

119ⁿ
OPERATIONS EN TRIPLE PRECISION
CODE DE PROGRAMMATION, MATRICIEL
MOMENTS CENTRES COURBE DE K. PEARSON

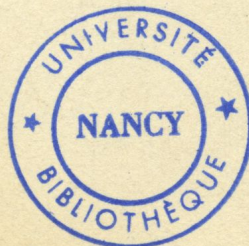
math
ScN 61
9

T H E S E

PRESENTÉE A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE NANCY
POUR L'OBTENTION
DU DOCTORAT DE SPECIALITE
MATHÉMATIQUES 3^e CYCLE

PAR CLAUDE COLAS

17-6
ET SOUTENUE EN JUIN 1961
DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN



jury

MM. LEGRAS

président

. HERVE

examineurs

UNIVERSITE de NANCY --o-- FACULTE des SCIENCES

- OPERATIONS ARITHMETIQUES EN TRIPLE PRECISION
- CODE de PROGRAMMATION MATRICIEL
- CALCUL des MOMENTS CENTRES et ESTIMATION PAR
LES COURBES de K. PEARSON.

par

Claude C O L A S



UNIVERSITE de NANCY - FACULTE des SCIENCES

Doyen : M. ROUBAULT

Assesseur : M. WAHL

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT, DELSARTE

Professeurs honoraires : MM. GUTTON, CROZE, RAYBAUD, LAFFITTE, LERAY, JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, L. SCHWARTZ, DIEUDONNE, de MALLEMANN, LONGCHAMBON, LETORT, DODE, GAUTHIER, GOUDET, OLMER, CORNUBERT, CHAPELLE, GUERIN, CHEVALLIER, REMY.

Maîtres de conférences honoraires : MM. RAUX, LIENHART.

PROFESSEURS

MM.

URION	Chimie biologique	FRUHLING	Physique
DELSARTE	Analyse supérieure	LIONS	M.M.P.
ROUBAULT	Géologie	SUHNER	Physique exp.
VEILLET	Biologie animale	HILLY	Géologie
ECHEVIN	Botanique	LE GOFF	Génie Chimique
WAHL	Chimie Org. indust.	CHAPON	Chimie biologique
BARRIOL	Chimie théorique	HEROLD	Chimie indust.
BIZETTE	Physique	SCHWARTZ	Exploit. minière
GUILLIEN	Electronique	GAYET	Physiologie
GIBERT	Chimie Physique	MANGENOT	Phytopathologie
HERVE	Calcul diff. et Int.	MALAPRADE	Chimie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	HADNI	Physique
DAVID	Chimie organique	DELAMARE-DEBOUDEVILLE	Zoologie
BOLFA	Minéralogie	BONVALET	Mécanique Physique
NICLAUSE	Chimie	BRUHAT	Mathématiques gén.
FAIVRE	Physique appliquée	Mme ROIZEN	Physique
AUBRY	Chimie minérale	KERN	Minéralogie
DUVAL	Chimie	BASTICK	Chimie
COPPENS	Radiogéologie		

MAITRES de CONFERENCES

MM.

WERNER	Botanique	CLIN	Paléontologie
GARNIER	Agronomie	ROCCI	Géologie
REGNIER	Physico-chimie	WEISS	Physique M.P.C.
WEPPE	Minéralogie appli.	Mme BASTICK	Chimie M.P.C.
BERNARD	Géologie	VUILLAUME	Psychophysiologie
ARAGNOL	Mathématiques (prop.)	PLAN	Mathématiques
GAY	Chimie biologique	GUDEFIN	Physique
RENARD	Physique théo. et nuc.	MARI	Chimie I.S.I.N.
CONDE	Zoologie	LAFON	Physique I.S.I.N.
GOSSE	Génie chimique	HORN	Physique
CHAMPIER	Physique	PIERRET	Maître de conf. adj.

Secrétaire Principal : M. CARON

Que Monsieur J. LEGRAS, Professeur à la Faculté des Sciences, veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt permanent qu'il a manifesté vis à vis de mon travail, et pour les conseils judicieux qu'il n'a cessé de me prodiguer.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur DEPAIX, Chef de travaux à la Faculté des Sciences, pour l'aide efficace qu'il m'a apportée dans la partie statistique.

Je remercie Messieurs les Professeurs qui ont bien voulu me faire l'honneur de composer le Jury.

TABLE des MATIERES

1ère Partie : OPERATIONS EN VIRGULE FLOTTANTE.

- Opérations arithmétiques sur l'ordinateur 650 I.B.M.	1
- Les opérations arithmétiques en virgule flottante triple précision	4
- Addition	
- Soustraction	
- Multiplication	
- Division	

2ème Partie : ENSEMBLE DES SOUS-PROGRAMMES MATRICIELS

- Introduction : les programmes matriciels	45
- Transposition	47
- Addition et Soustraction	51
- Multiplication	55
- Inversion	60
- Calcul de déterminant	65

3ème Partie : MOMENTS CENTRES : COURBES de PEARSON

- Calcul des moments centrés jusqu'à l'ordre 4	
- Généralités	77
- Sous-Programmes	78
- Estimation d'une distribution : Courbes de K. PEARSON	
- Généralités	92
- Exemples	108

-O-O-O-O-O-

-O-O-

-O-

1ère PARTIE

EXPANSION DES OPERATIONS ARITHMETIQUES
SUR ORDINATEUR IBM 650

-- OPERATIONS en TRIPLE PRECISION --

I - LES OPERATIONS ARITHMETIQUES SUR L'ORDINATEUR 650 I, B, M.

1) LA VIRGULE FIXE.

L'ordinateur I, B, M. 650 est capable d'effectuer les quatre opérations arithmétiques à partir d'un ensemble d'organes arithmétiques et selon un processus élémentaire unique pour toutes ces opérations.

- Les organes arithmétiques.

Ils se composent :

- a) du distributeur : mémoire adressable (8001) de capacité un mot, c'est-à-dire dix positions d'enregistrement et un signe.
- b) de l'accumulateur : double mémoire adressable (accumulateur gauche (8001) ; accumulateur droit (8002) ; ces deux mémoires fonctionnant presque toujours de façon solidaire).
- c) de l'additionneur : organe entièrement sous la dépendance des circuits internes et, de ce fait, échappant à tout contrôle de l'opérateur.

- Le processus élémentaire utilisé dans les 4 opérations.

Le processus élémentaire, à la base de l'exécution des opérations arithmétiques, est l'addition.

Ce processus se déroule de la façon indiquée par le schéma ci-dessous :

Soient A et B, les données initialement enregistrées dans les mémoires a et b.

L'un de ces deux opérands est transféré sur l'accumulateur, l'autre sur le distributeur.

.../...

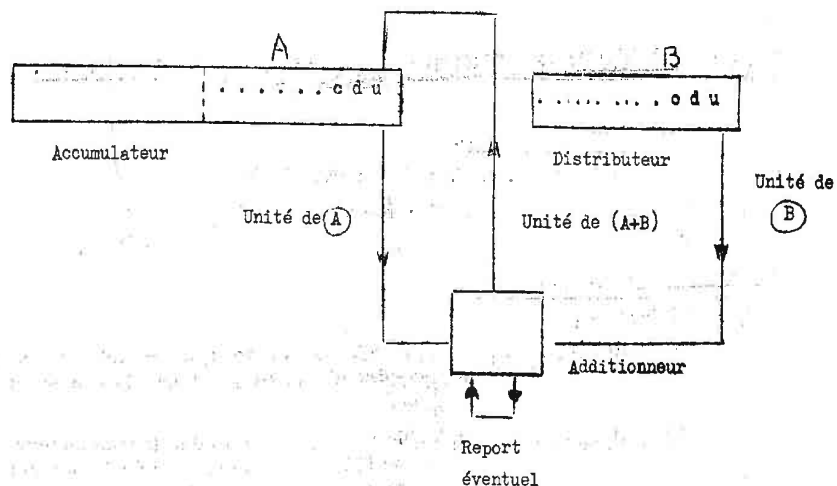


Schéma de principe de l'opération $A + B$.

L'Additionneur analyse les positions "Unité" des données, effectue leur addition et transfère le résultat $U_A + U_B$ en position unité de l'accumulateur, conservant tout report éventuel qui viendra s'ajouter aux positions dizaines de A et B et ainsi de suite, jusqu'à épuisement de toutes les positions d'enregistrement.

- Exécution des 4 opérations.

Il découle de ce qui précède que l'addition ne sera rien d'autre que la mise en oeuvre du processus élémentaire.

La soustraction $A - B$ sera ramenée à l'addition à A du complément à 9 de B.

$$\begin{array}{rcl} \text{Exemple : } 46 - 24 & \longrightarrow & 46 + 75 = \textcircled{1}21 \\ & & + 1 \\ & & \hline & & 22 \end{array}$$

.../...

La multiplication et la division se ramèneront respectivement à une série d'additions ou de soustractions avec décalages. L'analyse des signes des opérandes permet alors à la machine d'affecter au résultat de l'opération le signe convenable.

Dès que l'un des facteurs sur lesquels portera l'opération est mis en place dans l'accumulateur, celle-ci est déclenchée par une seule instruction codée.

Les calculs que peut effectuer directement l'ordinateur sur des données exprimées à partir de l'écriture numérique habituelle au moyen des opérations décrites ci-dessus, sont appelés calculs en virgule fixe.

Dans tous les problèmes de calculs traités sur ordinateur, en virgule fixe, il importe d'après le principe de fonctionnement de l'additionneur que les nombres utilisés soient cadrés de façon cohérente les uns par rapport aux autres, ce qui suppose que l'ordre de grandeurs de tous résultats intermédiaires soit connu a priori, afin d'indiquer à la machine les cadrages à exécuter en cours de déroulement du programme. Malheureusement il en est ainsi que très rarement, et pour tourner la difficulté on est conduit à utiliser un autre mode d'écriture des nombres appelé : Virgule flottante.

2) LA VIRGULE FLOTTANTE.

Un nombre écrit en virgule flottante se compose de 2 parties :

- la caractéristique ou exposant, indiquant l'ordre de grandeur du nombre.
- la mantisse, formée des chiffres significatifs de ce nombre.

Nous ne parlerons ici que de la virgule flottante, type FLAIR, qui est la plus couramment utilisée.

Transcription d'un nombre écrit en Virgule fixe en Virgule flottante Flair.

Tout nombre a peut s'écrire $0,XXXXX...10^p$; p étant un exposant nanti d'un signe. Pour s'affranchir de ce signe on convient d'ajouter une quantité $P = 50$, et l'on écrit alors (a)_{VFL} = $\left[\overset{\text{caract.}}{50 + p} \right] \overset{\text{mantisse}}{[XXXXXX]}$ ce qui permet de représenter tous les nombres compris entre 10^{-49} et 10^{+49} .

.../...

L'unité de mémoire détermine pour chaque calculateur le nombre de chiffres constitutifs des nombres traités. Dans le cas du 650, la mémoire unité ayant 10 positions d'enregistrement + un signe, il s'en suit que la mantisse aura au maximum huit chiffres significatifs.

Exemple : $A = 494,65 \rightarrow 0,49465 \times 10^3$
 Mantisse : 49465000
 Caractéristique : $50 + 3 = 53$

D'où la traduction de A en VFL 53.49465000.

Quelques définitions.

L'ordinateur travaille en simple précision lorsque les nombres traités ont la dimension de l'unité de mémoire, c'est-à-dire 10 chiffres.

Il est dit travailler en double ou triple précision lorsque les nombres occupent respectivement deux ou trois unités de mémoires.

On est conduit à travailler en double précision lorsque la précision obtenue par simple précision est insuffisante : Résultats d'une série d'opérations arithmétiques sans commune mesure avec les opérandes (ce qui se produit par exemple dans le calcul de séries alternées, et surtout de calcul matriciel).

La triple précision, d'une portée plus limitée, pourra par exemple servir :

- à vérifier la double précision
- à calculer avec précision des coefficients intervenant dans des calculs en double précision.
- à établir des tables numériques $(n! , C_n^p ;)$.

II - LES OPERATIONS ARITHMETIQUES EN VIRGULE FLOTTANTE FLAIR.

TRIPLE PRECISION.

Généralités.

Afin de donner à ces sous-programmes une généralité aussi grande que possible, ils ont été conçus pour exploiter des nombres dont la caractéristique peut avoir de 2 à 4 chiffres, 1 pouvant s'écrire :

.../...

51. 10..... 0	Virgule flottante type 51
27 zéros	
501. 10..... 0	" " type 501
26 zéros	
5001. 10..... 0	" " type 5001
25 zéros	

De ce fait, chaque sous-programme aura trois entrées, la caractéristique utilisée imposant l'entrée dans ce sous-programme.

Les 4 opérations :

- Notation :

Soient A et B les opérandes sur lesquels portent l'opération arithmétique étudiée.

L'écriture de A sera symbolisée par $\alpha a_1 a_2 a_3$

- α - caractéristique de A
- a_1 - 1ère partie de la mantisse
- a_2 - 2ème " "
- a_3 - 3ème " "

$\alpha a_1, a_2, a_3$ étant contenus respectivement dans une mémoire et ces 3 mémoires étant en séquence.

De même B s'écrit $\beta b_1 b_2 b_3$; $\beta b_1, b_2, b_3$ étant rangés dans trois mémoires en séquence. Plus généralement nous symboliserons la mantisse du nombre N par (n_i) . (N) symbolisera la ou les adresses en séquence qui repèrent la ou les mémoires contenant N ou ses composantes.

- Entrée dans les sous-programmes,

Elle se fait de la façon habituelle pour ce genre de sous-programmes.

- en 8003, il y aura zéro
- en 8002, il y aura 00 (A) (B)
- en 8001, il y aura 00 (C) (N).

.../...

(A) et (B) indiquant les premières adresses des mémoires où sont rangées A et B, opérandes sur lesquels portera l'opération (C) indiquant la première des adresses où sera transféré le résultat de l'opération.
(N) indiquant l'adresse "instruction suivante", une fois le sous-programme utilisé.

A - L'Addition en V. FL. - triple précision - triple entrée.

Le programme consiste :

- 1°) à séparer caractéristique et mantisse de A et B.
- 2°) à positionner correctement d'après la valeur $|\alpha - \beta|$ de la différence en valeur absolue des caractéristiques, les mantisses de A et B.
- 3°) à effectuer l'addition en fixe des mantisses cadrées.
- 4°) à choisir la plus grande des caractéristiques α et β qui deviendra alors la caractéristique du résultat.

Exemple schématique.

A = 60 12345678 9012345678 9012345678

B = 45 12345 -idem-

- Différence : $|\alpha - \beta| = 15$, ce qui implique qu'il faut décaler B de 15 positions par rapport à A.

- Positionnement de B par rapport à A

Mantisse de A 12345678 9012345678 9012345678

Mantisse de B12345678 90123
correctement cadrée
par rapport à A

- Addition A + B 12345678 9012345678 0235801

- Résultat (A + B) 6012 801

.../...

B - La Soustraction

La seule différence avec l'Addition porte sur le remplacement de l'addition en fixe des mantisses correctement cadrées par la soustraction de celles-ci. C'est la seule différence, aussi ces deux opérations sont-elles exécutées par le même sous-programme. L'entrée dans le sous-programme, précisant le genre d'opération que l'on veut exécuter, provoque alors la mise en place des ordres d'Addition ou de Soustraction en fixe.

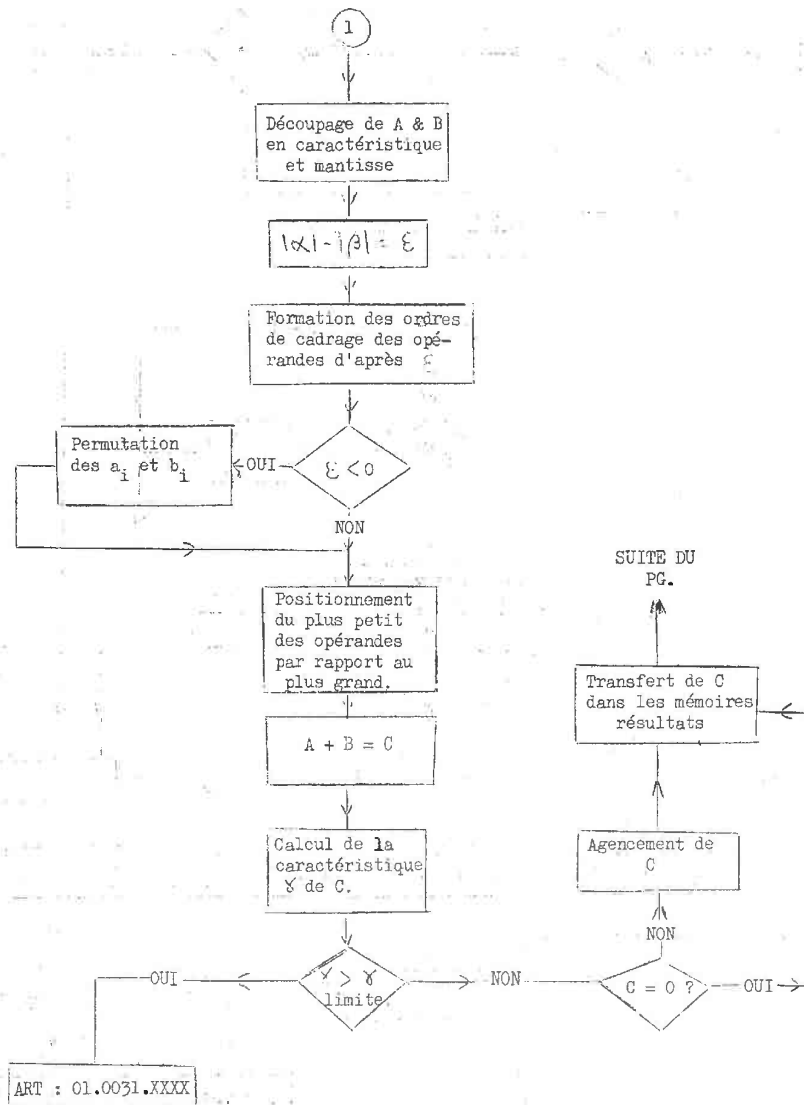
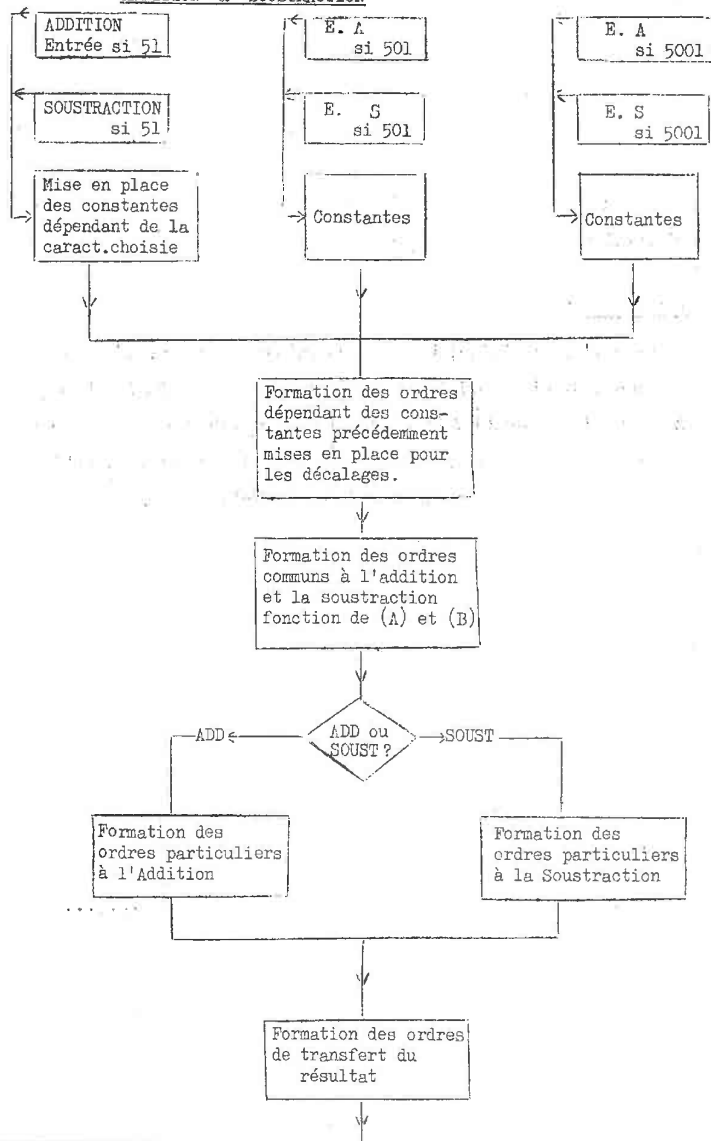
Remarque :

- 1) Lors d'une addition, il peut apparaître un report. L'exposant est alors augmenté d'une unité et la mantisse résultat décalée d'une position à droite.
- 2) Lors d'une soustraction, la mantisse résultat peut commencer par une suite q de zéros. La mantisse résultat sera alors décalée de q positions vers la gauche et la caractéristique diminuée de q.

