

ScN 68  
65

UNIVERSITE DE NANCY

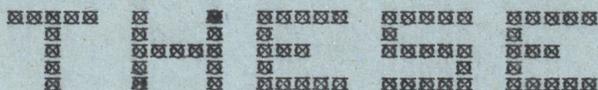
FACULTE DES SCIENCES

Druhe

OPTIMISATION D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

CONTRIBUTION A LA METHODE DU MINIMAX

-----



pour l'obtention du

DOCTORAT de SPECIALITE MATHEMATIQUES (3ème CYCLE)

Soutenu devant le Jury le 27 septembre 1968

par

François CHARLES



-----

Jury : Mr J. LEGRAS      Président  
           Mr M. DEPAIX     Examineurs  
           Mr C. GILCRMINI  
           Mr C. HENSGEN

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

---

OPTIMISATION D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

CONTRIBUTION A LA METHODE DU MINIMAX

---

par François CHARLES

ANNEE SCOLAIRE 1967 - 1968

Docteur \* M. AUBRYAgésseux : M. GAYDocteurs honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - ROUBAULTProfesseurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JULY - LAPORTE - EICHMORN -  
GODENENT - DUBREUIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMANN - LONGCHAMBEON - LETORT -  
DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLNER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - WAHLMaîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRETProfesseurs

DELSARTE	Analyse supérieure	MANGENOT	Botanique
ROUBAULT	Géologie	GAYET	Physiologie
CHAPELLE	Mécanique rationnelle	HADNI	Physique
FILLET	Biologie animale	* BASTICK	Chimie
ARRIOL	Chimie théorique	DUCHAUFOUR	Pédologie
IZETTE	Physique	GARNIER	Agronomie
VILLIEN	Electronique	NEEL	Chimie organique industrielle
LIBERT	Chimie physique	BERNARD	Géologie appliquée
EGRAS	Mécanique rationnelle	* CHAMPIER	Physique
DLFA	Minéralogie	* GAY	Chimie biologique
ICLAUSE	Chimie	STEPHAN	Zoologie
AIVRE	Physique appliquée	* CONDE	Zoologie
UBRY	Chimie minérale	* WERNER	Botanique
OPPENS	Radiogéologie	EYHARD	Calcul différentiel et intégral
UVAL	Chimie	LEVISALLES	Chimie organique
RUHLING	Physique	Mme HERVE	Méthodes mathématiques de la physique
JULY	Géologie	FELDEN	Physique
LE GOFF	Génie chimique	* BOSSE	Mécanique physique
RUNNER	Physique expérimentale	* DAVOINE	Physique (E.N.S.M.I.M.)
CHAPON	Chimie biologique	* HORN	Physique (ex cycle)
HEROLD	Chimie minérale industrielle	* Mme LAMER	Mécanique
SCHWARTZ B.	Exploitation minière		
MALAPRADE	Chimie		
		N...	Chimie biologique
		N...	Mécanique appliquée

( \* Professeurs titulaires à titre personnel)

**Maîtres de conférences**

**Mme BASTICK**  
**Mlle GUDÉPIN**

Chimie P.C. Epinal  
Physique

**WILLAUME**  
**FRENTZ**  
**MARI**  
**AUBOUZE**  
**DEVIOS**  
**FLECHEN**

Psychophysiologie  
Biologie animale  
Chimie (I.S.I.N.)  
Géologie  
Physique du solide  
Physique P.C.  
Mathématiques C.B.S.

**Mlle NIET**

Métallurgie  
Thermodynamique chimique appliquée (E.N.S.I.C.)

**VIGNES**  
**SALISSENT**

Météorologie appliquée (E.N.S.E.)  
Physique P.C. Epinal

**BLAZY**

Pédologie et chimie agricoles  
Physique M.P.

**JANOT**

Entomologie appliquée (E.N.S.A.)  
Chimie P.C.

**JACQUIN**

Mécanique expérimentale  
Météorologie

**HAINARD**

Physico-chimie  
Géologie C.B.S.

**CACHAN**

Chimie appliquée (C.U.C.E.S.)  
Chimie chimique

**MARTIN**

Électrochimie appliquée (Electrochimie)  
Mathématiques appliquées

**PAUMIER**

Physique 1er cycle  
Physique

**PROTAS**

Physique (I.S.I.N.)

**JURZEWICZ**

**JURAIN**

**RIVAIL**

**VILLERMAUX**

**METCHE**

**PAIR**

**BERNARD**

**DURAND**

**GR O U P E**

**M...**

Mécanique des fluides (I.S.I.N.)

**M...**

Mécanique (I.S.I.N.)

**M...**

Probabilités et statistiques

**M...**

Mathématiques

**M...**

Mathématiques P.C.

**M...**

Mathématiques C.B.S.

**M...**

Physiologie animale

**M...**

Physiologie M.P.

**M...**

Équitation militaire (E.N.S.M.I.N.)

Cette étude a été menée sous la direction de  
Monsieur le Professeur J. LEGRAS, Directeur de l'Institut Universitaire  
de Calcul Automatique, à partir d'un chapitre de son cours d'optimisation.

Qu'il soit assuré de ma profonde gratitude pour son soutien  
efficace et son souci d'ouverture vers les problèmes réels.

Je remercie Monsieur HENSGEN, Ingénieur à la Compagnie  
Internationale pour l'Informatique, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à  
cette étude et l'appui de son expérience.

J'assure de toute ma reconnaissance Messieurs DEPAIX et  
GILORMINI qui m'ont honoré de leur participation au Jury.

## SOMMAIRE

- 1 -

Introduction

### I. PRELIMINAIRES

- I.1. Recherche du maximum d'une fonction.
- I.2. Le calcul de la fonction.
- I.3. Le domaine de recherche.
- I.4. Minimisation du coût de la recherche.
- I.5. L'unimodalité.
- I.6. Les méthodes de recherche.

### II. PLANS DE RECHERCHE MINIMAX SUR UN INTERVALLE DE LONGUEUR FINIE.

- II.1. Minimisation du maximum de l'intervalle final.
- II.2. Méthode de Fibonacci.
- II.3. Méthode des parties proportionnelles.
- II.4. Comparaison des méthodes de Fibonacci et des parties proportionnelles.
- II.5. Méthode mixte.
- II.6. Economie d'expériences.

### III. PLANS DE RECHERCHE MINIMAX EN PROBABILITE.

- III.1. Exposé de la méthode.
- III.2. Exemples de fonctions de répartition.

### IV. OPTIMISATION PAR APPROXIMATION.

- IV.1. Interpolation par une parabole.
- IV.2. Méthode des tangentes.
- IV.3. Interpolation par un polynôme de degré quelconque.

### V. CHOIX D'UNE METHODE DE RECHERCHE.

- V.1. Les critères de choix.
- V.2. Comment choisir une méthode de recherche.

### VI. RECHERCHE AVEC CONTRAINTES.

- VI.1. Les intervalles de travail.
- VI.2. Méthode n°1: Minimisation du nombre de calculs de la fonction.
- VI.3. Méthode n°2: Minimisation du nombre de calculs du système de contraintes.
- VI.4. Méthode n°3: Minimisation du nombre de points.
- VI.5. Méthode n°4: Minimisation du nombre de points sans calculer la fonction hors de l'intervalle de recherche.
- VI.6. Cas où l'une des bornes est connue à l'avance.
- VI.7. Etude complète d'une méthode de recherche avec contraintes.

CONCLUSION

INTRODUCTION  
=====

Cette étude a pour but d'établir différentes méthodes de recherche d'un optimum d'une fonction réelle d'une variable réelle en vue de leur utilisation sur des problèmes particuliers. Un second problème se greffe sur le premier, celui de la recherche de la méthode la plus rapide.

Les méthodes de recherche pourront, bien entendu, être utilisées pour résoudre des problèmes d'optimisation de fonctions d'une seule variable. Mais elles pourront également l'être dans l'optimisation de fonctions de plusieurs variables. Pour cela, on se reportera utilement à la thèse de Vienney "Optimisation de fonctions de plusieurs variables", IUCA Nancy.

Après avoir défini les problèmes au chapitre I, nous envisagerons différents types de méthodes de recherche : minimax (chapitre II), minimax en probabilité (chapitre III), interpolation par un polynôme (chapitre IV), que nous comparerons au chapitre V. Enfin, nous étudierons au chapitre VI le cas où l'intervalle de recherche est défini par un système de contraintes.

I - PRELIMINAIRES  
=====

I.I. Recherche du maximum d'une fonction :

Etant donné un intervalle  $I$  de l'axe réel, on dispose d'une méthode numérique qui permet, pour toute valeur  $y$  de  $I$ , de calculer un nombre réel  $f(y)$ .

On définit ainsi une fonction  $f$  de  $I$  sur l'axe réel.

On se pose le problème suivant :

Déterminer dans l'intervalle  $[a,b]$  intérieur à  $I$ , un point  $y_M$  (ou une valeur approchée de  $y_M$  avec une précision  $\epsilon$ ), tel que la fonction  $f$  soit maximum en ce point.

La recherche d'un minimum de  $f$  se ramène à la recherche d'un maximum de  $-f$ .

On résoud ce problème au moyen d'expériences.

Effectuer une expérience signifie :

- 1) choisir un point  $x$  dans  $I$
- 2) calculer la valeur  $f(x)$
- 3) utiliser le résultat obtenu pour la recherche du maximum de  $f$ .

Le calcul se fait numériquement. La distance entre les emplacements de deux expériences doit être au minimum égale à un nombre positif appelé séparation.

Pour trouver le maximum, on définit un plan de recherche, c'est à dire, un procédé qui détermine l'ensemble des emplacements des expériences à effectuer, et qui interprète les résultats obtenus.

I. 2. Le calcul de la fonction f :

Dans ce qui précède la fonction f a été définie en général. Nous rencontrerons dans la suite les cas particuliers suivants :

a) f est une fonction explicite de la seule variable y :

C'est ce type de fonctions que nous utiliserons comme premiers exemples d'application des méthodes de recherche.

b) Utilisation dans la recherche du maximum d'une fonction de plusieurs variables : (Voir Vienney :

Soit une fonction réelle g de l variables  $x_1, x_2, \dots, x_l$  définie dans un sous ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^l$ .

Soit D une droite de  $\mathbb{R}^l$  définie par ses cosinus directeurs  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l)$ .

Pour trouver le maximum de la fonction g sur la droite D, on est amené à chercher le maximum de la fonction.

$f(y) = g(x_1 + \xi_1 y, x_2 + \xi_2 y, \dots, x_l + \xi_l y)$  et on se ramène au cas précédent.

c) Cas où il y a des liaisons entre les variables :

Soit une fonction réelle g de  $q+1$  variables réelles  $x_1, x_2, \dots, x_{q+1}$  définie dans un sous ensemble  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{q+1}$ .

Les variables  $x_1, x_2, \dots, x_{q+1}$ , sont en outre liées par q relations de la forme

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{q+1}) = 0$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{q+1}) = 0$$

---

$$\varphi_q(x_1, x_2, \dots, x_{q+1}) = 0$$

où les  $\varphi_i$  sont des fonctions réelles de  $x_1, x_2, \dots, x_{q+1}$  définies dans  $\Omega$ .

Pour trouver un maximum de la fonction  $g$ , on choisit une des variables soit  $x_i$ , comme libre.

Etant donnée une valeur de  $x_i$ , on résoud alors, si c'est possible, le système de  $q$  équations à  $q$  inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{q+1}$ .

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_{q+1}) = 0 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_{q+1}) = 0 \\ \dots \\ \varphi_q(x_1, \dots, x_{q+1}) = 0 \end{cases}$$

Connaissant les valeurs de  $q+1$  variables, on peut alors calculer  $g(x_1, \dots, x_{q+1})$ . On définit ainsi une fonction  $f(x_i)$ .

On rencontre notamment ce cas dans la recherche du maximum d'une fonction de plusieurs variables. Les liaisons sont, soit données au départ, soit des contraintes saturées.

(Voir Vienney :

### I.3. Le domaine de recherche.

Nous supposerons toujours que l'intervalle de recherche  $[a, b]$  est connexe. Si au contraire,  $[a, b]$  possède plusieurs parties séparées, on effectuera une recherche sur chacune d'elles.

L'intervalle  $[a, b]$  a été défini en général. Dans la suite, nous rencontrerons divers cas particuliers :

a) L'intervalle de recherche est limité par deux bornes  $a$  et  $b$  finies ou infinies

C'est le cas le plus simple. Nous l'emploierons pour établir les méthodes de recherche sur un intervalle.

b) L'intervalle de recherche est défini par un système de contraintes :

Une contrainte est une inégalité large de la forme  $\varphi(y) \geq 0$  où  $\varphi(y)$  est une fonction réelle de  $y$  que nous considérerons définie partout sur l'axe réel.

L'intervalle de recherche est alors défini par un système de la forme :

$$\varphi_1(y) \geq 0, \varphi_2(y) \geq 0, \dots, \varphi_p(y) \geq 0$$

Nous n'envisagerons que le cas où les solutions du système appartiennent à un intervalle connexe de l'axe réel.

Les fonctions  $\varphi_i$  peuvent être des fonctions explicites de  $y$ , mais aussi peuvent dépendre de plusieurs variables liées par un système de liaisons.

Au cours de la recherche du maximum d'une fonction de  $l$  variables, les contraintes sont définies dans l'espace  $\mathbb{R}^l$  (voir Vienney)

La recherche avec contraintes se révèle beaucoup plus compliquée que la recherche sur un intervalle dont on connaît les bornes. C'est pourquoi elle fera l'objet d'un chapitre spécial (voir chapitre VI) quand les méthodes de recherche auront été établies dans le cas où l'on connaît les bornes de l'intervalle.

c) Une borne de l'intervalle de recherche est connue, l'autre est définie par un système de contraintes.

Il s'agit d'un cas particulier du précédent. Les méthodes générales de recherche avec contraintes se trouvent allégées.

De plus, c'est le cas qu'on rencontre au cours de la recherche à plusieurs variables. On définit une direction de recherche à partir d'un point connu, l'autre borne étant définie par le système

de contraintes. (Voir Vienney :

#### I.4. Minimisation du coût de la recherche :

Pour nous, le coût de la recherche s'exprimera en temps de calcul.

Un plan de recherche sera donc d'autant meilleur que le temps de calcul pour obtenir le maximum avec une précision donnée sera plus faible.

On a intérêt en premier lieu, à effectuer les expériences séquentiellement. Le résultat d'une expérience peut alors être utilisé pour choisir les expériences suivantes.

Il s'agit d'un plan séquentiel.

Le calcul comprend :

- 1) les calculs successifs de la fonction  $f$ .
- 2) s'il y a des contraintes, les calculs successifs de ces contraintes.
- 3) s'il y a des liaisons, les résolutions de système des liaisons.
- 4) le plan de recherche lui-même.

On cherchera donc à minimiser les temps de calcul de ces différentes parties de la recherche.

#### I.5. L'unimodalité :

Si on ne sait rien sur la fonction  $f$ , une seule méthode est possible, calculer  $f$  en tout point de  $[a,b]$ . Par contre, si on connaît des propriétés de la fonction, telles que l'unimodalité, on peut les utiliser pour améliorer le plan de recherche.

Une fonction réelle  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de l'axe réel, est unimodale sur  $I$  si et seulement si

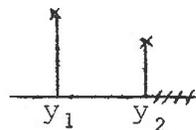
il existe un point  $y_M$  dans  $I$  tel que pour tout couple de points  $y_1$  et  $y_2$  de  $I$ , on ait les relations

$$\begin{cases} y_1 < y_2 \leq y_M & f(y_1) < f(y_2) \\ y_M \leq y_1 < y_2 & \implies f(y_1) > f(y_2) \end{cases}$$

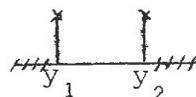
L'unimodalité suppose que  $y_M$  soit le seul maximum de la fonction sur l'intervalle  $I$ , et que la fonction soit strictement monotone sur tout intervalle de  $I$  ne contenant pas  $y_M$ .

Supposons qu'on ait fait 2 expériences en  $y_1$  et  $y_2$  ( $y_1 < y_2$ )  
Trois cas sont possibles :

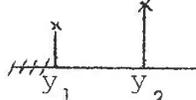
1)  $f(y_1) > f(y_2)$  alors  $y_M < y_2$



2)  $f(y_1) = f(y_2)$  alors  $y_1 < y_M < y_2$



3)  $f(y_1) < f(y_2)$  alors  $y_1 < y_M$



Dans les trois cas, on peut réduire l'intervalle initial. On pourra donc choisir les points de façon telle que l'intervalle diminue rapidement au cours de la recherche.

Dans la recherche du maximum d'une fonction de plusieurs variables, l'utilisation de l'unimodalité nécessite que sur toute droite l'espace, la fonction soit unimodale.

La condition d'unimodalité est généralement assez facilement vérifiable à une variable. A plusieurs variables, on ne peut pas en dire autant.

(Voir Vienney :

### I.6. Les méthodes de recherche.

Au cours de cette étude, nous nous limiterons d'abord au cas où l'intervalle de recherche est donné par ses bornes  $a$  et  $b$ .

Dans ce cas, les contraintes n'interviennent évidemment pas dans le temps de calcul.

Comme alors, on résoud le système des liaisons, s'il y a lieu, en chaque point où on calcule la fonction, minimiser le temps de calcul revient à minimiser le nombre d'expériences.

En utilisant l'unimodalité, il est possible de réduire l'intervalle restant après chaque nouvelle expérience.

Nous verrons au chapitre II que les méthodes minimax permettent de minimiser cet intervalle restant, si l'intervalle initial est de longueur finie.

Pour le cas où l'intervalle est de longueur infinie, nous établirons au chapitre 3, une méthode dérivée des méthodes minimax.

Si la fonction est convexe, on peut obtenir des méthodes plus rapides que les précédentes en approchant la fonction à étudier par un polynôme (voir chapitre 4).

Au chapitre 5, nous comparerons les différentes méthodes dans le but de choisir la plus adaptée aux différents problèmes particuliers.

Enfin, nous envisageons au chapitre 6, comment adapter les méthodes précédentes au cas où l'intervalle de recherche est défini par un système de contraintes.

