

Sc N 64
14

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

76

V

PROGRAMMATION DYNAMIQUE

DISTRIBUTIONS DE KOLMOGOROV-- SMIRNOV

ETUDE D'UN TEST NON PARAMETRIQUE

T H E S E

pour l'obtention du

DOCTORAT de SPECIALITE MATHEMATIQUES (3ème Cycle).

Soutenu devant le Jury le 21 octobre 1964

par

Pascal BERLAND



Jury :	Mr J. LEGRAS	Président
	Mr M. DEPAIX	Examineurs
	Melle D. HUET	

*Programmation dynamique
Kolmogorov - Smirnov, distributions
Test non paramétrique*

UNIVERSITE DE NANCY

FACULTE DES SCIENCES

✓
PROGRAMMATION DYNAMIQUE

DISTRIBUTIONS DE KOLMOGOROV - SMIRNOV

✓
ETUDE D'UN TEST NON PARAMETRIQUE

par

Pascal BERLAND



UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - URION -
ROUBAULT -

Professeurs honoraires : MM. CROZE - RAYBAUD - LAFFITE - LERAY -
- LAPORTE - EICHHORN - CAPELLE - GODEMENT - DUBREIL - L. SCHWARTZ -
DONNE - De MALLEMANN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER -
DET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE - GUERIN - CHEVALLIER - WAHL -
VE -

Maîtres de conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET -

PROFESSEURS

ON	Chimie biologique	SCHWARTZ	Exploit. minière
SARTE	Analyse supérieure	GAYET	Physiologie
BAULT	Géologie	MANGENOT	Phytopathologie
LET	Biologie animale	MALAPRADE	Chimie
EVIN	Botanique	HADNI	Physique
RIOL	Chimie théorique	BONVALET	Mécanique physique
TTE	Physique	KERN	Minéralogie
LIEN	Electronique	BASTICK	Chimie
ERT	Chimie physique	DUCHAUFOR	Pédologie
RAS	Mécanique rationnelle	NEEL	Chimie ind. orga.
FA	Minéralogie	GARNIER	Agronomie
AUSE	Chimie	WEPPE	Minéralogie appli.
RE	Physique appliquée	BERNARD	Géologie appliquée
RY	Chimie minérale	CHAMPIER	Physique
AL	Chimie	REGNIER	Physico-chimie
PENS	Radiogéologie	GAY	Chimie biologique
HLING	Physique	WERNER	Botanique
NER	Physique expérimentale	CONDE	Zoologie
Y	Géologie	STEPHAN	Zoologie
HOFF	Génie chimique	EYMARD	Cal. Dif. et Int.
PON	Chimie biologique	LEVISALLES	Chimie organique
OLD	Chimie industrielle	N.	Physique
		N.	M. M. P.

MAITRES DE CONFERENCES ET PROFESSEURS SANS CHAIRE

IE	Génie chimique	Mme HERVE	Math. (propédeutique)
CI	Géologie	AUROUZE	Géologie
LAUME	Psychophysiologie	MARI	Chimie I. S. I. N.
N	Mécanique physique	LAFON	Physique I. S. I. N.
BASTICK	Chimie M. P. C. Epinal	FELDEN	Phy. Théor. & Nucl.
EFIN	Physique	FLECHON	M. P. C.
N	Physique	VIGNES	Physique (Mines)
NTZ	Biologie animale	Melle HUET	Math. (S. P. C. N.)
		JANOT	M. P. C. Epinal

SECRETARE PRINCIPAL : C. CARON

Que Monsieur le Professeur LEGRAS et
Monsieur DEPAIX veillent bien trouver ici
l'expression de mes remerciements les plus vifs.

Je remercie Messieurs les Professeurs qui
m'ont fait l'honneur de composer le Jury.

SOMMAIRE

PROGRAMMATION DYNAMIQUE

A - But de la programmation dynamique. Vocabulaire.	pages	I-1
B - Un processus d'allocations à plusieurs étapes (type déterministe).		I-2
C - Un processus de décisions à plusieurs étapes (type stochastique).		I-8
D - La structure du processus de program- mation dynamique.		I-14
E - Un nouveau formalisme dans le calcul des variations.		I-19
F - Processus de décisions markoviens.		I-25

REPARTITIONS DE KOLMOGOROV - SMIRNOV.

ETUDE D'UN TEST NON PARAMATRIQUE.

I - Etude Théorique.		II-I-1
A - Position du problème - Résultats asymp- totiques.		II-I-1
B - Etude de la distribution de la dériva- tion entre deux échantillons ou entre un échantillon et sa loi.		II-I-5
II - Etude Pratique.		II-II-1
I - Introduction - Position du problème		II-II-1
II - Echantillons semblables - Etude annexe.		II-II-4
III - Calculs et Programmes.		II-II-17
IV - Tableaux de Résultats.		en annexe
V - Exploitation du tableau.		II-II-28

PROGRAMMATION DYNAMIQUE

problème. De plus, elle nous fournit un type d'approximations qui a la propriété d'être monotone convergente. On lui donne le nom d'approximation dans l'espace des politiques.

La programmation dynamique s'intéressera aux processus où le temps a un rôle significatif et où l'ordre des opérations peut être très important. De plus une caractéristique essentielle de cette approche sera la réinterprétation de plusieurs processus statiques comme processus dynamiques dans lesquels le temps sera introduit artificiellement.

B - UN PROCESSUS d'ALLOCATION A PLUSIEURS ETAPES (type déterministe)

I - Position du problème.

Supposons que nous ayons une certaine somme d'argent x que nous désirons engager dans deux directions différentes. La première nous fournira un retour $g(y)$ pour la quantité y qui lui est affectée; la seconde, un retour $h(x-y)$ pour la quantité $x-y$. Notons que les deux retours sont supposés, pour le cas simple traité ici, être de nature différente de x mais de même nature entre eux.

Si nous désirons choisir cette répartition de façon à maximiser le retour total, nous sommes amenés à déterminer le maximum de :

$$R_1(x, y) = g(y) + h(x-y) \quad \text{sur } y \in (0, x)$$

Considérons maintenant un processus à deux étapes: et supposons que ayant obtenu le retour $g(y)$, la quantité y est réduite à ay ($0 < a < 1$). De même pour obtenir $h(x-y)$, $x-y$ est réduite à $b(x-y)$ Avec le total restant $ay + b(x-y)$, le processus est alors répété. Posons :

$$ay + b(x-y) = x_I = y_I + (x_I - y_I)$$

où y_I est la quantité d'argent à investir dans la première direction lors de la seconde étape. Le retour total pour ce processus à deux étapes est donc :

$$R_2(x, y, y_I) = g(y) + h(x-y) + g(y_I) + h(x_I - y_I)$$

Le retour optimal est obtenu en maximisant $R_2(x, y, y_I)$ sur le domaine à deux dimensions : $0 \leq y \leq x$; $0 \leq y_I \leq x_I$

De même pour un processus à N étapes, le retour total sera :

$$R_N(x, y, y_I, \dots, y_{N-1}) = g(y) + h(x-y) + g(y_I) + h(x_I - y_I) + \dots + g(y_{N-1}) + h(x_{N-1} - y_{N-1})$$

avec $x_I = ay + b(x-y)$ $y \in (0, x)$

$$x_2 = ay_I + b(x_I - y_I) \quad y_I \in (0, x_I)$$

$$x_{N-1} = ay_{N-1} + b(x_{N-1} - y_{N-1}) \quad y_{N-1} \in (0, x_{N-1})$$

Le retour maximum sera obtenu en maximisant la fonction R_N sur le domaine à N dimensions décrit précédemment pour l'espace des variables y, y_I, \dots, y_{N-1} .

La discussion classique d'un tel système se fait en annulant les dérivées partielles et en résolvant le système obtenu. Une telle méthode est évidemment impossible de façon numérique dès que N est un peu grand.

2 - Approche d'une équation fonctionnelle.

Observons tout d'abord que, les fonctions g et h étant fixées, le retour maximum total d'un processus à N étapes ne dépend que de N et de la quantité initiale x .

Définissons alors la fonction :

$$f_N(x) = \text{Retour maximum obtenu d'un processus à } N \text{ étapes commençant avec la quantité } x \quad (x > 0; N = 1, 2, \dots)$$

$$\text{Nous avons : } f_N(x) = \text{Max}_{\{y, y_I\}} R_N(x, y, y_I, \dots, y_{N-1})$$

$$f_1(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} (g(y) + h(x-y))$$

Notre premier objectif sera d'obtenir une équation en $f_2(x)$ en fonction de $f_1(x)$. Considérant un processus à deux étapes, nous voyons que le retour total sera le retour dû à la première étape plus le retour dû à la seconde où nous avons la quantité $ay + b(x-y)$ à investir. Il est clair que quelle que soit la valeur choisie initialement, le montant $ay + b(x-y)$ restant à investir doit l'être de la meilleure façon possible.

Il s'en suit que :

$$R_2(x, y, y_I) = g(y) + h(x-y) + f_1(ay + b(x-y))$$

retour dû à la 1ère étape retour maximum dû à la 2ème étape

Alors y doit être choisi de façon à obtenir le maximum de cette expression.

$$f_2(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} (g(y) + h(x-y) + f_1(ay + b(x-y)))$$

En utilisant le même raisonnement pour un processus à N étapes, nous obtenons les équations fonctionnelles fondamentales :

$$f_N(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} (g(y) + h(x-y) + f_{N-1}(ay + b(x-y))) \quad N \geq 2$$

$$f_I(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} (g(y) + h(x-y))$$

La méthode est alors la suivante :

On détermine $f_I(x)$, puis $f_2(x)$ en fonction de $f_1(x)$, puis $f_3(x)$ en fonction de $f_2(x)$, etc... A chaque étape du calcul, nous obtenons non seulement $f_k(x)$ mais aussi $y_k(x)$ allocation optimale à faire à la première étape d'un processus à k étapes commençant avec la quantité x .

La solution consiste donc en une tabulation de la suite des fonctions $\{y_k(x)\}$ et $\{f_k(x)\}$ $k = 1, 2, \dots$

La solution d'un problème particulier, supposant N et x donnés a la forme :

$$\begin{cases} \bar{y} = y_N(x) \\ \bar{y}_I = y_{N-1}(a\bar{y} + b(x-\bar{y})) \\ \bar{y}_2 = y_{N-2}(a\bar{y}_I + b(x_I - \bar{y}_I)) \\ \bar{y}_{N-1} = y_I(a\bar{y}_{N-2} + b(x_{N-2} - \bar{y}_{N-2})) \end{cases}$$

où l'ensemble $(\bar{y}, \bar{y}_I, \dots, \bar{y}_{N-1})$ est un ensemble d'allocations qui maximise le retour total à N étapes.

Remarques : Le problème particulier d'un processus à N étapes et à x fixé a été inclus dans le problème plus général d'un processus à plusieurs étapes où N et x sont arbitraires.

°° Au lieu de maximiser dans un espace à N dimensions nous effectuerons N maximisations sur une variable. En d'autres termes, le processus à N étapes a été transformé en N processus à une étape.

°°° Nous pouvons déterminer certaines caractéristiques importantes de la solution même si nous ne sommes pas capables de résoudre entièrement le problème.

3°)- Approximation à une infinité d'étapes.-

Si N est grand, il est raisonnable de considérer un processus à N étapes comme un processus à un nombre infini d'étapes.

Nous avons alors la seule équation fonctionnelle :

$$(I) \quad f(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))]$$

Malgré l'avantage d'avoir une seule équation en $f(x)$ et une seule fonction d'allocation $y = y(x)$, il se présente la difficulté suivante : nous ne sommes pas sûrs qu'il existe un maximum absolu plutôt qu'un suprémum, c'est-à-dire qu'il peut

ne pas y avoir de politique qui fournisse le retour total $f(x)$

4°)- Théorème d'existence et d'unicité.

Nous nous contenterons de le citer en signalant que la démonstration se trouve dans Bellman. Dynamic Programming.

Théorème I

- et $h(x)$
- a)- Si $g(x)$ et $h(x)$ sont de fonctions continues de x pour $x \geq 0$ avec $g(0) = h(0) = 0$
- b)- Si $m(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [|g(y)|, |h(y)|]$ et $c = \text{Max}_{0 \leq a, b} (a, b)$
- c)- Si $\sum_{n=0}^{\infty} m(c^n x)$ converge quel que soit $x \geq 0$ avec $0 \leq a, b \leq 1$

Alors il existe une solution unique de (I) continue quel que soit $x \geq 0$, ayant la valeur 0 au point $x = 0$.

5°)- Approximations successives.-

Bésignons par $T(f, y)$ la transformation définie par :

$$T(f, y) = g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))$$

et considérons l'équation :

$$f(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} T(f, y)$$

Théorème 2 Soit la fonction $f_0(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$f_0(x) \text{ est continue pour } x \geq 0. \quad f_0(0) = 0$$

Alors, si les conditions du théorème I sont remplies, la suite définie par :

$$f_{N+1}(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} T(f_N, y), \quad N = 0, 1, \dots$$

converge uniformément vers la solution $f(x)$ obtenue ci-dessus sur un quelconque intervalle fini.

6°)- Approximation dans l'espace des politiques.-

Nous allons montrer que nous pouvons toujours choisir l'approximation initiale de façon à être sûrs que la convergence est monotone.

Nous appellerons une suite de choix possibles une politique; une politique qui donne $f(x)$ sera une politique optimale. Il découle de l'équation fonctionnelle que la connaissance de $f(x)$ donne $y(x)$ et inversement un $y(x)$ détermine $f(x)$, par

par une itération sur :

$$f(x) = T(f, y)$$

Nous pouvons alors approximer dans l'espace des politiques. Soit $y_0(x)$ un choix initial pour une politique optimale et soit alors $f_0(x)$, le retour dû à ce choix.

On a :

$$f_0(x) = T(f_0, y_0(x))$$

Nous résolvons cette équation. Pour améliorer $y_0(x)$, nous déterminons $y_1(x)$ comme une fonction de x qui maximise $T(f_0, y)$. Supposons alors que $y_1(x)$ est continue. Ainsi, nous obtenons une suite de politiques $\{y_N(x)\}$ et une suite de fonctions retour $\{f_N(x)\}$. On démontre alors le théorème suivant.

Théorème 3. Soit $f_0(x)$ le résultat d'une approximation initiale dans l'espace des politiques $f_0(x) = T(f_0, y_0(x))$

où $y_0(x)$ est une fonction quelconque de x satisfaisant aux conditions :

$$0 \leq y_0(x) \leq x$$

Alors si les hypothèses du théorème I sont satisfaites, la suite de fonctions

$$f_{N+1}(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} T(f_N, y) \text{ converge uniformément vers la}$$

solution $f(x)$ et cette convergence est monotone.

7°)- Propriétés de la solution.-

Nous allons énoncer trois théorèmes sur la convexité (ou la concavité) de la solution.

Théorème 4. Si les hypothèses du théorème I sont satisfaites, si de plus g et h sont des fonctions convexes de x , alors $f(x)$ sera une fonction convexe, et pour chaque valeur de x , y sera égale à 0 ou à x .

