

76/649
Sc. N. 76/31B

METHODE DU GRADIENT EN PROGRAMMATION LINEAIRE



THESE

pour l'obtention du

DOCTORAT DE SPECIALITE D'INFORMATIQUE

SOUTENUE LE 23 JUIN 1976

PAR

Roger COHEN

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1



D 095 182180 8

MEMBRES DU JURY

Président : M. J. LEGRAS
Examineurs : M. P. BOYER
Mle M.C. PORTMANN

METHODE DU GRADIENT EN PROGRAMMATION LINEAIRE



THESE

pour l'obtention du

DOCTORAT DE SPECIALITE D'INFORMATIQUE

SOUTENUE LE 23 JUIN 1976

PAR

Roger COHEN

MEMBRES DU JURY

Président : M. J. LEGRAS
Examineurs : M. P. BOYER
Mlle M.C. PORTMANN

S O M M A I R E

	<i>Pages</i>
<u>INTRODUCTION</u>	1
I - <u>METHODE DU GRADIENT PROJETE EN PROGRAMMATION LINEAIRE</u>	2
1. Conditions de Kuhn et Tucker.....	2
2. Recherche d'une direction de montée admissible.....	4
3. Recherche de la nouvelle solution réalisable $\bar{X}_1$	8
4. Méthode du gradient projeté : Algorithme GRAPRO.....	10
II - <u>METHODE DU GRADIENT REDUIT EN PROGRAMMATION LINEAIRE</u>	13
1. Variables de base et variables hors-base.....	14
2. Gradient réduit Δ_L	15
3. Gradient réduit "étendu" Δ	15
4. Méthode du gradient réduit : Algorithme GRARED.....	17
5. Comparaison des deux méthodes.....	18
III - <u>METHODE DE RESOLUTION D'UN PROGRAMME LINEAIRE SOUS FORME MIXTE PAR LA METHODE DU GRADIENT</u>	20
1. Phase d'initialisation.....	20
2. Phase de "saturation".....	23
3. Phase d'optimisation.....	24
4. Exemple.....	24
IV - <u>COMPARAISON AVEC LES METHODES DU SIMPLEX</u>	33
1. Identité des deux méthodes dans le cas standard.....	33
A - Quelques rappels sur la méthode du simplex.....	33
a) Forme standard d'un programme linéaire.....	33
b) Programme de base - Mise sous forme simpliciale...	33

c) Algorithme du Simplex.....	35
d) Recherche d'une solution réalisable : phase d'initialisation.....	36
B - Comparaison avec la méthode du Gradient.....	36
C - Exemple.....	40
2. Différence des deux méthodes dans le cas général des problèmes mixtes.....	44
a) Mise sous forme standard du programme linéaire (P).....	44
b) Conditions de Kuhn et Tucker.....	47
c) Recherche de la nouvelle solution réalisable.....	48
d) Exemple.....	52
3. Identité de la méthode du Gradient et de la méthode duale du Simplex.....	54
A - Quelques rappels sur la méthode duale du Simplex.....	54
a) Définition et propriétés.....	54
b) Méthode duale du Simplex.....	55
B - Comparaison avec la méthode du Gradient.....	57
a) Caractérisation de l'optimum.....	58
b) Recherche d'une nouvelle solution réalisable.....	58
C - Exemple.....	60
Conclusion.....	62
 V - <u>POINT DE VUE INFORMATIQUE : EVOLUTION DE LA MATRICE P_m^{-1}</u>	64
1. Position du problème.....	64
2. Evolution de P_m^{-1} quand une nouvelle contrainte est saturée.....	64
3. Evolution de P_m^{-1} dans le cas où n contraintes sont saturées.....	71

Je tiens à assurer de ma profonde et respectueuse gratitude Monsieur J. LEGRAS, Professeur à la Faculté des Sciences de NANCY, d'avoir bien voulu me prendre en charge pour ce travail, de m'avoir conseillé et encouragé tout au long de mes recherches.

Je remercie Monsieur P. BOYER ainsi que Mademoiselle M.C. PORTMANN qui ont bien voulu me faire l'honneur de participer à mon jury de thèse.

INTRODUCTION

Il s'agit d'une synthèse entre les méthodes générales de programmation non linéaire avec contraintes et les méthodes classiques de programmation linéaire.

Plus précisément, on se propose d'étudier les méthodes de montée : Gradient réduit, Gradient projeté dans le cas linéaire et de les comparer avec les méthodes du simplex.

On supposera que :

- aucune contrainte n'est redondante
- toutes les contraintes sont compatibles.

De plus, on se contentera d'étudier les problèmes de maximisation.

Si l'on doit minimiser une certaine fonction Z , on se ramènera au cas précédent en cherchant $\text{Max}(-Z)$. (Les méthodes de montée développées seront, dans ce dernier cas, des méthodes de descente).

<

I - METHODE DU GRADIENT PROJETE EN PROGRAMMATION LINEAIRE

1. CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER

Soit (P) le programme linéaire :

$$\begin{cases} A.X = B \\ A'.X \geq B' \\ \text{Max } C.X \end{cases}$$

où : . X, B et B' sont respectivement des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^{p'}$

. C est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^n$

. A une matrice à p lignes et n colonnes

. A' une matrice à p' lignes et n colonnes.

(P) a donc p contraintes bilatérales et p' contraintes unilatérales

On suppose que : $p' < n$.

Soit $\bar{X}$ une solution réalisable de (P) qui sature q contraintes unilatérales.

Posons :

$$\cdot \varphi_1(x) = A_1 X - B_1 \quad l = 1, \dots, p$$

$$\cdot \varphi_k(x) = A'_k X - B'_k \quad k = 1, \dots, p'$$

$$\cdot f(X) = CX$$

. L l'ensemble des indices l.

. K l'ensemble des indices k

. J l'ensemble des indices j correspondant aux contraintes unilatérales saturées. $J \subset K$. ($j = 1, \dots, q$)

. $f'(X)$, $\varphi'(X)$ les gradients respectifs de $f(x)$ et $\varphi(x)$
Ces gradients sont constants et indépendants de X.

Les conditions de Kuhn et Tucker s'énoncent de la façon suivante :

Pour que $\bar{X}$, solution réalisable de (P), soit solution optimale de (P), il faut et il suffit qu'il existe p coefficients λ_1 (appelés coefficients de Lagrange) et q coefficients μ_j (appelés coefficients de Kuhn et Tucker) tels que :

$$\begin{cases} f'(\bar{X}) = \sum_{l \in L} \lambda_l \varphi'_l(\bar{X}) + \sum_{j \in J} \mu_j \varphi'_j(\bar{X}) \\ \mu_j \leq 0 \quad \forall j \in J \end{cases}$$

Notons qu'en programmation linéaire, $\bar{X}$ est solution optimale si n contraintes exactement sont saturées.

Posons :

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n-p} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} A \\ A'J \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

Les conditions de Kuhn et Tucker donnent :

$$\begin{cases} t_C = t_{P.M.} \quad (1) \\ \mu \leq 0 \end{cases}$$

On supposera, dans toute cette partie qu'à chaque étape, on a exactement n contraintes de type égalité

P est donc une matrice carrée.

Nous obtenons alors la caractérisation de l'optimum :

$$\bar{X} \text{ optimale} \iff (CP^{-1})^i \leq 0 \quad i = p+1, \dots, n \quad (I_1)$$

Si la condition (I_1) n'est pas vérifiée, le choix d'indices correspondant aux contraintes saturées est mauvais.

On se propose, dans les paragraphes suivants, de déterminer un autre ensemble d'indices correspondant à un vecteur $\bar{X}_1$ "meilleur" que $\bar{X}$, restant réalisable pour le programme linéaire.

2. RECHERCHE D'UNE DIRECTION DE MONTEE ADMISSIBLE

Supposons que la solution réalisable $\bar{X}$ ne soit pas optimale. Il existe des coefficients μ_j non négatifs ou nuls.

$$\text{Posons : } \begin{cases} \mu_i = \max_{j \in J} \mu_j \\ J' = J / \{i\} \end{cases}$$

où i est l'indice de la contrainte correspondante au coefficient μ_i .

Considérons le programme linéaire suivant où la variable est le vecteur D de $\mathbb{R}^n$ et h est fixé, positif :

$$\begin{cases} \varphi_1(\bar{X} + hD) = 0 & \text{pour } l \in L \\ \varphi_j(\bar{X} + hD) \geq 0 & \text{pour } j \in J' \\ \sum_{s=1}^n d_s^2 - \delta^2 = 0 & (\text{où } \delta^2 \text{ est donnée et } d_s \text{ la composante d'indice } s \text{ de } D) \\ \varphi_i(\bar{X} + hD) \geq 0 \\ \varphi_k(\bar{X} + hD) \geq 0 & \text{pour } k \in (K / J) \\ \text{Max } f(\bar{X} + hD) \end{cases}$$

Si l'on sature les contraintes φ_j et, compte tenu des notations précédentes, le problème précédent s'écrit :

$$\begin{cases} A.D = 0 \\ A'_J D = 0 \\ \sum_{s=1}^n d_s^2 - \delta^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A'_1 D \geq 0 \\ A'_k (\bar{X} + hD) \geq 0 & \text{pour } k \in K/J \\ \text{Max } C.D \end{cases}$$

Les conditions de Kuhn et Tucker relatives à l'ensemble des contraintes saturées s'écrivent :

$$\begin{cases} {}^t P' . M' + 2 \mu_0 D = {}^t C \\ \mu'_j \leq 0 \text{ pour } j \in J' \end{cases}$$

où P' est la matrice P à laquelle on a enlevé la ligne d'indice i et M' le vecteur $\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}$ formé des coefficients de Lagrange et de Kuhn et Tucker relatifs au système de contraintes précédent.

Posons : $A'_i D = Z_i$

Nous allons montrer :

- a) D est une direction de montée admissible
- b) D est compatible avec la liaison libérée : $Z_i > 0$
quelque soit le signe des coefficients μ'_j

a) Rappelons que D vérifie le système : $P'D = 0$

Compte tenu des conditions précédentes, on obtient :

$$C.D = {}^t M' . P' . D + 2\mu_0 {}^t D . D \quad \text{soit :}$$

$$C.D = 2\mu_0 {}^t D . D$$

Nous montrerons, dans le calcul explicite de D , que μ_0 étant un coefficient de proportionnalité, il peut être choisi strictement positif.

Donc : $CD \geq 0$

$$\text{Or : } f(\bar{X} + hD) - f(\bar{X}) = hC.D$$

h étant positif par hypothèse, on en déduit :

$$\underline{f(\bar{X} + hD) \geq f(\bar{X})}$$

b) Considérons le vecteur $M'' = \begin{pmatrix} M' \\ 0 \end{pmatrix}$

La dernière composante de M'' est celle d'indice i .

$$\text{Soit } Z = \begin{pmatrix} 0 \\ Z_i \end{pmatrix}$$

$$\text{Le système : } \begin{cases} P' \cdot D = 0 \\ A_i' \cdot D = Z_i \\ {}^t P' \cdot M' + 2\mu_o D = {}^t C \end{cases}$$

$$\text{s'écrit : } \begin{cases} P \cdot D = Z \\ {}^t P \cdot M'' + 2\mu_o D = {}^t C \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } P \cdot {}^t C - P \cdot {}^t P \cdot M'' = 2 \mu_o \cdot Z \quad (a)$$

. Si la contrainte φ_i était saturée, on aurait un vecteur D et un vecteur M vérifiant le système :

$$\begin{cases} P \cdot D = 0 \\ {}^t P \cdot M + 2\mu_o D = {}^t C \end{cases}$$

$$\text{Soit : } P \cdot {}^t C - P \cdot {}^t P \cdot M = 0 \quad (b)$$

Retranchons membre à membre (a) et (b) :

$$P \cdot {}^t P \cdot (M - M'') = 2 \mu_o \cdot Z$$

$$\text{soit : } {}^t (M - M'') \cdot P \cdot {}^t P \cdot (M - M'') = 2 \mu_o {}^t (M - M'') \cdot Z$$

(en prémultipliant les deux membres de l'égalité précédente par ${}^t (M - M'')$).

Le premier membre de cette relation étant positif,

$$2 \mu_o {}^t (M - M'') \cdot Z \gg 0$$

Or, le seul élément de Z non nul est Z_i d'où :

$$\mu_i Z_i \geq 0 \quad (\mu_o > 0).$$

Par hypothèse, $\mu_i > 0$ d'où : $Z_i > 0$

- Réciproquement, si Z_i était négatif, $\mu_i Z_i$ étant positif, ou nul, μ_i serait négatif ou nul et on garderait la contrainte d'indice i saturée.