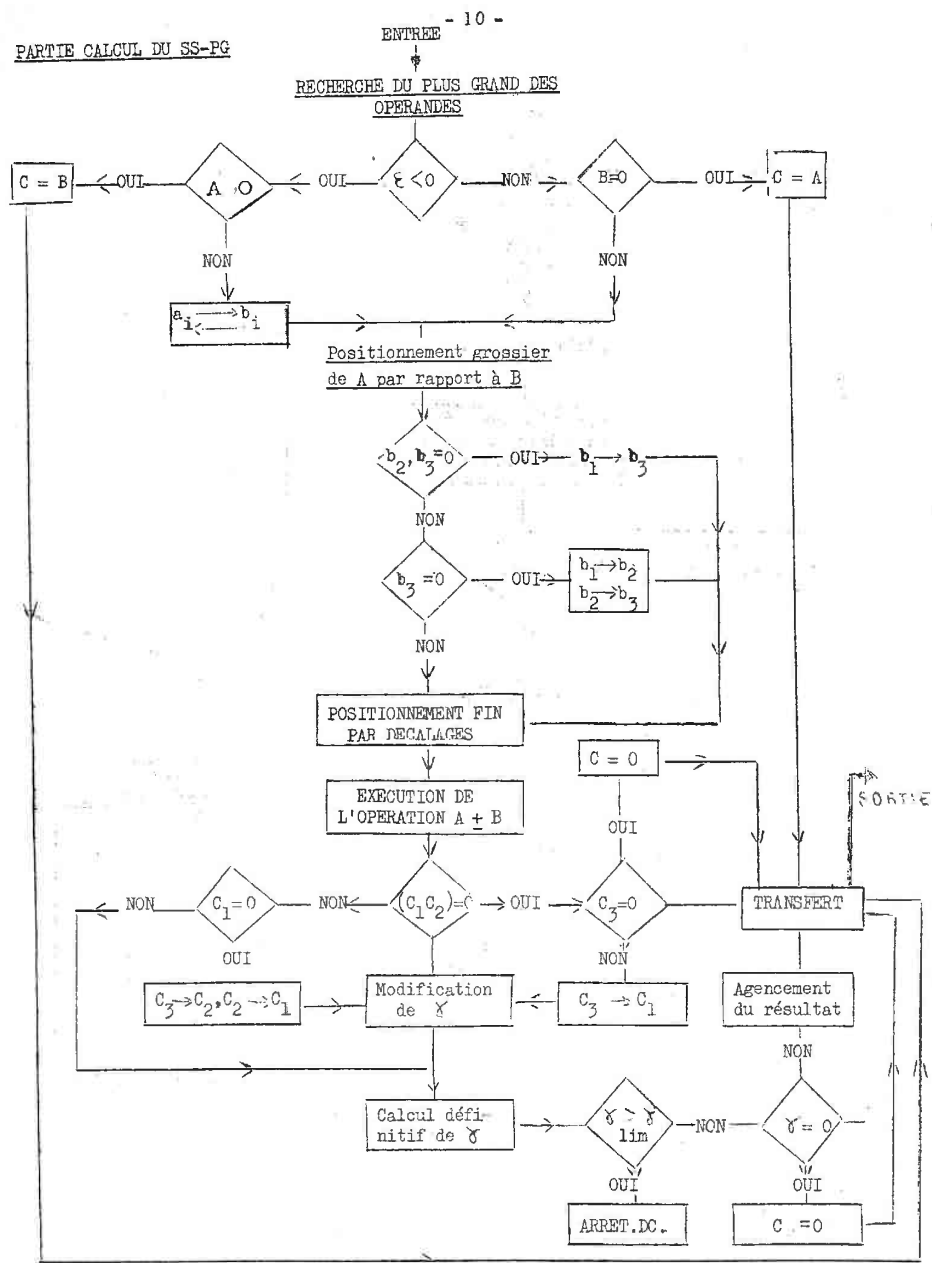
.../...

ORGANIGRAMME

ADDITION & SOUSTRACTION



PARTIE CALCUL DU SS-PG



- 11 -

SOUS-PROGRAMME D'ADDITION et de SOUSTRACTION (P.A.S.O.)

FRA	0312	1999	
PEN	25001	0000	
PEN	25005	0001	
PEN	25011	0002	
PEN	25015	0003	
PEN	25111	0004	
PEN	25115	0005	
Caractéristique type 51			
25001	TDI	25BA1	25LA1
25005	TDI	25BA1	
RSD	8002	25LA1	
25LA1	TRD	25LE1	
EDI	66010		
TDI	25021		
EDI	66011		
TDI	25031		
EDI	66012		
TDI	25041		
EDI	66013		
TDI	25051		
EDI	66014		
TDI	25061		
EDI	66015		
TDI	25071		
RAD	66001	25LC1	
Caractéristique type 501			
25011	TDI	25BA1	25LD1
25015	TDI	25BA1	

.../...

25LD1	RSD	8002	25LD1	
	TRD	25LB1		
	EDI	66020		Mise en place des constantes pour ce type de caractéristique.
	TDI	25021		
	EDI	66021		
	TDI	25034		
	EDI	66022		
	TDI	25041		
	EDI	66023		
	TDI	25051		
	EDI	66024		
	TDI	25061		
	EDI	66025		
	TDI	25071		
	RAD	66002	25LC1	
<u>Caractéristique type 5001</u>				
25111	TDI	25BA1	25LE1	Entrée en Addition
25115	TDI	25BA1		Entrée en Soustraction
	RSD	8002	25LE1	
25LE1	TRD	25LB1		
	EDI	66030		Mise en place des constantes pour ce type de caractéristique.
	TDI	25021		
	EDI	66031		
	TDI	25031		
	EDI	66032		
	TDI	25041		
	EDI	66033		
	TDI	25051		
	EDI	66034		
	TDI	25061		
	EDI	66035		
	TDI	25071		
	RAD	66003	25LC1	

.../...

25LC1	EDI	25MA1		Formation, en fonction du type de caractéristique choisi, des ordres de décalage servant
	SBF	25MA1		1°) au découpage des opérandes en caractéristique et mantisse.
	EDI	25MA2		2°) à l'agencement du résultat de l'opération.
	SBF	25MA2		
	EDI	25A11		
	SBF	25A11		
	EDI	25MA3		
	SBF	25MA3		
	EDI	25MA4		
	SBF	25MA4		
	EDI	25MA5		
	SBF	25MA5		
	DAG	0004		
	EDI	25FB1		
	SBF	25FB1		
	EDI	25MA6		
	SBF	25MA6		
	EDI	25MA7		
	SBF	25MA7		
	RCD	25LB1	25BC1	
25BC1	EDI	25A01		Formation des ordres dépendant de la mémoire contenant A.
	SBF	25A01		Est-ce une addition ou une soustraction ?
	ANG	25BD1		-- C'est une addition
	AAD	25911		
	EDI	25AB1		
	SBF	25AB1		
	AAD	25911		
	EDI	25AC1		
	SBF	25AC1		
	DAG	0004		
	EDI	25AE1		Formation des ordres dépendant des mémoires contenant B.
	SBF	25AH1		

.../...

25BD1	AAD	25911	-- C'est une soustraction
	EDI	25AK1	
	SBF	25AJ1	
	AAD	25911	
	EDI	25AP1	
	SBF	25AN1	
	SAD	25911	
	EDI	25AB1	
	SBF	25AB1	
	SAD	25911	
	EDI	25AC1	
	SBF	25AC1	
	DAG	0004	
	EDI	25AF1	
	SBF	25AH1	
	SAD	25911	
	EDI	25AL1	
	SBF	25AJ1	
	SAD	25911	
	SBF	25AN1	
25BE1	RAD	25BA1	Formation des ordres de mise en place du résultat dans les mémoires choisies C
	EDI	25ZZ1	
	SBF	25ZZ1	
	SBI	25ZZ1	
	AAD	25911	
	EDI	25YY1	
	SBF	25YY1	
	AAD	25911	
	EDI	25XX1	
	SBF	25XX1	

.../...

25A01	RAD	9999	25MA1
25NA1	DAG	1111	
	SAG	8003	
	TDI	25B01	25MA2
	DAD	1111	
	TRD	25C01	25AB1
25AB1	EDI	9998	
	TDI	25D01	25AC1
25AC1	EDI	9997	
	TDI	25E01	25AH1
25AE1	RAD	9996	25AI1
25AF1	RSD	9996	25AI1
25AI1	DAG	2222	
	SAG	8003	
	TDI	25F01	25MA3
25MA3	DAD	1111	
	TRD	25G01	25AJ1
25AK1	RAD	9995	25AM1
25AL1	RSD	9995	25AM1
25AH1	TRD	25H01	25AN1
25AP1	RAD	9994	25AR1
25AQ1	RSD	9994	25AR1
25AR1	TRD	25I01	
	RAV	25B01	
	SVD	25F01	
	DAG	0004	
	EDI	25CA1	
	SBF	25CA1	
	EDI	25CX1	
	SBF	25CX1	
	ANG	25CB1	
	SAD	25021	
	ANG	25CC1	25CD1

Découpage de A et B

Transfert de la caractéristique de A
en 25B01

Transfert de la 1ère partie de la
mantisse de A (a_1) en 25001
Transfert de a_2 en 25D01

Transfert de a_3 en 25E01
Ordre utilisé en addition
Ordre utilisé en soustraction

Transfert de β en 25F01

Transfert de b_1 en 25G01

Transfert de b_2 en 25H01

Transfert de b_3 en 25I01

$$|A| - |B| = \varepsilon$$

Formation d'ordres de décalages dépendant
de ε pour le positionnement du plus petit
par rapport au plus grand.

$$|A| < |B| \text{ ?}$$

$$|A| > |B|$$

Le programme se poursuit en

25CC1 Si B n'est pas négligeable
devant A

25CD1 Si B est négligeable devant A
($C = A$)

.../...

25CBI	AAD	25021		$ A < B $
	ANG	25CE1	25CF1	A est-il négligeable devant B ?
				Si oui on va en 25CE1 C = B
				Si non on va en 25CF1
25CU1	RAV	8002	25CG1	B n'étant pas négligeable devant A on
25CG1	SAD	25031		cherche alors à le positionner correctement
	ANG		25CI1	par rapport à A.
	RAV	8002		
	SAD	25041		
	ANG		25CH1	
	EDI	25H01		
	TDI	25I01		
	EDI	25G01		
	TDI	25H01		
	TRG	25G01	25CI1	
25CH1	EDI	25G01		
	TDI	25I01		
	TRG	25H01		
	TDI	25G01	25CI1	
25CI1	RAG	25H01		
	AAD	25I01	25CA1	
25CA1	DAD	7777		
	TRD	25I01		
	RAG	25G01		
	AAD	25H01	25CX1	
25CX1	DAD	7777		
	TRG	25G01		
	TRD	25H01		
	RAD	25E01		
	AAD	25I01		
	TRD	25I01		
	RAD	8003		

Calcul de A + B

.../...

	AAD	25D01	
	AAD	25HC1	
	AAG	25G01	
	AAG	25G01	
	ANN		25DC1
	GNN		25DB1
	BDI	25051	
	TDI	25CZ1	
	TRD	25H01	
	TRG	25G01	25EA1
25OC1	RAG	25I01	
	GNN		25XX1
	BDI	25071	
	TDI	25CZ1	
	TRG	25G01	
	TRD	25H01	
	TDI	25I01	25EA1
25DB1	EDI	25061	
	TDI	25CZ1	
	RAG	8002	
	AAD	25I01	
	TRG	25G01	
	TRD	25H01	
	RAG	8003	
	TRD	25I01	25EA1
25EA1	DGC	0000	
	TRG	25G01	
	TRD	25C01	
	DAG	0007	
	RAD	8002	
	DAD	0003	
	EDI	25EB1	
	SBF	25EB1	
	RAG	25E01	
	AAD	25I01	25EB1

Calcul de la caractéristique de C
et positionnement du résultat permettant de
faire disparaître les zéros qui pourraient
se trouver au début du résultat précédemment
obtenu

.../...

25EB1	DAG	9876
	TRG	25H01
	TRD	25I01
	RAG	25G01
	AAD	25C01
	DGC	0000
	SAD	25C01
	ANG	25F01
	AVD	25B01
	AVD	25CZ1 25FB1
25FA1	SVD	25B01
	SAD	25CZ1 25FB1
25FB1	DAG	0008
	SAG	8003
	SD2	25FC1
	SD1	25FD1
	TRD	25B01
	RAG	25H01
	AAD	25I01 25MA4
25MA4	DAD	1111
	TRD	25I01
	RAG	25G01
	AAD	25H01 25MA5
25MA5	DAD	1111
	AAG	25B01
	EDI	25I01 25XX1
25XX1	TDI	5555 25YY1
25YY1	TRD	4444 25ZZ1
25ZZ1	TRG	3333 2222

La caractéristique χ de C est elle plus grande que la caractéristique limite ?
est-elle nulle ?
Elle est comprise entre 0 et χ limite ?

Agencement du résultat et transfert

F I N

.../...

25FC1	01	0031	9999
25FD1	RAG	8003	25XX1
25CF1	EDI	25F01	
	TDI	25B01	
	TRD	25FE1	
	RAG	25C01	
	EDI	25G01	
	TDI	25C01	
	TRG	25G01	
	RAG	25D01	
	EDI	25H01	
	TDI	25D01	
	TRG	25H01	
	RAG	25E01	
	EDI	25I01	
	TDI	25E01	
	TRG	25I01	
	RAV	25FE1	25CG1
25CD1	RAG	25B01	25MA6
25MA6	DAG	2222	
	AAG	25C01	
	AAD	25D01	
	EDI	25E01	25XX1
25CE1	RAG	25F01	25MA7
25MA7	DAG	2222	
	AAG	25G01	
	AAD	25H01	
	EDI	25I01	25XX1

La caractéristique du résultat $> \chi$ lim.
Dépassement de capacité
Le résultat vaut 0.

B est le plus grand mais A n'est pas négligeable. On permute alors les rôles de A et B et on procède alors aux calculs
1°) de A + B
2°) de la caractéristique et à l'agencement du résultat.

B est le plus grand et A est négligeable devant lui C = B

.../...

CONSTANTES

25911	00	0001	0000
66001	00	0002	0008
66002	00	0003	0007
66003	00	0004	0006
66010	00	0008	0000
66011	00	0018	0001
66012	00	0008	0002
66013	00	0000	8902
66014	00	0000	8892
66015	00	0000	8882
66020	00	0027	0000
66021	00	0017	0001
66022	00	0007	0002
66023	00	0008	0003
66024	00	0008	8993
66025	00	0008	8983
66030	00	0026	0000
66031	00	0016	0001
66032	00	0006	0002
66033	00	0089	0004
66034	00	0088	9994
66035	00	0088	9984

.../...

C - La Multiplication

Le sous-programme consiste

- 1°) à séparer mantisses et caractéristiques des opérandes
- 2°) à multiplier les composantes de la mantisse de l'un des opérandes par les composantes de la mantisse de l'autre, puis à procéder à l'addition des résultats partiels obtenus pour ne conserver que les trois parties intéressantes, parties les plus à gauche du résultat.
- 3°) à calculer la caractéristique du résultat.

Détail sur la partie 2.

Soit a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 les parties constitutives des mantisses de A et B. Le calcul de la mantisse du produit se fera de la façon suivante :

On effectue une 1ère série de multiplications

$$\begin{cases} - b_3 \times a_3 = [R(a_3 b_3), R'(a_3 b_3)] \\ - b_3 \times a_2 = [R(a_2 b_3), R'(a_2 b_3)] \\ - b_2 \times a_3 = [R(a_3 b_2), R'(a_3 b_2)] \end{cases}$$

Une 1ère série d'additions

$$R_1 R'_1 = R(a_3 b_3) + R'(a_2 b_3) + R'(a_3 b_2)$$

$$R_2 R'_2 = R_1 + R(b_3 a_2) + R(a_3 b_2)$$

On ne conserve alors que la partie principale de ce dernier résultat c'est-à-dire R_2 .

On effectue une deuxième suite de multiplications.

$$\begin{aligned} b_3 \times a_1 &= [R(b_1 a_1), R'(b_3 a_1)] \\ b_1 \times a_3 &= [R(b_1 a_3), R'(b_1 a_3)] \\ b_2 \times a_2 &= [R(b_2 a_2), R'(b_2 a_2)] \end{aligned}$$

suivie d'une addition

$$R_3 R'_3 = R_2 + R'(b_3 a_1) + R'(a_2 b_1) + R'(b_2 a_2)$$

.../....

dont on ne conserve que la partie principale R_3

On effectue une troisième série de multiplications

$$b_2 \times a_1 = [R(b_2 a_1), R'(b_2 a_1)]$$

$$b_1 \times a_2 = [R(b_1 a_2), R'(b_1 a_2)]$$

suivie d'une addition qui donne la partie C_3 du résultat

$$R_4 R'_4 = R_3 + R'(b_1 a_2) + R'(b_2 a_1) + R(b_3 a_1) + R(b_1 a_3) + R(b_2 a_2)$$

$$R'_4 = C_3$$

On effectue alors les dernières opérations qui donnent C_1 et C_2

$$(b_1 \times a_1) = [R(b_1 a_1), R'(b_1 a_1)]$$

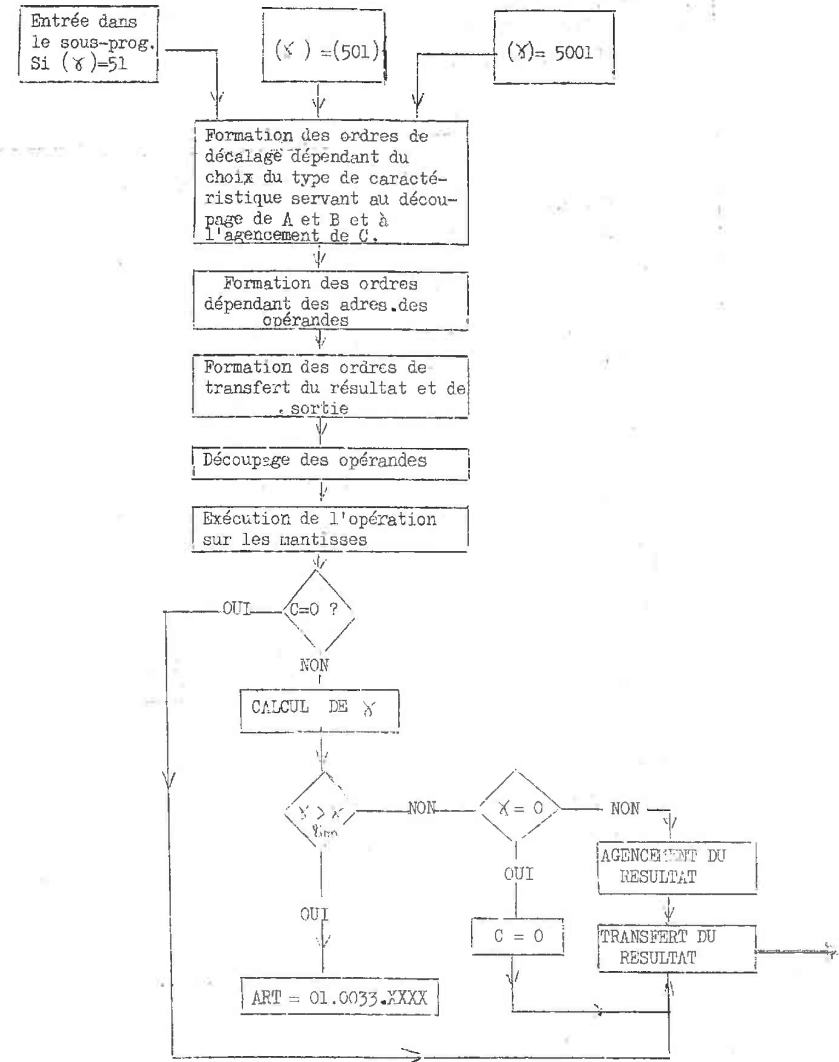
$$R_5 R'_5 = R'(b_1 a_1) + R(b_1 a_2) + R(b_2 a_1) + R_4 + R(b_1 a_1) = (C_1 C_2)$$

$$(C_1 C_2 C_3) = (R_5 R'_5 R'_4)$$

.../...