II - PLANS DE RECHERCHE MINIMAX  
=====

II.I. Minimisation du maximum de l'intervalle final

L'intervalle de recherche  $[a, b]$  est un intervalle de longueur finie  $L_0$ .

On effectue  $n$  expériences,  $n$  fixé à l'avance.

On désigne par  $L_i$  la longueur de l'intervalle restant après la  $i$ ème expérience.

On ne peut pas réduire l'intervalle après le seul calcul de  $f(x_i)$  donc  $L_i = L_0$ .

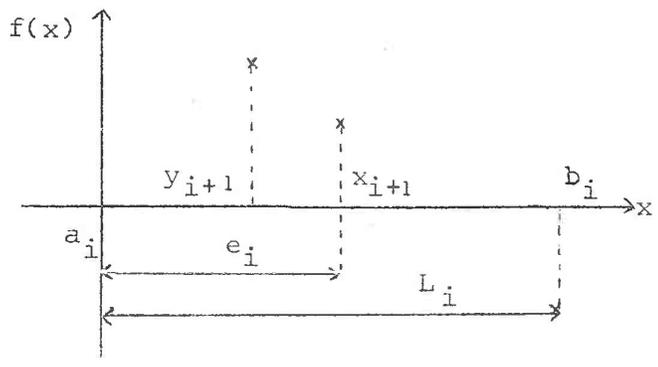
En général, pour réduire l'intervalle de longueur  $L_i$ , il est nécessaire d'y avoir effectué deux expériences  $x_{i+1}$  et  $y_{i+1}$  et de comparer les résultats  $f(x_{i+1})$  et  $f(y_{i+1})$ .

On se place en  $x_{i+1}$  et on appelle  $a_i$  la borne (de l'intervalle) qui est du côté de  $y_{i+1}$  ; l'autre s'appellera  $b_i$

Notons  $d_i = |b_i - y_{i+1}|$  et  $e_i = |a_i - x_{i+1}|$

Une fois les expériences faites, trois cas sont à envisager :

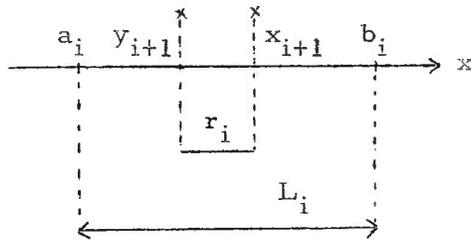
I)  $f(x_{i+1}) < f(y_{i+1})$



La longueur de l'intervalle restant est  $e_i$

Dans cet intervalle, une expérience a déjà été effectuée.

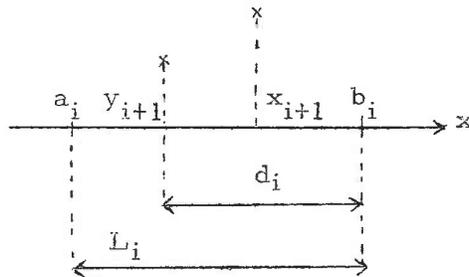
2)  $f(x_{i+1}) = f(y_{i+1})$



La longueur de l'intervalle restant est  $r_i = L_i - e_i - d_i$

Dans cet intervalle, on n'a pas encore effectué d'expérience.

3)  $f(x_{i+1}) > f(y_{i+1})$

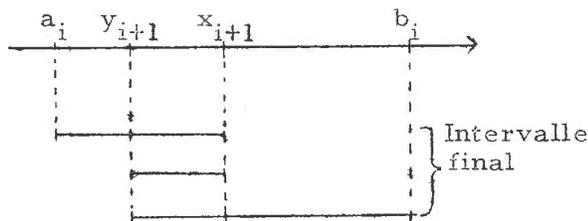


La longueur de l'intervalle restant est  $d_i$

Dans cet intervalle on a déjà effectué une expérience en  $x_{i+1}$

Le maximum de la longueur de l'intervalle restant est donc

Max  $[e_i, d_i]$



Dans les trois cas, cet intervalle restant est constitué par  $[y_{i+1}, x_{i+1}]$  avec en plus un autre intervalle (qui peut être réduit à un point, ou égal à  $[x_{i+1}, b_i]$  ou  $[a_i, y_{i+1}]$ )

Dans la suite, on ne considérera comme intervalle restant que le plus défavorable, c'est à dire, celui où l'intervalle à ajouter à  $[y_{i+1}, x_{i+1}]$  est le plus grand. Soit  $L_{i+1}$  la longueur de l'intervalle restant le plus défavorable.

Dans celui-ci, on a déjà effectué une expérience. Son abscisse sera désignée par  $y_{i+2}$ . Il suffira alors de choisir  $x_{i+2}$ .

On doit choisir  $x$  dans un intervalle de longueur  $L_i$ , où on n'a pas encore effectué d'expérience, mais dès que  $x_1$  est choisi on se trouve dans le cas précédent.

On a donc deux problèmes à résoudre :

1°) Comment choisir la première expérience dans un intervalle de longueur  $L_0$  ?

2°) Comment choisir la  $i+1$ ème expérience dans un intervalle de longueur  $L_i$ , dans lequel on a déjà effectué une expérience en  $y_{i+1}$  ?

Un plan de recherche à  $n$  expériences,  $n$  donné à l'avance sera dit minimax si la longueur  $L_n$  est minimum.

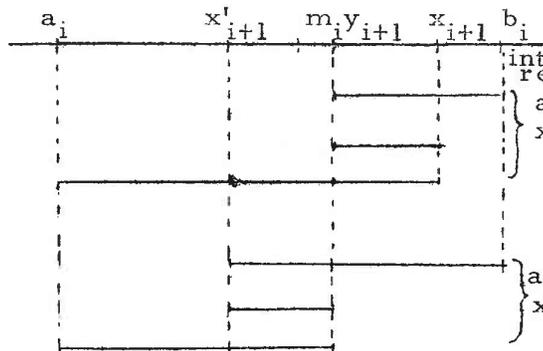
On cherche donc à résoudre les deux problèmes précédents pour que le plan de recherche soit minimax.

Choix de la  $i+1$ ème expérience :

On désigne par  $m_i$  le milieu de l'intervalle restant après la  $i$ ème expérience.

Envisageons les différentes possibilités pour placer  $x_{i+1}$ .

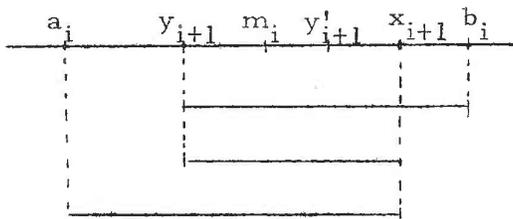
1) On place  $x_{i+1}$  entre  $y_{i+1}$  et la borne la plus proche (en supposant  $y_{i+1} \neq m_i$ )



Soit  $x'_{i+1}$  le symétrique de  $x_{i+1}$  par rapport à  $y_{i+1}$ . L'intervalle final est plus favorable avec  $x'_{i+1}$  qu'avec  $x_{i+1}$ . On prendra donc toujours  $x_{i+1}$  entre  $y_{i+1}$  et la borne la plus éloignée.

Soit  $y'_{i+1}$  le symétrique de  $y_{i+1}$  par rapport à  $m_i$

2) On place  $x_{i+1}$  entre  $y'_{i+1}$  et  $b_i$



L'intervalle final aurait été plus favorable si on avait placé  $x_{i+1}$  en  $y'_{i+1}$

Si  $|y_{i+1} - y'_{i+1}| > \epsilon$ , cela est possible et dans ce cas on prendra toujours

$$x_{i+1} \in [y_{i+1}, y'_{i+1}]$$

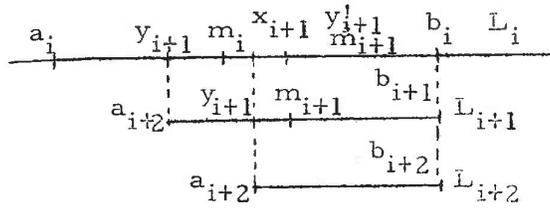
Sinon la meilleure position pour  $x_{i+1}$  est distante de  $y_{i+1}$  de  $\xi$  et elle est unique

3) Dans le cas  $|y_{i+1} - y'_{i+1}| > \epsilon$ , avec  $x_{i+1} \in [y_{i+1}, y'_{i+1}]$ , l'intervalle restant est  $[y_{i+1}, b_i]$

on pose  $m_{i+1}$  = milieu de  $[y_{i+1}, b_i]$

Deux positions de  $x_{i+1}$  symétrique par rapport à  $m_{i+1}$  sont équivalentes.

On prend la plus proche de  $y_{i+1}$



On peut dire alors que l'intervalle restant après la

(i+1)ème expérience sera

$$[x_{i+1}, b_i] \text{ si } |x_{i+1} - y'_{i+1}| > \frac{\epsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{longueur } [a_i, b_i] &= \text{longueur } [a_i, y_{i+1}] + \text{longueur } [y_{i+1}, b_i] \\ &= \text{longueur } [y'_{i+1}, b_i] + L_{i+1} \\ &= L_{i+1} + L_{i+2} - \text{longueur } [x_{i+1}, y'_{i+1}] \end{aligned}$$

Posons  $\delta_{i+1} = \text{longueur } [x_{i+1}, y'_{i+1}]$

On a alors la relation

$$\boxed{L_i = L_{i+1} + L_{i+2} - \delta_{i+1}} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

Les nombres de Fibonacci

On développe la formule précédente

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 + L_3 - \delta_2 \\ &= 2L_3 + L_4 - (\delta_2 + \delta_3) \\ &= 3L_4 + 2L_5 - (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4) \end{aligned}$$

Posons en général :

$$L_1 = F_k L_{k+1} + F_{k-1} L_{k+2} - \sum_{j=1}^{j=k} F_{j-1} \delta_{j+1} \text{ où les } F_k \text{ sont des entiers}$$

alors on a aussi

$$L_1 = (F_k + F_{k+1}) L_{k+2} + F_k L_{k+3} - \sum_{j=1}^{j=k+1} F_{j-1} \delta_{j+1}$$

Si  $h = k+1$

$$L_1 = (F_{h-1} + F_{h-1}) L_{h+1} + F_{h-1} L_{h+2} - \sum_{j=1}^{j=h} F_{j-1} \delta_{j+1}$$

On a donc  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

$$F_0 = F_1 = 1$$

Les nombres entiers ainsi définis sont les nombres de Fibonacci.

$$\begin{aligned} F_0 &= F_1 = 1 \\ F_k &= F_{k-1} + F_{k-2} \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

Si on pose  $k=n-2$ , on obtient la formule donnant  $L_1$

$$L_1 = F_{n-2} L_{n-1} + F_{n-3} L_n - \sum_{j=1}^{n-2} F_{j-1} \delta_{j+1}$$

### Propriétés des nombres de Fibonacci

$$\begin{aligned} F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1} &= F_n (F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-1} (F_n + F_{n-1}) \\ &= F_n F_{n-2} - F_{n-1}^2 \\ &= - \left[ F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2} \right] \end{aligned}$$

On répète l'opération  $n-2$  fois :

$$F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1} = (-1)^{n-2} \left[ F_2^2 - F_1 F_3 \right] = (-1)^{n-1} \left[ F_1^2 - F_2 F_0 \right] = (-1)^n$$

$$(2) \quad \boxed{F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1} = (-1)^n}$$

$$\begin{aligned} F_{n+1} F_n - F_{n+2} F_{n-1} &= (F_n + F_{n-1}) F_n - (F_{n+1} + F_n) F_{n-1} \\ &= F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^n \end{aligned}$$

$$(3) \quad \boxed{F_{n+1} F_n - F_{n+2} F_{n-1} = (-1)^n}$$

On divise par  $F_n F_{n+2}$

$$(4) \quad \boxed{\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+2}}}$$

Table des premiers nombres de Fibonacci

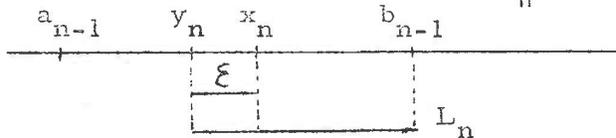
n	F <sub>n</sub>								
0	1	11							
1	1	11	144	21	17711	31	2178309	45	1836311903
2	2	12	233	22	28657	32	3524578	50	20365011074
3	3	13	377	23	46368	33	5702887	55	225851433717
4	5	14	610	24	75025	34	9227465	60	2504730781961
5	8	15	987	25	121393	35	14930352	65	27777890035288
6	13	16	1597	26	196418	36	24157817	70	308061521170129
7	21	17	2584	27	317811	37	39088169	75	3416454622906707
8	34	18	4181	28	514229	38	63245986	80	37889062373143906
9	55	19	6765	29	832040	39	102334155	85	420196140727489673
10	89	20	10946	30	1346269	40	165580141	90	4660046610375530309

Optimisation de l'efficacité

L'efficacité d'un plan de recherche est le rapport  $\frac{L_1}{L_n}$  entre les longueurs des intervalles initial et final.

$$\frac{L_1}{L_n} = F_{n-2} \frac{L_{n-1}}{L_n} + F_{n-3} - \sum_{j=1}^{j=n-1} F_{j-1} \delta_{j+1}$$

Le maximum possible pour  $\frac{L_{n-1}}{L_n}$  est  $2 - \frac{\xi}{L_n}$



Les  $\delta_j$  sont minimum quand ils sont nuls.

Pour qu'un plan soit minimax, il suffirait que  $\begin{cases} L_{n-1} = 2L_n - \xi \\ L_i = L_{i+1} + L_{i+2} \quad s \leq i \leq n-2 \end{cases}$

alors on aurait  $\frac{L_1}{L_n} = 2F_{n-2} + F_{n-3} - F_{n-2} \frac{\xi}{L_n}$

Comme  $2F_{n-2} + F_{n-3} = F_{n-2} + (F_{n-2} + F_{n-3}) = F_{n-2} + F_{n-1} = F_n$

$$\frac{L_1}{L_n} = F_n - F_{n-2} \frac{\xi}{L_n}$$

ou encore

$$L_n = \frac{L_1 + \xi F_{n-2}}{F_n}$$

Ceci étant vrai pour tout n, le plan ne comprenant que les n-1 dernières expériences, appliqué à L<sub>2</sub> donne :

$$L_n = \frac{L_2 + \xi F_{n-3}}{F_{n-1}}$$

d'où  $\frac{L_1 + \xi F_{n-2}}{F_n} = \frac{L_2 + \xi F_{n-3}}{F_{n-1}}$

c'est à dire  $L_2 = \frac{F_{n-1} L_1 + \xi (-1)^n}{F_n}$

La 1<sup>e</sup> expérience une fois déterminée, toutes les autres sont déterminées par L<sub>i</sub> = L<sub>i+1</sub> + L<sub>i+2</sub>, donc tout le plan de recherche.

Il existe donc un plan de recherche qui minimise L<sub>n</sub> quand n est fixé.

### 1.2 Recherche de Fibonacci

#### Construction d'un plan de recherche de Fibonacci

On fixe à priori le nombre n d'expériences

La 1<sup>e</sup> expérience est placée à une distance

de l'une des bornes de l'intervalle initial de longueur L<sub>1</sub>.

$$L_2 = \frac{F_{n-1} L_1 + (-1)^n \xi}{F_n}$$

Chaque expérience suivante est placée, dans l'intervalle restant, au point symétrique du point de l'expérience déjà effectuée



ce qui entraîne :

$$L_i = L_{i+1} + L_{i+2}$$

A la fin de la recherche, la dernière expérience est alors placée à une distance  $\xi$  de l'expérience déjà faite dans l'intervalle restant.

$$\text{d'où } L_{n-1} = 2L_n - \xi$$

Nombre maximum d'expériences :

La longueur  $L_n$  de l'intervalle final doit être au moins égale à  $2\xi$ . Comme  $\xi$  est donné, le nombre d'expérience possibles est donc limité.

$$\text{Comme } L_n = \frac{L_1 + \xi F_{n-2}}{F_n}, \text{ on doit avoir } L_1 + F_{n-2} \xi \geq 2F_n \xi$$

$$\text{c'est à dire } \frac{L_1}{\xi} \geq 2F_n - F_{n-2} = F_n + (F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-2} = F_{n+1} \text{ pour tout } n$$

Le nombre maximum  $m$  d'expériences est donc tel que :

$$F_{m+1} \leq \frac{L_1}{\xi} < F_{m+2}$$

$m$  est d'autant plus grand que  $\frac{\xi}{L_1}$  est petit.

$\xi/L_1$	$m$	$L_m$
0.1	4	0.240 000 00
0.01	9	0.022 000 00
0.001	14	0.002 021 31
0.0001	18	0.000 277 37
0.00001	23	0.000 025 39
0.000001	28	0.000 002 33
0.0000001	33	0.000 000 21
0.00000001	37	0.000 000 03

Calcul de la longueur de l'intervalle final :

La longueur de l'intervalle final est donné par

$$L_n = \frac{L_1 + \xi F_{n-2}}{F_n}$$

n	$\frac{\xi}{L_1} = 10^{-3}$	$\frac{\xi}{L_1} = 10^{-6}$	$\frac{\xi}{L_1} = 10^{-9}$	
5	0.125 000 00	0.125 000 37	0.125 037 50	0.128 750 00
10	0.011 235 96	0.011 236 34	0.011 274 16	
15	0.011 013 10	0.001 013 55	0.001 051 37	
20	0.000 091 36	0.000 091 74		
25	0.000 008 24	0.000 008 62		
30	0.000 000 75			
35	0.000 000 07			

Dans le cas où  $\xi$  est petit par rapport à  $L_1$ , cinq expériences font gagner une décimale environ et la précision obtenue est à peu près proportionnelle au nombre d'expériences.

Il est donc possible d'estimer à l'avance la précision obtenue après  $n$  expériences, ou de trouver le nombre d'expériences nécessaires pour obtenir une précision donnée à l'avance.