• Calcul de D

Considérons le système précédent donnant D et M' :

$$\begin{cases} P' \cdot D = 0 \\ {}^t P' \cdot M' + 2 \mu_0 D = {}^t C \end{cases}$$

choisissons une des variables comme variable libre

D se décompose en : D_I (ensemble des variables dites de "base")

D_ρ (variable dite "hors base" ou "libre")

Le système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} P_I \cdot D_I + R_I \cdot D_\rho = 0 \\ {}^t P_I \cdot M' + 2 \mu_0 D_I = {}^t C^I \\ {}^t R_I \cdot M' + 2 \mu_0 D_\rho = C^0 \end{cases}$$

où $P' = (P_I \ R_I)$, R_I étant la colonne d'indice ρ .

P_I est donc une matrice carrée.

Notons que le choix de la variable libre est, à priori, quelconque. Toutefois, dans certains cas, on ne peut prendre automatiquement n'importe laquelle ; en particulier, lorsque le programme linéaire comporte des contraintes de signes (cas du simplex).

On en déduit : $D_I = - P_I^{-1} R_I D_\rho$ de la première équation.

La deuxième équation donne :

$${}^t P_I M' = {}^t C^I + 2 \mu_0 P_I^{-1} R_I D_\rho \quad \text{d'où :}$$

$$M' = ({}^t P_I)^{-1} [{}^t C^I + 2 \mu_0 P_I^{-1} R_I D_\rho]$$

$$M' = ({}^t C^I P_I^{-1}) + 2 \mu_0 ({}^t P_I)^{-1} P_I^{-1} R_I D_\rho$$

En remplaçant dans la troisième équation, on obtient :

$${}^t(C^I P_1^{-1} R_1) + 2 \mu_0 {}^t(P_1^{-1} R_1)(P_1^{-1} R_1) D_\rho + 2 \mu_0 D_\rho = C^0$$

ou :

$$2 \mu_0 [1 + {}^t(P_1^{-1} R_1)(P_1^{-1} R_1)] D_\rho = C^0 - C^I P_1^{-1} R_1$$

On peut choisir μ_0 tel que :

$$2 \mu_0 [1 + {}^t(P_1^{-1} R_1)(P_1^{-1} R_1)] = 1$$

On remarque que μ_0 est un coefficient qui est toujours strictement positif.

On trouve finalement : $D_\rho = C^0 - C^I P_1^{-1} R_1$

Le vecteur D est donné par :

$$\begin{array}{l} D_I = - P_1^{-1} R_1 D_\rho \\ D_\rho = C^0 - C^I P_1^{-1} R_1 \end{array} \quad (I_2)$$

3. RECHERCHE DE LA NOUVELLE SOLUTION REALISABLE $\bar{X}_1$

Soit D la direction de montée trouvée au paragraphe 2.

Posons : $\bar{X}_1 = \bar{X} + hD$

Pour tout h strictement positif, $\bar{X}_1$ vérifie :

$$\varphi_1(\bar{X}_1) = 0 \quad 1 \in L$$

$$\varphi_j(\bar{X}_1) = 0 \quad j \in J'$$

$$\varphi_i(\bar{X}_1) > 0$$

Pour que $\bar{X}_1$ soit réalisable, il reste la condition :

$$\varphi_k(\bar{X}_1) > 0 \quad k \in (K/J)$$

Explicitons cette condition :

$$A'_k \bar{X} + h A'_k D \geq B'_k, \quad k \in (K/J) \quad \text{ou encore}$$

$$h A'_k D \geq B'_k - A'_k \bar{X}, \quad k \in (K/J)$$

$$\text{Or } \bar{X} \text{ est solution réalisable donc : } B'_k - A'_k \bar{X} < 0$$

Deux cas peuvent se présenter :

1er cas : $A'_k D \geq 0, \quad \forall k \in (K/J)$

h peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut donc $\bar{X}_1$ aussi et le problème admet une solution infinie.

2ème cas : $\exists k \in (K/J) \quad / \quad A'_k D < 0$

Posons : $H = \{k \in (K/J) \quad / \quad A'_k D < 0\}$

$$-h A'_k D \leq A'_k \bar{X} - B'_k \quad \forall k \in H$$

$$\text{d'où : } h \leq \left(\frac{A'_k \bar{X} - B'_k}{-A'_k D} \right)$$

Posons :

$$h = \min_{k \in H} \frac{A'_k \bar{X} - B'_k}{-A'_k D}$$

(I₃)

Soit s l'indice de H qui réalise le minimum.

$$\bar{X}_1 = \bar{X} + hD \text{ est réalisable.}$$

L'ensemble des contraintes s'écrit :

$$\varphi_1(\bar{X}_1) = 0 \quad \forall 1 \in L$$

$$\varphi_j(\bar{X}_1) = 0 \quad \forall j \in J'$$

$$\varphi_s(\bar{X}_1) = 0$$

$$\varphi_i(\bar{X}_1) > 0$$

$$\varphi_k(\bar{X}_1) > 0 \quad \forall k \in K / \{J \cup \{s\}\}$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour exposer la méthode du gradient projeté dans le cas d'un programme linéaire.

4. METHODE DU GRADIENT PROJETE : ALGORITHME GRAPRO

$$\text{Soit (P)} \quad \begin{cases} AX = B \\ A'X \geq B' \\ \text{Max } C.X \end{cases}$$

On dispose d'un vecteur réalisable X^m à la $m^{\text{ième}}$ itération qui sature exactement n contraintes.

$$a. \quad \begin{cases} AX^m = B \\ A'_j X^m = B'_j \quad j \in J^m \quad (J^m \subset K) \\ A'_k X^m > B'_k \quad k \in (K / J^m) \end{cases}$$

$$\text{Posons : } P_m = \begin{pmatrix} A \\ A'_{J^m} \end{pmatrix}$$

$$\text{On calcule : } \underline{M = C P_m^{-1}} \quad (I_1)$$

$$\underline{\text{1er cas : } M_j \leq 0, \quad \forall j \in J^m}$$

$$X^m \text{ est solution optimale : } X^m = X^*$$

2ème cas : $\exists j \in J^m / M_j > 0$

On passe à la phase b.

b. Soit $M_e = \max_{j \in J^m} M_j$

Posons : $J'_m = J^m / \{e\}$

Considérons la matrice : $\begin{pmatrix} A \\ A'_{J'_m} \end{pmatrix}$

Posons : $\begin{pmatrix} A \\ A'_{J'_m} \end{pmatrix} = (P'_m R_m)$

où R_m est un vecteur colonne d'indice ρ et P'_m , une matrice carrée.

En général, le choix de ρ est arbitraire.

On calcule :

$$\begin{aligned} D_\rho &\triangleq C^0 - C^I P'^{-1}_m R_m \\ D_I &= - P'^{-1}_m R_m D_\rho \end{aligned} \quad (I_2)$$

On passe à la phase suivante.

c. On pose : $H = \{k \in (K / J_m) / A'_k D < 0\}$

1er cas : H est vide

Le problème n'a pas de solution finie

2ème cas : H est non vide

On pose :

$$h = \min_{k \in H} \left(\frac{A'_k X^m - B'_k}{-A'_k D} \right) \quad (I_3)$$

s l'indice qui réalise ce minimum.

$$\underline{X^{m+1} = X^m + hD}$$

$$\underline{J^{m+1} = J^m \cup \{s\}}$$

On retourne à la phase a.

Cf. D.E.A. de D. ATLAN, Sous programme GRAPRO.

II - METHODE DU GRADIENT REDUIT EN PROGRAMMATION LINEAIRE

Nous n'employerons cette méthode uniquement dans le cas où le nombre de contraintes saturées est inférieur à $n - 1$. Elle permettra, à chaque itération, de déterminer un vecteur réalisable qui saturera une contrainte supplémentaire.

Ainsi, au bout d'un certain nombre d'itérations, on aura un vecteur réalisable qui saturera exactement n contraintes.

L'inconvénient de cette méthode est qu'on ne peut que saturer progressivement les contraintes : lorsqu'on en libère une, on ne peut affirmer, comme pour le gradient projeté, qu'il y a compatibilité de la direction de montée avec la liaison libérée.

Revenons au programme linéaire de départ :

$$(P) \begin{cases} A.X = B \\ A'.X \geq B' \\ \text{Max } C.X \end{cases}$$

Soit $\bar{X}$ une solution réalisable de (P) qui sature $p + q$ contraintes :
 $p + q \leq n - 1$.

$$\begin{cases} A.\bar{X} = B & (1) \\ A'_J.\bar{X} = B'_J & (2) \\ A'_K.\bar{X} > B'_K \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ q \text{ contraintes saturées} \end{matrix}$$

1. VARIABLES DE BASES ET VARIABLES HORS-BASES

Le système formé par (1) et (2) permet d'exprimer $p + q$ variables X_i , par exemple $X_1, X_2, \dots, X_{p+q}$, en fonction des $n - (p + q)$ variables $X_r : X_{p+q+1}, \dots, X_n$.

$$\text{On pose : } X_I = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{p+q} \end{pmatrix} \quad X_\rho = \begin{pmatrix} X_{p+q+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Les composantes de X_I sont dites variables de base.

Les composantes de X_ρ sont dites variables hors-base.

On obtient :

$$\begin{cases} A^I X_I + A^\rho X_\rho = B \\ A'^I{}_J X_I + A'^\rho{}_J X_\rho = B'_J \end{cases}$$

$$\text{Posons : } P = \begin{pmatrix} A^I \\ A'^I{}_J \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} A^\rho \\ A'^\rho{}_J \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} B \\ B'_J \end{pmatrix}$$

P est une matrice carrée inversible $(p + q, p + q)$

Le système précédent s'écrit :

$$P \cdot X_I + R \cdot X_\rho = E \quad \text{d'où : } \underline{X_I = P^{-1} (E - R X_\rho)} \quad (II_1)$$

(II₁) permet d'exprimer les variables de base en fonction des variables hors-base.

2. GRADIENT REDUIT Δ_ρ

Posons $Z = C.X$

$$Z = C^I X_I + C^O X_\rho$$

$$\text{D'après (II}_1\text{)}, \quad Z = C^I P^{-1} (E - R X_\rho) + C^O X_\rho$$

$$Z = C^I P^{-1} E + (C^O - C^I P^{-1} R) X_\rho$$

Posons :
$$Z^O = C^I P^{-1} R$$

Par définition du gradient réduit Δ_ρ , on a :

$$\Delta_\rho = \left(\frac{\partial Z}{\partial X_\rho} \right), \quad r \in \rho$$

On en déduit :
$$\Delta_\rho = C^O - Z^O \quad (\text{II}_2)$$

Pour déterminer le nouveau vecteur réalisable $\bar{X}'$, il faut trouver une direction de montée Δ tel que : $\bar{X}' = \bar{X} + h\Delta$.

$\bar{X}$ est élément de R^n donc Δ aussi.

Nous sommes donc amenés à introduire la notion de gradient réduit "étendu" Δ qui sera une extension de Δ_ρ à R^n .

3. GRADIENT REDUIT "ETENDU" : Δ

h étant un réel strictement positif, considérons le vecteur $\bar{X}'_\rho$ déduit de $\bar{X}_\rho$ par la relation :

$$\bar{X}'_\rho = \bar{X}_\rho + h \Delta_\rho$$

Soit $\bar{X}' = \begin{pmatrix} \bar{X}'_I \\ \bar{X}'_\rho \end{pmatrix}$, le nouveau vecteur réalisable vérifiant et saturant

les mêmes contraintes que $\bar{X}$.

D'après (II₁), $\bar{X}'_I = P^{-1}(E - R \bar{X}'_\rho)$

$$\bar{X}'_I = P^{-1}E - P^{-1}R \bar{X}'_\rho$$

$$\bar{X}'_I = P^{-1}E - P^{-1}R (\bar{X}_\rho + h\Delta\rho)$$

d'après la relation ci-dessus.

$$\bar{X}'_I = P^{-1}(E - R \bar{X}_\rho) - hP^{-1}R \Delta\rho$$

$$\bar{X}'_I = \bar{X}_I + h(-P^{-1}R \Delta\rho)$$

Posons : $\Delta_I = -P^{-1}R \Delta\rho$ (II₃)

En définitive : $\bar{X}'_I = \bar{X}_I + h \Delta_I$

Le gradient réduit "étendu" Δ est donc égal à :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_I \\ \Delta\rho \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \Delta_I &= -P^{-1}R \Delta\rho \\ \Delta\rho &= C^p - Z^p \end{aligned}$$

(II₃)'

Le nouveau vecteur $\bar{X}'$ s'écrit : $\bar{X}' = \bar{X} + h\Delta$

$\bar{X}'$ sera solution réalisable du programme linéaire si les conditions unilatérales sont vérifiées.

Pour la recherche du pas h , la méthode est rigoureusement identique à celle du paragraphe (I - 3).

4. METHODE DU GRADIENT REDUIT : ALGORITHME GRARED

Soit X^m un vecteur réalisable tel que :

$$\begin{cases} A \cdot X^m = B \\ A'_{Jm} X^m = B'_{Jm} \\ A'_k X^m > B'_k \quad k \in (K / Jm) \end{cases}$$

Le nombre de contraintes saturées est inférieur à $n - 1$ et égal à $p + q$.

On choisit un ensemble de $p + q$ indices qu'on appellera I .