ORGANIGRAMME

MULTIPLICATION



PROGRAMME PASO MULTIPLICATION

	PRA	0229	1999	
	PEN	25003	0000	
	PEN	25033	0001	
	PEN	25333	0002	
				<u>Entrée en Multiplication</u>
25003	TDI	25AA3		- Si la caractéristique est du type 51
	TRD	25LA3		
	EDI	66040		
	TDI	25023		
	RAD	66001	25LB3	
25033	TDI	25AA3		- Si la caractéristique est du type 501
	TRD	25LA3		
	EDI	66041		
	TDI	25023		
	RAD	66002	25LB3	
25333	TDI	25AA3		- Si la caractéristique est du type 5001
	TRD	25LA3		
	EDI	66042		
	TDI	25023		
	RAD	66003	25LB3	
				<u>Formation des ordres dépendant</u>
				<u>du choix du type de caractéristique</u>
25LB3	EDI	25MA1		
	SBF	25MA1		
	EDI	25MA2		
	SBF	25MA2		
	EDI	25MA3		
	SBF	25MA3		
	EDI	25MA4		

.../...

SBF 25MA4
 EDI 25MA5
 SBF 25MA5
 EDI 25MA6
 SBF 25MA6
 EDI 25MA7
 SBF 25MA7
 EDI 25MA8
 SBF 25MA8
 EDI 25MA9
 SBF 25MA9
 EDI 25MB1
 SBF 25MB1
 EDI 25MB3
 SBF 25MB3
 EDI 25MB4
 SBF 25MB4
 SAD 25013
 EDI 25MB5
 SBF 25MB5
 EDI 25MB6
 SBF 25MB6
 DAG 0004
 EDI 25AC3
 SBF 25AC3
 RAD 25LA3 25LC3
 25LC3 EDI 25Q03
 SBF 25Q03
 AAD 25Q13

Ces ordres de décalage permettront dans la suite du programme

- de découper les opérandes en leurs parties constitutives
- d'agencer le résultat de l'opération.

Formation des ordres dépendant des adresses de A et B

.../...

EDI	25R03	
SBF	25R03	
AAD	25013	
EDI	25503	
SBF	25503	
DAG	0004	
EDI	25T03	
SBF	25T03	
AAD	25013	
EDI	25U03	
SBF	25U03	
AAD	25013	
EDI	25V03	
SBF	25V03	
RAD	25AA3	
EDI	25Y03	
SBF	25Y03	
SBI	25Y03	
AAD	25013	
EDI	25X03	
SBF	25X03	
AAD	25013	
EDI	25W03	
SBF	25W03	25Q03
25Q03	RAD	9999 25MA1
25MA1	DAG	1111
	TRG	25A03
	RAG	8002 25MA2

Formation des ordres de sortie

Découpage des opérandes

Dans cette partie du programme les opérandes sont découpés en caractéristiques et mantisses (3 parties)

.../...

25MA2	DAD	1111	25R03
25R03	AAD	9999	25MA3
25MA3	DAG	1111	
	TRG	25B03	
	RAG	8002	25MA4
25MA4	DAD	1111	25503
25S03	AAD	9999	25MA5
25MA5	DAG	1111	
	TRG	25C03	
	TRD	25D03	25T03
25T03	RAD	9999	25MA6
25MA6	DAG	1111	
	TRG	25E03	
	RAG	8002	25MA7
25MA7	DAD	1111	25U03
25U03	AAD	9999	25MA8
25MA8	DAG	1111	
	TRG	25F03	
	RAG	8002	25MA9
25MA9	DAD	1111	25V03
25V03	AAD	9999	25MB1
25MB1	DAG	1111	
	TRG	25G03	
	TRD	25H03	
	RAG	8002	
	MUL	25D03	
	TRG	25I03	
	RAG	25H03	

$a_1 \rightarrow$ en 25A03

$a_1 \rightarrow$ en 25B03

$a_2 \rightarrow$ en 25C03

$a_3 \rightarrow$ en 25D03

$a_3 \rightarrow$ en 25E03

$b_1 \rightarrow$ en 25F03

$b_2 \rightarrow$ en 25G03

$b_3 \rightarrow$ en 25H03

Exécution de l'opération

$b_3 \times a_3$
R ($b_3 \times a_3$) en 25I03

.../...

MUL 25C03	$b_3 \times a_2$
TRD 25J03	Transfert de R' ($b_3 \times a_2$)
TRG 25K03	Transfert de R ($b_3 \times a_2$)
RAG 25G03	
MUL 25D05	$b_2 \times a_3$
TRG 25L03	Transfert de R ($a_3 \times b_2$)
RAD 8002	1ère sommation des résultats obtenus ci-dessus
AAD 25J02	$- R' (a_3 \times b_2) + R' (b_3 \times a_2) + R (b_3 \times a_3)$ $= R_1 R_1'$
AAD 25I03	
RAD 8003	$- R_1 + R (b_3 \times a_2) + R (a_3 \times b_2) = R_2 R_2'$
AAD 25K03	
AAD 25L03	
TRG 25I03	Transfert de R_2 en 25I03
RAG 25H03	
MUL 25B03	$b_3 \times a_1$
TRD 25J03	Transfert de R' ($b_3 \times a_1$)
TRG 25K03	Transfert de R ($b_3 \times a_1$)
RAG 25G03	
MUL 25C03	$b_2 \times a_2$
TRD 25L03	Transfert de R' ($b_2 \times a_2$)
TRG 25M03	Transfert de R ($b_2 \times a_2$)
RAG 25F03	
MUL 25D03	$b_1 \times a_3$
TRG 25K03	Transfert de R ($b_1 \times a_3$)
RAD 8002	2ème sommation des résultats partiels
AAD 25I03	$- R' (b_1 \times a_3) + R_2 + R' (b_3 \times a_1) + R' (b_2 \times a_2)$ $= R_3 R_3'$
AAD 25J03	
AAD 25L03	
TRG 25I03	Transfert de R_3

.../...

RAG 25G03	
MUL 25B03	$b_2 \times a_1$
TRD 25J03	Transfert de R' ($b_2 \times a_1$)
TRG 25L03	Transfert de R ($b_2 \times a_1$)
RAG 25F03	
MUL 25C03	$b_1 \times a_2$
TRG 25P03	Transfert de R ($b_1 \times a_2$)
RAD 8002	3ème sommation des résultats partiels
AAD 25J03	$R' (b_1 \times a_2) + R' (b_2 \times a_1) + R (b_3 \times a_1) + R (b_2 \times a_2)$ $+ R (b_1 \times a_3) + R_3 = R_4 R_4'$
AAD 25K03	
AAD 25N03	
AAD 25O03	
AAD 25I03	
TRD 25I03	Transfert de R_4
TRG 25J03	Transfert de R_4
RAG 25F03	
MUL 25B03	$b_1 \times a_1$
TRG 25K03	Transfert de R ($b_1 \times a_1$)
RAD 8002	4ème sommation des résultats partiels
AAD 25P03	$R' (b_1 \times a_1) + R (b_1 \times a_2) + R (b_2 \times a_1) + R_4$ $+ R (b_1 \times a_3) = R_5 R_5'$
AAD 25J03	
AAG 25K03	
TRG 25H03	Transfert de R_5
TRD 25J03	Transfert de R_5
ANN 25W03	Le résultat vaut-il zéro ?
DGC 0000	NON
TRD 25L03	
DGC 0000	

.../...

	SAD	8001	
	ANG	25AB3	
	AVD	25AD3	
	AVD	25B03	
	AVD	25023	25AC3
25AB3	SVD	25A03	
	SVD	25B03	
	SVD	25023	25AC3
25AC3	DAG	2222	
	SAG	8003	
	SD2		25AD3
	SDL	25AE3	
	TRD	25N03	
	RAG	25L03	25MB2
25MB2	DAG	C008	
	GNN	25AF3	
	RAL	25IC3	
	AAG	25J03	25MB3
25MB3	DAD	1111	
	TRD	25I03	
	RAD	25J03	
	AAG	25I03	25MB4
25MB4	DAD	1111	
	AAG	25H03	
	EDI	25I03	25W03
25AF3	RAD	25I03	
	AAG	25J03	25MB5
25MB5	DAD	3333	
	TRD	25I03	

Le résultat a-t-il un signe négatif ?

NON - on calcule la caractéristique χ du résultat.

OUI - on calcule χ

Test sur la caractéristique χ

$\chi \geq \chi_{lim} ?$

$\chi = 0 ?$

χ est compris entre 0 et χ_{limite} .

Agencement du résultat.

.../...

	RAD	25J03	
	AAG	25X03	25MB6
25MB6	DAD	3333	
	AAG	25H03	
	EDI	25I03	25W03
25W03	TDI	8888	25X03
25X03	TRD	8888	25Y03
25Y03	TRG	8888	9999
25AD3	ART	0033	9999
25AE3	RAG	8003	25W03
25013	00	0001	0000
66001	00	0002	0008
66002	00	0003	0007
66003	00	0004	0006
66040	00	0000	8850
66041	00	0088	3500
66042	00	0088	6000

La caractéristique est plus grande que χ_{limite}
La caractéristique est égale à zéro.

Constantes

.../...

D - La division.

Ce sous-programme consiste

- 1°) à séparer caractéristique et mantisse de chaque opérande
- 2°) à effectuer la division en fixe des mantisses
- 3°) à calculer la caractéristique du résultat.

Explication sur le processus de la division en fixe : obtention de la mantisse du résultat.

L'ordinateur 650 I. B. M. permettant de diviser au mieux un nombre de 20 chiffres par un nombre de 10 chiffres, nous sommes conduits dans notre cas à utiliser le procédé suivant, qui consiste à faire un développement limité du dénominateur.

$$(C_1 C_2 C_3) = \frac{(a_1 a_2 a_3)}{(b_1 b_2 b_3)} = \frac{(a_1 a_2 a_3)}{b_1 (1 + \theta)} = \frac{(a_1 a_2 a_3)}{b_1} (1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + 2\theta^4).$$

Avec $\theta = \frac{b_2 b_3}{b_1}$ à une puissance de 10 $\dots$. Cette puissance de 10

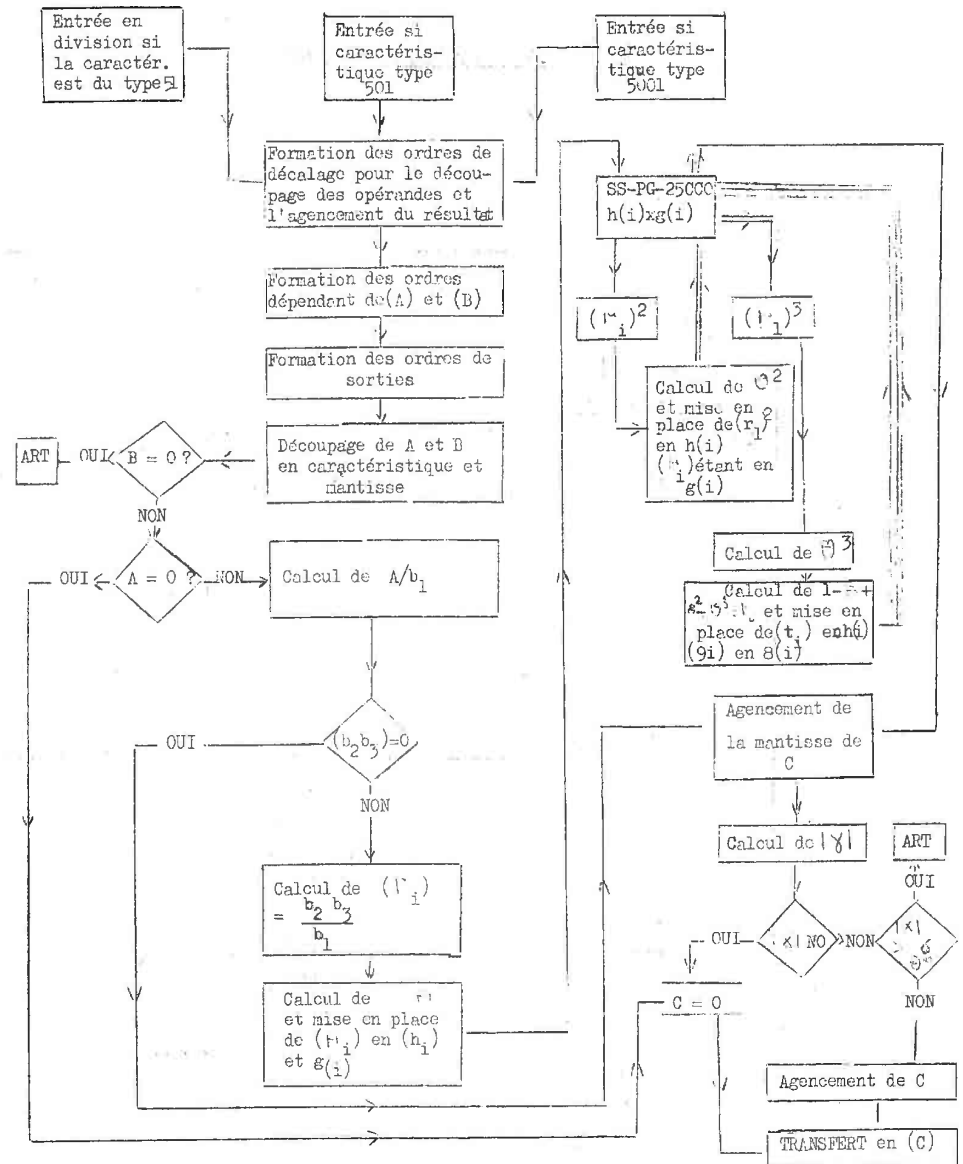
se traduisant par un positionnement convenable dans le calcul de θ .

Nous effectuerons donc la suite d'opérations ci-dessous :

- 1°) calcul de $(q_1 q_2 q_3) = \frac{(a_1 a_2 a_3)}{b_1}$
- 2°) calcul de $(r_1 r_2 r_3) = \frac{(b_2 b_3)}{b_1}$, qui convenablement positionné par rapport à 1 donnera θ .
- 3°) calcul de $(\theta_1)^2$ et $(\theta_1)^3$, qui après cadrage donnera θ^2 et θ^3 .
- 4°) somme $1 - \theta + \theta^2 - \theta^3$, les termes d'ordres supérieurs n'altérant pas le résultat.
- 5°) produit $(q_1) (1 - \theta + \theta^2 - \theta^3) = (Q_1) = (C_1)$, qui sera alors la mantisse du quotient cherché.

.../...

ORGANIGRAMME DU SS-PG DE DIVISION



SOUS-PROGRAMME DE DIVISION (P/S%)

	PRA	0340	1999	
	PEN	25004	0000	
	PEN	25044	0001	
	PEN	25444	0002	
Entrée dans le sous-programme				
25004	TDI	25A04		Si la caractéristique choisie est du type 51
	TRD	25LA1		
	EDI	66050		
	TDI	25051		
	RAD	66001	25LB1	
25044	TDI	25A04		Si la caractéristique choisie est du type 501
	TRD	25LA1		
	EDI	66051		
	TDI	25051		
	RAD	66002	25LB1	
25444	TDI	25A04		Si la caractéristique choisie est du type 5001
	TRD	25LA1		
	EDI	66052		
	TDI	25051		
	RAD	66003	25LB1	
Formation des ordres de décalage				
25LB1	EDI	25MA1		Ces ordres de décalage sont fonctions du
	SBF	25MA1		choix du type de caractéristique ; ils servent
	EDI	25MA2		- d'une part, lors du découpage des opérandes
	SBF	25MA2		en caractéristique et mantisse
	EDI	25MA3		- d'autre part, lors de la mise en forme du
	SBF	25MA3		résultat de l'opération, mise en forme
	EDI	25MA4		précédant le transfert de celui-ci.

.../...

	SBF	25MA4	
	EDI	25MA5	
	SBF	25MA5	
	EDI	25MA6	
	SBF	25MA6	
	EDI	25MB3	
	SBF	25MB3	
	EDI	25MB4	
	SBF	25MB4	
	EDI	25MA7	
	SBF	25MA7	
	SAD	25001	
	EDI	25MA8	
	SBF	25MA8	
	EDI	25MA9	
	SBF	25MA9	
	EDI	25MB1	
	SBF	25MB1	
	DAG	0004	
	EDI	25MB2	
	SBF	25MB2	
	RAD	25LA1	25LC1
25LC1	EDI	25B04	
	SBF	25B04	
	AAD	25001	
	EDI	25C04	
	SBF	25C04	
	ALD	25001	

Formation des ordres dépendant des
adresses des nombres traités

.../...

EDI	25D04	
SBF	25D04	
DAG	0004	
EDI	25E04	
SBF	25E04	
AAD	25001	
EDI	25F04	
SBF	25F04	
AAD	25001	
EDI	25G04	
SBF	25G04	
RAD	25A04	
EDI	25J04	
SBF	25J04	
SBI	25J04	
AAD	25001	
EDI	25I04	
SBF	25I04	
AAD	25001	
EDI	25H04	
SBF	25H04	25E04
25E04	RAD	8888 25A1
25MA1	DAG	1111
	TRG	25TA1
	RAG	8002
	GNN	25MA2 OART1
25MA2	DAD	1111 25F04

Formation des ordres de
transfert du résultat

Découpage des opérandes

$\beta \rightarrow$ en 25TA1

Test : le diviseur est-il nul?
Si oui on va à OART1, ordre d'arrêt.
Si non on va en séquence.

.../...

25F04	AAD	9999	25MA3
25MA3	DAG	1111	
	TRG	25TA2	
	RAG	8002	25MA4
25MA4	DAD	1111	25G04
25G04	AAD	9999	25MA5
25MA5	DAG	1111	
	TRG	25TA3	
	TRD	25TA4	25B04
25B04	RAD	9999	25MA6
25MA6	DAG	1111	
	TRG	25TA5	
	RAG	8002	
	GNN	25MA7	OART2
25MA7	DAD	1111	25C04
25C04	AAD	9999	25MA8
25MA8	DAG	2222	
	TRG	25TA6	
	RAG	8002	25MA9
25MA9	DAD	2222	25D04
25D04	AAD	9999	25MB1
25MB1	DAG	2222	
	TRD	25TA7	
	RAD	8003	
	AAG	25TA6	
	DIV	25TA2	
	TRD	25TB1	
	RAG	8003	

$b_1 \rightarrow$ 25TA2

$b_2 \rightarrow$ 25TA3

$b_3 \rightarrow$ 25TA4

$\alpha \rightarrow$ 25TA5

Test : le dividende est-il nul ? Si non
on va en séquence. Si oui le résultat est
zéro et le programme continue en OART2.

$a_1 \rightarrow$ 25TA6

$a_3 \rightarrow$ 25TA7 (a_2 conservé en 8002)

Exécution de la première partie
de l'opération $(a_1 a_2 a_3)/b_1 = (q_1, q_2, q_3)$

$q_1 \rightarrow$ 25TB1

.../...

AAD	25TA7
DIV	25TA2
TRD	25TB2
RAG	8003
DIV	25TA2
TRA	25TB3
RAG	25TA3
AAD	25TA4
ANN	25FA5
DAD	0001
DIV	25TA2
TRD	25TC1
TDI	25TD1
RAG	8003
DIV	25TA2
TRD	25TC2
TDI	25TD2
RAG	8003
DIV	25TA2
TRD	25TC3
TDI	25TD3
RAD	25TC1
DAG	0001
TRG	1RES1
RAG	25TC1
AAD	25TC2
DAG	0001

$q_2 \rightarrow$ en 25TB2

$q_3 \rightarrow$ en 25TB3

Test sur $(b_2 \ b_3) : (b_2 \ b_3) = 0$
Si oui la mantisse du résultat est $(q_1 \ q_2 \ q_3)$,
on continue alors en 25FA5.

