

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

SCN 64
18

28
11

OPTIMALISATION D'UNE INSTALLATION
INDUSTRIELLE A L'AIDE D'UN CALCULATEUR
NUMERIQUE

T H E S E

pour l'obtention du

DOCTORAT DE SPECIALITE MATHEMATIQUES (3ème Cycle)

soutenu devant le Jury le 23 Octobre 1964

par

Jean-Pierre DECAMPS



Jury	Président	Monsieur J. LEGRAS
	Examineurs	Mademoiselle D. HUET Monsieur C. PAIR

Optimisation, industrie
← →
Optimisation, fonctions
Rectification continue

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

OPTIMALISATION D'UNE INSTALLATION
INDUSTRIELLE A L'AIDE D'UN CALCULATEUR
NUMERIQUE

° ° °



par

Jean-Pierre DECAMPS

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - URION -
ROUBAULT -

Professeurs honoraires : MM. CROZE - RAYBAUD - LAFFITE - LERAY -
JOLY- LAPORTE - EICHHORN - CAPELLE - GODEMENT - DUBREIL - L. SCHWARTZ -
DIEUDONNE - De MALLEMANN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER -
GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - CHEVALLIER - WAHL -
HERVE -

Maîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET -

PROFESSEURS

MM.			
URION	Chimie biologique	SCHWARTZ	Exploit. minière
DELSARTE	Analyse supérieure	GAYET	Physiologie
ROUBAULT	Géologie	MANGENOT	Phytopathologie
VEILLET	Biologie animale	MALAPRADE	Chimie
ECHEVIN	Botanique	HADNI	Physique
BARRIOL	Chimie théorique	BONVALET	Mécanique physique
BIZETTE	Physique	KERN	Minéralogie
GULLIEN	Electronique	BASTICK	Chimie
GIBERT	Chimie physique	DUCHAUFOUR	Pédologie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	NEEL	Chimie ind. orga.
BOLFA	Minéralogie	GARNIER	Agronomie
NICLAUSE	Chimie	WEPPE	Minéralogie appli.
FAIVRE	Physique appliquée	BERNARD	Géologie appliquée
AUBRY	Chimie minérale	CHAMPIER	Physique
DUVAL	Chimie	REGNIER	Physico-chimie
COPPENS	Radiogéologie	GAY	Chimie biologique
TRUHLING	Physique	WERNER	Botanique
SUHNER	Physique expérimentale	CONDE	Zoologie
HILLY	Céologie	STEPHAN	Zoologie
LE GOFF	Génie chimique	EYMARD	Cal. Dif. et Int.
CHAPON	Chimie biologique	LEVISALLES	Chimie organique
HEROLD	Chimie industrielle	N.	Physique
		N.	M. M. P.

MAITRES DE CONFERENCES ET PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.			
OSSE	Génie chimique	Mme HERVE	Math. (propédeutique)
COCCI	Géologie	AUROUZE	Géologie
GUILLAUME	Psychophysiologie	MARI	Chimie I. S. I. N.
LAN	Mécanique physique	LAFON	Physique I. S. I. N.
Mme BASTICK	Chimie M. P. C. Epinal	FELDEN	Phy. Théor. & Nucl.
UDEFIN	Physique	FLECHON	M. P. C.
ORN	Physique	VIGNES	Physique (Mines)
RENTZ	Biologie animale	Melle HUET	Math. (S. P. C. N.)
		JANOT	M. P. C. Epinal

SECRETARE PRINCIPAL : C. CARON

Que Monsieur le Professeur L E G R A S trouve ici l'expression de mes sentiments de sincère et profonde reconnaissance pour les précieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer dans l'accomplissement de ce travail et pour la bienveillante attention qu'il a bien voulu me porter durant ces deux années d'étude au Centre de Calcul.

Je tiens aussi à remercier Monsieur A.M. C R I C O de la "Pittsburgh Plate Glass C^o" de l'aide qu'il m'a apportée pour la partie physico-chimique de cette étude.

Je prie Mademoiselle D. H U E T et Monsieur C. P A I R, qui m'ont fait l'honneur de composer le Jury, d'accepter ma respectueuse gratitude.

Je remercie la "Compagnie Industrielle des
Téléphones" pour son aide , en particulier

Monsieur O S W A L D , Directeur de la Division Information,
Monsieur M E T I V I E R , Chef du Service Automatisation Indus-
triel du Traitement de l'Information,
et Monsieur D U B O S , Chef de Section.

Je remercie Monsieur B R U E , Chef du Service
Commercial à la "Compagnie Européenne de Calculateurs Industriels et Scien-
tifiques", qui m'a permis d'utiliser l'ordinateur S D S - 920 .

I - I N T R O D U C T I O N

- OPTIMALISATION

- GENERALITES SUR LA RECTIFICATION CONTINUE

II - O P T I M I S A T I O N D E F O N C T I O N S

- SANS CONTRAINTE

- AVEC CONTRAINTES

III - R E C T I F I C A T I O N C O N T I N U E D ' U N
M E L A N G E D E Q U A T R E C O N S T I T U A N T S

- ARTICULATION LOGIQUE DU PROGRAMME TOTAL

- RESULTATS

IV C O N C L U S I O N

I N T R O D U C T I O N

OPTIMISATION

Le but essentiel de cette étude est la recherche des caractéristiques optimales des colonnes de distillation en fonctionnement continu pour obtenir une séparation des constituants d'un mélange. Grâce à l'emploi de calculateurs électroniques, le problème de gestion d'unité de distillation peut être résolu avec un maximum de précision et de rapidité par des méthodes dites de "régulation automatique";

Dans une telle étude, on distingue trois points essentiels :

- L'objectif à atteindre
- Le modèle mathématique du processus étudié
- La technique numérique donnant les valeurs des variables de réglage pour satisfaire au mieux l'objectif.

Voyons en détail chacun de ces éléments.

1°/ OBJECTIFS

Pour atteindre les buts fixés avec le maximum d'exactitude, il est nécessaire de les bien définir à l'avance.

Il est plus important d'approcher un seul objectif bien précis, que de réaliser parfaitement un objectif mal adapté à d'autres buts plus généraux.

On peut prévoir une certaine hiérarchie d'objectifs tels qu'à un niveau donné, par exemple celui du département distribution des produits, la réalisation des objectifs, non seulement dépende des conditions

d'alimentation, c'est-à-dire de la disponibilité en brut (niveau du département approvisionnement) ou de la capacité de l'unité de raffinage, mais encore conditionne le fonctionnement de cette unité.

On met ainsi en évidence, l'interaction qui existe entre les solutions des problèmes à des niveaux voisins et l'importance aussi grande de la définition que de la réalisation des objectifs.

D'autre part, plus on veut approfondir les problèmes, plus le domaine de validité des solutions devient restreint. En voulant tenir compte de plus de détails, les solutions restent de moins en moins longtemps valables et, à la limite, on arrive à un traitement en temps réel à cause de l'augmentation de la fréquence des réajustements.

2° / MODELE MATHEMATIQUE

Pour le processus étudié, le modèle mathématique est l'ensemble :

- des équations (relations linéaires ou non) qui lient différentes variables
- et des inéquations (relations de contraintes techniques ou non) entre certaines variables.

On distingue deux types de modèles :

- Le modèle dynamique qui permet dans le temps, de suivre et contrôler par la programmation, différentes étapes du processus.
- Le modèle sera dit statique dans le cas contraire ; on ne pourra pas alors modifier les états intermédiaires.

Le modèle mathématique peut contenir deux sortes de variables :

a) Les variables indépendantes

1/ non manipulables

- Température du brut à l'entrée
- Température de l'eau de refroidissement
- Pression à l'intérieur des colonnes

Ces variables ne subissent pratiquement pas de variations importantes et peuvent être considérées comme constantes autour d'un état de fonctionnement.

2/ manipulables

- Débit d'alimentation (sauf s'il est imposé)
- Quantités de chaleur à fournir aux rebouilleurs
- Débits des reflux et des résidus

Leur nombre détermine le degré de liberté du système.

b) Les variables dépendantes

- Qualité des produits à la sortie et à l'entrée de l'unité (pourcentages des différents constituants dans les mélanges initiaux et les produits intermédiaires).

Le problème est de prévoir la composition de ces produits à partir de relations données liant les variables indépendantes.

3°/ TECHNIQUE MATHÉMATIQUE

Etant donné un état de fonctionnement de l'installation, et connaissant les différents coûts marginaux intervenant dans la fabrication des produits (coût des combustibles, du brut, de l'amortissement de l'installation, ...) quels sont les réglages, qui, tout en restant dans le

domaine défini par les différentes contraintes, permettront d'approcher au mieux l'objectif fixé ?

Par exemple, minimiser les dépenses en gardant une production voisine de la production actuelle ou imposée.

Le problème est donc d'optimiser une relation entre variables indépendantes et paramètres de réglage qui sont, tous deux assujettis à rester dans un domaine de validité déterminé par un ensemble d'égalités ou inégalités de contrainte.

GENERALITES SUR LA RECTIFICATION

CONTINUE

On entend par unité de distillation, un ensemble de colonnes de distillation dont le but essentiel est la séparation d'un mélange de constituants (brut) en fractions. Cette séparation peut avoir lieu par la différence de degré de volatilité de chaque constituant de base : c'est l'opération de distillation la plus importante appelée "rectification".

D'une manière générale, chaque colonne de distillation, sans soutirages latéraux, sépare le mélange à l'alimentation en deux fractions :

- le produit de tête (le plus volatil)
- le produit de queue (le moins volatil)

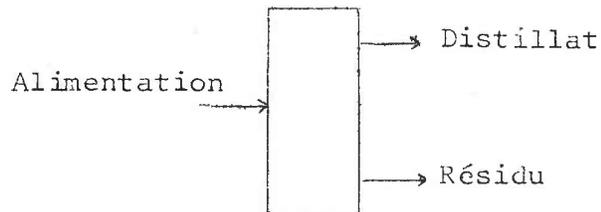


Fig. 1

La fraction la plus légère est le distillat, la plus lourde, le résidu.

On peut distinguer trois sortes de colonnes de distillation

(sans soutirages latéraux) :

1°/ Colonnes dont l'alimentation est un mélange binaire :

La fraction de tête comprendra essentiellement le constituant le plus volatil, la fraction de queue, le constituant le moins volatil.

2°/ Colonnes dont l'alimentation est un mélange de plusieurs constituants :

a) Ou bien le fractionnement se fait entre deux constituants (constituants clefs) dont les degrés de volatilité sont voisins dans le mélange à l'alimentation de la colonne.

Le produit de tête comprendra un mélange de constituants qui seront au moins aussi volatils que le constituant-clef le plus léger.

Le produit de queue, un mélange de constituants dont le degré de volatilité est inférieur ou égal à celui du constituant-clef le plus lourd.

b) Ou bien le fractionnement se fait par séparation du constituant le plus lourd (ou le plus léger) de tous les autres.

A la sortie, l'un des produits de tête ou de queue contiendra essentiellement un seul constituant, l'autre produit, un mélange de tous les autres.

Cette dernière catégorie peut être considérée comme un cas limite de la précédente où l'un des constituants-clefs est le plus ou le moins volatil du mélange.

Le schéma de distillation d'un mélange à cinq constituants va

nous permettre d'utiliser ces trois types de colonnes.

Les cinq constituants A, B, C, D, E, sont rangés dans l'ordre décroissant de leur degré de volatilité.

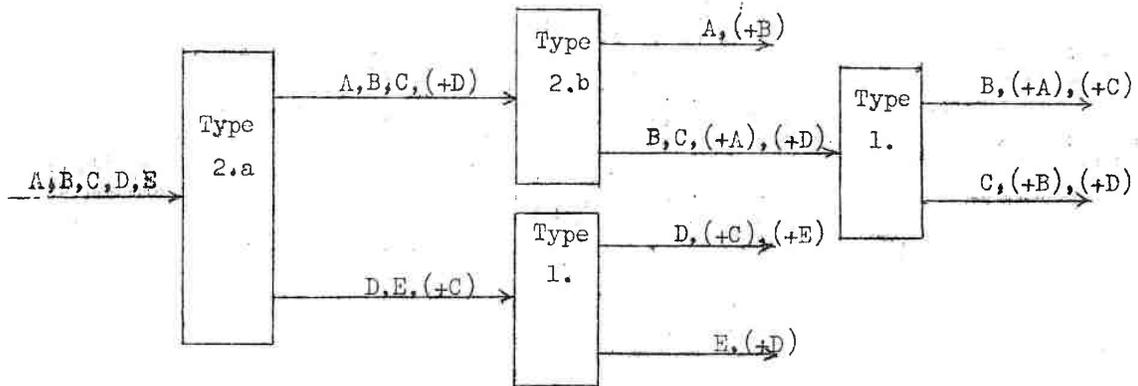


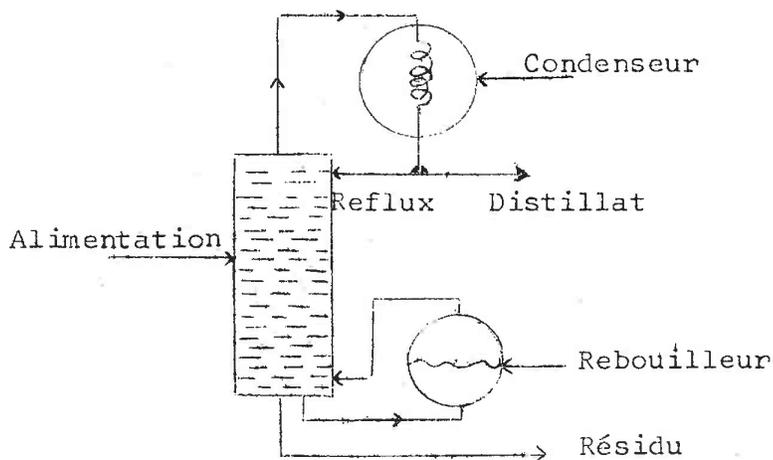
Fig. 2

Examinons d'un peu plus près le fonctionnement d'une colonne de distillation.

Elle comporte essentiellement, répartis sur toute sa hauteur, un nombre déterminé de plateaux à des températures différentes et à travers lesquels vont se déplacer vers le haut les fractions les plus volatiles du mélange.

La fraction la plus légère sera canalisée en haut de la colonne dans un condenseur. A la sortie de celui-ci, une partie du liquide retournera dans la colonne : c'est le "Reflux"

Le reste du liquide, produit de tête, est appelé "Distillat".



Une partie de la fraction la plus lourde sera envoyée dans un rebouilleur, puis une fois vaporisée, retournera dans la colonne.