L'ensemble formé des $n - (p + q)$ autres indices s'appellera ρ .

On pose :

$$P_m = \begin{pmatrix} A^I \\ A', I \\ Jm \end{pmatrix} \quad R_m = \begin{pmatrix} A^\rho \\ A', \rho \\ Jm \end{pmatrix}$$

a) Calcul de :

$$Z^\rho = C^I P_m^{-1} R_m$$

$$\Delta \rho = C^\rho - Z^\rho$$

$$\Delta_I = - P_m^{-1} R_m \Delta \rho$$

On pose :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_I \\ \Delta \rho \end{pmatrix}$$

b) Soit $H = \{k \in (K / J_m) / A'_k \Delta < 0\}$

1er cas : $H = \emptyset$ le problème n'a pas de solution finie

2ème cas : $H \neq \emptyset$

On pose :

$$h = \min_{k \in H} \left(\frac{A'_k X^m - B'_k}{-A'_k \Delta} \right)$$

Soit s l'indice qui réalise ce minimum.

On pose : $\underline{X^{m+1}} = \underline{X^m} + H\Delta$

$$\underline{J_{m+1}} = \underline{J_m \cup \{s\}}$$

X^{m+1} sature $p + q + 1$ contraintes et reste réalisable pour (P).

On retourne à la phase (a) si $p + q + 1 < n - 1$

(cf. D.E.A. de D. ATLAN : sous programme GRARED)

5. COMPARAISON DES DEUX METHODES

Supposons que l'on connaisse un vecteur réalisable $\bar{X}$ qui sature $n - 1$ contraintes.

. Si l'on applique la méthode du gradient réduit, Δ s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta\rho = C^0 - C^I P^{-1} R \\ \Delta_I = - P^{-1} R \Delta\rho \end{cases}$$

où R est la colonne d'indice ρ de $P = \begin{pmatrix} A \\ A'_J \end{pmatrix}$

. Si l'on applique le gradient projeté, D sera solution de :

$$\begin{cases} PD_I + RD_\rho = 0 \\ t_{P.M} + 2\mu_0 D_I = t_{C^I} \\ t_{R.M} + 2\mu_0 D_\rho = C^0 \end{cases} \quad (\text{cf. § I.2})$$

On trouve :

$$\begin{cases} D_\rho = C^0 - C^I P^{-1} R \\ D_I = - P^{-1} R D_\rho \end{cases}$$

avec μ_0 tel que : $2\mu_0 [1 + t(P^{-1} R)(P^{-1} R)] = 1$

Conclusion :

Dans le cas d'une seule variable libre, le gradient réduit "étendu" est égal au gradient projeté : $\Delta = D$

Notons que l'inconvénient du gradient réduit (on ne sait pas ce qui se passe lorsqu'on libère une contrainte) ne pose pas de difficultés puisqu'on ne s'en servira uniquement que pour saturer progressivement les contraintes.

III - METHODE DE RESOLUTION D'UN PROGRAMME LINEAIRE SOUS FORME MIXTE PAR LA METHODE DU GRADIENT.

Soit (P) un programme linéaire sous forme mixte :

$$(P) \begin{cases} AX = B \\ A'X \geq B' \\ \text{Max } CX \end{cases}$$

Les notations sont celles des chapitres précédents.

A partir des résultats trouvés dans les chapitres I et II, nous allons pouvoir dégager une méthode de résolution de (P).

On distinguera trois phases :

- Une phase d'initialisation :

A partir d'un vecteur $\bar{\xi}$ quelconque, déterminer un vecteur $\bar{X}$ réalisable.

- Une phase de "saturation" :

A partir d'un vecteur réalisable $\bar{X}$ qui sature moins de n contraintes, déterminer un vecteur $\bar{X}'$, réalisable, qui sature exactement n contraintes.

- Une phase d'optimisation :

A partir d'une solution $\bar{X}'$, réalisable, qui sature n contraintes exactement, déterminer la solution optimale X^* , si elle existe.

1. PHASE D'INITIALISATION

Soit ξ^0 un vecteur tel que :

$$\begin{cases} A_{\epsilon 0} \xi^0 = B_{\epsilon 0} \\ A_{\pi 0} \xi^0 > B_{\pi 0} \\ A_{\nu 0} \xi^0 < B_{\nu 0} \\ A'_{\pi' 0} \xi^0 > B'_{\pi' 0} \\ A'_{\nu' 0} \xi^0 < B'_{\nu' 0} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{où : } \epsilon_0 \cup \pi_0 \cup \nu_0 = L \\ &\text{où : } \pi'_0 \cup \nu'_0 = K \end{aligned}$$

- . Si $\pi_0 = \nu_0 = \nu'_0 = \emptyset$, ξ^0 est un vecteur réalisable de (P).
- . Si l'un des trois sous-ensembles π_0 , ν_0 , ν'_0 est non vide, on considère alors le problème auxiliaire suivant : (PAo).

$$(PAo) \left\{ \begin{array}{l} A_{\varepsilon_0} X = B_{\varepsilon_0} \\ A_{\pi_0} X \geq B_{\pi_0} \\ - A_{\nu_0} X \geq - B_{\nu_0} \\ A'_{\pi'_0} X \geq B'_{\pi'_0} \\ - A'_{\nu'_0} X \geq - B'_{\nu'_0} \\ \text{Max} \left(\sum_{n' \in \nu'_0} A'_{n'} X + \sum_{n \in \nu_0} A_n X - \sum_{p \in \pi_0} A_p X \right) \end{array} \right.$$

ξ^0 est un vecteur réalisable de (PAo).

Deux cas peuvent se présenter :

1er cas : ξ^0 sature exactement n contraintes

On calcule le gradient projeté D puis le pas h après avoir libéré la contrainte correspondante au coefficient de Kuhn et Tucker le plus grand : on applique donc l'algorithme GRAPRO.

GRAPRO donne : $\left\{ \begin{array}{l} \text{le nouveau vecteur réalisable } \xi^1. \\ \text{l'indice } i \text{ de la nouvelle contrainte saturée.} \end{array} \right.$

a) $i \in \pi'_0$: on réapplique l'algorithme précédent

b) $i \notin \pi'_0$: on passe à la suite du calcul.

2ème cas : ξ^0 sature moins de n contraintes.

On applique l'algorithme GRARED qui donne :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{le nouveau vecteur réalisable } \xi^1 \\ \text{l'indice } i \text{ de la nouvelle contrainte saturée.} \end{array} \right.$

Si $i \in \pi'_0$, on réapplique l'algorithme GRARED ou GRAPRO suivant le cas.

Ayant calculé ξ^1 et déterminé i , trois cas peuvent se présenter :

a) $i \in \pi_0$

$$\text{On pose } \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cup \{i\} \\ \pi_1 = \pi_0 / \{i\} \\ v_1 = v_0 \\ \pi'_1 = \pi'_0 \\ v'_1 = v'_0 \end{cases}$$

A ces ensembles d'indices, on fait correspondre le nouveau problème auxiliaire (PA_1) admettant ξ^1 comme solution réalisable.

b) $i \in v_0$

$$\text{On pose } \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cup \{i\} \\ \pi_1 = \pi_0 \\ v_1 = v_0 / \{i\} \\ \pi'_1 = \pi'_0 \\ v'_1 = v'_0 \end{cases}$$

↳ Même procédure que a)

c) $i \in v'_0$

$$\text{On pose } \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \\ \pi_1 = \pi_0 \\ v_1 = v_0 \\ \pi'_1 = \pi'_0 \cup \{i\} \\ v'_1 = v'_0 / \{i\} \end{cases}$$

Même procédure que a)

Ainsi, nous définissons de proche en proche des problèmes auxiliaires $(PA_1), (PA_2), \dots, (PA_i), \dots$ auxquels on fait correspondre des solutions réalisables $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^i, \dots$.

Au bout d'un certain nombre d'itérations, on aura :

$$\pi_i = v_i = v'_i = \emptyset.$$

ξ^i sera solution réalisable de (P).

On pose : $\bar{X}^0 = \xi^i$

$\bar{X}^0$ est solution réalisable de (P) et on a :

$$\begin{cases} A \cdot \bar{X}^0 = B \\ A'_{J_0} \cdot \bar{X}^0 = B'_{J_0} \\ A'_k \cdot \bar{X}^0 > B'_k \quad k \in (K / J_0) \end{cases}$$

Deux cas peuvent se présenter :

1er cas : $\bar{X}^0$ sature exactement n contraintes.

On pose $\bar{X}'^0 = \bar{X}^0$ et on passe directement à la phase d'optimisation

2ème cas : $\bar{X}^0$ sature moins de n contraintes

On passe à la phase de saturation.

2. PHASE DE "SATURATION"

On dispose d'un vecteur réalisable $\bar{X}^0$ qui sature $p + q$ contraintes $p + q < n$.

On applique l'algorithme GRARED.

GRARED nous donne un nouveau vecteur réalisable $\bar{X}^1$ qui sature $p + q + 1$ contraintes.

1er cas : $p + q + 1 < n$

On réapplique GRARED jusqu'à ce que $p + q + i = n$.

2ème cas : $p + q + 1 = n$

On passe à la phase d'optimisation et on pose : $\bar{X}'^0 = \bar{X}^i$

Il se peut qu'au cours des itérations successives, on ne puisse déterminer le vecteur réalisable $\bar{X}^i$.

Dans ce cas, on sait que cela veut dire que le pas h peut augmenter indéfiniment.

Le problème n'a pas de solutions finies.

3. PHASE D'OPTIMISATION

On dispose d'un vecteur réalisable $\bar{X}'^0$ qui sature exactement n contraintes.

1er cas : Les conditions de Kuhn et Tucker sont vérifiées.

$X^* = \bar{X}'^0$ est la solution optimale.

2ème cas : Les conditions de Kuhn et Tucker ne sont pas vérifiées.

On applique l'algorithme GRAPRO.

Si au cours des itérations, on ne peut calculer le nouveau vecteur réalisable : $\bar{X}'^i = \bar{X}'^{i-1} + hD$ c'est que h peut augmenter indéfiniment : le problème n'a pas de solutions finies.

4. EXEMPLE

Soit (P) le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lcl}
 \left. \begin{array}{l}
 - X_1 - 2X_2 + X_3 \geq -2 \\
 - 2X_1 \quad \quad - X_3 \geq -3 \\
 X_1 - X_2 \quad \quad \geq -5 \\
 X_1 - 3X_2 + 2X_3 \geq -1 \\
 X_2 - X_3 \geq -7 \\
 X_1 \quad \quad \quad \geq 0 \\
 X_2 \quad \quad \quad \geq 0 \\
 X_3 \quad \quad \quad \geq 0 \\
 \text{Max } (X_1 + 2X_2 + 3X_3)
 \end{array} \right\} (P) & & \begin{array}{l}
 (1) \\
 (2) \\
 (3) \\
 (4) \\
 (5) \\
 (6) \\
 (7) \\
 (8)
 \end{array}
 \end{array}$$

Soit $\xi_0 = (3, 1, -1)$

ξ_0 n'est pas une solution réalisable de (P).

Nous allons appliquer les trois phases décrites précédemment.

a) Phase d'initialisation

ξ_0 vérifie (3), (5), (6), (7).

* Soit (PAo) le problème auxiliaire associé à ξ^0 :

$$\begin{array}{ll}
 \left. \begin{array}{l}
 X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2 \\
 2X_1 + X_3 \geq 3 \\
 X_1 - X_2 \geq -5 \\
 -X_1 + 3X_2 - 2X_3 \geq 1 \\
 X_2 - X_3 \geq -7 \\
 X_1 \geq 0 \\
 X_2 \geq 0 \\
 -X_3 \geq 0 \\
 \text{Max } (-2X_1 - 5X_2 + 3X_3)
 \end{array} \right\} \text{(PAo)} & \begin{array}{l}
 (1') \\
 (2') \\
 (3) \\
 (4') \\
 (5) \\
 (6) \\
 (7) \\
 (8')
 \end{array}
 \end{array}$$

ξ^0 est solution réalisable de (PAo) et ne sature aucune contrainte.

Il n'y a donc que des variables libres et le gradient réduit "etenau", dans ce cas, est égal au vecteur obtenu en dérivant la fonction objectif par rapport à chaque variable :

$$\underline{\Delta = (-2, -5, 3)}$$

$$\xi^1 = (3 - 2h, 1 - 5h, -1 + 3h)$$

On trouve $h = \frac{1}{19}$ et (4') est saturée d'où :

$$\underline{\xi^1 = \left(\frac{55}{19} ; \frac{14}{19} ; -\frac{16}{19} \right)}$$

* Soit (PA_1) le programme linéaire associé à ξ^1 :

$$(PA_1) \left\{ \begin{array}{ll} X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2 & (1') \\ 2X_1 + X_3 \geq 3 & (2') \\ X_1 - X_2 \geq -5 & (3) \\ X_1 - 3X_2 + 2X_3 \geq -1 & (4) \\ X_2 - X_3 \geq -7 & (5) \\ X_1 \geq 0 & (6) \\ X_2 \geq 0 & (7) \\ -X_3 \geq 0 & (8') \\ \text{Max } (-3X_1 - 2X_2 - X_3) \end{array} \right.$$

ξ^1 est solution réalisable de (PA_1) et sature (4).