Calcul pratique : Méthode de Fibonacci

Les données du problème sont :

$f(x)$  la fonction à optimiser

$a$  et  $b$  les bornes de l'intervalle de recherche ( $a < b$ )

$n$  le nombre d'expériences ( $n \geq 2$ )

$\xi$  la séparation (distance minimale entre 2 expériences)

Les résultats sont :

$y$  abscisse du maximum de la fonction  $f$

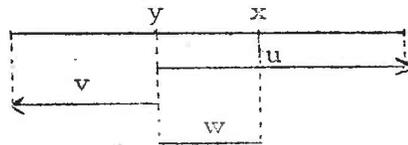
$f_y$  valeur de la fonction  $f$  en  $y$

$l_f$  longueur de l'intervalle final.

Dans un intervalle restant, l'expérience déjà effectuée s'appelle  $y$ , celle qui va l'être s'appelle  $x$ .

$u$  et  $v$  sont les mesures algébriques des vecteurs issus de  $y$  ayant pour extrémités les bornes de l'intervalle avec toujours  $|u| > |v|$

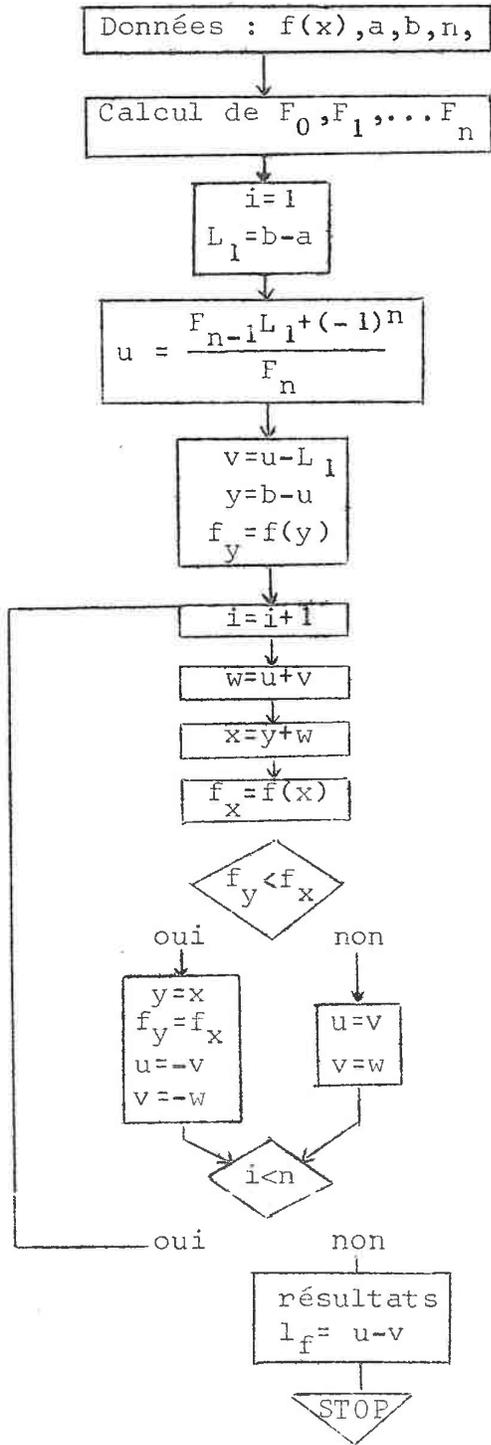
Par définition,  $w = u + v$ , alors on a  $x = y + w$



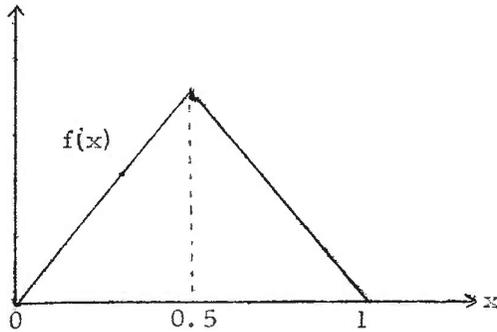
Pour démarrer le plan de recherche à  $n$  expériences, il faut connaître les nombres de Fibonacci  $F_{n-1}$  et  $F_n$ .

La suite des calculs est décrite sur l'organigramme.

Organigramme de la méthode de Fibonacci.



Exemple d'application de la méthode de Fibonacci :



On cherche le maximum de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

dans l'intervalle  $[0, 1]$

On utilise pour le calcul 8 chiffres significatifs.

Pour diverses valeurs de n, et  $\xi = 10^{-6}$ , on obtient les résultats suivants :

n	y	$l_f$
2	0.499 999	0.50
3	0.333 333	0.33
4	0.400 000	0.20
5	0.500 000	0.12
6	0.461 538	0.077
7	0.476 190	0.048
8	0.499 999	0.029
9	0.490 909	0.018
10	0.494 382	0.011
11	0.500 000	0.006 9
12	0.497 854	0.004 3
13	0.498 674	0.002 7
14	0.500 001	0.001 6
15	0.499 494	0.001 0
16	0.499 688	0.000 62
17	0.500 002	0.000 39
18	0.499 888	0.000 23
19	0.499 931	0.000 15
20	0.500 012	0.000 082
21	0.499 973	0.000 056
22	0.499 973	
23	0.499 973	

Il est inutile de donner à  $n$  une valeur supérieure à 20, ce qui fait qu'on ne peut pas dépasser une précision de l'ordre de  $10^{-4}$ .

On ne peut se demander ce qui se passe lorsqu'on fait varier  $\xi$ . On constate que les résultats sont les mêmes tant que  $\xi$  est suffisamment petit (environ jusqu'à  $10^{-5}$ ). Ensuite le nombre maximum d'expériences  $m$  devient inférieur à 20, et c'est lui qui, alors, limite le nombre d'expériences.

3 Méthode des parties proportionnelles.

Plan minimax limite quand  $n \rightarrow \infty$ , et  $\xi \rightarrow 0$ :

L'emplacement de la première expérience tend vers une limite quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\xi \rightarrow 0$ , avec la condition  $F_{n+1} \leq \frac{L_1}{\xi}$

Posons en effet  $t_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$

$$\text{alors } t_n^2 = \frac{F_n^2}{F_{n-1}^2} = \frac{F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^n}{F_{n-1}^2} = \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{F_{n-1}^2} = \frac{F_n}{F_{n-1}} + \frac{F_{n-1}}{F_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{F_{n-1}^2}$$

d'où 
$$t_n^2 = t_n + 1 + \frac{(-1)^n}{F_{n-1}^2}$$

Cette équation du 2<sup>e</sup> degré en  $t_n$  a pour racine positive

$$t_n = \frac{1 + \sqrt{\Delta_n}}{2} \quad \text{où } \Delta_n = 5 + \frac{4(-1)^n}{F_{n-1}^2}$$

Quand  $n$  tend vers l'infini,  $\Delta_n$  tend vers 5,  $t_n$  a pour limite le nombre d'or  $\tau$  défini par l'équation  $\tau^2 = \tau + 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

Cherchons l'écart entre  $t_n$  et  $\tau$  quand  $n$  tend vers l'infini

$$F_n - \tau F_{n-1} = F_{n-1} + F_{n-2} - \tau F_{n-1} = (1 - \tau)F_{n-1} + F_{n-2} = (1 - \tau) \left[ F_{n-1} + \frac{1}{1 - \tau} F_{n-2} \right]$$

Comme  $\frac{1}{1 - \tau} = -\tau$ ,  $F_n - \tau F_{n-1} = (1 - \tau) [F_{n-1} - \tau F_{n-2}]$

Par récurrence  $F_n - \tau F_{n-1} = (1 - \tau)^{n-1} [F_1 - \tau F_0]$

d'où : 
$$F_n - \tau F_{n-1} = (1 - \tau)^n$$

On tire  $F_n$  en fonction de  $\tau$  dans la relation précédente :

$$\begin{aligned}
F_n &= (1-\tau)^n + \tau F_{n-1} \\
&= (1-\tau)^n + \tau(1-\tau)^{n-1} + \tau^2 F_{n-2} \\
&= \text{-----} \\
&= (1-\tau)^n + \tau(1-\tau)^{n-1} + \dots + \tau^{n-1}(1-\tau) + \tau^n F_0 \\
F_n &= \sum_{i=0}^{i=n} (1-\tau)^{n-i} \tau^i = \frac{\tau^{n+1} (1-\tau)^{n+1}}{\tau - (1-\tau)}
\end{aligned}$$

d'où l'équation de Lucas

$$F_n = \frac{\tau^{n+1} - (1-\tau)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

Propriétés de la méthode des parties proportionnelles :

On choisit l'emplacement de la 1<sup>e</sup> expérience de telle sorte que  $\frac{L_1}{L_2} = \tau$ .

Ensuite chaque expérience est choisie dans l'intervalle restant au symétrique de l'expérience déjà effectuée par rapport au milieu de l'intervalle.

Les intervalles successifs sont déterminés par

$$\begin{cases} \frac{L_1}{L_2} = \tau \\ L_{i-1} = L_{i+1} + L_i \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Supposons que pour  $i$ ,  $\frac{L_{i-1}}{L_i} = \tau$ , alors

$$\frac{L_{i+1}}{L_i} = \frac{L_{i-1} - L_i}{L_i} = \frac{L_{i-1}}{L_i} - 1 = \tau - 1 = \frac{1}{\tau} \text{ donc } \frac{L_i}{L_{i+1}} = \tau$$

Comme  $\frac{L_{i-1}}{L_i} = \tau$  est vrai pour  $i=2$ , c'est aussi vrai pour  $2$

$2 \leq i \leq n-1$ .

On aura donc

$$\boxed{\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_2}{L_3} = \dots = \frac{L_{i-1}}{L_i} = \dots = \frac{L_{n-1}}{L_n} = \tau} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{L_1}{L_i} = \tau^{i-1}}$$

d'où l'efficacité  $\frac{L_1}{L_n} = \tau^{n-1}$

En calcul pratique, on prendra la meilleure valeur approchée pour  $\tau$ , et si on choisit chaque fois l'expérience suivante de la même manière, on retrouvera une méthode de Fibonacci quand  $n$  est trop grand.

On aura donc intérêt à choisir la nouvelle expérience en utilisant le rapport  $\tau$  entre deux intervalles successifs : c'est la méthode des parties proportionnelles.

Elle ne présente aucun des inconvénients cités plus haut de la méthode de Fibonacci.

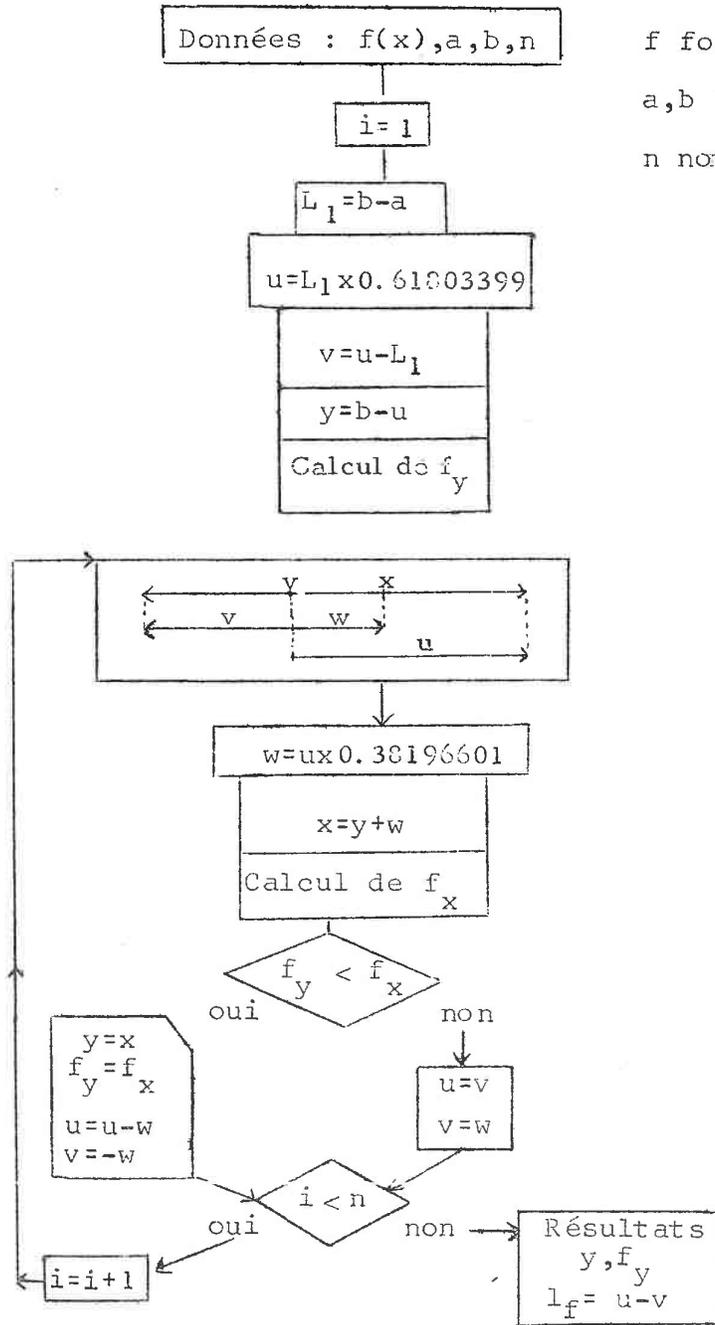
- 1) il n'est pas nécessaire de connaître  $n$  au départ.
- 2) la précision  $n$  est limitée que par la précision du calcul
- 3)  $\xi$  n'intervient pas, et la méthode est très sûre
- 4) le calcul de l'emplacement de la  $i^e$  expérience est fait une fois pour toutes.

Le nombre maximum d'expériences est déterminé par

$L_{m+2} \geq \xi > L_{m+3}$  c'est à dire

$$\boxed{\frac{1}{\tau^{m+1}} < \frac{\xi}{L_1} \leq \frac{1}{\tau^m}}$$

Calcul pratique : Méthode des parties proportionnelles.



f fonction à optimiser.

a, b bornes de l'intervalle.

n nombre d'expériences (n ≥ 2)

y valeur approchée du maximum.

f<sub>y</sub> valeur de f en y  
l<sub>f</sub> longueur de l'intervalle final.

Comparaison de l'efficacité des méthodes de Fibonacci et des parties proportionnelles.

Après  $n$  expériences, l'intervalle final d'une recherche de Fibonacci est

$$L_n = \frac{L_1 + \xi F_{n-2}}{F_n}$$

Celui d'une recherche par parties proportionnelles est

$$L'_n = \frac{L_1}{\varphi^{n-1}}$$

donc 
$$\frac{L_n}{L'_n} = \frac{L_1 + \xi F_{n-2}}{F_n} \cdot \frac{\varphi^{n-1}}{L_1} = \left[ 1 + \frac{\xi}{L_1} F_{n-2} \right] \cdot \frac{\varphi^{n-1}}{F_n}$$

Comparons  $F_n$  et  $\varphi^{n-1}$  :

n	$F_n$	$\varphi^{n-1}$
2	2	1,618
3	3	2,618
4	5	4,236
5	8	6,854
10	89	76,013
15	987	842,988
20	10 946	9 349
25	121 393	103 682
30	1 346 269	1 149 851
35	14 930 352	12 752 043
40	165 580 141	141 422 327

Appliquons l'équation de Lucas :

$$\frac{\varphi^{n-1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^2 [1 - (\varphi^{-2})^{n+1}]}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\varphi^2} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{2} = 0,854$$

Le terme  $(\varphi^{-2})^{n+1}$  décroît très rapidement quand  $n$  augmente.

Pour  $n = 5, (\varphi - 2)^{n+1} = \frac{1}{\varphi^{12}} = \frac{1}{322} = 0,003$

Si  $\xi$  est assez petit, le rapport  $\frac{L_n}{L'_n}$  est de l'ordre de 0,25.

Alors la méthode de Fibonacci est plus intéressante.

En fait, intervient le facteur  $1 + \frac{\xi}{L_1} F_{n-2}$  qui tend à diminuer l'écart

entre les résultats des deux méthodes.

Il peut même aller jusqu'à l'annuler. Prenons le cas où  $L_1$  et  $\xi$  sont tels que  $\frac{L_1}{\xi} = \varphi^{n+1}$ , où  $n$  est entier. Alors une recherche par parties proportionnelle à  $n$  expériences conduira à un intervalle final de longueur  $L'_n = \frac{L_1}{\varphi^{n-1}} = \varphi^2 \xi$

Une recherche de Fibonacci à  $n$  expériences conduira à un intervalle final  $L_n = \frac{L_1 + \xi F_{n-2}}{F_n} = \xi \frac{\varphi^{n+1} + F_{n-2}}{F_n}$

Comme  $F_{n-2} \varphi^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} [\varphi^{n-1} (1 + \varphi^2 \sqrt{5}) - (1 - \varphi)^{n-1}] = \frac{\varphi^2 [\varphi^{n+1} - (1 - \varphi)^{n+1}]}{\sqrt{5}} = \varphi^2 F_n$

on a également  $L_n = \varphi^2 \xi$ .

Exemple : On cherche le maximum de la fonction  $\sin 2x$  sur l'intervalle  $[0, 1]$

Le maximum se trouve en  $\frac{\pi}{4} = 0,78539816$

On se donne  $\xi = 10^{-8}$

et on calcule avec 8 chiffres significatifs.

n	Fibonacci		Parties proportionnelles		
	maximum	$L_n$	maximum	$L'_n$	$L_n/L'_n$
2	0.500 000	0.500	0.618 034	0.618	1,236
5	0.750 000	0.125	0.763 932	0.145	1,160
10	0.786 517	0.011 2	0.785 218	0.013 1	1,170
15	0.785 208	0.001 01	0.785 218	0.001 18	1,170
20	0.785 406	0.000 082	0.785 391 330	0.000 107	
25			0.785 391 330	0.000 007 64	
30			0.785 391 330	0.000 000 869	
35			0.785 391 330	0.000 000 078	
40			0.785 391 330	0.000 000 007	

Remarque : la fonction est pratiquement égale à 1 à partir de  $n=18$ . C'est pourquoi, il n'est pas possible de trouver une valeur plus précise du maximum.