Théorème 5. Si les hypothèses du théorème I sont satisfaites, si de plus g et h sont des fonctions strictement concaves de x , alors $f(x)$ sera une fonction strictement concave de x . Dans ce cas, la politique optimale sera unique.

Théorème 6. Si a) $g(x)$ et $h(x)$ sont strictement concaves pour $x \geq 0$, monotones croissantes, possédant des dérivées premières continues et $g(0) = h(0) = 0$

$$b) \frac{g'(0)}{1-a} > \frac{h'(0)}{1-b}, \quad h'(0) > g'(0), \quad b > a$$

Alors la politique optimale a la forme suivante :

$$a) y = x \text{ pour } x \in [0, \bar{x}] \quad \text{où } \bar{x} \text{ est racine de :}$$

$$h'(0) = g'(x) + (b-a)g'(ax) + (b-a).a.g'(a^2x) + \dots$$

b) $y = y(x)$ pour $x > \bar{x}$ où $y(x)$ est une fonction comprise entre 0 et x , solution de :

$$g'(y) - h'(x-y) + (a-b)f'(ay + b(x-y)) = 0$$

8°)- Processus dépendant du temps.

Supposons que le résultat d'un partage de x en y et $x-y$ à la $k^{\text{ème}}$ étape soit une fonction $g_k(x, y)$, et qu'il nous reste une quantité $a_k(x-y)$ à allouer pour les étapes suivantes. Nous cherchons à déterminer la politique qui maximise le retour total au bout de N étapes.

On supposera que $g_k(x, y)$ et $a_k(x, y)$ sont continues en x et y ($y \in [0, x]$). De plus :

$$0 \leq a_k(x, y) \leq ax \quad \text{où } a < 1$$

Définissons :

$$f_{k,N}(x) = \text{retour total d'un processus à } N \text{ étapes commençant avec une quantité } x \text{ à la } k^{\text{ème}} \text{ étape et utilisant une politique optimale.}$$

Nous avons, en utilisant le même raisonnement que pour le processus indépendant du temps, le système :

$$f_{k,I}(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [g_k(x, y)]$$

$$f_{k,N}(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [g_k(x, y) + f_{k+I, N-I}(a_k(x, y))]$$

Si N est infini, on obtient l'équation fonctionnelle :

$$f_k(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [g_k(x, y) + f_{k+I}(a_k(x, y))]$$

C. UN PROCESSUS DE DECISIONS A PLUSIEURS ETAPES
(type stochastique)

1°)- Introduction.

Nous allons discuter un processus de décision à plusieurs étapes d'un type tout à fait différent du précédent. Ce processus stochastique présente des caractéristiques intéressantes et nous permettra de rencontrer le concept important de régions de décision.

2°)- Processus stochastique de la mine d'or.

Soit deux mines d'or A et B, possédant respectivement les quantités x et y d'or. Nous n'avons qu'une machine d'extraction qui, si elle est utilisée à la mine A, a une probabilité p_1 d'extraire une fraction r_1 de l'or de la mine, et une probabilité $1-p_1$ de ne pas extraire d'or du tout et d'être endommagée. De même pour la mine B, nous avons le doublet p_2, r_2 .

Nous utilisons la machine soit en A, soit en B; Si elle n'est pas endommagée à la suite de cette première opération, on recommence et ce jusqu'à ce que la machine soit endommagée. On cherche la suite de choix qui maximise la quantité d'espérée extraite avant que la machine soit endommagée.

Une suite $S = AA BB A B \dots$ doit être comprise comme d'abord le choix de la mine A, puis encore A, puis B, puis B, etc...

3°)- Approche de l'équation fonctionnelle.

Posons :

$f_N(x,y) =$ quantité espérée d'or extrait avant que la machine soit endommagée quand A possède x au départ, et B, y et utilisant une politique optimale avant au plus N étapes.

Considérons le processus à une étape, nous voyons que le choix A nous donne une espérance mathématique $p_1 r_1 x$ tandis que le choix B nous donne $p_2 r_2 y$. Donc :

$$f_1(x, y) = \text{Max} (p_1 r_1 x, p_2 r_2 y)$$

Considérons alors le processus à $N + 1$ étapes. Que soit le premier choix, la continuation sur les N étapes restantes doit être optimale si nous voulons obtenir une politique optimale pour un processus à $N + 1$ étapes.

Si A est choisi $f_A(x,y) = p_1 (r_1 x + f_N((1-r_1)x, y))$

Si B est choisi $f_B(x,y) = p_2 (r_2 y + f_N(x, (1-r_2)y))$

D'où l'équation fonctionnelle :

$$f_{N+1}(x,y) = \text{Max} [f_A(x,y), f_B(x,y)]$$

$$= \text{Max} \left[\begin{array}{l} p_1 (r_1 x + f_N((1-r_1)x, y)) \\ p_2 (r_2 y + f_N(x, (1-r_2)y)) \end{array} \right]$$

4°)- Approximation à un nombre infini d'étapes.

Le retour $f(x,y)$ en supposant qu'il existe, satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$f(x,y) = \text{Max} (p_1 (r_1 x + f((1-r_1)x, y)), p_2 (r_2 y + f(x, (1-r_2)y)))$$

Nous allons énoncer pour une telle équation le théorème

Théorème I. Supposons que $p_1, p_2 < 1$
 $0 \leq r_1, r_2 \leq 1$

Il existe une solution unique à l'équation fonctionnelle précédente, finie dans le rectangle $x \in [0, \bar{x}]$, $y \in [0, \bar{y}]$. Cette solution $f(x,y)$ est continue dans une partie finie de la région $x, y \geq 0$.

5°)- Approximation dans un espace des politiques et convergence monotone.

Comme dans le chapitre précédent, nous pouvons être sûrs de la convergence monotone par l'approximation dans un espace de politiques. Les deux plus simples approximations sont celles correspondant aux suites A^{∞} et B^{∞} . De la première politique on espère :

$$f_A(x,y) = \frac{p_1 r_1 x}{1-p_1(1-r_1)}$$

et de la seconde :

$$f_B(x,y) = \frac{p_2 r_2 y}{1-p_2(1-r_2)}$$

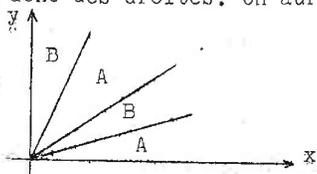
6°)- La solution.

Il est intuitivement clair qu'un choix A est fait si $x/y \gg 1$ et un choix B si $y/x \gg 1$. Il est également facile de voir que le choix à chaque étape ne dépend que du rapport $\frac{x}{y}$ puisque :

$$f(kx, ky) = kf(x,y)$$

Si nous examinons le quadrant (x,y) $x,y \geq 0$, et que nous le divisons en des plages A et des plages B, c'est-à-dire les valeurs de x et de y où la décision A est le premier choix optimal et celles où la décision B l'est, alors le couple (x,y)

dans la plage A implique que (kx, ky) est également dans la plage A quel que soit k , de même pour B. Les frontières des plages seront donc des droites. On aura donc



Les régions ainsi déterminées sont appelées régions de décision.

Nous allons supposer qu'il n'y a que deux régions et nous allons essayer de déterminer leurs frontières.

La frontière a pour particularité d'être la ligne où les choix A et B sont équivalentes. Si nous choisissons A au point (x, y) , que nous effectuons une politique optimale, nous avons :

$$f_A(x, y) = p_1 r_1 x + p_1 f((1-r_1)x, y)$$

Si nous faisons un choix B

$$f_B(x, y) = p_2 r_2 y + p_2 f(x, (1-r_2)y)$$

et on doit écrire :

$f_A = f_B$. Malheureusement, f ne disparaît pas. Mais nous pouvons faire la remarque très simple suivante : si nous effectuons d'abord un choix A, nous diminuons la quantité x et elle seule, nous entrons donc dans la région où le choix B doit être fait, puis nous utilisons une politique optimale. Nous noterons une telle politique $f_{AB}(x, y)$. De même si le choix B est effectué en premier, alors A sera choisi à la seconde étape et nous utiliserons après une politique optimale, notée $f_{BA}(x, y)$. On doit écrire que :

$$f_{AB}(x, y) = f_{BA}(x, y)$$

$$\text{Or } f_{AB}(x, y) = p_1 r_1 x + p_1 (p_2 r_2 y + p_2 f((1-r_1)x, (1-r_2)y))$$

$$f_{BA}(x, y) = p_2 r_2 y + p_2 (p_1 r_1 x + p_1 f((1-r_1)x, (1-r_2)y))$$

$$\text{d'où l'équation de la frontière : } \frac{p_1 r_1 x}{1-p_1} = \frac{p_2 r_2 y}{1-p_2}$$

Théorème 2 : Considérons l'équation fonctionnelle :

$$f(x, y) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} A : p_1 (r_1 x + f((1-r_1)x, y)) \\ B : p_2 (r_2 y + f(x, (1-r_2)y)) \end{array} \right]$$

où $0 \leq p_1, p_2 \leq 1$ et $0 \leq r_1, r_2 \leq 1$

la solution est donnée par :

$$f(x, y) = p_1 (r_1 x + f((1-r_1)x, y)) \text{ si } \frac{p_1 r_1 x}{1-p_1} > \frac{p_2 r_2 y}{1-p_2}$$

$$f(x, y) = p_2 (r_2 y + f(x, (1-r_2)y)) \text{ si } \frac{p_1 r_1 x}{1-p_1} < \frac{p_2 r_2 y}{1-p_2}$$

pour $\frac{p_1 r_1 x}{1-p_1} = \frac{p_2 r_2 y}{1-p_2}$, l'un ou l'autre choix est optimal.

Nous avons donc obtenu une très simple caractérisation de la politique optimale. En général, il n'y aura pas de représentation analytique simple de la fonction retour $f(x, y)$.

7°) - Le problème pour un nombre fini d'étapes.

Théorème 3. Considérons les relations de récurrence.

$$f_I(x, y) = \text{Max} (p_1 r_1 x, p_2 r_2 y)$$

$$f_{N+I}(x, y) = \text{Max} \left[\begin{array}{l} A : p_1 (r_1 x + f_N((1-r_1)x, y)) \\ B : p_2 (r_2 y + f_N(x, (1-r_2)y)) \end{array} \right] \quad N=I, 2, \dots$$

pour chaque N , il y a deux régions de décision.

Démonstration.

Pour chaque $N \geq 2$, les points déterminés par la condition que AD plus une politique optimale pour les $N-2$ étapes suivantes est équivalent à BA plus une continuation optimale pour les $N-2$ étapes suivantes sont sur la même droite déterminée par

$$L : \frac{p_1 r_1 x}{1-p_1} = \frac{p_2 r_2 y}{1-p_2}$$

Pour un processus à N étapes, une politique a la forme

$$S_N : A^{aI} B^{bI} \dots A^{aN} B^{bN} \text{ avec } \sum_{i=1}^N (a_i + b_i) = N$$

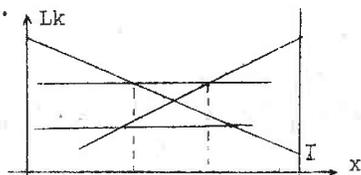
soit un point P situé au dessus de L . Si A est choisi, il y a deux possibilités :

ou bien A est utilisé k fois de suite, puis B
ou bien $S_N : A^N$

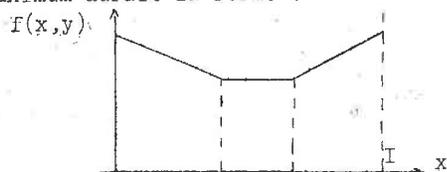
Considérons le premier cas, si A est utilisé $k-1$ fois de suite on atteint un point P' toujours au dessus de L . Au point P' , AB ne peut être que les deux premières étapes d'une politique à $N-k+1$ étapes, puisque BA plus une politique optimale est supérieure.

Montrons maintenant que si A^N est optimale au point P , alors A^N est optimale dans toute la région comprise entre OP et l'axe des x .

L'homogénéité de $f(x,y)$ en x et y permet de supposer que $x + y = I$. Considérons le processus à N étapes, il y a 2^N politiques possibles appelées P_1, P_2, \dots, P_{2^N} . Chacune de ces politiques utilisée en un point (x,y) donne un retour qui est une fonction linéaire de x et de y , appelée $L_k(x,y)$. Pour $x+y=I$, nous pouvons dessiner ces fonctions pour obtenir un réseau de 2^N droites.



Si N était égal à 2, alors les quatre politiques AA, AB, BA, BB fourniraient quatre droites comme ci-dessus, le retour maximum aurait la forme :



Il est clair que A^N est une politique optimale pour $y = x = I$. Il s'ensuit que si A^N est optimum à (\bar{x}, \bar{y}) , $0 < \bar{y} < I$ la ligne correspondant à A^N dominera toutes les autres lignes pour $x \leq \bar{x} \leq I$.

Pour un N quelconque, la frontière entre la région A et la région B sera :

soit $AB = BA$ soit $A^N = M_1$ où M_1 est une politique de forme compliquée;

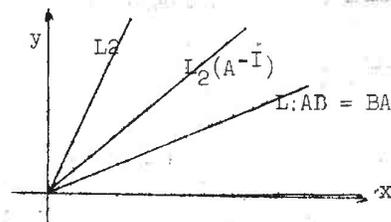
soit $B^N = M_2$ où M_2 est une politique de forme compliquée.

On peut établir alors le résultat suivant :

Théorème 4.

Les régions de décision pour f_N convergent vers celles de f quand N tend vers l'infini, de la façon monotone. Il existe toujours un entier N_0 tel que pour $N \geq N_0$, les régions pour f_N sont identiques à celles pour f .

Démonstration. Supposons $N = 3$, soit L_2 la frontière pour le processus à deux étapes et supposons que les positions relatives de L_2 et L soient les suivantes :



Un point de $L_2(A^{-1})$ donne un point de L_2 si on choisit A. Soit Q un point du secteur compris entre L_2 et $L_2(A^{-1})$. Si A est choisi au point Q comme premier mouvement d'une politique à trois étapes, B est utilisé au suivant puisque le point transformé est dans la région B d'un processus à deux étapes. Cependant, si Q est au dessus de L, nous savons que AB ne peuvent être les deux premières étapes d'une politique optimale. Donc en Q, on effectue le choix B. Pour un processus à trois étapes, la région B est donc au moins le secteur au dessus de $L_2(A^{-1})$. Ce processus peut être continué pour N de plus en plus grand jusqu'à ce que $L_k(A^{-1})$, pour k fini, vienne au dessous de L. La frontière $AB = BA$ est alors celle considérée, et le reste pour tout N plus grand.

D. LA STRUCTURE DES PROCESSUS DE PROGRAMMATION DYNAMIQUE

1°)- Discussion des deux processus précédents.

Ces deux processus ont en commun les caractéristiques suivantes :

a- Dans chaque cas, nous avons un système physique caractérisé à une étape quelconque par un petit nombre de variables, les variables d'état.

b- A chaque étape, nous devons faire un choix parmi un certain nombre de décisions.

c- L'effet d'une décision est une transformation des variables d'état.

d- Le passé historique du système n'a pas d'importance pour déterminer les actions futures.

e- Le but du processus est de maximiser une fonction des variables d'état.