(4) permet d'exprimer X_1 en fonction de X_2 et X_3 :

$$X_1 = 3X_2 - 2X_3 - 1$$

La fonction objectif s'écrit en fonction de X_2 et X_3 :

$$- 11X_2 + 5X_3 + 3$$

$$\Delta_L = \begin{pmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_I = \Delta_1 = -P^{-1}R \Delta_L = -(-3 \ 2) \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix} = -43$$

$$\underline{\Delta = (-43 \ -11 \ 5)}$$

Posons $\xi^2 = \xi^1 + h\Delta$

(2') est saturée et $h = \frac{37}{1539}$ d'où : $\xi^2 = (\frac{2864}{1539} \ \frac{727}{1539} \ \frac{-1111}{1539})$

* Soit (PA₂) le programme auxiliaire associé à ξ^2 .

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2 & (1') \\ -2X_1 - X_3 \geq -3 & (2) \\ X_1 - X_2 \geq -5 & (3) \\ X_1 - 3X_2 + 2X_3 \geq -1 & (4) \\ X_2 - X_3 \geq -7 & (5) \\ X_1 \geq 0 & (6) \\ X_2 \geq 0 & (7) \\ -X_3 \geq 0 & (8') \\ \text{Max } (-X_1 - 2X_2 + 2X_3) & \end{array} \right.$$

ξ^2 sature les contraintes (2) et (4).

Le nombre de contraintes saturées étant égal à $n - 1 = 2$, on applique GRAPRO.

$$2X_1 + X_3 = 3$$

$$X_1 + 2X_3 = 1 + 3X_2$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ d'où : } \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 + 3X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - X_2 \\ 2X_2 - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La fonction objectif s'écrit : $-\frac{7}{3} + 3X_2$

$$\Delta_0 = \Delta_2 = 3$$

$$\Delta_I = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$\underline{\Delta = (-3 \quad 3 \quad 6)}$$

On pose $\xi^3 = \xi^2 + h\Delta$.

(8') est saturée et $h = \frac{1111}{9234}$ d'où : $\xi^3 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, 0)$

x Soit (PA_3) le programme auxiliaire associé à ξ^3 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2 & (1') \\ -2X_1 - X_3 \geq -3 & (2) \\ X_1 - X_2 \geq -5 & (3) \\ X_1 - 3X_2 + 2X_3 \geq -1 & (4) \\ X_2 - X_3 \geq -7 & (5) \\ X_1 \geq 0 & (6) \\ X_2 \geq 0 & (7) \\ X_3 \geq 0 & (8) \\ \text{Max } (-X_1 - 2X_2 + X_3) & \end{array} \right.$$

ξ^3 sature (2), (4) et (8).

Les conditions de Kuhn et Tucker donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\mu_2 + \mu_4 = -1 \\ -3\mu_4 = -2 \\ -\mu_2 + 2\mu_4 + \mu_8 = 1 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_2 = \frac{5}{6} \\ \mu_4 = \frac{2}{3} \\ \mu_8 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

On libère la contrainte d'indice 2 car $\mu_2 = \text{Max}(\mu_2, \mu_4, \mu_8)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 - 3X_2 + 2X_3 = -1 \\ X_3 = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = 3X_2 - 1 \\ X_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_0 = D_2 = -2 - (-1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -5$$

$$D_I = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} (-5) = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = (-15, -5, 0)$$

Posons $\xi^4 = \xi^3 + hD$

(1') est saturée et $h = \frac{7}{150}$

$$\xi^4 = \left(\frac{4}{3}, \frac{3}{5}, 0 \right)$$

La phase d'initialisation est terminée. ξ^4 est réalisable pour (P)

On pose : $X^0 = \xi^4$.

b) Phase de "saturation"

Il n'y en a pas puisque X^0 sature exactement 3 contraintes :
(1), (4) et (8).

On pose : $X'^0 = X^0$ et on passe à la phase suivante.

c) Phase d'optimisation

* Conditions de Kuhn et Tucker

$$\begin{cases} -\mu_1 + \mu_4 = 1 \\ -2\mu_1 - 3\mu_4 = 2 \\ \mu_1 + 2\mu_4 + \mu_8 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_1 = -1 \\ \mu_4 = 0 \\ \mu_8 = 4 \end{cases}$$

On libère la contrainte d'indice 8.

* Recherche de D

$$\begin{cases} -X_1 - 2X_2 + X_3 = -2 \\ X_1 - 3X_2 + 2X_3 = -1 \end{cases}$$

Posons : $X_I = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ et $X_D = X_3$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C^D = 3 \quad \text{et} \quad C^I = (1 \quad 2)$$

$$D_3 = 3 - (1 \quad 2) \left[\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = - \left[\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$D = \left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}, 4 \right)$$

Posons : $X'^1 = X'^0 + hD$

* Calcul du pas h

On trouve $h = \frac{7}{12}$ et (2) est saturée

Le nouveau vecteur réalisable : $X'^1 = X'^0 + hD$ soit :

$$X'^1 = \left(\frac{1}{3}, 2, \frac{7}{3} \right) \text{ sature (1), (2) et (4)}$$

* Conditions de Kuhn et Tucker

$$\begin{cases} -\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_4 = 1 \\ -2\mu_1 - 3\mu_4 = 2 \\ \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_4 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_1 = 7 \\ \mu_2 = -\frac{20}{3} \\ \mu_4 = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

On libère la contrainte d'indice (1).

* Calcul de D

$$\begin{cases} 2X_1 + X_3 = 3 \\ X_1 - 3X_2 + 2X_3 = -1 \end{cases}$$

Posons : $X_I = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix}$ $X_P = X_2$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ d'où } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad C^0 = 2 \quad \text{et} \quad C^I = (1 \quad 3)$$

$$D_2 = 2 - \frac{1}{3} (1 \quad 3) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 7$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} 7 = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$D = (-7, 7, 14)$$

Posons : $X'^2 = X'^1 + hD$

* Calcul de h

On trouve $h = \frac{1}{21}$ et (6) est saturée.

Le nouveau vecteur réalisable : $X'^2 = (0, \frac{7}{3}, 3)$ sature les contraintes : (2), (4), (6).

* Conditions de Kuhn et Tucker

$$\begin{cases} -2\mu_2 + \mu_4 + \mu_6 = 1 \\ -3\mu_4 = 2 \\ -\mu_2 + 2\mu_4 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_2 = -\frac{13}{3} \\ \mu_4 = -\frac{2}{3} \\ \mu_6 = -7 \end{cases}$$

La condition d'optimalité est vérifiée.

On peut donc conclure :

$X^* = (0, \frac{7}{3}, 3)$ est le vecteur qui réalise le maximum.

Ce maximum vaut : $Z^* = \frac{41}{3}$.

IV - COMPARAISON AVEC LES METHODES DU SIMPLEX

1. IDENTITE DES DEUX METHODES DANS LE CAS STANDARD

A - Quelques rappels sur la méthode du Simplex

a) Forme standard d'un programme linéaire

On appelle forme standard d'un programme linéaire (P), un programme linéaire dont les seules contraintes unilatérales sont les contraintes de signes:

$$(P) \begin{cases} A.X = B \\ X \geq 0 \\ \text{Max } C.X \end{cases}$$

Notons que dans ce cas, $p' = n$ (nombres de contraintes unilatérales).

On sait que l'on peut toujours se ramener à cette forme soit par adjonction de variables d'écarts (pour transformer toutes contraintes d'inégalités en contraintes d'égalités) soit en posant

$$\begin{cases} X_i = X'_i - X''_i & \text{dans le cas où certaines conditions de signes sont} \\ X'_i \geq 0 \\ X''_i \geq 0 \end{cases}$$

inexistantes.

b) Programme de base - Mise sous forme simpliciable.

Soit $\bar{X}$ une solution réalisable de (P).

$\bar{X}$ sature exactement $n - p$ contraintes unilatérales.

$$\begin{cases} A^I \cdot \bar{X}_I + A^J \cdot \bar{X}_J = B \\ \bar{X}_J = 0 \\ \bar{X}_k > 0 \end{cases} \quad \forall k \in (K / J)$$

La différence fondamentale avec le cas général est que les variables hors-base X_j , $j \in J$, sont imposées par le problème à chaque étape.

$$\text{Posons : } \begin{cases} P = A^I \\ R = A^J \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{X}_I = P^{-1}.B \\ \bar{X}_J = 0 \end{cases} \quad \text{est appelé programme de base de (P)}$$

(Nécessairement, $P^{-1}.B \gg 0$).

A ce programme de base, on associe la forme simpliciale de (P) :

$$\begin{cases} X_I + R'.X_J = B' \\ X \gg 0 \\ \text{Max } [\bar{Z} + (C^J - Z^J) X_J] \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} B' = P^{-1}.B \\ R' = P^{-1}.R \\ \bar{Z} = C^I P^{-1} B \\ Z^J = C^I P^{-1} R \end{cases}$$

La nouvelle forme de la fonction objectif étant obtenue en décomposant $Z = C.X$ de la manière suivante :

$$Z = C^I.X_I + C^J.X_J$$

et en remplaçant X_I par $B' - R'.X_J$. (3)

Cette mise sous forme simpliciale est essentielle pour le déroulement de l'algorithme. (4)

c) Algorithme du Simplex

* $\bar{X}$ est solution optimale si et seulement si :

$$\underline{C^J - Z^J \leq 0}$$

* $\bar{X}$ n'est pas solution optimale.

Considérons alors l'indice e tel que : $C^e - Z^e = \max (C^j - Z^j) \quad j \in J$

On libère la contrainte $X_e = 0$.

On obtient : $X_I = B' - A'^e \cdot X_e$

$$X_I \geq 0 \iff B' - A'^e \cdot X_e \geq 0 \iff A'^e_k X_e \leq B'_k$$

A'^e est la colonne d'indice e de R' .

* On distingue deux cas :

1er cas : $A'^e_k \leq 0, \forall k$ — Pas de solutions finies

2ème cas : $\exists k / A'^e_k > 0$

Posons $H = \{k / A'^e_k > 0\}$

Soit s l'indice qui réalise : $\min_{k \in H} \left(\frac{B'_k}{A'^e_k} \right) = h$

On pose :

$$\begin{cases} X'_i = X_i & \forall i \in (I / \{s\}) \\ X'_e = h \\ X'_s = 0 \\ X'_j = 0 & \forall j \in (J / \{e\}) \end{cases}$$

Les nouvelles variables de base sont : X_I , ($I' = I \cup \{e\} / \{s\}$)

Les nouvelles variables hors-base sont : X_J , ($J' = J \cup \{s\} / \{e\}$)

d) Recherche d'une solution réalisable : phase d'initialisation

Supposons que l'on ne connaisse pas de solution réalisable pour (P).

On introduit alors le problème auxiliaire suivant :

$$(PA) \left\{ \begin{array}{ll} A.X + I.E. = B & (B \gg 0) \\ X \gg 0 \\ E \gg 0 \\ \text{Max } (- \sum_{i=p}^P e_i) \end{array} \right.$$

avec $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix}$ (Les variables e_i sont dites artificielles)

I est la matrice identité.

On connaît alors un programme de base de (PA) :

$$\begin{cases} X = 0 \\ E = B \end{cases}$$

On applique à (PA) une variante de l'algorithme du Simplex qui consiste à supprimer les variables artificielles au fur et à mesure qu'elles sortent de la base.

B - Comparaison avec la méthode du gradient.

Supposons que l'on connaisse un vecteur réalisable $\bar{X}$ qui sature $n - p$ contraintes de signes.

Nous savons que, dans ce cas, les méthodes du gradient projeté et du gradient réduit sont identiques.

Plaçons nous dans les conditions du Simplex, et considérons (P) sous forme simpliciale :

$$(P) \begin{cases} X_I + R' \cdot X_J = B' \\ X \geq 0 \\ \text{Max } [\bar{Z} + (C^J - Z^J) X_J] \end{cases}$$

$$\bar{X} \text{ vérifie : } \begin{cases} \bar{X}_I = B' \\ \bar{X}_J = 0 \end{cases}$$

* Conditions de Kuhn et Tucker

$\bar{X}$ est solution optimale s'il existe des coefficients λ_i et μ_j tels que :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ t_{R'} \lambda + \mu = C^J - Z^J \\ \mu \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = C^J - Z^J \\ \mu \leq 0 \end{cases}$$

$\bar{X}$ est solution optimale si et seulement si $C^J - Z^J \leq 0$

Nous retrouvons la même caractérisation que l'algorithme du Simplex.