1.4. Méthode mixte

Principe de la méthode :

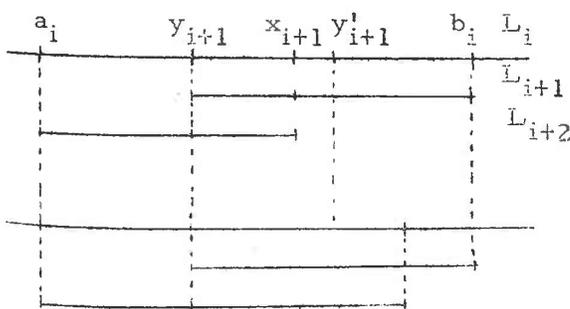
On a vu que si  $n$  est grand, les méthodes de Fibonacci et des parties proportionnelles se confondent pratiquement dans une première phase pour se séparer ensuite.

Dans une première phase, on utilisera donc la méthode des parties proportionnelles qui est alors la seule possible du point de vue calcul. Ensuite, dans une seconde phase, on utilisera la méthode de Fibonacci.

Soit  $i$  le nombre d'expériences par la méthode des parties proportionnelles,

Soit  $p$  le nombre d'expériences par la méthode de Fibonacci. Le problème est le passage d'une méthode à l'autre. Dans l'intervalle restant après les  $i$  premières expériences, on a déjà effectué une expérience  $y_{i+1}$ .

On placera  $x_{i+1}$  comme première expérience d'un plan de Fibonacci à  $p$  expériences dans l'intervalle  $[y_{i+1}, b_i]$



Si  $x_{i+1}$  appartient à  $[y_{i+1}, y'_{i+1}]$  on aura gagné si l'intervalle restant est  $[y_{i+1}, b_i]$  puisque la recherche devient alors minimax.

et aussi si l'intervalle restant est  $[x_{i+1}, a_i]$  puisqu'on aura réduit la longueur de l'intervalle restant.

Par contre si  $x_{i+1} \in [y'_{i+1}, b_i]$ , l'intervalle restant le plus défavorable sera alors  $[a_i, x_{i+1}]$  et on aura perdu en efficacité.

La méthode n'est donc valable que si  $x_{i+1}$  appartient à  $[y_{i+1}, y'_{i+1}]$  alors  $L_{i+1} = |b_i - y_{i+1}|$  et  $L_{i+2} = |b_i - x_{i+1}|$

On sait que  $\frac{L_i}{L_{i+1}} = \tau$

1

$$L_{i+2} = \frac{F_{p-1} L_{i+1} + (-1)^p \epsilon}{F_p}$$

La condition  $x_{i+1} \in [y_{i+1}, y'_{i+1}]$  s'écrit aussi  $L_{i+2} \geq \frac{L_{i+1}}{\tau}$

c'est à dire  $\frac{F_{p-1} L_{i+1} + (-1)^p \epsilon}{F_p} \geq \frac{L_{i+1}}{\tau}$  ou encore

$$(-1)^p \epsilon \geq L_{i+1} (F_p - \tau F_{p-1})$$

Comme  $F_p - \tau F_{p-1} = (1 - \tau)^p$ , on a finalement :  $(-1)^p L_{i+1} \leq (-1)^p \epsilon \tau^{p+1}$

Si  $p$  est pair,  $L_{i+1} \leq \epsilon \tau^{p+1} \iff \frac{L_{i+1}}{\epsilon} \leq \tau^{p+1}$

Si  $p$  est impair,  $L_{i+1} \geq \epsilon \tau^{p+1} \iff \frac{L_{i+1}}{\epsilon} \geq \tau^{p+1}$

Longueur de l'intervalle final

$$\frac{L_1}{L_n} = \frac{L_1}{L_i} \cdot \frac{L_{i+1}}{L_n} \cdot \frac{L_i}{L_{i+1}}$$

En appliquant les résultats précédents de la méthode des parties proportionnelles  $\frac{L_1}{L_i} = \tau^{i-1}$

de la méthode de Fibonacci  $\frac{L_{i+1}}{L_n}$  est tel que  $L_n = \frac{L_{i+1} + \epsilon F_{p-2}}{F_p}$

et si  $x_{i+1} \in [y_{i+1}, y'_{i+1}]$ ,  $\frac{L_i}{L_{i+1}} = \tau$

Donc  $L_n = \frac{L_1 \tau^{-i} + \epsilon F_{p-2}}{F_p}$

$$\text{d'où l'efficacité } \frac{L_1}{L_n} = \frac{F_p}{\tau^{-i} + \frac{\varepsilon}{L_1} F_{p-2}}$$

Comparaison de l'efficacité de la méthode de Fibonacci et de la méthode mixte.

$$\text{A la fin de la recherche, } \frac{L_n(\text{mixte})}{L_n(\text{Fibonacci})} = \frac{(L_1 \tau^{-i} + \varepsilon F_{p-2}) F_n}{F_p (L_1 + \varepsilon F_{n-2})} =$$

$$\frac{F_n}{F_p \tau^i} \cdot \frac{L_1 + \varepsilon \tau^i F_{p-2}}{L_1 + \varepsilon F_{n-2}}$$

$$\text{Sachant que } F_k = \frac{\tau^{k+1}}{\sqrt{5}} \left[ 1 - (1-\tau)^{2k+2} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{L_n(\text{mixte})}{L_n(\text{Fibonacci})} &= \frac{1 - (1-\tau)^{2n+2}}{1 - (1-\tau)^{2p+2}} \cdot \frac{1 + \frac{\varepsilon}{L_1} \tau^i F_{p-2}}{1 + \frac{\varepsilon}{L_1} F_{n-2}} \\ &= \left[ 1 + \frac{(1-\tau)^{2p+2} (1 - (1-\tau)^{2i})}{1 - (1-\tau)^{2p+2}} \right] \times \left[ 1 + \frac{\frac{\varepsilon}{L_1} [\tau^i F_{p-2} - F_{n-2}]}{1 + \frac{\varepsilon}{L_1} F_{n-2}} \right] \end{aligned}$$

Supposons  $p = 15$ , alors  $(\tau-1)^p$  est de l'ordre de  $10^{-3}$ , ainsi que  $\tau^i F_{p-2} - F_{n-2}$  le rapport des efficacités est voisin de 1, à 1/1000 près.

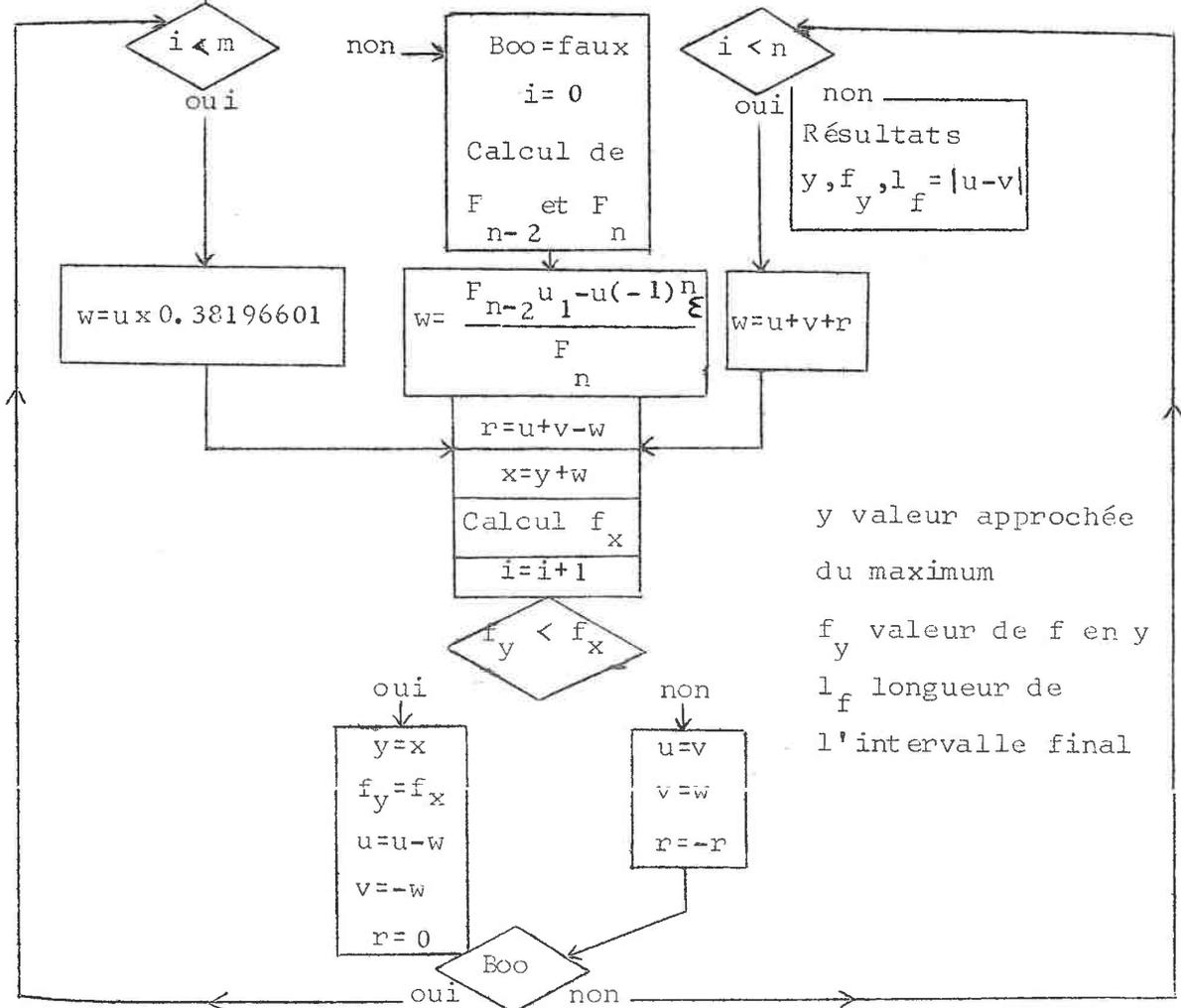
Si on utilise le maximum possible pour  $p$ , la perte d'efficacité théorique de la méthode mixte est négligeable.

Calcul pratique : méthode mixte.

Données : f, a, b, m, n, ε

Boo-Vrai  
 I=1 r=0  
 $L_1 = b - a$   
 $u = L_1 \times 0.61803399$   
 $v = u - L_1$   
 $y = b - u$   
 Calcul de  $f_y$

f fonction à optimiser  
 a, b, bornes de l'intervalle  
 m nombre d'expériences par parties proportionnelles ( $m \geq 1$ )  
 n nombre d'expériences de Fibonacci  
 ε distance minimale entre 2 expériences.



y valeur approchée du maximum  
 $f_y$  valeur de f en y  
 $l_f$  longueur de l'intervalle final

11.5. Comparaison de l'efficacité des différentes méthodes minimax

On envisage divers cas où l'on calcule l'intervalle final avec 10 chiffres significatifs. Dans les méthodes de Fibonacci et mixte, on a pris  $\epsilon = 10^{-8}$ . Les nombres m et p sont les nombres respectifs d'expériences effectuées par Fibonacci et par parties proportionnelles.

Longueur de l'intervalle final

Cas de 2 expériences

Fibonacci	0,500 000 01
Mixte p=1, m=1	0,618 033 97
Parties proportionnelles	0,618 033 99

Cas de 3 expériences

Fibonacci	0,333 333 33
Mixte p=2, m=1	0,381 966 00
Parties proportionnelles	0,381 966 00

Cas de 4 expérience

Fibonacci	0,200 000 00
Mixte p=1, m=3	0,206 011 32
p=3, m=1	0,263 911 60
Parties proportionnelles	0,236 067 97

Cas de 10 expériences

Fibonacci	0,011 236 011
Mixte p=1, m=9	0,011 236 960
p=3, m=7	0,011 959 193
p=5, m=5	0,011 271 246
p=7, m=3	0,011 480 620
p=9, m=1	0,021 286 245
Parties proportionnelles	0,013 155 617

On constate que la méthode mixte est pratiquement aussi efficace que la méthode de Fibonacci, dès que m est ég 1 à 3 ou 5

Longueur de l'intervalle final

Cas de 20 expériences

Fibonacci	résultat non valable
Fibonacci théorique	0,000 091 361 396
Mixte p=1, n=19	résultat non valable
p=3, n=17	0,000 097 820 535
p=5, n=15	091 285 910
p=7, n=13	091 353 431
p=9, n=11	097 320 997
p=11, n=9	097 309 050
p=13, n=7	097 238 065
p=15, n=5	091 645 928
p=17, n=3	093 347 856
p=19, n=1	résultat non valable
Parties proportionnelles	0,000 106 963 30

Dans les cas où la méthode de Fibonacci est inapplicable, on peut cependant utiliser la méthode mixte avec une efficacité équivalente à celle de Fibonacci. (l'intervalle final théorique de Fibonacci est obtenu par la formule  $L_n = \frac{L_1 + \epsilon \cdot F_{n-2}}{F_n}$  )

Cas de 40 expériences

Fibonacci	résultat non valable
Fibonacci théorique	maximum d'expériences dépassé
Mixte p 20, n 20	résultat non valable
p=23, n=17	0,889.10 <sup>-8</sup>
p=29, n=11	0,879.10 <sup>-8</sup>
p=37, n= 3	0,617.10 <sup>-8</sup>
Parties proportionnelles	0,707.10 <sup>-8</sup>

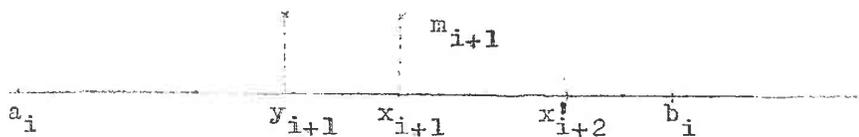
Ceci confirme les résultats précédents : on a intérêt à n'employer la méthode de Fibonacci qu'en fin de recherche.

II.6. Economie d'expériences :

Les méthodes minimax, sous leurs conditions d'utilisation, garantissent à l'avance, pour un nombre donné d'expériences, la longueur de l'intervalle final. Mais il peut se trouver au cours de la recherche des cas privilégiés qui font que certaines expériences sont inutiles et qu'on pourra donc obtenir l'intervalle final avec moins d'expériences que prévu.

Egalité des valeurs à comparer.

Après avoir effectué la ième expérience, on a obtenu  $f(y_i) = f(x_i)$  alors l'intervalle restant est  $[y_{i+1}, x_{i+1}]$ .



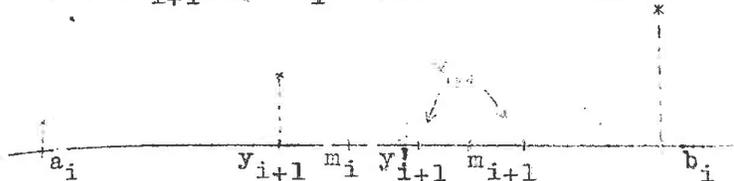
Pour établir le plan minimax, on a supposé l'intervalle final égal à  $(y_{i+1}, b_i)$  ou  $(x_{i+1}, a_i)$ . On aurait alors choisi, par exemple,  $x_{i+2}$  symétrique de  $x_{i+1}$  par rapport à  $m_{i+1}$ . L'intervalle restant aurait été  $(y_{i+1}, x_{i+2})$  et on aurait alors choisi  $x_{i+3}$  entre  $y_{i+1}$  et  $x_{i+1}$ . Dans le cas présent, l'expérience en  $x_{i+2}$  est inutile. On peut donc économiser une expérience. Ceci est valable quelle que soit la méthode minimax utilisée.

Utilisation des bornes.

On se place au cours de la recherche, après la ième expérience. Les bornes  $a_i$  et  $b_i$  de l'intervalle restant peuvent l'une ou l'autre, être bornes de l'intervalle primitif. Mais elles peuvent

aussi être des points d'expériences précédentes. Il est donc possible qu'on connaisse les valeurs  $f(a_i)$  et  $f(b_i)$ , ou l'une des deux seulement.

1°)  $f(y_{i+1}) \leq f(b_i)$  alors nécessairement  $f(a_i) < f(y_{i+1})$ . Le maximum

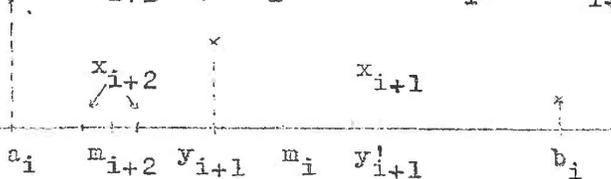


se trouve certainement dans l'intervalle  $(y_{i+1}, b_i)$

On aura donc le choix pour  $x_{i+1}$  entre deux

positions dans l'intervalle  $(y_{i+1}, b_i)$ .

2°)  $f(y_{i+1}) \leq f(a_i)$  d'où  $f(b_i) < f(y_{i+1})$  alors le maximum se trouve



dans  $(a_i, y_{i+1})$ . Il est donc inutile d'effectuer l'expérience

$x_{i+1}$  qu'on aurait du faire en  $y'_{i+1}$ . On gagne ainsi une

expérience. Ensuite, on aura le choix de deux positions pour  $x_{i+2}$ .

Utilisation de "l'économie".

En pratique, l'égalité des valeurs de la fonction est rare quand elle est due uniquement au hasard. En général elle se produit à proximité du maximum, ou parfois d'un palier, et il y a lieu de s'en assurer. On peut notamment tester la distance des deux points où ont été faites les expériences.

Pour l'utilisation des valeurs aux bornes, on aura intérêt à se placer dans le 2ème cas :  $f(y_{i+1}) < f(a_i)$  lorsque c'est possible. Une condition nécessaire en est que  $f(b_i) < f(a_i)$ . Donc chaque fois qu'on aura le choix entre deux valeurs possibles pour l'abscisse de

l'expérience suivante, on se placera le plus près de la borne où la valeur de  $f$  est la plus grande. Si on ne connaît que l'une des bornes, on choisira le point proche de cette borne.

Des essais sur des cas particuliers montrent que le nombre d'expériences économisées varie suivant les fonctions et les intervalles. Par exemple, dans une recherche à 40 expériences, le nombre d'expériences économisées est comprise entre 0 et 4 en général. Exceptionnellement, on trouve des cas où le nombre d'expériences économisées est plus important; il peut aller jusqu'à 20.