Enfin, lorsque le temps joue un rôle, il est souvent préférable de lui réserver une place spéciale dans les variables d'état.

2°)- Le principe d'optimalité.

Une politique optimale possède la propriété que, quels que soient l'état initial et la décision initiale, les décisions restant à prendre doivent constituer une politique optimale eu égard à l'état résultant de la première décision.

Le principe est intuitif et une démonstration par l'absurde est évidente. La traduction mathématique de ce principe nous a conduit aux équations fonctionnelles rencontrées dans les deux précédents chapitres.

3°)- Formulation mathématique d'un processus déterministe discret.

Nous voulons dire par "déterministe" que le résultat de la décision est uniquement déterminé par cette décision.

Supposons que l'état du système est défini à une étape quelconque par un vecteur à M dimensions

$(p) = (p_1, p_2, \dots, p_M)$, vecteur astreint à appartenir à une région D.

Posons $T = \{T_q\}$ (où q varie sur un ensemble S qui peut être fini ou dénombrable, continu) un ensemble de transformations possédant la propriété

$$(p) \in D \Rightarrow T_q ([p]) \in D \forall q \in S$$

Une politique consiste en une sélection de N transformations dans l'ordre $P = (T_1, T_2, \dots, T_N)$ nous devrions écrire $T_{q1}, T_{q2}, \dots, T_{qN}$. On obtient alors la suite d'états :

$$\begin{aligned} (p_1) &= T_1 ([p]) \\ (p_2) &= T_2 ([p_1]) \\ &\vdots \\ (p_N) &= T_N ([p_{N-1}]) \end{aligned}$$

Ces transformations sont choisies pour maximiser une fonction donnée R, de l'état final (p_N) .

Observons que la valeur maximum de $R ([p_N])$ doit être une fonction du vecteur initial (p) et du nombre d'étapes N

Nous définissons alors :

$$\begin{aligned} f_N (p) &= \max_P R ([p_N]) \\ &= \text{fonction retour au bout de N étapes commençant dans l'état initial (p) et utilisant une politique optimale.} \end{aligned}$$

La suite est définie pour $N = 1, 2, \dots$ et pour $(p) \in D$.

Pour trouver une relation de récurrence entre les éléments de la suite $\{f_N ([p])\}$, nous appliquons le principe d'optimalité. Soit T_q la première transformation choisie. Le vecteur (p) est transformé en $T_q ([p])$, le retour maximum pour les N-1 étapes suivantes est alors $f_{N-1} (T_q ([p]))$. q doit donc être choisi de façon à maximiser le retour du processus à N-1 étapes commençant dans l'état $T_q ([p])$.

$$\begin{aligned} f_N ([p]) &= \max_{q \in S} f_{N-1} (T_q ([p])) \text{ pour } N \geq 2 \\ \text{et } f_1 ([p]) &= \max_{q \in S} R (T_q ([p])) \end{aligned}$$

Observons que $f_N ([p])$ est unique, mais que q ne l'est pas forcément.

Pour le cas d'un processus infini, la suite $f_N ([p])$ est remplacée par une seule fonction $f ([p])$, la relation de récurrence est alors remplacée par l'équation fonctionnelle :

$$f ([p]) = \max_{q \in S} f (T_q ([p]))$$

4°)- Formulation mathématique d'un processus stochastique direct

Une décision a maintenant pour résultat une distribution de transformations. Le vecteur initial (p) est transformé en un vecteur stochastique (z) doté d'une distribution $dG_q([p], [z])$

Deux cas distincts de processus peuvent se présenter suivant que :

- (z) est connu après la décision qui vient d'être faite et avant la prochaine à prendre
- On peut supposer aussi que seule la fonction de distribution est connue.

Nous ne considérerons que le processus du premier type. Nous raisonnerons donc maintenant avec l'espérance mathématique de la fonction de retour. Soit alors un processus à N étapes. Si (z) est l'état résultant d'une transformation initiale T_q , le retour pour les N-I dernières étapes sera $f_{N-I}([z])$ si nous utilisons une politique optimale.

L'espérance mathématique de retour est donc :

$$\int_{(z) \in D} f_{N-I}([z]) dG_q([p], [z])$$

La relation de récurrence pour la suite $f_N([p])$ est

$$f_N([p]) = \max_{q \in S} \int_{z \in D} f_{N-I}([z]) \cdot dG_q([p], [z]) \quad N \gg 2$$

et $f_I([p]) = \max_{q \in S} \int_{z \in D} R([z]) \cdot dG_q([p], [z])$

Pour le processus infini, nous obtenons l'équation fonctionnelle :

$$f([p]) = \max_{q \in S} \int_{z \in D} f([z]) dG_q([p], [z])$$

5°)- Formulation mathématique d'un processus déterministe continu.

Il existe un certain nombre de processus intéressants qui sont tels que les décisions doivent être prises à chaque point d'un continu, par exemple un intervalle de temps. Un exemple de tels processus est formé par le calcul des variations que nous étudierons plus loin.

Définissons :

$f([p]; T) =$ retour obtenu sur l'intervalle de temps (0, T) commençant à l'état initial (p) et utilisant une politique optimale.

Nous choisissons des politiques, c'est-à-dire des fonctions, sur des intervalles puis nous passerons à la limite en réduisant en intervalles à des points. L'équation fonctionnelle sera alors :

$$f([p]; S + T) = \max_{D \in [0, S]} f([p_D]; T)$$

où le maximum est pris sur toutes les décisions possibles à prendre sur l'intervalle (0, S).

La limite pour $S \rightarrow 0$ de l'équation précédente conduit à une équation différentielle non linéaire.

6°)- Approximation dans l'espace des politiques.

La méthode consiste à choisir une fonction initiale $f_0([p])$, puis déterminer la suite de fonctions $\{f_N([p])\}$ par la relation :

$$f_N([p]) = \max_q f_{N-I}(T_q([p])) \quad , N = 1, 2, \dots$$

Avant d'étudier cette méthode d'approximation, il convient d'observer qu'il existe une dualité naturelle entre la fonction $f([p])$ qui mesure le retour total, et la politique optimale qui permet d'obtenir ce retour. La connaissance de $f([p])$ donne toutes les politiques optimales, puisqu'elle détermine toutes les valeurs de q maximisantes, tandis que la connaissance d'une quelconque politique optimale particulière donne $f([p])$.

L'index maximisant q est une fonction de [p]. Comme nous avons noté $f([p])$ un élément de l'espace de fonctions de retour, nous noterons $q = q([p])$ un élément de l'espace des politiques.

Choisissant une approximation initiale $q_0 = q_0([p])$, nous calculons la fonction retour de cette politique au moyen de l'équation fonctionnelle :

$$f_0([p]) = f_0(T_{q_0}([p]))$$

Deux méthodes sont alors possibles :

I - Nous déterminons une fonction $q_I([p])$ qui maximise $f_0(T_q([p]))$. Nous déterminons alors $f_I([p])$ au moyen de l'équation fonctionnelle :

$$f_I([p]) = f_I(T_{q_I}([p]))$$

et ainsi de suite, nous obtenons alors deux suites : $\{f_N([p])\}$ et $\{q_N([p])\}$.

E - UN NOUVEAU FORMALISME DANS
LE CALCUL DES VARIATIONS.

I-I8

2 - On peut également définir :

$f_I([p]) = \text{Max}_q f_0(T_q([p]))$ et utiliser la méthode de courante des approximations successives :

$$f_{N+I}([p]) = \text{Max}_q f_N(T_q([p]))$$

Il est immédiat de voir que $f_I \geq f_0$ et que la suite $\{f_N\}$ est monotone croissante.

Nous utiliserons plutôt la seconde méthode, car la première plus naturelle sans doute, semble plus difficile à traiter rigoureusement.

1°)- Introduction.

Nous étudierons dans ce chapitre deux classes particulières de problèmes.

- Le premier est de déterminer le maximum ou le minimum de fonctionnelle de la forme :

$$J(z) = \int_0^T F(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) dt$$

sujettes aux relations et contraintes de la forme :

$$a - \frac{dz_i}{dt} = G_i(x, z), \quad x_i(0) = c_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$b - R_k(x, z) \leq 0 \quad k = 1, 2, \dots, i$$

- Le second est le problème de valeurs propres associées à l'équation :

$$u'' + \lambda^2 \varphi(t) u = 0 \quad u(0) = u(I) = 0$$

En effet, ce problème, sous certaines conditions relatives à $\varphi(t)$, est équivalent au problème de déterminer les minimums relatifs de :

$$J(u) = \int_0^I u'^2 dt$$

avec les contraintes $a - \int_0^t \varphi(t) u^2 dt = I$

$$b - u(0) = u(I) = 0$$

2°)- Une nouvelle approche.

Nous considérerons le calcul des variations comme une classe particulière de processus de décision à plusieurs étapes, de type continu. Nous utiliserons le principe d'optimalité à différents problèmes du type I.

I. soit à maximiser l'intégrale :

$$J(y) = \int_0^\infty F(x, y) dt \quad (I)$$

avec les relations $\frac{dx}{dt} = G(x, y), \quad x(0) = c \quad (2)$

La valeur maximum de $J(y)$ (que nous supposons exister) sera une fonction de la seule valeur initiale de x , notée c .

On écrira que $\text{Max}_y J(y) = f(c)$

soit $y = x(t)$ une fonction donnant le maximum de $J(y)$. Nous avons alors :

$$(3) \quad f(c) = \int_0^S F(x,y) dt + \int_S^{\infty} F(x,y) dt \quad \text{pour } S \text{ quelconque positif.}$$

Considérons la seconde intégrale. L'effet d'un choix initial de $y(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $(0, S)$ sera de convertir c en la valeur de x au temps S . Nous appellerons cette valeur $c(S)$. Il s'en suit alors que, quelque soit le choix initial de y sur $(0, S)$, nous trouvons sur l'intervalle restant $(S, \infty[$, un problème identique à l'original, à la seule différence près que c est maintenant $c(S) = x(S)$. Puisque l'intégrand est indépendant de t , ainsi que l'équation différentielle (2) le nouvel intervalle peut être considéré comme étant $[0, \infty[$ avec $x(0) = c(S)$

D'où, utilisant le principe d'optimalité, l'équation (3) peut s'écrire :

$$(4) \quad f(c) = \int_0^S F(x,y) dt + f(c(S))$$

Puisque le choix de la fonction y doit être fait de façon à donner le maximum $f(c)$, on aura la relation fonctionnelle fondamentale :

$$(5) \quad f(c) = \text{Max}_{y \in [0, S]} \left[\int_0^S F(x,y) dt + f(c(S)) \right]$$

Nous allons maintenant faire tendre S vers 0. Pour S petit, nous certaines conditions de continuité, nous avons :

$$f(c) = \text{Max}_{y \in [0, S]} (F(c, y(0)) S + f(c + S \cdot G(c, y'(0)) + O(S)))$$

Comme l'intervalle $[0, S]$ tend vers zéro, un choix de y sur $[0, S]$ devient un choix de $y(0)$. Posons $v = y(0)$. On obtient :

$$f(c) = \text{Max}_v [F(c, v) S + f(c) + S \cdot G(c, v) f'(c)] + O(S)$$

à la limite $0 = \text{Max}_v [F(c, v) + G(c, v) f'(c)]$

nous obtenons alors les deux équations :

$$0 = F(c, v) + G(c, v) f'(c)$$

$$0 = F'_v(c, v) + G'_v(c, v) f'(c)$$

$$(6) \quad \text{soit} \quad \begin{vmatrix} F(c, v) & G(c, v) \\ F'_v(c, v) & G'_v(c, v) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c'est-à-dire la relation d'Euler}$$

qui détermine v comme une fonction de c , c'est à dire y comme fonction de x , et nous résolvons alors l'équation différentielle () en x : $\frac{dx}{dt} = G(x, y(x)) \quad x(0) = c$

2° Considérons maintenant le problème plus général suivant : Déterminer le maximum (ou le minimum) de :

$$J(y) = \int_0^T F(x,y) dt$$

avec les relations $\frac{dx}{dt} = G(x, y) ; x(0) = c$

Les deux variables d'état sont maintenant c et T . Nous poserons alors :

$$\text{Max}_y J(y) = f(c, T)$$

En raisonnant de la même façon que pour l'exemple précédent, on obtient l'équation fonctionnelle :

$$f(c, T) = \text{Max}_{y \in [0, S]} \left[\int_0^S F(x,y) dt + f(c(S), T-S) \right]$$

qui conduit lorsque $S \rightarrow 0$, à l'équation non linéaire aux dérivées partielles :

$$0 = \text{Max}_v [F(c, v) + G(c, v) f'_c - f'_T]$$

$$\text{soit au système} \quad \begin{cases} f'_T = F(c, v) + G(c, v) f'_c \\ 0 = F'_v(c, v) + G'_v(c, v) f'_c \end{cases}$$

$$\text{soit} \quad f'_c = \frac{F'_v(c, v)}{G'_v(c, v)} = P(c, v)$$

$$f'_T = F - \frac{G F'_c}{G'_v} = Q(c, v)$$

Pour obtenir l'équation en v , on écrit que :

$$f''_{CT} = f''_{TC} \quad \text{soit :}$$

$$P'_v v'_T = Q'_v v'_c + Q'_c$$

3°)- Problème de valeurs propres.

Nous cherchons à déterminer la valeur de λ qui permet d'obtenir une solution non nulle à l'équation :

$$u'' + \lambda^2 \varphi(t) u = 0$$

$$u(0) = u(I) = 0$$

Ce problème comme nous l'avons signalé précédemment est équivalent à l'un ou l'autre des problèmes suivants :

- Déterminer les minimums relatifs de $\int_0^I u'^2 dt$ avec les contraintes :

$$\int_0^I \varphi(t) u^2 dt = I \quad u(0) = u(I) = 0$$

ou -- Déterminer les maximums relatifs de $\int_0^I \varphi(t) u^2 dt$ avec les contraintes :

$$\int_0^I u'^2 dt = I \quad u(0) = u(I) = 0$$

Il y a deux façons d'aborder le problème, la première étant de considérer la minimisation de :

$$J(u) = \int_a^I u'^2 dt \quad \text{sur tout } u \text{ vérifiant :}$$

$$u(a) = k, \quad u(I) = 0$$

$$\text{et } \int_a^I \varphi(t) u^2 dt = I$$

Ici la nouvelle variable d'état appartient au segment $(0, I)$. Nous supposons que la fonction $\varphi(t)$ satisfait à la contrainte $0 < b_1 \leq \varphi(t) \leq b_2$ pour t appartenant à $(0, I)$, et est continue sur tout ce segment.

Un problème équivalent est la maximisation de

$$k(u) = \int_a^I \varphi(t) u^2 dt$$

avec les contraintes $u(a) = k; u(I) = 0$

$$\int_a^I u'^2 dt = I$$

Une seconde formulation moins évidente est la minimisation de :

$$J(u) = \int_a^I u'^2 dt$$

avec les contraintes $u(a) = 0 \quad u(I) = 0$

$$\int_a^I [\varphi(t) u^2 + k(I-t)\varphi(t) u] dt = I$$

Nous n'étudierons en détail que la première formulation.