Si non on continue en séquence, on procède
alors au calcul de $\frac{(b_2 \ b_3)}{b_1} = (r_1 \ r_2 \ r_3)$

et au transfert de r_1, r_2, r_3 pour le calcul
de $(r_1 \ r_2 \ r_3)^2$

$r_1 \rightarrow$ en 25TC1 et 25TD1

$r_2 \rightarrow$ en 25TC2 et 25TD2

$r_3 \rightarrow$ en 25TC3 et 25TD3

Cadrage et mise en place de ψ

.../...

TRG	1RES2
RAG	25TC2
AAD	25TC3
DAG	0001
TRG	1RES3 SUIT1
SUIT1	EDI SORT1
TDI	00M00 25CC0
SORT1	00 0000 CALF2
CALF2	RAG 1RMA3
AAD	1RMA2
DDA	0008
TRG	2RES1
TRD	2RES2
EDI	1RMA1
TDI	25TD3
EDI	1RMA2
TDI	25TD2
EDI	1RMA3
TDI	25TD1
EDI	SORT2
TDI	00M00 25CC0
SORT2	00 0000 CALF3
CALF3	RAG 1RMA3
DDA	0007
TRD	3RES1 SUIT2

Calcul de $(r_1 \ r_2 \ r_3)^2$

Ce calcul se fait par l'intermédiaire du sous-
programme 25CC0.

Calcul de ψ^2
 ψ^2 s'obtient par un cadrage convenable de
 $(r_1 \ r_2 \ r_3)^2$ c'est ce que l'on fait dans cette
partie du programme ; après quoi on met en
place $(r_1 \ r_2 \ r_3)^2$ pour calculer ensuite
 $(r_1 \ r_2 \ r_3)^3$.

Calcul de $(r_1 \ r_2 \ r_3)^3$

Calcul de ψ^3

.../...

SUIT2	RSG	1RES1	
	SAD	1RES2	
	ANN	OUIII	NONNN
OUIII	AAG	CTE55	
	AAG	8701	
	AAD	2RES1	
	TRG	25CT1	
	RAG	8002	
	AAD	2RES2	
	SAD	1RES3	
	SAD	3RES1	
	TRG	25TC2	
	TRD	25TC3	CDOA1
NONNN	RAG	CTE55	
	SAD	1RES3	
	TRD	25TC3	
	RAD	8003	
	AAG	CTE55	
	SAD	C8001	
	AAG	8001	
	TRD	25TC2	
	TRG	25TC1	CDOA1
CDOA1	EDI	25TB1	
	TDI	25TD1	
	EDI	25TB2	
	TDI	25TD2	
	EDI	25TB3	
	TDI	25TD3	
	EDI	SORT3	
	TDI	O0M00	25CCO
SORT3	00	O000	CALQT
25FA5	EDI	25TB1	
	TDI	1RMA3	
	EDI	25TB2	
	TDI	1RMA2	
	EDI	25TB3	
	TDI	1RMA1	CALQT

Calcul de $1 - \theta + \theta^2 - \theta^3$ et
mise en place pour le calcul de Q

Mise en place de $(q_1 q_2 q_3)$ pour le calcul
de $Q = (q_1 q_2 q_3)$

$b_2 b_3 = 0$
Seule la partie b_1 de la mantisse du diviseur
étant significative $\theta = \theta^2 = \theta^3 = 0$.
On procède alors au calcul de la caractéristique
du résultat et à l'agencement de celui-ci.

.../...

Sous-Programme 25CCO

Ce sous-programme 25CCO permet le calcul de
 θ^2, θ^3, q .

Ce sous-programme calcule en virgule fixe
le produit de 2 nombres contenus dans 3
mémoires chacun.

- 1ère opération = calcul des produits partiels

25CCO	RAG	25TD3
	MUL	25TC3
	TRG	25M01
	RAG	25TD3
	MUL	25TC2
	TRG	25M03
	TRD	25M02
	RAG	25TD3
	MUL	25TC1
	TRG	25M05
	TRD	25M04
	RAG	25TD2
	MUL	25TC3
	TRG	25M07
	TRD	25M06
	RAG	25TD2
	MUL	25TC2
	TRG	25M09
	TRD	25M08
	RAG	25TD2
	MUL	25TC1
	TRG	25M11
	TRD	25M10
	RAG	25TD1
	MUL	25TC3
	TRG	25M13
	TRD	25M12
	RAG	25TD1
	MUL	25TC2

.../...

TRG 25M15
TRD 25M14
RAG 25TD1
MUL 25TC1
TRG 25M17
TRD 25M16
RAD 25M01
AAD 25M02
AAD 25M06
RAD 8003
AAD 25M03
AAD 25M04
AAD 25M07
AAD 25M08
AAD 25M12
RAD 8003
AAD 25M05
AAD 25M09
AAD 25M10
AAD 25M13
AAD 25M14
TRD 1RMA1
RAD 8003
AAD 25M11
AAD 25M15
AAD 25M16
AAG 25M17
TRD 1RMA2
TRG 1RMA3 00M00

- 2ème opération : calcul des sommes partielles
permettant d'avoir :

- 1°) les reports dus aux produits
partiels d'ordre inférieur.
- 2°) le produit cherché, dont la
longueur est de 3 mots.

FIN de 25CC0

.../...

CALQT RAG 1RMA3
AAD 1RMA2
DGC 0000
TRG 1RMA3
DAG 0008
RSV 8002
DAD 0008
TRD 25FA1
DAG 0004
EDI 25FA2
SBF 25FA2
RAG 1RMA2
AAD 1RMA1 25FA2
25FA2 DAG 6666
TRG 1RMA2
TRD 1RMA1
RAV 25TA5
AVD 25O51
SVD 25TA1
AAD 25FA1
ANG 25FA3 25MB2
25MB2 DAG 3333
GNW 25FA4
TRD 25FA1
RAG 1RMA2
AAD 1RMA1 25MB3
25MB3 DAD 1111
TRD 1RMA1
RAG 1RMA3

Agencement de la mantisse de C, afin de tenir
compte des reports essentiels.

Calcul de 181

Si l'accumulateur est négatif $C \bar{\wedge} 0$.

Si $\gamma > \times$ limite on va en 25FA4, Dépas-
sement de Capacité

.../...

	AAD	1RMA2	25MB4
25MB4	DAD	1111	
	ANG	25XX1	
	AAG	25FA1	25YY1
25YY1	EDI	1RMA1	25H04
25FA4	ART	0444	9999
25FA3	SAD	8002	
	EDI	8002	25404
25H04	TDI	9999	25I04
25I04	TRD	9999	25J04
25J04	TRG	9999	9999
25XX1	SAG	25FA1	25YY1
0ART1	ART	0443	9999
CTE55	50	0000	0000
25001	00	0001	0000
66050	00	0000	0051
66051	00	0000	0501
66052	00	0000	5001
66001	00	0002	0008
66002	00	0003	0007
66003	00	0004	0006

$C < 0$? Si non on va en séquence et
 $X = |Y|$ Si oui on va en 25XX1

Il y a dépassement de capacité : Y est trop grand.
 Le résultat est équivalent à zéro.

Transfert en (C) du résultat A/B

C étant < 0 $Y = -|Y|$
 Arrêt, le diviseur étant nul, $C \equiv 0$.

CONSTANTES

.../...

2ème PARTIE

ENSEMBLE de SOUS-PROGRAMMES MATRICIELS
 ADAPTES au CODE de PROGRAMMATION de

Mme Marion CREHANGE

ENSEMBLE DE SOUS-PROGRAMMES MATRICIELS ADAPTES AU

CODE DE PROGRAMMATION

Introduction

Afin de permettre une utilisation aussi large que possible du C.D.P., et profiter pleinement de ses facilités de programmation, il est apparu utile de constituer un ensemble de sous-programmes spécifiques au calcul matriciel. Ces sous-programmes ont été élaborés en tenant compte de tout ce qui était utilisé par le C.D.P. : constantes et sous-programmes. Ainsi dans les opérations de multiplication, inversion, addition de matrices, avons-nous utilisé les sous-programmes arithmétiques virgule flottante, ce qui permettait d'en réduire au minimum l'encombrement. Ces sous-programmes présentés en 5 mots par carte translatables : les cartes commandant l'exécution de tous ces sous-programmes sont de la forme

PP' (N) iA. jB. kC .

Les Codes (PP') étant laissés au choix de l'opérateur. Pour certains d'entre eux, cependant, l'ordre à 2 mémoires étant insuffisant, nous avons dû nous résoudre à utiliser en plus la mémoire 1885. C'est le cas notamment de l'addition, de la soustraction, et de la multiplication de matrices.

.../...

Caractéristiques du sous-programme d'inversion.

Ce sous-programme nécessite une séquence de mémoires de travail fonction des caractéristiques de A et B. Si n est l'ordre de la matrice et p le nombre de vecteurs second membre, la zone de travail comprendra $2n + p$ mémoires.

Ordre "C.D.P." commandant l'inversion

Il est de la forme $PP'(N). i(A). j(b). k(C)$

A = adresse du 1er élément de la matrice

b = adresse de la 1ère mémoire de la zone de travail

C = caractéristiques de (A, B)

$$C = (n) . (n + p)$$

xx . xx

Caractéristiques du sous-programme de calcul d'un déterminant.

C'est sensiblement le même que le sous-programme d'inversion et de résolution des systèmes linéaires. Il comporte un certain nombre d'ordres

supplémentaires, dont la fonction est de stocker les pivots successifs et

d'en faire le produit en fin de calcul ; ce produit étant la valeur absolue de Δ .

Le signe est déterminé en fonction des modificatifs de ces pivots.

La forme de l'ordre est la même.

Pour ces deux sous-programmes, une fois le calcul effectué, nous trouvons

$$\text{en } [A, B] \quad [A^{-1}, X]$$

et pour le dernier en b, la valeur de $\Delta(A)$.

.../...

SOUS-PROGRAMME de TRANSPOSITION de MATRICES.

Définition

On appelle transposée d'une matrice $[A]$ la matrice $[A]'$ obtenue en permutant lignes et colonnes de même indice ; l'écriture symbolique de cette opération sera donc $[a_{ij}]' = [a_{ji}]$.

Exemple :

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad [A]' = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Généralités sur le sous-programme.

L'ordre du code de programmation déclenchant la transposition d'une matrice $[A]$ sera de la forme

$$(PP'). N. i(IJ). j(A). k(B).$$

I : nombre de lignes de la matrice $[A]$ à transposer

J : " de colonnes de cette matrice

A : adresse de la mémoire contenant le premier élément de $[A]$

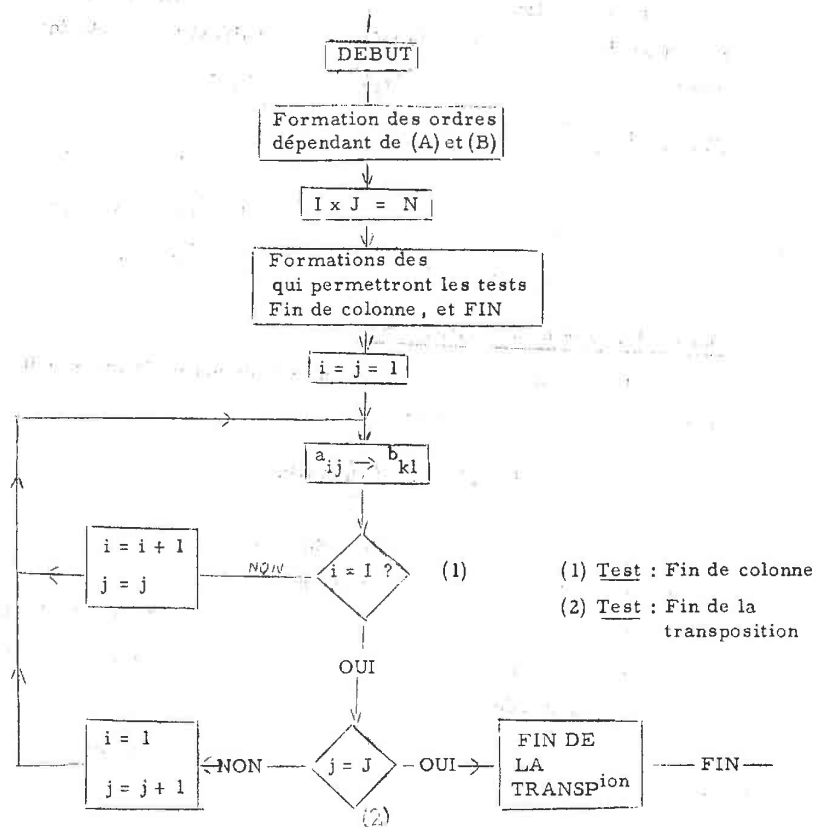
B : adresse de la mémoire contenant le premier élément de la matrice transposée $[A]'$

La structure du sous-programme de transposition impose que A soit différent de B.

.../...

ORGANIGRAMME

TRANPOSEE D'UNE MATRICE



SOUS-PROGRAMME DE TRANSPOSITION D'UNE MATRICE (PAS)

PRA	0044	1999
PRG	W1990	1993
TRANS	TDI	W0001
	DAG	0002
	RAG	8002
	AAD	W0001
	EDI	1967
	SBI	W0001
	EDI	61B02
	SBF	61B02
	RAD	8003
	DAG	0002
	EDI	61A02
	SBF	61A02
	SAG	8003
	TDI	W0002
61A02	EDI	9999 8002
61B02	TDI	9999 61C02
	DAG	0002
	SAD	8002
	DAG	0004
	TRG	W0003
	MUL	W0002
	AAD	61A02
	TRD	W0002
	SAD	W0003
	TRD	W0004
	RAG	61A02

En W0001 il y a l'ordre de sortie

En 61B02 il y a 24. (B). 61C02

En 61A02 il y a 69. (B). 8002

I est stocké provisoirement en W0002

J est mis en réserve en W0003

$J \times I = N$ (nombre d'éléments de la matrice)

En W0002 69.(A + Ij). 8002 ; cet ordre permettant de faire le test final.

En W0004 69.(A + (I-1).J). 8002, ordre qui permettra le test "fin de colonne".

.../...

	AAD	61B02	8003	Exécution du transfert d'un élément a_{ij}
61C02	SAG	W0004		
	GNN		61I02	Test : Une colonne a t'elle été transposée ?
	AAG	8001		- Non : $i \rightarrow i + 1$; $j = j$: on va vers
	AAG	W0003		les ordres d'exécution du transfert de
	AAD	1689	8003	$a_{(i+1,j)}$
61I02	AAG	W0004		- Oui : une colonne a été transposée
	AAG	1689		on passe alors au test final.
	SAG	W0002		
	GNN		W0001	la transposition est-elle faite ? oui on va
	AAG	8001		à l'ordre de sortie contenu en W0001.
	SAG	8003		Non ; $i = 1$, $j = j + 1$
	TDI	W0004		
	AAG	61A02		
	AAG	1689		
	AAD	8001		
	TRG	61A02	8003	On va vers les ordres de transfert de $a_{i,j}$.

.../...

SOUS-PROGRAMME D'ADDITION et de SOUSTRACTION de MATRICES.

Définition

L'Addition (ou la soustraction) de deux matrices $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$ consiste à effectuer l'addition (ou la soustraction) des éléments de mêmes indices de chacune d'elles. Ces opérations ne sont donc possible que sur des matrices de même ordre.

$$\boxed{A} + \boxed{B} = \boxed{C} \quad \text{avec } C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemple :

$$\boxed{A} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{Bmatrix} + \boxed{B} = \begin{Bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} = \boxed{C} = \begin{Bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 4 \\ 6 & 8 \end{Bmatrix}$$

Généralités sur le sous-programme :

L'ordre du code de programmation commandant l'addition (ou la soustraction) de deux matrices $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$ sera de la forme

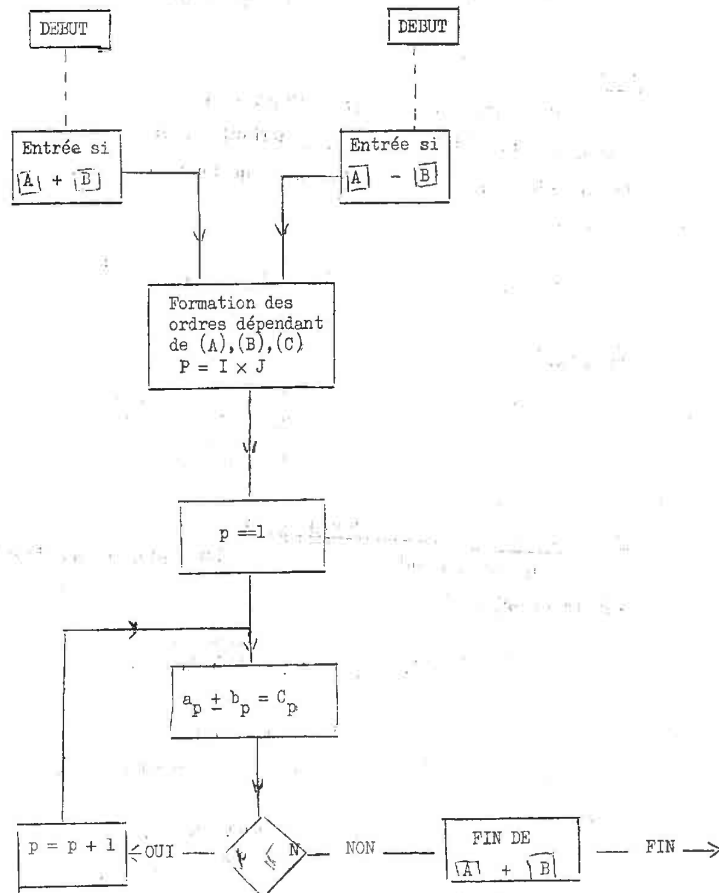
$$\boxed{PP'. (N). i (A). j (B). k. (C).}$$

En outre les caractéristiques communes à $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$, c'est-à-dire le nombre de lignes et de colonnes de ces matrices, devront être chargées en 1885 sous la forme

$$\begin{matrix} 00.0000. & I. & J. \\ & xx & xx \end{matrix}$$

I : nombre de lignes de $\boxed{A}$ et $\boxed{B}$
J : nombre de colonnes
A : adresse du 1er élément de $\boxed{A}$
B : " " de $\boxed{B}$
C : " " de $\boxed{C}$
C pouvant être A ou B.

.../...



ADDITION et SOUSTRACTION de 2 MATRICES

ORGANIGRAMME

ADD et SOUST de 2 MATRICES

PRA	0042	1999	
PEN	61011	0000	
PEN	61012	0001	
PEN	ADDIT	1487	
PEN	SOUST	1488	
PEN	61F01	1689	
61011	TDI	61A01	Entrée dans le sous-programme dans le cas de l'Addition
EDI	61J01		
TDI	61I01	61L01	
61012	TDI	61A01	Entrée dans le cas de la soustraction
EDI	61K01		
TDI	61I01	61L01	
61L01	TRD	61B01	
RAD	61A01		
EDI	1967		
SBI	61A01		En 61A01, ordre de sortie
SAD	8001		
SAD	18C8		
AAD	1875		
EDI	61C01		
61C01	TRD	9999	61D01
SEF	61C01		
DAG	0006		
SAG	8003		
DAG	0002		
SAG	8003		

En 61C01, ordre de transfert de $a_{ij} + b_{ij} \rightarrow c_{ij}$

.../...

	TDI	61E01	
	DAG	0006	
	MUL	61E01	
	AAD	61C01	
	TRD	61E01	61H01
61H01	RAD	61B01	61I01
61D01	RAG	61C01	
	AAG	61F01	
	SAG	61E01	
	GNN		61A01
	AAG	8001	
	AAD	61B01	
	AAD	61G01	
	TRG	61C01	
	TRD	61B01	61H01
61G01	OO	0001	0001

I stocké en 61E01

$I \times J = P$

En 61H01, il y a TRD. (C + N). 61D01 constante permettant le test final.

Entrée dans le sous-programme d'Add ou de Soust, suivant le cas, qui fera $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

L'opération est-elle terminée? Si oui, on va à l'ordre de sortie. C'est la fin du calcul.

Si non on prépare les ordres qui permettront d'effectuer le calcul de l'élément suivant de la matrice C .

.../...

SOUS-PROGRAMME de MULTIPLICATION de MATRICES.

Définition

Soient la matrice A , ayant I lignes et J colonnes et la matrice B ayant J lignes et K colonnes.