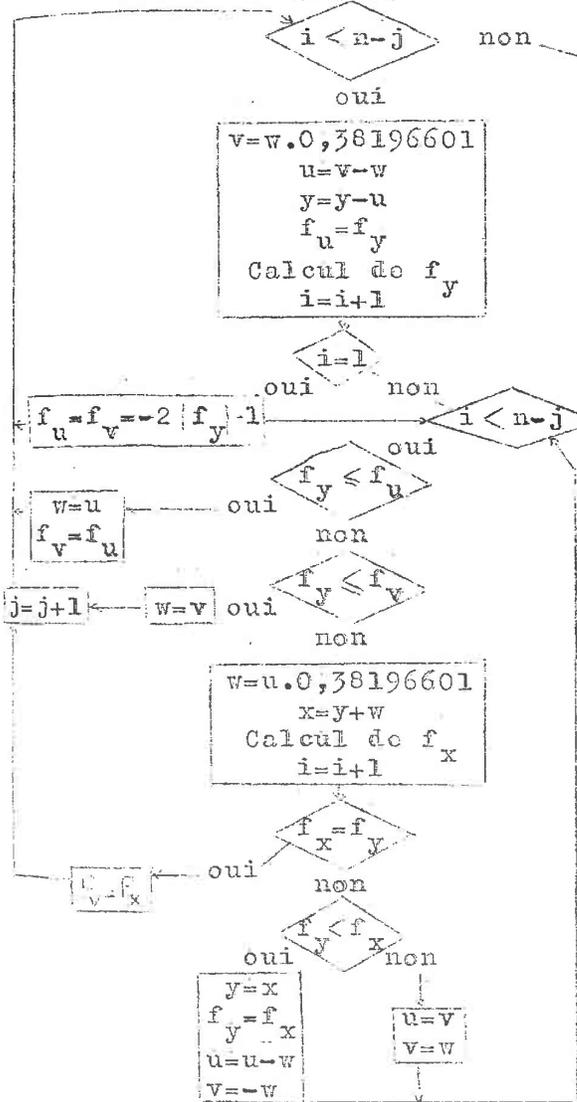
Dans le cas d'une recherche à plusieurs variables, où l'on répète un certain nombre de fois la recherche à une variable, on constate que le nombre d'expériences économisées augmente avec le nombre total d'expériences, et que le rapport de ces deux nombres est de l'ordre de  $1/10$ .

Le procédé s'utilise indifféremment avec les différentes méthodes : Fibonacci, parties proportionnelles, mixte. Nous donnons à titre d'exemple l'organigramme de la méthode des parties proportionnelles avec économie .

Calcul pratique: Méthode des parties proportionnelles avec économie

Données:  $f(x), a, b, n$   
 $i=j=0$   
 $y=a$   
 $w=b-a$

$f$  la fonction à optimiser  
 $a, b$  bornes de l'intervalle  
 $n$  nombre d'expériences ( $n > 2$ )



Résultats:  $y, f_y, l_f, i, j$   
 $y$  valeur approchée du maximum  
 $f_y$  valeur de  $f$  en  $y$   
 $l_f = u - v$  longueur de l'intervalle final  
 $i$  nombre d'expériences effectuées  
 $j$  nombre d'expériences économisées

III - PLANS DE RECHERCHE MINIMAX EN PROBABILITE

=====

III.1. Exposé de la méthode.

Introduction :

Les méthodes minimax sont inutilisables si l'intervalle de recherche (a,b) n'est pas de longueur finie. C'est en particulier le cas dans une recherche à plusieurs variables où on se ramène à la recherche du maximum sur une demi-droite.

Plus généralement, que l'intervalle de recherche soit de longueur finie ou infinie, on envisage le cas où on a des renseignements sur la position du maximum qui en rendent l'apparition plus ou moins probable suivant la position dans l'intervalle. On distinguera alors deux problèmes :

1°) L'estimation de la loi de probabilité du maximum sur l'intervalle de recherche.

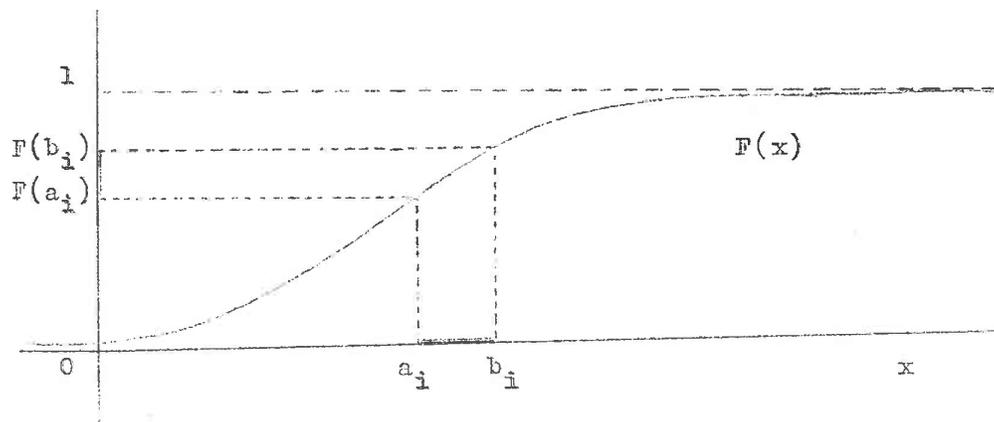
2°) Connaissant cette loi, la recherche d'une stratégie qui minimise le maximum de la probabilité pour que le maximum de f se trouve dans l'intervalle final.

Remarquons que dans la méthode de Fibonacci, on a supposé implicitement que la loi de probabilité du maximum sur l'intervalle initial était une loi uniforme.

Minimisation du maximum de la probabilité de l'intervalle final :

Soit  $f(x)$  une fonction réelle d'une variable réelle, unimodale sur l'intervalle de recherche de longueur finie ou infini. Le maximum  $M$  est une variable aléatoire de fonction de répartition égale à  $F(m)$ .

On cherche à localiser  $M$  par des expériences successives en  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  dont les résultats auront les valeurs  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i), \dots$ . On désigne par  $(a_i, b_i)$  l'intervalle restant après  $i$  expériences. Soit  $P_i$  la probabilité de trouver  $M$  dans l'intervalle  $(a_i, b_i)$ , alors  $P_i = F(b_i) - F(a_i)$ .



Soit un point  $y$  de  $(0,1)$ . Comme  $F$  est une fonction de répartition, il existe un nombre réel  $x$  et un seul tel que  $F(x) \leq y$  et pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $F(x+\epsilon) \geq y$ , c'est à dire qu'on peut toujours définir la fonction  $F^{-1}$  réciproque de  $F$ .

La fonction  $f(F^{-1}(y))$  définie sur  $]0,1[$  est unimodale sur cet intervalle. On pourra donc lui appliquer une méthode minimax.

Après n expériences, l'intervalle final  $(F(a_i), F(b_i))$  a alors pour longueur la probabilité de l'intervalle  $(a_i, b_i)$ . Cette méthode minimise la probabilité de l'intervalle final.

Longueur de l'intervalle final

Après n expériences, on sait que le maximum de la fonction  $f(F^{-1}(y))$  se trouve dans un intervalle de longueur  $1/\tau^{n-1}$ . La probabilité de l'intervalle final de la recherche du maximum de f est donc connue à l'avance. Il n'en va pas de même, en général, pour l'intervalle lui-même.

Après n expériences, on a déterminé un intervalle  $(a_n, b_n)$  contenant n ; les nombres  $a_n$  et  $b_n$  sont tels que :

$$F(b_n) - F(a_n) = \frac{1}{\tau^{n-1}}$$

La longueur de l'intervalle  $(a_n, b_n)$  dépend de la fonction F. Prenons le cas où II possède une densité de probabilité g, il existe entre  $a_n$  et  $b_n$  un nombre  $\xi_n$  tel que  $F(b_n) - F(a_n) = g(\xi_n) \cdot (b_n - a_n)$  d'où  $\frac{1}{\tau^{n-1}} = g(\xi_n) \cdot (b_n - a_n)$  c'est à dire  $n = 1 - \log_{\tau} |g(\xi_n)| - \log_{\tau} (b_n - a_n)$  avec  $b_n - a_n \leq \varepsilon$  et  $\xi_n$  voisin de m.

On voit que n dépend :

- de la densité de probabilité g au voisinage du maximum. Plus celle-ci est grande, plus n sera petit.
- de la longueur exigée pour l'intervalle final; un nombre final plus petit exige un plus grand nombre d'expériences.

III.2. Exemple d'utilisation :

On cherche le maximum d'une fonction unimodale sur  $[0, \infty[$ .  
Le maximum est une variable aléatoire  $M$  de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{h}\right)^p} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ avec } h \text{ et } p \text{ réels positifs,}$$

La fonction inverse de  $F$ , définie sur  $[0, 1[$  est :

$$F^{-1}(y) = h \left[ (1-y)^{-\frac{1}{p}} - 1 \right]$$

On effectue la recherche du maximum de la fonction  $f(F^{-1}(y))$  sur l'intervalle  $(0, 1)$  par des expériences en des points  $y_1, y_2, \dots, y_n$  auxquelles correspondent sur  $[0, \infty[$  des points  $x_1 = F^{-1}(y_1), x_2 = F^{-1}(y_2), \dots, x_n = F^{-1}(y_n)$ .

Signification des paramètres :

La densité de probabilité de  $M$  est  $g(x) = \begin{cases} \frac{F}{h \left(1 + \frac{x}{h}\right)^{p+1}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La moyenne EM est infinie si  $p \leq 1$ , et égale à  $\frac{h}{p-1}$  dans le cas contraire. Le paramètre  $h$  sert d'unité de longueur et détermine l'ordre de grandeur du maximum. Le paramètre  $p$ , lui, donne la répartition du maximum autour de  $h$ .

L'essentiel du comportement de la méthode se situe dans les cas où le maximum est beaucoup plus grand que  $h$ .

Recherche quand M est grand :

On utilise alors des expériences  $x_1, x_2, \dots, x_n$  telles que  $y_1 = 1 - (\tau - 1), y_2 = 1 - (\tau - 1)^2, \dots, y_n = 1 - (\tau - 1)^n$ ,  
d'où en général  $x_n = h \left[ \frac{1}{(\tau - 1)^{\frac{n}{p}} - 1} \right] = h \left[ \tau^{\frac{n}{p}} - 1 \right] = h \left[ \alpha^n - 1 \right]$  où  $\alpha = \tau^{\frac{1}{p}}$   
d'où :  $x_n + h = h \cdot \alpha^n$

Les expériences successives de la recherche sont donc placées suivant une progression géométrique de raison  $\alpha$ .

La progression sera d'autant plus rapide que  $\alpha$  est grand donc que  $p$  est petit. Le paramètre aura donc une grande valeur si l'ordre de grandeur du maximum donné par  $h$  est peu sur. La progression est alors rapide vers le véritable ordre de grandeur.

Par contre, si l'ordre de grandeur de  $M$  est connu, c'est prendre le risque de perdre inutilement du temps; on prendra alors  $\alpha$  plus petit.

Recherche quand M est petit :

Lorsque l'ordre de grandeur de  $M$  est beaucoup plus petit que  $h$  le plan de recherche utilise des expériences en  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tels que  $y_1 = \tau - 1, y_2 = (\tau - 1)^2, \dots, y_n = (\tau - 1)^n$   
d'où  $x_n = h \left[ \frac{1}{[\tau - 1]^{\frac{n}{p}} - 1} \right] \approx \frac{h}{p} (\tau - 1)^n$  pour  $n$  assez grand.

L'intervalle final au bout de  $n$  expériences est de longueur voisine de  $\frac{h}{p} (\tau - 1)^{n-1}$ .

Par exemple, dans le cas  $h=1$ ,  $p=1$  la suite des expériences sera la suivante :

$x_1$	=	0,618	034	00
$x_2$	=	0,170	820	40
$x_3$	=	0,059	017	00
$x_4$	=	0,021	749	20
$x_5$	=	0,008	197	266
$x_6$	=	0,003	115	293
$x_7$	=	0,001	187	653
$x_8$	=	0,000	453	312 5

Les choix des paramètres dépendent du problème particulier. Par exemple, pour la recherche sur une direction au cours de la recherche à plusieurs variables, Vicnney prend pour  $h$  la longueur du déplacement précédent sur une direction et pour  $p$  la valeur 3 ce qui donne  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

IV. Optimisation par approximation de la fonction.

On sait calculer analytiquement le maximum de certaines fonctions.

Etant donnée une fonction quelconque  $f$ , possédant un maximum en  $m$ , on cherche une fonction  $f^*$  possédant un maximum en  $m^*$  qui approche  $f$ . Alors on supposera que  $m^*$  approche  $m$ .

Le procédé devra être itératif car on sera amené à répéter plusieurs fois l'opération.

IV.4 Interpolation par une parabole

On part de trois points  $x_1, x_2, x_3$ .

On calcule les valeurs  $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$  de la fonction  $f$  en ces points

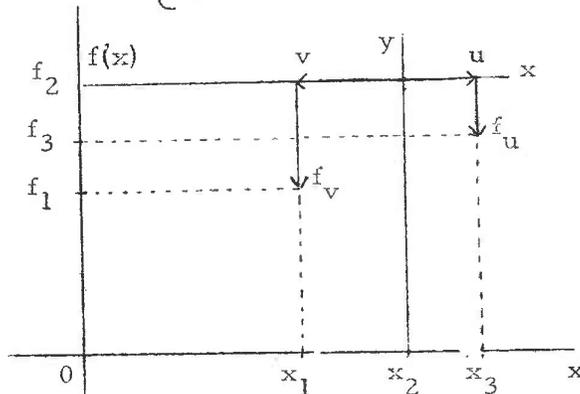
et on cherche le sommet de la parabole passant par les points

$$\begin{cases} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \\ x_3 & f(x_3) \end{cases}$$

Calcul de l'abscisse du sommet

On fait un changement d'axes, en passant  $x_2, f(x_2)$  comme origine

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + v & f(x_1) = f(x_2) + f_v \\ x_3 = x_2 + u & f(x_3) = f(x_2) + f_u \end{cases}$$



La parabole a pour équation par rapport aux nouveaux axes

$$Y = aX^2 + bX + c$$

$$\begin{cases} f_v = av^2 + bv + c \\ 0 = c \\ f_u = au^2 + bu + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{f_v}{v} = av + b \\ \frac{f_u}{u} = au + b \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_u}{u} - \frac{f_v}{v} = a(u-v) \\ \frac{f_u}{u} - \frac{f_v}{v} = a(u-v) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{f_v}{v^2} = a + \frac{b}{v} \\ \frac{f_u}{u^2} = a + \frac{b}{u} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_u}{u^2} - \frac{f_v}{v^2} = b \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right) \\ \frac{f_u}{u^2} - \frac{f_v}{v^2} = b \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right) \end{array} \right.$$

$$a = \frac{1}{u-v} \left[ \frac{f_u}{u} - \frac{f_v}{v} \right]$$

$$b = \frac{1}{u-v} \left[ \frac{u}{v} f_v - \frac{v}{u} f_u \right]$$

L'abscisse du sommet est

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{u}{v} f_v - \frac{v}{u} f_u}{\frac{f_u}{u} - \frac{f_v}{v}}$$

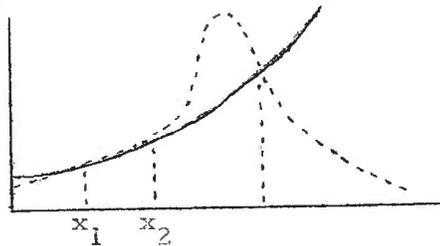
### Construction du procédé itératif

Le maximum  $m$  de la fonction se trouve dans l'intervalle  $[x_1, x_3]$

Moyennant cette hypothèse, on calcule la fonction en  $x_1, x_2, x_3$ .

Deux cas sont possibles

1°)  $a > 0$

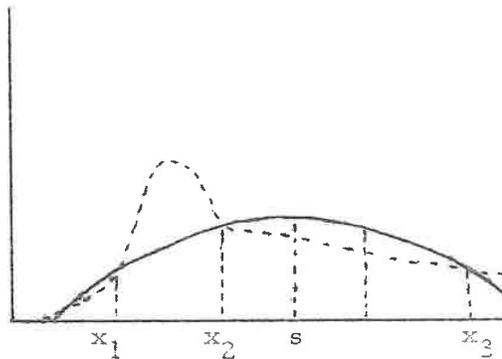


Il n'y a pas alors de maximum. Il faudra choisir un autre point.

La fonction  $f$  étant unimodale, on pourra réduire cependant l'intervalle.

Dans le cas de figure,  $x_1$  devient inutile et on choisira un nouveau point entre  $x_2$  et  $x_3$ .

2°)  $a < 0$



Si  $s$  se trouve dans l'intervalle, on pourra le prendre comme point où se fera l'expérience suivante.

La comparaison du résultat avec  $f_2$  servira à réduire l'intervalle alors soit  $x_1$ , soit  $x_3$  disparaîtra.

On pourrait également choisir  $x_1, x_2, x_3$  à l'intérieur de l'intervalle, mais alors seulement dans le cas où la fonction est convexe.

Sinon on s'expose à une non convergence du processus et il est alors nécessaire de réduire progressivement l'intervalle et de tester a.

La méthode donne d'excellents résultats si la fonction est convexe

Exemple :  $f(x) = \sin 2x \quad x \in [0, 1]$

$$x_1 = 0,1 \quad x_2 = 0,5 \quad x_3 = 1$$

En calculant avec 8 décimales, il faut 4 itérations pour atteindre le maximum de précision.