L'autre partie de la fraction la plus lourde est appelée "Résidu" : c'est la fraction de queue.

Comme le distillat, le résidu pourra être envoyé comme alimentation d'une autre colonne pour être à nouveau distillé, ou tout simplement stocké si l'on a affaire à un produit fini.

Dans ces conditions, il apparaît que le fractionnement entre deux constituants ne peut être parfait.

Revenons dans le cas de la fig. 2 où les constituants-clés de la première colonne sont C et D. Le produit de tête va contenir une infime partie du constituant D, tout comme le produit de queue contiendra un résidu de C.

De l'efficacité du fractionnement de cette première colonne va dépendre le degré de pureté des produits finis, car les traces de D avec A, B, C, et d'autre part celles de C avec D et E, ne pourront être séparées et se retrouveront à la fin, les premières avec C, les deuxièmes avec D.

Et ainsi pour les autres constituants au niveau des colonnes suivantes.

O P T I M I S A T I O N D E F O N C T I O N S

OPTIMISATION DE FONCTIONS SANS
CONTRAINTES

Optimiser une fonction, c'est chercher, d'après la nature du problème, un extrémum (maximum ou minimum) de cette fonction.

Dans tout ce qui suit, on se ramènera à la recherche d'un minimum d'une fonction, étant entendu que maximiser une fonction revient à minimiser la fonction de signe opposé.

Interprétons géométriquement le problème :

la fonction $Q(M) = Q(X_1, X_2, \dots, X_n)$ peut être représentée par une surface dans un espace à n dimensions et près d'un de ses minima m , de coordonnées $X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm}$, cette surface est supposée localement convexe, c'est-à-dire, qu'au voisinage de m , on assimile Q à une forme quadratique définie positive.

Ce minimum est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial X_1}(m) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial X_2}(m) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial X_n}(m) = 0 \end{array} \right.$$

Comment, à partir d'un point initial M_0 , proche de m , faire décroître Q de $Q(M_0)$ à $Q(m)$?

- De manière discontinue, c'est-à-dire trouver une suite de points M_i sur la surface nous amenant de M_0 à m et tels que la suite des $Q(M_i)$ soit décroissante et tende vers $Q(m)$.

On passe du point M_i au point M_{i+1} suivant en écrivant :

$$(1) M_{i+1} = M_i + \rho V$$

où V est un vecteur arbitraire que l'on précisera plus loin et ρ un paramètre.

En ce nouveau point M_{i+1} , la fonction a pour valeur :

$$Q(M_{i+1}) = Q(M_i + \rho V)$$

Q ne dépend que de la seule variable ρ . On ramène donc le problème à n variables à un problème à un seul paramètre.

Si on fait varier ρ à partir de M_i ($\rho = 0$), on va se déplacer sur la direction V jusqu'à atteindre le point M_{i+1} pour lequel $Q(M_{i+1})$ est non seulement inférieur à $Q(M_i)$ mais le plus petit possible. La valeur de ρ correspondante est donc celle pour laquelle $Q(M_{i+1})$ est minimum sur la direction V , soit :

$$(2) \frac{\partial Q}{\partial \rho}(M_{i+1}) = 0$$

Désignons par $X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_n^{(i)}$ les coordonnées de M_i , soit :

$$Q(M_i) = Q(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_n^{(i)})$$

et par V_1, V_2, \dots, V_n celles du vecteur V .

(2) s'écrit alors :

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho}(M_i + \rho V) = \sum_{j=1}^n V_j \cdot \frac{\partial Q}{\partial X_j}(M_i + \rho V) = 0 \quad (3)$$

Cette égalité exprime l'orthogonalité du vecteur V et de la normale en M_{i+1} à la surface de niveau $Q(M_{i+1}) = C^{\text{te}}$, en d'autres termes que le vecteur V est tangent en M_{i+1} à cette surface de niveau.

Explicitons (3) en développant en série de Taylor autour de M_i , en se limitant au terme de premier degré en ρ :

$$\frac{\partial Q}{\partial X_j}(M_i + \rho V) = \frac{\partial Q}{\partial X_j}(M_i) + \rho \cdot \sum_{k=1}^n v_k \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial X_j \partial X_k}(M_i)$$

En portant dans (3) on obtient :

$$\rho = - \frac{\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial Q}{\partial X_j}(M_i)}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_j \cdot v_k \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial X_j \partial X_k}(M_i)}$$

soit sous forme matricielle :

$$\rho = - \frac{[V] \cdot [G]}{[V]^t \cdot [D] \cdot [V]}$$

- où $[V]$ = matrice colonne des coordonnées du vecteur V
 $[V]^t$ = matrice ligne transposée de $[V]$
 $[G]$ = matrice colonne des coordonnées du vecteur gradient en M_i à la surface $Q(M)$
 $[D]$ = matrice carrée symétrique des dérivées secondes de Q en M_i par rapport à chaque variable.

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1 \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial X_2^2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial X_1 \partial X_n} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 Q}{\partial X_n^2} \end{bmatrix}$$

Revenons au choix du vecteur V.

1°/ On peut prendre, à tour de rôle, les vecteurs unitaires des axes de coordonnées : c'est la méthode de relaxation dite "variable par variable"

$$V = U_\ell \quad \text{et} \quad \rho = - \frac{\frac{\partial Q}{\partial X_\ell}}{\frac{\partial^2 Q}{\partial X_\ell^2}}$$

En partant du point M_0 et en faisant successivement :

$\ell = 1, 2, \dots, n, 1, 2, \dots$, par exemple, on obtiendra les points $M_1, M_2, \dots, M_n, M_{n+1}, M_{n+2}, \dots$, jusqu'au minimum m cherché.

2°/ Le gradient étant la direction de plus grande pente; c'est-à-dire, celle sur laquelle la variation de Q est la plus grande, on a été amené à choisir pour vecteur V, le vecteur gradient.

C'est la méthode globale ou "méthode du gradient" :

$$V = \vec{\text{grad}} Q \quad \text{et} \quad \rho = - \frac{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial Q}{\partial X_j} \right)^2}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial Q}{\partial X_j} \frac{\partial Q}{\partial X_k} \frac{\partial^2 Q}{\partial X_j \partial X_k}}$$

Les formules donnant ρ sont assez compliquées à calculer surtout dans cette dernière méthode pour le cas où Q dépendrait de nombreuses variables.

$$\text{On revient à l'égalité (2) } \frac{\partial Q}{\partial \rho}(M_{i+1}) = 0$$

Au lieu de rechercher sur la direction V la valeur de ρ rendant $Q(M_{i+1})$ minimum, on prendra pour ρ une valeur approchée ρ^* telle que $Q(M_{i+1}^*) < Q(M_i)$, par exemple celle qui correspond au point M_{i+1}^* , minimum de la parabole s'appuyant sur M_i , P_i et R_i , où P_i et R_i sont deux points de la surface $Q(M)$ qui se projettent sur la direction du gradient en M_i à la surface de niveau $Q(M_i) = \text{Cte}$ en p_i et r_i .

Le choix de p_i et r_i dépend essentiellement du problème posé, mais de toute façon, on a intérêt à les prendre sur la direction du gradient changé de signe, c'est-à-dire, dans le sens d'une diminution de Q de telle manière que, si le minimum de la parabole ne fournit pas un point M_{i+1}^* tel que $Q(M_{i+1}^*) < Q(M_i)$, on ait la possibilité de prendre pour M_{i+1}^* l'un des points P_i ou R_i (de préférence celui qui minimise le mieux la fonction Q).

Dans la méthode variable par variable comme dans celle du gradient, cette interpolation par un polynôme du second degré peut, dans certains cas, non pas activer la convergence, mais simplifier les calculs de ρ .

3°/ Il existe d'autres méthodes qui consistent à prendre pour V une direction quelconque, à condition qu'il y ait convergence.

- a) Par exemple, en assimilant localement Q à une forme quadratique définie positive, on peut prendre pour vecteur V le diamètre conjugué du plan tangent en M_i à la surface $Q(M_i) = \text{Cte}$, puis rechercher, comme il l'a été fait précédemment, le point M_{i+1} sur cette direction. C'est la "Méthode du gradient conjugué". Là encore, nous serons obligés de passer par des calculs de dérivées secondes, ce qui rend la méthode laborieuse.

- b) Une autre méthode, qui s'apparente à celle de Gauss-Seidel, consiste à prendre pour vecteur V , le vecteur unité de l'axe qui correspond à la plus grande composante du vecteur gradient en M_i .

Désignons par $x_k^{(i)}$ cette composante.

Alors $V = U_k$ et

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho}(M_{i+1}) = \frac{\partial Q}{\partial x_k}(M_i + \rho U_k) = 0$$

Un développement en série de Taylor autour de M_i , jusqu'au terme de premier degré en ρ , donne :

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k}(M_i) + \rho \frac{\partial^2 Q}{\partial x_k^2}(M_i) = 0$$

soit
$$\rho = - \frac{\frac{\partial Q}{\partial x_k}(M_i)}{\frac{\partial^2 Q}{\partial x_k^2}(M_i)}$$

On retrouve les mêmes formules que dans la méthode "variable par variable", mais au lieu de donner à l'indice k les valeurs successives dans l'ordre naturel, on prend, à chaque itération, la valeur de l'indice de la plus grande composante du gradient Q en M_i , c'est-à-dire, la direction parallèle à l'un des axes, suivant laquelle la décroissance de la fonction Q sera la plus forte.

O P T I M I S A T I O N S U J E T T E A C O N T R A I N T E S

POSITION DU PROBLEME

Etant donnée la fonction $Q (X_1, X_2, \dots, X_n)$ et les p contraintes $g_i (X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0$ où $i = 1, \dots, p$, trouver le minimum de Q qui appartienne à la région définie par l'ensemble de ces p inéquations.

Deux cas peuvent se présenter dans l'hypothèse de la continuité de Q (tout au moins dans le domaine ci-dessus défini) .

- Le minimum appartient au domaine.

On peut alors considérer le problème comme sans contrainte ou procéder comme si le domaine était défini.

- Le minimum appartient à la frontière

Les inégalités, sur lesquelles ce point repose, peuvent être remplacées par des égalités (les autres inégalités étant négligées). On pourra déterminer le minimum par exploration le long de la frontière et vérifier par des méthodes de gradient, que ce point n'est pas dans la région.

MINIMUM SUR LA FRONTIERE

1°- Exploration le long de la frontière

soient : $Q (X_1, X_2, \dots, X_n)$ la fonction à minimiser,

$g_i (X_1, \dots, X_n) \leq 0$ les p contraintes et

k ($k \leq p$ et $k \leq n$) celles sur lesquelles se

trouve le minimum.

METHODE DE LINEARISATION (ou de NEWTON)

Le système de k équations ($k \leq n$) :

$$\begin{cases} g_1 (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \\ g_2 (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle : $G (X) = 0$ (2)

Le système sera résolu si l'on sait trouver k composantes du vecteur X vérifiant (2).

Faisons un développement limité au voisinage du vecteur X_0 sur k de ses composantes, les (n-k) autres étant fixes :

$$G (X_0 + H) = G (X_0) + H G' (X_0) + \frac{H^2}{2} G'' (X_0 + \theta_k) = 0$$

Si l'on s'arrête au terme de premier degré en H, on obtient :

$$G (X_0) + H G' (X_0) = 0$$

soit :

$$\begin{cases} g_1 (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) + h_1 \frac{\partial g_1}{\partial X_1} + h_2 \frac{\partial g_1}{\partial X_2} + \dots + h_k \frac{\partial g_1}{\partial X_k} = 0 \\ g_2 (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) + h_1 \frac{\partial g_2}{\partial X_1} + h_2 \frac{\partial g_2}{\partial X_2} + \dots + h_k \frac{\partial g_2}{\partial X_k} = 0 \\ \vdots \\ g_k (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0) + h_1 \frac{\partial g_k}{\partial X_1} + \dots + h_k \frac{\partial g_k}{\partial X_k} = 0 \end{cases}$$

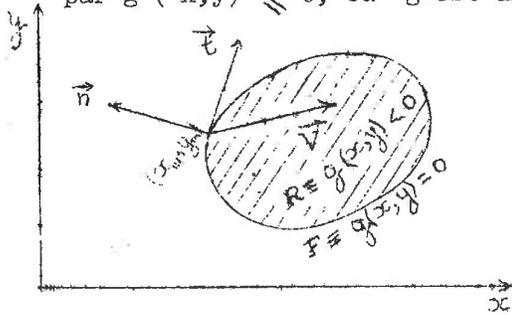
D'où l'on tire par inversion de la matrice $G' (X_0)$ les k composantes du vecteur H et on recommence le calcul en partant du vecteur $X_1 (X_1^0 + h_1, \dots, X_k^0 + h_k, X_{k+1}^0, \dots, X_n^0)$

Cette méthode, lourde d'emploi à cause du calcul à chaque pas des k^2 composantes de la matrice G' et de son inversion, est cependant facile à programmer en calcul automatique, et a surtout l'avantage d'être sûre.

2°- Condition nécessaire (sur les gradients) pour l'obtention d'un minimum sur la frontière :

A partir du minimum, si l'on se dirige vers l'intérieur du domaine, on montrera que pour de tels déplacements, l'accroissement de Q est positif (négatif pour un maximum).

a) pour la simplicité de la démonstration, plaçons-nous d'abord dans le cas d'une fonction Q à deux variables (x,y) dont le minimum (x_m, y_m) appartient à la frontière F de la région R définie par $g(x,y) \leq 0$, où g est différentiable.



Quand le gradient de Q , $\vec{\nabla}Q$, pointe vers l'intérieur de la région R , il pointe en direction des valeurs croissantes de Q , puisque le minimum est atteint en (x_m, y_m) .

Ecrivons que pour tout point $(x,y) \in R$ (ou F)

$$Q(x_m, y_m) \leq Q(x, y)$$

Il s'ensuit que pour tout vecteur \vec{v} situé du même côté que R par rapport à la tangente \vec{t}

$$(3) \quad \vec{\nabla}Q \cdot \vec{v} \geq 0$$

Prenons un nouveau système d'axes admettant :

comme origine (x_m, y_m) et comme axes \vec{t} et \vec{n} , la tangente et la normale en ce point.