4°)- La première formulation.

$$\text{Posons } f(a, k) = \text{Min} \int_a^I u'^2 dt$$

avec les contraintes $u(a) = k \quad u(I) = 0$

$$\int_a^I \varphi(t) u^2 dt = I$$

Nous écrivons que le long d'une extrémale :

$$\int_{a+s}^I \varphi(t) u^2 dt = I - s \cdot \varphi(a) k^2$$

$$u(a+s) = k + sv$$

$$f(a, k) = v^2 s + \int_{a+s}^I u'^2 dt$$

en effectuant alors le changement de variable :

$$u(t) = (I - s \varphi(a) k^2 / 2) W(t), \text{ on a alors :}$$

$$w(a+s) = k + sv + s \varphi(a) k^3 / 2$$

$$f(a, k) = v^2 s + (I - s \varphi(a) k^2) \int_{a+s}^I w'^2 dt$$

En combinant alors les deux résultats ci-dessus, on obtient l'équation fonctionnelle :

$$f(a, k) = \text{Min}_v \left[v^2 s + (I - s \varphi(a) k^2) f(a+s, k + sv + s \varphi(a) k^3 / 2) \right]$$

à un infiniment petit du 1er ordre en s .

Faisant alors tendre s vers zéro, on obtient :

$$0 = \text{Min}_v \left[v^2 + v \cdot f'_k \right] + f'_a + \frac{\varphi(a) k^3}{2} \cdot f'_k - \varphi(a) \cdot k^2 \cdot f$$

5°)- Approximations successives.

Nous allons étudier cette méthode sur l'exemple déjà traité dans une section antérieure. Maximisation de :

$$J(y) = \int_0^T F(x, y) dt$$

avec $\frac{dx}{dt} = G(x, y) \quad x(0) = c$

nous avons alors obtenu l'équation :

$$f'_T = \text{Max}_v (F(c, v) + G(c, v) f'_c)$$

Choisissons une approximation initiale $v_0 = v_0(c, T)$ équivalente à $y_0 = y_0(x, T-t)$. On calcule alors x_0 au moyen de l'équation différentielle :

$$\frac{dx_0}{dt} = G(x_0, v_0(x_0, T-t)) \quad x_0(0) = c$$

puis $f'_0(c, T)$ par :

$$f_0(c, T) = \int_0^T F(x_0, y_0) dt$$

Cette fonction, f_0 , satisfait à l'équation différentielle linéaire :

$$f'_{0T} = F(c, v_0) + G(c, v_0) f'_{0c}$$

Pour obtenir l'approximation suivante sur une extrémale y , nous déterminons $v_I(c, T)$ comme une fonction qui maximise :

$$F(c, v) + G(c, v) f'_{0c}$$

utilisant $v_I(c, T)$ nous obtenons $y_I(x, T - t)$, puis x_I et f_I comme ci-dessus. Nous calculons alors v_2 comme fonction qui maximise

$$F(c, v) + G(c, v) f'_{Ic}$$

et ainsi de suite. Nous obtenons deux suites d'approximation, l'une pour f , la suite $\{f_N\}$, l'autre pour v , la suite $\{v_N\}$. Enfin, il est à noter que la suite $\{f_N\}$ est monotone croissante.

Nous ne nous sommes pas posés de questions sur l'existence de la solution, mais par contre, on peut affirmer que cette solution, si elle existe, est unique.

F - PROCESSUS DE DECISION MARKOVIENS

1°) - Introduction.-

Nous allons étudier un nouveau type de processus de décision qui nous conduira à une nouvelle classe d'équations fonctionnelles.

Nous considérerons le processus discret, qui nous amènera à étudier une équation du type :

$$x_i(n+1) = \text{Max}_q \sum_{j=1}^N a_{ij}(q) x_j(n) \quad \text{avec } x_i(0) = C_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

et la version continue de ce processus :

$$\frac{dx_i}{dt} = \text{Max}_q \sum_{j=1}^N a_{ij}(q) x_j(t) \quad \text{avec } x_i(0) = C_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

2°) - Processus de décision Markoviens.-

Etant donné un système physique S qui aux instants

$$t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$$

doit être dans un des états notés S_1, S_2, \dots, S_N

Supposons qu'à un instant t , il y a une probabilité $x_i(t)$ que le système soit dans l'état i , et qu'il existe une probabilité de passage d'un état à un autre. Posons :

a_{ij} = probabilité que le système sera en l'état i au temps $t + \Delta$ s'il était en l'état j au temps t

La relation entre l'ensemble des probabilités $x_i(t + \Delta)$ et l'ensemble des probabilités $\{x_i(t)\}$ est la suivante :

$$x_i(t + \Delta) = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

pour $t = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ Nous posons :

$$x_i(n\Delta) = y_i(n) \quad ; \quad \text{on peut alors écrire :}$$

$$y_i(n+1) = \sum_{j=1}^N a_{ij} y_j(n) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Considérons alors le processus de Markov suivant : supposons que les probabilités de passage a_{ij} soient fonctions d'un paramètre q , et qu'à chaque étape du processus q doit être choisi de façon à maximiser la probabilité que le système soit dans l'état S_1 . On obtient donc le système non linéaire :

$$y_I(n+1) = \text{Max}_q \sum_{j=I}^N a_{Ij}(q) y_j(n)$$

$$y_i(n+1) = \sum_{j=I}^n a_{ij}(q^*) y_j(n) \quad i = 2, 3, \dots, N$$

où $q^* = q^*(n)$ est une des valeurs qui maximise $y_I(n+1)$

Remarque. A la limite si $\Delta \rightarrow 0$, nous obtenons au lieu du système précédent le système :

$$\frac{dx_I}{dt} = \text{Max}_q \sum_{j=I}^N b_{Ij}(q) x_j(t) \quad x_I(0) = c_I$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=I}^N b_{ij}(q^*) x_j(t) \quad x_i(0) = c_i \quad i = 2, 3, \dots, N$$

Pour obtenir ce système, nous avons posé :

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{si } i \neq j \\ a_{ij} = I - b_{ij} \Delta \quad \text{si } i = j$$

3°)- Notations.

Nous commencerons par la version continue du processus. Introduisons la notation matricielle :

$$x = \begin{bmatrix} x_I \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad A(q) = \begin{bmatrix} a_{1j}(q) \\ \vdots \\ a_{ij}(q) \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_I \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}$$

Le système $\frac{dx}{dt} = \text{Max}_q \sum_{j=I}^N a_{ij}(q) x_j$, $x_i(0) = c_i \quad i = 1, 2, \dots, N$

prend la forme

$$\frac{dx}{dt} = \text{Max}_q A(q) \cdot x \quad x(0) = c$$

où il est entendu que le maximum est pris élément par élément, c'est-à-dire que la valeur de q sur une ligne est distincte de la valeur correspondante le q sur une autre ligne. Nous considérerons qu'il n'existe pas d'intersection entre les diverses maximisations. (Notons qu'il ne s'agit pas tout à fait des mêmes problèmes que dans la précédente section. Nous reviendrons à ce dernier plus loin).

D'autre part, nous employons les notations :

$$\|x\| = \sum_{i=1}^N |x_i|$$

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|$$

De plus on a $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$

4°)- Existence et unicité des solutions.

Considérons l'équation plus générale :

$$(I) \quad \frac{dx}{dt} = \text{Max}_q [A(q, t) x + b(q, t)] \quad \text{avec } x(0) = c$$

qui donne l'équation intégrale :

$$x = \text{Max}_q \left[c + \int_0^t b(q, s) ds + \int_0^t A(q, s) x ds \right]$$

On démontre le lemme

Lemme : Posons : $T_I(x) = \text{Max}_q [b_I(q, t) + \int_0^t A(q, s)x ds]$

$$T_2(y) = \text{Max}_q [b_2(q, t) + \int_0^t A(q, s)y ds]$$

Alors :

$$\|T_I(x) - T_2(y)\| \leq \text{Max}_q \left[\|b_I(q, t) - b_2(q, t)\| + \int_0^t \|A(q, s)\| \|x - y\| ds \right]$$

Théorème - Supposons que q est un élément d'un ensemble de fonctions S et possède la propriété où :

$$\|A(q, t)\|, \|b(q, t)\| \leq f(t)$$

où $f(t)$ est intégrable sur un intervalle fini $0 \leq t \leq T$. Supposons en outre que le maximum de $A(q, t)x + b(q, t)$ est atteint pour $q \in S$ pour certaines valeurs fixes de x et t . Alors il y a une solution unique à l'équation (I). Cette solution peut être obtenue comme étant la limite des approximations successives

$$x_0 = c \\ x_{n+1} = c + \text{Max}_q \left[\int_0^t [A(q, s)x_n + b(q, s)] ds \right] ; n = 0, 1$$

5°)- Approximations dans l'espace des politiques.

Considérons l'équation scalaire :

$$\frac{du}{dt} = \text{Max}_q [b(q, t) + a(q, t)u] ; u(0) = c$$

avec les restrictions $|a(q, t)|, |b(q, t)| \leq f(t)$ et $\int_0^{t_0} f(t) dt$ existe. Nous commençons par choisir une politique initiale :

$q_0 = q_0(t)$ et déterminons alors u_0 au moyen de l'équation :

$$\frac{du_0}{dt} = b(q_0, t) + a(q_0, t)u_0 \quad u_0(0) = c$$

puis on détermine q_+ en lui imposant de maximiser la fonction $b(q,t) + a(q,t) u_0$ on calcule alors u_I par :

$$\frac{du_I}{dt} = b(q_+, t) + a(q_+, t) u_I - u_I(0) = C \text{ etc...}$$

Nous déterminons ainsi une suite de fonctions $\{u_n\}$ et une suite de politiques $\{q_n\}$. On montre (voir Bellmann p. 327) que la suite $\{u_n\}$ converge.

Revenons maintenant aux systèmes matriciels de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \text{Max}_q [b(q,t) + A(q,t)x] ; x(0) = c$$

Il nous suffit de déterminer les conditions sur la matrice $A(q,t)$ qui nous permettent d'assurer que $f(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$ entraîne que $y \geq 0$ pour $t \geq 0$ où y est solution de :

$$(II) \quad \frac{dy}{dt} = A(q,t)y + f(t) ; y(0) = 0$$

solution qui est donnée par :

$$w = \int_0^t Y(t) Y^{-1}(s) f(s) ds$$

où $Y(t)$ est solution de : $\frac{dY}{dt} = A(q,t)Y$ $Y(0) = I$

La condition nécessaire et suffisante est alors que :

$Y(t) Y^{-1}(s)$ soit une matrice à éléments positifs pour $t \geq s \geq 0$.

6°)- Versions discrètes.

Soit la suite $x_i(n)$ $i = 1, 2, \dots, N$ déterminée par la relation de récurrence :

$$(I) \quad x_i(n+1) = \text{Max}_q \sum_{j=1}^N a_{ij}(q) x_j(n) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad n \geq 0$$

Nous considérons tout d'abord le système homogène (c'est-à-dire indépendant de n).

$$\lambda y_i = \text{Max}_q \sum_{j=1}^N a_{ij}(q) y_j \quad i = 1, 2, \dots, N$$

avec les conditions :

$q = [q_1, q_2, \dots, q_N]$ varie sur un ensemble S qui possède la propriété que le maximum pour (I) est atteint pour un ensemble de paramètres (y_1, y_2, \dots, y_N)

\dots $0 \leq a_{ij}(q) \leq m$ m étant fini pour $q \in S$ et $i, j = 1, 2, \dots, N$

\dots soit $\varphi(q)$, pour q donné, la plus grande valeur propre en module de la matrice $A(q)$. Il est supposé que $\varphi(q)$ possède son maximum pour $q \in S$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème : Il existe une constante unique et positive λ qui possède la propriété que le système homogène a une solution positive y_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Cette solution est unique à une constante multiplicative près et :

$$\lambda = \text{Max}_{q \in S} \varphi(q)$$

On démontre alors pour l'équation (I) le théorème.

Théorème : Supposons qu'il existe un maximum unique pour q , et que $c_i \geq 0$, alors :

$$x_i(n) \sim a y_i \lambda^n \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

$$a = (c_1, c_2, \dots, c_N)$$

DISTRIBUTIONS DE KOLMOGOROV - SMIRNOV

ETUDE D'UN TEST NON-PARAMETRIQUE

REPARTITIONS DE KOLMOGOROV-SMIRNOV
 ETUDE D'UN TEST NON PARAMETRIQUE

I - ETUDE THEORIQUE

A - Position du problème - Résultats asymptotiques.

I Soit $F(x)$ la fonction de répartition des variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n . Un n-échantillon est une réalisation de X_1, \dots, X_n , soit x_1, x_2, \dots, x_n .

Si on désigne par $V(x)$ le nombre des x_i inférieurs à x , la fonction de répartition d'un tel échantillon est donc :

$$F_n(x) = \frac{V_n(x)}{n}$$

Les problèmes posés sont les suivants :

1) Comparer $F_n(x)$ et $F(x)$

qui nous conduit à l'étude de :

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

$$D_n^+ = \sup_x (F_n(x) - F(x))$$

$$D_n^- = -\inf_x (F_n(x) - F(x))$$

2) Comparer deux échantillons d'ordres m et n

Les deux échantillons sont supposés indépendants. On fera alors intervenir les variables ainsi définies :

$$D_{m,n} = \sup_x F_n(x) - F_m(x)$$

$$D_{m,n}^+ = \sup_x (F_n(x) - F_m(x))$$

$$D_{m,n}^- = -\inf_x (F_n(x) - F_m(x))$$

où $F_m(y)$ représente la fonction de répartition du m -échantillon.

Les deux problèmes comptent deux stades :

- Détermination des lois asymptotiques des variables aléatoires D normées.

- Détermination des lois exactes elles-mêmes.

Remarquons tout de suite que le problème (1) se ramène au problème (2) car les lois de D_n, D_n^+, D_n^- sont les lois limites de celles de $D_{m,n}, D_{m,n}^+, D_{m,n}^-$ lorsque m tend vers l'infini. En effet d'après le théorème de Glivenko-Cantelli :

$$D_m^* = \sup_x |F_m(x) - F(x)| \xrightarrow{p.s.} 0$$

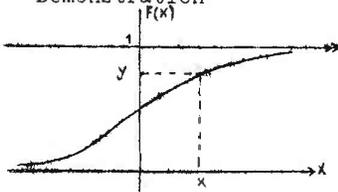
Or $D_n - D_m^* \leq D_{m,n} \leq D_n + D_m^*$

donc $D_{m,n} \xrightarrow{p.s.} D_m$
 $m \rightarrow \infty$

Nous allons maintenant démontrer la lemme très important suivant .

Lemme. Les lois des diverses variables D ne dépendent pas de la fonction de répartition $F(x)$ supposée continue.

Démonstration



En effet la relation $y = F(x)$ fait correspondre aux variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n , des variables aléatoires indépendantes et uniformément réparties sur le segment $[0,1]$. Soit Y_1, Y_2, \dots, Y_n ces variables aléatoires.

