3. Schéma initial : schéma de B-spline (Bs)

6.3.1. Matrice de lissage de B-spline cubique :

Voir §1.2.1.

6.3.2. Fonctions de lissage de B-spline :

Voir §1.2.2.

6.3.3. Matrice de passage $M_{Bs \rightarrow \text{Tim}} = A_{\text{Tim}}^{-1} * A_{Bs}$:

$$M_{Bs \rightarrow \text{Tim}} = 1/24 \begin{bmatrix} 4 & 16 & 4 & 0 \\ 1 & 16 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & 1 \\ 0 & 4 & 16 & 4 \end{bmatrix}$$

6.3.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction de sommets de B-spline : $P_{\text{Tim}} =$

$$M_{Bs \rightarrow \text{Tim}} P_{Bs}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{\text{Tim}}(0) = 1/6 [P_{Bs}(0) + 4P_{Bs}(1) + P_{Bs}(2)]$$

$$P_{\text{Tim}}(1) = 1/24 [P_{Bs}(0) + 16P_{Bs}(1) + 7P_{Bs}(2)]$$

$$P_{\text{Tim}}(2) = 1/24 [7P_{Bs}(1) + 16P_{Bs}(2) + P_{Bs}(3)]$$

$$P_{\text{Tim}}(3) = 1/6 [P_{Bs}(1) + 4P_{Bs}(2) + P_{Bs}(3)]$$

6.3.5. Fonctions de lissage de B-spline exprimées dans la base de Timmer :

$$\Phi_{Bs}(t) = \Phi_{Timmer}(t) M_{Bs \rightarrow Tim}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$Bs \varphi_0(t) = 1/24 [4 Tim \varphi_0(t) + Tim \varphi_1(t)]$$

$$Bs \varphi_1(t) = 1/24 [16 Tim \varphi_0(t) + 16 Tim \varphi_1(t) + 7 Tim \varphi_2(t) + 4 Tim \varphi_3(t)]$$

$$Bs \varphi_2(t) = 1/24 [4 Tim \varphi_0(t) + 7 Tim \varphi_1(t) + 16 Tim \varphi_2(t) + 16 Tim \varphi_3(t)]$$

$$Bs \varphi_3(t) = 1/24 [Tim \varphi_1(t) + 4 Tim \varphi_3(t)]$$

6.4. Schéma initial : schéma de Hermite cubique (He)

6.4.1. Matrice de lissage de Hermite cubique :

Voir §1.3.1.

6.4.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique :

Voir §1.3.2.

6.4.3. Matrice de passage $M_{He \rightarrow Tim} = A_{Timmer}^{-1} * A_{He}$:

$$M_{He \rightarrow Tim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.4.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction de sommets de Hermite :

$$P_{Timmer} = M_{He \rightarrow Tim} P_{He}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Timmer}(0) = P_{He}(0)$$

$$P_{Timmer}(1) = P_{He}(0) + 1/4 P_{He}(2)$$

$$P_{Timmer}(2) = P_{He}(1) - 1/4 P_{He}(3)$$

$$P_{Timmer}(3) = P_{He}(1)$$

6.4.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique exprimées dans la base de Timmer :

$$\Phi_{He}(t) = \Phi_{Timmer}(t) M_{He \rightarrow Tim}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$He \varphi_0(t) = Tim \varphi_0(t) + Tim \varphi_1(t)$$

$$He \varphi_1(t) = Tim \varphi_2(t) + Tim \varphi_3(t)$$

$$He \varphi_2(t) = 1/4 Tim \varphi_1(t)$$

$$He \varphi_3(t) = -1/4 Tim \varphi_2(t)$$

6.5. Schéma initial : schéma de Hermite cubique modifié (mHe)

6.5.1. Matrice de lissage de Hermite cubique modifié :

Voir §1.4.1.

6.5.2. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié :

Voir §1.4.2.

6.5.3. Matrice de passage $M_{mHe \rightarrow Tim} = A_{Timmer}^{-1} * A_{mHe}$:

$$M_{mHe \rightarrow Tim} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.5.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction de sommets de Hermite modifié :

$$P_{Timmer} = M_{mHe \rightarrow Tim} P_{mHe}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{Timmer}(0) = P_{mHe}(2)$$

$$P_{Timmer}(1) = -1/4 P_{mHe}(0) + P_{mHe}(2)$$

$$P_{Timmer}(2) = P_{mHe}(1) - 1/4 P_{mHe}(3)$$

$$P_{Timmer}(3) = P_{mHe}(1)$$

6.5.5. Fonctions de lissage de Hermite cubique modifié exprimées dans la base de

$$\text{Timmer} : \Phi_{\text{mHe}}(t) = \Phi_{\text{Timmer}}(t) M_{\text{mHe} \rightarrow \text{Timmer}}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$\text{mHe} \varphi_0(t) = -1/4 \text{Timmer} \varphi_1(t)$$

$$\text{mHe} \varphi_1(t) = \text{Timmer} \varphi_2(t) + \text{Timmer} \varphi_3(t)$$

$$\text{mHe} \varphi_2(t) = \text{Timmer} \varphi_0(t) + \text{Timmer} \varphi_1(t)$$

$$\text{mHe} \varphi_3(t) = -1/4 \text{Timmer} \varphi_2(t)$$

6.6. Schéma initial : schéma d'Overhauser cubique (Ov)

6.6.1. Matrice de lissage d'Overhauser cubique :

Voir §1.5.1.

6.6.2. Fonctions de lissage d'Overhauser cubique :

Voir §1.5.2.

6.6.3. Matrice de passage $M_{\text{Ov} \rightarrow \text{Timmer}} = A_{\text{Timmer}}^{-1} * A_{\text{Ov}}$:

$$M_{\text{Ov} \rightarrow \text{Timmer}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.6.4. Sommets de Timmer exprimés en fonction de sommets d'Overhauser :

$$P_{\text{Timmer}} = M_{\text{Ov} \rightarrow \text{Timmer}} P_{\text{Ov}}$$

Les lignes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$P_{\text{Timmer}}(0) = P_{\text{Ov}}(1)$$

$$P_{\text{Timmer}}(1) = -1/8 P_{\text{Ov}}(0) + P_{\text{Ov}}(1) + 1/8 P_{\text{Ov}}(2) = P_{\text{Ov}}(1) + 1/8 [P_{\text{Ov}}(2) - P_{\text{Ov}}(0)]$$

$$P_{\text{Timmer}}(2) = 1/8 P_{\text{Ov}}(1) + P_{\text{Ov}}(2) - 1/8 P_{\text{Ov}}(3) = P_{\text{Ov}}(2) - 1/8 [P_{\text{Ov}}(3) - P_{\text{Ov}}(1)]$$

$$P_{\text{Timmer}}(3) = P_{\text{Ov}}(2)$$

6.6.5. Fonctions de lissage d'Overhauser exprimées dans la base de Timmer :

$$\Phi_{\text{Ov}}(t) = \Phi_{\text{Timmer}}(t) M_{\text{Ov} \rightarrow \text{Timmer}}$$

Les colonnes de la matrice de passage aidant, on obtient :

$$\text{Ov} \varphi_0(t) = -1/8 \text{Timmer} \varphi_1(t)$$

$$\text{Ov} \varphi_1(t) = \text{Timmer} \varphi_0(t) + \text{Timmer} \varphi_1(t) + 1/8 \text{Timmer} \varphi_2(t)$$

$$\text{Ov} \varphi_2(t) = 1/8 \text{Timmer} \varphi_1(t) + \text{Timmer} \varphi_2(t) + \text{Timmer} \varphi_3(t)$$

$$\text{Ov} \varphi_3(t) = -1/8 \text{Timmer} \varphi_2(t)$$

Discussion

Exception faite aux matrices de passage impliquant le schéma de Hermite classique, on observe que toutes les matrices de passage possèdent la propriété de symétrie centrale. C'est ce fait qui a rendu attrayante l'idée de coder collectivement ces schémas à travers le réseau de matrices de passage qui les relient.

Par un arrangement approprié des relations entre deux représentations équivalentes d'un même arc de courbe, on peut facilement reconstruire géométriquement le polygone caractéristique de l'un à partir de celui de l'autre.

++++

CHAPITRE 3

++++

Base de six schémas cubiques classiques

CHAPITRE 3

Base de six schémas cubiques classiques

Introduction

Ce chapitre présente les aspects algorithmiques de la proposition pour une base de six schémas cubiques exposée dans la section 3, chap. 7 de la partie I.

1. Schémas accessibles

Nous avons vu au premier chapitre de cette partie que les six schémas désignés par Ba, Bé, Bs, mHe, Tim, et Ov sont symétriques par permutation (voir notamment Tab. A, col. 2). Par suite, les matrices de passage qui relient ces schémas entre-eux possèdent la propriété de symétrie centrale. Par ailleurs, connaissant un paramètre caractéristique du schéma de Hermite modifié, on peut retrouver le paramètre homologue du schéma classique moyennant quelques affectations uniquement (voir algorithme 2.4.1, §2.4.1 ci-dessus). Muni donc d'un noyau de paramètres caractéristiques, on est en mesure de retrouver rapidement les autres paramètres caractéristiques.

1.1. Nombre de paramètres caractéristiques

Entre l'ensemble de sept schémas {Ba, Bé, Bs, He, mHe, Tim, Ov}, en laissant de côté la matrice identité qui transforme un schéma vers lui-même, on peut compter quarante-deux matrices de passage. Ajoutons à cette liste les sept matrices de lissage ainsi que les sept inverses respectives et nous obtenons, en tout, cinquante-six paramètres caractéristiques.

Excepté les matrices de passage de la forme $M_{i \rightarrow mHe}$, avec $i \in \{Ba, Bé, He, Bs, Ov, Tim\}$, nous avons présenté l'ensemble de ces matrices dans le chapitre précédent.

1.2. Typologie des composantes des matrices caractéristiques

Une étude exhaustive de l'ensemble des matrices caractéristiques a permis de séparer les valeurs numériques de leurs composantes en quatre types suivants :

1. des entiers ;
2. des multiples impairs de 2^{-k} où $k \in \mathbb{N}$ et $k < 4$;
3. des multiples entiers irréductibles de $1/3$;
4. des multiples entiers irréductibles de $1/6$.

Il est évident qu'une machine binaire ne peut pas représenter des composantes de types 3 et 4 avec une précision absolue. Toutefois, un choix approprié d'un facteur de pondération basé sur l'étude des composantes de toutes les matrices du noyau permet de contourner ce problème.

1.3. Choix de schéma de référence (ref)

De point de vue théorique, tout schéma de la liste {Ba, Bé, Bs, mHe, Tim, Ov} peut être choisi comme le schéma de référence. Toutefois, en tenant compte de la popularité du schéma de Bernstein-Bézier et de son impacte, tant théorique que pratique sur le développement des méthodes et des systèmes de transcription automatique des formes [Forrest-71, p.71] [Gordon-74, p.294] [Véron-76, p.267] [Boëhm-82, p.214] [Chang-82, p.345] [Farin-83, p.73] [Hering-83, p.3] [Patterson-85, p.276], il nous a paru naturel de prendre celui-ci pour schéma de référence. Par ailleurs, il est souvent conseillé de ramener toute spécification d'une cubique à la représentation équivalente de Bernstein-Bézier, afin de tirer avantage des nombreuses et intéressantes propriétés que possède cette représentation (cf. Note dans [Boëhm-82, p.206]). Pour la segmentation par exemple, R. N. Goldman [Goldman-85, p.39] a suggéré d'opérer une conversion vers Bézier et d'effectuer ensuite la segmentation sous Bézier. Et, une fois la segmentation terminée, de reconvertir au schéma initial.

1.4. Spécification intermédiaire

Ainsi, en prenant le schéma de Bernstein-Bézier cubique pour le schéma de référence, on obtient la spécification intermédiaire (cf. équ. (7.25), §3.5.1, chapitre 7, partie I) suivant :

$$S-I = \{ (A_{Bé}, A_{Bé}^{-1}) \cup \{ (M_{i \rightarrow B_0}, M_{B_0 \rightarrow i}) \mid i \in \{Ba, Bs, mHe, Ov, Tim\} \} \quad (3.1)$$

L'inspection des composantes numériques de toutes les matrices de S-I a montré qu'il suffit de multiplier ces matrices par 12 pour les transformer en matrices entières. Excepté la matrice de lissage $A_{Bé}$ et son inverse $A_{Bé}^{-1}$ (que l'on trouve respectivement dans les annexes 2 et 3), toutes les matrices de la spécification intermédiaire sont réunies dans les annexes 4 (pour les matrices de la forme $M_{i \rightarrow B_0}$) et 5 (pour celles de la forme $M_{B_0 \rightarrow i}$).