Tout vecteur \vec{V} , intérieur à R par rapport à \vec{t} , s'écrira :

$$\vec{V} = a\vec{t} + b\vec{n} \text{ où } a \leq 0 \text{ et } b \leq 0$$

portons dans (3)

$$\vec{\nabla}Q \cdot a\vec{t} + \vec{\nabla}Q \cdot b\vec{n} \geq 0$$

Puisque cette inégalité doit avoir lieu pour tout vecteur \vec{V} défini ci-dessus, c'est-à-dire a arbitraire, il s'ensuit que les coefficients de a doivent être nuls, soit :

$$\vec{\nabla}Q \cdot \vec{t} = 0$$

ou encore :

$$\vec{\nabla}Q \perp \vec{t}$$

- Le gradient de Q sera porté par la normale \vec{n} .

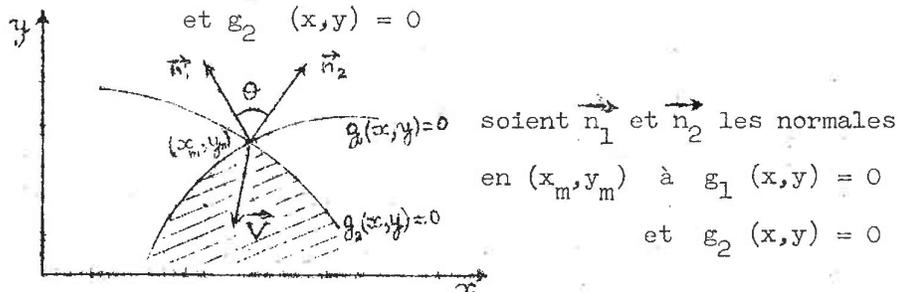
Il reste à vérifier que $\vec{\nabla}Q \cdot b\vec{n} \geq 0$ pour $b \leq 0$
Il suffit que $\vec{\nabla}Q$ soit multiple négatif de $\vec{\nabla}g$

- La condition nécessaire pour qu'une fonction Q ait un minimum en (x_m, y_m) de la frontière F de la région R définie par $g(x, y) \leq 0$ où g est différentiable, est que le gradient de Q en (x_m, y_m) soit un multiple négatif ou nul du gradient de g en (x_m, y_m) .

b) Voyons maintenant le cas où F est la frontière d'une région R définie par :

$$\begin{cases} g_1(x, y) \leq 0 \\ g_2(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

et où le minimum (x_m, y_m) de la fonction Q coïncide avec l'intersection de $g_1(x, y) = 0$ et $g_2(x, y) = 0$



soient \vec{n}_1 et \vec{n}_2 les normales en (x_m, y_m) à $g_1(x, y) = 0$ et $g_2(x, y) = 0$

Ces normales sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire :

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \neq 0$$

Comme précédemment, pour tout vecteur \vec{V} dirigé de (x_m, y_m) vers l'intérieur de R , on aura, en prenant \vec{n}_1 et \vec{n}_2 comme axes et (x_m, y_m) comme origine :

$$\vec{V} = a \vec{n}_1 + b \vec{n}_2 \quad \text{où } a \text{ et } b \leq 0$$

Par rapport à ce repère,

$$\vec{VQ} = c \vec{n}_1 + d \vec{n}_2 \quad \text{où } c \text{ et } d \text{ sont à préciser mais tels que :}$$

$$\vec{VQ} \cdot \vec{V} \geq 0 \quad (4)$$

$$\text{or } \vec{VQ} \cdot \vec{V} = ac \vec{n}_1^2 + bd \vec{n}_2^2 + (ad + bc) (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)$$

et si \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont unitaires et forment entre eux un angle θ ,

(4) s'écrira :

$$(5) \quad ac + bd + (ad + bc) \cos \theta \geq 0$$

Cette inégalité devant être vérifiée pour tout vecteur \vec{V} intérieur à R , prenons \vec{V}_1 tel que $a = 0$ et $b < 0$

(5) s'écrit :

$$bd + bc \cos \theta \geq 0$$

$$\text{et comme } b < 0, \quad d + c \cos \theta \leq 0 \quad (6)$$

Si on prend maintenant \vec{v}_2 tel que $a < 0$ et $b = 0$
(5) s'écrit :

$$c + d \cos \theta \leq 0 \quad (7)$$

De (6) on tire : $d \leq -c \cos \theta$

A fortiori, (7) permet d'écrire $c - c \cos^2 \theta \leq 0$
ou $c \leq 0$

De même, (7) donne : $c \leq -d \cos \theta$
et (6) a fortiori : $d \sin^2 \theta \leq 0$
ou $d \leq 0$

- Puisque \vec{v}_{g_1} et \vec{v}_{g_2} sont portés respectivement par \vec{n}_1 et par \vec{n}_2
la condition nécessaire pour que Q ait un minimum en (x_m, y_m) à
l'intersection de $g_1(x, y) = 0$ et $g_2(x, y) = 0$ est que le gradient
de Q en (x_m, y_m) soit une combinaison linéaire négative ou nulle
des gradients de g_1 et g_2 en (x_m, y_m) .

c) On peut généraliser à n dimensions

- La condition nécessaire d'un minimum de Q en $(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})$
situé à l'intersection de p contraintes

$$g_i(X_1, X_2, \dots, X_m) \leq 0 \quad (i = 1, p)$$

est que le gradient de Q en $(X_{1m}, X_{2m}, \dots, X_{nm})$ soit une combinaison
linéaire négative ou nulle des p gradients \vec{v}_{g_i} ($i = 1, p$) en ce
point.

R E C T I F I C A T I O N C O N T I N U E
D' U N M E L A N G E
D E Q U A T R E C O N S T I T U A N T S

Soit un mélange des quatre constituants suivants :

1 - Propylène	C ₃ H ₆
2 - Propane	C ₃ H ₈
3 - Butane	C ₄ H ₁₀
4 - Pentane	C ₅ H ₁₂

rangés dans l'ordre de volatilité décroissante.

La composition du mélange à l'alimentation est définie par les quantités molaires f_i ($i = 1,4$) de chacun des quatre constituants.

Comme nous l'avons vu précédemment, la séparation de ces quatre constituants va nécessiter l'emploi de trois colonnes de distillation.

- La première sera un dépropaniseur :

Le fractionnement se fera entre les deux constituants - clefs 2-3 (propane et butane)

- La deuxième colonne (Splitter) séparera le produit de tête de la première colonne (mélange binaire) en propylène et propane.

- La troisième colonne (débutaniseur) décomposera le produit de queue de la première colonne en butane et pentane?

On peut résumer ceci par le schéma suivant : (fig 4).

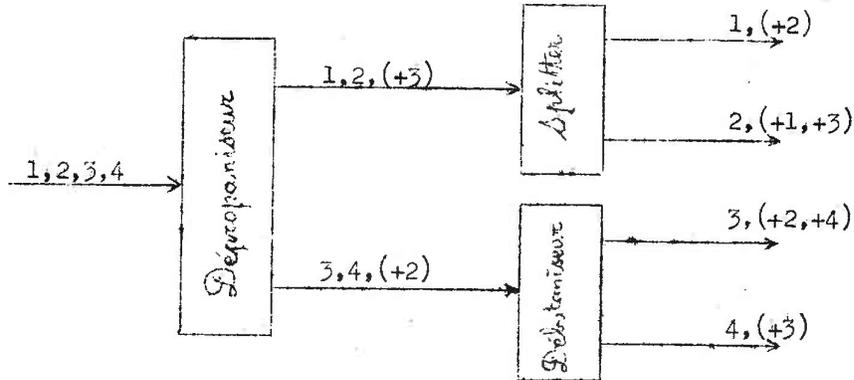


Fig. 4

1°- OBJECTIF

On va chercher à minimiser la quantité totale de chaleur Q à fournir aux trois rebrouilleurs de manière à avoir, à la sortie, des produits dans un degré de pureté déterminé.

Par exemple :

- 95% au moins de propylène dans le produit de tête du Splitter
- 95% au moins de propane dans le produit de queue du Splitter
- 99,5% au moins de butane dans le produit de tête du débutaniseur
- 99,5% au moins de pentane dans le produit de queue du débutaniseur.

2°- MODELE MATHEMATIQUE

C'est la mise en équation du problème du calcul de la quantité de chaleur Q .

Reprenons le schéma précédent (fig 5) :

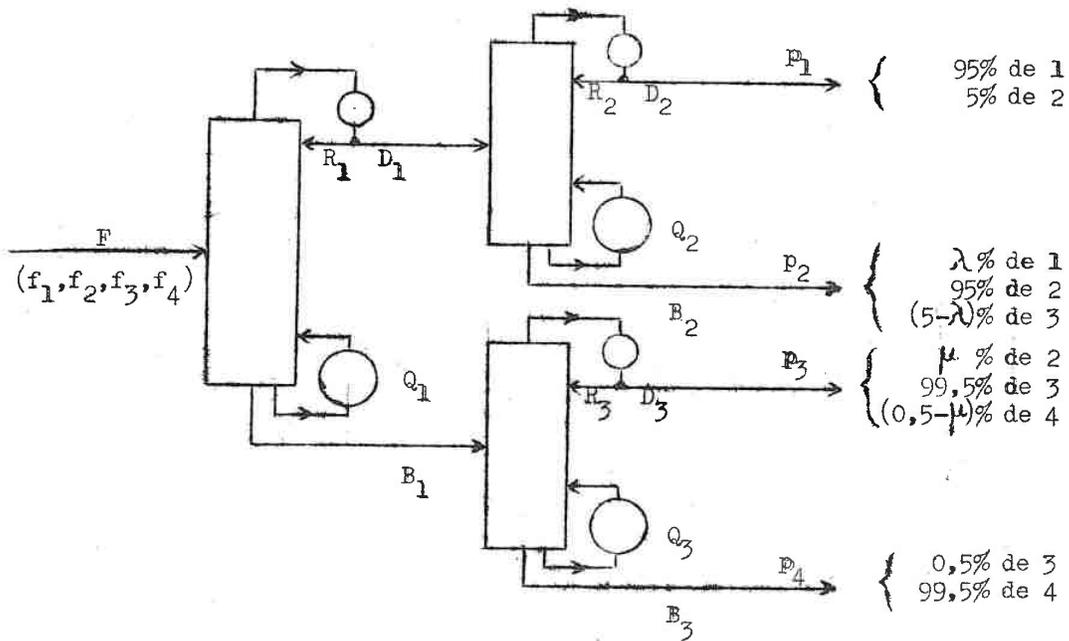


Fig. 5

$\left\{ \begin{array}{l} P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ sont les débits molaires des produits à la} \\ \text{sortie} \\ f_1, f_2, f_3, f_4 \text{ sont les débits molaires des produits à l'en-} \\ \text{trée} \end{array} \right.$

Le bilan-matière permet d'écrire (en quantité molaire):

$$\begin{aligned}
 \text{Pour 1} \quad f_1 &= -\frac{95}{100} P_1 + \frac{\lambda}{100} P_2 \\
 \text{Pour 2} \quad f_2 &= -\frac{5}{100} P_1 + \frac{95}{100} P_2 + \frac{\mu}{100} P_3 \\
 \text{Pour 3} \quad f_3 &= \frac{5-\lambda}{100} P_2 + \frac{99,5}{100} P_3 + \frac{0,5}{100} P_4 \\
 \text{Pour 4} \quad f_4 &= \frac{0,5-\mu}{100} P_3 + \frac{99,5}{100} P_4
 \end{aligned}$$

Il est facile de calculer les débits de sortie p_i ($i = 1, 4$) en fonction de λ (pourcentage de 1 à la sortie du splitter) et μ (pourcentage de 2 à la sortie du débutaniseur).

Les f_i étant proportionnels à F , les débits p_i seront aussi proportionnels à F .

D'autre part, le pouvoir de fractionnement d'une colonne c'est-à-dire la pureté du produit de tête, dépend du rapport $\rho_j = \frac{R_j}{D_j}$ dans lequel R_j est le reflux et D_j le distillat.

Ce rapport peut être déterminé par la formule :

$$(1) \quad \frac{\log \left[\left(\frac{x_e}{x_L} \right)_D \cdot \left(\frac{x_L}{x_e} \right)_B \right]}{\log \alpha_j} = A_j \left(\frac{\rho_j}{\rho_{0j}} \right)^{\beta_j} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x_L} \right)_{F}^{a_i}$$

- x_e et x_L représentent respectivement les concentrations des constituants-clefs le plus léger et le plus lourd.

- $(x_i)_L$ et $(x_i)_B$ les concentrations du constituant i dans le distillat et le résidu.

- $\left(\frac{x_i}{x_L} \right)_F$ la composition dans l'alimentation du constituant i par rapport au constituant-clef le plus lourd.

- $\alpha_j, A_j, \rho_{0j}, \beta_j$ et a_i ($i=1,4$) les constantes caractéristiques de la colonne indiquée j et des unités choisies.

Ainsi pour la première colonne ($j=1$), on calcule facilement ρ_1 par :

$$\frac{\log \left[\left(\frac{x_2}{x_3} \right)_D \cdot \left(\frac{x_3}{x_2} \right)_B \right]}{\log \alpha_1} = A_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_{01}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{x_1}{x_3} \right)_F^{a_1} \left(\frac{x_2}{x_3} \right)_F^{a_2} \left(\frac{x_4}{x_3} \right)_F^{a_4}$$

et comme $D_1 = \sum_{i=1}^3 (x_i)_D$, on en déduit $R_1 = \rho_1 \cdot D_1$

Il en sera de même pour les deux autres colonnes.

Faisons maintenant le bilan thermique pour une colonne quelconque (fig 6) :

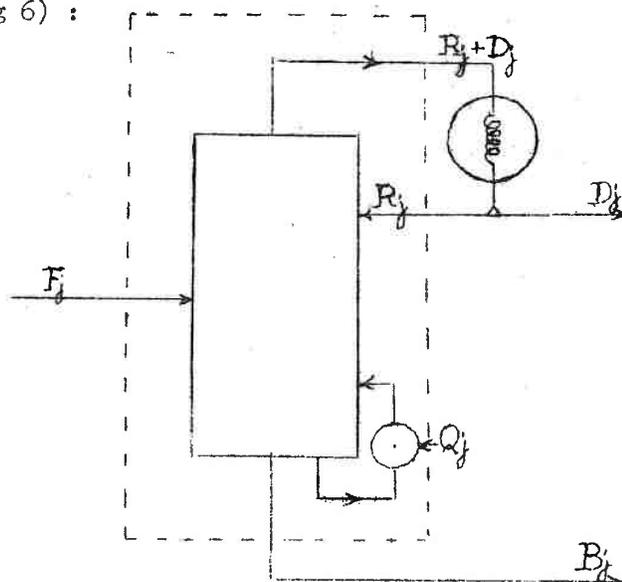


Fig. 6

Ecrivons que la quantité de chaleur apportée au système est égale à celle qu'il restitue.

$$F_j \cdot C_F \cdot T_F + R_j \cdot C_R \cdot T_R + Q_j = (R_j + D_j) \cdot (C_R \cdot T_R + CL) + B_j \cdot C_B \cdot T_B$$

où :

- C_F, C_R et C_B sont respectivement les chaleurs spécifiques du mélange à l'entrée, du reflux et du résidu,
- T_F, T_R et T_B les températures des mêmes quantités,
- CL , la chaleur latente de vaporisation du produit de tête dans le condenseur.