Soit $\bar{V}_n(y)$ le nombre aléatoire de valeurs de l'échantillon (y_1, \dots, y_n) inférieur à y ; on a :

$$V_n(x) = \bar{V}_n(y) \quad \text{où } y = F(x)$$

Rappelons que $V_n(x)$ est le nombre de valeurs de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) inférieur à x .

Plus précisément, l'égalité précédente a lieu presque sûrement car $X < x$ n'entraîne $Y < y$ que si x n'est pas intérieur à un palier de $F(x)$; mais la probabilité est nulle qu'une des variables aléatoires X_i appartienne à un palier puisque la fonction de répartition $F(x)$ est supposée continue. On a donc :

$$\Pr [V_n(x) = \bar{V}_n(y), \forall x, y = F(x)] = 1$$

On pourra donc se limiter à X uniformément répartie sur $[0,1]$, c'est ce qui est supposé être dans le paragraphe suivant.

II - Méthode de Doob

Les variables $V_n(x), V_n(x')$ avec $0 \leq x < x' \leq 1$ ne sont pas indépendantes, pas plus que les accroissements $V_n(x') - V_n(x)$ pour des intervalles $[x, x']$ disjoints.

La loi de $V_n(x)$, celle de $V_n(x') - V_n(x)$ sont des lois binomiales à n épreuves correspondant à la probabilité x , ou $x' - x$ pour chaque épreuve. De même, les lois simultanées de $V_n(x_1), \dots, V_n(x_k)$ dérivent de lois multinomiales; et quand n tend vers l'infini, chacune de ces lois tend vers une limite qui est une loi normale, si on prend soin de normer en divisant par \sqrt{n} .

On introduit les variables :

$$U_n(x) = \sqrt{n} \left[\frac{V_n(x)}{n} - x \right]$$

Quand n tend vers l'infini, les $U_n(x)$ définissent des lois temporelles normales :

$$\frac{U_n(x)}{[U_n(x') - U_n(x)]^2} \xrightarrow{p.s.} \frac{x}{(x'-x)[1 - (x'-x)]}$$

On sait construire (cf Fortet ou Doob) un processus $U(x)$, répondant aux conditions précédentes, dont toutes les lois temporelles ($x =$ temps) $U(x_1), U(x_2), \dots, U(x)$ sont normales; on peut définir un tel processus de façon que ses trajectoires (fonctions $U(x)$) soient continues presque sûrement.

On admet que les lois asymptotiques de :

$$\sqrt{n} D_n^+ = \sup_{0 \leq x \leq 1} U_n(x); \quad \sqrt{n} D_n^- = - \inf_{0 \leq x \leq 1} U_n(x)$$

$$\sqrt{n} D_n = \sup_{0 \leq x \leq 1} U_n(x)$$

sont les lois de :

$$D^+ = \sup_{0 \leq x \leq 1} U(x) \quad ; \quad D^- = - \inf_{0 \leq x \leq 1} U(x)$$

$$D = \sup_{0 \leq x \leq 1} U(x)$$

Théorème (Doob - Donsker). Les lois asymptotiques de $D_{m,n}, D_{m,n}^+, D_{m,n}^-$ lorsque m, n tendent vers l'infini, et $\frac{m}{n}$ tend vers ρ , sont celles de D, D^+, D^- , (ces deux dernières étant évidemment les mêmes, vu la symétrie de $U(x)$, ou celle de $D_{m,n}$ pour $m = n$).

Démonstration. Introduisons de même un processus $U^*(x)$ lié aux $\sqrt{m}^*(x)$, comme $U(x)$ l'a été aux $\sqrt{n}(x)$.

On a, puisque $F_n(x) - F_m(x) = \frac{U_n(x)}{n} - \frac{U_m^*(x)}{m}$

$$\sqrt{\frac{m \cdot n}{m+n}} D_{m,n} = \sqrt{\frac{n}{m+n}} \sup \left| U_m^*(x) - \sqrt{\frac{m}{n}} U_n(x) \right|$$

Donc, $\sqrt{\frac{m \cdot n}{m+n}} D_{m,n}$ tend en loi vers :

$$\sqrt{\frac{\rho}{1+\rho}} \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| U(x) - \frac{U^*(x)}{\sqrt{\rho}} \right| \text{ où } \rho = \frac{n}{m}$$

mais le processus $\frac{\sqrt{\rho} U(x) - U^*(x)}{\sqrt{1+\rho}}$ est encore un processus

gaussien (c'est-à-dire à lois temporelles normales). Il est identique à $U(x)$, à même loi que D . De même en ce qui concerne les lois limites de $D_{m,n}^+$ et $D_{m,n}^-$.

III - Processus de marche aléatoire lié aux $D_{m,n}$ et lois asymptotiques.

Posons $m + n = N$. La fonction :

$$m \cdot n (F_m(x) - F_n(x)) = n \sqrt{m}(x) - m \sqrt{n}^*(x) \text{ subit}$$

$$m \text{ sauts} + n \text{ si } x \in x_i, i \in [1, n]$$

$$n \text{ sauts} - m \text{ si } x \in y_j, j \in [1, m]$$

On range ces valeurs par ordre de grandeur croissante.

La probabilité de chacun des $N!$ ordre possibles de ces valeurs une fois rangées est $\frac{1}{N!}$. Soit alors $\xi_i, i \in [1, N], N$ variables aléatoires indépendantes telles que :

$$\xi_i = \begin{cases} \alpha & \text{probabilité } p \\ -\beta & \text{" } I \cdot p \end{cases} \text{ et } S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$$

Tous les chemins possibles de ce processus discret $S(k) = S_k$, partant de $S_0 = 0$ et aboutissant à z au temps N sont équiprobables car correspondant au même nombre de pas r et s de chaque signe défini par :

$$\begin{aligned} r + s &= N \\ r \alpha - s \beta &= z \end{aligned}$$

A chaque ordre des x_i, y_j on associe un chemin de réalisations $S(k) / S_{N=0}$ de façon biunivoque :

$$\xi_k = \begin{cases} \alpha & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ valeur est un } x_i \\ -\beta & \text{si la } k^{\text{ème}} \text{ valeur est un } y_j \end{cases}$$

On fera dans le cas général $\alpha = n, \beta = m$ ainsi :

$$m \cdot n D_{m,n} \xrightarrow{\text{loi}} \sup (S_k / S_N = 0)$$

de même pour $D_{m,n}^+$ et $D_{m,n}^-$.

Connaitre :

$$\Pr [D_{m,n} < \frac{a}{m \cdot n}] \text{ revient à connaître la distribution}$$

du temps 0 au temps N du processus S_k limité par les deux barrières absorbantes $\pm a$.

Passage à la limite.

Nous nous intéressons au cas où $m = n$. On établit le couple de barrières $\pm a$. On connaît les deux démonstrations,

- 1' une due à Gnedenko de dénombrement des chemins
- 1' autre, beaucoup plus élégante, due à M. Tortrat (méthode des images).

Rappelons simplement le résultat asymptotique :

$$\Pr [D < a] = 1 - 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 a^2} \quad (I)$$

Fonction (β) de Jacobi. Ajoutons qu'on ne connaît pas de forme algébrique de la fonction caractéristique correspondant à cette fonction de répartition.

Dans la suite (voir étude pratique), nous utiliserons le résultat suivant :

$$\Pr [D < 1,36] = 0,95$$

Théorème de Kolmogorov. La loi de $\sqrt{n} D_n$ tend vers la loi définie par (I)

Théorème de Smirnov. La loi de $\sqrt{\frac{m \cdot n}{m+n}} D_{m,n}$ tend vers la loi définie par (I) si $\frac{m}{n}$ tend vers ρ arbitraire.

B - Etude de la distribution de la déviation entre deux échantillons ou entre un échantillon et sa loi.

I- Distribution de $n D_{m,n}^+$ et $n D_{m,n}^-$ lois asymptotiques soit la variable aléatoire $\xi_i = \pm 1$ (valeurs équiprobables); $S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$.

Un chemin de ce processus prend successivement les diverses valeurs (correspondant à celles de $V_n(x) - V_n^*(x)$).

La distribution au temps k est donnée par la fonction génératrice $y^k(u)$ avec

$$y = \frac{I}{2} \left(u + \frac{I}{u} \right)$$

Nous créons une barrière absorbante en $z = a$, ajoutant à la masse initiale $+I$ en 0 , la masse image $-I$ en $2a$, d'où la fonction génératrice au temps k :

$$(I - u^{2a}) y^k(u)$$

Rapportons le coefficient du degré 0 , dans l'égalité précédente, à la probabilité :

$$\Pr [S_{2n} = 0] = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$$

d'où $\Pr [n D_{n,n}^+ < a] = I - \frac{C_{2n}^{n-a}}{C_{2n}^n}$

Si on établit maintenant les barrières $-b$ et a . Si J_a et J_b désignent les opérations qui consistent à prendre l'image d'une masse de l'axe des z par rapport aux barrières $z=a$ et $z=-b$. On aura le jeu de masses initiales $\pm I$:

$$I - J_a (I - J_b) (I - J_a) \dots$$

$$- J_b (I - J_a) (\dots)$$

d'où la fonction génératrice, au temps $2n$

$$g_{2n}(u) = \left(\frac{u + I/u}{2} \right)^{2n} (I - u^{2a}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u^{2kd}$$

Il vient alors, en prenant le rapport des termes de degré 0 à la probabilité $C_{2n}^n/2^{2n}$ qu'un chemin du processus sans barrières atteigne le point $z_{2n} = 0$, on obtient :

$$p(n,b,a) = \Pr [-b < n (F_n(x) - F_n^*(x)) < a]$$

$$= \frac{ \left[\sum_k C_{2n}^{n+kd} - \sum_{k'} C_{2n}^{n+a+k'd} \right]}{C_{2n}^n} \quad (2)$$

avec $|kd| \leq n$; $|a+k'd| < n$; $a, b > 0$

pour $a = b = \frac{d}{2}$, la formule se réduit à :

$$\Pr [n D_{n,n} < a] = \sum_k (-I)^k \frac{C_{2n}^{n+ka}}{C_{2n}^n}$$

Lois asymptotiques.

On nomme $n D_n$, n en divisant par $\sqrt{2n}$ car $\text{Var}(\xi_i) = I$ et $\text{Var}(S_{2n}) = 2n$. La somme (2) peut être mise sous forme alternée. On ordonne les $n + kd$ et $n + a + k'd$, c'est-à-dire les k de $-\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ à $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ ($(C) =$ partie entière de \dots); les $n + a + k'd$ s'intercalent alors dans le signe $-$. On pose :

$$a_n = \lfloor \sqrt{2n} z \rfloor + I ; \quad b_n = \lfloor \sqrt{2n} z' \rfloor + I$$

$$l_n = \frac{d_n}{2n} \quad d_n = a_n + b_n$$

alors : $\Pr [-z' < \sqrt{\frac{n}{2}} (F_n(x) - F_n^*(x)) < z] = p(n, -b_n, a_n)$

(3)

Chaque terme de la somme (2) (avec a_n et b_n) a pour limite pour k et k' fixés, si $n \rightarrow \infty$

$$\frac{-2k^2 I^2}{e} \quad \text{ou} \quad \frac{-2(z+k'1)^2}{e}$$

La série (2) est absolument convergente, on peut donc en passant à la limite dans (3) écrire :

$$\Pr \left[\sqrt{\frac{n}{2}} D_{n,n}^+ < z, \sqrt{\frac{n}{2}} D_{n,n}^- < z' \right] \rightarrow \sum_{m \rightarrow \infty} \left(e^{-2k^2 I^2} - e^{-2(z+k'1)^2} \right)_{l=z+z'}$$

2. Distribution de $D_{m,n}^+$, $D_{m,n}^-$ dans le cas où $m = \sqrt{n}$ (entier)

Etudions le processus

$$S_0 = 0, \quad S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i \quad k \text{ de } 0 \text{ à } N = m + n$$

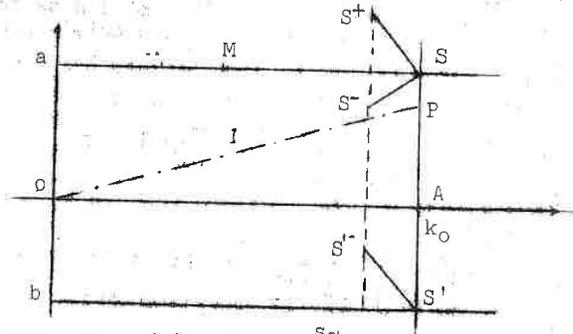
$$\left\{ \begin{aligned} \Pr [\xi_i = I] &= \frac{I}{I+I} \\ \Pr [\xi_i = -I] &= \frac{I}{I+I} \end{aligned} \right.$$

Chaque chemin (réalisation du processus) est défini par ; $z_k = r \cdot s \cdot v$ $k = r + s$ (r pas unité, s pas égaux à $-v$) et nous devons dénombrer les chemins en fonction des valeurs extrêmes atteintes.

a)- Le problème de la barrière positive $z = a$

Un chemin ne peut dépasser cette barrière sans la toucher. Désignons par $N^+(k, z, a)$ le nombre des chemins aboutissant à $z_k = z$ sans avoir atteint la cote a . Alors :

$N_k(a) = N^+(k-I, a-I, a)$ est le nombre des chemins qui atteignent a pour la première fois au temps k.



Lemme $N_{k_0}(a) = \frac{a}{k_0} \cdot C_{k_0}^{S_0}$ $k_0 = r_0 + s_0$ $a = r_0 - s_0 \cdot v$

Nous devons retrancher de $C_{k_0}^{S_0}$, nombre total de chemins OS, ceux qui ont atteint $z = a$, avant le temps k_0 , soit en M, au temps k tel que :

$z_k = a$ pour $k = r + s$ donc $k_0 - k' = s'(v+I)$ avec $s' = s_0 - s$

Mais le nombre de chemins MS est égal, quel que soit M, à $v + I$ fois celui des chemins MS^+ car c'est :

$\frac{C_{k'}^{S'}}{k'} = \frac{k'}{s'} \cdot C_{k'-I}^{S'-I} = (v+I) \cdot C_{k'-I}^{S'-I}$

Comme tout chemin OS^+ touche nécessairement la barrière a, il s'en suit que le nombre de chemins OS touchant a avant le temps k_0 est égal à :

$(v+I) \cdot C_{k_0-I}^{s_0-I}$ donc :

$N_{k_0}(a) = C_{k_0}^{s_0} - (v+I) \cdot C_{k_0-I}^{s_0-I} = \frac{a_0}{k_0} \cdot C_{k_0}^{s_0}$

Si maintenant on prend une cote $z = z_{k_0}$ quelconque $k_0 = r_0 + s_0$, $z = r_0 - s_0 \cdot v$. Il faut pour avoir $N(k_0, z, a)$ retrancher tous les chemins ayant atteint a au temps k

$k - a = s(v+I)$, $s + s' = s_0$, $k + k' = k_0$

donc $N^+(k_0, z, a) = C_{k_0}^{s_0} - a \sum_s \frac{1}{k} \cdot C_k^s \cdot C_{k_0-k}^{s_0-s}$

donc $\Pr [S(k) < a / S_{k_0} = z] = 1 - \frac{1}{C_{k_0}^{s_0}} \sum C_k^s \cdot C_{k_0-k}^{s_0-s}$

$s = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{k_0 - a}{v+I} \rfloor$

$k = a + s(v+I)$

en particulier pour $z = 0$, $k_0 = N = n(v+I)$

$\Pr [m D_{m,n}^+ < a] = 1 - \frac{1}{n} \sum_{s=0}^m \frac{a}{k} C_k^s C_{m+n-k}^{n-s}$ (4)

$a \leq k = a + s(v+I) \leq n(v+I)$

$0 \leq s \leq n - \frac{a}{v+I}$

b) Cas de la barrière -b ou $\Pr (m D_{m,n}^- < b)$

Une symétrie par rapport au milieu I de OP (et un changement de sens sur le chemin) fait se correspondre biunivoquement les chemins OMP touchant la barrière $a = z + b$ pour la dernière fois en M et ceux OM'P qui touchent la barrière -b en M' pour la première fois. Aussi bien se correspondent les chemins n'ayant pas atteint $z + b$ et ceux n'ayant pas atteint -b.