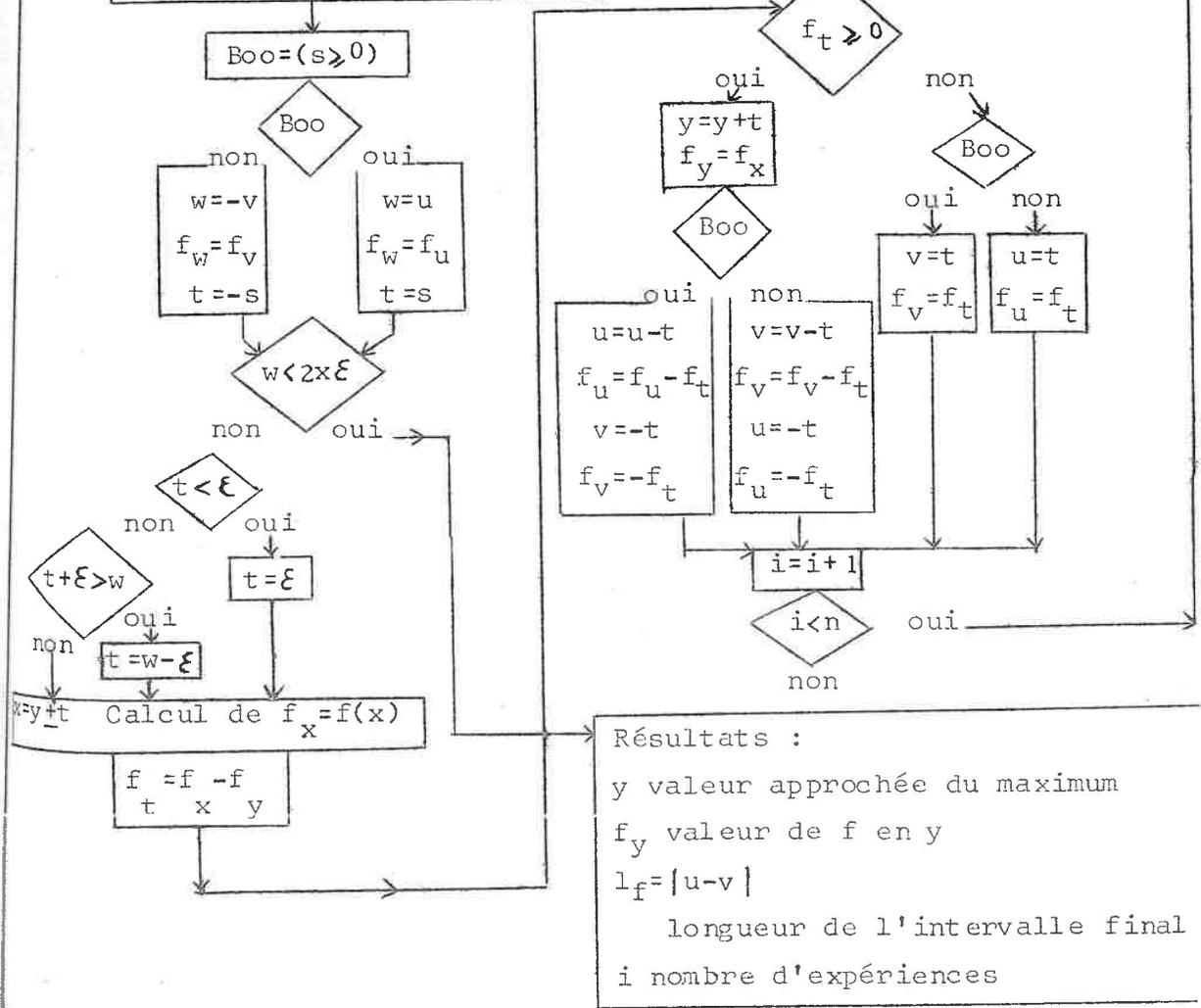
La méthode tombe en défaut si au cours du calcul, deux expériences sont effectuées, a une distance trop faible.

Les longueurs u et v doivent rester constamment dans le même ordre de grandeur.

Calcul pratique : méthode d'interpolation d'une parabole par 3 points.

Données:  $f, x_1, x_2, x_3, \epsilon, n$

$y = x_2 \quad f(y) = f_y = f(x_2)$   
 $u = x_3 - y \quad f_u = f(x_3) - f_y$   
 $v = x_1 - y \quad f_v = f(x_1) - f_y$   
 $i = 3$

$$s = -\frac{1}{2} \frac{\frac{u}{v} \cdot f_v - \frac{v}{u} \cdot f_u}{\frac{f_u}{u} - \frac{f_v}{v}}$$


N° 2 Interpolation par un polynôme du 3<sup>e</sup> degré - Méthode des tangentes.

On donne 
$$\begin{cases} x, f_x = f(x_1), f'_x = f'(x) \\ y, f_y = f(y), f'_y = f'(y) \end{cases}$$

Posons  $u = x_2 - x_1,$

On place l'origine des axes en  $(x_1, 0)$

Le polynôme d'interpolation est alors  $P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$

$$\begin{cases} f_y = au^3 + bu^2 + cu + d \\ f'_y = 3au^2 + 2bu + c \\ f_x = d \\ f'_x = c \end{cases}$$

Posons  $A = au^3, B = bu^2, C = cu, D = d$

alors 
$$\begin{cases} f_y = A + B + C + D & A = uf'_y - 2f_y + C + 2D \\ uf'_y = 3A + 2B + C & B = 3 \frac{f_y}{y} - uf'_y - 2C - 3D \\ f_x = D & C = uf'_x \\ uf'_x = C & D = f_x \end{cases}$$

La dérivée  $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$  a pour discriminant

$$\Delta' = b^2 - 3ac$$

ou  $\Delta' u^4 = B^2 - 3AC$

Si  $\Delta' > 0, P'(x)$  a deux zéros 
$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta'}}{3a} = u \cdot \frac{B \pm \sqrt{\Delta' u^4}}{3A}$$

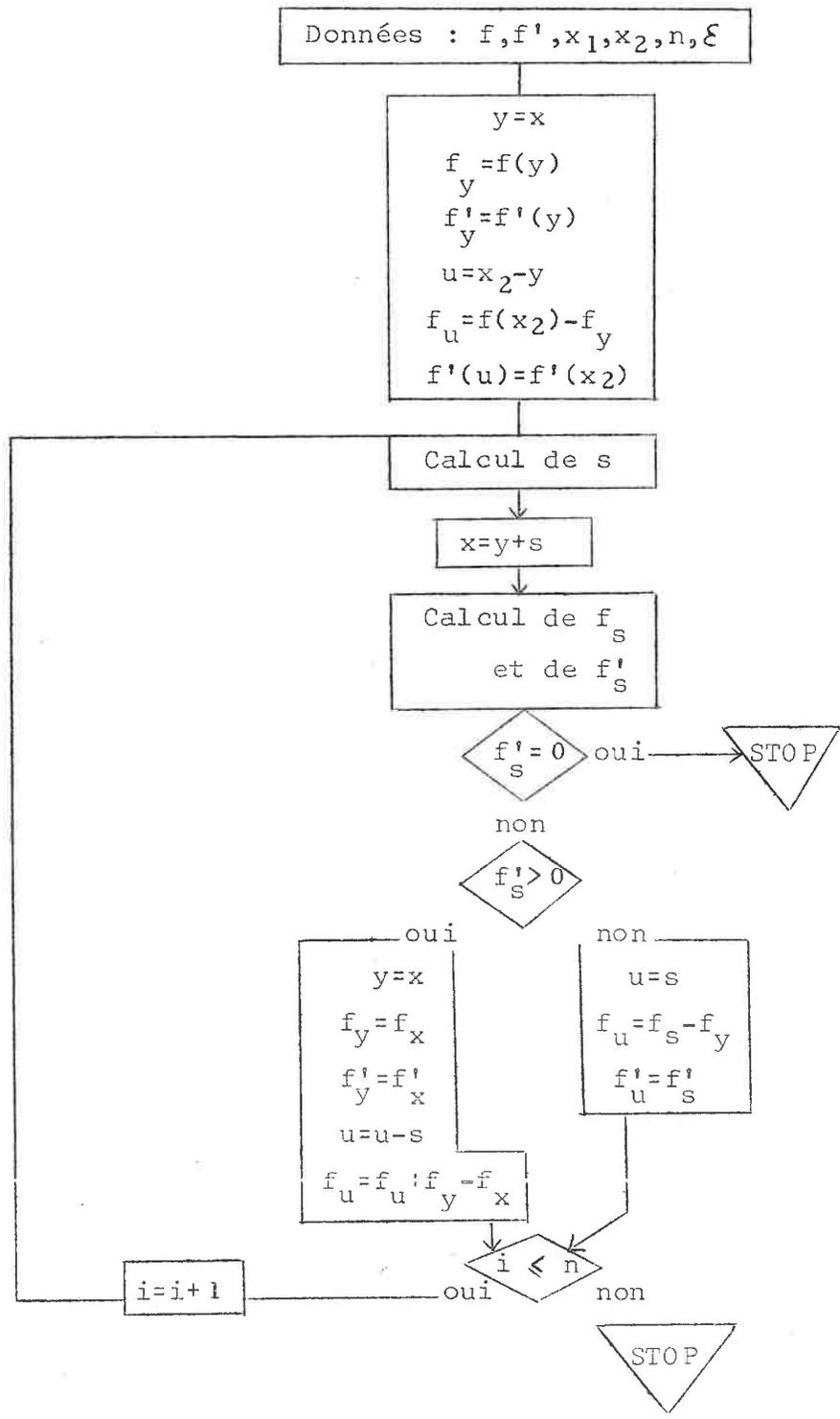
La racine donnant un maximum P est la plus petite si  $a > 0,$  la plus grande sinon

$$s = \frac{-b - \text{signe}(a) \sqrt{\Delta'}}{3A} = -u \frac{B + \text{signe}(A) \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A}$$

Si  $a$  est voisin de 0, alors on obtient le sommet par

$$s = -\frac{c}{2b} = -\frac{u}{2} \cdot \frac{C}{B}$$

Calcul pratique : méthode des tangentes.



IV.3. Interpolation par un polynôme de degré quelconque :

Soient  $n+1$  nombres réels  $g_0, g_1 \dots g_n$  tous distants d'au moins  $\epsilon$ , les valeurs  $f(g_0), f(g_1), \dots f(g_n)$  de  $f$  en ces points.

Soit  $G$  le polynôme  $\prod_{i=1}^{i=n} (x - g_i)$ .

Soit  $D$  le polynôme passant par les  $n+1$  points  $\{g_0, f(g_0)\}, \{g_1, f(g_1)\}, \dots \{g_n, f(g_n)\}$ .

Posons  $Q = \frac{D}{G}$ . On développe  $Q$  en fractions simples :

$$Q = \frac{D}{G} = R_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_i}{x-g_i} \quad \text{où les } R_i \text{ sont des nombres réels.}$$

On obtient les  $R_i$  par la formule  $R_i = \frac{D(g_i)}{G^{(i)}(g_i)}$  où  $G^{(i)}$  est le polynôme  $\frac{G}{x-g_i}$  et  $R_0 = \frac{D(g_0)}{G(g_0)} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_i}{g_0-g_i}$

Alors on obtient  $D = Q \cdot G$ , où  $Q$  et  $G$  sont entièrement déterminés.

Calcul des dérivées de  $G$  :

$$G = \prod_{i=1}^{i=n} (x-g_i) \text{ entraîne } \frac{G'}{G} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x-g_i}$$

$$\text{On pose } S = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x-g_i}$$

$$\text{d'où } G' = G \cdot S$$

$$\text{et } G'' = G \cdot (S^2 + S') \quad \text{avec } S' = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(x-g_i)^2}$$

Calcul des dérivées de  $Q$  :

$$Q = R_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_i}{x-g_i}$$

$$Q' = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_i}{(x-g_i)^2}$$

$$Q'' = 2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{R_i}{(x-g_i)^3}$$

Calcul des dérivées de D :

$$D = G \cdot Q$$

$$D' = G(Q \cdot S + Q')$$

$$D'' = G(Q'' + Q \cdot S' + 2 \cdot Q' \cdot S + Q \cdot S^2)$$

Recherche des zéros de D' :

Soit x une valeur approchée d'un zéro de D'. On obtient une meilleure approximation de la racine de D' en donnant un accroissement Δx à x, égal d'après la formule de Newton, à :

$$x = - \frac{D'(x)}{D''(x)}$$

c'est à dire d'après les formules précédentes :

$$x = - \frac{1}{S + \frac{Q'' + Q' \cdot S + Q \cdot S^2}{Q \cdot S + Q'}}$$

Recherche d'un maximum :

On atteint un maximum de D, en trouvant un zéro de D'. On cherche un maximum de f. Ayant déjà effectué n expériences, on cherche le maximum du polynome passant par ces points, et c'est là qu'on effectue l'expérience suivante. On pourra itérer la formule précédente pour obtenir une valeur précise du maximum.

Remarquons que l'expression de Δx fait intervenir les quantités S, S', Q, Q', Q'' uniquement. Pour chaque nouveau point g<sub>k</sub> on calcule Q = f(g<sub>k</sub>)/G(g<sub>k</sub>) et les quantités S, S', Q', Q'' sont obtenues simplement par addition d'un nouveau terme à leur valeur précédente.

Exemple d'interpolation par un polynome de degré quelconque :

Soit la fonction  $f(x) = \sin x$ . On utilise les résultats obtenus chaque fois qu'on donne trois valeurs initiales.

Plaçons nous d'abord de telle sorte que la fonction soit unimodale. Comme  $\sin x$  admet un maximum en  $\frac{\pi}{2} = 1,570\ 796\ 32$  prenons par exemple  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1,5$  et  $x_3 = 2$ . La progression est alors la suivante :

n	$x_n$	$x_n - \frac{\pi}{2}$
1	1	
2	1,5	
3	2	
4	1,569 431 23	- 0,001 365
5	1,571 540 35	0,000 644
6	1,570 791 00	- 0,000 005 32
7	1,570 794 32	- 0,000 002 00
8	1,570 797 36	- 0,000 001 04
9	1,570 796 63	0,000 000 31
10	1,570 802 16	0,000 005 84

La progression est très rapide, surtout au départ. Elle est cependant limitée. Quand le nombre de points augmente, la valeur de l'erreur augmente aussi. On aura donc intérêt à limiter le nombre de points.

Par exemple, avec  $\epsilon = 10^{-5}$ , la recherche s'arrête après

7 expériences. Les nombres  $g_i$  sont alors :

$g_0 = 1,570\ 800\ 98$	$f_0 = 0,999\ 999\ 999$	$f_i = f(g_i)$
$g_1 = 1,0$	$f_1 = 0,841\ 470\ 979$	
$g_2 = 1,5$	$f_2 = 0,997\ 494\ 980$	
$g_3 = 1,569\ 431\ 23$	$f_3 = 0,999\ 999\ 076$	
$g_4 = 1,570\ 790\ 99$	$f_4 = 0,999\ 999\ 999$	
$g_5 = 1,571\ 540\ 35$	$f_5 = 0,999\ 999\ 731$	
$g_6 = 2$	$f_6 = 0,909\ 297\ 429$	

Le test de sortie compare les nombres  $g_0$  et  $g_4$ . On sait qu'alors la fonction atteint numériquement le maximum; il est donc inutile de poursuivre la recherche.

Supposons qu'au lieu de s'arrêter, on continue la recherche en donnant à  $g_0$  la valeur 3; la recherche continue alors dans cette direction. La progression est alors la suivante :

n	$x_n$	$f(x_n)$
8	3	0,141
9	2,889	0,249
10	3,004	0,136
11	3,002	0,138
12	3,303	- 0,161
13	3,270	- 0,128
14	3,310	- 0,168
15	3,300	- 0,158
16	7,780	0,987
17	7,587	0,964
18	7,786	0,997
19	7,783	0,997
20	7,807 98	0,998 942
21	7,804 12	0,998 757
22	7,808 85	0,998 981
23	7,801 99	0,998 648
24	7,854 36	0,999 999 932

On constate que la méthode converge vers un autre maximum de la fonction  $f$  qui se trouve en  $\frac{5\pi}{2} = 7,853\ 981\ 63$ .

La convergence est cependant beaucoup moins rapide, et la convergence n'est pas sûre.

De toutes façons, cette méthode peut aussi bien converger sur un minimum si on n'est pas assuré à l'avance que la fonction possède un seul maximum donc est unimodale dans le domaine de recherche.

Voici quelques exemples de résultats de recherche :

$\epsilon$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_M$	$f(x_M)$	$n$ (nombre d'expériences)
0,001	1	5	10	7,853 760	1	8
0,0001	1,5	2	3	- 1,570 804	-1	30
0,0001	0	0,1	0,2	-45,552 6	-1	11
0,001	0	0,05	0,1	32,986 7	1	15
0,001	0,1	0,2	0,3	- 1,570 809	-1	9
0,001	0	0,2	0,4	- 1,570 819	-1	9
0,001	0,1	0,3	0,5	1,570 802	1	10

Conclusion :

L'organigramme de cette méthode est semblable à celui de la méthode d'interpolation par une parabole. Le succès de la recherche dépend des mêmes conditions. La comparaison des deux méthodes dans des cas pratiques montre qu'on ne gagne rien, en général, à augmenter le degré du polynôme, et qu'on y perd à coup sur quand celui ci devient trop grand. Comme le temps de calcul augmente avec le degré du polynôme, on a intérêt à choisir la méthode plus rapide de la parabole.

De plus, la méthode de la parabole a l'avantage d'une plus grande souplesse, ce qui permet de l'utiliser conjointement à une méthode plus sûre, par exemple minimax, qui pourra la suppléer au cas où elle s'avèrerait défaillante.

V - COMPARAISON DES DIFFERENTES METHODES DE  
RECHERCHE SUR UN INTERVALLE

---

V-I. Les qualités d'une méthode

Les qualités qu'on pourra demander à une méthode seront, en général, les suivantes :

1) La sûreté : le résultat devra pouvoir être considéré comme valable, et la méthode doit pouvoir donner la précision.

2) La précision : la méthode doit pouvoir atteindre une précision donnée à l'avance.

3) La rapidité du calcul : le temps de calcul comprendra :  
- les temps de calcul de la fonction,  
- le temps pris par le plan de recherche lui-même.

Quand ce dernier est négligeable devant les temps de calcul de la fonction, la rapidité pourra se mesurer au nombre d'expériences.

Ces qualités ne sont pas toujours assurées : par exemple : la sûreté dans les méthodes par approximation, la précision dans la méthode de Fibonacci, la rapidité du calcul diffère suivant les méthodes.

Souvent les trois exigences sont contradictoires et le choix de la méthode dépendra des priorités qu'on établira entre elles.