Pour les trois colonnes précédentes on aura facilement les quantités de chaleur Q_j ($j = 1, 3$) à fournir aux rebouilleurs.

La quantité totale de chaleur sera alors :

$$Q = \sum_{j=1}^3 Q_j.$$

Q est fonction de λ et μ .

De plus elle est proportionnelle à l'alimentation F.

$$\text{Soit : } Q = F \cdot \psi(\lambda, \mu)$$

On peut tout de suite remarquer que l'on ne peut parler d'une minimisation de Q (puisque Q est proportionnel à F) mais d'une minimisation de $\frac{Q}{F}$ pour une alimentation fixée à l'avance ou non.

D'autre part, il existe pour le fonctionnement de chaque colonne, une limite de capacité qui va vous permettre de connaître la limite supérieure de l'alimentation.

A l'intérieur d'une colonne de section S, la vitesse linéaire maximum de la vapeur qui constitue le produit de tête, est :

$$V_{\max} = C \cdot \sqrt{\frac{d_l - d_v}{d_v}}$$

où :

- d_l et d_v sont respectivement les poids spécifiques du liquide et de la vapeur.

- C, constante caractéristique de la colonne et des unités choisies.

Or, la vitesse linéaire du produit de tête à l'intérieur de la colonne est $v = \frac{V}{S}$

Avec V = volume de vapeur de (R + D) à la température du résidu et à la pression de la colonne :

Cela se traduit par la formule :

$$V = (R + D) \cdot 22,412 \cdot \frac{F}{273} \cdot \frac{1}{p}$$

V étant exprimé en m^3/h , $(R + D)$ en kmoles/h, F en atmosphères et T_B en degrés absolus, soit :

$$V = F \cdot \varphi(\lambda, \mu)$$

3°- TECHNIQUE NUMERIQUE

Le problème se résume à minimiser $\frac{Q}{F}$ pour une alimentation déterminée ou non, mais soumise aux trois inégalités de contrainte :

$$F \cdot \varphi_j(\lambda, \mu) \leq S_j \cdot \sqrt{\frac{d_1 - d_v}{d_v}} \quad (j = 1, 3)$$

soit :

$$F \cdot \varphi_j(\lambda, \mu) \leq K_j \quad (j = 1, 3)$$

ARTICULATION LOGIQUE
DU PROGRAMME TOTAL

La quantité de chaleur Q est proportionnelle au débit d'alimentation F .

Le rapport Q/F dépend donc seulement de λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda = \text{pourcentage du constituant 1 à la sortie du Splitter} \\ \mu = \text{pourcentage du constituant 2 à la sortie du débutaniseur} \end{cases}$$

Mais F intervient directement dans les inégalités de contrainte

$$F \cdot \varphi_1(\lambda, \mu) \leq K_1$$

Deux cas peuvent se présenter suivant que F est imposé ou non.

I - LES ELEMENTS FIXES AU DEPART SONT :

- Le débit d'alimentation F (quantité en kmoles/heure)
- Les pourcentages des différents constituants à l'entrée.

On calcule le minimum de Q par la méthode du gradient en vérifiant à chaque itération les trois inégalités de contrainte

$$F \cdot \varphi_1(\lambda, \mu) \leq K_1$$

1° - Si on arrive au minimum (λ_m, μ_m) et que les trois contraintes soient vérifiées en ce point, le problème est résolu et on peut même indiquer jusqu'à quelle alimentation maximum on peut aller sans rencontrer de contrainte.

La valeur de cette alimentation est celle du plus petit des trois rapports

$$\frac{K_1}{\varphi_1(\lambda_m, \mu_m)}$$

On recommence pour d'autres pourcentages à l'entrée ou pour une autre alimentation.

2° - Si, en cours de calcul du minimum on bute sur une contrainte (ou si pour le minimum l'une des contraintes n'est pas satisfaite), λ et μ sont alors liés par l'égalité de contrainte en question.

a) le problème est résolu, si sur cette contrainte, on trouve un minimum (λ_{m_c} , μ_{m_c}) qui vérifie les deux autres

contraintes. On recommence pour d'autres pourcentages à l'entrée ou pour une autre alimentation.

b) en cours de calcul du minimum sur la contrainte on bute sur une seconde contrainte.

La résolution de ces deux équations détermine :

- exactement λ et μ si l'intersection de ces deux égalités de contrainte est intérieure au domaine de validité de λ et μ , et si la troisième contrainte est vérifiée.

- une impossibilité dans le cas contraire.

Dans les deux hypothèses, on pourra recommencer pour d'autres pourcentages à l'entrée ou pour une autre alimentation.

II - LES ELEMENTS FIXES AU DEPART SONT :

- Les pourcentages des différents constituants à l'entrée.

F est prise comme variable indépendante au même titre que λ et μ .
On part d'une alimentation initiale F_0 .

1° - Ou bien on veut un mode économique

On alimentera l'unité de raffinage avec le débit maximum pour lequel aucune des contraintes n'entre en jeu.

Cette valeur peut être obtenue en minimisant $\frac{Q}{F}$ sans tester si l'on rencontre de contrainte, puis au minimum, (λ_m, μ_m) , comme il a été fait dans le cas (I.1)

2° - Ou bien on veut connaître l'alimentation maximum permise sans s'occuper du prix de revient :

On résoud le système des trois équations :

$$F \cdot \varphi_i(\lambda, \mu) = K_i \quad \text{qui détermine exactement } F, \lambda \text{ et } \mu.$$

R E S U L T A T S

La programmation des méthodes de minimisation de $\frac{Q}{F}$ soumise ou non à contraintes est résumée par les organigrammes placés en fin de brochure.

J'ai été amené, pour des raisons pratiques, à faire cette étude sur deux plans différents.

- l'un physique
- l'autre mathématique

1°) Problème physique

La technique mathématique, employée pour minimiser $\frac{Q}{F}$ dans les conditions fixées par les normes physiques, a donné les résultats numériques du tableau n° 1. Les valeurs de λ et μ sont données à $1. 10^{-6}$ près et celles de $\frac{Q}{F}$ (kcalories / kmole / heure) à $1. 10^{-4}$ près. Quatre décimales pour λ et μ et une décimale pour $\frac{Q}{F}$ suffisent sur le plan physique, car une plus grande précision n'a aucune signification.

Tant que l'alimentation F reste inférieure à 9,631 kmoles/heure, le minimum de $\frac{Q}{F}$ reste constant (1096,5 kcalories / kmole / heure) : c'est le mode économique.

Pour des valeurs de F supérieures, les minima de $\frac{Q}{F}$ se trouvent sur la troisième contrainte et décrivent la courbe gauche représentée par la vue cavalière 1. A mesure que F croît, $\frac{Q}{F}$ devient d'autant plus coûteux que F est grand. On arrive ainsi très près de la frontière du domaine de validité de λ et μ sans rencontrer d'autres contraintes, d'où le manque d'intérêt de cette étude sur le plan mathématique.

2°) Problème mathématique :

Pour faire l'étude du minimum de $\frac{Q}{F}$ soumis à plusieurs contraintes il faut que ces dernières se coupent à l'intérieur du domaine de validité de λ et μ mais pas aussi près de la frontière de ce domaine que dans le cas précédent. C'est pourquoi j'ai été amené à modifier certaines données physiques du problème (les sections des colonnes) de façon à agir sur les limites maxima d'alimentation K_{\perp} de chacune de ces colonnes.

Dans ces conditions les résultats numériques du tableau n° 2, joints à la vue cavalière 2, nous montrent l'intérêt de cette étude par la diversité des cas qui s'y présentent.

Pour $F \leq 51,9$ kmoles / heure, on a un minimum sans contrainte (Mode économique).

Pour $51,9 < F \leq 56,1$ kmoles / heure, le minimum est soumis à la contrainte n°1

Pour $56,2 < F \leq 61,7$ kmoles / heure, le minimum est à l'intersection des contraintes n° 1 et n° 3

Pour $F = 61,716$ kmoles / heure, le minimum est à l'intersection des trois contraintes.

Pour $61,7 < F \leq 64,75$ kmoles / heure, le minimum est à l'intersection des contraintes n° 1 et n° 2 et l'on peut vraisemblablement, d'après la vue cavalière 2, aller jusqu'à une alimentation maximum permise de 65 kmoles / heure avant de sortir du domaine de validité de λ et μ .

A noter ici que l'intersection des trois contraintes ne fournit pas l'alimentation maximum permise ($F \neq 65$), mais la valeur maximum de $\frac{Q}{F}$ (le test sur les gradients en ce point n'étant pas favorable).

C O N C L U S I O N

1°) MATERIEL EMPLOYE

Les programmes utilisés dans cette étude ont été écrits en langage FORTRAN II et mis au point sur l'ordinateur SDS - 910 de la Compagnie Industrielle des Téléphones. L'exécution a été effectuée sur l'ordinateur SDS - 920 de la Compagnie Européenne de Calculateurs Industriels et Scientifiques. Ce calculateur malgré sa capacité de mémoires double du premier (4096 mots de 24 bits chacun) ne m'a pas permis l'exécution du programme total (minimisation soumise à 0, 1, 2 ou 3 contraintes).

J'ai alors construit deux programmes :

- l'un pour minimiser avec une contrainte ou sans contrainte.
- l'autre avec une, deux ou trois contraintes.

Une capacité de 2048 mots de plus aurait suffi au fonctionnement du programme total.

2°) PRECISION DES MESURES

Travaillant en virgule flottante double précision (12 chiffres décimaux), j'ai pu obtenir pour $\frac{Q}{F}$ des valeurs minima avec 9 chiffres significatifs exacts et surtout calculer les dérivées partielles avec un pas très petit.

Par exemple, près d'un minimum, un accroissement $\Delta\lambda = 6.10^{-7}$ produit une variation relative $\frac{\Delta Q}{Q} \neq 2.10^{-10}$, donc une variation sur le dixième chiffre significatif encore mesurable malgré les erreurs de chute.

3°) TEMPS DE PASSAGE

On ne peut parler de temps de passage pour obtenir un minimum que si l'on fixe au départ la précision des mesures auxquelles on veut aboutir et les valeurs de départ.

Avec ($\lambda_0 = 0,01$ et $\mu_0 = 0,001$) le minimum sans contrainte par la méthode du "gradient" (avec interpolation par parabole) a été obtenu avec 5 chiffres significatifs exacts après 30 itérations et au bout de 182 secondes.

Le même résultat par la méthode "variable par variable" nécessite 84 itérations mais seulement 60 secondes, alors que la méthode de "Gauss-Seidel" demande 8 itérations et 32 secondes.

En réalité aucune comparaison n'est à faire entre ces trois méthodes car la fonction à minimiser ne dépend que de deux variables. Une seule constatation : la lenteur de la méthode du "gradient" (1).

Avec les mêmes valeurs de départ la méthode du "gradient" donne le minimum sans contrainte avec 9 chiffres significatifs exacts après un temps de passage de 5 mn 28 s et 43 itérations.

Quand la minimisation est soumise à une contrainte la méthode de "Newton", qui donne à chaque pas le point sur la contrainte, converge assez rapidement (5 itérations de 1 seconde pour 10 chiffres significatifs exacts).

Enfin, pour deux contraintes, la méthode de "Newton" converge au bout de 5 itérations de 3 secondes et donne l'intersection des deux contraintes au dixième chiffre significatif près.

4°) CONCLUSION

Les méthodes de Recherche Opérationnelle font habituellement appel à la programmation linéaire (extension des théories du Simplexe) en linéarisant, comme son nom l'indique, les relations entre variables dépendantes et paramètres de réglage, compte tenu des contraintes.

Dans les problèmes non linéaires cette hypothèse (linéarisation) n'est valable que si l'on n'admet que de petites variations des paramètres de réglage autour d'un point de fonctionnement de l'installation industrielle étudiée.

Ces méthodes peuvent, selon la capacité de l'ordinateur, traiter des programmes d'optimisation de processus industriel avec un nombre respectable (une centaine et plus) de paramètres de réglage et variables dépendantes.

(1) Cf. à ce sujet la thèse de Monsieur Michel GERARD

"Techniques de résolution numérique des systèmes d'équations et principales méthodes de minimisation".

Dans mon étude, je me suis efforcé, au contraire, de ramener le problème aux seules variables indépendantes (λ et μ), ce qui me l'a sensiblement compliqué mais m'a permis de ne pas le linéariser.

En conclusion la mise au point d'une méthode de ce type, pourrait être raisonnablement établie sur la base de 10 à 20 variables indépendantes. Une telle étude apparaît comme l'élément de base indispensable à toute tentative d'optimisation en temps réel de processus.