En désignant par $N^-(k, z, -b)$ le nombre de chemins OP (se terminant en $z_k = z > -b$) qui n'ont pas atteint (ou dépassé) la valeur négative -b, on a :

$N^-(k, z, -b) = N^+(k, z, z + b)$

En $k = k_0 - I$, $z = v - b$ on obtient le nombre de chemins $S(k) > -b$ avec $z(k_0) = -b$:

$N_{k_0}(-b) = N^-(k_0 - I, v - b, -b) = N^+(k_0 - I, v - b, v)$

Par contre, le nombre $N^+(-b)$ des chemins $S(k) \neq -b$ avec $z(k_0) = -b$, s'obtient en retranchant de $C_{k_0}^{s_0}$ le nombre de chemins touchant -b (pour $k < k_0$), égal à $(v+I)$ fois celui des chemins OS^+ ayant dépassé $-b + I$, soit celui de chemin OS^+ ayant dépassé v

$N_{k_0}^+(-b) = C_{k_0}^{s_0} - (v+I) \sum_s C_k^s \cdot C_{k_0-k-I}^{s_0-s-I}$

$k = b + s(v+I)$

$s = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{k_0}{v+I} \rfloor - I$

Rq. Les distributions de $D_{m,n} = \sup (D_{m,n}^+, D_{m,n}^-)$ ont été obtenues dans ce cas.

3 - Cas où m et n sont quelconques.

Il suffit de retrancher à $C_{k_0}^{s_0}$ le nombre de chemins ayant touché (ou dépassé) pour la première fois la barrière a au temps k_s :

$a \leq z_s \leq a + n$

$z_s = rn - sm$

$k_s = r + s$

s peut prendre toutes les valeurs entières de 0 à s_I tel que $n - s_I = \lfloor \frac{a}{m} \rfloor + 1$ (nombre minimum de pas nécessaire pour revenir de z_{s_I} à 0 ainsi on a :

$$\Pr [m n D_{m,n}^+ < a] = I - \frac{I}{n} \sum_{s=0}^{n-k_s} N_{k_s} (a) C_{m+n-k_s}^{n-s}$$

$$0 \leq s \leq n - \lfloor \frac{a}{m} \rfloor$$

Jusqu'à présent, il n'a pas été publié d'expression simple de la distribution de $D_{m,n}^+$.

Les distributions de $D_{m,n} = \sup (D_{m,n}^+, D_{m,n}^-)$ ont été explicitées par M. Depaix.

4. Passage de $D_{m,n}^+$ à D_n^+

Il suffit de faire $m \rightarrow \infty$ ou $m = \sqrt{n}$, $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ dans (4) pour obtenir la distribution de $n D_n^+$, limite presque sûre de $n D_{m,n}^+$.

$$\Pr (n D_n^+ < b) = \lim \Pr (m D_{m,n}^+ < b \cdot \sqrt{n})$$

soit la limite de la somme (4) où $a = \lfloor b \sqrt{n} \rfloor + 1$, prenant à $b \sqrt{n}$ non entier. La sommation dans (4) porte sur tous les entiers.

$$0 \leq s \leq n \cdot \frac{\lfloor b \sqrt{n} \rfloor + 1}{\sqrt{n} + 1}$$

On prendra alors la limite sur chaque terme de la somme. On retrouve, en utilisant la formule de Stirling,

$$\Pr (n D_n^+ < b) = I - \frac{b}{n} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n-b}{n} \rfloor} C_n^s \left(\frac{b+s}{n} \right)^{s-1} \left(I - \frac{b+s}{n} \right)^{n-s}$$

II ETUDE PRATIQUE

I - INTRODUCTION - POSITION DU PROBLEME

Dans le chapitre précédent, nous avons pu nous rendre compte que jusqu'à présent il avait été impossible de donner une forme explicite de la loi de répartition en fonction des barrières dans le cas où l'ordre des échantillons était quelconque.

Nous allons donc nous intéresser au calcul de ces distributions.

Etant donné deux échantillons d'ordres m et n tirés d'une loi continue de fonction de répartition F(x), nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ échantillon} & \quad x_i \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{loi } F_n(x) \\ 2^\circ \text{ échantillon} & \quad y_j \quad \text{où } j = 1, 2, \dots, m \quad \text{loi } F_m(y) \end{aligned}$$

Ces deux échantillons sont supposés être rangés par grandeur, croissante.

On cherche le maximum de $|F_m - F_n|$

Nous formons alors l'échantillon d'ordre $N = m + n$, obtenu en réunissant les deux premiers échantillons. Soit z_i les éléments de cet échantillon.

Nous nous intéresserons alors à la variable aléatoire ξ_i définie par :

$$\xi_i = \begin{cases} \alpha & \text{si } z_i \text{ est un élément du } n\text{-échantillon} \\ -\beta & \text{si } z_i \text{ est un élément du } m\text{-échantillon} \end{cases}$$

La variable ξ_i suit donc une loi binômiale.

$$\text{On a } \Pr (\xi_i = \alpha) = \frac{n}{N} = p$$

$$\Pr (\xi_i = -\beta) = \frac{m}{N} = q$$

On choisit alors α et β tels que :

$$\begin{aligned} E \xi_i &= 0 \\ \text{Var } \xi_i &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

ce qui donne à résoudre le système :

$$(E \xi_i) = \alpha p - \beta q = 0$$

$$(\text{Var } \xi_i) = \alpha^2 p + \beta^2 q = \frac{1}{N}$$

soit

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{q}{p}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\frac{m}{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \times \sqrt{\frac{n}{m}}$$

Formons alors la somme :

$$s_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$$

et soit alors $\sigma_N = \max_{k \in (1, N)} |s_k|$

Nous nous intéressons alors à la distribution

$$E_N(z/0) = \Pr(\sigma_N < z / S_N = 0)$$

Dans les k premières variables aléatoires ξ_i , il y a r variables x et k-r variables y, d'où :

$$s_k = r\alpha - (k-r)\beta = (r\sqrt{\frac{m}{n}} - (k-r)\sqrt{\frac{n}{m}}) \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$= \left(\frac{r}{n} - \frac{k-r}{m}\right) \sqrt{\frac{m}{m+n}}$$

donc

$$\sigma_N = \max_k |s_k| = \max_k \left| \frac{r}{n} - \frac{k-r}{m} \right| \sqrt{\frac{m}{m+n}}$$

$$= \max |F_n - F_m| \sqrt{\frac{m}{m+n}}$$

On peut donc écrire :

$$\Pr[\sigma_N < z / S_N = 0] = \Pr\left[\sqrt{\frac{m}{m+n}} \sup_k |F_n - F_m| < z\right]$$

Or d'après le théorème des probabilités composées :

$$\Pr[\sigma_N < z / S_N = 0] = \frac{\Pr[\sigma_N < z, S_N = 0]}{\Pr[S_N = 0]}$$

$$= \frac{f(\eta, t)}{C_{m+n}^{n, p, q}} \quad \eta = 0$$

où $f(\eta, t)$ = Probabilité d'être en l'état η au temps t

Envisageons alors le plus grand commun diviseur d des nombres m et n. On pose :

$$n = \nu d$$

$$m = \mu d$$

Rappelons que la variable aléatoire binômiale ξ_i est la suivante :

$$\xi_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N \cdot n \cdot m}} & m \quad p = \frac{n}{N} \\ -\frac{1}{\sqrt{N \cdot n \cdot m}} & n \quad p = \frac{m}{N} \end{cases}$$

Envisageons alors une nouvelle variable aléatoire η_i binômiale ainsi définie :

$$\eta_i = \begin{cases} \mu & \text{avec la probabilité } p \\ -\nu & \text{avec la probabilité } q \end{cases}$$

Nous formons alors la somme

$$s'_k = \sum_{i=1}^k \eta_i$$

Le lien entre s_k et s'_k est très simple :

$$s_k = \frac{d}{\sqrt{N \cdot n \cdot m}} \cdot s'_k$$

Si nous posons alors $\sigma'_N = \max_k |s'_k|$

il vient puisque les maximums de s_k et s'_k sur l'ensemble des k sont obtenus pour la même valeur de k :

$$\sigma_N = \frac{d}{\sqrt{N \cdot n \cdot m}} \cdot \sigma'_N$$

donc :

$$\Pr[\sigma_N < z / S_N = 0] = \Pr\left[\sigma'_N < \frac{\sqrt{N \cdot n \cdot m}}{d} z / S_N = 0\right]$$

or σ'_N est un entier et $\frac{\sqrt{N \cdot n \cdot m}}{d} z$ ne l'est en général pas. On posera :

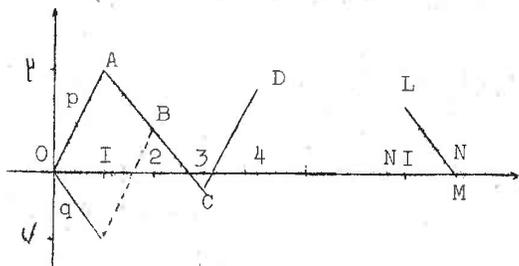
$$a = \left] \frac{\sqrt{N \cdot n \cdot m}}{d} z \left[= \left] \sqrt{d} \sqrt{\mu + \nu} \mu \nu \cdot z \left[$$

ou la notation $]u[$ représente l'entier immédiatement inférieur à u. Le but de nos calculs sera de chercher a tel que :

$$\Pr[\sigma'_N < a / S_N = 0] = 0,95 = \frac{\Pr[\sigma'_N < a, S_N = 0]}{\Pr[S_N = 0]}$$

Ce dénominateur de la fraction est connu : il s'agit du nombre de chemins qui vont du point 0 à l'instant 0, au point 0 à l'instant $N = m + n$, multiplié par la probabilité d'un chemin quelconque (tous les chemins ont la même probabilité $p^n q^m$).

Une interprétation géométrique très simple nous permet de justifier l'appellation chemin :



0 A B C ... L M est un chemin qui partant du point 0 à l'instant 0 arrive au point M à l'instant N.

Sur l'ensemble de tels chemins, certains dépassent l'ordonnée $\pm a$. Il est évident que s_k représente l'ordonnée d'un chemin au bout du temps k.

Donc :

$\Pr[\sigma'_N < a, s_{N=0} = 0] =$ nombre de chemins compris entre les barrières $\pm a \times p^m q^m$.

Pour a fixé, nous calculerons donc un nombre de chemins et le rapport de ce nombre de chemins à C_{m+n}^n (nombre total de chemins allant de 0 en 0) nous donnera la probabilité :

$\Pr[\sigma'_N < a / s_{N=0}]$ que nous cherchons.

Un tel calcul de dénombrement sera fait pas à pas. Pour m et n donnés, nous ferons varier a jusqu'à trouver une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

II - ECHANTILLONS SEMBLABLES. ETUDE ANNEXE.-

A) - Définition.

Nous avons déjà fait intervenir dans le paragraphe précédent les couples d'échantillons ayant même plus grand commun diviseur. Nous allons nous intéresser alors à des familles de couples d'échantillons. Donnons la définition suivante :

Définition Soient deux couples d'échantillons (m_1, n_1) et (m_2, n_2) . Soit d_1 le plus grand commun diviseur de m_1 et n_1 ; d_2 le plus grand commun diviseur de m_2 et n_2 .

Deux couples d'échantillons (m_1, n_1) et (m_2, n_2) seront dits semblables si :

$$\frac{m_1}{d_1} = \frac{m_2}{d_2} \quad \text{et} \quad \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2}{d_2}$$

B) - Notations

$$\begin{aligned} \text{On posera } p_{00}^{(N)} &= \Pr[\sigma'_N < a, s_N = 0] \\ p_{\mu+\nu}^{(\mu+\nu)} &= \Pr[\sigma'_{\mu+\nu} < a, s_{\mu+\nu} = 0] \end{aligned}$$

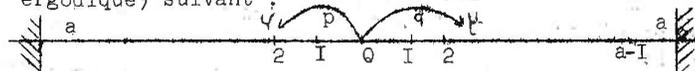
et de façon plus générale :

$p_{ik}^{(N)}$ = Probabilité pour aller du point d'ordonnée i au point d'ordonnée k en N pas sans traverser les barrières $\pm a$.

Nous allons chercher s'il existe des relations entre $p_{ik}^{(\mu+\nu)}$ et $p_{ik}^{(N)}$ et quelles sont ces relations.

C) - Etude

Soit alors le schéma de chaîne de Markov (à un ensemble ergodique) suivant :



la matrice de passage est la suivante :

Ensemble ergodique

	a-1	a-2	...	1	-a+1+k	-a+1
1	0	...	0	0	0	...
0	1	...	0	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
0	...	1	0	0	...	0
a-1	p	0	...	0	q	...
a-k	0	0	...	p	0	...
a-μ-1	0	0	...	0	0	...
i	0	0	...	0	0	...
-a+ν+1	0	...	0	...	0	...
-a+ν	0	...	q	...	0	...
0	0	...	q	0	0	...
-(a-1)	0	...	q	0	0	...

← $\mu+\nu$ → ← $2a-1$ →

qui est la matrice de passage d'une chaîne absorbante à un ensemble ergodique P_c est donc la forme :

$$[P_c] = \left[\begin{array}{c|c} [I] & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ \hline [R] & [P] \\ \hline \end{array} \right]$$

Matière de passage dans l'ensemble transitoire

On démontre alors que (produits de matrices bloc par bloc)

$$[P_c]^n = \left[\begin{array}{c|c} [I] & \begin{matrix} o & o & & o \\ o & o & & o \end{matrix} \\ \hline [R^{(n)}] & [P]^n \\ \hline \end{array} \right]$$

où $[P]^n$ représente effectivement la puissance n-ième de la matrice P.

Donc : la matrice de passage dans l'ensemble transitoire au bout de n pas est égale à la matrice de passage dans l'ensemble transitoire en un pas, élevée à la puissance n.