En fait, aucune des méthodes que nous avons étudiées ne s'impose comme supérieure aux autres dans tous les domaines. Il faudra donc effectuer un choix, qui sera fait d'après les conditions de chaque problème particulier.

V-2. Les conditions du problème

Devant un problème pratique à résoudre, va se poser le problème du choix de la méthode à utiliser.

Le choix de la méthode dépendra d'abord des conditions du problème. Ces conditions sont les suivantes :

1) La configuration de la fonction : on envisagera notamment les cas où la fonction est unimodale ou convexe.

2) L'intervalle de recherche  $[a,b]$  ; il peut être de longueur finie ou infinie.

3) Les renseignements qu'on peut avoir, ou les hypothèses faites avant la recherche sur la répartition sur  $[a,b]$  de la probabilité du maximum.

On effectuera donc une recherche préliminaire qui permettra de préciser les conditions précédentes.

On pourra également faire des hypothèses : par exemple supposer la fonction unimodale. Alors même si la fonction ne l'est pas, on peut espérer obtenir un maximum local.

Un procédé de ce genre est déconseillé chaque fois qu'on peut ne pas l'utiliser. En effet, on s'expose aux ennuis suivants :

1) Le résultat n'est pas sûr, et la précision donnée par la méthode est sans valeur. De plus, même si on trouve un maximum local, ce n'est pas forcément le maximum qu'on cherche, et la recherche effectuée ne fait pas progresser la connaissance du vrai maximum.

2) Les calculs sont en général beaucoup plus longs, et d'une façon imprévisible.

Une bonne recherche préliminaire est donc nécessaire pour

- qu'on puisse considérer le résultat trouvé comme valable
- obtenir la précision dérivée
- connaître à l'avance l'ordre de grandeur du temps de calcul.

### V-3. Comment choisir une méthode de recherche

I°) La fonction est unimodale et l'intervalle de recherche est de longueur finie :

Si on veut d'abord une méthode sûre : on choisira une méthode minimax.

I<sup>e</sup> cas : La précision demandée est faible ; le nombre de chiffres significatifs de la précision est inférieur à la moitié du nombre des chiffres significatifs du calcul.

Par exemple, si on calcul avec 8 chiffres, la précision relative est supérieure à  $10^{-4}$ .

Alors la méthode la plus rapide est la méthode de Fibonacci.

2<sup>e</sup> cas : Si la précision demandée est plus grande, alors la méthode la plus rapide est la méthode mixte Fibonacci, parties proportionnelles.

Dans les deux cas, la méthode des parties proportionnelles si elle est à peine moins rapide que les précédentes, possède l'avantage de la simplicité. Elle s'impose lorsqu'on ne connaît pas à l'avance le nombre de points utilisés dans la recherche.

Enfin quelle que soit la méthode utilisée, on a intérêt à utiliser l'économie d'expériences.

La rapidité de ces méthodes peut être connue à l'avance. Une précision, relative à l'intervalle initial, de  $r$  chiffres significatifs exige  $5r$  expériences environ.

Si on désire une plus grande rapidité, deux types de méthode sont possibles :

Si la répartition de la probabilité du maximum n'est pas uniforme sur l'intervalle de recherche on pourra utiliser une méthode minimax en probabilité. Il faudra alors choisir une fonction de répartition et des paramètres qui dépendront du problème considéré. On gagnera alors en rapidité si les estimations de la probabilité du maximum faites avant la recherche sont bonnes, et on perdra dans le cas contraire.

Si la fonction est convexe, on gagnera certainement à utiliser la méthode de recherche utilisant l'approximation par une parabole. La rapidité est alors excellente.

On pourra aussi employer cette méthode lorsque la fonction est suffisamment régulière, à condition d'avoir prévu les cas où elle serait mise en échec. La méthode est alors moins rapide mais peut, si la fonction le permet rester compétitive avec les méthodes minimax. Ceci est vrai notamment à la fin de la recherche, quand la fonction à optimiser devient convexe au voisinage du maximum.

Les méthodes utilisant un polynôme de degré plus élevé ne semblent pas gagner en rapidité sur la méthode de la parabole ; même dans le cas où la fonction à optimiser est un polynôme, le gain est très faible.

Par contre, elles présentent l'inconvénient d'exiger des temps de calcul d'autant plus élevés que le degré du polynôme utilisé est grand. Et ce temps de calcul n'est en général plus négligeable devant les temps de calcul de la fonction que si celle-ci est assez simple.

2°) La fonction est unimodale et l'intervalle de recherche est de longueur infinie :

Les méthodes minimax sont inopérantes sur un intervalle de longueur infinie.

On peut toujours utiliser une méthode minimax en probabilité. Cette méthode est très sûre, par exemple conjuguée avec la méthode des parties proportionnelles. Par contre, la rapidité et même l'espoir de trouver le maximum dépendent entièrement de la fonction de répartition du maximum, donc des estimations faites avant la recherche. C'est un problème qu'il faudra nécessairement

envisager avant la recherche.

Si la fonction est convexe, sur tout l'intervalle infini, on pourra utiliser aussi la méthode de la parabole. Sinon l'utilisation de cette méthode n'est pas sûre. Il est préférable de se ramener d'abord à un intervalle fini et éventuellement de l'utiliser ensuite.

VI - RECHERCHE AVEC CONTRAINTES  
=====

VI.1 Les intervalles de travail :

Dans les chapitres précédents, l'intervalle de recherche était donné par ses bornes  $a$  et  $b$ . On envisage à présent le cas plus général où l'intervalle  $[a, b]$  est déterminé par un système  $p$  contraintes de la forme  $\psi_i(y) \geq 0$ , où chaque  $\psi_i$  est une fonction réelle de la variable  $y$  définie sur tout l'axe réel.

Le système de contraintes définit un intervalle connexe  $[a, b]$ .

La fonction  $f$  dont on cherche le maximum sur  $[a, b]$  doit obligatoirement être définie partout sur  $[a, b]$  pour que la recherche soit possible. Il faudra donc prévoir le système de contraintes de telle sorte qu'il en soit ainsi. Dans le système des contraintes pourront entrer des conditions de définition de la fonction. Dans ce cas, on devra toujours, avant de calculer la fonction en un point, vérifier que ce point satisfait le système des contraintes, ce qui exclut le calcul de la fonction en dehors de  $[a, b]$ .

On peut aussi rencontrer le cas où on connaît un intervalle  $I$  sur lequel la fonction est définie et qui contient  $[a, b]$ . Dans ce cas, on peut calculer la fonction  $f$  même en dehors de  $[a, b]$ .

Avant de commencer la recherche, il faudra, dans tous les cas, déterminer un intervalle  $J$  de l'axe réel, connexe, tel qu'on soit sûr qu'il contient  $[a, b]$ . En général,  $J$  sera  $]-\infty, +\infty[$ . Mais dans la pratique, on rencontrera des cas particuliers intéressants.

Si on connaît à l'avance un intervalle  $I$ , contenant  $[a, b]$ , sur lequel la fonction  $f$  est définie, alors  $J$  sera  $I$ .

Dans le cas de la recherche à plusieurs variables, la recherche sur une direction se fait à partir d'un point connu à l'avance. Alors  $J$  est  $[0, j[$  où  $j$  est fini ou infini (Voir Vienney : II).

Comme la fonction  $f$  est unimodale sur l'intervalle de définition  $I$ , elle est monotone sur tout intervalle connexe ne contenant pas le maximum. Donc si le maximum de la fonction sur  $I$  ne se trouve pas dans  $[a, b]$ , le maximum de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  est une des bornes, soit  $a$ , soit  $b$ , c'est à dire en un point où l'une au moins des contraintes s'annule, les autres étant positives ou nulles.

Par contre si le maximum de la fonction sur  $I$  se trouve aussi dans  $[a, b]$ , c'est bien le maximum de la fonction sur  $[a, b]$ .

On peut donc atteindre le maximum de la fonction  $f$  sur  $[a, b]$  de trois manières :

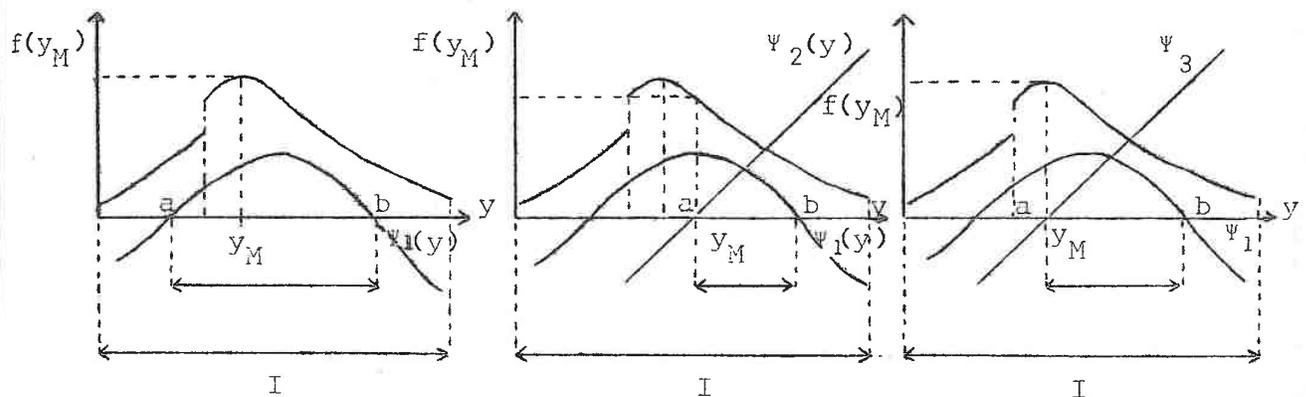
- 1) en atteignant le maximum de  $f$  sur  $I$
- 2) en atteignant le point de saturation d'une contrainte
- 3) on rencontre également le cas où le maximum de la fonction  $f$  sur  $I$ , et une des bornes de l'intervalle sont voisins ou même égaux.

Bien qu'étant la réunion des deux précédents, ce cas sera envisagé à part. Ceci n'a aucune importance pour la recherche à une variable mais peut en avoir si on l'utilise ensuite par exemple dans la recherche du maximum d'une fonction de plusieurs

variables (Voir Vienney ...).

Remarquons que la connexité de l'intervalle  $[a, b]$  est indispensable pour qu'on puisse utiliser l'unimodalité de la fonction.

Dans le cas contraire, il faudra étudier séparément chaque intervalle partiel.



Coût de la recherche :

Dans le coût de la recherche, entrera alors non seulement les calculs de la fonction  $f$  mais aussi les calculs sur les fonctions  $\psi_i$  correspondant aux contraintes.

Remarquons que dans le cas où il y a des liaisons, la résolution du système est à faire en tout point, quels que soient les autres calculs effectués en ce point : calcul de  $f$ , calcul des contraintes ou les deux à la fois.

Soient  $N_P$  le nombre de points de la recherche. C'est le nombre de fois où on résoud le système des liaisons.

$N_F$  le nombre de points où on calcule la fonction  $f$ .

$N_C$  le nombre de points où on teste le système de contraintes

$N_P$  est toujours supérieur ou égal à  $N_F$  et à  $N_C$ .

Le plan de recherche dépendra des rapports entre les temps de calcul respectifs de la fonction, des liaisons et des contraintes.

Nous établirons donc trois méthodes suivant qu'on cherche à minimiser  $N_F$ ,  $N_C$  ou  $N_P$ .

Valeur initiale dans l'intervalle :

On a déterminé un intervalle connexe  $J$  de l'axe réel tel qu'on soit sûr que  $[a,b]$  appartient à  $J$ .

On choisit alors un point dans  $J$ , et en ce point on teste les contraintes. Si le système des contraintes est impossible en ce point, on ne sait rien qui puisse guider le choix du point suivant. En effet, on ne sait pas si l'intervalle  $[a,b]$  se trouve d'un côté du point ou de l'autre. Si on ne sait rien à l'avance, la première phase de la recherche consistera à essayer des points jusqu'à en trouver un qui satisfasse le système des contraintes.

En fait, dans l'étude d'un problème pratique, on dispose en général d'éléments qui permettent de trouver un point dans l'intervalle  $[a,b]$ . C'est le cas, en particulier, quand l'une des bornes  $a$  ou  $b$  est connue à l'avance (Voir § VI.6).

VI-2. Méthode n° I : minimisation du nombre de calculs de la fonction.

Le calcul se fera en deux temps :

- a) résolution du système des contraintes : d'où les valeurs de a et b
- b) recherche du maximum sur  $[a,b]$  par une méthode des chapitres précédents.

Cette méthode présente plusieurs avantages :

1) Il n'est pas nécessaire de connaître au départ l'intervalle I de définition de f.

2) Elle est très simple.

Par contre, elle présente des inconvénients :

1) Elle exige de chercher a et b avec la précision finale demandée pour la recherche. Si la recherche se termine sur un maximum et si celui-ci n'est pas trop proche de l'une des bornes, ce qui est le cas général, il est inutile de rechercher une grande précision pour a et b. Si la recherche se termine par saturation d'une contrainte, seule une des bornes mérite d'être calculée avec précision.

2) Elle exige la recherche d'un maximum dans tout l'intervalle. C'est inutile quand la recherche se termine par saturation d'une contrainte.

3) Le système des liaisons est résolu en tout point, mais seulement pour calculer soit la fonction, soit les contraintes. Il pourrait être préférable de l'utiliser pour calculer en un point à la fois fonction et contraintes.

On ne pourra donc pas considérer cette méthode comme générale. Elle minimise le nombre de calculs de la fonction si la recherche se termine sur un maximum, mais non si la recherche se termine sur contrainte saturée (voir § VI.4).

VI-3. Méthode n° 2 : minimisation du nombre de calculs du système des contraintes.

Le calcul se fera en deux temps :

- a) recherche du maximum  $y_M$  sur I
- b) on teste le système des contraintes en  $y_M$

Si  $y_M$  satisfait le système, c'est la solution du problème.

Sinon le maximum sur  $[a,b]$  sera obtenu en un point de saturation d'une contrainte. On effectue donc la recherche de ce point  $y_0$  qui appartient à  $[a,b]$  et  $y_M$  qui lui est extérieur. Si on n'a pas de renseignements plus précis, la méthode la plus rapide consiste à faire des bipartitions successives.

Cette méthode reste très simple, mais présente les inconvénients suivants :

1) elle n'est pas utilisable si on ne connaît pas à l'avance le domaine de définition I de f.

2) la recherche du maximum risque d'être inutilement coûteuse puisqu'on l'effectue dans un domaine plus grand que le vrai domaine de recherche.

3) de plus, dans le cas où  $y_M$  n'appartient pas à  $[a, b]$ , il est inutile de chercher une grande précision.

4) de même le système des liaisons est résolu en tout point, mais seulement pour calculer soit la fonction, soit les contraintes.

On ne pourra donc pas considérer cette méthode comme générale. On pourra cependant l'utiliser si on connaît à l'avance le domaine de définition de la fonction et si le calcul de la fonction est faible devant celui des contraintes.

#### VI-4. Méthode n° 3 : minimisation du nombre de points de la recherche

##### Principe de la méthode

On cherche à minimiser d'abord le nombre de points de la recherche. Lorsqu'un point aura été choisi, on effectuera à la fois :

- 1) s'il y a lieu, la résolution du système des liaisons
- 2) le calcul de la fonction  $f$
- 3) le calcul du système des contraintes.

On obtiendra ainsi en tout point le maximum de renseignements possible.

Cependant, on n'effectuera pas le calcul de la fonction  $f$  si celui-ci est inutile, c'est à dire dans le cas où on sait que la recherche se termine par saturation d'une contrainte. On ne testera pas le système des contraintes si le résultat est déjà connu.

Pour choisir les points successifs on pourra utiliser sur l'intervalle I une des méthodes de recherche sur un intervalle établi dans les chapitres précédents.

Désignation de la méthode.

Plaçons nous au cours de la recherche. Les calculs concernant un point ont été exploités, et le point suivant n'a pas encore été choisi.

L'intervalle restant a pour bornes  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ .

MODE est un entier indiquant de quelle manière se terminera la recherche :

+I sur le maximum de la fonction f dans I

-I par saturation d'une contrainte

0 on ne le sait pas encore.

On connaît un point y dans l'intervalle restant  $[\alpha, \beta]$  qui satisfait le système des contraintes. On a déjà calculé f(y).

Le nombre entier IMAGE donne la position de y dans  $[\alpha, \beta]$   
IMAGE = -I dans le cas où f(y) est inférieur à f( $\alpha$ ) ou f( $\beta$ ).

Supposons par exemple f(y) < f( $\alpha$ ). Alors puisque f est unimodale, et y appartient à  $[a, b]$  le maximum cherché se trouve nécessairement sur  $[\alpha, y]$ . Donc  $\beta = y$ .

Quand IMAGE est différent de -I, f(y) est supérieur ou égal à f( $\alpha$ ) et f( $\beta$ ).

Par définition, IMAGE = +I, si y est confondu avec l'une des bornes

0 si y est entre les bornes.

LIEU est un entier qui indique dans quelle direction on ne risque plus de saturer de contrainte. Il permet d'éviter des tests inutiles du système de contraintes.

Si LIEU = 0,  $\alpha$  et  $\beta$  sont tous les deux en dehors de  $[a,b]$ .

On risque donc de violer une contrainte en prenant un nouveau point aussi bien entre  $\alpha$  et  $y$  qu'entre  $y$  et  $\beta$ .

Si LIEU = I,  $\beta$  appartient à  $[a,b]$ , on ne risque pas de violer une contrainte entre  $y$  et  $\beta$ . Mais dans ce cas  $\alpha$  n'appartient pas à  $[a,b]$ .

Si LIEU = -I,  $\alpha$  appartient à  $[a,b]$ , mais pas  $\beta$ .

Enfin, si à la fois  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent à  $[a,b]$ , on ne risque plus de violer une contrainte quelque soit le point choisi dans l'intervalle. Alors MODE prend la valeur +I et la valeur de LIEU devient inutile à la recherche.

$F_M$  est un nombre réel égal à la plus grande valeur rencontrée jusque là pour la fonction.

Si IMAGE = 0 ou I,  $f_M$  est égal à  $f(y)$ .