Le produit de la multiplication $A \times B$ est une matrice C , dont l'élément C_{ik} est obtenu en faisant la somme des produits suivants :

1er élément de la ligne i de B par le 1er élément de la colonne k de A , 2ème élément de la ligne i de A par le 2ème élément de la colonne k de B etc ,....

En résumé :

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Généralités sur le sous-programme.

L'ordre du code de programmation commandant la multiplication de deux matrices A et B sera de la forme

(PP') N. i (A). j (B). k. (C)

En outre en 1885, il faudra charger les caractéristiques I, J, K de A et B

I : nombre de lignes de A

j : nombre de colonnes de A et de lignes de B

K : nombre de colonnes de B
sous la forme OO.OOI, J, K.
xx xx xx

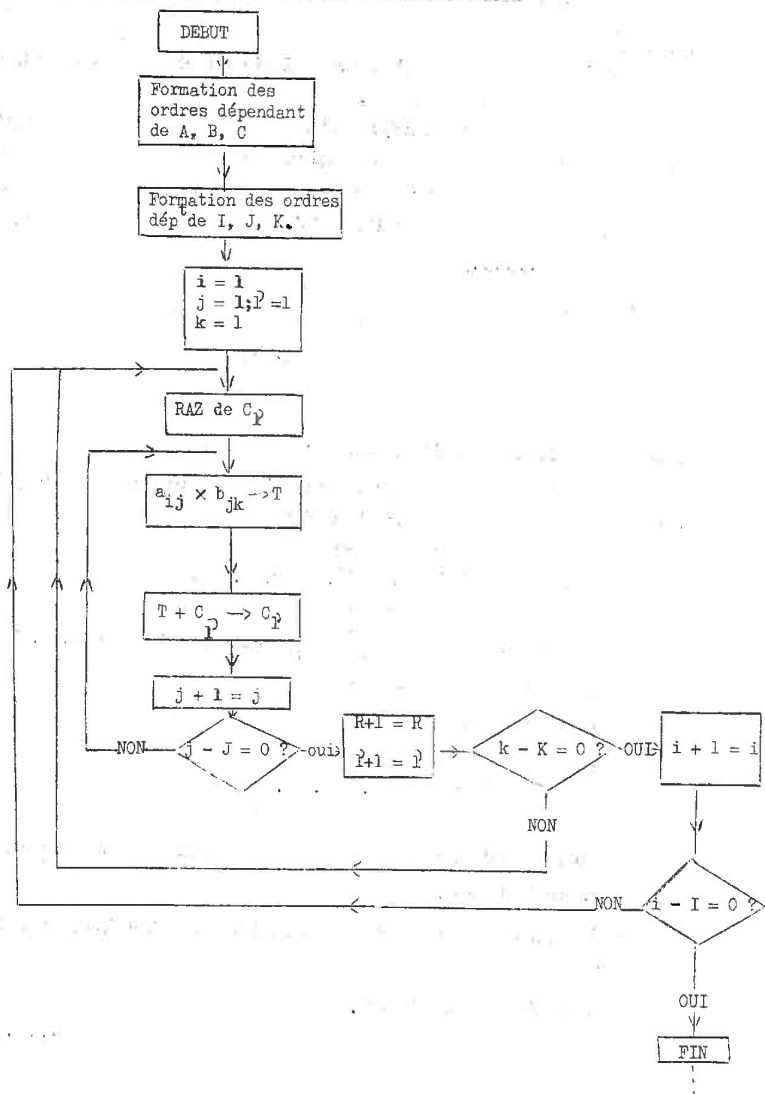
A et B sont les adresses des mémoires contenant respectivement les 1ers éléments de A et de B.

C est l'adresse de la mémoire contenant le premier élément de la matrice produit.

C doit être différent de A et B.

.../...

MULTIPLICATION DE MATRICES ; ORGANIGRAMME.



MULTIPLICATION DE MATRICES

PRA	1999
PEN ADDIT	1487
PEN MULTI	1450
PEN CTEUN	1764
PEN CTEO1	1689
DEBUT TDI	NON33
TRD CTMAB	
TDI CTEAB	
RAD NON33	
SAD	1808
EDI	1967
SBI NON33	
DAG	0002
AAG	1885
DAD	0006
AAG CTMAB	
EDI CTMCT	
SBI CTMCT	
DAG	0002
SAG	8003
TDI CTEII	
DAG	0002
SAG	8003
TDI CTEJJ	
EDI SORT2	
SBF SORT2	
EDI RAZRO	
SBF RAZRO	

Formation des ordres et constantes dépendant de A, B, C.

I TRF en CTEII

J TRF en CTEJJ

.../...

	DAG	0002
	RAD	8003
	TDI	CTEKK
	EDI	CTE01
	SBI	CTE1K
	TRG	CTRII
	TDI	CTRJJ
	TDI	CTRKK
	SUIT4	
SUIT4	RAD	CTMAB
SUIT3	EDI	SORT1
SORT1	TRD	TRAVA
SUIT1	RAD	CTMCT
	EDI	SORT2
SORT2	TRD	
SUIT2	RAG	CTRJJ
	AAG	CTEUN
	SAG	CTEJJ
	ANG	OUI11
OUI11	AAG	CTEJJ
	TRG	CTRJJ
	RAD	CTMAB
	AAD	CTE1K
	TRD	CTMAB
NON11	TRG	CTRJJ
	AAG	CTRKK
	AAG	CTEUN
	SAG	CTEKK
	ANG	OUI22

K TRF en CTEKK

RAZ des compteurs i, j, k

Exécution de $C_{ik} = \sum_j a_{ij} \times b_{jk}$

Test 1 : A t'on exécuté toutes les opérations qui doivent avoir pour résultat C_{ik} ?
Si non, on va en OUI11, le calcul se poursuit j étant augmenté d'une unité on procède à la multiplication des éléments suivants de [A] et [B] pour une ligne de [A] et une colonne de [B] données.

On vient d'obtenir un C_{ik} .

Test 2 : A t'on obtenu tous les C_{ik} pour une valeur de i donnée ?

.../...

OUI22	AAG	CTEKK
	TRG	CTRKK
	AAG	CTEAB
	TRG	CTMAB
SUIT5	RAG	RAZRO
	AAD	SORT2
	AAG	CTE01
	AAD	8001
	TRG	RAZRO
	SAD	8002
	TDI	SORT2
	AAD	CTMCT
	AAD	CTEUN
	TRD	CTMCT
NON22	TRG	CTRKK
	AAG	CTRII
	AAG	CTEUN
	SAG	CTEII
	ANG	OUI33
OUI33	AAG	CTEII
	TRG	CTRII
	RAG	CTEJJ
	DAG	0004
	AAG	CTEAB
	TRG	CTEAB
	SAG	8003
	TDI	CTMAB
CTMCT	00	TRAVA
RAZRO	21	0000
CTEUN	00	0000
CTE01	00	0001

Non, on poursuit les calculs, k étant augmenté d'une unité, c'est-à-dire que l'on passe à la multiplication d'une ligne donnée de [A] par la colonne de [B] suivant cell que l'on vient d'exploiter.

Oui, tous les C_{ik} pour un i donné ont été calculés.

Test 3 : tous les éléments de [C] ont-ils été calculés ?

Si oui, on va à l'ordre de sortie.

Si non, on augmente i d'une unité (on passe ainsi aux calculs portant sur la ligne suivante).

et on recommence les calculs.

.../...

INVERSION DE MATRICES RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

Généralités :

Le but d'un tel programme est de permettre la résolution de systèmes linéaires, l'inversion de matrices non singulières, et le calcul des déterminants.

La méthode utilisée est la méthode de Gauss-Jordan qui est une méthode directe.

L'élaboration du programme a été conduite de façon à réduire au minimum le nombre de mémoires utilisées. En outre pour éliminer le cas des points nuls et pour diminuer autant que possible la propagation des erreurs de chute, nous avons utilisé la méthode du pivot maximum ; pour simplifier la présentation du problème, nous commencerons par établir le processus dans le cas où les pivots choisis sont sur la diagonale principale des matrices successives.

Principe de la Méthode :

Soit à résoudre le système linéaire symbolisé par l'écriture

$$[A] \{x\} = \{B\}$$

où $[A]$ est la matrice carrée des coefficients du système, matrice d'ordre $m \times m$ si le nombre d'équations est m

$\{x\}$ est la matrice $m \times n$ des inconnues
et $\{B\}$ la matrice $M \times n$ des seconds membres.

Dans la mesure où $\{B\}$ sera la matrice unité, la résolution du système $[A] \{x\} = [I]$ donnera la matrice inverse $[A]^{-1}$.

.../...

La résolution de ces deux problèmes, inversion de matrices et résolution des systèmes linéaires effectuée par une succession de produits de matrices

$$\begin{aligned} D &= [A, B] = I [A, B] = V^{(0)} W^{(0)} \\ &= V^{(1)} W^{(1)} \\ &= V^{(2)} W^{(2)} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= V^{(n)} W^{(n)} = A [I, X] \end{aligned}$$

$D = [A, B]$ signifie que les matrices A et B accolées doivent être comme une seule matrice.

Chaque produit $V^{(k)} W^{(k)} = [I]$ égal à la matrice des données (coefficients et seconds membres).

- Les $V^{(k)}$ représentent une suite de matrices carrées, initialement, la matrice unité, finalement la matrice A .
- Les $W^{(k)}$ représentent une suite de matrices rectangulaires.

A chaque pas du calcul, le passage de $V^{(k-1)}$ à $V^{(k)}$ se fait en remplaçant dans $V^{(k-1)}$ un vecteur unité par un vecteur de A . C'est uniquement sur la matrice $W^{(k)}$ que l'on travaillera. A la dernière étape, B sera remplacé par les solutions cherchées X . Dans le cas de l'inversion de matrice $B = I$, I matrice unité et au dernier pas du calcul nous aurons A^{-1} au lieu de X .

Formules du calcul.

Le passage de $W^{(k)}$ à $W^{(k-1)}$ se fait au moyen de la méthode du pivot.

.../...

.../...

Au pas $k-1$, nous avons

$$(1) D = [A, B] = V^{(k-1)} W^{(k-1)} \text{ avec } W^{(k-1)} = \begin{bmatrix} A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, \\ I_k, \dots, I_n \end{bmatrix}$$

I_k étant la $k^{\text{ième}}$ colonne de la matrice unité.

D'après (1) chaque colonne de D s'écrit

$$(2) D_j = N_{1j} A_1 + W_{2j} A_2 + \dots + N_{k-1,j} A_{k-1} + N_{k,j} I_k + \dots + W_{n,j} I_m$$

où les W_{ij} pour $i = 1, 2, \dots, m$ sont les éléments de la colonne j de $W^{(k-1)}$. En particulier $A_k = D_k$.

$$(3) A_k = W_{1k} A_1 + W_{2k} A_2 + \dots + W_{k-1,k} A_{k-1} + W_{k,k} I_k + \dots + W_{m,k} I_m$$

Nous supposons alors que $W_{kk} \neq 0$.

La substitution de I_k tiré de (3) dans (2) donne alors

$$(4) D_j = \left(W_{1j} - W_{kj} \frac{W_{1k}}{W_{kk}} \right) A_1 + \left(W_{2j} - W_{kj} \frac{W_{2k}}{W_{kk}} \right) A_2 + \dots$$

$$+ \frac{W_{kj}}{W_{kk}} A_k + \dots + \left(W_{nj} - W_{kj} \frac{W_{nk}}{W_{kk}} \right) I_m.$$

Les quantités à calculer en cours de programme sont alors mises en lumière ; ce sont

...

.../...

$$W'_{ij} = \left(W_{ij} - N_{kj} \frac{W_{ik}}{W_{kk}} \right) \text{ pour tout } i \text{ sauf } i = k \text{ et pour tout } j$$

$$W'_{kj} = \frac{W_{kj}}{W_{kk}} \text{ pour tout } j.$$

Les W'_{ij} devenant les éléments de $W^{(k)}$

$$\text{Posons } C_i = \frac{W_{ik}}{W_{kk}}.$$

Nous voyons que le passage de $W^{(k)}$ à $W^{(k-1)}$ peut se symboliser

$$\text{par } W^{(k)} = C^{(k)} W^{(k-1)}$$

$$\text{avec } C^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & -C_1 & & 0 \\ & 1 & -C_2 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 1 & \vdots & \\ & & & 1/W_{kk} & \\ 0 & & & -C_m & 1 \end{bmatrix}$$

Que ce soit dans l'inversion d'une matrice ou la résolution d'un système linéaire, seules seront stockées les éléments intéressant par exemple pour $C^{(k)}$ nous garderons uniquement la colonne k .

Inversion de Matrice et Produit de Matrices

D'après ce qui précède, nous pouvons écrire

$$W^{(0)} = A$$

$$W^{(1)} = C^{(1)} W^{(0)} = C^{(1)} A$$

...

.../...

$$W^{(k)} = C^{(k)} W^{(k-1)} = C^{(k)} C^{(k-1)} \dots C^{(2)} C^{(1)} A$$

$$I = W^m = C^{(m)} C^{(m-1)} \dots C^{(i)} \dots C^{(2)} C^{(1)} A$$

$$D'où \quad A^{-1} = C^{(1)} C^{(2)} \dots C^{(i)} \dots C^{(m)}$$

Les matrices $C^{(i)}$ ne diffèrent d'une matrice unité que par la colonne (i), aussi la mise en réserve de $C^{(1)}$ ne nécessitera t'elle que m mémoires. L'inversion de matrice se ramène donc à un produit de m matrices particulières.

Pour la résolution d'un système linéaire, il en sera de même

$$x = A^{-1} b = C^{(1)} C^{(2)} \dots C^{(n)} b$$

Si nous posons $b = x^{(0)}$ nous voyons que

$$x^{(1)} = C^{(1)} x^{(0)}$$

$$x^{(2)} = C^{(2)} x^{(1)}$$

$$x^{(k)} = C^{(k)} x^{(k-1)}$$

avec $k = 1, 2, \dots, m$.

donne finalement $x^{(m)} = x = C^m x^{(0)}$.

En conclusion, le principe à dégager de ce qui précède est que résolution des systèmes linéaires et inversion des matrices seront obtenues en mettant en évidence à chaque étape du calcul les matrices $C^{(i)}$ et en effectuant les produits $C^{(i)} M^{(i-1)}$ avec $M^0 = I$ dans le cas de l'inversion et $M^{(0)} = B$ dans le cas de la résolution des systèmes linéaires.

.../...

Calcul du déterminant.

=====

Il est nécessaire, lors de l'inversion d'une matrice ou de la résolution d'un système linéaire sur lesquels on a peu de renseignements quant à l'instabilité, cette instabilité étant due au mauvais conditionnement du système, de calculer la valeur du déterminant Δ^A de A.

$$\text{On a } D = V^{(k)} W^{(k)} = V^{(k)} C^{(k)} W^{(k-1)} = V^{(k-1)} W^{(k-1)}$$

$$D'où \quad V^{(k)} C^{(k)} = V^{(k-1)}$$

$$\text{or } \int C^{(k)} = 1/W_{kk}$$

$$D'où \quad \int V^{(k)} = W_{kk} \int V^{(k-1)}$$

$$\text{Or } \int V^{(0)} = 1$$

$$\text{Ainsi } \int V^{(M)} = \prod_{k=1}^m W_{kk} = \int (A)$$

Le déterminant de la matrice $[A]$ est donc égal au produit des pivots successifs.

Méthode du pivot maximum :

=====

Comme nous l'avons dit précédemment, afin d'éviter la possibilité d'avoir $W_{kk} = 0$ et de plus pour limiter la propagation des erreurs de chute, nous sommes amenés à compliquer la méthode du point de vue opérations logiques afin de pouvoir choisir non plus le pivot sur la diagonale principale, mais le pivot maximum.

.../...

Soit W_{pk} le plus grand des W_{ik} . La substitution de A_k à la place de I_p dans $V^{(k)}$ conduit pour obtenir $W^{(k)}$ aux formules de calcul suivantes :

$$C_i = \frac{W_{ik}}{W_{pk}} \quad \text{pour tout } i \text{ excepté } i = p$$

$$W'_{ij} = W_{ij} - W_{pj} C_i \quad \text{pour tout } i \text{ excepté } i = p \text{ et pour tout } j.$$

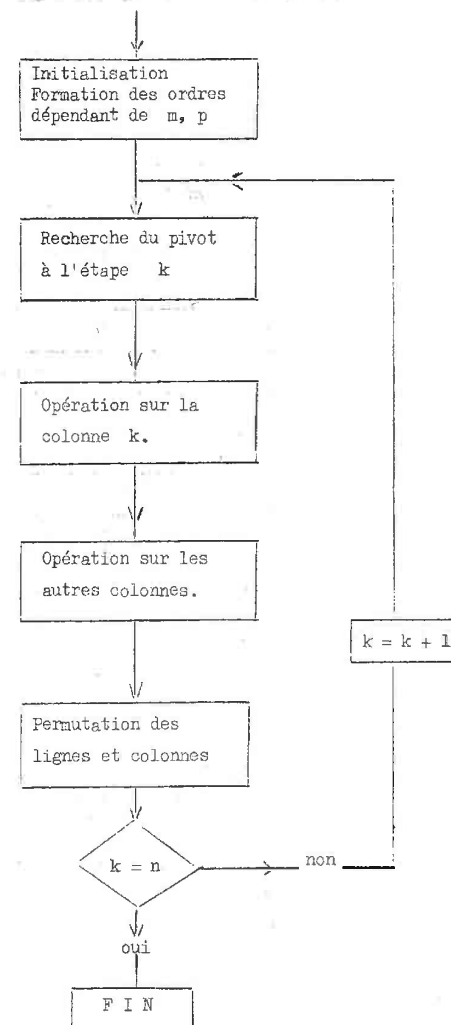
$$W'_{pj} = \frac{W_{pj}}{W_{pk}} \quad \text{pour tout } j.$$

L'usage de ces formules entraîne que les coefficients de A_k dans la relation (4) apparaissent dans la ligne ϕ et non plus dans la ligne k de $W^{(k)}$.

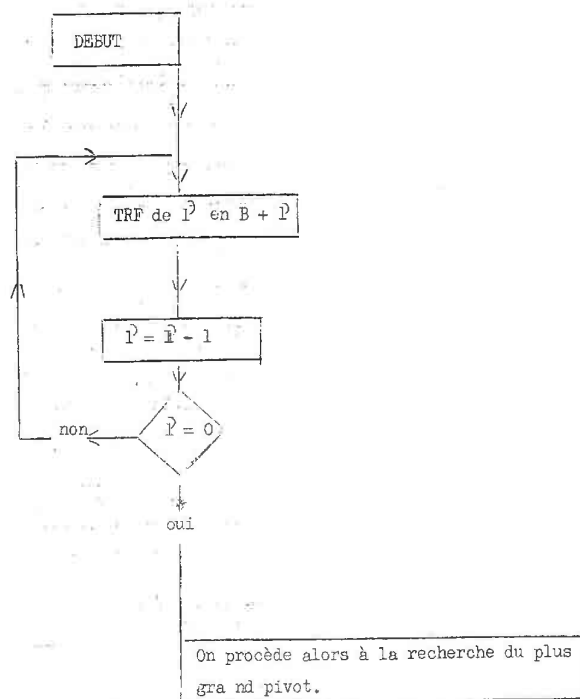
Nous permuterons alors à chaque étape du calcul les lignes ϕ et k .

.../...