1.4.1. Pour changer de schéma de référence

Redéfinir le schéma de référence revient à remplacer les éléments de S-I par des éléments homologues déterminés par rapport au nouveau schéma de référence. Parfois, on peut être amené à modifier le facteur de pondération associé à S-I. Ainsi, par exemple, si l'on prend

le schéma de Timmer pour référence, il sera nécessaire de prendre 24 pour facteur de pondération (cf. $M_{Bs \rightarrow Tim}$, §6.3.3, chap. 2, partie II).

1.4.2. Pour ajouter un nouveau schéma à la base

De toute évidence, le nouveau schéma cubique (*new*) devra vérifier la propriété de symétrie par permutation. On ajoutera alors à S-I le couple ordonné de matrices ($M_{new \rightarrow B_0}$, $M_{B_0 \rightarrow new}$). Comme pour le changement de schéma de référence, l'ajout d'un nouveau schéma à une base existante peut entraîner la modification du facteur de pondération, dans certains cas.

1.5. Spécification définitive : algorithme de codage

Multiplions les matrices de S-I de la relation (3.1) par 12 pour obtenir la spécification définitive S-D définie comme suit :

$$S-D = \{ (12A_{Bé}, 12A_{Bé}^{-1}) \cup \{ (12M_{i \rightarrow B_0}, 12M_{B_0 \rightarrow i}) \mid i \in \{Ba, Bs, mHe, Ov, Tim\} \}$$

Pour obtenir la représentation interne de S-D, nous allons essentiellement compacter chacun des cinq couples ordonnés ($12M_{i \rightarrow B_0}$, $12M_{B_0 \rightarrow i}$) dans une matrice carrée unique de format 4×4 . Ce compactage ne fait que traduire l'équation (7.29) du chapitre 7, §3.5.3, partie I, (voir également Fig. 7.1) en tirant avantage de la propriété de symétrie centrale. On obtient :

$$\{ (12A_{Bé}, 12A_{Bé}^{-1}) \cup \{ M_{i \rightarrow B_0} \mid i \in \{Ba, Bs, mHe, Ov, Tim\} \}$$

Appelons REP la structure de donnée associée à la représentation interne de cet ensemble. REP pourrait, par exemple, être un tableau pouvant stocker sept matrices carrées de format 4×4 .

Allégeons, pour la suite, les notations de l'équation (7.29) (resp. figure 7.1 associée de §3.5.3, chap. 7, partie I) en écrivant :

- B_0 pour désigner un sous-bloc nord-ouest,
- B_1 pour un sous-bloc nord-est,
- B_2 pour un sous-bloc sud-est,
- B_3 pour un sous-bloc sud-ouest.

Les couples ordonnés de sous-blocs : (B_0, B_1) et (B_3, B_2) sont les sous-blocs nord et sud respectifs de la matrice concernée.

On peut alors schématiser le procédé de codage de REP à l'aide du pseudo-code suivant :

Procédure de codage de REP

Données :

S-I spécification intermédiaire (voir équation (3.1) ci-dessus) ;

Résultat

REP structure de donnée appropriée pour stocker et manipuler sept matrices carrées de format de format 4×4 ;

Principale variable de travail :

$M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}$ matrice carrée de format 4×4 .

Début

1. ajouter $12A_{B\acute{e}}$ et $12A_{B\acute{e}}^{-1}$ à REP ;

2. pour tout $i \in \{Ba, Bs, mHe, Ov, Tim\}$ faire

Début {construire et ajouter $M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}$ à REP}

2.1. affecter le sous-bloc nord de $12M_{i \rightarrow B\acute{e}}$ au sous-bloc nord de $M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}$;

2.2. affecter le sous-bloc nord de $12M_{B\acute{e} \rightarrow i}$ au sous-bloc sud de $M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}$;

2.3. ajouter $M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}$ à REP

Fin

Fin

Pour fixer les idées, on supposera que REP soit un tableau de sept matrices carrées de format 4×4 et défini par :

$$REP(0) = 12A_{B\acute{e}}$$

$$REP(1) = 12A_{B\acute{e}}^{-1}$$

$$REP(2) = M_{Ba \leftrightarrow B\acute{e}}$$

$$REP(3) = M_{Bs \leftrightarrow B\acute{e}} \quad (3.2)$$

$$REP(4) = M_{mHe \leftrightarrow B\acute{e}}$$

$$REP(5) = M_{Ov \leftrightarrow B\acute{e}}$$

$$REP(6) = M_{Tim \leftrightarrow B\acute{e}}$$

En ce faisant, nous assimilons (dans la procédure précédente) les indices 2, 3, 4, 5 et 6 respectivement aux désignations Ba, Bs, mHe, Ov et Tim tandis que 0 et 1 rappellent respectivement les matrices $A_{B\acute{e}}$ et $A_{B\acute{e}}^{-1}$. On trouve dans l'annexe 6 les composantes matricielles de REP.

2. Décodage des paramètres caractéristiques

Le calcul de la représentation externe d'un paramètre caractéristique peut être décomposé en deux étapes :

1. on accède d'abord à un ou deux paramètres internes de REP ;
2. on construit ensuite la représentation externe du paramètre cible.

2.1. Typologie des paramètres et des opérations d'accès

Requêtes	Formes internes	Règles de calcul de requête
1. $A_{B\acute{e}}$	$12A_{B\acute{e}}$	$A_{B\acute{e}} = 1/12(12A_{B\acute{e}})$
2. $A_{B\acute{e}}^{-1}$	$12A_{B\acute{e}}^{-1}$	$A_{B\acute{e}}^{-1} = 1/12(12A_{B\acute{e}}^{-1})$
3. $M_{i \rightarrow B\acute{e}}$	$M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}$	$M_{i \rightarrow B\acute{e}} = 1/12[(B_0 \quad B_1), (R B_1 R \quad R B_0 R)]$
4. $M_{B\acute{e} \rightarrow i}$	$M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}$	$M_{B\acute{e} \rightarrow i} = 1/12[(B_3 \quad B_2), (R B_2 R \quad R B_3 R)]$
5. A_i	$\{12A_{B\acute{e}}, M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}\}$	$A_i = A_{B\acute{e}} * M_{i \rightarrow B\acute{e}}$
6. A_i^{-1}	$\{12A_{B\acute{e}}^{-1}, M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}\}$	$A_i^{-1} = M_{B\acute{e} \rightarrow i} * A_{B\acute{e}}^{-1}$
7. $M_{i \rightarrow k}$	$\{M_{i \leftrightarrow B\acute{e}}, M_{k \leftrightarrow B\acute{e}}\}$	$M_{i \rightarrow k} = M_{B\acute{e} \rightarrow k} * M_{i \rightarrow B\acute{e}}$

Tableau 3A Décodage des paramètres caractéristiques

On identifie sept types de requêtes qu'un programme d'application peut formuler. Ceux-ci sont présentés dans le tableau 3A. La première colonne de ce tableau indique la désignation du paramètre caractéristique demandé. La deuxième spécifie le ou les codes de REP dont on a besoin pour reconstruire la forme externe des sept paramètres caractéristiques, et la troisième fournit les règles pour les calculer.

Il convient de signaler la notation inhabituelle employée dans l'expression des règles 3 et 4 pour symboliser la décomposition de matrices en blocs cardinaux. Ainsi, par l'expression $[(B, B_1) (R B_1 R \quad R B_0 R)]$ de la règle 3, nous entendons la matrice :

$$\left[\begin{array}{c|c} B_0 & B_1 \\ \hline R B_1 R & R B_0 R \end{array} \right]$$

où R est la matrice de réflexion de format 2×2 . L'expression homologue associée à la règle 4 devra être interprétée de manière analogue.

2.2. Requêtes et accès de base

On voit (Tableau 3A) que pour répondre à l'une quelconque des quatre premières requêtes, on devra accéder à un seul paramètre de REP. Le décodage est donc quasi immédiat. En effet, il suffit de multiplier ce paramètre par $1/12$ pour obtenir la représentation externe associée. Les quatre opérations d'accès associées à ces quatre requêtes sont dites *opérations d'accès de base*.

Par contre, pour satisfaire à l'une quelconque des trois dernières requêtes (i.e. règles 5, 6 et 7), il faudra effectuer deux accès de base, suivis d'un produit matriciel. En effet, on voit que :

- la requête 5 nécessite les accès de base 1 et 3 ;
- la requête 6 nécessite les accès de base 2 et 4 ;
- la requête 7 nécessite les accès de base 3 et 4.

2.3. Retrouver la représentation externe

Il s'agit essentiellement d'appliquer la propriété de symétrie centrale pour reconstruire les matrices $M_{i \rightarrow B_e}$ et $M_{B_e \rightarrow i}$ à partir de $M_{i \rightarrow B_e}$.

2.3.1. Procédé de construction

La troisième colonne du tableau 3A aidant, nous pouvons formuler le procédé explicite de décodage des paramètres caractéristiques suivant le type de requête provenant du programme d'application. On obtient ainsi, règle par règle, le procédé suivant :

1. **règle 1 :** affectation de $1/12REP(0)$ à A_{B_e} ,
2. **règle 2 :** elle fonctionne de façon similaire à la règle 1 : affectation de $1/12REP(1)$ à $A_{B_e}^{-1}$,
3. **règle 3 :** pour déterminer $M_{i \rightarrow B_e}$ la règle peut être décomposée en quatre étapes suivantes :
 - 3.1. multiplication des deux sous-blocs nord de $REP(i)$ par $1/12$ pour obtenir B_0 et B_1 ,
 - 3.2. affectation des deux sous-blocs B_0 et B_1 (résultat de l'étape 3.1) aux sous-blocs nord respectifs de $M_{i \rightarrow B_e}$,
 - 3.3. permutation des composantes diagonalement opposées de B_0 et de B_1 (résultat de l'étape 3.1) pour obtenir les sous-blocs diagonalement opposés B_2 et B_3 (application de la propriété de symétrie centrale),
 - 3.4. affectation des sous-blocs B_3 et B_2 (résultat de l'étape 3.3) aux sous-blocs sud de $M_{i \rightarrow B_e}$ dans cet ordre pour terminer la construction ;
4. **règle 4** elle se déduit de la règle 3 : le mot **nord** de l'étape 3.1 devant être *remplacé* par le mot **sud** et *nulle part ailleurs*,

5. **règle 5** elle comprend les trois étapes suivantes :
 - 5.1. application de la règle 1 pour obtenir $A_{Bé}$,
 - 5.2. application de la règle 3 pour obtenir $M_{i \rightarrow Bé}$,
 - 5.3. calcul du produit $A_{Bé} * M_{i \rightarrow Bé}$ pour obtenir A_i ;

6. **règle 6** elle comprend les étapes suivantes :
 - 6.1. application de la règle 2 pour obtenir $A_{Bé}^{-1}$,
 - 6.2. application de la règle 4 pour obtenir $M_{Bé \rightarrow i}$,
 - 6.3. calcul du produit $M_{Bé \rightarrow i} * A_{Bé}^{-1}$ pour obtenir A_i^{-1} ;

7. **règle 7** elle se décompose en trois étapes suivantes :
 - 7.1. application de la règle 3 pour obtenir $M_{i \rightarrow Bé}$,
 - 7.2. application de la règle 4 pour obtenir $M_{Bé \rightarrow k}$,
 - 7.3. calcul du produit $M_{Bé \rightarrow k} * M_{i \rightarrow Bé}$ pour obtenir $M_{i \rightarrow k}$.

Les annexes 7 et 8 présentent des traductions pseudo-Pascal des règles 3 et 4 dont dépendent les règles 5 à 7. Les deux premières règles se traduisent essentiellement par des opérations d'affectation que nous ne expliciterons pas.

Remarque

Il convient de remarquer que le produit $M_{Bé \rightarrow k} * M_{i \rightarrow Bé}$ indiqué à l'étape 7.3 n'a pas à être effectué dans sa totalité. En effet, nous savons d'avance que la matrice résultante $M_{i \rightarrow k}$

jouit de la propriété de symétrie centrale. Il suffit donc de remplacer le facteur $M_{Bé \rightarrow k}$ par son sous-bloc nord $[B_0 \ B_1]_{Bé \rightarrow k}$. Le résultat obtenu après calcul est une matrice de format 2×4 qui est identique au sous-bloc nord de $M_{i \rightarrow k}$. La propriété de symétrie centrale aidant, on en déduit le sous-bloc sud par des simples affectations.