Tableau n° 1 : $S(1) = 1 \text{ m}^2$; $S(2) = 5 \text{ m}^2$; $S(3) = 0,5 \text{ m}^2$;

F	Cont.	λ	μ	Q/F
9,5	0	0,0441758	0,0037137	1096,4558
9,6	0	0,0441760	0,0037136	1096,4557
9,631	=	FMAX sans contrainte		
9,7	3	0,0441637	0,0036045	1096,4971
9,9	3	0,0441295	0,0032380	1099,1857
10,3	3	0,0440026	0,0022512	1102,3982
10,5	3	0,0438573	0,0016020	1108,9974
10,6	3	0,0437208	0,0012315	1114,6615
10,7	3	0,0434520	0,0008286	1123,6747
10,80	3	0,0425653	0,0003975	1141,6442
10,81	3	0,0423440	0,0003541	1144,6517
10,82	3	0,0420541	0,0003112	1148,0958
10,83	3	0,0416641	0,0002694	1152,0965
10,84	3	0,0411209	0,0002293	1156,8178
10,87	3	0,0377337	0,0001315	1177,7502
10,90	3	0,0309619	0,0000792	1214,4837
10,93	3	0,0225354	0,0000500	1273,7627
10,95	3	0,0166229	0,0000350	1333,2243
10,97	3	0,0106156	0,0000215	1424,4347
10,98	3	0,0075925	0,0000151	1494,8019
10,99	3	0,0045595	0,0000089	1604,8148
11,00	3	0,0015183	0,0000029	1852,5512
11,001	3	0,0012132	0,0000023	1904,6289
11,002	3	0,0009583	0,0000010	1972,7746
11,003	3	0,0006032	0,0000011	2070,3015
11,004	3	0,0002974	0,0000005	2242,5606

Tableau n° 2 : $S(1) = 1,08 \text{ m}^2$; $S(2) = 4,5 \text{ m}^2$; $S(3) = 3,05 \text{ m}^2$;

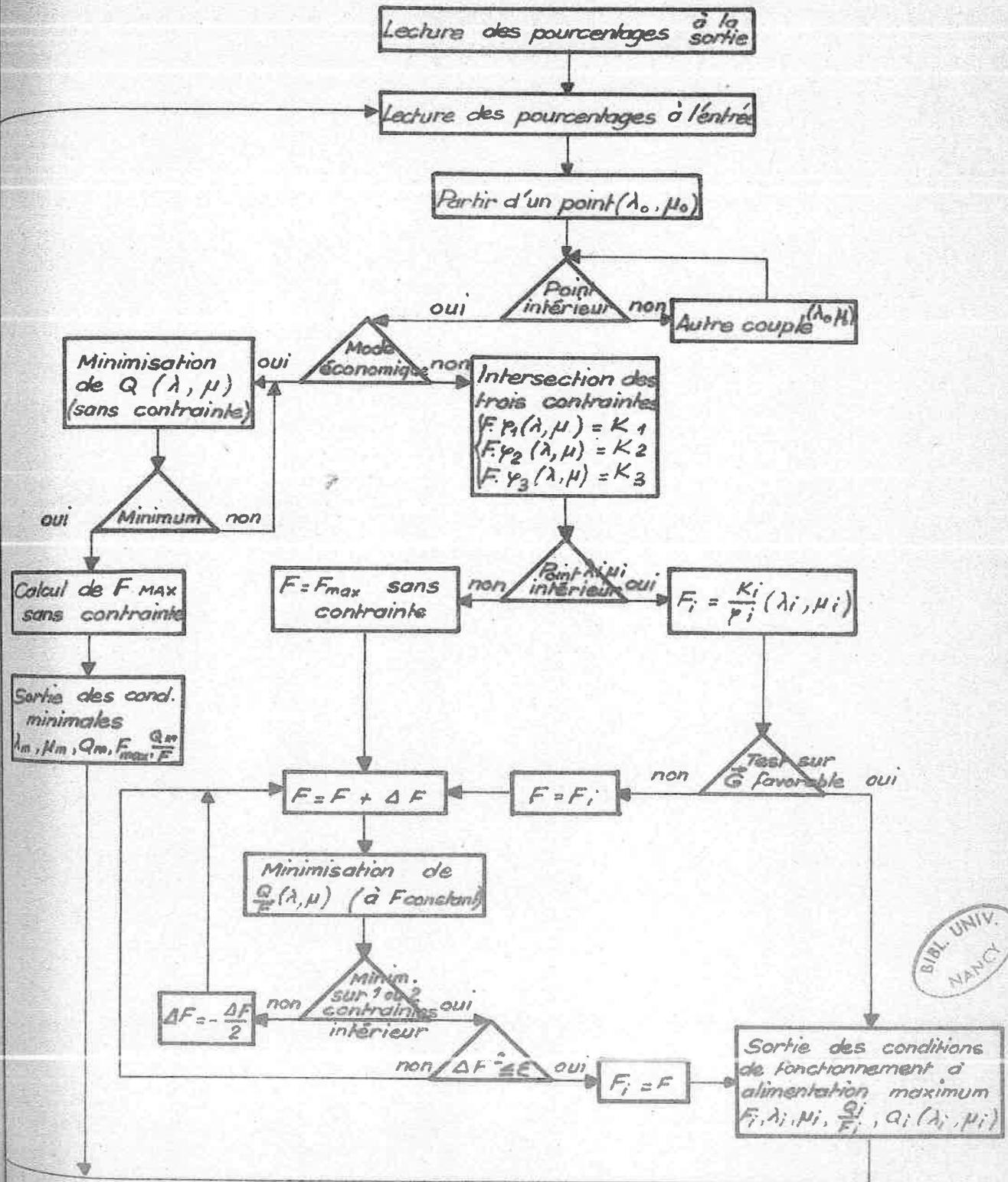
F	Cont.	λ	μ	Q/F
5	0	0,0441726	0,0037132	1096,4557
10	0	0,0441729	0,0037142	1096,4557
50	0	0,0441726	0,0037132	1096,4557
51	0	0,0441725	0,0037139	1096,4557
51,5	0	0,0441726	0,0037132	1096,4557
51,9	0	0,0441726	0,0037132	1096,4557
51,904 = FMAX sans contrainte				
52	1	0,0440897	0,0037282	1096,4590
53	1	0,0431650	0,0038731	1096,9260
54	1	0,0421062	0,0040083	1098,2473
55	1	0,0408929	0,0041330	1100,5455
55,5	1	0,0402258	0,0041922	1102,1038
55,7	1	0,0399450	0,0042147	1102,8112
55,8	1	0,0398022	0,0042260	1103,1836
55,9	1	0,0396581	0,0042374	1103,5687
56	1	0,0395114	0,0042484	1103,9668
56,1	1	0,0393628	0,0042593	1104,3780
56,2	1/3	0,0391500	0,0042467	1104,3091
56,3	1/3	0,0389254	0,0042312	1105,2702
56,5	1/3	0,0384608	0,0041993	1106,2918
57	1/3	0,0372024	0,0041150	1109,4390

Tableau n° 2 (fin)

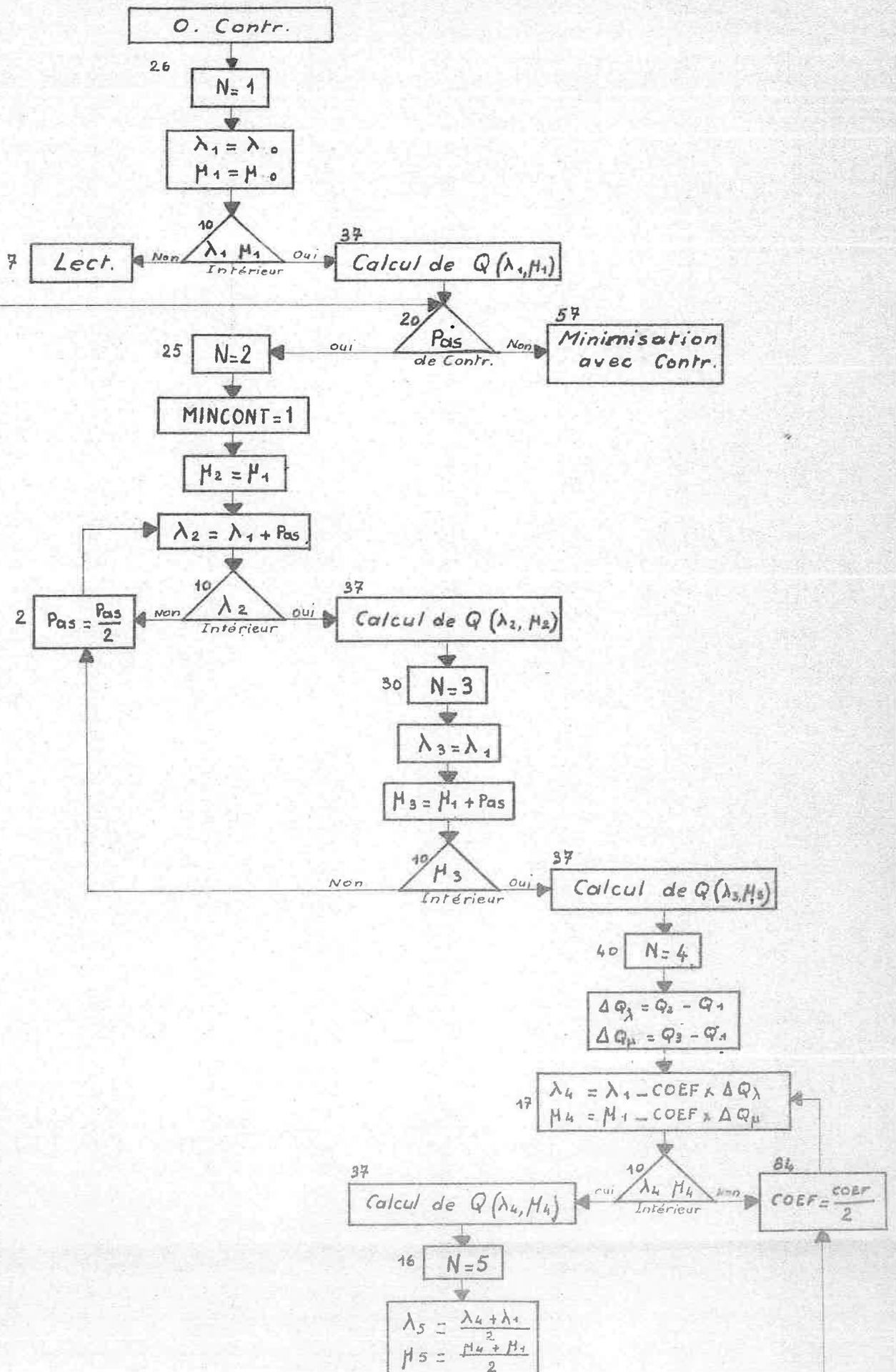
F	Cont.	λ	μ	$\frac{Q}{F}$
57,5	1/3	0,0357878	0,0040236	1113,6152
58	1/3	0,0341912	0,0039248	1119,0613
58,5	1/3	0,0323812	0,0038184	1126,1164
59	1/3	0,0303189	0,0037040	1135,2624
59,5	1/3	0,0279563	0,0035817	1147,2109
60	1/3	0,0252337	0,0034514	1163,0653
60,5	1/3	0,0220766	0,0033133	1184,6527
61	1/3	0,0183919	0,0031678	1215,2956
61,3	1/3	0,0158806	0,0030773	1240,6324
61,4	1/3	0,0149871	0,0030466	1250,7650
61,5	1/3	0,0140635	0,0030157	1261,9756
61,6	1/3	0,0130838	0,0029846	1274,4607
61,7	1/3	0,0121206	0,0029534	1288,4696
61,716	$\frac{2}{3}$	0,0119309	0,0029474	1291,3076
61,8	1/2	0,0120147	0,0029163	1290,1824
61,85	1/2	0,0120666	0,0028970	1289,4941
63	1/2	0,0112521	0,0036232	1271,1877
64	1/2	0,0143429	0,0042486	1258,7408
64,5	1/2	0,0149078	0,0045983	1255,6449
64,75	1/2	0,0151951	0,0047832	1256,9486