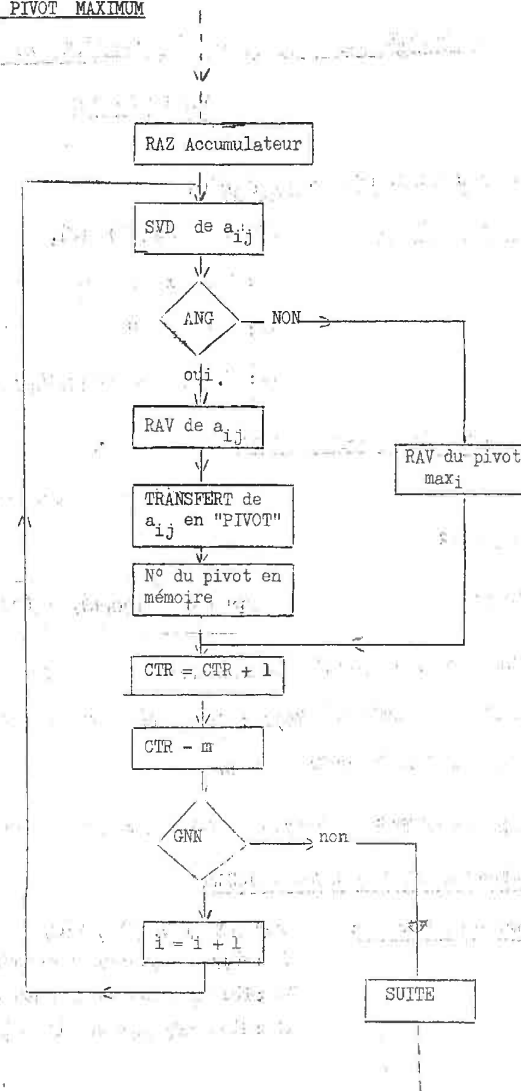
ORGANIGRAMME
GENERAL



MISE EN PLACE DES CONSTANTES DE REPERAGE DES PIVOTS



RECHERCHE DU PIVOT MAXIMUM



RESUME SUR LA MISE EN OEUVRE DES SOUS-PROGRAMMES

MATRICIELS

1 - TRANSPOSEE D'UNE MATRICE.

Forme de l'ordre PP'(N) i(A) j(B) k(C).

A : 1ère adresse de la matrice à transposer

B : " " " transposée

C : i, j, caractéristiques de A

Début du sous-programme

En Δ + 0000, si Δ est le facteur de translation.

Exemple :

L'ordre

PP' (N) 0 (0000). 0 (1000). 0 (11.21)

ordonne la transposition ou la matrice (11 x 21) qui est rangée ligne par ligne à partir de 0000 ; la matrice transposée (21 x 11) sera rangée ligne par ligne à partir de 1000

Encombrement : le sous-programme occupe 44 mémoires.

2 - ADDITION DE DEUX MATRICES

Forme de l'ordre : PP' (N) i (A). j(B). k(C)

A : 1ère adresse de la matrice A

B : 1ère adresse de la matrice B

C : 1ère adresse de C = A + B

.../...

en 1885 doit être chargé 00. 0000. i, j

i : nombre de lignes de A et B

j : " " de colonnes de A et B

C peut être A, ou B.

.../...

DEBUT DU SOUS-PROGRAMME : En $\Delta + 0000$, si Δ est le facteur de translation.

Exemple : L'ordre PP' (N) 0 (0000) 0 (0100) 0 (0200)
avec en 1885 : 00 0000 0909

commandera l'addition de la matrice $\boxed{A}$ d'ordre 9×9 rangée ligne par ligne à partir de 0000 et de la matrice $\boxed{B}$ de même ordre, rangée elle aussi ligne par ligne, à partir de 0100. La matrice résultat $\boxed{C} = \boxed{A} + \boxed{B}$ sera rangée à partir de 0200.

Encombrement : le sous-programme occupe 45 mémoires

3) SOUSTRACTION DE DEUX MATRICES.

Le programme de soustraction étant le même que le programme d'addition, tout ce que nous avons dit pour l'addition est valable pour la soustraction ; seul, le début du sous-programme est différent ; si Δ est le facteur de translation, le sous-programme de soustraction commence en $\Delta + 0001$.

4) MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES.

Forme de l'ordre : PP' (N) i (A) j (B) k (C).
A : 1ère adresse de la matrice $\boxed{A}$
B : 1ère adresse de la matrice $\boxed{B}$
C : 1ère adresse de la matrice produit
 $\boxed{C} = \boxed{A} \times \boxed{B}$

En 1885, doit être rangé 00. 00 i. j. k.

i : nombre de lignes de $\boxed{A}$
j : nombre de colonnes de $\boxed{A}$ et de lignes de $\boxed{B}$
k : nombre de colonnes de $\boxed{B}$

.../...

C ne peut être ni A, ni B.

Début du sous-programme : En $\Delta + 0000$, si Δ est le facteur de translation

Exemple : L'ordre PP' (N) i (0000) j (0100) k (0200)
avec en 1885 00 0006 05 06

commandera la multiplication de la matrice $\boxed{B}$ d'ordre 5×6 rangée à partir de 0100 par la matrice $\boxed{A}$ d'ordre 6×5 , rangée à partir de 0000 et le résultat sera rangé à partir de 0200.

A, B, C étant rangés ligne par ligne en séquence.

Encombrement : le sous-programme occupe 94 mémoires.

5) INVERSION et RESOLUTION des SYSTEMES LINEAIRES.

Forme de l'ordre.

PP' (N) i (A) j (B) k (C)

A : 1ère adresse de la matrice des coefficients et des seconds membres.

B : 1ère adresse de la zone de travail.

C : (n n + p)

n : ordre de la matrice des coefficients

p : nombre de seconds membres.

Début du sous-programme : en $\Delta + 0000$, si Δ est le facteur de translation.

Exemple : L'ordre PP' (N) i (0000) j (0100) k (0709) ordonnera la résolution du système linéaire d'ordre 7 ayant 2 seconds membres. La matrice inverse de la matrice des coefficients sera à la place de cette dernière, et les seconds membres seront remplacés par les solutions cherchées. La zone de travail comportera 16 mémoires en séquence, à partir de 100.

Encombrement : Le sous-programme occupe 234 mémoires.

.../...

6) INVERSION, RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES, ET CALCUL DE DETERMINANT.

C'est le même que précédemment ; complété par des ordres permettant le calcul de Δ .

Tout ce que nous avons dit ci-dessus demeure ; mais en plus, la valeur de Δ se trouve en B, en fin de calcul.

Encombrement : le sous-programme occupe 255 mémoires.

E X E M P L E

Soit le système linéaire

$$4X - 3Y = 1$$

$$- 7X + Y = - 6$$

Calculer

- 1°) la matrice inverse
- 2°) le vecteur solution
- 3°) le déterminant du système.

Les caractéristiques sont $n = 2$, $p = 1$.

Supposons que nous ayons choisi (PP') = 45, le programme s'écrit par exemple :

0100	69 0101 0102	Entrée en C.D.P.
0101	00 0000 0103	
0102	24 1884 1800	
0103	- 02 0000 0105	Initialisation
0105	45 107 00001 00060 00203	Calcul
0107	49 109 00001 00060 00060	PFØ de Δ
0109	49 111 00003 00001 00006	PFØ de A^{-1} et X
0111	- 01 0000 1800	ARRET.

.....

.../...

[A. B] est rangé ligne par ligne, en séquence, à partir de 0001. T commence à 00060 et nécessite $21 + p = 5$ mémoires

Avant exécution

1	2	3
4	- 3	1
4	5	6
- 7	1	- 6

A B

Après exécution

1	2	3
1	3	1
4	5	6
7	4	1

A⁻¹ B

60
- 17

Δ

3ème PARTIE

1°) SOUS-PROGRAMME DE CALCUL des MOMENTS CENTRES JUSQU'A L'ORDRE 4.

2°) ESSAIS D'ESTIMATION de DISTRIBUTIONS EXPERIMENTALES PAR LES COURBES de PEARSON.

CALCUL DES MOMENTS CENTRÉS D'ORDRE 2, 3 et 4

D'UNE DISTRIBUTION

Définitions préliminaires :

Moments par rapport à l'origine.
=====

Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ les contenus des classes d'abscisses respectives $X_1, X_2, \dots, X_n$. Nous appellerons moments d'ordre p par rapport à l'origine, la quantité.

$$m_p = \frac{1}{N} (x_1^p Y_1 + x_2^p Y_2 + \dots + x_i^p Y_i + \dots + x_n^p Y_n)$$

N étant le contenu de la collection.

De façon plus générale

$$m_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^p Y_i$$

Nous aurons ainsi en particulier

$$m_0 = \frac{1}{N} [x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_p] = 1$$

$$m_1 = \frac{1}{N} [x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_i y_i + \dots + x_p y_p] = m$$

Moments par rapport à la moyenne : Moments centrés
=====

Nous appellerons moments par rapport à la moyenne d'ordre p

.../...

au moment centré d'ordre p la quantité.

$$\mu_p = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - m)^p Y_i = m_p + (-1)^1 p n m_{p-1} + p(p-1)(-1)^2 n^2 m_{p-2} + \dots + (-1)^i C_p^i m^i m_{p-i} + (-1)^p m^p$$

Ainsi $\mu_1 = m - m = 0$

$$\mu_2 = m_2 - 2m^2 + m^2 = m_2 - m^2 = \sigma^2$$

Méthode de Calcul :

Nous commencerons par transformer la suite des abscisses des classes $X_1 \dots X_i \dots X_n$ en une suite d'entiers successifs, le premier terme de cette suite étant $X_1 = 1$.

Calculons les sommes successives

$$* S_0^1 = Y_n ; S_0^2 = Y_n + Y_{n-1} ; S_0^3 = S_0^2 + Y_{n-2} ; S_0^n = Y_n + Y_{n-1} + \dots + Y_1 = N$$

$$* S_1^1 = S_0^1 = Y_n ; S_1^2 = S_0^2 + S_1^1 = 2Y_n + Y_{n-1} ; S_1^n = S_1^{n-1} + S_0^n$$

$$* S_2^1 = S_1^1 = Y_n ; S_2^2 = S_1^2 + S_2^1 = ; S_2^n = S_2^{n-1} + S_1^n$$

dont la loi de formation est, sauf pour les S_0^i .

$$S_k^p = S_k^{p-1} + S_{k-1}^p$$

.../...

Calculons les sommes successives

$$* S_0^1 = Y_n ; S_0^2 = Y_n + Y_{n-1} ; S_0^3 = S_0^2 + Y_{n-2} ; S_0^n = Y_n + Y_{n-1} + \dots + Y_1 = N$$

$$* S_1^1 = S_0^1 = Y_n ; S_1^2 = S_0^2 + S_1^1 = 2Y_n + Y_{n-1} ; S_1^n = S_1^{n-1} + S_0^n$$

$$* S_2^1 = S_1^1 = Y_n ; S_2^2 = S_1^2 + S_2^1 = ; S_2^n = S_2^{n-1} + S_1^n$$

dont la loi de formation est, sauf pour les S_0^i .

$$S_k^p = S_k^{p-1} + S_{k-1}^p$$

ce qui donne

$$S_0^n = N$$

$$S_1^n = nY_n + (n-1)Y_{n-1} + \dots + kY_k + \dots + 2Y_2 + Y_1 = \sum_i X_i Y_i = m_1 N$$

$$S_2^n = (nY_n + \dots + Y_1) + [(n-1)Y_n + (n-2)Y_{n-1} + \dots + Y_2] + \dots + [Y_n]$$

$$S_2^n = Y_n \sum_1^n i + Y_{n-1} \sum_1^{n-1} i + \dots + Y_1 = \sum_p Y_p p \frac{(p+1)}{2}$$

$$\text{D'où } S_2^n = \frac{1}{2} \sum_p Y_p p^2 + \frac{1}{2} \sum_p p Y_p = \frac{1}{2} m_2 N + \frac{1}{2} m N$$

En poursuivant le calcul des sommes S_i^n , nous arrivons à la formule

de récurrence

$$S_i^n = \sum \frac{r(r+1) \dots (r+i-1)}{i!} Y_i = \frac{m_i N}{i!} + \frac{n_{i-1} N}{2(i-2)!} + \dots$$

.../...

Nous aurons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} S_0^n &= N = m_0 \\ S_1^n &= m_1 N \\ S_2^n &= \frac{1}{2} m_2 N + \frac{1}{2} m_1 N \\ S_3^n &= \frac{m_3 N}{6} + \frac{m_2 N}{2} + \frac{m_1 N}{3} \\ S_4^n &= \frac{m_4 N}{24} + \frac{m_3 N}{4} + \frac{11 m_2 N}{24} + \frac{m_1 N}{4} \end{aligned}$$

D'où l'expression des moments par rapport à l'origine exprimés en fonction des S_i^n

$$\begin{aligned} m_0 &= N = S_0^n \\ m_1 &= m = S_1^n / S_0^n \\ m_2 &= \frac{2 S_2^n}{S_0^n} - m_1 \\ m_3 &= \frac{6 S_3^n}{S_0^n} - 3 m_2 - 2 m_1 \\ m_4 &= \frac{24 S_4^n}{S_0^n} - 6 m_3 - 11 m_2 - 6 m_1 \end{aligned}$$

Partant de ces résultats, la formule $\mu_p = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - m)^p Y_i$ donne alors la valeur des moments centrés.

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{2 S_2^n}{S_0^n} - m(m+1) \\ \mu_3 &= \frac{6 S_3^n}{S_0^n} - 3(m+1)\mu_2 - m(m+1)(m+2) \\ \mu_4 &= \frac{24 S_4^n}{S_0^n} - 2(2m+3)\mu_3 - (6m^2 + 18m + 11)\mu_2 - m(m+1)(m+2)(m+3) \end{aligned}$$

Variante de la méthode :

L'emploi de la méthode décrite ci-dessus peut amener à des valeurs de S_i^n très grandes, aussi dans le but d'éviter cet inconvénient, il est indiqué de modifier le processus de calcul de la façon suivante.

Par une translation de l'origine, conduisant à choisir comme nouvelle origine une des valeurs centrales de la distribution (la plus grande est évidemment la plus intéressante), nous faisons correspondre les suites

- ① abscisses des classes de la distribution
- ② contenus des classes

$$\begin{array}{ccccccc} -(k-1) & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots & i & n-k \\ Y_0 & \dots & Y_{k-1} & Y_K & Y_{K+1} & \dots & Y_{K+i} & Y_n \end{array}$$

Calculons alors les sommes

$$* s_0^1 = Y_n ; s_0^2 = Y_n + Y_{n-1} ; \dots ; s_0^{k-1} = s_0^{k-2} + Y_{n-k+1}$$

$$t_0^1 = Y_1 ; t_0^2 = Y_1 + Y_2 ; \dots ; t_0^{n-k} = t_0^{n-k-1} + Y_{n-k+1}$$

$$* s_1^1 = Y_n ; s_1^2 = s_1^1 + s_0^2 ; \dots ; s_1^{k-1} = s_1^{k-2} + s_0^{k-1}$$

$$t_1^1 = Y_1 ; t_1^2 = t_1^1 + t_0^2 ; \dots ; t_1^{n-k} = t_1^{n-k-1} + t_0^{n-k-1}$$

$$* s_2^1 = Y_n ; s_2^2 = s_2^1 + s_1^2 ; \dots ; s_2^{k-1} = s_2^{k-2} + s_1^{k-1}$$

$$t_2^1 = Y_1 ; t_2^2 = t_2^1 + t_1^2 ; \dots ; t_2^{n-k} = t_2^{n-k-1} + t_1^{n-k-1}$$

Dont les lois de formation sont

$$S_i^j = S_{i-1}^j + S_i^{j-1}$$

j variant de 1 à k-1
et pour i ≠ 0

$$t_i^j = t_{i-1}^j + t_i^{j-1}$$

pour j variant de 1 à n-k
et pour i ≠ 0.

Ces sommes partielles donnent alors :

$$s_0^{n-k} + Y_k + t_0^{k-1} = N$$

$$t_1^{n-k} - t_1^{k-1} = m N$$

...

.../...

$$t_2^{n-k} + s_2^{k-1} = \frac{m_2 N}{2} + \frac{1}{2} (t_1^{n-k} - s_1^{k-1})$$

$$t_3^{n-k} - s_3^{k-1} = \frac{m_3 N + 1}{6} (t_2^{n-k} - s_2^{k-1}) - \frac{1}{6} (t_1^{n-k} - s_1^{k-1})$$

$$t_4^{n-k} + s_4^{k-1} = \frac{m_4 N}{24} + \frac{3}{2} (t_3^{n-k} + s_3^{k-1}) - \frac{7}{12} (t_2^{n-k} + s_2^{k-1}) + \frac{1}{12} (t_1^{n-k} + s_1^{k-1})$$

Posons $S_i = t_i^{n-k} + s_i^{k-1}$ et $D_i = t_i^{n-k} - s_i^{k-1}$

Nous obtenons le système

$$N = S_0 + Y_k$$

$$m N = D_1$$

$$m_2 N = 2 S_2 - S_1$$

$$m_3 N = 6 D_3 - 6 D_2 + D_1$$

$$m_4 N = 24 S_4 - 36 S_3 + 14 S_2 - S_1$$

qui permet le calcul des moments par rapport à l'origine x_k .

Les moments centrés seront alors donnés par le système ci-dessous

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{2 S_2 - S_1 - m^2}{N} \\ \mu_3 &= \frac{6 D_3 - 6 D_2 + D_1 - 3 m \mu_2 - m^3}{N} \\ \mu_4 &= \frac{24 S_4 - 36 S_3 + 14 S_2 - S_1 - 4 m \mu_3 - 6 m^2 \mu_2 - m^4}{N} \end{aligned}$$

.../...

Ces moments étant relatifs à des largeurs de classe unitaire, il conviendra pour obtenir la valeur de ceux-ci, attachés à la distribution donnée, dont la largeur des classes est h , de multiplier μ_p par h^p .

Soit μ'_p le moment cherché, nous aurons la formule de conversion

$$\mu'_p = h^p \times \mu_p$$

Exemple Numérique :

=====

Distribution des résultats de l'essai d'emboutissage sur des tôles, de même classe d'épaisseur.

Nous avons choisi comme nouvelle origine, l'abscisse 11,3 correspondant à la fréquence maximale.

.../...

.....

(A)

TABEAU de CALCUL

x_i mm	x'_i	y_i					
10,1	-12	1	1	1	1	1	1
10,2	-11	2	3	4	5	6	7
10,3	-10	4	7	11	16	22	29
10,4	-9	1	8	19	35	57	86
10,5	-8	3	11	30	65	122	208
10,6	-7	9	20	50	115	237	445
10,7	-6	4	24	74	189	426	871
10,8	-5	9	33	107	296	722	1593
10,9	-4	18	51	158	454	1176	2769
11	-3	13	64	222	676	1852	4621
11,1	-2	24	88	310	986	2838	7459
11,2	-1	33	121	431	1417	4255	11714
11,3	0	52					
11,4	1	48	153	391	865	1713	3112
11,5	2	44	105	238	474	848	1399
11,6	3	16	61	133	236	374	551
11,7	4	22	45	72	103	138	177
11,8	5	19	23	27	31	35	39
11,9	6	4	4	4	4	4	4

(B)

Valeurs des S_i et D_i

$$N = 52 + 121 + 153 = 326$$

$$S_1 = 431 + 391 = 822$$

$$S_2 = 1417 + 865 = 2282$$

$$S_3 = 4255 + 1713 = 5968$$

$$S_4 = 11714 + 3112 = 14826$$

.../...

$$\begin{aligned} D_1 &= 391 - 431 = - 040 \\ D_2 &= 865 - 1417 = - 552 \\ D_3 &= 1713 - 4255 = - 2542 \end{aligned}$$

C Calcul des moments par rapport à l'origine.

$$N = S_0 + Y_k = 326$$

$$m = \frac{D_1}{N} = - \frac{40}{326} = - 0,122699$$

$$m_2 = \frac{2S_2 - S_1}{N} = \frac{4564 - 822}{326} = 11,478528$$

$$m_3 = \frac{6D_3 - 6D_2 + D_1}{N} = \frac{11930}{326} = - 36,748466$$

$$m_4 = \frac{24S_4 - 36S_3 + 14S_2 - S_1}{N} = \frac{172.102}{326} = 527,920.245$$

D Calcul des moments centrés μ_i :

$$\mu_2 = m_2 - m^2 = 11,463472$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m\mu_2 - m^3 = -32,526936$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m\mu_3 - 6m^2\mu_2 - m^4 = 510,920361$$

E Calcul des moments centrés vrais μ'_i et de la moyenne.