Ainsi, on peut décoder l'ensemble de paramètres caractéristiques associés à la liste des schémas : $\{Ba, Bé, Bs, mHe, Ov, Tim\}$. Il reste cependant à définir le procédé spécifique pour les matrices caractéristiques associées au schéma classique de Hermite. Auparavant, illustrons le développement précédent à l'aide d'un exemple.

2.3.2. Exemple 1

Déterminons la matrice de passage $M_{Ov \rightarrow Tim}$ à partir de REP.

Etant donné que Ov et Tim sont tous différents du schéma de référence Bé, il s'agit donc d'une requête de type 7 dans laquelle $i = Ov$ et $k = Tim$. Pour cela, on déterminera dans un premier temps les deux matrices : $M_{Ov \rightarrow Bé}$ et $M_{Bé \rightarrow Tim}$.

a) Déterminons d'abord $M_{Ov \rightarrow Bé}$, en appliquant la règle 3 à une copie des sous-blocs nord de REP(5) (cf. matrice $[M_{Ov \rightarrow Bé}]$, Annexe 6), c'est-à-dire à :

$$[B_0 \ B_1] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 12 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

B_0 B_1

En multipliant chaque sous-bloc par 1/12 (pas 3.1 et 3.2 de la règle 3), nous obtenons :

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/6 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

En exploitant la propriété de symétrie centrale (pas 3.3 de la règle 3), nous obtenons, à partir

de B_0 et B_1 , les sous-blocs qui leur sont respectivement diagonalement opposés, à savoir :

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En regroupant ensuite ces quatre sous-blocs dans une seule matrice de format 4×4 , nous obtenons le paramètre externe $M_{Ov \rightarrow Tim}$, donné par :

$$M_{Ov \rightarrow B\acute{e}} = 1/6 \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Calculons ensuite $M_{B\acute{e} \rightarrow Tim}$: il s'agit ici d'une requête de type 4.

Recopions les sous-blocs sud de REP(6) (cf. matrice $[M_{Tim \leftarrow B\acute{e}}]$, Annexe 6), pour obtenir $[B_3 \ B_2]$:

$$[B_3 \ B_2] = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [B_3] \quad [B_2] \end{array}$$

Appliquons la règle 4 (confondue avec la règle 3, une fois le mot "nord" du pas 3.1 est remplacé par le mot "sud", et nulle part ailleurs) pour obtenir :

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Appliquons ensuite la propriété de symétrie centrale (pas 4.3 de l'algorithme de décodage) :

$$B_2 = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Regroupons ensuite les quatre sous-blocs précédents pour obtenir $M_{B\acute{e} \rightarrow Tim}$, comme suit :

$$M_{B\acute{e} \rightarrow Tim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Enfin, calculons le produit indiqué par la règle 7, c'est-à-dire, en effectuant le produit $M_{B\acute{e} \rightarrow Tim} * M_{Ov \rightarrow B\acute{e}}$ et en tenant compte de la remarque précédente. Il nous suffit donc de

calculer : $[B_0 \ B_1]_{Ov \rightarrow Tim} = [B_0 \ B_1]_{B\acute{e} \rightarrow Tim} * M_{Ov \rightarrow B\acute{e}}$

Après substitution et simplification, nous obtenons :

$$[B_0 \ B_1]_{Ov \rightarrow Tim} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} B_0 \quad B_1 \end{array}$$

La propriété de symétrie centrale nous conduit à :

$$[B_3 \ B_2]_{Ov \rightarrow Tim} = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} B_3 \quad B_2 \end{array}$$

Pour terminer, réunissons $[B_0, B_1]_{Ov \rightarrow Tim}$ et $[B_3, B_2]_{Ov \rightarrow Tim}$ pour obtenir :

$$M_{Ov \rightarrow Tim} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/8 & 1 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce résultat se vérifie aisément par un calcul direct à partir de A_{Ov} et (A_{Tim}^{-1}) (cf. resp. Annexes 2 et 3). On peut aussi le comparer à l'expression donnée dans l'annexe 4.

2.4. Paramètres de Hermite classique : décodage

Les règles (resp. l'algorithme) de décodage présentées ci-dessus doivent être complétées pour déterminer les paramètres caractéristiques du schéma classique de Hermite. Il s'agit essentiellement de permuter des lignes ou des colonnes des paramètres homologues du schéma modifié. En effet, on déduit de l'équation (K) (cf. §1.5.61, chap. 1, partie II) que la matrice de passage du schéma modifié vers le schéma classique est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cela revient à écrire :

$$A_{mHe} = A_{He} * T \quad (3.3)$$

D'où :

$$A_{He} = A_{mHe} * T^{-1} \quad (3.4)$$

On vérifie par un calcul direct que $T^{-1} = {}^tT$. Par conséquent, la relation (3.4) équivaut à :

$$A_{He} = A_{mHe} * {}^tT \quad (3.5)$$

Soit A_j la matrice de lissage d'un schéma cubique quelconque. En multipliant les deux membres de (3.5) à gauche par A_j^{-1} , on obtient :

$$A_j^{-1} * A_{He} = A_j^{-1} * A_{mHe} * {}^tT \quad (3.6)$$

Or, par définition, $A_j^{-1} * A_{He} = M_{He \rightarrow j}$ et $A_j^{-1} * A_{mHe} = M_{mHe \rightarrow j}$. Par suite, (3.6) vient à

$$M_{He \rightarrow j} = M_{mHe \rightarrow j} * {}^tT \quad (3.7)$$

En prenant l'inverse des deux membres de (3.4), on obtient :

$$A_{He}^{-1} = T * A_{mHe}^{-1} \quad (3.8)$$

On en déduit donc que :

$$A_{He}^{-1} * A_j = T * A_{mHe}^{-1} * A_j \quad (3.9)$$

Ou encore, que :

$$M_{j \rightarrow He} = T * M_{j \rightarrow mHe} \quad (3.10)$$

Les relations (3.5), (3.8), (3.7) et (3.10), résumées dans cet ordre dans le tableau 3B, fournissent les outils spécifiques pour transformer les paramètres caractéristiques du schéma modifié en paramètres homologues du schéma classique de Hermite.

-
1. $A_{He} = A_{mHe} * {}^tT$
 2. $A_{He}^{-1} = T * A_{mHe}^{-1}$
 3. $M_{He \rightarrow j} = M_{mHe \rightarrow j} * {}^tT$
 4. $M_{j \rightarrow He} = T * M_{j \rightarrow mHe}$
-

Tableau 3B Principe de décodage de paramètres de Hermite classique.

Il convient de noter qu'en toute rigueur, la matrice T (resp. $T^{-1} = {}^tT$) devrait être désignée $M_{mHe \rightarrow He}$ (resp. $M_{He \rightarrow mHe}$) (cf. Remarques, §1.5.6.1, chap. 1, partie II).

2.4.1. Interprétation géométrique de T

On vérifie aisément que lorsque la matrice T agit à gauche d'une matrice carrée de format 4×4 , (e.g., relations 2 et 4, Tab. 3B), les lignes 2 et 4 de celle-ci restent invariantes. Par contre, l'opposé de la première ligne commute avec la troisième (voir Fig. 3B (a)).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & a4 \\ b1 & b2 & b3 & b4 \\ c1 & c2 & c3 & c4 \\ d1 & d2 & d3 & d4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 & c2 & c3 & c4 \\ b1 & b2 & b3 & b4 \\ -a1 & -a2 & -a3 & -a4 \\ d1 & d2 & d3 & d4 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & a4 \\ b1 & b2 & b3 & b4 \\ c1 & c2 & c3 & c4 \\ d1 & d2 & d3 & d4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{{}^tT} = \begin{bmatrix} a3 & a2 & -a1 & c4 \\ b3 & b2 & -b1 & b4 \\ c3 & c2 & -c1 & c4 \\ d3 & d2 & -d1 & d4 \end{bmatrix} \quad (b)$$

Figure 3A Interprétation géométrique de T .

D'autre part, lorsque sa transposée opère à droite d'une matrice, elle laisse les colonnes 2 et 4 de celle-ci invariantes tandis que l'opposé de la première colonne permute avec la troisième (voir Fig. 3A (b)). Les relations 1 et 3 du tableau 3B correspondent à ce cas.

Ainsi, pour déterminer A_{He}^{-1} (resp. $M_{j \rightarrow He}$), on appliquera d'abord la règle 6 (resp. règle

3) du tableau 3A. Cela donnera A_{mHe}^{-1} (resp. $M_{j \rightarrow mHe}$). On pourra ensuite employer l'algorithme suivant pour transformer A_{mHe}^{-1} en A_{He}^{-1} :

Algorithme 2.4.1.

Données :

$inverse_A_{mHe}$ matrice carrée de format 4×4 ;

Résultat :

$inverse_A_{He}$ matrice carrée de format 4×4 ;

Début

Pour $k := 0$ à 3 faire

Début

$inverse_A_{He}(0,k) := inverse_A_{mHe}(2, k)$;

$inverse_A_{He}(1,k) := inverse_A_{mHe}(1, k)$;

$inverse_A_{He}(2,k) := - inverse_A_{mHe}(0, k)$;

$inverse_A_{He}(3,k) := inverse_A_{mHe}(3, k)$

Fin

Fin

Ce même algorithme permet de déterminer la matrice $M_{j \rightarrow He}$ à condition de remplacer la donnée $inverse_A_{mHe}$ par $M_{j \rightarrow mHe}$. Par ailleurs, une simple permutation des indices des quatre affectations de la boucle conduit à l'algorithme approprié pour le calcul de A_{He} (resp. $M_{He \rightarrow j}$), à partir de $(A_{j \rightarrow mHe})^{-1}$ (resp. $M_{j \rightarrow mHe}$).

En somme toute, le seul coût supplémentaire qu'entraîne le calcul d'un paramètre de Hermite classique est celui des 16 affectations exécutées dans la boucle.

2.5. Modèle d'interaction entre REP et programme d'application

Les opérations d'accès de base, les règles de construction associées aux requêtes plus complexes, ainsi que celles spécifiques au décodage des paramètres de Hermite classique fournissent les éléments nécessaires pour réaliser un système d'interface SRL (system of retrieval logique) entre la base REP et les programmes d'application AP (application programme). La figure 3C schématise cette interaction. Pour fixer les idées, supposons qu'un programme d'application désire effectuer le tracé d'une courbe Overhauser. Sur requête, le système d'interface applique la règle 5 avec $i = 0v$ pour fournir au programme demandeur la matrice de lissage A_{0v} sous sa forme externe.

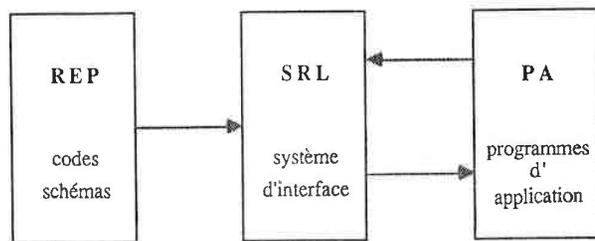


Figure 3C. Interaction entre programme d'application et base de schémas via système d'interface SRL.

Conclusion

La propriété de symétrie par permutation vérifiée par les schémas cubiques de Ball, de Bernstein-Bézier, de B-spline, d'Overhauser et de Timmer, permet de les réunir dans une base compacte à temps de réponse bref. De plus, l'absence d'inversion de matrice dans le procédé de décodage permet de restituer avec une très bonne précision les paramètres externes. Enfin, lorsqu'on ajoute à cette liste le schéma cubique classique de Hermite modifié, on peut accéder également au schéma de Hermite à partir de cette base.

+ + + +
Perspectives, critiques et conclusion
générale
+ + + +

Perspectives, critiques et conclusion générale

L'expression du théorème binomial sous formes matricielles a permis de dégager une vue théorique homogène pour la transformation et l'analyse des courbes à représentation paramétrique polynomiale dont le point courant peut s'exprimer par :

$$C(t) = v_t A P \quad t \in [a, b]$$

La matrice A , de format $(n + 1) \times (n + 1)$, caractérise le choix de $n + 1$ fonctions polynomiales de base tandis que v_t et P désignent respectivement le vecteur $(1 \ t \ t^2 \dots \ t^n)$ et le polygone caractéristique de la courbe.