On peut donc d'un vecteur état π_0 :

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} a-I & & 0 & & -a+I \\ 0 & \dots & I & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

matrice ligne de dimension $2a-I$

soit alors π_N , le vecteur état à l'instant N

$$\pi_N = \left[\begin{array}{c} p_{o,a-I}^{(N)} \dots p_{o,o}^{(N)} \dots p_{o,-(a-I)}^{(N)} \end{array} \right]$$

on a :

$$\pi_N = \pi_0 \cdot [P]^N$$

On peut alors décomposer P^N de la façon suivante :

$$[P]^N = \underbrace{P^{\mu+\nu} \dots P^{\mu+\nu}}_d \dots P^{\mu+\nu} = [Q]^d$$

où $Q = P^{\mu+\nu}$

Une telle décomposition trouve sa justification dans le théorème suivant :

Théorème. Partant du vecteur π_0 défini plus haut, sous certaines conditions concernant l'éloignement des barrières,

$$p_{o,o}^{(t)} \neq 0 \iff t \text{ est un multiple de } \mu + \nu$$

Et π_t est donc de la forme :

$$\pi_t = \left[0 \dots p_{o,k(\mu+\nu)}^{(t)} \cdot p_{o,(k-1)(\mu+\nu)}^{(t)} \cdot p_{o,o}^{(t)} \dots \right]$$

$\longleftarrow (\mu+\nu) \longrightarrow$

c'est-à-dire que les seuls points à probabilité non nulles à l'instant t sont ceux dont les ordonnées y sont telles que :

$$y \equiv 0 \text{ modulo } \mu + \nu$$

Démonstration.

Soit donc le vecteur état π_0 . En un pas on peut aller soit en μ (probabilité p) soit en $-\nu$ (probabilité q).

A l'instant t, on a effectué r pas d'amplitude μ et t-r pas d'amplitude $-\nu$. L'ordonnée du point d'arrivée est :

$$r\mu - (t-r)\nu \text{ soit :}$$

$$r(\mu + \nu) - t\nu \text{ On veut avoir :}$$

$$r(\mu + \nu) - t\nu = 0$$

$$\text{soit } r(\mu + \nu) = t \cdot \nu$$

μ et ν sont premiers entre eux; donc ν et $\mu + \nu$ le sont également. Or $t > r$, donc ne divise pas r. Par suite t divise $\mu + \nu$.

De plus pour $a > \text{Max}(\mu, \nu)$, il existe toujours au moins un chemin qui conduit de l'ordonnée 0 au temps 0, à l'ordonnée 0 au temps N.

Supposons alors que t soit un multiple de $\mu + \nu$. Au bout de t pas, l'ordonnée d'un chemin où on a effectué r pas μ et t-r pas ν est :

$$y = r(\mu + \nu) - t\nu = (\mu + \nu)(r - t\nu/\nu) \text{ où } t = t'(\mu + \nu)$$

donc y est un multiple de $\mu + \nu$.

Les seuls points dont la probabilité peut ne pas être nulle au bout de t pas (où t est un multiple de $\mu + \nu$) sont les points :

$$0, \pm(\mu + \nu), \pm 2(\mu + \nu), \dots, \pm s(\mu + \nu)$$

$$\text{où } s = \left\lfloor \frac{a}{\mu + \nu} \right\rfloor$$

Remarque. L'ensemble de ces résultats reste valable lorsqu'on part d'un vecteur état π_0 :

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & I & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & i(\mu+\nu) & & 0 & & \end{bmatrix}$$

Supposons connu le vecteur état à l'instant $i(\mu+\nu)$, c'est-à-dire le poids des seuls points $0, \pm(\mu+\nu), \dots, \pm s(\mu+\nu)$, nous allons chercher le vecteur état à l'instant $(i+1)(\mu+\nu)$ dont nous savons que les seuls points occupés sont également $0, (\mu+\nu), \dots, \pm s(\mu+\nu)$.

Le problème à $2a-1$ dimensions se transforme donc en un problème à $2s+1$ dimensions où :

$$s = \left\lfloor \frac{a}{\mu+\nu} \right\rfloor$$

Il s'agit donc d'une simple réduction d'échelle, l'unité de temps étant maintenant $\mu+\nu$.

Mais, pour l'instant, nous avons toujours une matrice de passage Q' et des vecteurs état de dimension $2a-1$ avec la relation :

$$\begin{bmatrix} \pi_{(i+1)(\mu+\nu)} \\ \vdots \\ \pi_{(i+1)(\mu+\nu)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{i(\mu+\nu)} \\ \vdots \\ \pi_{i(\mu+\nu)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q' \\ \vdots \\ Q' \end{bmatrix}$$

(I, $2a-1$) (I, $2a-1$) x ($2a-1$, $2a-1$)

Précisons que cette matrice Q' ne peut être utilisée qu'à partir d'un vecteur état initial π_0 de la structure suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & I & \dots & 0 \\ & & i(\mu+\nu) & & \end{bmatrix}$$

Voyons la structure de cette matrice Q' :

$$[Q'] = \begin{array}{cccccc|c} a-1 & 0(\mu+\nu) & i:k(\mu+\nu) & (k-1)(\mu+\nu) & -s(\mu+\nu) & -(a-1) & \\ \hline a-1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline i:k(\mu+\nu) & 0 & 0 & \begin{matrix} (\mu+\nu) \\ p_{i,s(\mu+\nu)} \end{matrix} & \begin{matrix} (\mu+\nu) \\ p_{i,i} \end{matrix} & \begin{matrix} (\mu+\nu) \\ p_{i,k-1(\mu+\nu)} \end{matrix} & \begin{matrix} (\mu+\nu) \\ p_{i,s(\mu+\nu)} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \begin{matrix} (\mu+\nu) \\ p_{0,i} \end{matrix} & \begin{matrix} (\mu+\nu) \\ p_{0,(k-1)(\mu+\nu)} \end{matrix} & \begin{matrix} (\mu+\nu) \\ p_{0,s(\mu+\nu)} \end{matrix} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline -(a-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\leftarrow \mu+\nu \rightarrow$

Si nous appelons $q'_{i,k}$ l'élément $i^{\text{ème}}$ ligne, $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice Q'

$$q'_{i,k} = 0 \text{ si } i \not\equiv 0 \pmod{\mu+\nu} \cup k \not\equiv 0 \pmod{\mu+\nu}$$

$$0 \text{ si } i \equiv 0 \pmod{\mu+\nu} \wedge k \not\equiv 0 \pmod{\mu+\nu}$$

Nous allons chercher le lien entre cette matrice Q' et la matrice $Q = [P]^{(\mu+\nu)}$

* pour les éléments (i,k) où i et k sont divisibles par $(\mu+\nu)$

on a :

$$q'_{i,k} = q_{i,k} = p_{i,k}^{(\mu+\nu)}$$

* pour les autres éléments, on mettra des zéros.

Une telle troncature de la matrice Q est valable; en effet partant du vecteur initial $\pi_0 = [0 \dots I \dots 0]$

$$k(\mu+\nu)$$

Lorsqu'on est en l'état $i(\mu+\nu)$, le vecteur état $\pi_{i(\mu+\nu)}$ a la forme suivante :

$$i(\mu+\nu) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \omega_{k(\mu+\nu)}^{(i(\mu+\nu))} & \dots & 0 & \dots & \omega_{(k-1)(\mu+\nu)}^{(i(\mu+\nu))} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir le vecteur état au temps $(i+1)(\mu+\nu)$, je dois faire le produit matriciel :

$$\begin{bmatrix} \pi_{i(\mu+\nu)} \\ \vdots \\ \pi_{i(\mu+\nu)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q \\ \vdots \\ Q \end{bmatrix}$$

Le $j^{\text{ème}}$ élément du vecteur état $\pi_{(i+1)(\mu+\nu)}$ est donc :

$$\omega_j^{(i+1)(\mu+\nu)} = \sum_{l=-a+1}^{a+1} \omega_l^{i(\mu+\nu)} \times q_{l,j}$$

Et $\omega_j^{(i+1)(\mu+\nu)} \neq 0$ si $j \equiv 0 \pmod{\mu+\nu}$

Or : $\omega_l^{i(\mu+\nu)} = 0$ si $l \not\equiv 0 \pmod{\mu+\nu}$, la sommation sur l revient à la sommation sur k suivante :

$$\sum_{k=-s}^{k=s} \omega_{k(\mu+\nu)}^{i(\mu+\nu)} \times q_{k(\mu+\nu),j}$$

On voit donc que pour un tel produit, les seuls éléments de la matrice $[Q]$ qui interviennent sont ceux qui se trouvent à l'intersection de ligne et colonne dont les numéros sont

ce qui nous amène à calculer, non pas la matrice M^1 (matrice de probabilité) mais la matrice M_s (matrice des nombres de chemins) qui sera de la forme suivante :

$$M_s = \begin{matrix} & s & s-1 & 0 & -s \\ \begin{matrix} s \\ i \\ 0 \\ \vdots \\ -s \end{matrix} & \begin{bmatrix} m_{s,s} & m_{s,s-1} & \dots & m_{s,-s} \\ m_{i,s} & m_{i,s-1} & \dots & m_{i,-s} \\ m_{0,s} & \dots & m_{0,0} & m_{0,-s} \\ \vdots & & & \\ m_{-s,s} & m_{-s,s-1} & \dots & m_{-s,-s} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Rappelons que nous cherchons :

$$\Pr(\sigma'_N < a / s_N = 0) = \frac{\Pr(\sigma'_N < a, s_N = 0)}{\Pr(s_N = 0)}$$

Nous avons montré que :

$$\Pr(\sigma'_N < a, s_N = 0) = m_{00}^{(N)} \times p^n \cdot q^m \quad \text{avec } N = m + n$$

$$\Pr(s_N = 0) = C_{m+n}^n p^n q^m$$

Où $m_{00}^{(N)}$ représente le nombre de chemins pour aller de 0 en 0 en N pas sans atteindre ou traverser les barrières $\pm a$.

$$\text{donc } \Pr[\sigma'_N < a / s_N = 0] = \frac{m_{00}^{(N)}}{C_{m+n}^n}$$

La connaissance de $m_{00}^{(N)}$ pour une valeur de a , nous apportera la connaissance de cette probabilité puisque nous disposons de la table des coefficients du binôme (calculs effectués par Monsieur GIANNESINI).

Partant d'un vecteur initial :

$$C_0 = \begin{bmatrix} s & \dots & 0 & \dots & -s \\ 0 & \dots & I & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

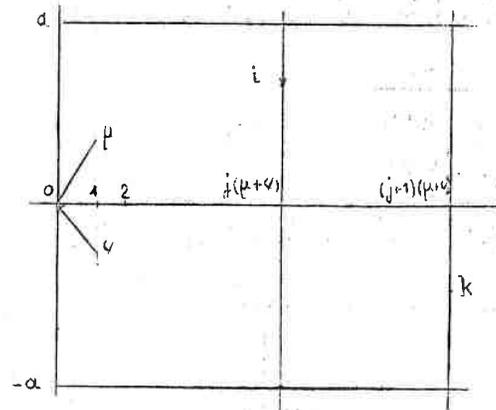
Au bout d'un temps $j(\mu+v)$, on est en présence du vecteur état

$$C_{j(\mu+v)} = \begin{bmatrix} \dots & m_{0,k}^{(j(\mu+v))} & \dots \end{bmatrix} \quad k \in [-s, +s]$$

On veut alors passer de l'état $j(\mu+v)$ à l'état $(j+1)(\mu+v)$ dont le vecteur état est :

$$C_{(j+1)(\mu+v)} = \begin{bmatrix} \dots & m_{0,k}^{((j+1)(\mu+v))} & \dots \end{bmatrix} \quad k \in [-s, +s]$$

Pour trouver $m_{ok}^{(j+1)(\mu+v)}$, on doit chercher la contribution des $2s + 1$ points de l'état $j(\mu+v)$



Cherchons la contribution du point i à l'instant $j(\mu+v)$ sur le point k à l'instant $(j+1)(\mu+v)$. Un chemin arrive en i au temps $j(\mu+v)$. Il y a alors à partir de ce chemin m_{ik} chemins différents qui vont alors de i en k pendant le temps $\mu + \nu$. Or, il y a $m_{0i}^{(j(\mu+v))}$ chemins différents allant de 0 en i pendant l'intervalle $(0, j(\mu+v))$

La contribution du point i sur le point k est donc :

$$m_{0,i}^{(j(\mu+v))} \times m_{i,k}$$

et pour les $2s + 1$ points occupés à l'état $j(\mu+v)$:

$$m_{0,k}^{(j+1)(\mu+v)} = \sum_{i=-s}^{i=s} m_{0,i}^{(j(\mu+v))} \times m_{i,k}$$

Soit
$$\begin{bmatrix} C_{(j+1)(\mu+v)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{j(\mu+v)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_s \end{bmatrix}$$

soit
$$\begin{bmatrix} C_{d(\mu+v)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_s \end{bmatrix}^d$$

II-II-I4

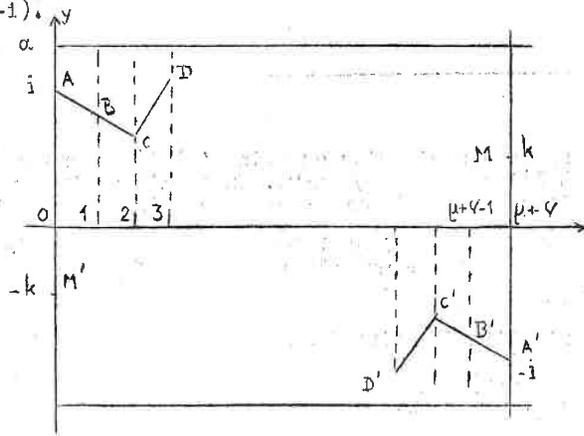
Il nous faudra donc étudier la matrice M_S qui, rappelons-le, pour un a donné est la même pour tous les couples d'échantillon (m,n) ayant les mêmes μ et ν .

Avant de donner les calculs permettant d'obtenir cette matrice M_S , nous allons en donner quelques propriétés.

E)- Quelques propriétés de matrices M_S

Théorème: Les matrices M_S sont antisymétriques.

c'est-à-dire que $m_{i,k} = m_{-k,-i}$. Nous devons donc montrer que le nombre de chemins pour aller de i en k est égal au nombre de chemins pour aller de $-k$ à $-i$. Ce qui revient à montrer qu'à tout chemin (i,k) on peut lui associer biunivoquement un chemin $(-k, -i)$.



Au chemin (A, B, C, D, \dots, M) faisons correspondre le chemin (A', B', C', \dots, M') ainsi défini. C'est un chemin inverse c'est-à-dire qu'il part de $-i$ à l'instant $\mu + \nu$ et remonte le temps.

De A en B , je fais un saut $-\nu$ par exemple; le point B' est alors le suivant son abscisse est $(\mu + \nu - 1)$, et de faire de A' en B' en faisant un saut ν . Je passe alors de B en C toujours avec un saut $-\nu$, je passe alors de B' en C' par un saut ν . Je passe de C en D par un saut $+\mu$, je passe alors de C' en D' par un saut $-\mu$, ... etc.