Si IMAGE = -I,  $f_M$  est égal à  $f(\alpha)$  ou  $f(\beta)$ , suivant que  $y$  est confondu avec  $\beta$  ou  $\alpha$ .

On choisit alors un nouveau point  $x$ . Soit IW un entier égal à +I si  $y < x$ , à -I si  $x < y$ .

Si on sait que la recherche se terminera par saturation de contrainte (MODE=-I), il est inutile de calculer la fonction, on se renvoie directement au test des contraintes.

Sinon on calcule  $f(x)$ .

Si l'on sait que la recherche se terminera sur le maximum de  $f$  en I (MODE=I), ou s'il n'y a pas de risque de violer une contrainte en  $x$  (c'est à dire si IW=LIEU), il est inutile de tester le système des contraintes. Sinon on teste le système des contraintes.

NICON est un entier qui prend les valeurs :

- 0 si on n'a pas effectué le test des contraintes
- I si on a violé une ou plusieurs contraintes
- I si on a effectué le test mais qu'on n'a pas violé de contraintes.

L'organigramme suivant distingue alors les différents cas possibles d'après les valeurs de IMAGE, NICON, et la comparaison de  $f(x)$  avec  $f_M$ .

Après avoir étudié le cas particulier, on pourra être amené à modifier les valeurs des paramètres MODE, IMAGE, LIEU. On est alors ramené au problème précédent.

Avant de choisir un nouveau point, on pourra alors placer ici le test de sortie de la recherche, qu'il porte sur le nombre des points, où sur la longueur de l'intervalle restant.

Remarquons qu'au début de la recherche, on se trouve en général dans les conditions suivantes :

- On connaît déjà  $y$  appartenant à  $[a, b]$
- On ne sait pas encore de quelle manière elle se terminera donc  $MODE = 0$ .

$y$  n'est pas confondu avec l'une des bornes donc  $IMAGE = 0$

- On risque de violer des contraintes quelque soit le point choisi donc  $LIEU = 0$

De plus  $f_M = f(y)$ .



Utilisation de la méthode n° 3

On a donc établi une méthode qui minimise  $N_p$ .

Elle est beaucoup plus compliquée, par le nombre de cas possibles que les précédentes. Cependant, mise sous la forme ci-dessus, la programmation en est aisée et le temps de calcul nécessaire par les tests peut être considéré comme négligeable devant les calculs de la fonction, des contraintes et des liaisons.

Soit  $d$  la distance entre le maximum de la fonction et la borne la plus proche ( $a$  ou  $b$ ). La recherche commence par une première phase, où en chaque point sont calculés à la fois la fonction et les contraintes. Ceci dure jusqu'à ce que la longueur de l'intervalle final devienne voisine de  $d$ . Alors, le mode final de la recherche est décelé et commence une seconde phase où ne s'effectuent plus que des calculs soit sur la fonction, soit sur les contraintes.

En général, on s'est donné avant la recherche une certaine précision  $\epsilon$  à atteindre. Si  $\epsilon$  est supérieur à  $d$ , la deuxième phase n'a pas lieu et la recherche se termine par  $MODE = 0$ . Mais ce cas est peu fréquent. Le plus souvent,  $\epsilon$  est d'un ordre de grandeur inférieur à celui de  $d$  et le fait d'augmenter  $\epsilon$  ne change rien à la 1<sup>e</sup> phase, mais allonge la 2<sup>e</sup> phase.

Par exemple, quand on utilise cette méthode dans la recherche du maximum d'une fonction de plusieurs variables (Voir Vienney ...).

une précision relative de  $10^{-4}$  demande en général 3 à 6 points dans la 1<sup>e</sup> phase, et 15 à 25 dans la seconde.

Alors, si la recherche se termine sur un maximum, le nombre de tests sur les contraintes est très faible. Par rapport à la méthode n° 1, on économise presque toute la I<sup>e</sup> partie où on recherche les bornes de l'intervalle avec précision. Par rapport à la méthode n° 2, on n'aura fait en plus qu'un petit nombre de calculs de contraintes et encore ceux-ci auront pu servir à réduire rapidement l'intervalle.

Si la recherche se termine par saturation d'une contrainte, le nombre de calculs de la fonction aura été faible. Par rapport à la méthode n° 1, on économise presque toute la deuxième partie, où on cherche le maximum avec précision. Par rapport à la méthode n° 2, on économise presque toute la I<sup>e</sup> partie, puisqu'on évite de chercher le maximum avec précision.

Enfin, si le maximum de la fonction  $f$  est très proche de l'une des bornes, les trois méthodes exigent, que ce soit séparément ou d'une manière groupée, d'effectuer à la fois les calculs de la fonction et des contraintes jusqu'au voisinage du point final. Mais dans ce cas, la méthode n° 3 a encore l'avantage d'utiliser moins de points, c'est à dire, de calculs du système des liaisons.

La méthode n° 3 est donc en général préférable, puisqu'elle est presque toujours la plus efficace, et que les cas où elle ne l'est pas sont en général imprévisibles.

Elle n'est cependant pas utilisable dans le cas où le domaine de définition de la fonction  $f$  n'est pas connu à l'avance mais est donné par l'intervalle  $[a, b]$  défini par le système des contraintes.

VI-5. Méthode n° 4

Principe de la méthode

On cherche à établir une méthode qui minimise le nombre de points  $N_p$  mais qui soit utilisable lorsque le domaine de définition de  $f$  est l'intervalle  $[a,b]$  défini par le système des contraintes.

Lorsqu'un point aura été choisi, on effectuera les opérations suivantes :

- 1) s'il y a lieu la résolution du système des liaisons
- 2) si on sait déjà que le point appartient à  $[a,b]$ , on passera en 3)

Sinon on testera le système des contraintes.

Si le point n'appartient pas à  $[a,b]$ , on passera au point suivant, sinon on effectuera :

- 3) le calcul de la fonction.

Il est impossible d'effectuer des calculs en dehors de  $[a,b]$ . Or dans la méthode n° 3, on utilise cette possibilité :

Si  $u < v < w$ , et si seul  $u$  appartient à  $[a,b]$ , alors  $f(u) < f(v) < f(w)$  entraîne que la recherche se terminera par saturation d'une contrainte.

Description de la méthode.

On utilise les paramètres  $y$ ,  $f_N$ , MODE (qui ne peut pas prendre la valeur -1) LIEU, IW, NTCON,  $\alpha$ ,  $\beta$  définis dans la méthode n° 3.

Plaçons nous au cours de la recherche. Les calculs concernant un point ont été exploités et on choisit un nouveau point  $x$ .

Alors  $IW$  est égal à  $I$  si  $y < x$ , et  $-I$  si  $x < y$ .

Si l'on sait que la recherche se termine sur un maximum ( $MODE=I$ ) ou s'il n'y a pas de risque de violer une contrainte en  $x$  (c'est à dire si  $IW=LIEU$ ), il est inutile de tester le système des contraintes.  $MTCO$ N prend la valeur 0 et on passe au calcul de la fonction.

Sinon on teste le système des contraintes.

Si une contrainte est saturée en  $x$ ,  $x$  devient borne de l'intervalle, et on va chercher un nouveau point.

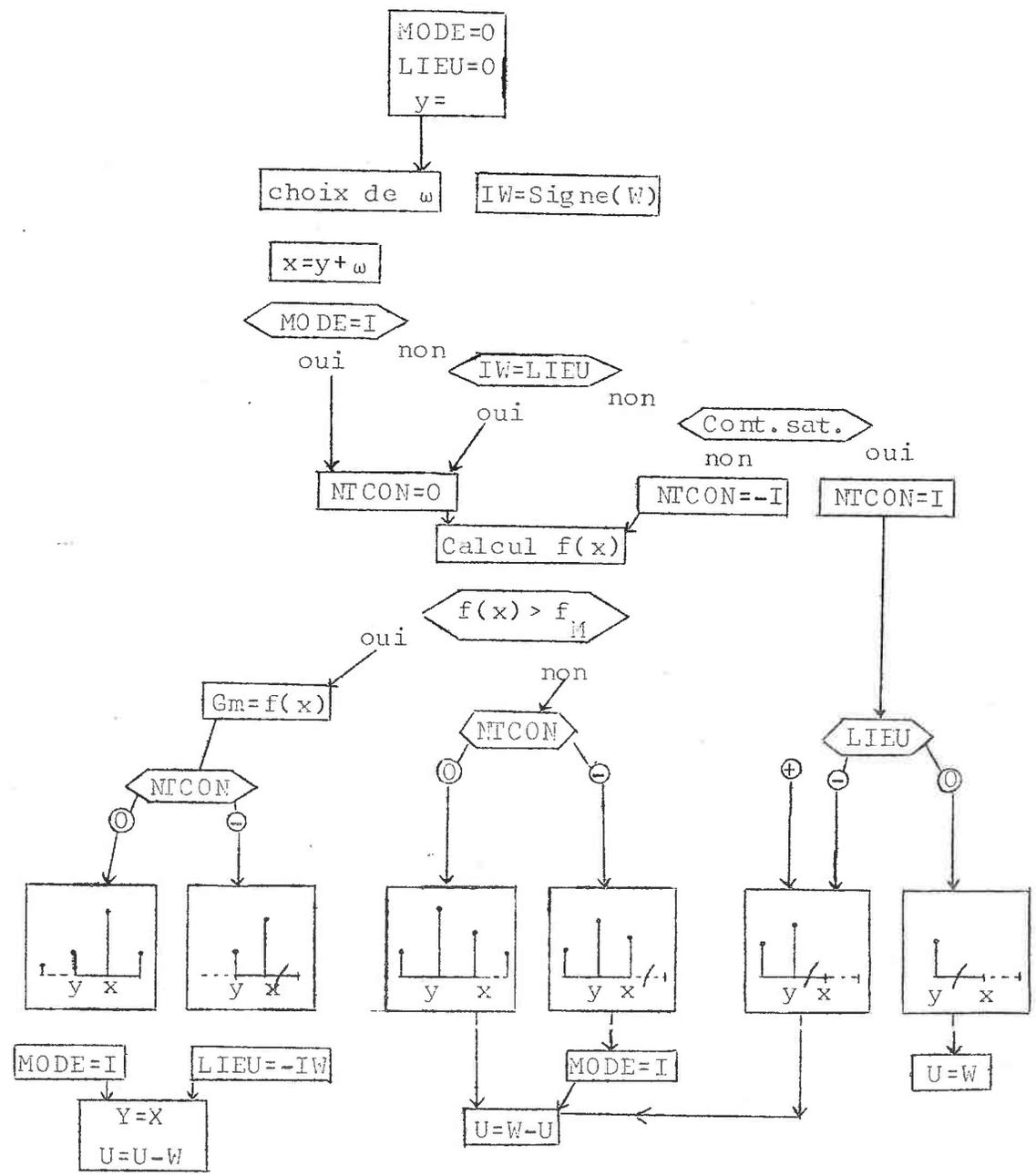
Sinon  $MTCO$ N prend la valeur  $-I$  et on passe au calcul de la fonction.

On distingue ensuite les divers cas particuliers d'après  $MTCO$ N et la comparaison de  $f_M$  et  $f(x)$ . (Voir organigramme).

Remarquons qu'au début de la recherche, on se trouve en général dans les conditions suivantes :

- on ne connaît pas le mode final de la recherche donc  
MODE=0
- on risque de violer des contraintes quelque soit le point choisi.

Organigramme de la méthode n° 4



Comparaison des méthodes n° 3 et 4

Si la recherche se termine au maximum de  $f$  sur  $I$ , le nombre de points utilisés par la méthode 4, est le même que celui utilisé par la méthode 3, le nombre de tests sur les contraintes aussi.

Par contre, certaines valeurs de la fonction en dehors de  $[a,b]$  qui auront été calculées au cours de la 1<sup>e</sup> phase de la méthode n° 3 ne le seront pas par la méthode n° 4.

Mais si la recherche se termine par saturation de contrainte, toute la deuxième phase de la recherche qui dans la méthode 3 utilisait uniquement des tests sur les contraintes, nécessite aussi dans la méthode n° 4 des calculs de la fonction, ceci cependant atténué par le fait que la fonction n'est calculée que si le point satisfait les contraintes.

Il n'est donc pas possible d'affirmer en général qu'une des méthodes est meilleure que l'autre, tout dépend du rapport entre le nombre de points utilisés dans la 1<sup>e</sup> et dans la 2<sup>e</sup> phase. Ce qu'on peut dire cependant, c'est que la méthode 3 est en moyenne plus intéressante lorsque la précision relative demandée est forte. (au delà de  $10^{-4}$ ).

Remarquons qu'on pourrait envisager le problème d'une façon plus générale :

Etant donnée une fonction réelle  $f$  définie sur un intervalle connexe  $I$  de l'axe réel, l'intervalle  $I$  étant défini par un premier système de contraintes  $S_1$ , trouver le maximum de  $f$  sur le sous ensemble  $[a,b]$  de  $I$  défini par le système de contraintes  $S_2$ .

La méthode minimisant le nombre de points utilisés dans la recherche serait alors une combinaison des méthodes 3 et 4.

VI-6. Cas où une seule des bornes est déterminée par le système des contraintes :

Considérons le cas particulier suivant : la borne a est connue à l'avance, seule la borne b est déterminée par le système de contraintes.

C'est en particulier le cas dans la recherche à plusieurs variables avec contraintes au cours de la recherche dans une direction : alors  $a=0$ . On reprend alors les méthodes établies dans le cas général. Mais on obtient de sérieuses simplifications.

D'abord, le problème de la recherche d'un point initial dans  $[a, b]$  disparaît.

Dans la méthode n° 1, on évite le calcul de la borne a.

Dans la méthode n° 2, l'intervalle I sur lequel on cherche le maximum est limité par a.

Dans les méthodes n° 3 et 4, le paramètre LIEU est toujours égal à -I, tant que MODE égale 0 ou -I, et n'a plus d'intérêt quand MODE égale I ; il disparaît donc. Quand MODE est différent de I, l'expression (IW=LIEU) devient (IW=-I) c'est à dire plus simplement ( $w < 0$ ).

Dans la méthode 3, le paramètre IMAGE est alors en général différent au moment du départ et prend la valeur +I.

VI-7. Etude complète d'une méthode de recherche avec contraintes

Pour obtenir une méthode de recherche avec contraintes, il faut associer à une des méthodes décrites précédemment, une méthode de recherche sur un intervalle qui détermine le choix des points. Il est évidemment possible d'envisager de multiples combinaisons et variantes de celles-ci.

Nous nous bornerons à étudier complètement le cas particulier suivant :

Soit une fonction réelle  $f(y)$  définie et unimodale sur  $[0, \infty]$  et soit un système  $p$  contraintes  $\psi_i(y)$  définies sur  $[0, \infty]$  dont la solution est l'intervalle  $[0, b]$  où  $b$  est un réel positif.

On utilise pour la recherche, à la fois :

1) la méthode minimax en probabilité avec la fonction  $F(x)$  et une méthode de recherche sur  $[0, I]$  qui sera :

- la méthode des parties proportionnelles en général,
- la méthode des bipartitions dans le cas où on sait que la recherche se finira par saturation de contrainte (MODE = -I).

2) la méthode n° 3 dans le cas  $a=0$  (voir § VI-6).

Un point au cours de la recherche est défini par :

1) son abscisse  $b$  sur  $[0, \infty[$

2) son image  $a$  par la fonction  $F$  sur  $[0, I]$

3) le vecteur  $\vec{x}$  dans l'espace à  $q+I$  dimensions où  $q$  est le nombre de liaisons.

On affecte l'indice 0 au point initial, les indices 1 et 2 aux points précédemment nommés  $y$  et  $x$ .

### Résolution du système des liaisons :

Le système des liaisons est résolu en tout point de la recherche. On aura donc intérêt à choisir la méthode la plus rapide possible.

Les points successifs où on calcule le système sont proches les uns des autres, surtout à la fin de la recherche. On disposera donc de bonnes valeurs initiales pour une résolution par approximations successives.

Il n'était pas question d'envisager ici le problème de la résolution d'un système d'équations non linéaires. En pratique, nous avons utilisé une méthode de Newton (Voir procédure RESNEWTON de l'IUCA Nancy). En linéarisant le système, on définit un vecteur qui fait progresser la valeur précédente. On peut utiliser ce vecteur directement. Mais on peut aussi utiliser la direction trouvée pour une optimisation dans cette direction (Bipartitions dans la procédure RESNEWTON).

### Test de fin de recherche

La recherche se termine

- soit parce que le nombre de points a atteint un maximum,
- soit quand la longueur de l'intervalle restant est inférieure à la précision donnée au départ.

Il faudra tenir compte du fait que la recherche par parties proportionnelles limite de façon précise le nombre de points : environ 40 si on effectue les calculs avec 8 chiffres significatifs.





## CONCLUSION

=====  
Nous avons abordé dans ces pages des méthodes de base (minimax, interpolation). Il appartiendra ensuite à l'utilisateur de savoir non seulement choisir celle qui convient le mieux à son problème particulier, mais encore de les conjuguer éventuellement entre elles. Nous avons vu différents exemples où l'union de deux méthodes est féconde (mixte Fibonacci-parties proportionnelles, minimax en probabilité, parabole). S'il y a des contraintes, on peut envisager de nombreuses combinaisons de méthodes de recherche sur un intervalle et de méthodes de recherche des contraintes.

Pour pouvoir valablement effectuer les choix nécessaires, une étude préalable du problème s'impose. Cette étude portera à la fois sur la fonction (vérification de l'unimodalité, de la convexité), sur le domaine de définition de la fonction et le domaine de recherche du maximum (connexité, définition correcte du système des contraintes).

En application de cette étude, on pourra lire la thèse de Vienney: "Optimisation de fonctions de plusieurs variables", Institut Universitaire de Calcul Automatique de Nancy, qui utilise les différentes méthodes de recherche à une variable dans des méthodes de recherche à plusieurs variables.

NOM DE L'ETUDIANT : CHARLES François

Nature de la thèse : Thèse de Spécialité en Mathématiques Appliquées

Vu, Approuvé  
et Permis d'Imprimer  
NANCY le 19 Septembre 1968  
LE DOYEN

A handwritten signature in dark ink, appearing to be 'J. Aubry', written over a horizontal line.

J. AUBRY