MOYENNE $m = 11,3 - 0,123 = 11,177 \text{ mm.}$

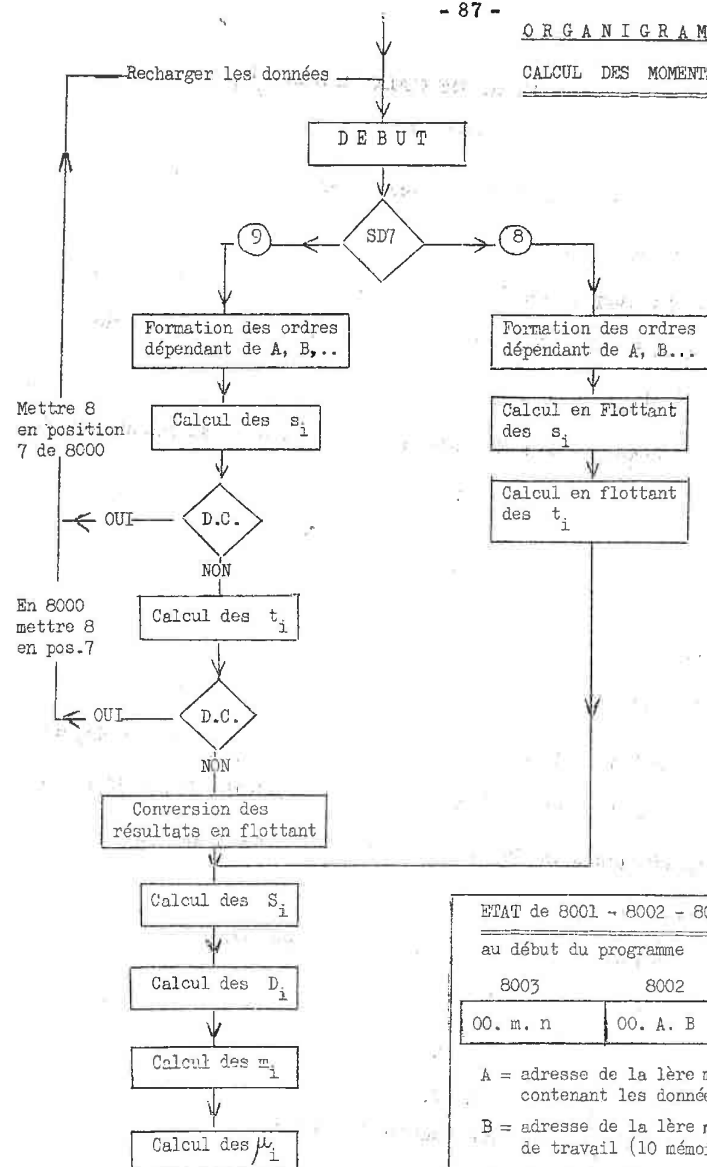
Ici l'intervalle de classe vrai vaut 1/10 de mm : $h = 1/10$, d'où

$\mu'_2 = 0,115$	$\mu'_3 = -0,033$	$\mu'_4 = 0,0511$
------------------	-------------------	-------------------

.../...

ORGANIGRAMME

CALCUL DES MOMENTS



ETAT de 8001 - 8002 - 8003

au début du programme

8003	8002	8001
00. m. n	00. A. B	Inst ^{ion} de sortie

A = adresse de la 1ère mémoire de la bande contenant les données.

B = adresse de la 1ère mémoire de la zone de travail (10 mémoires)

m = nombre de classes.

n = n° de la classe origine.

SOUS-PROGRAMME DE CALCUL DES μ_i

=====

But du sous-programme : Le but de ce sous-programme est de permettre le calcul de la moyenne et des moments centrés μ_2 ; μ_3 et μ_4 d'une distribution statistique ; il suppose les fréquences réparties en classe de largeur unitaire, cas auquel il est toujours possible de se ramener (cf l'exemple développé ci-dessus).

Structure du sous-programme : Elle découle de la méthode de calcul exposée plus haut et se compose de 4 parties.

1°) Calcul des s_i et t_i

2°) Calcul des S_i et D_i

3°) Calcul des m_i

4°) Calcul des μ_i

* La première partie peut être exécutée soit en virgule fixe, soit en virgule flottante au cas où l'exécution en virgule fixe donnerait lieu à des dépassements de capacité par suite d'un trop grand nombre de classes ou de trop grandes fréquences.

* Les 3 autres parties sont exécutées en virgule flottante.

Entrée dans le sous-programme :

Il faut mettre en 8003 00. m. n.

8002 00. A. B.

8001 une instruction de sortie.

.../...

m = nombre de classes de la distribution

n = n° de la classe choisie comme origine

A = adresse de la 1ère mémoire de la bande dans laquelle sont rangées les valeurs des fréquences.

B = adresse de la 1ère mémoire de la zone de travail ; dimension de cette zone étant de 10 mémoires.

Mise en oeuvre du sous-programme.

La présence d'un 9 en position 7 du registre programme provoque le calcul des s_i et t_i en virgule fixe. Si ce calcul ne trouve lieu à aucun dépassement de capacité, le programme se poursuit jusqu'à son terme : les résultats cherchés sont alors dans la zone B, exprimés en virgule flottante.

{	m	en B
	μ_2	en B + 1
	μ_3	en B + 2
	μ_4	en B + 4

Si, au contraire, il y a dépassement de capacité, l'ordinateur s'arrête par l'ordre 01.9999.9999. Il convient alors de recharger les données, de mettre un 8 en position 7, et de repartir au début. Rien n'est changé pour ce qui est des résultats...

.../...

Présentation des Données.

Valeur des fréquences exprimées en virgule fixe. Les valeurs des fréquences sont chargées dans une bande de mémoires en séquence.

Présentation des Résultats.

Les valeurs de m, μ_2, μ_3, μ_4 sont exprimées en virgule flottante.

Conversion des Résultats.

Si $\bar{x}$ est la valeur de l'abscisse choisie comme origine et h la largeur vraie de chaque classe, les résultats vrais seront :

$$m' = \bar{x} + h m$$

$$\mu_2' = h^2 \mu_2$$

$$\mu_3' = h^3 \mu_3$$

$$\mu_4' = h^4 \mu_4$$

Exemple : Nous reprenons celui qui a été exposé plus haut.

=====

Nous choisissons $A = 800$

$m = 19$

$B = 727$

$n = 13$ ($\bar{x}_0 = 11,3$ mm).

D'où le programme d'entrée et de sortie.

.../...

0700	60	0703	0701	RAG de 00. m. n
0701	15	0704	0702	AAD de 00. A. B
0702	69	0705	$\Delta + 0000$	EDI ordre de sortie dans le ss-pg.
0703	00	0019	0013	
0704	00	0800	0727	
0705	71	0727	9999	Ordre de PFG des résultats.

Données :

Les données sont chargées de la façon suivante

en	800	0000000001
	801	0000000002
	803	0000000004
	...	
	817	0000000019
	818	0000000004

Résultats :

Les résultats obtenus sont :

m	$= -0,12269938$	avec $\bar{x} = 11,3$
μ_2	$= 11,463471$	$h = 10^{-1}$
μ_3	$= -32,526935$	
μ_4	$= 510,92036$	

d'où les valeurs exactes cherchées

m'	$= 11,2877$ (30062)
μ_2'	$= 0,1146$ (3471)
μ_3'	$= -0,0325$ (26935)
μ_4'	$= 0,0510$ (92036)

.../...

ESTIMATION D'UNE DISTRIBUTION EXPERIMENTALE

COURBES de K. PEARSON

K. PEARSON, généralisant la méthode utilisée dans le cas des lois binomiales et hypergéométriques, a recherché de façon systématique les distributions continues dont la densité de répartition $Y = f(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Intégration de cette équation.

La forme des courbes intégrales dépend de la valeur des racines du dénominateur $D = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

1er cas

$$b_1^2 - 4 b_0 b_2 < 0$$

La solution est

$$Y = Y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-k} e^{\frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{x}{a}}$$

2ème cas

$$b_1^2 - 4 b_0 b_2 = 0$$

La solution est

$$Y = Y_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{a}} e^{\frac{(-1) \operatorname{Arctg} \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{a}}}$$

3ème cas

$$b_1^2 - 4 b_0 b_2 > 0$$

Dans ce cas si a_1 et a_2 sont les racines de D, la solution peut prendre 4 formes différentes

$$Y = Y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1\right)^{-\frac{1}{a_1}} \left(\frac{x}{a_2} - 1\right)^{-\frac{1}{a_2}}$$

$$Y = Y_0 \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^{-\frac{1}{a_1}} \left(\frac{x}{a_2} - 1\right)^{-\frac{1}{a_2}}$$

$$Y = Y_0 \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)^{-\frac{1}{a_1}} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{-\frac{1}{a_2}}$$

$$Y = Y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1\right)^{-\frac{1}{a_1}} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{-\frac{1}{a_2}}$$

Dans les 3 cas possible, il convient de souligner les solutions dues à des valeurs particulières des paramètres b_i ; ainsi dans le cas (1) b_1 nul fournira la solution $Y = Y_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-k}$ dans le cas où $b_1 = b_2 = 0$ (racines infinies) la solution sera la courbe en cloche $Y = Y_0 e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.

Les paramètres b_0, b_1, b_2 dépendant des valeurs des moments centrés des distributions, il est donc possible d'établir une classification des courbes $Y = f(x)$ en fonction des valeurs des μ_i ou de combinaisons de celles-ci.

Classification des courbes de Pearson.

Les paramètres choisis pour établir la classification peuvent être (CF. RISSER et TRAYNARD : les principes de la statistique mathématique).

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^2} \quad S = \frac{3(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{3\beta_1 - 2\beta_2 + 6}$$

(I)

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad P = \frac{4S^2(S+1)}{\beta_1(S+2)^2 + 16(S+1)}$$

$$m = \frac{a_1 + a_2}{1}$$

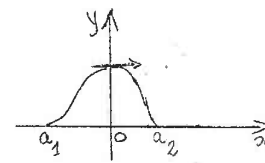
.../...

TABEAU DES COURBES DE PEARSON

S	P	1 - S + P	Types de courbe
> 2	> 0	> 0	① $Y = Y_0 (1 - \frac{x}{a_1})^{-\nu a_1} (1 - \frac{x}{a_2})^{\nu a_2}$
< 0	< 0	> 0	② $Y = Y_0 (1 - \frac{x}{a_1})^{-\nu a_1} (\frac{x}{a_2} - 1)^{\nu a_2}$
$0 < < 2$	> 0	> 0	③ $Y = Y_0 (1 - \frac{x}{a_1})^{-\nu a_1} (1 - \frac{x}{a_2})^{\nu a_2}$
> 2	> 0	< 0	④ $Y = Y_0 (\frac{x}{a_1} - 1)^{-\nu a_1} (1 - \frac{x}{a_2})^{\nu a_2}$
$0 < 2$	> 0	< 0	⑤ $Y = Y_0 (\frac{x}{a_1} - 1)^{-\nu a_1} (\frac{x}{a_2} - 1)^{\nu a_2}$
< -1	< 0	< 0	⑥ $Y = Y_0 (1 - \frac{x}{a_1})^{-\nu a_1} (1 - \frac{x}{a_2})^{\nu a_2}$
< -1	> 0	> 0	⑦ $Y = Y_0 (1 + \frac{x}{a_2})^{-k} e^{\nu \arctg \frac{x}{a}}$
β_1	β_3		
0	> 3		⑧ $Y = Y_0 (1 + \frac{x^2}{a^2})^{-k}$
0	$1 < < 3$		⑨ $Y = Y_0 (1 - \frac{x^2}{a^2})^{-k}$
			⑩ $Y = Y_0 (1 + \frac{x}{a})^{\nu a} e^{-\nu x}$
$\beta_1(s+2)^2 + 16(s+1) = 0$			⑪ $Y = Y_0 (1 - \frac{x}{a})^{-\nu a} e^{\left(-\frac{\nu a}{1-x}\right)}$
$\beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 3$			⑫ $Y = Y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

CARACTERISTIQUES DE CES COURBES

TYPE 1

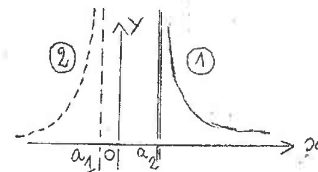


$$a_1 < 0 < a_2$$

$$a_1 \leq x \leq a_2$$

$x = a_1, y = 0$ et $x = a_2, y = 0$ sont 2 points d'arrêts maximum pour $x = 0$.

TYPE 2



$$a_1 < 0 < a_2$$

$$\nu < 0$$

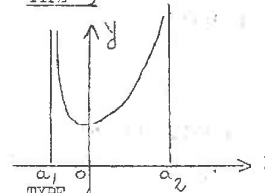
$$1^0) a_2 < x$$

$x = a_2$ et $y = 0$ sont 2 asymptotes : courbe ①

$$2^0) x < a_1$$

$x = a_1$ et $y = 0$ sont 2 asymptotes : courbe ②

TYPE 3



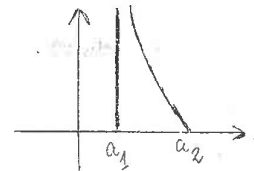
$$a_1 < 0 < a_2 ; \quad \nu < 0$$

$$a_1 < x < a_2$$

$x = a_1, y = 0$ et $x = a_2, y = 0$ sont 2 asymptotes

$x = 0$ donne un minimum

TYPE 4



$$0 < a_1 < a_2$$

$$\nu > 0$$

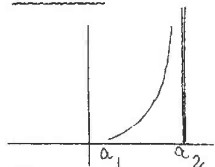
$$a_1 < x < a_2$$

$x = a_1$ est une asymptote

$x = a_2 ; y = 0$ est un point d'arrêt.

.../...

TYPE 5

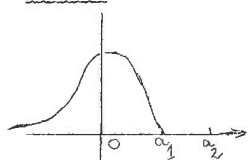


$$0 < a_1 < a_2 \quad \nu < 0 \quad a_1 < x < a_2$$

$x = a_2$ est une asymptote

$x = a_1, y = 0$ est un point d'arrêt.

TYPE 6



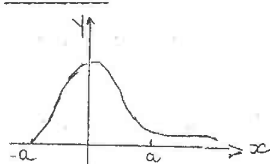
$$0 < a_1 < a_2 \quad \nu < 0 \quad x < a_1$$

$x = 0$ est un maximum

$y = 0$ est une asymptote

$x = a_1, y = 0$ est un point d'arrêt.

TYPE 10



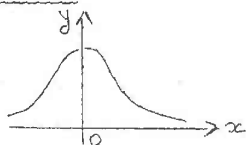
$$a > 0; \quad \nu > 0 \quad x > -a$$

$x = 0$ donne un maximum

$y = 0$ est une asymptote

$x = -a, y = 0$ est un point d'arrêt

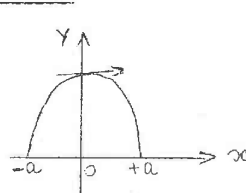
TYPE 8



$x = 0$ est un maximum

la courbe est symétrique par rapport à Oy
illimitée à droite et à gauche.

TYPE 9



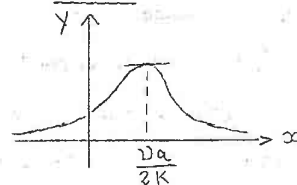
$x = \pm a, y = 0$ sont des points d'arrêt.

$x = 0$ donne un maximum

La courbe est symétrique.

.../...

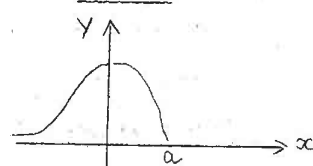
TYPE 7



Courbe dissymétrique illimitée ; maximum pour

$$x = \frac{\nu a}{2K} \quad \text{L'axe des } x \text{ est une asymptote.}$$

TYPE 10



On se ramènera toujours au cas

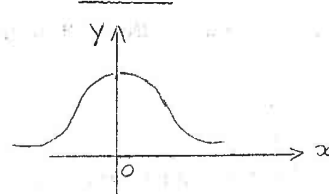
$$a > 0; \quad \nu > 0$$

$x < a; \quad x = 0$ est un maximum

$x = a; y = 0$ est un point d'arrêt

$y = 0$ est une asymptote.

TYPE 11



Courbe en cloche.

.../...

Utilisation Pratique des Résultats

En présence d'une distribution expérimentale, on commencera par déterminer les coefficients de Pearson β_1 et β_2 ; la valeur de ceux-ci indiquant le type de courbe susceptible de lui être ajustée. Pour faciliter cette recherche, nous avons été conduit à tracer le diagramme de Pearson, diagramme représenté dans la plan des β_1 , β_2 sur lequel il suffit de reporter le point de coordonnées (β_1, β_2) pour connaître le type de courbe. Une fois le type de courbe reconnu, on détermine les paramètres de l'équation tels que les premiers moments des deux distributions (observée et ajustée) soient les mêmes. Cette détermination se ramène à la résolution d'un certain nombre d'équations spécifiques du type de courbe.

Il reste alors à déterminer le paramètre Y_0 et à tester la validité de l'estimation.

A - TRACE DU DIAGRAMME DE PEARSON.

Il suffit de traduire les égalités ou inégalités caractéristiques des différents cas par des graphiques rapportés à deux axes rectangulaires dont on ne conserve que le quadrant positif.

Valeurs caractéristiques des paramètres. Courbes correspondantes

$S = \infty$	$3\beta_1 - 2\beta_2 + 6 = 0$	Courbe 1
$S = 2$	$6\beta_1 - 5\beta_2 + 9 = 0$	Courbe 2
$S = 0$	$\beta_1 - \beta_2 + 1 = 0$	Courbe 3
$S = -1$	$3\beta_1 - 4\beta_2 = 0$	Courbe 4

.../...

$$1 - 3 + p = 0 \quad \beta_1(\beta_2 + 3)^2(9\beta_1 - 8\beta_2 + 12) - 4(3\beta_1 - 4\beta_2)(6\beta_1 - 5\beta_2 + 9)^2 = 0 \quad \text{courbe 5}$$

$$P \Rightarrow \infty \quad 4\beta_1(\beta_2 + 3)^2 - 16(3\beta_1 - 4\beta_2)(3\beta_1 - 2\beta_2 + 6) = 0 \quad \text{courbe 6}$$

Les 4 premières courbes sont des droites, la 5ème est une quartique.

La 6ème une cubique.

Les dimensions du diagramme sont :

en β_1 de 0 à 15

en β_2 de 0 à 15.

① RECHERCHE DES RACINES DES COURBES 5 et 6.

Cas de la cubique.

$$① \quad 4 \beta_1 (\beta_2 + 3)^2 - 16 (3\beta_1 - 4\beta_2) (3\beta_1 - 2\beta_2 + 6) = 0$$

$$① \quad \text{ordonnée en } \beta_2 \text{ s'écrit} \quad (32 - \beta_1) \beta_2^2 - (78\beta_1 + 96) \beta_2 + \beta_1 (36\beta_1 + 63) = 0$$

Nous résolvons le trinôme en β_2 en faisant varier β_1 , pris comme paramètre, de 0,5 en 0,5 à partir de -5 et jusqu'à 15.

L'équation en β_2 est un trinôme dont les racines sont données en (A₁)

La courbe est représentée sur le diagramme (1)

La courbe est limitée en haut à gauche au point (-4, -3) qui est un point de rebroussement.

Cas de la quartique.

$$② \quad \beta_1 (\beta_2 + 3)^2 (9\beta_1 - 8\beta_2 + 12) - 4 (3\beta_1 - 4\beta_2) (6\beta_1 - 5\beta_2 + 9)^2 = 0$$

② ordonnée en β_2 s'écrit

$$\beta_2^3 (400 - 8\beta_1) + \beta_2^2 (9\beta_1^2 - 1296\beta_1 - 1440) + \beta_2 (1350\beta_1^2 + 2808\beta_1 + 1296) - \beta_1 (432\beta_1^2 + 1215\beta_1 + 864) = 0$$

Nous résolvons cette équation en prenant β_1 comme paramètre et en le faisant varier de -5,5 à +15 de 0,5 en 0,5.

.../...

Les racines du polynôme du 3ème degré en β_2 sont données en (A₂)

Le point (0; 1,8) est un point double : tangente verticale.

.../...

CUBIQUE

β_1	β_2^1	β_2^2
-4,5	0	0
-4	-3	-3
-3,5	-2,433	-2,553
-3	-1,800	-2,143
-2,5	-1,115	-1,754
-2	-0,383	-1,381
-1,5	0,394	-1,021
-1	1,217	-0,672
-0,5	2,086	-0,332
0	3	0
0,5	3,961	0,325
1	4,970	0,643
1,5	6,029	0,954
2	7,139	1,261
2,5	8,303	1,562
3	9,521	1,858
3,5	10,798	2,150
4	12,134	2,437
4,5	13,534	2,720
5	15	3
5,5	16,535	3,276
6	18,144	3,549
6,5	19,829	3,818
7	21,596	4,084
7,5	23,449	4,347
8	25,392	4,608
8,5	27,433	4,865
9	29,575	5,120

β_1	β_2^1	β_2^2
9,5	31,827	5,373
10	34,195	5,623
10,5	36,688	5,870
11	39,313	6,116
11,5	42,080	6,359
12	45	6,6
12,5	48,084	6,839
13	51,345	7,076
13,5	54,797	7,311
14	58,456	7,544
14,5	62,339	7,775
15	66,466	8,005

.../...