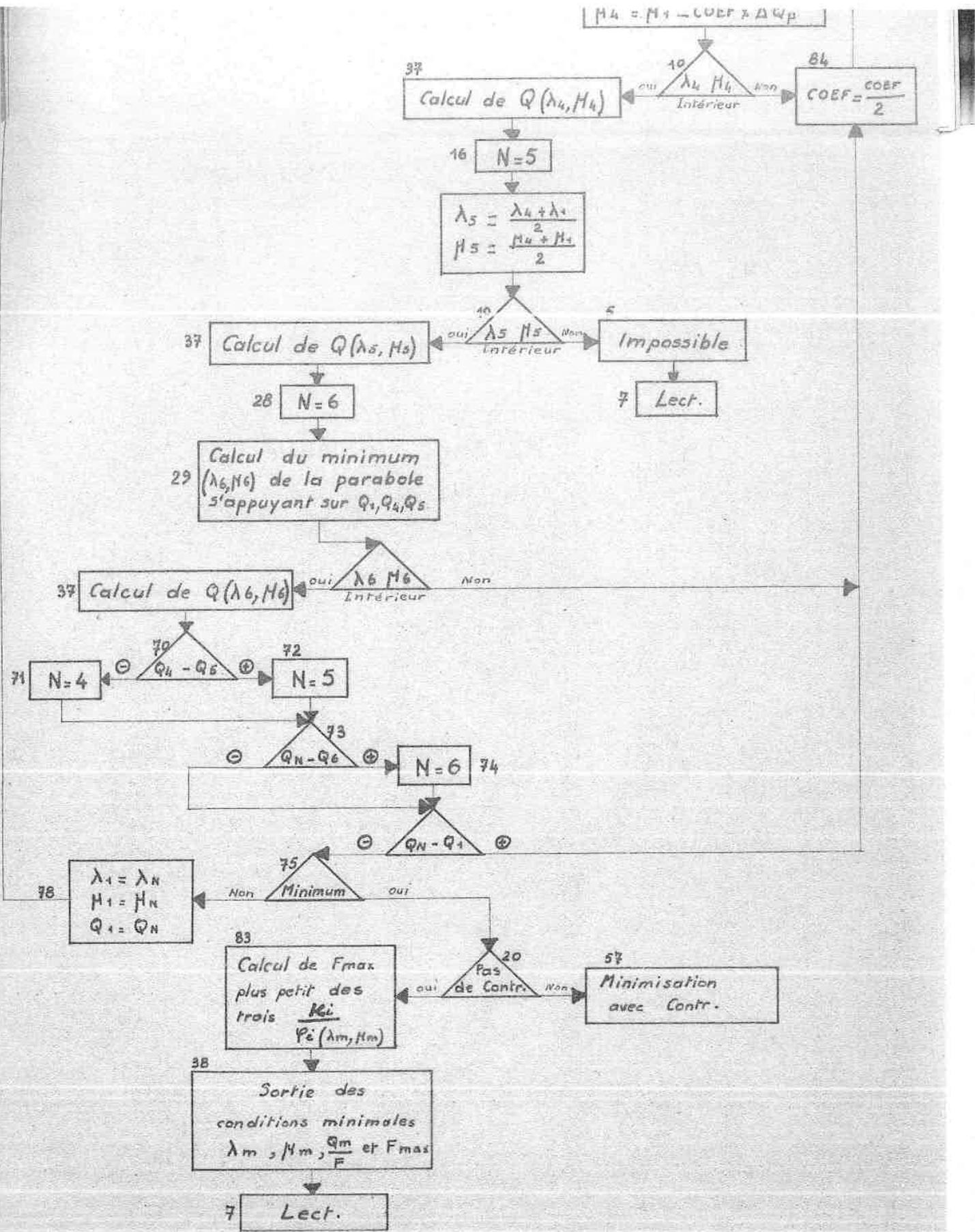
← $\frac{Q}{F}$ MAX

MINIMISATION DE $\frac{Q}{F}$ POUR UNE ALIMENTATION F NON IMPOSÉE



BIBL. UNIV.
NANCY





$$M_4 = H_1 - \text{COEF} * \Delta Q_p$$

37 Calcul de $Q(\lambda_4, H_4)$

84 $\text{COEF} = \frac{\text{COEF}}{2}$

16 $N = 5$

$$\lambda_5 = \frac{\lambda_4 + \lambda_1}{2}$$

$$H_5 = \frac{H_4 + H_1}{2}$$

37 Calcul de $Q(\lambda_5, H_5)$

5 Impossible

7 Lect.

28 $N = 6$

29 Calcul du minimum (λ_6, H_6) de la parabole s'appuyant sur Q_1, Q_4, Q_5

37 Calcul de $Q(\lambda_6, H_6)$

71 $N = 4$

72 $N = 5$

74 $N = 6$

78

$$\lambda_1 = \lambda_N$$

$$H_1 = H_N$$

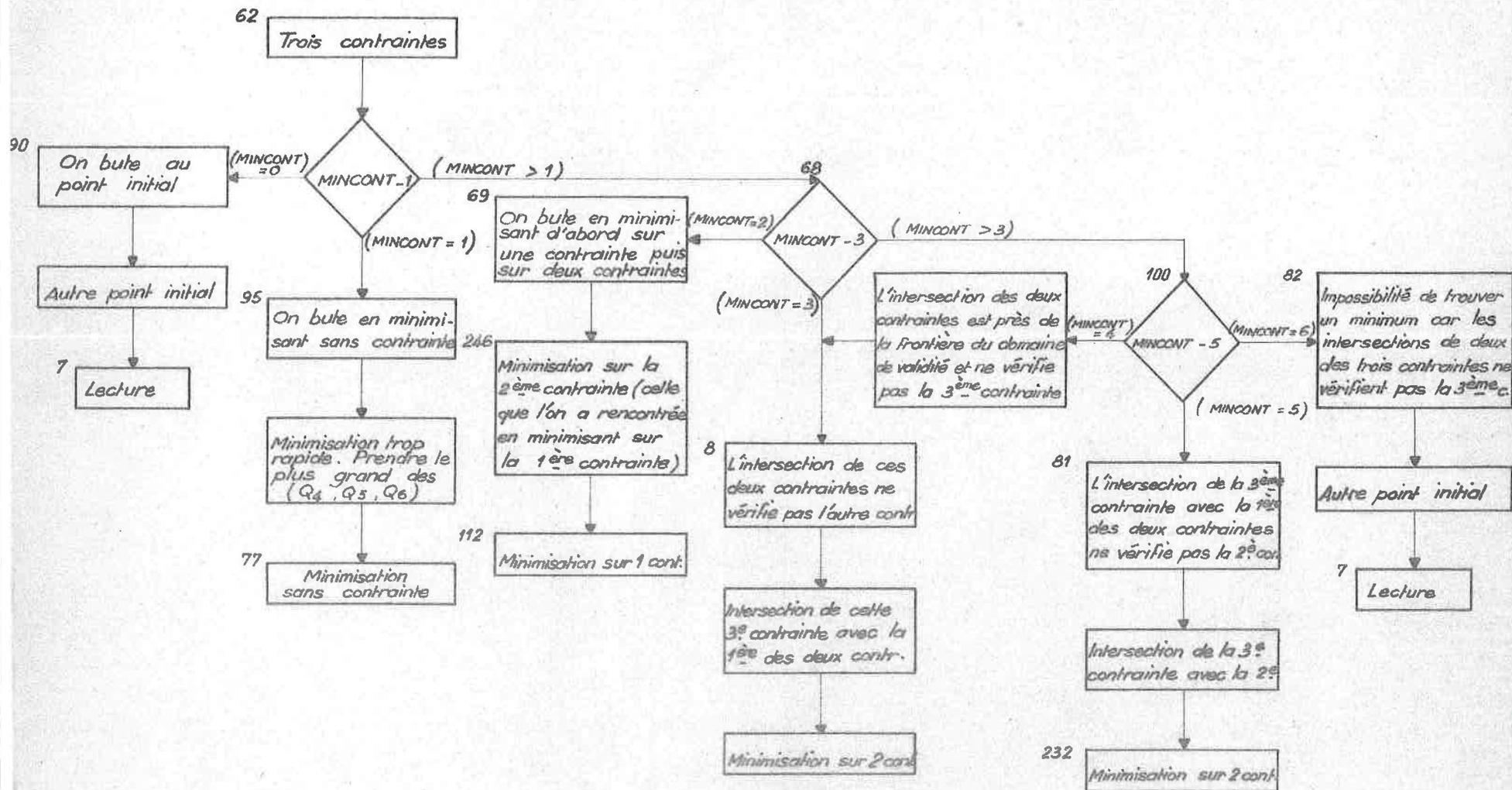
$$Q_1 = Q_N$$

83 Calcul de F_{\max} plus petit des trois $\frac{K_i}{\Psi_i(\lambda_m, H_m)}$

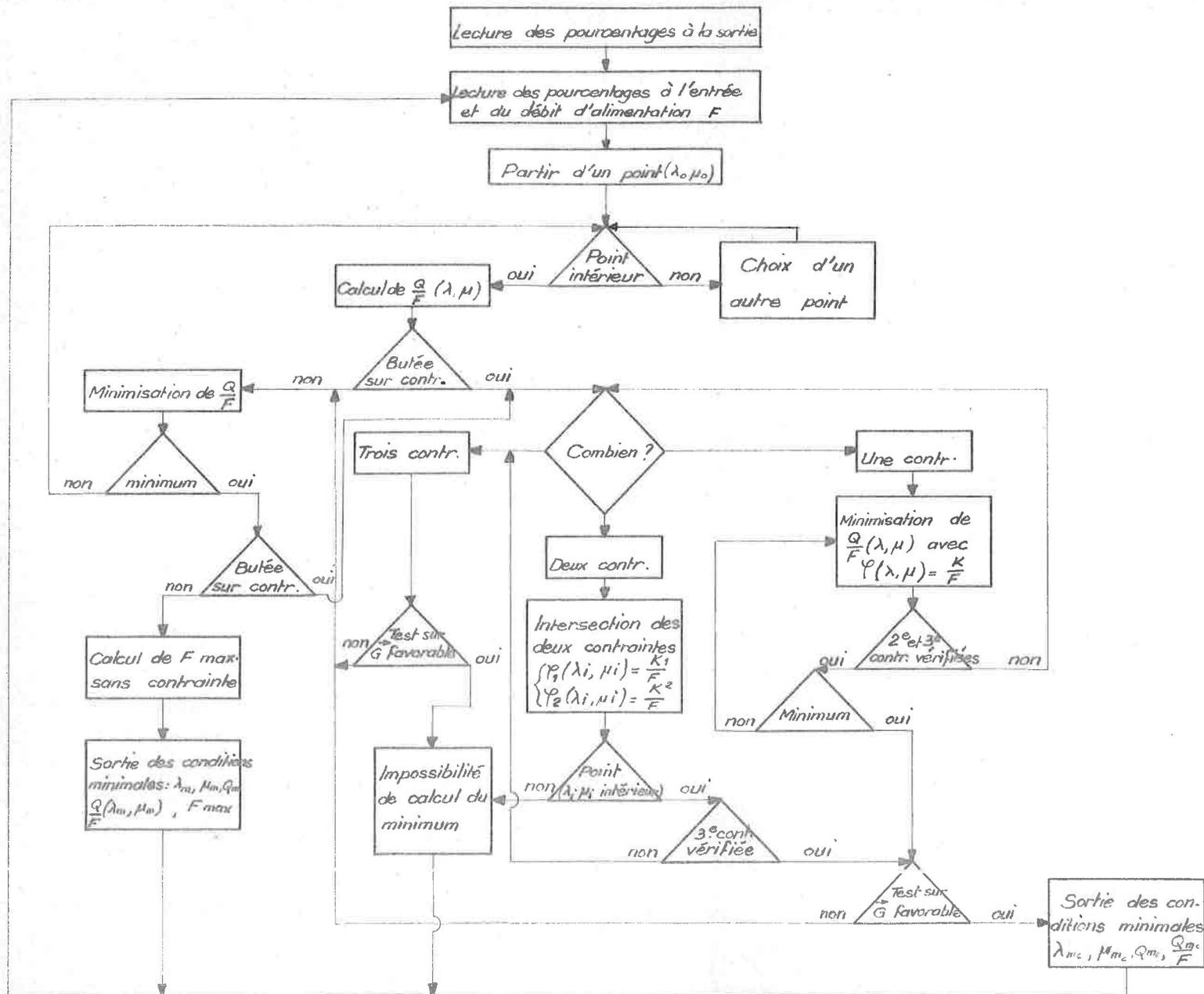
57 Minimisation avec Contr.

38 Sortie des conditions minimales $\lambda_m, H_m, \frac{Q_m}{F}$ et F_{\max}

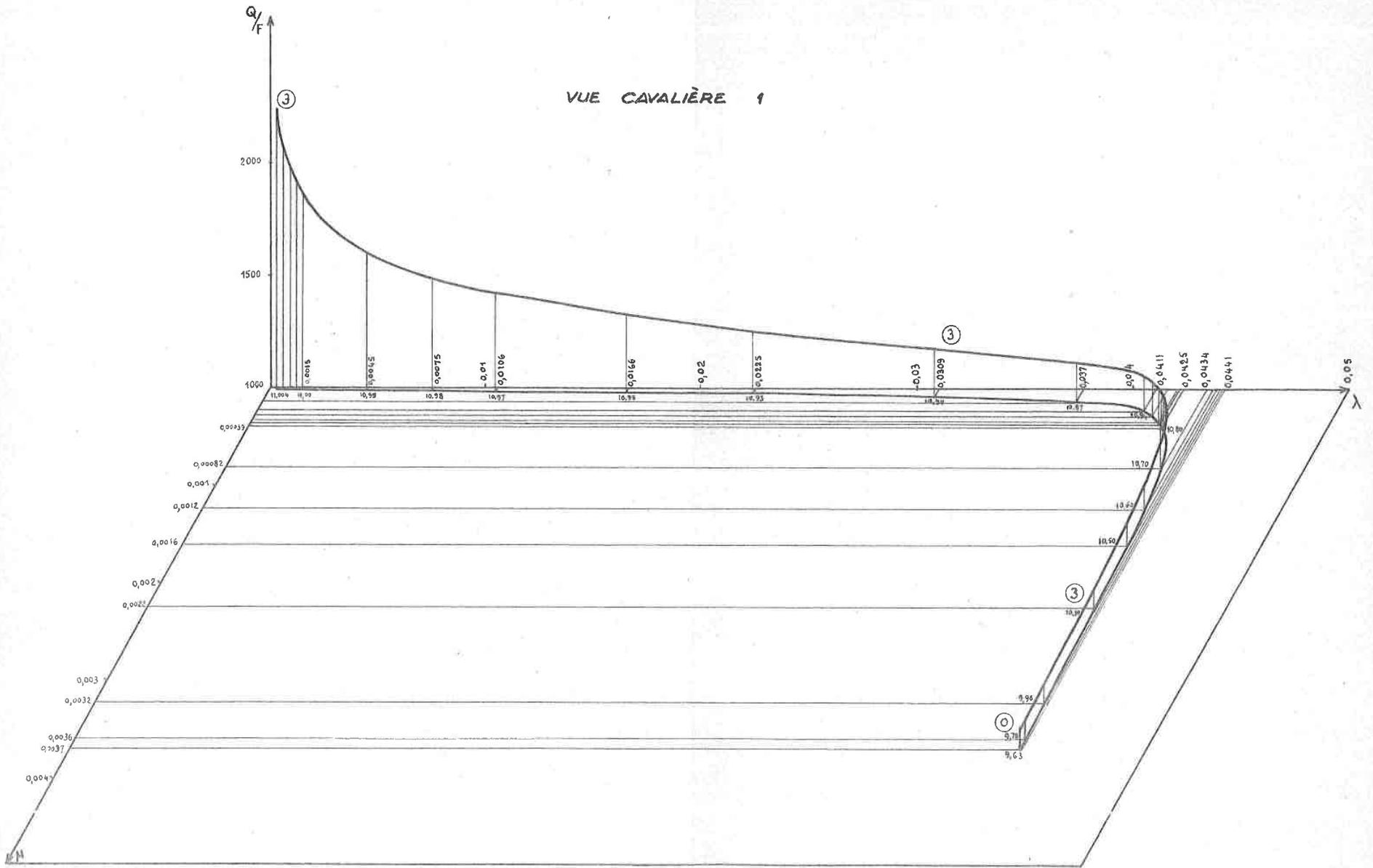
7 Lect.