De plus, l'indice de la contrainte à libérer dans le cas où $\bar{X}$ n'est pas solution optimale est le même :

$$\text{Soit, } \mu_e = \max_{j \in J} \mu_j$$

* Calcul du vecteur D

$$D_e = C^e - C^I \cdot A^I e \text{ soit :}$$

$$D_e = C^e - Z^e \quad \text{ou encore :} \quad D_e = \mu_e > 0 \text{ par hypothèse}$$

$$D_j = 0 \quad j \in (J / \{e\})$$

$$D_I = -A^{ie} D_e$$

$$D = \begin{pmatrix} -A^I e \mu_e \\ \mu_e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons que D est défini à un coefficient positif près.

On peut donc considérer :

$$D' = \begin{pmatrix} D'_I \\ D'_e \\ D'_{J'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A'_e \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } J' \cup \{e\} = J$$

$$\text{On pose : } \bar{X}'_I = \bar{X}_I - h A'_e$$

$$\bar{X}'_e = \bar{X}_e + h = h$$

$$\bar{X}'_{J'} = 0$$

* On détermine h tel que : $\bar{X}_I - h A'_e \geq 0$

$$\text{ou : } \bar{X}'_e A'_e \leq \bar{X}_I$$

On retombe à la dernière étape de l'algorithme du Simplex.

Obligatoirement, on trouvera le même indice s correspondant à la variable X_s à saturer (lorsque cela est possible).

Conclusion : dans les deux méthodes :

- . La caractérisation de l'optimum est la même
 - . Le choix de la variable entrante X_e
 - . Le choix de la variable sortante X_s (quand cela est possible)
- sont les mêmes

Les deux méthodes présentent donc des algorithmes semblables quant au choix de la nouvelle solution réalisable (lorsqu'elle existe).

* Initialisation

$$\text{Soit (P)} \begin{cases} A.X = B \\ X \geq 0 \\ \text{Max } C.X \end{cases}$$

Soit $\bar{X}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$A_1 \bar{X} = b_1$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_p \bar{X} > B_p & p \in \pi_0 \\ A_n \bar{X} < B_n & n \in \nu_0 \\ \bar{X}_{p'} \geq 0 & p' \in \pi'_0 \\ \bar{X}_{n'} < 0 & n' \in \nu'_0 \end{array} \right.$$

Nous allons appliquer la phase d'initialisation du chapitre III en considérant le vecteur $\bar{X} = 0$

B_i étant strictement positif pour tout i , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot \bar{X} < B \\ \bar{X} = 0 \end{array} \right.$$

Le problème (PA) associé à $\bar{X}$ s'écrit :

$$(PA) \left\{ \begin{array}{l} -A \cdot X \gg -B \\ X \gg 0 \\ \text{Max } \left(\sum_{i=1}^{i=p} (-A_i \cdot X + B_i) \right) \end{array} \right.$$

$\bar{X}$ est solution réalisable de (PA).

Mettons (PA) sous forme standard par l'introduction des variables d'écarts e_i ($i = 1, \dots, p$) et posons $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{l} -A \cdot X - I \cdot E = -B \\ X \gg 0 \\ E \gg 0 \\ \text{Max } \sum_{i=1}^{i=p} (-e_i) \end{array} \right. \quad \text{où } e_i = B_i - A_i \cdot X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A.X. + I.E = B \\ X \gg 0 \\ E \gg 0 \\ \text{Max}_{i=1}^p \sum_{i=1}^p (-e_i) \end{array} \right.$$

On retrouve ainsi le même programme auxiliaire que celui donné par la méthode du Simplex, si nous prenons $\bar{X} = 0$ comme solution de départ pour le programme auxiliaire.

Nous allons illustrer cette comparaison sur l'exemple traité au chapitre III après l'avoir mis sous forme standard.

C - Exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + 2 X_2 - X_3 + X_4 = 2 \\ 2 X_1 + X_3 + X_5 = 3 \\ - X_1 + X_2 + X_6 = 5 \\ - X_1 + 3 X_2 - 2 X_3 + X_7 = 1 \\ - X_2 + X_3 + X_8 = 7 \\ X_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 8 \\ \text{Max } (X_1 + 2X_2 + 3 X_3) \end{array} \right.$$

Le programme linéaire est sous forme simpliciale.

$$X_I^1 = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad X_J^1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- SIMPLEX

* Tous les coefficients de la fonction objectif sont positifs. On n'est pas à l'optimum.

On libère la contrainte $X_3 = 0$ correspondante au coefficient le plus grand.

$$\begin{cases} X_4 = 2 + X_3 \\ X_5 = 3 - X_3 \\ X_6 = 5 \\ X_7 = 1 + 2 X_3 \\ X_8 = 7 - X_3 \end{cases}$$

X_3 augmente jusqu'à 3 et X_5 s'annule.

Nouvelle base : (4, 3, 6, 7, 8)

- GRADIENT

* Les conditions de Kuhn et Tucker donnent :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2 \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 + \mu_1 = 1 \\ 2 \lambda_1 + \lambda_3 + 3 \lambda_4 - \lambda_5 + \mu_2 = 2 \\ - \lambda_1 + \lambda_2 - 2 \lambda_4 + \lambda_5 + \mu_3 = 3 \\ \lambda_i = 0 \quad i = 4, \dots, 8 \end{cases}$$

$$\mu_1 = 1 ; \mu_2 = 2 ; \mu_3 = 3$$

On libère la contrainte $X_3 = 0$

$$* \quad D = (0, 0, 1, 1, -1, 0, 2, -1)$$

$$X^2 = (0, 0, h, 2 + h, 3 - h, 5, 1 + 2h, 7 - h)$$

h vaut 3 et X_5 s'annule

$$X^2 = (0, 0, 3, 5, 0, 5, 7, 4)$$

Nouvelle base : (4, 3, 6, 7, 8).

* Mise sous forme simpliciale par rapport à la nouvelle base

$$\left\{ \begin{array}{l} X_4 = + 3 X_1 + 2 X_2 + X_5 = 5 \\ X_3 = + 2 X_1 + X_5 = 3 \\ X_6 = - X_1 + X_2 = 5 \\ X_7 = + 3 X_1 + 3 X_2 + 2 X_5 = 7 \\ X_8 = - 2 X_1 - X_2 - X_5 = 4 \\ Z - 9 = - 5 X_1 + 2 X_2 - 3 X_5 \end{array} \right.$$

On libère la contrainte $X_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_4 = 5 - 2 X_2 \\ X_3 = 3 \\ X_6 = 5 - X_2 \\ X_7 = 7 - 3 X_2 \\ X_8 = 4 + X_2 \end{array} \right.$$

X_7 s'annule

$$X^3 = (0, \frac{7}{3}, 3, \frac{1}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0, \frac{19}{3})$$

Nouvelle base : (4, 3, 6, 2, 8)

* Conditions de Kuhn et Tucker

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 2 \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 + \mu_1 = 1 \\ 2 \lambda_1 + \lambda_3 + 3 \lambda_4 - \lambda_5 + \mu_2 = 2 \\ - \lambda_1 + \lambda_2 - 2 \lambda_4 + \lambda_5 = 3 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \mu_5 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \end{array} \right.$$

$$\mu_1 = -5 ; \mu_2 = 2 ; \mu_5 = -3$$

On libère la contrainte $X_2 = 0$

$$D = (0, 1, 0, -2, 0, -1, -3, 1)$$

$$X^3 = (0, h, 3, 5 - 2h, 0, 5 - h, 7 - 3h, 4 + h)$$

$$h = \frac{7}{3} \text{ et } X_7 \text{ s'annule}$$

$$X^3 = (0, \frac{7}{3}, 3, \frac{1}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0, \frac{19}{3})$$

Nouvelle base : (4, 3, 6, 2, 8)

* Mise sous forme simpliciale (Simplex)

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} x_4 & + & x_1 & - & \frac{x_5}{3} & - & \frac{2}{3} x_7 & = & \frac{1}{3} \\ & x_3 & + & 2 x_1 & + & x_5 & & = & 3 \\ & & x_6 & - & 2 x_1 & - & \frac{2}{3} x_5 & - & \frac{x_7}{3} & = & \frac{8}{3} \\ & & & x_2 & + & x_1 & + & \frac{2}{3} x_5 & + & \frac{x_7}{3} & = & \frac{7}{3} \\ & & & & x_8 & - & x_1 & - & \frac{x_5}{3} & + & \frac{x_7}{3} & = & \frac{19}{3} \\ z - \frac{41}{3} & = & & - 7 x_1 & - & \frac{13}{3} x_5 & - & \frac{2}{3} x_7 \end{array} \right.$$

* Conditions de Kuhn et Tucker (Gradient)

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \lambda_1 + 2 \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 & + & \mu_1 & = & 1 \\ + 2 \lambda_1 & + & \lambda_3 + 3 \lambda_4 - \lambda_5 & = & 2 \\ - \lambda_1 + \lambda_2 & - & 2 \lambda_4 + \lambda_5 & = & 3 \\ \lambda_1 & & & = & 0 \\ & \lambda_2 & & + & \mu_5 = 0 \\ & & \lambda_3 & & = 0 \\ & & & \lambda_4 & + \mu_7 = 0 \\ & & & & \lambda_5 = 0 \end{array} \right.$$

$$\mu_1 = -7 ; \mu_5 = -\frac{13}{3} ; \mu_7 = -\frac{2}{3}$$

Dans les deux cas, on est à l'optimum

$$x^* = (0, \frac{7}{3}, 3, \frac{1}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0, \frac{19}{3})$$

$$z^* = \frac{41}{3}$$

On remarque, à travers cet exemple, qu'à chaque étape :

- Les coefficients de la fonction objectif sont ceux de Kuhn et Tucker (d'où la même caractérisation).
- On en déduit que la variable entrante est la même.
- La contrainte à saturer est la même ($b_i - A'_i X_e = X_i + h_i$ pour tout i).
- On en déduit que la variable sortante est la même et par conséquent le vecteur réalisable aussi.

2. DIFFERENCE DES DEUX METHODES DANS LE CAS GENERAL DES PROBLEMES MIXTES.

Nous avons vu, au paragraphe 1, que la méthode du gradient appliquée à un programme linéaire sous forme standard, est analogue à la méthode du Simplex.

Partant d'un programme linéaire (P) sous forme mixte, nous allons appliquer la méthode du gradient et comparer les résultats, à une itération quelconque, avec ceux obtenus en appliquant à (P'), forme standard de (P), la méthode du gradient qui est celle du Simplex.

a) Mise sous forme standard du programme linéaire (P)

$$\text{Soit (P)} \quad \begin{cases} A.X = B \\ A'.X \geq B' \\ \text{Max } C.X \end{cases}$$

Les notations sont celles des chapitres précédents.

On pose $E = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{p'} \end{pmatrix}$ où e_i est une variable d'écart.

$I_{p'}$, la matrice identité à p' lignes et p' colonnes.

$$\begin{cases} X = X' - X'' \\ X' \geq 0 \\ X'' \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard de (P) donne :

$$(P') \begin{cases} A.X' - A.X'' = B \\ A'.X' - A'.X'' - I_p.E = B' \\ X' \geq 0 \\ X'' \geq 0 \\ E \geq 0 \\ \text{Max } (C.X' - C.X'') \end{cases}$$

(P') possède :
 . p + p' contraintes bilatérales
 . 2n + p' contraintes de signes

Notons que puisque $n > p$, $2n + p' > p + p'$

Pour avoir un programme de base, nous devons donc saturer $2n - p$ contraintes de signes.