Pour cette classe de représentation, le "triangle" de Pascal (que nous avons noté G), organisé sous forme d'une matrice triangulaire supérieure (matrice binomiale), s'était avéré un opérateur géométrique et analytique incontournable. Grâce à ses puissances banalisées, on a pu modéliser dans la première partie de cette étude l'évaluation des points, le calcul de dérivées successives, la subdivision d'un arc de courbe en plusieurs sous-segments, ainsi que la conversion de la représentation d'un arc de courbe en d'autres représentations équivalentes.

L'isomorphisme établi entre le groupe additif abélien de \mathbb{R} et celui défini par l'ensemble des puissances banalisées de G par rapport à la multiplication de matrices a permis de rendre compte, par l'exposant de G , de toute translation paramétrique de pas α , et avec un minimum de calcul algébrique (chap. 3, partie I). Ainsi, pour passer du point $C(t) = v_t A P$ correspondant à la valeur paramétrique t , à celui qui correspond à la valeur $\alpha + t$, il suffit d'écrire :

$$C(\alpha+t) = v_t G^\alpha * A P$$

On a vu ensuite que le calcul de la dérivée paramétrique d'un arc de courbe est facilité (cf. chap. 5, partie I) par l'opérateur K obtenu à partir de G en remettant à zéro toutes ses composantes *sauf celles de la première sur-diagonale*.

Par application successive de l'opérateur K et en tenant compte des propriétés multiplicatives de celui-ci, on aboutit au résultat fondamental suivant (chap. 5, partie I) :

$$(C^{(j)}(\alpha))_{j=0, \dots, n} = IG^\alpha P$$

où :

$$IG^\alpha = \text{diag}(0! \ 1! \ 2! \ \dots \ n!) * G^\alpha * A$$

L'opérateur IG^α est d'intérêt premier pour l'analyse de tout schéma paramétrique polynomial dans la mesure où il se déplace le long d'une courbe et fournit en tous ses points une analyse géométrique complète : le produit de sa première ligne par P donnant l'évaluation du point, de sa deuxième ligne par P donnant la dérivée première, et ainsi de suite.

Parmi les applications immédiates que l'on peut tirer de cet opérateur, on peut signaler d'une part, le calcul de la trajectoire d'une machine-outil à commande numérique destinée à réaliser la courbe, étant donné que les trois premières lignes de IG^α permettent de déterminer le trièdre de Frenet en tout point. D'autre part, on peut s'appuyer sur IG^α pour concevoir un éditeur automatique de formules pour l'annotation de points caractéristiques d'un arc de courbe, une application qui s'inscrit dans le prolongement pratique de ce travail.

Ensuite, les deux formes spécialisées IG^0 et IG^1 de IG^α s'inscrivent dans un des soucis premiers de cette étude qui était de formaliser la recherche des indicateurs de géométrie par lesquels on puisse caractériser les qualités géométriques intrinsèques à tout choix de fonctions polynomiales de base. En effet, en multipliant les lignes successives de IG^0 et de IG^1 par P , on détermine rapidement les conditions géométriques aux extrémités d'un arc de courbe donné. Grâce à IG^0 et IG^1 , on peut donc automatiser la recherche des conditions de raccordement à la jonction entre deux segments de courbes.

Aussi bien sur le plan théorique que sur le plan pratique, l'opérateur IG^α représente, par conséquent, un outil puissant pour étudier et analyser rapidement les schémas et les courbes paramétriques polynomiales.

En généralisant la méthode de définition de l'opérateur K , la matrice binomiale G apparaît également comme un opérateur de développement limité de Taylor pour les fonctions polynomiales mono-paramètres lorsque on la considère comme un empilement des sur-diagonales. En effet, si à la place de la première sur-diagonale retenue pour définir K , on avait plutôt retenu celle de rang k , on aurait obtenu un opérateur K_k ($0 \leq k \leq n$) qui conduirait au résultat suivant :

$$v_t K_k = \frac{v_t^{(k)}}{k!}$$

Par conséquent :

$$v_t G = v_{t+h} = \frac{v_t^{(0)}}{0!} + \frac{v_t^{(1)}}{1!} + \dots + \frac{v_t^{(n)}}{n!} \quad (A)$$

On obtient ainsi le développement exact de Taylor du vecteur v_{t+h} , où l'accroissement h vaut 1 . En ne retenant que les sur-diagonales depuis la diagonale principale jusqu'à celle de rang k , on en obtient le développement limité à l'ordre k .

D'autre part, la relation (A) conduit à d'autres d'identités polynomiales intéressantes proposant d'autres manières pour modéliser les transformations paramétriques linéaires. Ces nouveaux modèles sont-ils mieux adaptés au traitement sur ordinateur ? Sont-ils plus stables du point de vue du calcul numérique ? Voilà quelques questions auxquelles d'autres études prolongeant celle-ci devront apporter des réponses.

Pour le moment et dans un souci de nous limiter, nous donnons ici un exemple de ces identités. En effet et de toute évidence, le troisième membre de (A) peut se mettre sous la forme :

$$v_t G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0! & 1! & 2! & \dots & n! \end{pmatrix} T(t) \quad (B)$$

où :

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0! & t & t^2 & \dots & t^n \\ & 1! & 2t & \dots & nt^{n-1} \\ & & & & n!t \\ & & & & n! \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, on a :

$$v_{1+t} = \left(\frac{1}{0!} \quad \frac{1}{1!} \quad \frac{1}{2!} \quad \dots \quad \frac{1}{n!} \right) T(t) \quad (C)$$

La composante de $T(t)$ située dans la colonne j et dans la ligne i est définie par :

$$T(t)_{i,j} = \frac{j!}{(j-i)!} t^{j-i} \quad \text{pour } i \text{ et } j = 0, 1, \dots, n$$

En ne retenant que les $k+1$ premières colonnes de $T(t)$ et en forçant les $n-k$ dernières à zéro, on aboutit également au développement de Taylor limité à l'ordre k pour v_{1+t} . Pour en faire de même pour un accroissement arbitraire $h = \alpha$, c'est-à-dire, pour écrire le développement limité de Taylor pour $v_{\alpha+t}$, il suffira de remplacer le vecteur $(1/0! \ 1/1! \ 1/2! \ \dots \ 1/n!)$ par le vecteur $(1/0! \ \alpha/1! \ \alpha^2/2! \ \dots \ \alpha^n/n!)$ dans les expressions (A), (B) et (C).

L'interprétation de G , vue sur le plan du calcul numérique, a révélé que son inverse G^{-1} peut servir de modèle pour le calcul des différences finies (cf. conséquence 3, §2.3.1, chapitre 3, partie I), modèle qui a l'avantage d'exiger peu d'effort de mémoire pour les calculs manuels. De plus, le calcul de G^{-1} ne fait que reprendre la méthode de génération de la matrice G elle-même. De façon plus précise, G^{-1} se déduit directement de G par un simple changement de signe des composantes de G situées sur ses sur-diagonales de rang impair (on affectera le rang zéro à la diagonale principale). Aussi, est-il désormais possible de dédier un processeur matriciel spécialisé à G^{-1} pour assurer le calcul automatique des différences finies. Cependant, pour juger de l'adéquation pratique du modèle de calcul préconisé par G^{-1} , une étude empirique de sa stabilité numérique est indispensable. Cela, s'inscrit dans le prolongement pratique de ce travail.

Sur la base des résultats de cette étude, la matrice binomiale retrouve ainsi une dimension mathématique nouvelle qui dépasse son rôle traditionnel de générateur de coefficients binomiaux en ce sens qu'elle se présente, en quelque sorte, comme une plaque tournante entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Les calculs qu'elle sous-tend se généralisent d'une façon naturelle au corps \mathbb{C} , bien que l'interprétation pratique de telles généralisations n'ait pas été abordée dans le cadre de cette étude.

Ensuite, lorsque les puissances banalisées de la matrice binomiale s'associent à l'ensemble des matrices diagonales de la forme $D(\beta) = \text{diag}(1 \ \beta \ \beta^2 \ \dots \ \beta^n)$, ces dernières tenant

compte des changements d'échelle dans l'intervalle de paramètre et formant une structure de groupe multiplicatif matriciel, isomorphe au groupe multiplicatif de \mathbb{R}^* , on obtient un ensemble de opérateurs composites puissants de la forme :

$$\eta_{\alpha, \beta} = D(\beta) * G^{\alpha} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Ces opérateurs conduisent, en premier lieu, à une formulation plus générale du théorème binomial, une formulation que l'on peut résumer par :

$$v_{\alpha+\beta t} = v_t \eta_{\alpha, \beta}$$

En deuxième lieu, ils modélisent la conversion de représentation de courbes entre deux schémas de même degré (chap. 7, partie I).

En troisième lieu, lorsque les paramètres α et β sont liés par la relation linéaire :

$$\alpha = 1 - \beta \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

on obtient un opérateur $\eta_{1-\beta, \beta} = D(\beta) * G^{1-\beta}$ qui modélise la segmentation des courbes.

En effet, la substitution de la matrice composite $\eta_{1-\beta, \beta} * A$ à la matrice A dans l'expression du point courant d'un arc de courbe revient à une transformation qui restreint la variation de ce dernier au sous-intervalle paramétrique $[1-\beta, 1]$ (chap. 6, partie I).

En quatrième lieu, la matrice $\eta_{1-\beta, \beta} = D(\beta) * G^{1-\beta}$ définit une matrice des fonctions de Bernstein jusqu'au degré n , en supposant que G et $D(\beta)$ soient de format $(n+1) \times (n+1)$ (chap. 4 partie I). On retrouve ainsi une matrice dont les colonnes successives engendrent les fonctions de base, de degrés croissants, pour le système UNISURF de Bézier. Du fait que les opérateurs $\eta_{\alpha, \beta}$ se calculent par une généralisation de la récurrence binomiale, on peut ainsi passer d'un schéma de Bernstein-Bézier, d'un degré donné, à celui de degré suivant par un procédé similaire à la méthode qui calcule une colonne de la matrice binomiale à partir de son prédécesseur immédiat.

En cinquième lieu, en laissant β varier sur l'intervalle $[1, \infty[$, les composantes de $\eta_{1-\beta, \beta} = D(\beta) * G^{1-\beta}$ fournissent une généralisation des fonctions polynomiales de Bernstein aux fonctions polynomiales rationnelles duales, obtenues par une simple inversion de paramètre

des premières. L'étude approfondie de ces fonctions, dans un souci de trouver leur incidence sur la transcription paramétrique des formes, constitue un axe de recherche qui prolongera cette étude.

En sixième lieu, sous la forme particulière $\eta_{1, -1} = D(-1) * G$, on obtient un test opérationnel pour la propriété de symétrie par permutation, une propriété vérifiée par un nombre important de schémas classiques. En effet, les fonctions de lissage d'un schéma donné, caractérisées par la matrice A , admettent cette propriété si et seulement si A vérifie l'identité matricielle suivante :

$$A * R * A^{-1} = D(-1) * G$$

où R désigne la matrice de réflexion (chap. 2, partie I) de même format que A , $D(\beta)$ et G .

L'intérêt pratique de cette dernière propriété pour nous réside dans la symétrie centrale qu'elle confère aux matrices de passage reliant deux schémas symétriques par permutation. Etant donné deux matrices A_g et A_n vérifiant l'identité précédente, il s'ensuit que les composantes de la matrice de passage $M_{g \rightarrow n} = A_n^{-1} * A_g$ vérifient les relations suivantes :

$$M_{g \rightarrow n}(i, j) = M_{g \rightarrow n}(n-i, n-j)$$

De ce fait, les deux matrices $M_{g \rightarrow n}$ et $M_{n \rightarrow g}$ peuvent être codées de façon compacte dans l'espace d'une seule. La base de six schémas cubiques classiques proposée au chapitre 7 de la partie I tire avantage de cette possibilité pour assurer un codage compact de cette base. En définitive donc, cette étude a posé les bases pour la réalisation d'un système de transcription des courbes et des surfaces qui soit à la fois :

- polyvalent car il pourra intégrer plusieurs schémas classiques dont les transformations et les manipulations de base peuvent s'appuyer sur des modèles standard de calcul ;

et

- autonome dans la mesure où un tel système pourra retrouver tout seul les faits géométriques intrinsèques à chaque choix de schéma qu'il embrasse. Cela, grâce aux indicateurs de géométrie, tels que IG^0 et IG^1 .