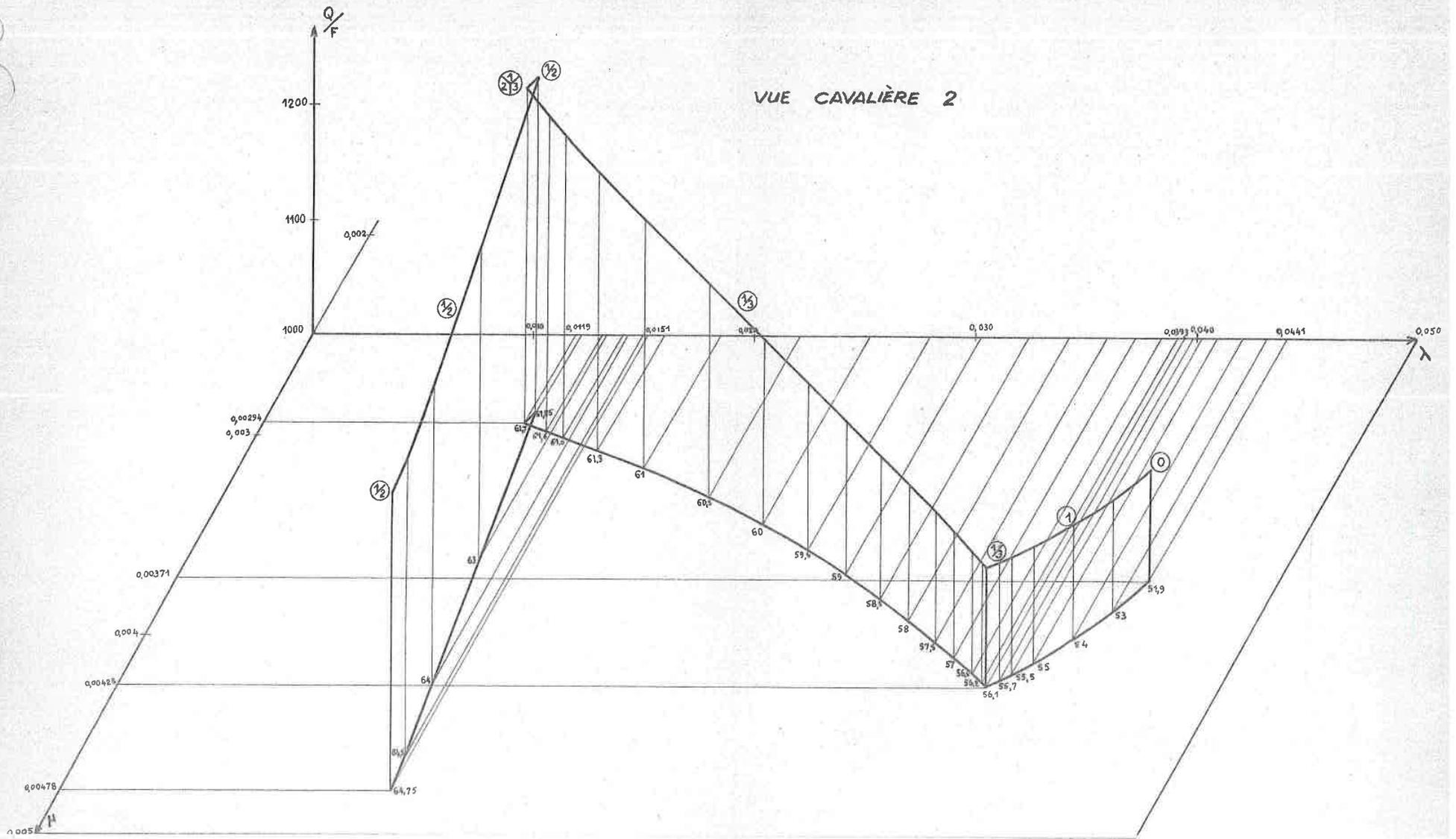
MINIMISATION DE $\frac{Q}{F}$ POUR UNE ALIMENTATION F IMPOSÉE

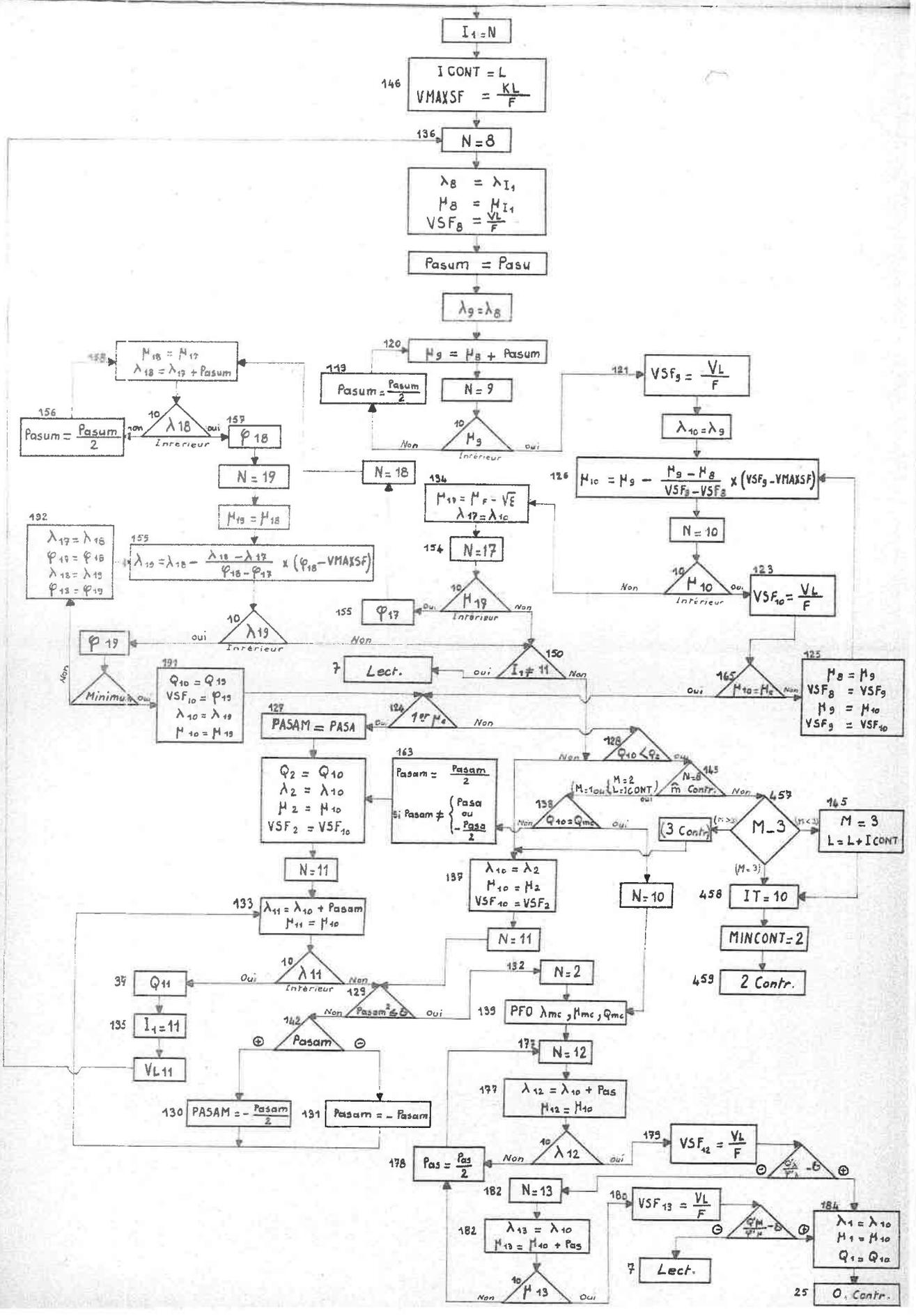


VUE CAVALIÈRE 1



VUE CAVALIÈRE 2





$$I_1 = N$$

$$I_{CONT} = L$$

$$V_{MAXSF} = \frac{KL}{F}$$

$$N = 8$$

$$\lambda_8 = \lambda_{I_1}$$

$$M_8 = M_{I_1}$$

$$V_{SF_8} = \frac{V_L}{F}$$

$$Pasum = Pasu$$

$$\lambda_9 = \lambda_8$$

$$M_9 = M_8 + Pasum$$

$$Pasum = \frac{Pasum}{2}$$

$$N = 9$$

$$V_{SF_9} = \frac{V_L}{F}$$

$$\lambda_{10} = \lambda_9$$

$$M_{10} = M_9 - \frac{M_9 - M_8}{V_{SF_9} - V_{SF_8}} \times (V_{SF_9} - V_{MAXSF})$$

$$N = 10$$

$$V_{SF_{10}} = \frac{V_L}{F}$$

$$M_{18} = M_{17}$$

$$\lambda_{18} = \lambda_{17} + Pasum$$

$$Pasum = \frac{Pasum}{2}$$

$$\lambda_{18}$$

$$\varphi_{18}$$

$$N = 19$$

$$M_{19} = M_{18}$$

$$\lambda_{17} = \lambda_{18}$$

$$\varphi_{17} = \varphi_{18}$$

$$\lambda_{13} = \lambda_{15}$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{15}$$

$$\lambda_{15} = \lambda_{18} - \frac{\lambda_{18} - \lambda_{17}}{\varphi_{18} - \varphi_{17}} \times (\varphi_{18} - V_{MAXSF})$$

$$\lambda_{19}$$

$$\varphi_{19}$$

$$N = 17$$

$$M_{17}$$

$$I_1 \neq 11$$

$$Lect.$$

$$PASAM = PASA$$

$$Q_2 = Q_{10}$$

$$\lambda_2 = \lambda_{10}$$

$$M_2 = M_{10}$$

$$V_{SF_2} = V_{SF_{10}}$$

$$Pasam = \frac{Pasam}{2}$$

$$Si Pasam \neq \begin{cases} Pasu \\ - Pasu \end{cases}$$

$$M-3$$

$$M = 3$$

$$L = L + I_{CONT}$$

$$IT = 10$$

$$MINCONT = 2$$

$$2 Contr.$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{10} + Pasam$$

$$M_{11} = M_{10}$$

$$\lambda_{11}$$

$$Q_{11}$$

$$I_1 = 11$$

$$V_L_{11}$$

$$PASAM = - \frac{Pasam}{2}$$

$$Pasam = - Pasam$$

$$\lambda_{10} = \lambda_2$$

$$M_{10} = M_2$$

$$V_{SF_{10}} = V_{SF_2}$$

$$N = 2$$

$$PFO \lambda_{mc}, M_{mc}, Q_{mc}$$

$$N = 12$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{10} + Pas$$

$$M_{12} = M_{10}$$

$$\lambda_{12}$$

$$V_{SF_{12}} = \frac{V_L}{F}$$

$$N = 13$$

$$\lambda_{13} = \lambda_{10}$$

$$M_{13} = M_{10} + Pas$$

$$M_{13}$$

$$V_{SF_{12}} = \frac{V_L}{F}$$

$$V_{SF_{13}} = \frac{V_L}{F}$$

$$\lambda_{13} = \lambda_{10}$$

$$M_{13} = M_{10}$$

$$Q_{13} = Q_{10}$$

$$O. Contr.$$

61

Deux contraintes

MINCONT = 3

IT = N

459

ICT = L

INSCT = 1

211

 ICONT 1 = 1^{ère} contr.
 ICONT 2 = 2^{ème} contr.

201

 $F_1 = V(\text{ICONT 1}) - CA(\text{ICONT 1})$
 $F_2 = V(\text{ICONT 2}) - CA(\text{ICONT 2})$

N = 14

203

 $\lambda_{14} = \lambda_{IT} + PAS$
 $\mu_{14} = \mu_{IT}$

10

202

 $PAS = \frac{PAS}{2}$

 non λ_{14} Intérieur

204

 $F_1 LP = F_1' \lambda$
 $F_2 LP = F_2' \lambda$

N = 15

 $\lambda_{15} = \lambda_{IT}$
 $\mu_{15} = \mu_{IT} + PAS$

10

 non μ_{15} Intérieur

205

 $F_1 MP = F_1' \mu$
 $F_2 MP = F_2' \mu$

(INSCT = 1)

210

N = 16

$$\lambda_{16} = \lambda_{IT} + \frac{F_2 \cdot F_1 MP - F_1 \cdot F_2 MP}{F_1 LP \cdot F_2 MP - F_2 LP \cdot F_1 MP}$$

$$\mu_{16} = \mu_{IT} + \frac{F_1 \cdot F_2 LP - F_2 \cdot F_1 LP}{F_1 LP \cdot F_2 MP - F_2 LP \cdot F_1 MP}$$

10

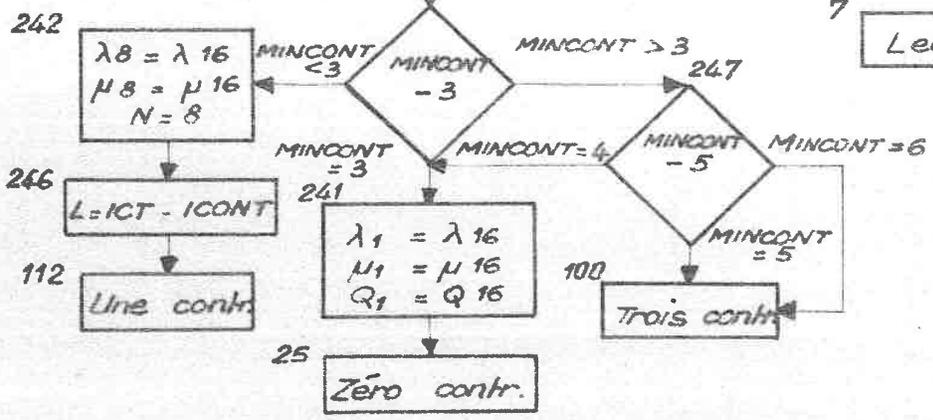
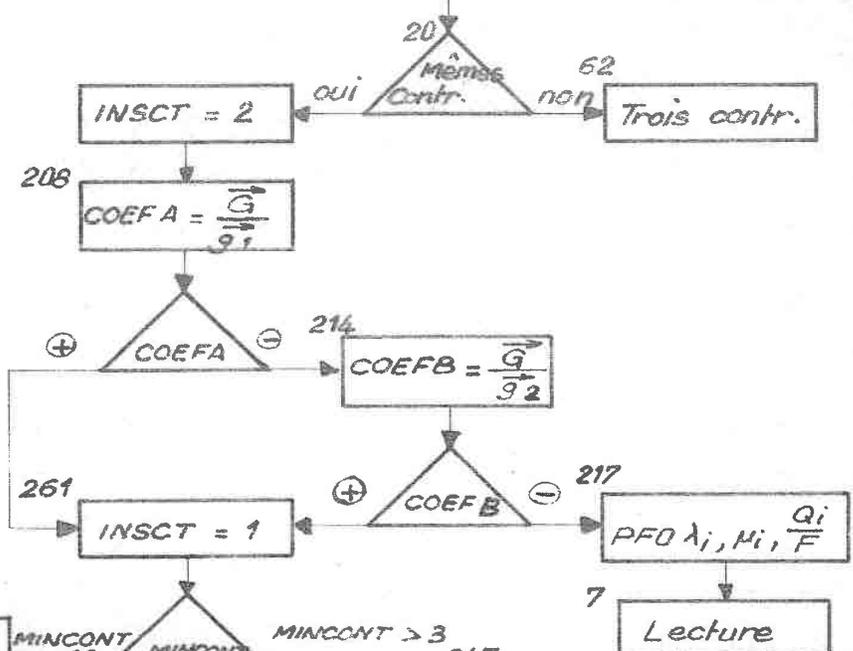
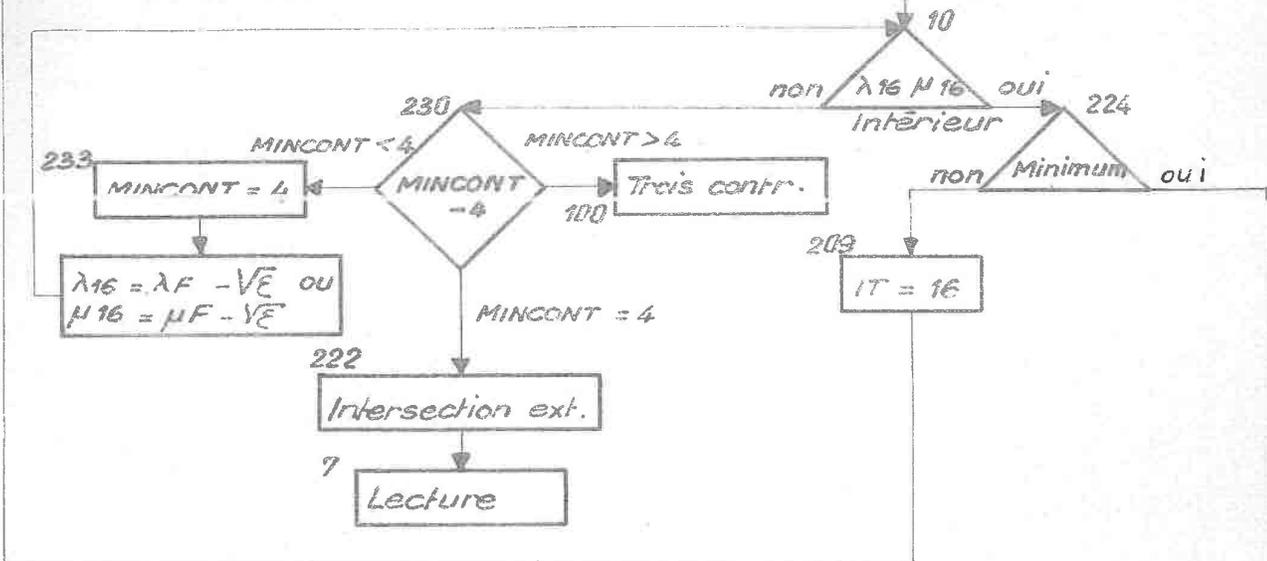
 non $\lambda_{16} \mu_{16}$ Intérieur oui