Soit un programme de base associé au problème (P) :

$$\begin{cases} A.\bar{X} = B \\ A'_J.\bar{X} = B'_J & \text{où } J \text{ est un ensemble de } n - p \text{ indices} \\ A'_k.\bar{X} > B'_k & k \in (K / J) \end{cases}$$

Posons : $\bar{X}_p = \bar{X}'_p$ si $\bar{X}_p > 0$ ($\bar{X}''_p = 0$)

$\bar{X}_n = -\bar{X}''_n$ si $\bar{X}_n < 0$ ($\bar{X}''_n = 0$)

Soient $P = \{p / \bar{X}_p > 0\}$

$N = \{n / \bar{X}_n < 0\}$

$\forall i \in (P \cup N), \bar{X}_i = \bar{X}'_i - \bar{X}''_i$

P et N étant deux ensembles complémentaires, on a n contraintes saturées

$$\text{parmi : } \begin{cases} \bar{X}' >> 0 \\ \bar{X}'' >> 0 \end{cases}$$

Aux (n - p) contraintes saturées : $A'_{J'} \bar{X} = B'_{J'}$ on fait correspondre

les (n - p) contraintes saturées : $E_J = 0$

Ainsi, à toute solution réalisable $\bar{X}$ de (P), on fait correspondre le programme de base suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A'^P_{J'} \bar{X}'_p - A'^P_{J'} \bar{X}''_p + A'^N_{J'} \bar{X}'_N - A'^N_{J'} \bar{X}''_N & & = B_{J'} \\ A'^P_{J'} \bar{X}'_p - A'^P_{J'} \bar{X}''_p + A'^N_{J'} \bar{X}'_N - A'^N_{J'} \bar{X}''_N - E_J & & = B'_{J'} \\ A'^P_{K'} \bar{X}'_p - A'^P_{K'} \bar{X}''_p + A'^N_{K'} \bar{X}'_N - A'^N_{K'} \bar{X}''_N - E_{K'} & & = B'_{K'} \\ \bar{X}'_p & & > 0 \\ & \bar{X}''_p & = 0 \\ & & \bar{X}'_N & = 0 \\ & & & \bar{X}''_N > 0 \\ & & & & E_J & = 0 \\ & & & & & E_{K'} > 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Max } (C^P \bar{X}'_p - C^P \bar{X}''_p + C^N \bar{X}'_N - C^N \bar{X}''_N)$$

$$\text{où } K' = (K / J)$$

$(\bar{X}'_p, \bar{X}''_p, \bar{X}'_N, \bar{X}''_N, E_J, E_{K'})$ sature exactement $p + p' + n + (n - p)$

soit $2n + p'$ contraintes (on a $2n + p'$ variables).

b) Conditions de Kuhn et Tucker

. Pour le problème (P)

$$\begin{cases} t_{A\lambda} + t_{A,J} \mu_J = t_C \\ \mu_J \leq 0 \end{cases}$$

. Pour le problème (P')

$$\begin{cases} t_{A^P\lambda} + t_{A,J^P} \lambda_J + t_{A,K^P} \lambda_{K'} = t_{C^P} & (1) \\ - t_{A^P\lambda} - t_{A,J^P} \lambda_J - t_{A,K^P} \lambda_{K'} + \mu''_P = - t_{C^P} & (2) \\ t_{A^N\lambda} + t_{A,J^N} \lambda_J + t_{A,K^N} \lambda_{K'} + \mu'_N = t_{C^N} & (3) \\ - t_{A^N\lambda} - t_{A,J^N} \lambda_J - t_{A,K^N} \lambda_{K'} = - t_{C^N} & (4) \\ \phantom{- t_{A^N\lambda} - t_{A,J^N} \lambda_J - t_{A,K^N} \lambda_{K'}} - \lambda_J + \mu_J = 0 & (5) \\ \phantom{- t_{A^N\lambda} - t_{A,J^N} \lambda_J - t_{A,K^N} \lambda_{K'}} - \lambda_{K'} = 0 & (6) \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) d'une part, puis (3) et (4) d'autre part nous donnent :

$$\begin{cases} \mu''_P = 0 \\ \mu'_N = 0 \end{cases}$$

On en déduit de (5) et (6) :

$$\begin{cases} \lambda_J = \mu_J \\ \lambda_{K'} = 0 \end{cases}$$

Les conditions de Kuhn et Tucker s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} t_{A^P\lambda} + t_{A,J^P} \mu_J = t_{C^P} \\ t_{A^N\lambda} + t_{A,J^N} \mu_J = t_{C^N} \\ \mu_J \leq 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} t_{A\lambda} + t_{A'J} \mu_J = t_C \\ \mu_J < 0 \end{cases}$$

On retrouve le même système dans le cas de (P).

Conclusion : Les conditions de Kuhn et Tucker, à chaque itération, sont identiques pour (P) et (P').

c) Recherche de la nouvelle solution réalisable.

. Cas du problème (P)

Supposons les conditions de Kuhn et Tucker non vérifiées.

Soit $1 / \mu_1 = \max_{j \in J} \mu_j$.

On libère la contrainte d'indice P et on applique la méthode du gradient projeté.

Le vecteur de montée D vérifie le système :

$$\begin{cases} AD = 0 \\ A'_{J'} D = 0 \text{ où } J' = J / \{e\} \\ t_{A\lambda} + t_{A'_{J'}} \mu_{J'} + 2 \mu_0 D = t_C \end{cases}$$

. Cas du problème (P')

La contrainte à libérer correspondante à celle de (P) est :

$$E_1 = 0$$

Nous allons décomposer le vecteur D', direction de montée admissible de la manière suivante :

D'_N	correspondant à	X'_N
D''_N	correspondant à	X''_N
D'_P	correspondant à	X'_P
D''_P	correspondant à	X''_P
$\Delta_{J'}$	correspondant à	$E_{J'}$
Δ_1	correspondant à	E_1
$\Delta_{K'}$	correspondant à	$E_{K'}$

Le système permettant de déterminer D' s'écrit :

$$\left[\begin{array}{l} A^P_{D'P} - A^P_{D''P} + A^N_{D'N} - A^N_{D''N} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{l} A^P_{J'D'P} - A^P_{J'D''P} + A^N_{J'D'N} - A^N_{J'D''N} - \Delta_{J'} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(I) \left[\begin{array}{l} A^P_{kD'P} - A^P_{kD''P} + A^N_{kD'N} - A^N_{kD''N} - \Delta_k = 0 \quad \forall k \in K' \cup \{1\} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left[\begin{array}{l} D''_P = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left[\begin{array}{l} D'_N = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_{J'} = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$(II) \left[\begin{array}{l} t^P_{A\lambda} + t^P_{A'J,\lambda_{J'}} + t^P_{A'K,\lambda_{K'}} + t^P_{A'1,\lambda_1} + 2\mu_O D'_P = t^P_C \end{array} \right. \quad (a)$$

$$\left[\begin{array}{l} - t^P_{A\lambda} - t^P_{A'J,\lambda_{J'}} - t^P_{A'K,\lambda_{K'}} - t^P_{A'1,\lambda_1} + \mu''_P + 2\mu_O D''_P = - t^P_C \end{array} \right. \quad (b)$$

$$\left[\begin{array}{l} t^N_{A\lambda} + t^N_{A'J,\lambda_{J'}} + t^N_{A'K,\lambda_{K'}} + t^N_{A'1,\lambda_1} + \mu''_N + 2\mu_O D'_N = t^N_C \end{array} \right. \quad (c)$$

$$(II) \left[\begin{array}{l} - t^N_{A\lambda} - t^N_{A'J,\lambda_{J'}} - t^N_{A'K,\lambda_{K'}} - t^N_{A'1,\lambda_1} + 2\mu_O D''_N = - t^N_C \end{array} \right. \quad (d)$$

$$\left[\begin{array}{l} - \lambda_{J'} + \mu_{J'} + 2\mu_O \Delta_{J'} = 0 \end{array} \right. \quad (e)$$

$$\left[\begin{array}{l} - \lambda_{K'} + 2\mu_O \Delta_{K'} = 0 \end{array} \right. \quad (f)$$

$$\left[\begin{array}{l} - \lambda_1 + 2\mu_O \Delta_1 = 0 \end{array} \right. \quad (g)$$

Compte tenu de (4), (a) et (b) sont équivalentes

$$t_{A\lambda}^P + t_{A'J'}^P \lambda_{J'} + t_{A'K'}^P \lambda_{K'} + t_{A'1}^P \lambda_1 + 2 \mu_0 D'_P = t_C^P \quad (a')$$

Compte tenu de (5), (c) et (d) sont équivalentes à :

$$t_{A\lambda}^N + t_{A'J'}^N \lambda_{J'} + t_{A'K'}^N \lambda_{K'} + t_{A'1}^N \lambda_1 + 2 \mu_0 D'_N = t_C^N \quad (b')$$

Compte tenu de (6), (e) s'écrit :

$$\lambda_{J'} = \mu_{J'} \quad (c')$$

(f) s'écrit :

$$\lambda_{K'} = 2 \mu_0 \Delta_{K'} \quad (d')$$

(g) s'écrit :

$$\lambda_1 = 2 \mu_0 \Delta_1 \quad (e')$$

Compte tenu de (c'), (d') et (e'), (a') et (b') sont équivalentes à :

$$t_{A\lambda} + t_{A'J'} \mu_{J'} + 2 \mu_0 (t_{A'K'} \Delta_{K'} + t_{A'1} \Delta_1) + 2 \mu_0 D' = t_C \quad (A)$$

Compte tenu de (3), (A) s'écrit :

$$t_{A\lambda} + t_{A'J'} \mu_{J'} + 2 \mu_0 (t_{A'K'} A'_{K'} + t_{A'1} A'_1) D' + 2 \mu_0 D' = t_C$$

Posons :

$$\begin{pmatrix} D'_N \\ D''_N \\ D'_P \\ D''_P \end{pmatrix} = D \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \Delta_{J'} \\ \Delta_1 \\ \Delta_{K'} \end{pmatrix} = \Delta$$

Posons de même : $\delta = {}^t A'_{K'} A'_{K'} + {}^t A'_1 A'_1 + I_n$

où I_n est la matrice identité à n lignes et n colonnes.

En définitive, D' est déterminé par le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} A.D = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A'_{J'} . D = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{J'} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = A'_1 D \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{K'} = A'_{K'} D \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^t A_{\lambda} + {}^t A'_{J'} \mu_{J'} + 2 \mu_o \delta D = {}^t C \end{array} \right. \quad (6)$$

Conclusion :

Les vecteurs D' , D ne sont pas donnés par le même système dans les deux cas (seules les conditions (1) et (2) sont identiques).

En fait, nous retrouvons le même algorithme si l'on considère uniquement les composantes D_i du vecteur D' .

Autrement dit, les composantes Δ_i du vecteur D' ne jouent qu'un rôle superflu.

Nous voyons, à travers cet exemple, que la méthode du gradient apparaît plus souple par rapport à celle du simplex : la nécessité pour cette dernière de faire apparaître de nouvelles contraintes (variables d'écart, contraintes de signes) est superflue. (Pour la programmation des deux méthodes, comparaison de temps machine, place mémoire, ..., se référer au D.E.A. de D. ATLAN).

Nous allons illustrer cette comparaison sur un exemple.

d) Exemple

Considérons le problème (P) traité au chapitre III

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} -X_1 - 2X_2 + X_3 \geq -2 \\ -2X_1 \quad \quad - X_3 \geq -3 \\ X_1 - X_2 \quad \quad \geq -5 \\ X_1 - 3X_2 + 2X_3 \geq -1 \\ X_2 - X_3 \geq -7 \\ X_1 \quad \quad \quad \geq 0 \\ X_2 \quad \quad \quad \geq 0 \\ X_3 \geq 0 \\ \text{Max } (X_1 + 2X_2 + 3X_3) \end{array} \right.$$

Forme standard de (P) :

$$(P') \left\{ \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 - X_3 + Y_1 = 2 \\ 2X_1 \quad \quad + X_3 \quad \quad + Y_2 = 3 \quad X_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \\ -X_1 + X_2 \quad \quad \quad + Y_3 = 5 \quad Y_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \\ -X_1 + 3X_2 - 2X_3 \quad \quad + Y_4 = 1 \quad \quad \quad 4, 5 \\ \quad \quad - X_2 + X_3 \quad \quad \quad + Y_5 = 7 \\ \text{Max } (X_1 + 2X_2 + 3X_3) \end{array} \right.$$

En partant de la solution réalisable :

$$\begin{pmatrix} X^0 \\ Y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{pour } (P') \text{ et } \quad X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } (P)$$

nous allons donner les différents résultats à chaque itération :

. Pour (P), par la méthode du gradient.

. Pour (P'), par la méthode du simplex.

<u>Simplex (P')</u> $\ast \begin{cases} X'^1 = (0, 0, 3) \\ Y'_1 = (5, 0, 5, 7, 4) \end{cases}$ avec : $\begin{cases} D^1 = (0, 0, 1) \\ \Delta^1 = (1, -1, 0, 2; -1) \end{cases}$ $\left(\begin{pmatrix} X'^1 \\ Y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'^0 \\ Y'_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} D_1 \\ \Delta_1 \end{pmatrix} \right)$	<u>Gradient (P)</u> $\ast X^1 = (0, 0, 3)$ avec : $D^1 = (0, 0, 1)$ $(X^1 = X^0 + h D^1)$
$\ast \begin{cases} X'^2 = (0, \frac{7}{3}, 3) \\ Y'_2 = (\frac{1}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0, \frac{19}{13}) \end{cases}$ avec : $\begin{cases} D^2 = (0, 1, 0) \\ \Delta^2 = (-2, 0, -1, -3, 1) \end{cases}$ On est à l'optimum	$\ast X^2 = (0, \frac{7}{3}, 3)$ avec : $D^2 = (0, 1, 0)$ X^2 est solution optimale

3. IDENTITE DE LA METHODE DU GRADIENT ET DE LA METHODE DUALE DU SIMPLEX.

A - Quelques rappels sur la méthode duale du simplex.

a) Définition et propriétés

Soit (P) un programme linéaire sous forme standard et (D) son dual :

$$(P) \begin{cases} A.X = B \\ X \gg 0 \\ \text{Max } C.X \end{cases} \quad (D) \begin{cases} Y.A \gg C \\ \text{Min } Y.B \end{cases}$$

où $\begin{cases} A \text{ est une matrice à } p \text{ lignes et } n \text{ colonnes} \\ B \text{ un vecteur de } \mathbb{R}^p \\ X \text{ un vecteur de } \mathbb{R}^n \\ C \text{ un vecteur ligne de } \mathbb{R}^n \\ Y \text{ un vecteur ligne de } \mathbb{R}^p \end{cases}$

Considérons un programme de base de (P) :

$$\begin{cases} A^I.X_I + A^L.X_L = B \\ X_L = 0 \end{cases}$$

Posons : $P = A^I$ et $R = A^L$

Le système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} X_I = P^{-1} B - P^{-1} R X_L \\ X_L = 0 \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{cases} Z = C.X \\ \bar{Z} = C^I.P^{-1} B \\ Z^L = C^I.P^{-1} R \end{cases}$$

$$Z = \bar{Z} + (C^L - Z^L) X_L \quad (\text{voir §1, chapitre IV}).$$

De plus, X est optimal si et seulement si $C^L - Z^L \ll 0$

Une solution de base duale - réalisable est un vecteur X

$$\text{tel que : } \begin{cases} X_I = P^{-1} B \\ X_L = 0 \\ C^L - Z^L \ll 0 \end{cases}$$

si, de plus, $X_I > 0$, alors X est optimal.

$$C^L - Z^L \ll 0 \iff C^L - C^I P^{-1} R \ll 0 \iff C^I P^{-1} A^L \gg C^L \quad (1)$$

Posons : $Y = C^I P^{-1}$

$$(1) \iff Y.A^L \gg C^L$$

$$Y.A^I = C^I (A^I)^{-1} A^I = C^I$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} Y.A^L \gg C^L \\ Y.A^I = C^I \end{cases} \Rightarrow \underline{Y.A \gg C}$$

$$\text{A toute solution duale réalisable : } \begin{cases} X_I = P^{-1} B \\ X_L = 0 \\ C^L - Z^L \ll 0 \end{cases} \text{ , on fait}$$

correspondre un vecteur $Y = C^I P^{-1}$ réalisable pour (D) qui sature les p contraintes d'indices $i \in I$.