C'est dans cette perspective pratique que s'inscrit la suite de nos études afin de concrétiser la deuxième phase visant à intégrer plusieurs schémas dans un même système de transcription

des formes à représentation paramétrique polynomiale.

On peut, en rétrospective, formuler trois objections à propos de notre démarche :

1. le rôle du concepteur semble comme mis en retrait ;
2. le rôle de la spécificité qui fait souvent la richesse et la souplesse des schémas classiques est diminuée ;
3. l'étude des carreaux de surface est absente.

Pour la première objection, nous sommes de l'avis que cela est inévitable dès que l'on songe à aboutir à des systèmes intelligents, tendant vers une autonomie grandissante. Toutefois, le procédé employé dans la section 3, chapitre 5, partie I, pour transformer la modélisation de la dérivation paramétrique en faveur du concepteur, peut toujours être utilisé pour pallier ce défaut dans la plupart des cas. Sur le plan pratique, la recherche de modèles par lesquels le concepteur puisse exprimer sa volonté n'est pas une fin en soi. Ce qui importe, à notre avis, c'est que la représentation elle-même favorise et rende naturel l'intervention du concepteur. Cela, en mettant à la disposition de ce dernier, des paramètres simples et aisés à communiquer, paramètres dont la signification physique ainsi que l'influence sur la courbe soient d'une accessibilité immédiate pour le concepteur. C'est dans ce domaine que réside une des qualités fondamentales du système UNISURF de Bézier, comme l'ont bien souligné Forrest, Chemla, Véron et Ris.

Quand la représentation ne favorise pas d'une façon naturelle l'intervention du concepteur il faudra plutôt recourir à un modèle de traitement automatique.

A la deuxième objection, il nous paraît plus judicieux que, dans un contexte intégrant plusieurs schémas classiques, comme nous l'envisageons, les particularités de chaque schéma soient introduites sous formes d'attributs. C'est en prenant en compte ces attributs que l'on choisira le schéma le mieux adapté pour une étape donnée de la conception.

Toutefois, il est réconfortant que les indicateurs de géométrie IG^0 (resp. IG^1) mettent en relief les conditions géométriques de tout arc de courbe en son point initial (resp. en son point terminal), quel que soit le schéma employé pour exprimer sa transcription.

Pour la troisième objection, comme il a été souligné dans le premier chapitre de la première partie, les modèles de calcul pour les carreaux élémentaires réunissent les modèles de calcul pour les courbes doublés essentiellement de leurs transposées.

Nous rappelons enfin les prolongements à donner à ce travail :

1. L'étude empirique de la stabilité numérique du modèle de calcul des différences finies s'appuyant sur G^{-1} ; dans un premier temps, en collaboration avec les analystes numériques; ensuite avec des sociétés intéressées pour le développement d'un processeur spécialisé dédié au calcul des différences finies, pourvu bien sûr que les résultats de l'étude de stabilité soient positifs.

2. L'étude comparative de la stabilité numérique et de la précision des modèles Tayloriens et ceux à base du triangle de Pascal pour exprimer les transformations paramétriques linéaires des formes, en collaboration à la fois avec les analystes numériques et avec les concepteurs des systèmes de la CFAO.

3. Le développement pratique de la base des schémas cubiques suivants :

- de Ball ; de Bernstein-Bézier ; de B-spline cubique ; de Hermite (à travers le schéma modifié de Hermite) ; d'Overhauser et de Timmer,

schémas qui, à l'exception de celui de Hermite, ont la propriété de symétrie par permutation ; ce développement devra déjà envisager dans sa conception la possibilité éventuelle d'incorporer cette base dans une base embrassant l'ensemble des schémas paramétriques cubiques ; il nécessitera le concours des concepteurs de base des données et des systèmes de CFAO.

4. La réalisation d'un éditeur des formules pour l'annotation des points caractéristiques des formes à représentation paramétriques polynomiale.

5. L'étude de la généralisation rationnelle des fonctions polynomiales de Bernstein et l'application de ces dernières à la transcription des formes paramétriques.

6. La recherche des interprétations concrètes pour le corps des nombres complexes \mathbb{C} des modèles de transformations proposés.

BIBLIOGRAPHIE

☆
☆ ☆ ☆
☆

Les publications sur les représentations paramétriques polynomiales des formes en CFAO sont très nombreuses et témoignent d'une activité intense de recherche dans le domaine. Toutefois, la liste bibliographique qui suit ne prétend aucunement être exhaustive. Elle comprend uniquement les ouvrages et articles dont nous avons fait usage dans la présentation de ce mémoire.

☆
☆ ☆ ☆
☆

BIBLIOGRAPHIE

- [Aitkinson-83] **Aitkinson, L. V. and Harley, P. J.** *An introduction to numerical methods with Pascal.* International Computer Science Series, Addison-Wesley Pub Co. Amsterdam, Holland (1983).
- [Ball-78] **Ball, A. A.** 'A simple specification of the parametric cubic segment.' *Comput. Aided Des.* vol 10, No 3, Butterworth Scientific (1978), 181-182.
- [Bézier-68] **Bézier, P.** 'Procédé de définition numérique des courbes et surfaces non mathématiques.' *Automatisme* tome XIII, No 5, Mai (1968) 189-196.
- [Bézier-72] **Bézier, P.** *Numerical control - Mathematics and applications.* John Wiley & Sons, London, UK (1972).
- [Bézier-77] **Bézier, P.** *Essai de définition numérique des courbes et des surfaces. Contribution à l'étude des courbes et des surfaces paramétriques polynômiales à coefficients vectoriels.* Thèse à l'Université Pierre et Marie Curie, PARIS 6, Fevrier 1977 Tome 1.
- [Bézier-81] **Bézier, P.** 'A view of CAD/CAM.' *Comput.-Aided Des.* vol 13, No 4, Butterworth Scientific (1981), 207-209.
- [Bézier-86] **Bézier, P.** *Mathématiques et CAO volume 4 : courbes et surfaces.* Hermès, Paris, France (1986).
- [Bobrow-74] **Bobrow, L. S. and Arbib, M. A.** *Discrete Mathematics: Applied Algebra for Computer and Information Science.* W. B. Saunders, Philadelphia, USA, (1974).
- [Boehm-82] **Boehm, W.** 'On Cubics: a survey.' *Comput. Graphics and Image Proc.* 19 (1982), 201-226.
- [Bowyer-83] **Bowyer, A. and Woodwark, J.** *A programmer's geometry.* Butterworths, London UK (1983).
- [Brewer-77] **Brewer, J. A. and Anderson, D. C.** 'Visual interaction with Overhauser curves and surfaces.' *Comput. Graphics A Quarterly Rep. SIGGRAPH-ACM,* vol 11, No 2 (1977), 132-137.
- [Carlson-82] **Carlson, W. F.** 'An algorithm and data structure for 3D object synthesis using surface patch intersections.' *Comput. Graphics* vol 16, No 3 (1982), 255-259.
- [Casteljau 85] **Casteljau (de), P.** *Mathématiques et CAO volume 2 : formes à pôles.* Hermès, Paris, France (1985).
- [Catmull-78] **Catmull, E. and Clark, J.** 'Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes.' *Comput.-Aided Des.* vol 10, No 6, Butterworth Scientific (1978), 350-355.
- [Chang-81] **Chang, G. and Wu, J.** 'Mathematical foundations of Bézier's technique.'

- Comput.-Aided Des.* vol 13, No 3, Butterworth Scientific (1981), 133-136.
- [Chang-82] **Chang, G.** 'Matrix formulations of Bézier technique.' *Comput.-Aided Des.* vol 14, No 6, Butterworth Scientific (1982), 345-350.
- [Chemla-71] **Chemla, B.** *Système conversationnel de détermination mathématique de courbes et surfaces.* Thèse à l'Université de Paris VII, Paris France (1971).
- [Clark-76] **Clark, J. H.** 'Designing surfaces in 3-D.' *Communications of the ACM* vol 19, No 8 (August 1976), 454-460.
- [Cohen-80] **Cohen, E. Lyche, T. and Riesenfeld, R.** 'Discrete B-spline and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics.' *ACM Comput. Graphics and Image Proc.* vol 14 (1980), 87-111.
- [Cohen-85] **Cohen, E. Lyche, T. and Schumaker, L. L.** 'Algorithms for degree-raising of splines.' *ACM Trans. on Graphics* vol 4, No 3 (1985), 171-181.
- [Coons-67] **Coons, S. A.** 'Surfaces for computer-aided design of space forms.' *Technical Report MAC-TR-41, M.I.T., Cambridge, Mass, June 1967*
- [Coons-74] **Coons, S. A.** 'Surface patches and B-spline curves.' In *Computer aided geometric design*, Barnhill, R. E. and Riesenfeld, R. F. (Editors), Academic Press, New York, USA (1974) 1-16.
- [Davis-63] **Davis, P. J.** *Interpolation and approximation.* Gin-Blaisdell, New York, (1963).
- [Davis-65] **Davis, P. J.** *The mathematics of matrices.* Gin-Blaisdell, New York, (1965).
- [Doh-85] **Doh, P. K.** *On generating powers of the binomial matrix.* Technical Report n° 85-R-029 CRIN, Université de Nancy I, Vandœuvre-les-Nancy, France (1985) 28 pages.
- [Dube-79] **Dube, P. R.** 'Preliminary specification of spline curves.' *IEEE Trans. On Comput.*, vol C-28, No 4 (April 1979), 286-290.
- [Farin-83] **Farin, G.** 'Algorithms for rational Bézier curves.' *Comput.-Aided Des.* vol 15, No 2, Butterworth Scientific (1983), 73-77.
- [Faure-64] **Faure, R., Kaufmann, A. et Denis-Papin, M.** *Mathématiques nouvelles, tome 1.* Aide-mémoire Dunod, Dunod, Paris, France (1964).
- [Faux-85] **Faux, I. and Pratt, M.** *Computational geometry and manufacture.* Ellis Horwood, Chichester, Sussex, UK (1985).
- [Ferguson-64] **Ferguson, J.** 'Multivariable Curve Interpolation.' *Journal of the ACM* vol 11, No 2 (April 1964), 221-228.
- [Foley-82] **Foley, J. D. and Van Dam, A.** *Fundamentals of interactive computer graphics.* Addison-Wesley, Philippines (1982).
- [Forrest-71] **Forrest, A. R.** 'Définition des surfaces.' *Ingénieurs de l'automobile* XL IV, 10 (1971), 521-527.
- [Forrest-71] **Forrest, A. R.** 'Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials.' *The Computer Journal* vol 15, No 1 (1971), 71-79.
- [Forrest-80] **Forrest, A. R.** 'The twisted cubic curve: a computer-aided geometric design approach.' *The Computer Journal* vol 12, No 4 (1980), 165-172.
- [Gasson-83] **Gasson, P. C.** *Geometry of spatial forms.* Ellis Horwood, Chichester, Sussex, UK (1983).
- [Girard-65] **Girard, G. et Lentin, A.** *Arithmétique algèbre et notion d'analyse.* Tome 2, Cours Maillard. Hachette, Paris, France (1965).
- [Goldman-82] **Goldman, R.** 'Using degenerate Bézier triangles and tetrahedra to subdivide Bézier curves.' *Comput.-Aided Des.* vol 14, No 6, Butterworth Scientific (1982), 307-311.
- [Goldman-83] **Goldman, R.** 'Subdivision algorithms for Bézier triangles.' *Comput.-Aided Des.* vol 15, No 3, Butterworth Scientific (1983), 159-166.
- [Goldman-84] **Goldman, R.** 'Markov chains and computer-aided geometric design : Part I - Problems and constraints.' *ACM Trans. on Graphics* vol 3, No 3 (1984), 204-222.
- [Goldman-85] **Goldman, R.** 'Markov chains and computer-aided geometric design : Part II - Examples and subdivision matrices.' *ACM Trans. on Graphics* vol 4, No 1 (1985), 12-40.
- [Gordon-74] **Gordon, W. J. and Riesenfeld, R. F.** 'Bernstein-Bézier methods for computer-aided design of free-form curves and surfaces.' *Journal of the ACM* vol 21, No 2 (1974), 293-310.
- [Harada-82] **Harada, K. and Nakame, E.** 'Application of the Bézier curve to data interpolation.' *Comput.-Aided Des.* vol 14, No 1, Butterworth Scientific (1982), 55-57.
- [Hartley-78] **Hartley, P. J. and Judd, C. J.** 'Parametrization of Bézier type B-spline curves and surfaces.' *Comput.-Aided Des.* vol 10, No 2, Butterworth Scientific (1978), 130-134.
- [Hering-83] **Hering, L.** 'Closed (C^2 - and C^3 -continuous) Bézier and B-spline curves with given tangent polygons.' *Comput.-Aided Des.* vol 15, No 1, Butterworth Scientific (1983), 3-6.
- [Kelisky-67] **Kelisky, R. P. and Rivlin, T. J.** 'Iterates of Bernstein polynomials.' *Pacific J. Math.* vol 21 No 3 (1967), 511-520.
- [Kjellander-83] **Kjellander, J. A. P.** 'Smoothing of cubic parametric splines.' *Comput.-Aided Des.* vol 15, No 3, Butterworth Scientific (May 1983), 175-177.