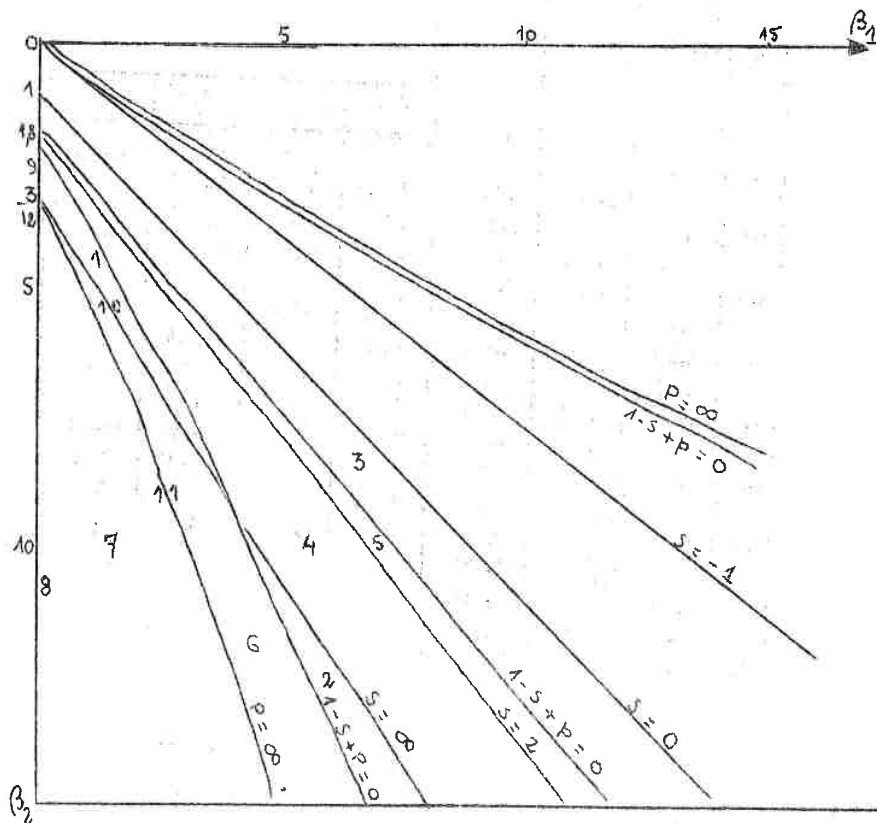
QUARTIQUE

β_1	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_2^{(2)}$	$\beta_2^{(3)}$
-5,5	-4,646	0	0
-5	-4,091	0	0
-4,5	-3,540	0	0
-4	-3,005	0	0
-3,5	-2,561	0	0
-3	-2,155	0	0
-2,5	-1,768	0	0
-2	-1,395	0	0
-1,5	-1,033	0	0
-1	-0,681	0	0
-0,5	-0,337	0	0
0	0	1,8	1,8
0,5	0,330	2,698	2,239
1	0,654	3,526	2,777
1,5	0,973	4,371	3,326
2	1,129	5,240	3,879
2,5	1,160	6,137	4,436
3	1,900	7,061	4,993
3,5	2,200	8,015	5,552
4	2,497	9	6,112
4,5	2,790	10,016	6,672
5	3,079	11,064	7,232
5,5	3,365	12,145	7,793
6	3,648	13,259	8,354
6,5	3,928	14,409	8,915
7	4,205	15,595	9,477
7,5	4,479	16,818	10,038
8	4,750	18,079	10,600
8,5	5,019	19,379	11,161

β_1	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_2^{(2)}$	$\beta_2^{(3)}$
9	5,286	20,720	11,723
9,5	5,550	22,103	12,285
10	5,812	23,529	12,847
10,5	6,071	25	13,409
11	6,329	26,518	13,971
11,5	6,584	28,084	14,533
12	6,837	29,700	15,095
12,5	7,089	31,367	15,657
13	7,339	33,088	16,219
13,5	7,586	34,865	16,781
14	7,832	36,700	17,343
14,5	8,076	38,595	17,905
15	8,318	40,553	18,468

.../...

DIAGRAMME DE PEARSON
=====



②

Interprétation du diagramme.

Les seules régions intéressantes sont les régions numérotées : le numéro de la région correspondant au numéro de la courbe cherchée.

Exemple : Ainsi pour $\beta_1 = 6$ le point figuratif conduit

$$\beta_2 = 10$$

a choisi une courbe du type 4 : $Y = Y_0 \left(\frac{x}{a_1} - 1 \right)^{-1} a_1 \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{1/a_2}$

Cas limite :

Courbe type ⑧ : partie de l'axe β_2 pour $\beta_2 > 3$

Courbe type ⑨ : partie de l'axe β_2 pour $1 < \beta_2 < 3$

Courbe type ⑩ : frontière entre les régions ① et ⑥

Courbe type ⑪ : frontière entre les régions ⑥ et ⑦

Courbe type ⑫ : point défini par $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 3$.

Détermination des Paramètres :

Les formules permettant la détermination des paramètres sont différents suivant le type de courbes.

Cas des courbes 1 à 6 :

Posons $S = p_1$ et p_2

$p = p_1$ et p_2

.../...

Les formules à utiliser sont

$$(a_2 - a_1)^2 = \frac{\mu_2 s^2 (s+1)}{p} ; \quad \nu = \frac{s-2}{a_2 - a_1}$$

$$p_1 = 1 - \nu a_1 ; \quad p_2 = 1 + \nu a_2$$

Cas de la courbe 7 :

$$k = 1 - \frac{s}{2} ; \quad p = \frac{s^2 + \nu^2}{4} ; \quad a^2 = \frac{-s^2 (s+1) \mu_2}{s^2 + \nu^2}$$

Cas de la courbe 8

$$p = \frac{s^2}{4} ; \quad k = 1 - \frac{s}{2} ; \quad a^2 = - (s+1) \mu_2$$

Cas de la courbe 9 :

$$p = \frac{s^2}{h} ; \quad p_1 = p_2 ; \quad k = \frac{s}{2} - 1 ; \quad a^2 = \mu_2 (s+1)$$

Cas de la courbe 10 :

$$\nu = \frac{2\mu_2}{\mu_3} ; \quad a\nu = \frac{h - \beta_1}{\beta_1}$$

Cas de la courbe 11 :

$$a\nu = 2 - s ; \quad a^2 = -\frac{\mu_2 s^2 (s+1)}{(s-2)^2}$$

Cas de la courbe 12 :

$$\sigma^2 = \mu_2$$

.../...

Détermination du paramètre Y_0 :

Le paramètre Y_0 sera obtenu en égalant l'aire de la courbe au contenu de la collection

$$\int_{a_1}^{a_2} Y d\lambda = N \longrightarrow Y_0$$

Connaissant en outre la valeur des moyennes de la distribution expérimentale d'une part, de la distribution estimée d'autre part, il est alors facile de faire coïncider les deux distributions. Il reste alors pour terminer l'estimation à tester la validité des résultats obtenus par un test, test du χ^2 par exemple, entre les fréquences expérimentales et les fréquences estimées.

.../...

ESTIMATION D'UNE DISTRIBUTION

Exemple 1

Données : Résultats d'essais d'emboutissage sur tôles plates :

x_i mesure la profondeur de pénétration d'un poinçon avant rupture. L'origine choisie $\rightarrow$ à $x_i = 11,2$

9,8	1
9,9	2
10	1
10,1	3
10,2	1
10,3	6
10,4	5
10,5	10
10,6	11
10,7	24
10,8	33
10,9	40
11	102
11,1	104
11,2	113
11,3	101
11,4	40
11,5	24
11,6	4
11,7	1
11,8	0
11,9	1
X_i, mm	f_i

Paramètres statistiques calculés

$$m = -1,155$$

$$\mu_2 = 7,356$$

$$\mu_3 = -23,885$$

$$\mu_4 = 313,054$$

Coefficients de Pearson.

$$\beta_1 = 1,434$$

$$\beta_2 = 5,786$$

Coefficients secondaires.

$$s = -15,821$$

$$p = -404,389$$

Conclusions :

=====

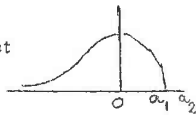
La forme de la courbe est

$$\text{équation } Y = Y_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^b$$

$$\left(1 - \frac{x}{a'}\right)^{-b'}$$

$$\text{avec } 0 < a < a'$$

$$\text{et } b, b' > 0$$



.../...

CALCUL DES PARAMETRES

=====

Courbe type 6 relative à la classe d'épaisseur (1)

Les conditions à remplir sont

$$0 < a_1 < a_2$$

$$v < 0$$

* Calcul de p_1 et p_2

$$P^2 - sP + p = 0$$

$$s = -15,821$$

$$p = -404,389$$

$$\Delta = 1867,860$$

$$\sqrt{\Delta} = 43,219$$

$$(p_{1,2}) = \frac{-15,821 \pm 43,219}{2}$$

$$p_{1,2} = (12,700 ; -30,520)$$

* Calcul de v

$$(a_2 - a_1)^2 = \mu_2 \frac{s^2 (s+1)}{p} = 67,5$$

$$a_2 - a_1 = 8,21$$

$$v = \frac{s-2}{a_2 - a_1} = -2,1680$$

.../...

* Calcul de a_1 et a_2

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1 - p_1}{D_1} = 5,85 \\ a_2 &= \frac{p_2 - 1}{D} = 14,06 \end{aligned}$$

d'où l'équation de la courbe

$$Y = Y_0 \left(1 - \frac{x}{5,85}\right)^{12,70} \left(1 - \frac{x}{14,06}\right)^{-30,52}$$

CALCUL DE Y_0

=====

Courbe type = 8

Classe (1)

$$Y = Y_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^b \left(1 - \frac{x}{a'}\right)^{-b'}$$

avec $0 < a < a'$ et $b, b' > 0$

Caractéristiques de la courbe

$Y = 0$ est une asymptote

$x = a$ est un point d'arrêt

$x = 0, y = y_0$ est un maximum.

.../...

Calcul de $I = \int_{-\infty}^a \frac{Y}{Y_0} dx$

1er changement de variable.

$$x = a' \left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{Y}{Y_0} = \left(\frac{1}{t}\right)^{-b'} \left(1 - \frac{a'}{a} \left(1 - \frac{1}{t}\right)\right)^b$$

$$dx = \frac{a' dt}{t^2}$$

$$I = \int_0^{a'-a} \frac{1}{a'} t^{b'-2} \left[\frac{a-a'}{a} + \frac{a'}{a} \frac{1}{t} \right]^b dt$$

2ème changement de variable.

$$t = \frac{a'}{a'-a} u$$

$$dt = \frac{a'}{a'-a} du \quad t^{b'-2} = \left(\frac{a'}{a'-a}\right)^{b'-2} u^{b'-2}$$

$$\left[\frac{a-a'}{a} + \frac{a'}{a} \frac{1}{t} \right] = \frac{a'-a}{a} \left[\frac{1-u}{u} \right]$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{a'-a}{a}\right)^b \left(\frac{a'}{a'-a}\right)^{b'-2} \frac{a'^2}{a'-a} u^{b'-2} u^{-b} (1-u)^b du$$

.../...

$$I = \left(\frac{a' - a}{a} \right)^b \left(\frac{a'}{a' - a} \right)^{b'} (a' - a) B(b' - b - 1; b + 1).$$

$$\text{D'où } Y_o = \frac{N}{I}$$

Applications Numériques

$$a = 5,85 \quad b = 12,70 \quad N = 627$$

$$a' = 14,06 \quad b' = 30,52$$

$$I = \left(\frac{821}{585} \right)^{12,70} \times \left(\frac{1.406}{821} \right)^{30,52} \times 8,21 \times B[16,82; 13,70]$$

$$\text{D'où } Y_o = \frac{627}{6,03} = 104$$

.../...

Superposition des distributions :

$$\text{moyenne expérimentale } m' = -1,155$$

$$\text{moyenne estimée } m = 1,258$$

Une translation de 0,103 vers la droite conduira alors à la superposition des 2 courbes.

Nouvelle écriture de l'équation de la courbe estimée

$$Y = 104 \left(1 - \frac{x}{5,70} \right)^{12,70} \left(1 - \frac{x}{14,04} \right)^{-30,52}$$

Valeurs des fréquences de la distribution estimée.

- 14 (9,8)	0
- 13	1
- 12	1
- 11	2
- 10	3
- 9	5
- 8	7
- 7	12
- 6	18
- 5	28
- 4	42
- 3	61
- 2	81
- 1	99
0(11,2)	104
1	86
2	47

3	12
4	1
5 (11,7)	0

(Voir le graphique pour la comparaison de 2 distributions).

.../...

Validité de l'estimation

La validité de l'estimation est testée au moyen d'un χ^2 à 14 degrés de liberté (19 fréquences, 4 paramètres estimés).

La valeur trouvée est $\chi^2 = 47,5$, valeur qui conduit à rejeter

l'estimation.

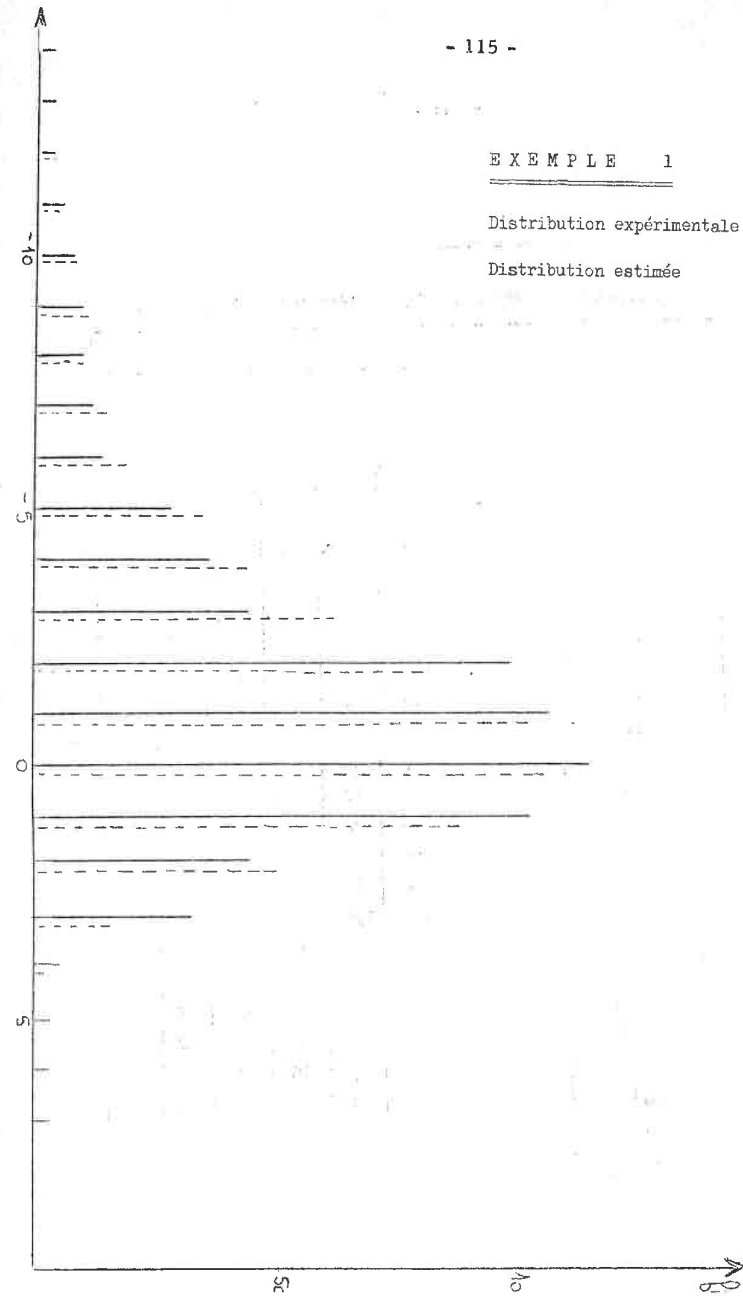
Le seuil à 5 % correspond à un χ^2 de 23,68 ; en conséquence l'estimation trouvée doit être rejetée.

.../...

EXEMPLE 1

Distribution expérimentale ———

Distribution estimée - - - - -



QUELQUES EXEMPLES TRAITES.

1°) Distributions Données

(concernant l'emboutissage de tôles de classe d'épaisseur différente).

Profondeur en mm	1	2	3	4	5	6	7	8
9,8						1		
9,9						0	1	
10	1				1	2	1	
10,1	0	1	2	2	1	0	0	
10,2	2	2	6	2	1	3	0	
10,3	1	4	10	4	2	2	0	
10,4	5	1	10	11	3	3	2	
10,5	4	3	15	10	6	4	3	
10,6	7	9	12	17	2	13	3	
10,7	4	4	15	8	11	16	5	
10,8	19	9	22	18	8	21	8	
10,9	18	18	19	13	4	27	8	
11	26	13	33	20	12	26	10	
11,1	54	24	26	17	9	18	6	
11,2	76	33	43	22	10	14	10	
11,3	80	52	66	65	17	26	22	
11,4	66	48	110	145	39	44	14	
11,5	46	44	152	236	84	91	34	
11,6	22	16	78	163	100	153	46	
11,7	12	22	28	58	59	171	83	
11,8		19	8	21	34	127	56	
11,9		4	3	4	18	75	44	
12			1	3	10	36	20	
12,1			1	1	4	5	3	
12,2						3	2	
12,3						2	1	

.../...

VALEURS DES MOMENTS CENTRES

N° de l'échantillon	μ_2	μ_3	μ_4
1	7,468	- 21,782	272,753
2	11,463	- 32,527	510,920
3	12,844	- 55,277	650,477
4	9,644	- 51,761	564,956
5	11,940	- 63,061	817,597
6	13,595	- 70,264	928,814
7	12,971	- 68,345	934,732

VALEURS DES PARAMETRES β_1 et β_2

N° de l'échantillon	β_1	β_2	N° de la courbe
1	1,139	4,891	6
2	0,702	3,888	1
3	1,442	3,943	4
4	2,988	6,075	4
5	2,336	5,735	4
6	1,966	5,027	4
7	2,141	5,556	1

.../...

Le diagramme de PEARSON permet donc, arrivé à cet endroit des calculs, de dire que les échantillons n° 3, 4, 5, 6 ne peuvent être estimés par une courbe de PEARSON; les courbes type 4 admettant une asymptote verticale.

Cas de l'échantillon n° 1 :

$$\text{Equation de la courbe trouvée} = Y = 79 \left(1 - \frac{x}{4,967}\right)^{4,055} \\ \left(1 - \frac{x}{56,714}\right)^{-51,455}$$

Un test de χ^2 rejette ici encore l'estimation trouvée.

Les échantillons n° 2 et 7 donnent lieu aux mêmes conclusions.

.../...

CONCLUSION =====

De façon générale, il semble exceptionnel dans les exemples pratiques, de pouvoir ajuster une courbe de Pearson à une distribution donnée, en se limitant aux méthodes théoriques indiquées. Le point déterminé par le couple des valeurs des paramètres β_1 et β_2 sur le diagramme de Pearson permet de répondre.

* Il est impossible d'ajuster une courbe de Pearson à la distribution donnée si ce point tombe en dehors des régions utiles du diagramme ou si la forme de la courbe théorique lui correspondant est sans parenté avec l'histogramme expérimental. Au cas où la réponse est favorable, il convient alors de tester la validité de l'estimation.

La série statistique expérimentale observée ne représentant qu'imparfaitement l'ensemble dont elle est issue, le domaine d'existence probable du point (β_1, β_2) ne se réduit pas à un point, mais à une surface : La connaissance de cette surface pouvant faciliter les calculs.

=====



VU et APPROUVE

NANCY le 8 JUIN 1961

Le Doyen de la Faculté
des Sciences :

M. ROUBAULT

VU et
PERMIS D'IMPRIMER
NANCY le 10 Juin 1961
Le Recteur

Président du Conseil de
l'Université de NANCY

P. IMBS