La méthode duale du simplex consiste à trouver une solution réalisable pour le dual meilleure que la précédente.

Pour le primal, cela revient à dire qu'il faut trouver une solution duale réalisable rendant $X^I > 0$.

b) Méthode duale du simplex

Soit $\bar{X}$ une solution duale - réalisable pour (P).

$$\begin{cases} \bar{X}_I = P^{-1} B \\ \bar{X}_L = 0 \\ C^L - Z^L \ll 0 \end{cases}$$

* $\bar{X}_I \gg 0$ alors $\bar{X}$ est optimal et $\text{Max } C.X = \bar{Z} = C^I P^{-1} B$

* $\exists i \in I / \bar{X}_i < 0$

On pose $\bar{X}_s = \min_{i \in I} \bar{X}_i$

X_s sera variable sortante.

Soit $H = \{l \in L / (P^{-1} R)_s^l < 0\}$

1er cas : $H = \emptyset$. Le problème n'a pas de solutions finies

2ème cas : $H \neq \emptyset$

On pose : $\frac{Z_e - C_e}{-(P^{-1} R)_s^e} = \min_{l \in H} \frac{Z_e - C_e}{-(P^{-1} R)_s^l}$

X_e est variable entrante.

On considère alors le nouveau programme de base associé à l'ensemble d'indices : $I / \{s\} \cup \{e\}$.

Recherche d'une solution réalisable.

Considérons un programme linéaire sous forme standard :

$$(P) \begin{cases} A.X = B \\ X \gg 0 \\ \text{Max } C.X \end{cases}$$

Soit $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_I \\ \bar{X}_L \end{pmatrix}$ un vecteur tel que : $\bar{X}_I + P^{-1} R \bar{X}_L = P^{-1} B$

Supposons que $\bar{X}$ ne soit pas dual - réalisable : la condition $C^L - Z^L < 0$ n'est pas vérifiée.

Considérons la contrainte artificielle : $X_0 + \sum_{l \in L} X_l = M$

(M pouvant être aussi grand que l'on veut).

Soit a l'indice tel que : $C^a - Z^a = \max_{l \in L} (C^l - Z^l)$

Le programme auxiliaire :

$$(PA) \begin{cases} X_I + P^{-1} R X_L = P^{-1} B \\ X_0 + \sum_{l \in L} X_l = M \\ \text{Max } C.X \end{cases}$$

admet une solution duale réalisable $\bar{X}' = \begin{pmatrix} \bar{X}_I \\ \bar{X}_0 \\ \bar{X}_L \end{pmatrix}$

On applique à (PA) la méthode duale du simplex.

Trois cas peuvent se présenter :

1er cas : (PA) n'a pas de solutions finies

(P) n'admet pas non plus de solutions finies

2ème cas : (PA) admet une solution et x_0 est variable hors-base

1) La valeur $\bar{Z}$ maximale est fonction de M.

(PA) n'admet pas de solutions finies puisque M peut augmenter indéfiniment. Il en est de même pour (P)

2) On a $\bar{Z}$ qui est indépendante de M.

On fait alors décroître M jusqu'à ce que l'une des variables, fonctions de M, s'annule.

3ème cas : (PA) admet une solution et x_0 est variable de base.

On est à l'optimum pour (P). La valeur de toute variable autre que x_0 est indépendante de M, donc $\bar{Z}$ aussi.
 $\bar{Z}$ est solution de (P).

B - Comparaison avec la méthode du gradient.

Nous allons montrer l'analogie de la méthode duale du simplex appliquée à un programme linéaire (P)

$$\begin{cases} A.X = B \\ X \geq 0 \\ \text{Max } C.X \end{cases}$$

et de la méthode du gradient appliquée au dual (D) du programme

$$\text{linéaire (P) : (D) } \begin{cases} Y.A \geq C \\ \text{Min } Y.B \end{cases}$$

Pour nous placer dans les conditions de la méthode du gradient, nous considérons la forme suivante de (D) :

$$(D) \begin{cases} Y.A \gg C \\ \text{Max } (- Y.B) \end{cases}$$

Soit $\bar{Y}$ une solution réalisable de (D) telle que :

$$\begin{cases} \bar{Y}.A^I = C^I \\ \bar{Y}.A^L > C^L \end{cases} \quad (p \text{ contraintes saturées})$$

Posons $P = A^I$ et $R = A^L$

a) Caractérisation de l'optimum

Les conditions de Kuhn et Tucker donnent :

$$\begin{cases} P \mu_I = - B \\ \mu_I \leq 0 \end{cases} \iff - P^{-1} B \leq 0 \quad \text{ou : } \underline{P^{-1} B \gg 0}$$

Or par rapport à la même base I, le primal s'écrit :

$$\begin{cases} P.\bar{X}_I + R.\bar{X}_L = B \\ \bar{X}_L = 0 \end{cases} \iff \bar{X}_I = P^{-1} B$$

D'après la méthode duale du simplex, $\bar{X}$, solution duale réalisable pour (P) est optimale si et seulement si :

$$\bar{X}_I \gg 0$$

Cette condition se traduit par : $\underline{P^{-1} B \gg 0}$

Conclusion :

La caractérisation de l'optimum est la même pour les deux méthodes.

b) Recherche d'une nouvelle solution réalisable

Si la condition $\mu_I \leq 0$ n'est pas vérifiée, on applique l'algorithme GRAPRO.

Soit : $\mu_s = \max_{i \in I} \mu_i$

$$\mu_s = \max_{i \in I} (-P^{-1} B)_i = \max_{i \in I} (-X_i) = \min_{i \in I} X_i$$

D'autre part, à toute contrainte d'indice i du dual on fait correspondre la variable de même indice du primal.

Donc, libérer la contrainte d'indice s du dual revient à faire sortir la variable X_s de la base (puisque on rend μ_s nul, X_s s'annule aussi et par suite, X_s sort de la base). Donc :

La variable sortante est la même, à chaque itération, pour les deux méthodes.

Posons $I' = I \setminus \{s\}$

Le calcul de D , direction de montée admissible, est donné par le système :

$$\begin{cases} D.A^{I'} = 0 \\ A^{I'} \mu_{I'} + 2 \mu_0 D = -t_B \end{cases}$$

Rappelons que D est déterminé à un coefficient μ_0 près.

Par hypothèse : $D.A^s > 0$

Donc, on peut supposer $D.A^s = 1$ (si $D.A^s = k$, on considère le vecteur $D' = kD$).

On peut donc dire que D vérifie :

$$\begin{cases} D.A^{I'} = 0 \\ D.A^s = 1 \end{cases}$$

Ce système s'écrit : $D (A^{I'} \ A^s) = (0, 0, \dots, 0, 1)$

Or $(A^{I'} \ A^s) = P$

Posons : $E_s = (0, 0, \dots, 0, 1)$

D vérifie : $D.P = E_s$ d'où : $D.P = (Id)_s$

(Si on considère E_s comme la ligne d'indice s de la matrice Identité : Id)

d'où : $D = (Id)_s P^{-1}$ soit : $D = (P^{-1})_s$

Considérons le nouveau vecteur : $\bar{Y} + hD$

Ce vecteur est réalisable si : $(\bar{Y} + hD).A^L \geq C^L$ soit :

$$\bar{Y}.A^L + h(P^{-1})_s A^L \geq C^L \text{ ou encore :}$$

$$\underline{-h (P^{-1}R)_s^1 \leq \bar{Y}.A^1 - C^1 \quad \forall 1 \in L}$$

Or, $Z^1 = \bar{Y}.A^1$ donc $\bar{Y}.A^1 - C^1 > 0 \quad \forall 1 \in L$ (car $Z^1 - C^1 > 0 \quad \forall 1 \in L$)

Soit $H = \{1 \in L / (P^{-1}R)_s^1 < 0\}$

1er cas : $H = \emptyset$ Pas de solutions finies

2ème cas : $H \neq \emptyset$

$$\text{On pose } h = \min_{1 \in H} \left(\frac{Z^1 - C^1}{-(P^{-1}R)_s^1} \right)$$

Soit e l'indice qui vérifie le minimum

La contrainte d'indice e est saturée.

A cette contrainte, on fait correspondre un coefficient de Kuhn et Tucker $\mu_e < 0$ d'où $X_e > 0$.

X_e est variable entrante.

La variable entrante est la même, à chaque itération, pour les deux méthodes.

Conclusion : Nous avons retrouvé, à travers la méthode du gradient, exactement la méthode duale du simplex.

Nous allons illustrer cette comparaison par un exemple.

C - Exemple

Nous allons reprendre le même exemple décrit dans les chapitres précédents.

On applique la méthode duale du simplex au programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 (P) \quad & \begin{cases} X_1 + 2 X_2 - X_3 + X_4 & = 2 \\ 2 X_1 & + X_3 + X_5 & = 3 \\ - X_1 + X_2 & + X_6 & = 5 \\ - X_1 + 3 X_2 - 2 X_3 & + X_7 & = 1 \\ & - X_2 + X_3 & + X_8 = 7 \\ & & X_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 8 \\ \text{Max } (X_1 + 2 X_2 + 3 X_3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

et la méthode du gradient à son dual (D) :

$$\begin{aligned}
 (D) \quad & \begin{cases} Y_1 + 2 Y_2 - Y_3 - Y_4 & \geq 1 & (1) \\ 2 Y_1 & + Y_3 + 3 Y_4 - Y_5 & \geq 2 & (2) \\ - Y_1 + Y_2 & - 2 Y_4 + Y_5 & \geq 3 & (3) \\ & & Y_i & \geq 0 & i = 1, \dots, 5 \quad ((4), \dots, (8)) \\ \text{Max } (- 2 Y_1 - 3 Y_2 - 5 Y_3 - Y_4 - 7 Y_5) \end{cases}
 \end{aligned}$$

On part d'une base duale - réalisable qui sature (1), (2), (3), (4), (7) de D.