- [Kochanek-84] **Kochanek, D. H. and Bartels, R. H.** 'Interpolating splines with local tension, continuity and bias control.' *Acm Comput. Graphics, SIGGRAPH'84* vol 18, No 3 (July 1984), 33-41.
- [Koparkar-84] **Koparkar, P. A. and Mudur, S. P.** 'Computational Techniques for processing parametric surfaces.' *Comput. Vision, graphics, and image proc.* 28 (1984) 303-322.
- [Lane-80] **Lane, J. M. and Riesenfeld, R. F.** 'A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces.' *IEEE Trans. on Pat. Anal. and Machine Intelligence*, vol PAMI-2, No 1 (January 1980), 35-46.
- [Lancaster-86] **Lancaster, P. and Salkauskas, K.** *Curve and Surface Fitting : An Introduction.* Academic Press Inc., London, UK (1986).
- [Lee-69] **Lee, T. M. P.** 'A class of surfaces for computer display.' *AFIPS Conf. Proceedings* vol 34 (1969), pp.309-319.
- [Lewis-81] **Lewis, J. W.** 'Interchanging spline curves using IGES.' *Comput.-Aided Des.* vol 13, No 6, Butterworth Scientific (1981), 359-364.
- [Lipson-81] **Lipson, J. D.** *Elements of Algebra and Algebraic Computing.* Addison-Wesley, Massachusetts, USA (1981).
- [Mac Lane-67] **Mac Lane, S. and Birkhoff, G.** *Algebra.* Macmillan Co., New York, USA (1967).
- [Mortenson-85] **Mortenson, M. E.** *Geometric modeling.* John Wiley & Sons, New York, USA (1985).
- [Newman-79] **Newman, W. M. and Sproul, R. F.** *Principles of Interactive Computer Graphics.* McGraw-Hill Computer Science series, N. Y., N. Y., USA (1979).
- [Nonweiler-84] **Nonweiler, T. R. F.** *Computational mathematics: An introduction to numerical approximation.* Ellis Horwood, Chichester, Sussex, UK (1984).
- [Norrie-73] **Norrie, D. H. and de Vries, G.** *The finite element Method: Fundamentals and applications.* Academic Press, New York, USA (1973).
- [Pascal-1665] **Pascal, B.** *Traité du Triangle Arithmétique.* Paris (1665).
- [Patterson-85] **Patterson, R. R.** 'Projective transformations of the parameter of Bernstein-Bézier curve.' *ACM Transactions on graphics* vol 4, No 4 (1985), 276-290.
- [Peng-84] **Peng, Q. S.** 'An algorithm for finding the intersection lines between two B-spline surfaces.' *Comput.-Aided Des.* vol 16, No 4, Butterworth Scientific (1984), 191-196.
- [Peters-74] **Peters, G. J.** 'Interactive computer graphics application of the parametric bi-cubic surface to engineering design problem.' In *Computer aided geometric design*, Barnhill, R. E. and Riesenfeld, R. F. (Editors), Academic Press, New York, USA (1974) 259-302.
- [Piegl-84] **Piegl, L. A.** 'A generalization of the Bernstein-Bézier Method.' *Comput.-Aided Des.* vol 16, No 4, Butterworth Scientific (1984), 209-215.
- [Plastock-87] **Plastock, R. A. and Kalley, G.** *Infographie : cours et problèmes.* McGraw-Hill, Série Schaume, Paris, France (1987).
- [Ris-75] **Ris, G.** *Raccordement à l'ordre n entre carreaux de surfaces définies par des polynômes biparamétriques à coefficients vectoriels. Application aux surfaces UNISURF.* Thèse de l'Université de Nancy I, France (1975).
- [Rogers-76] **Rogers, D. F. and Adams, J. A.** *Mathematical elements of computer graphics.* McGraw-Hill, Inc. New York, USA (1976).
- [Schoenberg-59] **Schoenberg, I. J.** 'On variational diminishing and approximation methods.' In *On numerical approximation*, R. E. Langer, Ed., U of Wisconsin Press, (1959), 249-274.
- [Timmer-80] **Timmer, H. G.** 'Alternative representation for parametric cubic curves and surfaces.' *Comput.-Aided Des.* vol 12, No 1, Butterworth Scientific (1980), 25-28.
- [Véron-73] **Véron, M.** *Contribution à l'étude des surfaces numériques Unisurf - conditions de raccordement.* Thèse à l'Université de Nancy I, Février 1973.
- [Véron-76] **Véron, M., Ris, G. and Muse, J-P.** 'Continuity of biparametric surface patches.' *Comput.-Aided Des.* vol 8, No 4, Butterworth Scientific (1976), 267-273.

ANNEXES



Les annexes sont présentées dans le but principal d'aider ceux qui aimeront réaliser des systèmes opérationnels à partir de ce travail sans qu'ils soient obligés d'aller rechercher dans le texte les données essentielles dont ils auront besoin. Ainsi, par exemple, l'Annexe VI donne le codage interne de la base de schémas symétriques par permutation tandis que VII et VIII en donnent les principaux algorithmes de décodage des matrices caractéristiques à partir du code interne.



ANNEXE I

Matrices de dérivation de neuf schémas cubiques classiques.

$$\Delta_{Al} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{Tay} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{Ba} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{Bé} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{Bs} = 1/6 \begin{bmatrix} -11 & 18 & -9 & 2 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & 2 \\ -2 & 9 & -18 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{He} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 6 & -4 & -1 \\ 6 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{mHe} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{Tim} = \begin{bmatrix} -8 & 8 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{Ov} = 1/2 \begin{bmatrix} -18 & 19 & -16 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 16 & -19 & 18 \end{bmatrix}$$

Matrices de dérivation de neuf schémas cubiques classiques

ANNEXE II

Matrices de lissage des schémas cubiques de Ball (Ba), de Bernstein-Bézier (Bé), de B-spline (Bs), de Hermite (He), de Hermite modifié (mHe), d'Overhauser (Ov) et de Timmer (Tim).

$$A_{Ba} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{Bé} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{Bs} = 1/6 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{He} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{mHe} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{Ov} = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{Tim} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

ANNEXE III

Inverse des matrices de lissage des schémas cubiques de Ball (Ba), de Bernstein-Bézier (Bé), de B-spline (Bs), de Hermite (He), de Hermite modifié (mHe), d'Overhauser (Ov) et de Timmer (Tim).

$$A_{Ba}^{-1} = 1/2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{Bé}^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{Bs}^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 11 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A_{He}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{mHe}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{Ov}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A_{Tim}^{-1} = 1/4 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ANNEXE IV

Matrices de passage des six schémas cubiques : de Ball (Ba), de B-spline (Bs), de Hermite (He), de Hermite modifié (mHe), d'Overhauser (Ov) et de Timmer (Tim) vers Bernstein-Bézier cubique:

$$M_{i \rightarrow B\acute{e}} = A_{B\acute{e}}^{-1} * A_i \text{ avec } i \in \{Ba, Bs, He, mHe, Ov, Tim\}$$

$$M_{Ba \rightarrow B\acute{e}} = 1/3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{Bs \rightarrow B\acute{e}} = 1/6 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{He \rightarrow B\acute{e}} = 1/3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{mHe \rightarrow B\acute{e}} = 1/3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{Ov \rightarrow B\acute{e}} = 1/6 \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{Tim \rightarrow B\acute{e}} = 1/3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Remarque

Excepté la matrice de passage $M_{He \rightarrow B\acute{e}}$, chaque matrice vérifie la propriété de symétrie centrale : $M_{i,j} = M_{3-i, 3-j}$ pour i et $j = 0, 1, \dots, 3$.

ANNEXE V

Matrices de passage du schéma cubique de Bernstein-Bézier respectivement vers le schéma de Ball (Ba), de B-spline (Bs), de Hermite (He), de Hermite modifié (mHe), d'Overhauser (Ov) et de Timmer (Tim) :

$$M_{B\acute{e} \rightarrow i} = A_i^{-1} * A_{B\acute{e}} \text{ avec } i \in \{Ba, Bs, He, mHe, Ov, Tim\}$$

$$M_{B\acute{e} \rightarrow Ba} = 1/2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{B\acute{e} \rightarrow Bs} = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M_{B\acute{e} \rightarrow He} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad M_{B\acute{e} \rightarrow mHe} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_{B\acute{e} \rightarrow Ov} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \quad M_{B\acute{e} \rightarrow Tim} = 1/4 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Remarque

Excepté la matrice de passage $M_{B\acute{e} \rightarrow He}$, chaque matrice vérifie la propriété de symétrie centrale : $M_{i,j} = M_{3-i, 3-j}$ pour i et $j = 0, 1, \dots, 3$.

ANNEXE VI

Codage interne de la spécification définitive SD de la base formée des six schémas cubiques: de Ball (Ba), de Bernstein-Bézier (Bé), de B-spline (Bs), de Hermite modifié (mHe), d'Overhauser (Ov), et de Timmer (Tim). Schéma de référence : Bernstein-Bézier.

$$[A_{Bé}] \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 36 & 0 & 0 \\ 36 & -72 & 36 & 0 \\ -12 & 36 & -36 & 12 \end{bmatrix}$$

$$[A_{Bé}^{-1}] \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 4 & 0 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$[M_{Bé \rightarrow Tim}] \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 18 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M_{Bé \rightarrow Bs}] \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 72 & -84 & 24 & 0 \\ 0 & 24 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M_{Bé \rightarrow mHe}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 36 & -36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$[M_{Bé \rightarrow Ov}] \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 \\ -2 & 12 & 2 & 0 \\ 72 & -72 & 0 & 12 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M_{Bé \rightarrow Tim}] \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 16 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ANNEXE VII

Algorithme 1 : Règle 3 : Décodage de la matrice de passage $M_{g \rightarrow Bé}$ à partir de la matrice $M_{g \leftarrow Bé}$ qui stocke la forme condensée des matrices de passage $M_{g \rightarrow Bé}$ et $M_{Bé \rightarrow g}$ multipliées par 12 pour convertir les composantes en entiers.

Données

$M_{g \leftarrow Bé}$ matrice à composantes entières, de format 4x4 ;

Résultats

$M_{g \rightarrow Bé}$ matrice à composantes entières, de format 4x4 ;

Principale variable de travail

f entier, facteur de pondération dont la finalité est de restituer les valeurs effectives des matrices codées

Début

f := 1/12 ;

Pour j := 0 à 3 faire

Début

Pour i := 0 à 1 faire

Début

$M_{g \rightarrow Bé}(i, j) := f * M_{g \leftarrow Bé}(i, j) ;$

$M_{g \rightarrow Bé}(3-i, 3-j) := M_{g \rightarrow Bé}(i, j)$

Fin

Fin

Fin

Coût : 1 division, 8 multiplications et 16 soustractions (sans tenir compte du coût de gestion des indices de boucle).

ANNEXE VIII

Algorithme 2 : Règle 4 : Décodage de la matrice de passage $M_{Bé \rightarrow g}$ à partir de la matrice $M_{g \leftarrow B é}$ qui stocke la forme condensée des matrices de passage $M_{g \rightarrow B é}$ et $M_{B é \rightarrow g}$ multipliées par 12 pour convertir les composantes en entiers.

Données

$M_{g \leftarrow B é}$ matrice à composantes entières, de format 4x4 ;

Résultats

$M_{B é \rightarrow g}$ matrice à composantes entières, de format 4x4 ;

Principale variable de travail

f entier, facteur de pondération pour restituer les valeurs effectives de matrices codées ;

Début

f := 1/12 ;

Pour j := 0 à 3 faire

Début

Pour i := 0 à 1 faire

Début

$M_{B é \rightarrow g}(i, j) := f * M_{g \leftarrow B é}(i+2, j) ;$

$M_{B é \rightarrow g}(3-i, 3-j) := M_{B é \rightarrow g}(i, j)$

Fin

Fin

Fin

Coût : 1 division, 8 multiplications, 8 additions et 16 soustractions (sans tenir compte du coût de gestion des indices de boucle).