230

276

$$\lambda_{16} = \lambda_{17} + \frac{F_2 \cdot F_1 \cdot MP - F_1 \cdot F_2 \cdot MP}{F_1 \cdot LP \cdot F_2 \cdot MP - F_2 \cdot LP \cdot F_1 \cdot MP}$$

$$\mu_{16} = \mu_{17} + \frac{F_1 \cdot F_2 \cdot LP - F_2 \cdot F_1 \cdot LP}{F_1 \cdot LP \cdot F_2 \cdot MP - F_2 \cdot LP \cdot F_1 \cdot MP}$$



61

Deux contraintes

MINCONT = 3

IT = N

459

ICT = L

INSCT = 1

211

ICONT 1 = 1^{ère} contr.
ICONT 2 = 2^{ème} contr.

201

$F_1 = V(ICON T 1) - CA(ICON T 1)$
 $F_2 = V(ICON T 2) - CA(ICON T 2)$

N = 14

203

$\lambda_{14} = \lambda_{IT} + PAS$
 $\mu_{14} = \mu_{IT}$

10

202

$PAS = \frac{PAS}{2}$

non

λ_{14}

Intérieur

204

$F_1 LP = F_1' \lambda$
 $F_2 LP = F_2' \lambda$

N = 15

$\lambda_{15} = \lambda_{IT}$
 $\mu_{15} = \mu_{IT} + PAS$

10

non

μ_{15}

Intérieur

205

$F_1 MP = F_1' \mu$
 $F_2 MP = F_2' \mu$

(INSCT = 1)

210

N = 16

$\lambda_{16} = \lambda_{IT} + \frac{F_2 \cdot F_1 MP - F_1 \cdot F_2 MP}{F_1 LP F_2 MP - F_2 LP F_1 MP}$
 $\mu_{16} = \mu_{IT} + \frac{F_1 F_2 LP - F_2 \cdot F_1 LP}{F_1 LP F_2 MP F_2 LP F_1 MP}$

10

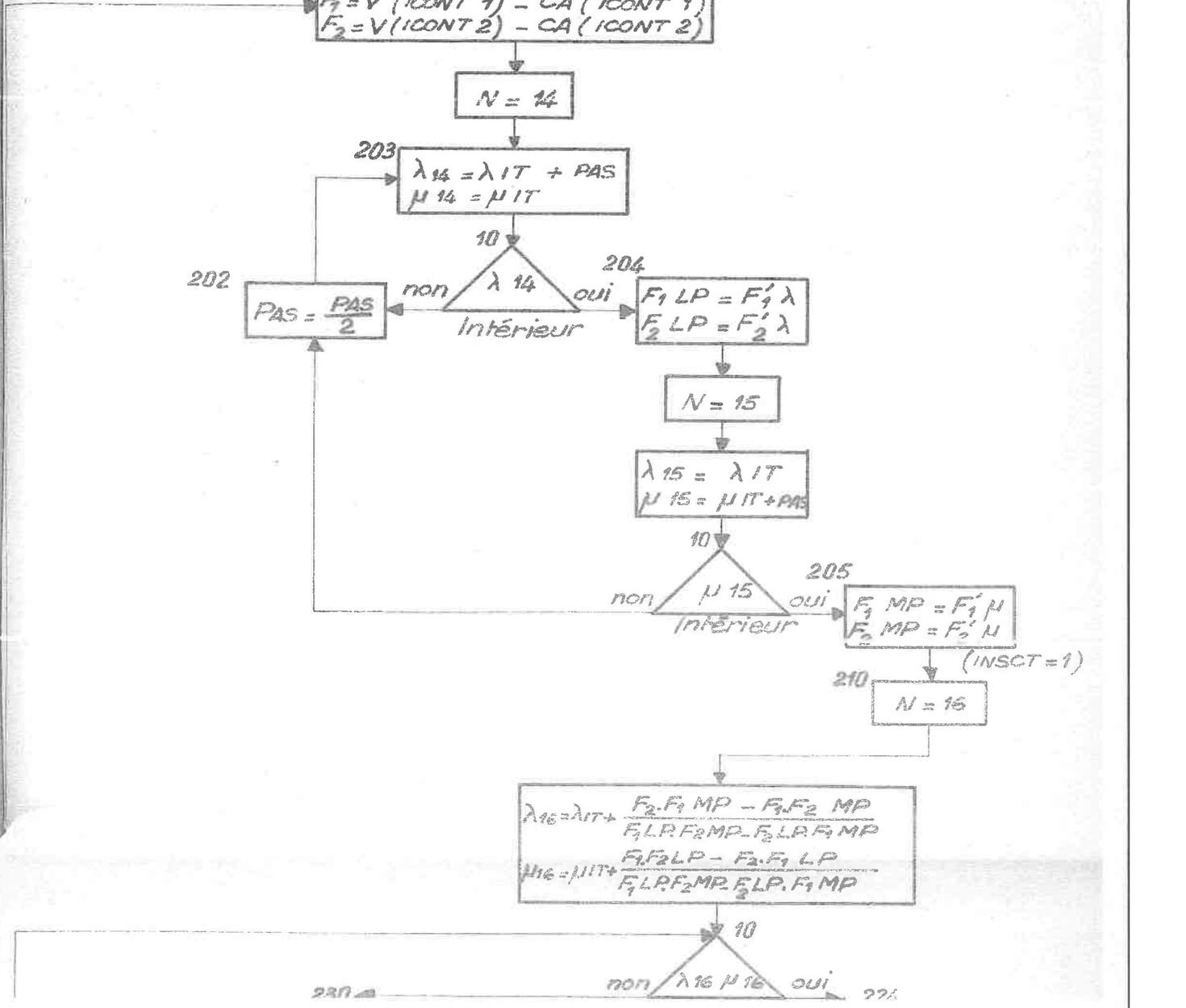
non

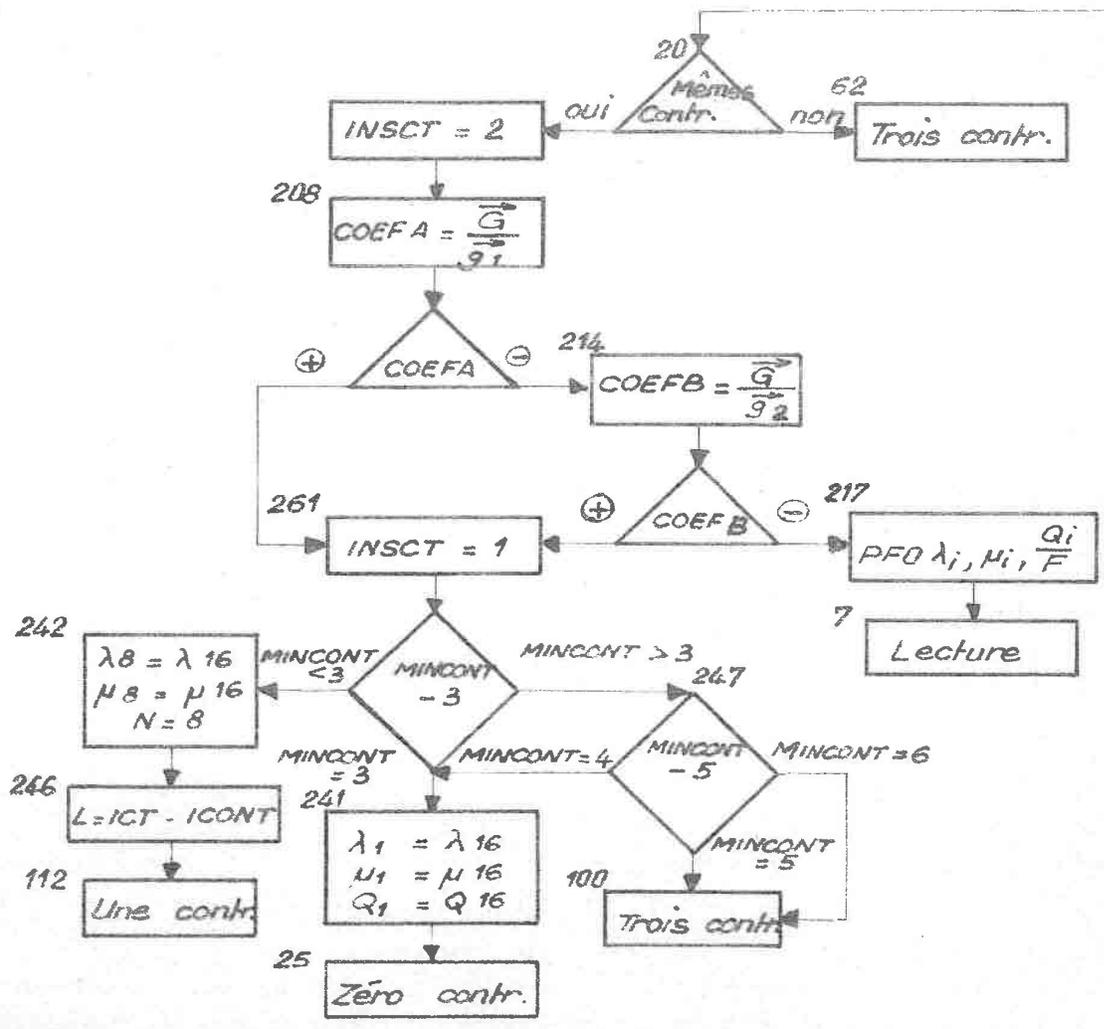
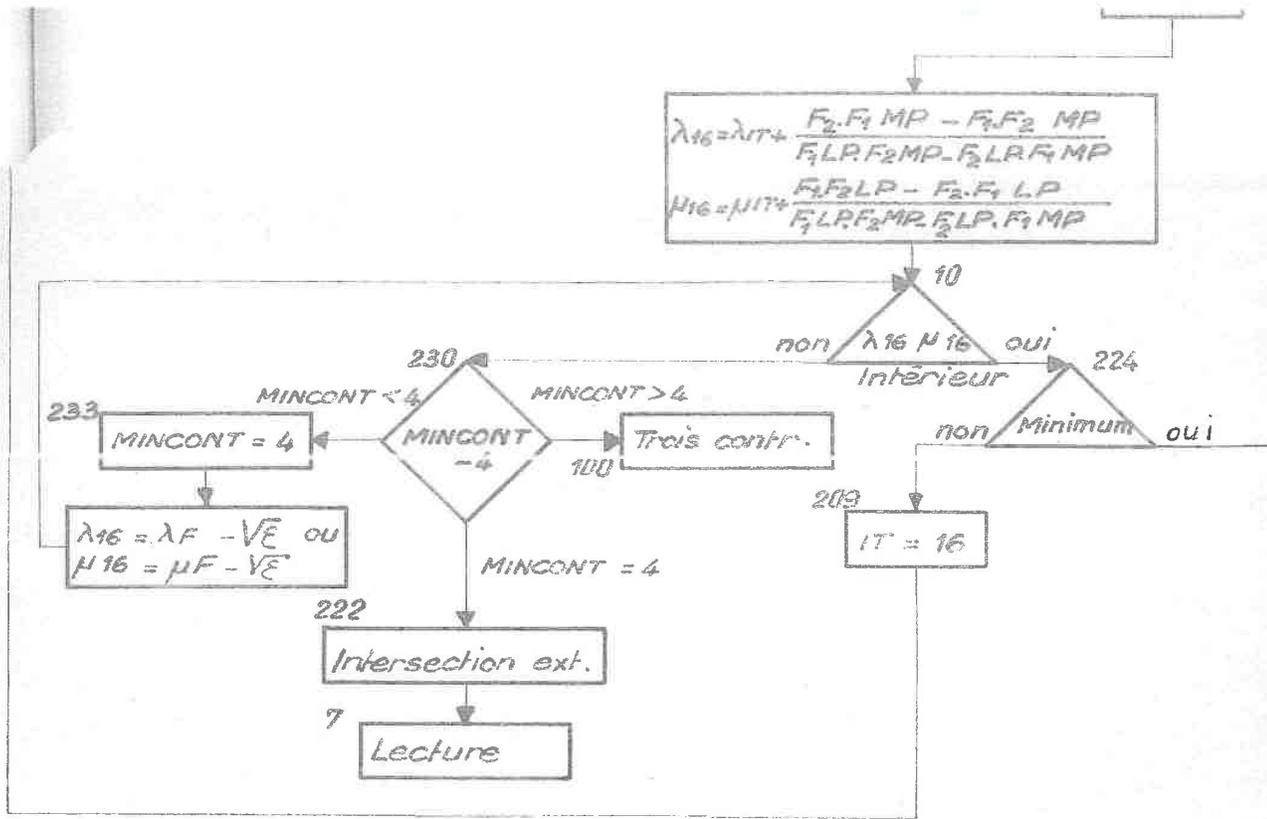
$\lambda_{16} \mu_{16}$

oui

221

230





Vu et Approuvé
Nancy, le
Le Doyen de la Faculté
des Sciences de NANCY

M. AUBRY

Vu et Permis d'imprimer
Nancy, le

le Recteur :
Président du Conseil de
l'Université
P. IMBS