Duale du simplex ((P))

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{X_5}{3} - \frac{X_6}{3} - \frac{X_8}{3} = -3 \\ + \frac{X_5}{3} + \frac{2X_6}{3} - \frac{X_8}{3} = 2 \\ + \frac{X_5}{3} + \frac{2X_6}{3} + \frac{2X_8}{3} = 9 \\ - \frac{2X_5}{3} - \frac{X_6}{3} + \frac{5}{3}X_8 = 10 \end{array} \right.$$

$$X_7 - X_6 + 2X_8 = 10$$

$$28 - 2X_5 - 3X_6 - X_8 = Z$$

$$X_I = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 9 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$X_L = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gradient ((D))

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 + 2Y_2 - Y_3 - Y_4 = 1 \\ 2Y_1 + Y_3 + 3Y_4 - Y_5 = 2 \\ -Y_1 + Y_2 - 2Y_4 + Y_5 = 3 \\ Y_1 = 0 \\ Y_4 = 0 \\ Y_i > 0 \quad i = 2, 3, 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (7) \end{array}$$

$$Y = (0, 2, 3, 0, 1)$$

Les conditions de Kuhn et Tucker donnent :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -9 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix} = -X_I$$

* X_1 est variable sortante

On cherche :

$$\text{Min} \left(\frac{-2}{-1} ; \frac{-3}{1} ; \frac{-1}{+1} \right) = -3$$

donc X_8 est variable entrante

$$X_I = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} \quad X_L = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}$$

$$X_2 \quad - X_1 \quad + X_6 = 5$$

$$X_3 \quad + 2 X_1 + X_5 = 3$$

$$X_4 \quad + 5 X_1 + X_5 - 2 X_6 = -5$$

$$X_7 \quad + 6 X_1 + 2 X_5 - 3 X_6 = -8$$

$$X_8 - 3 X_1 - X_5 + X_6 = 9$$

$$19 - 3 X_1 - 3 X_5 - 2 X_6 = Z$$

* On libère la contrainte d'indice (1)

$$D = (0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3})$$

$h = 3$ et :

La contrainte (8) est saturée

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} Y_1 + 2 Y_2 - Y_3 - Y_4 & & & & & & & & > 1 \\ 2 Y_1 & + Y_3 + 3 Y_4 - Y_5 & & & & & & & = 2 \\ - Y_1 + Y_2 & & - 2 Y_4 + Y_5 & & & & & & = 3 \\ Y_1 & & & & & & & & = 0 \\ & Y_2 & & & & & & & > 0 \\ & & Y_3 & & & & & & > 0 \\ & & & Y_4 & & & & & = 0 \\ & & & & Y_5 & & & & = 0 \end{array} \right]$$

$$Y = (0, 3, 2, 0, 0)$$

$$X_I = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$X_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* X_7 est variable sortante

On cherche :

$$\text{Min} \left(\frac{-3}{-6} ; \frac{-3}{-2} ; \frac{-2}{-3} \right) = -\frac{2}{3}$$

donc X_6 est variable entrante

$$X_I = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_6 \\ X_8 \end{pmatrix}$$

$$X_L = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_5 \\ X_7 \end{pmatrix}$$

Conditions de Kuhn et Tucker :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} = -X_I$$

* On libère la contrainte d'indice (7)

$$D = (0, 2, -3, 1, 0)$$

$$h = \frac{2}{3} \quad \text{et} :$$

la contrainte (6) est saturée.

Contraintes saturées :

$$(2), (3), (4), (6), (8)$$

Contraintes unilatérales :

$$(1), (5), (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} + x_1 + \frac{2}{3}x_5 + \frac{x_7}{3} = \frac{7}{3} \\ + 2x_1 + x_5 = 3 \\ + \frac{8}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_7 = \frac{1}{3} \\ - 2x_1 - \frac{2}{3}x_5 - \frac{x_7}{3} = \frac{8}{3} \\ x_8 - x_1 - \frac{x_5}{3} = \frac{19}{3} \\ \frac{41}{3} - 7x_1 - \frac{13}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_7 = z \end{array} \right.$$

$$x_I = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 3 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix} \quad x_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_I > 0$ donc la solution est optimale et $z^* = \frac{41}{3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 > 1 \\ 2y_1 + y_3 + 3y_4 - y_5 = 2 \\ -y_1 + y_2 - 2y_4 + y_5 = 3 \\ y_1 & = 0 \\ & y_2 > 0 \\ & y_3 = 0 \\ & y_4 > 0 \\ & y_5 = 0 \end{array} \right.$$

$$y = (0, \frac{13}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0)$$

Conditions de Kuhn et Tucker :

$$\mu_I = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -3 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{19}{3} \end{pmatrix} = -x_I$$

$\mu_I < 0$ donc la solution est optimale et :
Min $(2y_1 + 3y_2 + 5y_3 + y_4 + 7y_5) = \frac{41}{3}$

C O N C L U S I O N

1) La méthode du gradient apparaît comme une méthode générale de résolution en programmation linéaire puisqu'elle permet :

- La recherche d'une solution réalisable d'un programme linéaire quelconque.
- La recherche de la solution optimale d'un programme linéaire quelque soit sa présentation :

a) sous forme standard

(Toutes les contraintes sont bilatérales sauf les conditions de signe).

Dans ce cas particulier, on retrouve un algorithme semblable à celui du Simplex.

b) sous forme canonique

(Toutes les contraintes sont unilatérales. Existence des conditions de signe).

c) sous forme mixte ou quelconque

(Contraintes bilatérales, unilatérales avec ou sans conditions de signes, ...).

2) Ces résultats montrent la souplesse de la méthode du gradient puisqu'elle s'adapte à tout type de problèmes en programmation linéaire sans qu'il soit nécessaire de recourir à certains artifices qui alourdissent la présentation et le traitement du programme (variables d'écarts, variables sans conditions de signe).

On peut également, dans certains cas, prévoir un gain en mémoire et temps de calcul par rapport à la méthode du Simplex (cf. DEA de D. ATLAN relatif à la programmation de la méthode du gradient dans le cas de la programmation linéaire).

3) Les méthodes du Simplex apparaissent comme des cas particuliers de la méthode du gradient :

a) Méthode primale du Simplex

Lorsqu'on se place dans les conditions du Simplex (mise sous forme standard puis sous forme simpliciale), on retrouve le même déroulement des deux algorithmes : celui du Simplex et celui du gradient.

b) Méthode duale du Simplex

On retrouve même déroulement de l'algorithme dual du Simplex et de celui du gradient appliqué au dual du programme linéaire sous forme standard.

V - POINT DE VUE INFORMATIQUE : EVOLUTION DE LA MATRICE P_m^{-1}

1. POSITION DU PROBLEME

La méthode du gradient nécessite le calcul du vecteur Δ (gradient réduit "étendu") dans le cas de l'algorithme GRARED ou celui du vecteur D (gradient projeté) dans le cas de l'algorithme GRAPRO.

. Dans le premier cas, Δ est donné par le système :

$$\begin{cases} \Delta \rho = C^{\rho} - C^I P_m^{-1} R_m \\ \Delta I = - P_m^{-1} R_m \Delta \rho \end{cases} \quad (\text{cf. (II3)'})$$

Comment évolue la matrice P_m^{-1} lorsqu'on sature une nouvelle contrainte ?

. Dans le deuxième cas, D est donné par le même système (R_m est, cette fois-ci, un vecteur colonne).

On se propose d'étudier l'évolution de P_m^{-1} lorsqu'on passe d'un ensemble d'indices J_m de contraintes saturées à un nouvel ensemble $J_m + 1$.

2. EVOLUTION DE P_m^{-1} QUAND UNE NOUVELLE CONTRAINTE EST SATURÉE

$$\text{Rappelons que : } P_m = \begin{pmatrix} A^I \\ A^{\rho, I}_J \end{pmatrix} \quad R_m = \begin{pmatrix} A^{\rho} \\ A^{\rho, \rho}_J \end{pmatrix}$$

(voir notations du chapitre II).

Supposons que la nouvelle contrainte saturée s'écrive :

$$A'_{i'} X = B'_{i'} \quad i \in (K / J)$$

Le nombre de variables de base augmente d'une unité.

Soit X_1 cette nouvelle variable de base.

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} A^I & A^1 \\ A'_{J'} & A'_{J'} \\ A'_{i'} & A'_{i'} \end{pmatrix} \quad R_{m+1} = \begin{pmatrix} A^{\rho'} \\ A'_{J'} \\ A'_{i'} \end{pmatrix}$$

où $\rho' = \rho / \{1\}$

$$\text{Posons : } \hat{R} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A'_{J'} \end{pmatrix} \quad \hat{A} = A'_{i'} \quad \epsilon = A'_{i'}$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} P_m & \hat{R} \\ \hat{A} & \epsilon \end{pmatrix}$$

$$\text{Posons } P_{m+1}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & t \end{pmatrix} \quad \text{où :}$$

$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ est une matrice carrée de la dimension de } P_m \\ Y \text{ est un vecteur colonne de la dimension de } \hat{R} \\ Z \text{ est un vecteur ligne de la dimension de } \hat{A} \\ t \text{ est un réel.} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
 P_{m+1} P_{m+1}^{-1} &= \begin{pmatrix} P_m & \hat{R} \\ \hat{A} & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_m X + \hat{R}Z & P_m Y + \hat{R}t \\ \hat{A}X + \epsilon Z & \hat{A}Y + \epsilon t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases}
 P_m X + \hat{R}Z = I & (a) \\
 P_m Y + \hat{R}t = 0 & (b) \\
 \hat{A}X + \epsilon Z = 0 & (c) \\
 \hat{A}Y + \epsilon t = I & (d)
 \end{cases}$$

$$(a) \Leftrightarrow X = P_m^{-1} (I - \hat{R}Z) \text{ d'où :}$$

$$(c) \Leftrightarrow \hat{A}P_m^{-1} - \hat{A}P_m^{-1} \hat{R}Z + \epsilon Z = 0$$

$$\Leftrightarrow Z (\epsilon - \hat{A}P_m^{-1} \hat{R}) = - \hat{A}P_m^{-1}$$

$$\boxed{Z = \frac{\hat{A}P_m^{-1}}{\hat{A}P_m^{-1} \hat{R} - \epsilon}}$$

(V - 2.1)

On en déduit :

$$\boxed{X = P_m^{-1} \left(I - \frac{\hat{R} \hat{A} P_m^{-1}}{\hat{A} P_m^{-1} \hat{R} - \epsilon} \right)}$$

(V - 2.2)

$$(b) \Leftrightarrow Y = - P_m^{-1} \hat{R}t \text{ d'où :}$$

$$(d) \Leftrightarrow \epsilon t - \hat{A}P_m^{-1} \hat{R}t = I$$

$$t = - \frac{1}{\hat{A} P_m^{-1} \hat{R} - \epsilon}$$

(V - 2.3)

$$Y = \frac{P_m^{-1} \hat{R}}{\hat{A} P_m^{-1} \hat{R} - \epsilon}$$

(V - 2.4)

Compte tenu des formules précédentes :

$$P_{m+1}^{-1} = \begin{pmatrix} P_m^{-1} + \frac{YZ}{t} & Y \\ Z & t \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} Y = - P_m^{-1} \hat{R} t \\ Z = - \hat{A} P_m^{-1} t \\ t = \frac{-1}{\hat{A} P_m^{-1} \hat{R} - \epsilon} \end{cases}$$

(V - 2.)

3. EVOLUTION DE P_m^{-1} DANS LE CAS OU n CONTRAINTES SONT SATUREES.

Supposons qu'à une étape quelconque m, on ait n contraintes saturées (égal au nombre de variables)

$$P_m = \begin{pmatrix} A \\ A' J_m \end{pmatrix} \quad J_m \text{ comporte } n - p \text{ indices}$$

Supposons que la solution correspondante ne soit pas optimale et que l'on soit amené à libérer la contrainte d'indice j ($j \in J_m$).

L'algorithme GRAPRO nous permet de trouver un nouvel indice k pour lequel la solution correspondante au nouvel ensemble d'indices :

$J_{m+1} = J_m / \{j\} \cup \{k\}$ est "meilleure" que la précédente.

$$\text{Posons : } P_{m+1} = \begin{pmatrix} A \\ A'_{J_{m+1}} \end{pmatrix}$$

On se propose de chercher P_{m+1}^{-1} en fonction de P_m^{-1} .

Le passage : $P_m \longrightarrow P_{m+1}$ se décompose en deux phases

* $P_m \longrightarrow P'_m$ (après avoir libérée la contrainte d'indice j)

* $P'_m \longrightarrow P_{m+1}$ (après avoir saturée la contrainte d'indice k)

a) Passage de P_m^{-1} à P'^{-1}_m

En gardant les notations du paragraphe précédent :

$$P_m = \begin{pmatrix} P'_m & \hat{R} \\ \hat{A} & \hat{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Posons :

$$P_m^{-1} = \begin{pmatrix} X' & Y' \\ Z' & t' \end{pmatrix}$$

X', Y', Z', t' sont, cette fois-ci, connues et ont les dimensions respectives de $P'_m, \hat{R}, \hat{A}, \hat{\varepsilon}$.

D'après V-2, $X' = P'^{-1}_m + \frac{Y'Z'}{t'}$ d'où : $P'^{-1}_m = X' - \frac{Y'Z'}{t'}$ V - 3

b) Passage de P'^{-1}_m à P_{m+1}^{-1}

Ce passage a été décrit au paragraphe V_2 dans le cas où une nouvelle contrainte est saturée.

BIBLIOGRAPHIE

- J. LEGRAS Algorithmes d'optimisation en problèmes avec
 contraintes et en contrôle optimal
- M. SIMONNARD Programmation linéaire (Paris - Dunod 1962)
- A. KAUFMANN Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle
 (Paris - Dunod 1964)
- R. FAURE Eléments de la recherche opérationnelle
 (Paris - Gauthier - Villars)
- G. DESBAZEILLE Exercices et problèmes de recherche opérationnelle
 (Paris - Dunod 1964)
- H.P. KÜNZI - W. KRELLE et W. OETTLI
 La Programmation non linéaire
 (Paris - Gauthier - Villars)

NOM DE L'ETUDIANT : COHEN Roger

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE SPECIALITE EN INFORMATIQUE

VU, APPROUVE

& PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 10 JUIN 1976

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