Annexe IX

ANNEXE IX

Cette annexe illustre à l'aide de huit schémas cubiques classiques la grande facilité qu'offrent les deux opérateurs IG^0 et IG^1 pour retrouver la géométrie aux limites de tout arc de courbe paramétrique polynomiale. Ces résultats s'étendent à tous les schémas quel que soit leur degré.

On rappelle pour mémoire que :

$$IG^\alpha = \text{diag}(0! \ 1! \ 2! \ \dots \ n!) * G^\alpha * A$$

où $\alpha \in \{0, 1\}$ et A désigne la matrice de lissage (cf. Annexe II) du schéma, celui-ci étant supposé de degré n.

Pour le cas cubique :

$$IG^0 = \text{diag}(1 \ 1 \ 2 \ 6) * A \quad \text{et} \quad IG^1 = \text{diag}(1 \ 1 \ 2 \ 6) * G * A$$

Les lignes successives de IG^0 permettent de lire les conditions géométrique en $t = 0$. IG^1 fait de même en $t = 1$.

Les schémas tests sont ceux présentés au chapitre 1. Pour chaque schéma on donnera :

1. IG^0 et IG^1
2. IG^0P et IG^1P

1. Schéma Algébrique cubique

Forme explicite de $AIIG^0$:

$$AIIG^0 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 6 \end{bmatrix}$$

a. Conditions géométriques en $t = 0$ spécifiées par ${}_{A_1}\mathbf{IG}^0 \mathbf{P}$:

$${}_{A_1}\mathbf{IG}^0(i, *)\mathbf{P} = i! \mathbf{P}_i \quad i = 0, \dots, 3.$$

Forme explicite de ${}_{A_1}\mathbf{IG}^1$:

$${}_{A_1}\mathbf{IG}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 2 & 6 \\ 0 & & & 6 \end{bmatrix}$$

b. Conditions géométriques en $t = 1$ spécifiées par ${}_{A_1}\mathbf{IG}^1 \mathbf{P}$:

$${}_{A_1}\mathbf{IG}^1(0, *)\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$$

$${}_{A_1}\mathbf{IG}^1(1, *)\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2 + 3\mathbf{P}_3$$

$${}_{A_1}\mathbf{IG}^1(2, *)\mathbf{P} = 2\mathbf{P}_2 + 6\mathbf{P}_3$$

$${}_{A_1}\mathbf{IG}^1(3, *)\mathbf{P} = 6\mathbf{P}_3$$

Ainsi, ${}_{A_1}\mathbf{IG}^0 \mathbf{P}$ et ${}_{A_1}\mathbf{IG}^1 \mathbf{P}$ reproduisent les mêmes conditions géométriques respectives en $t = 0$ et $t = 1$ que le calcul direct du chap. 1, partie I (§6.1.1).

2. Schéma de Ball cubique

Forme explicite de ${}_{B_a}\mathbf{IG}^0$

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Conditions géométriques en $t = 0$ spécifiées par ${}_{B_a}\mathbf{IG}^0 \mathbf{P}$:

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^0(0, *)\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$$

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^0(1, *)\mathbf{P} = 2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$$

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^0(2, *)\mathbf{P} = 2(\mathbf{P}_0 - 4\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)$$

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^0(3, *)\mathbf{P} = 12(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$$

Forme explicite de ${}_{B_a}\mathbf{IG}^1$:

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -8 & 2 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Conditions géométriques en $t = 1$ spécifiées par ${}_{B_a}\mathbf{IG}^1 \mathbf{P}$:

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^1(0, *)\mathbf{P} = \mathbf{P}_3$$

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^1(1, *)\mathbf{P} = 2(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)$$

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^1(2, *)\mathbf{P} = 2(\mathbf{P}_0 + 2\mathbf{P}_1 - 4\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)$$

$${}_{B_a}\mathbf{IG}^1(3, *)\mathbf{P} = 12(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$$

Ainsi, ${}_{B_a}\mathbf{IG}^0 \mathbf{P}$ et ${}_{B_a}\mathbf{IG}^1 \mathbf{P}$ reproduisent les mêmes conditions géométriques respectives en $t = 0$ et $t = 1$ que le calcul direct du chap. 1, partie I (§6.2.1).

3. Schéma de Bernstein-Bézier cubique

Forme explicite de ${}_{Bé}IG^0$:

$${}_{Bé}IG^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & -12 & 6 & 0 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

a. Conditions géométriques en $t = 0$ spécifiées par ${}_{Bé}IG^0 P$:

$${}_{Bé}IG^0(0, *) P = P_0$$

$${}_{Bé}IG^0(1, *) P = 3(P_1 - P_0)$$

$${}_{Bé}IG^0(2, *) P = 6(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

$${}_{Bé}IG^0(3, *) P = 6(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

Forme explicite de ${}_{Bé}IG^1$:

$${}_{Bé}IG^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

b. Conditions géométriques en $t = 1$ spécifiées par ${}_{Bé}IG^1 P$:

$${}_{Bé}IG^1(0, *) P = P_3$$

$${}_{Bé}IG^1(1, *) P = 3(P_3 - P_2)$$

$${}_{Bé}IG^1(2, *) P = 6(P_1 - 2P_2 + P_3)$$

$${}_{Bé}IG^1(3, *) P = 6(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

Ainsi, ${}_{Bé}IG^0 P$ et ${}_{Bé}IG^1 P$ reproduisent les mêmes conditions géométriques respectives en $t = 0$ et $t = 1$ que le calcul direct du chap. 1, partie I (§6.3.1).

4. Schéma de B-spline cubique

Forme explicite de ${}_{Bs}IG^0$:

$${}_{Bs}IG^0 = 1/6 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

a. Conditions géométriques en $t = 0$ spécifiées par ${}_{Bs}IG^0 P$:

$${}_{Bs}IG^0(0, *) P = 1/6(P_0 + 4P_1 + P_2)$$

$${}_{Bs}IG^0(1, *) P = 1/2(P_2 - P_0)$$

$${}_{Bs}IG^0(2, *) P = P_0 - 2P_1 + P_2$$

$${}_{Bs}IG^0(3, *) P = -P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3$$

Forme explicite de ${}_{Bs}IG^1$:

$${}_{Bs}IG^1 = 1/6 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

b. Conditions géométriques en $t = 1$ spécifiées par ${}_{Bs}IG^1 P$:

$${}_{Bs}IG^1(0, *) P = 1/6(P_1 + 4P_2 + P_3)$$

$${}_{Bs}IG^1(1, *) P = 1/2(P_3 - P_1)$$

$${}_{B_s}IG^1(2, *)P = P_1 - 2P_2 + P_3$$

$${}_{B_s}IG^1(3, *)P = -P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3$$

Ainsi, ${}_{B_s}IG^0P$ et ${}_{B_s}IG^1P$ reproduisent les mêmes conditions géométriques respectives en $t=0$ et $t=1$ que le calcul direct du chap. 1, partie I (§6.4.1).

Par ailleurs, on remarque que : ${}_{B_s}IG^1(*, j+1) = {}_{B_s}IG^0(*, j)$ pour $j=0, 1, 2$ traduisant ainsi la propriété générale suivante des ${}_{B_s}\psi_i$ (cf. §6.4.1, chap. 1, part. I) :

$${}_{B_s}\psi_i^{(k)}(0) = {}_{B_s}\psi_{i+1}^{(k)}(1) \quad \text{pour } i=0, 1, 2 \text{ et } 0 \leq k \leq 3.$$

5. Schéma de Hermite cubique

Forme explicite de ${}_{He}IG^0$:

$${}_{He}IG^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & -4 & -2 \\ 12 & -12 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

a. Conditions géométriques en $t=0$ spécifiées par ${}_{He}IG^0P$:

$${}_{He}IG^0(0, *)P = P_0$$

$${}_{He}IG^0(1, *)P = P_2$$

$${}_{He}IG^0(2, *)P = 2(-3P_0 + 3P_1 - 2P_2 - P_3)$$

$${}_{He}IG^0(3, *)P = 6(2P_0 - 2P_1 + P_2 + P_3)$$

Forme explicite de ${}_{He}IG^1$:

$${}_{He}IG^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 2 & 4 \\ 12 & -12 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

b. Conditions géométriques en $t=1$ spécifiées par ${}_{He}IG^1P$:

$${}_{He}IG^1(0, *)P = P_1$$

$${}_{He}IG^1(1, *)P = P_3$$

$${}_{He}IG^1(2, *)P = 2(3P_0 - 3P_1 + P_2 + 2P_3)$$

$${}_{He}IG^1(3, *)P = 6(2P_0 - 2P_1 + P_2 + P_3)$$

Ainsi, ${}_{He}IG^0P$ et ${}_{He}IG^1P$ reproduisent les mêmes conditions géométriques respectives en $t=0$ et $t=1$ que le calcul direct du chap. 1, partie I (§6.5.1).

6. Schéma d'Overhauser

Forme explicite de ${}_{Ov}IG^0$:

$${}_{Ov}IG^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -3 & 9 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Conditions géométriques en $t=0$ spécifiées par ${}_{Ov}IG^0P$:

$${}_{Ov}IG^0(0, *)P = P_1$$

$${}_{Ov}IG^0(1, *)P = 1/2(P_2 - P_0)$$

$${}_{Ov}IG^0(2, *)P = 2P_0 - 5P_1 + 4P_2 - P_3$$

$${}_{Ov}IG^0(3, *)P = 3(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

Forme explicite de ${}_{O_V}IG^1$:

$${}_{O_V}IG^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

b. Conditions géométriques en $t = 1$ spécifiées par ${}_{O_V}IG^1 P$:

$${}_{O_V}IG^1(0, *) P = P_2$$

$${}_{O_V}IG^1(1, *) P = 1/2(P_3 - P_1)$$

$${}_{O_V}IG^1(2, *) P = -P_0 + 4P_1 - 5P_2 + 2P_3$$

$${}_{O_V}IG^1(3, *) P = 3(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

Ainsi, ${}_{O_V}IG^0 P$ et ${}_{O_V}IG^1 P$ reproduisent les mêmes conditions géométriques respectives en $t = 0$ et $t = 1$ que le calcul direct du chap. 1, partie I (§6.6.1).

7. Schéma cubique de Taylor

Forme explicite de ${}_{Tay}IG^0$:

$${}_{Tay}IG^0 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

a. Conditions géométriques en $t = 0$ spécifiées par ${}_{Tay}IG^0 P$:

$${}_{Tay}IG^0(0, *) P = P_0$$

$${}_{Tay}IG^0(1, *) P = P_1$$

$${}_{Tay}IG^0(2, *) P = P_2$$

$${}_{Tay}IG^0(3, *) P = P_3$$

Forme explicite de ${}_{Tay}IG^1$:

$${}_{Tay}IG^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ & 1 & 1 & 1/2 \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

b. Conditions géométriques en $t = 1$ spécifiées par ${}_{Tay}IG^1 P$:

$${}_{Tay}IG^1(0, *) P = P_0 + P_1 + 1/2P_2 + 1/6P_3$$

$${}_{Tay}IG^1(1, *) P = P_1 + P_2 + 1/2P_3$$

$${}_{Tay}IG^1(2, *) P = P_2 + P_3$$

$${}_{Tay}IG^1(3, *) P = P_3$$

Ainsi, ${}_{Tay}IG^0 P$ et ${}_{Tay}IG^1 P$ reproduisent les mêmes conditions géométriques respectives en $t = 0$ et $t = 1$ que le calcul direct du chap. 1, partie I (§6.7.1).

8. Schéma cubique de Timmer

Forme explicite de ${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^0$:

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 10 & -16 & 8 & -2 \\ -12 & 24 & -24 & 12 \end{bmatrix}$$

a. Conditions géométriques en $t = 0$ spécifiées par ${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^0 \mathbf{P}$:

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^0(0, *) \mathbf{P} = P_0$$

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^0(1, *) \mathbf{P} = 4(P_1 - P_0)$$

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^0(2, *) \mathbf{P} = 2(5P_0 - 8P_1 + 4P_2 - P_3)$$

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^0(3, *) \mathbf{P} = 12(-P_0 + 2P_1 - 2P_2 + P_3)$$

Forme explicite de ${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^1$:

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ -2 & 8 & -16 & 10 \\ -12 & 24 & -24 & 12 \end{bmatrix}$$

b. Conditions géométriques en $t = 1$ spécifiées par ${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^1 \mathbf{P}$:

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^1(0, *) \mathbf{P} = P_3$$

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^1(1, *) \mathbf{P} = 4(P_3 - P_2)$$

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^1(2, *) \mathbf{P} = 2(-P_0 + 4P_1 - 8P_2 + 5P_3)$$

$${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^1(3, *) \mathbf{P} = 12(-P_0 + 2P_1 - 2P_2 + P_3)$$

Ainsi, ${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^0 \mathbf{P}$ et ${}_{\text{Tim}}\mathbf{IG}^1 \mathbf{P}$ reproduisent les mêmes conditions géométriques respectives en $t = 0$ et $t = 1$ que le calcul direct du chap. 1, partie I (§6.8.1).

ANNEXE X

Cette annexe, présentée exceptionnellement en anglais, regroupe les relations donnant l'analyse géométrique complète d'une courbe paramétrique polynomiale au point paramétrique $\alpha \in [0, 1]$. Elle souligne l'intérêt pratique et théorique de l'opérateur IG^α . Sur le plan théorique, celui-ci permet notamment l'analyse rapide de tout schéma paramétrique polynomial. Sur le plan pratique, on peut se fonder sur cet opérateur et sur le tableau présenté ci-dessous pour imaginer un éditeur de formules pour annoter des points caractéristiques du tracé d'un arc de courbe, voire pour aider les chercheurs en CFAO à préparer leurs publications. C'est dans ce souci que nous présentons d'un côté les relations et de l'autre les données fournies par IG^α et le polygone caractéristique P.

Mais par-dessus tout, IG^α résume en un seul nœud les paramètres nécessaires au calcul de trajectoire de machine-outil ("tool path geometry" en anglais) chargés de façonner la courbe.

The geometry indicator IG^α and the characteristic parameters for parametric polynomial curve analysis

Review of notations, conventions and definitions:

P matrix of geometric coefficients (control points): $P = {}^t(P_i)_{i=0, \dots, n}$

with:

$$P_i \in \mathbb{R}^3, \text{ that is: } P_i = (x_i^1 \quad x_i^2 \quad x_i^3).$$

We define IG^α as :

$$IG^\alpha = \text{diag}(1 \quad 1 \quad 2! \quad \dots \quad n!) * G^\alpha * A$$

with :

G : an $(n+1) \times (n+1)$ sized Pascal triangle arranged as an upper triangular matrix. It can be raised to any real power α as follows :

$$G_{i,j}^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{for } i > j \\ \alpha^{j-i} C_j^i & \text{for } i \leq j \end{cases}$$

for all $i, j = 0, 1, \dots, n$ and where :

$$C_j^i = \begin{cases} 0 & \text{for } i > j \\ \frac{j!}{i!(j-i)!} & \text{for } i \leq j \end{cases}$$

For a formal proof, refer to chap. 3, part. I.

A : the blending matrix associated with an arbitrary choice of parametric scheme.

Assuming a parametric curve segment defined by $C(t) = v_t A P$ with $t \in [0, 1]$ and $v_t = (1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^n)$, we shall use the following conventional notations [Mortenson-85, chap. 5, pp.267-276]:

- q** the generic point on a characteristic line or plane passing through the point $C(\alpha)$ of the parametric arc;
- r** the generic point on the rectifying plane to the curve at the point $C(\alpha)$ of the parametric arc;
- t_α** the unit tangent vector to the curve at $C(\alpha)$;
- n_α** the principal unit normal vector to the curve at $C(\alpha)$;
- b_α** the unit binormal vector to the curve at $C(\alpha)$;
- κ_α** the curvature at $C(\alpha)$;
- ρ_α** radius of curvature at $C(\alpha)$;
- τ_α** torsion at the point $C(\alpha)$;
- u, w** two unbounded parameter variables $u, w \in \mathbb{R}$ for writing characteristic line and plane equations determined by the moving trihedron **t_α**, **n_α** and **b_α** at $C(\alpha)$;
- a** a scalar determining the distance along unit vecteurs **t_α**, **n_α** and **b_α**;

as well as the following somewhat personal conventions :

ζ_α centre of curvature at the arc point $C(\alpha)$;

$C^{(i)}(\alpha)$ the i^{th} parametric derivative of the curve at $C(\alpha)$;

$IG_{i,*}^\alpha$ for the i -row vector of IG^α with $i = 0, 1, \dots, n$;

$IG_{i,*}^\alpha P$ for the "blocked scalar or dot products" defined as follows :

$$IG_{i,*}^\alpha P = (IG_{i,*}^\alpha \cdot [x_0^1 \ x_1^1 \ \dots \ x_n^1] \ \dots \\ IG_{i,*}^\alpha \cdot [x_0^3 \ x_1^3 \ \dots \ x_n^3]);$$

$\det []$ determinant of the unspecified square matrix within brackets;

We recall equation (5.42) of chapter 5, part I :

$$C^{(j)}(\alpha) = IG_{j,*}^\alpha P \quad \text{for all } \alpha \in [0, 1]$$

$$C^{(j)}(\alpha) = (j!) \cdot [IG^\alpha * A](j, *) \cdot P.$$

For formal proofs of the analytic relations used in constructing this table, refer to Mortenson [Mortenson-85, chap. 5, pp.267-276].

Analytic property defining relation	Data drawn from $IG^\alpha P$
$t_\alpha = C^{(1)}(\alpha)/ C^{(1)}(\alpha) $	$IG_{1,*}^\alpha P = C^{(1)}(\alpha)$
Tangent line equation through $C(\alpha)$:	
$q = C(\alpha) + at_\alpha$	$IG_{0,*}^\alpha P, IG_{1,*}^\alpha P$
Normal plane equation through $C(\alpha)$:	

$$(q - C(\alpha)) \cdot t_\alpha = 0 \quad IG_{0,*}^\alpha P, \quad IG_{1,*}^\alpha P$$

$$\text{or} \quad (q - C(\alpha)) \cdot C^{(1)}(\alpha) = 0 \quad " \quad "$$

Principal normal :

First, determine :

$$k_\alpha = C^{(2)}(\alpha) - \frac{[C^{(2)}(\alpha) \cdot C^{(1)}(\alpha)] C^{(1)}(\alpha)}{|C^{(1)}(\alpha)|^2} \quad IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

then :

$$n_\alpha = k_\alpha / |k_\alpha| \quad IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Principal normal line equation through $C(\alpha)$:

$$q = C(\alpha) + an_\alpha \quad IG_{0,*}^\alpha P, IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Binormal vector through $C(\alpha)$:

$$b_\alpha = t_\alpha \times n_\alpha \quad IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Binormal vector line equation through $C(\alpha)$:

$$q = C(\alpha) + ab_\alpha \quad IG_{0,*}^\alpha P, IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Osculating plane equation through $C(\alpha)$:

$$\det [q - C(\alpha) \ C^{(1)}(\alpha) \ C^{(2)}(\alpha)] = 0 \quad IG_{0,*}^\alpha P, IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

$$\text{or:} \quad q = C(\alpha) + ut_\alpha + wn_\alpha \quad IG_{0,*}^\alpha P, IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Rectifying plane equation through $C(\alpha)$:

$$[r - C(\alpha)] \cdot n_\alpha = 0 \quad IG_{0,*}^\alpha P, IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

$$\text{or:} \quad r = C(\alpha) + ut_\alpha + wb_\alpha \quad IG_{0,*}^\alpha P, IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Curvature to the arc at the point $C(\alpha)$:

$$\kappa_\alpha = \rho_\alpha^{-1} = \frac{|C^{(1)}(\alpha) \times C^{(2)}(\alpha)|}{|C^{(1)}(\alpha)|^3} \quad IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Radius of curvature at the arc point $C(\alpha)$:

$$\rho_\alpha = \kappa_\alpha^{-1} \quad IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Centre of curvature relative to arc point $C(\alpha)$:

$$\zeta_\alpha = C(\alpha) + \rho_\alpha n_\alpha \quad IG_{0,*}^\alpha P, IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Condition for inflexion point at $C(\alpha)$:

$$|C^{(1)}(\alpha) \times C^{(2)}(\alpha)| = 0 \quad IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P$$

Torsion at the arc point $C(\alpha)$:

$$\tau_\alpha = \frac{\det [C^{(1)}(\alpha) \ C^{(2)}(\alpha) \ C^{(3)}(\alpha)]}{|C^{(1)}(\alpha) \times C^{(2)}(\alpha)|^2} \quad IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P, IG_{3,*}^\alpha P$$

or (provided $\kappa_\alpha \neq 0$):

$$\tau_\alpha = \frac{\det [C^{(1)}(\alpha) \ C^{(2)}(\alpha) \ C^{(3)}(\alpha)]}{|C^{(1)}(\alpha)|^3} \rho_\alpha^2 \quad IG_{1,*}^\alpha P, IG_{2,*}^\alpha P, IG_{3,*}^\alpha P$$

Remarques

1. Pour le calcul manuel de G^α , il est plus commode d'employer la définition suivante :

$$\begin{aligned} G_{i,j}^\alpha &= 1 && \text{pour } i=j \\ &= \alpha G_{i,j-1}^\alpha && \text{pour } i=0 \text{ et } 1 \leq j \leq n \\ &= 0 && \text{pour } i > j \\ &= G_{i-1,j-1}^\alpha + \alpha G_{i,j-1}^\alpha && \text{pour } 0 < i < j \leq n \end{aligned}$$

pour tout α .

2. Du fait que $\text{diag} (1 \ 1 \ 2! \ \dots \ n!) = A^{-1}_{\text{Tay}}$ (les fonctions de lissage d'un schéma de

Taylor de degré n étant de la forme : ${}_{\text{Tay}}\varphi_i(t) = t^i/i!$ pour $0 \leq i \leq n$), il vient que :

$$\begin{aligned} IG^\alpha &= A^{-1}_{\text{Tay}} * G^\alpha * A \\ &= [A^{-1}_{\text{Tay}} * A] * [A^{-1} * G^\alpha * A] \end{aligned}$$

de sorte que l'on peut considérer IG^α géométriquement comme la composition d'une segmentation de la courbe initiale dont la matrice de segmentation vaut (cf. chap. 6, partie I):

$$S_{[\alpha, 1+\alpha]} = A^{-1} * G^\alpha * A$$

avec une conversion du sous-segment résultant vers le schéma de Taylor dont la matrice de passage vaut : $A^{-1}_{\text{Tay}} * A$.

Cette interprétation de l'opérateur IG^α est entièrement compatible avec l'interprétation géométrique des sommets successifs du polygone caractéristique au point initial d'un arc de courbe transcrit à l'aide du schéma de Taylor (cf. §6.7.1, chap. 1, partie I ou Annexe IX).

NOM DE L'ETUDIANT : DOH Prosper Kwaku

NATURE DE LA THESE : Doctorat d'Etat ès sciences



VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 11 JUIL. 1988 n° 1235

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I



Sommaire

Cette étude généralise à une puissance réelle quelconque le triangle de Pascal organisé sous forme d'une matrice triangulaire supérieure, et propose ensuite pour les opérateurs résultants, des interprétations géométriques et analytiques compatibles avec les transformations usuelles des formes à représentation paramétrique polynomiale.

Vu comme un opérateur géométrique, la puissance généralisée du triangle de Pascal permet de modéliser à la fois l'évaluation des polynômes, la subdivision d'un segment de courbe ainsi que la conversion entre représentations.

Comme un outil analytique, le triangle de Pascal s'interprète comme un opérateur de Taylor pour les fonctions polynomiales tandis que son inverse se présente comme l'opérateur sous-jacent au calcul des différences finies.

Des deux interprétations découle un opérateur fondamental qui résume la théorie de transcription paramétrique d'une manière fort condensée. Permettant d'obtenir à chaque point d'une courbe l'analyse géométrique complète d'une manière aisée, cet opérateur ouvre pour la CFAO de nombreuses perspectives intéressantes, parmi lesquelles l'étude et la réalisation des formes en commande numérique de machines-outils ainsi que l'étude des conditions de raccordement des courbes définies par morceaux.

En proposant un ensemble d'opérateurs standard pour transformer, analyser et caractériser les formes et les schémas paramétriques polynomiaux, nous avons souhaité contribuer très modestement au développement des systèmes de conception de formes fondés sur un environnement logiciel compact capable de traiter toute représentation paramétrique polynomiale.