Le chemin (A', B', C', \dots) arrive au point $-k$ à l'instant 0 . En effet, pour passer de i en k , j'ai fait ν sauts μ et w sauts ν . ν et w satisfont à :

$$\begin{aligned} \nu + w &= \mu + \nu & (1) \\ \nu \mu - w \nu &= (k-i) (\mu + \nu) & (2) \end{aligned}$$

soit k_I l'ordonnée d'arrivée au temps 0 du chemin A', B', \dots il y a eu ν sauts $-\mu$ et w sauts ν , ils sont liés par la relation :

$$-\nu \mu + w \nu = (k_I + 1) (\mu + \nu) \quad (2)'$$

On additionne membre à membre (2) et $(2)'$:

$0 = k + k_I$: Le point d'arrivée a donc lieu comme ordonnée $-k$ ($\mu + \nu$).

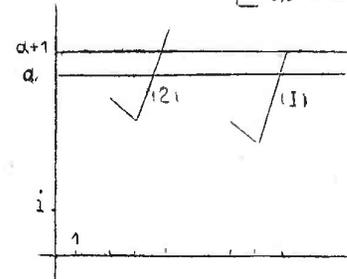
De plus pour tout chemin (i,k) traversant la barrière $+a$ par exemple au temps t , son correspondant traversera la barrière $-a$ au temps $\mu + \nu - t$. En effet en un point quelconque C d'un chemin aléatoire, on se trouve en C' sur le chemin aléatoire inverse, et on a la relation

$$y_{C'} = -y_C$$

Donc les distances aux barrières sont égales et opposées

Théorème. Si $a \equiv 0 \pmod{\mu + \nu}$ alors $M_S(a)$ est égale à des premières et dernières colonnes.

$$M_S(a+1) = \begin{bmatrix} m_{s,s} & m_{s,s-1} & \dots & m_{s,-s} \\ m_{s-1,s} & \dots & \dots & m_{s-1,-s} \\ \vdots & \dots & M_S(a) & \vdots \\ m_{-s,s} & m_{-s,s-1} & \dots & m_{-s,-s} \end{bmatrix}$$



(1) chemin traversant la barrière a et atteignant la barrière $a + 1$

(2) chemin traversant la barrière a et la barrière $a + 1$

a est supposé être un multiple de $\mu + \nu$.

Cela revient à montrer que tout chemin allant de i en k , absorbé par la barrière a , l'est également par la barrière $a + 1$. Cela tient au fait que dans l'intervalle de temps $(0, \mu + \nu)$ un chemin, partant d'un point i quelconque à l'instant 0 , n'atteint jamais la barrière a . (Il peut la traverser mais ne l'atteint pas).

Nous avons vu plus haut qu'un point d'ordonnée j ($\mu + \nu$) ne peut être atteint qu'en des instants multiples de $\mu + \nu$.

Donc tout chemin traversant la barrière a, atteint ou traverse la barrière a + I.

De plus, il est évident que tout chemin ne traversant pas la barrière a, ne traverse pas, ni n'atteint la barrière a + I.

Même raisonnement pour les barrières -a et -a-I.

$$\text{donc } m_{i,k}(a) = m_{i,k}(a + I)$$

quels que soient i et k tels que $-\frac{a}{\mu+\nu} \leq i, k \leq \frac{a}{\mu+\nu}$

Théorème $m_{i,k}$ est borné par $C_{\mu+\nu}^{\nu+(k-i)}$ et cette limite est atteinte par

$$a > \text{Max} (\mu \nu + i \nu + k \mu, \mu \nu - (k \nu + i \mu))$$

Si les deux termes de la comparaison sont négatifs ou nuls, cela veut dire qu'il n'y a pas de chemins joignant i à k.

III- CALCULS ET PROGRAMMES.

Il y a nécessairement deux phases :

Constitution des matrices M_S

Exploitation de ces matrices pour les calculs de probabilités.

Ces deux phases sont nettement séparées et constituent deux étapes de calcul distinctes lorsque nous avons écrit les programmes pour l'I B M 650. Au contraire, dans le programme ALGOL, ces deux phases co-existent dans un même programme.

I Calculs sur I B M 650

Nous ne transcrivons que les organigrammes, les programmes eux-mêmes étant difficilement lisibles.

a)- Constitution des matrices M_S

Ce programme a été écrit sous forme PASO mais sort les résultats sous forme de cartes chargement en virgule flottante. En effet, nous devons nous servir de ces résultats dans le second programme (écrit en code de programmation V F L) qui fera intervenir lors de l'élévation à certaines puissances des matrices M_S , des nombres très grands.

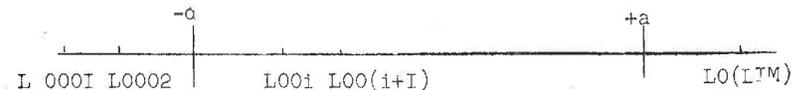
Le principe général de calcul est :

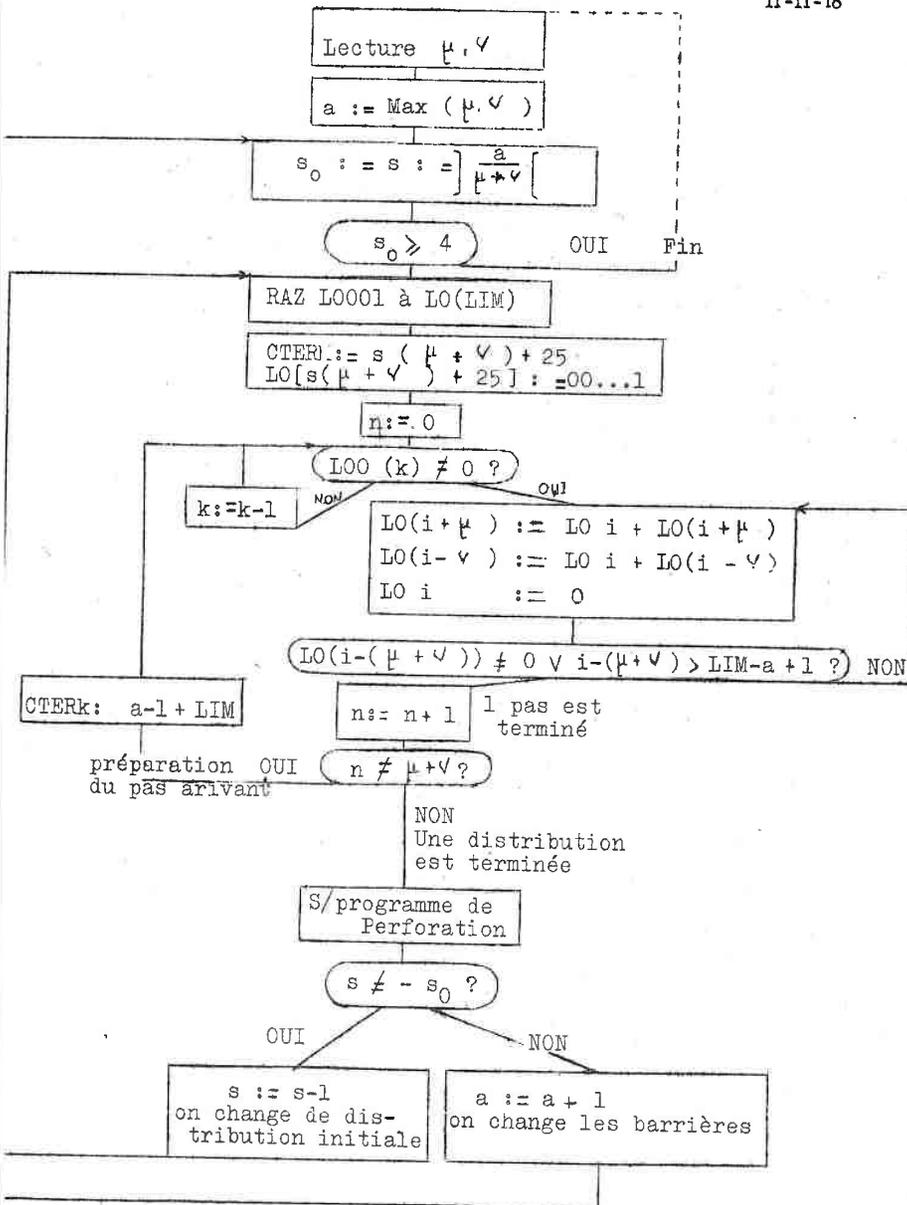
Un couple μ et ν étant donné en lecture, on part d'une barrière a ($a_{\min} = \text{Max}(\mu, \nu)$) on calcule la matrice M_S correspondante, on augmente a d'une unité, nouvelle matrice M_S , etc... la dimension maximum de M_S sera (7,7) donc :

$$\text{Max}(\mu, \nu) \leq a < 4(\mu + \nu)$$

L'organigramme s'établit alors :

Remarque Les mémoires L0001 à L0 (LIM) représentent les points :





b)- Calcul de $P_{00}^{(N)}$ pour un couple (μ, ν) donné

Ce premier programme nous a donné une suite de matrices M_s . Rappelons que :

$$[C_{(j+1)(\mu+\nu)}] = [C_{j(\mu+\nu)}] \times [\bar{r}]$$

Pour une même matrice M_s , c'est-à-dire pour une barrière donnée, nous calculerons les vecteurs état $[C_{j(\mu+\nu)}]$ et les probabilités :

$$P_j(a) = \frac{m_{00}^{(N)}}{n} \quad \text{où } N = j(\mu+\nu)$$

j est le paramètre qui augmentera d'une unité à chaque tour.

Pour une valeur de j donnée, la première fois où $p_j(a)$ atteint 0,95 nous donne le couple de barrières $\pm a$ à l'intérieur desquelles on a 95% des chemins allant de 0 en 0 en $j(\mu+\nu)$ pas.

Une valeur maximum de j , d , a été choisie arbitrairement de façon que la barrière calculée correspondant à l'échantillon $(d\mu, d\nu)$ soit celle donnée par la loi limite. Un tel choix se fait intuitivement et sans grande sécurité. Rappelons que la loi limite nous conduit à considérer la barrière :

$$a_{lim} = \left[\sqrt{(\mu+\nu) \mu \cdot \nu} \cdot \sqrt{j} \cdot 1,36 \right] \quad (I)$$

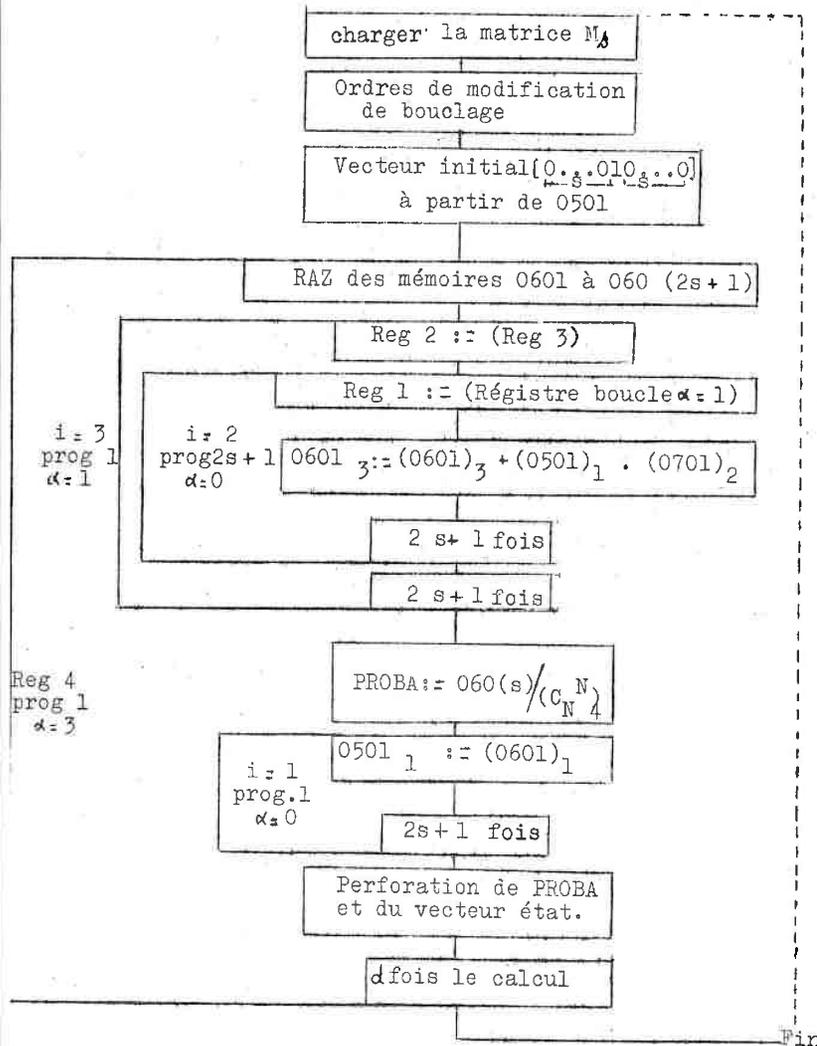
De toutes façons, les matrices M_s sont d'ordre maximum (7,7), nous sommes donc limités par une valeur de a maximum a_{max} . En admettant que les échantillons étant d'ordre assez élevé, on est assez proche de la loi limite, d sera choisi de telle sorte que :

$$a_{max} = \left[\sqrt{(\mu+\nu) \mu \cdot \nu} \cdot 1,36 \cdot \sqrt{d} \right]$$

Lorsque la valeur de a obtenue est égale à la valeur a_{lim} , les valeurs de a pour les échantillons semblables plus importants sont calculés à partir de l'équation (I).

L'organigramme s'établit ainsi :

- Remarque :
- le vecteur état à l'instant j occupe les mémoires 0501 à 05 $(2_s + 1)$
 - le vecteur état à l'instant $j+1$ occupe les mémoires 0601 à 06 $(2_s + 1)$
 - la matrice M_s est chargée à partir de 0701



A titre d'exemple, nous donnons en annexe des résultats concernant les échantillons du type $\mu = 3$ et $V = 2$.

2 Programmes effectués en ALGOL . Exécution sur CAB500 et IBM 7044.

Les deux programmes précédents ont deux défauts :

* Le temps. Même pour des échantillons où μ et V sont petits, il fallait au moins trois heures machine pour l'étude d'une suite de couples d'échantillons semblables.

On calculait certaines choses inutiles (Risque de calculer trop de matrices M_s), ou bien on était limité par la dimension maximum des matrices M_s .

Nous avons alors écrit deux séries de programmes ALGOL susceptibles d'être exploités sur IBM 7044.

La première série comporte deux programmes (le second constituant une amélioration du premier) et est destinée à l'étude de couples où

$$\text{Max} (\mu, V) \leq m_{\text{max}} / 2$$

En effet, dans le tableau de résultats on se limitera à des couples d'échantillons d'ordre maximum $m_{\text{max}} = 30$. La théorie sur les matrices M_s n'est donc plus intéressante à $\mu > m_{\text{max}}/2$

La deuxième série comporte un programme pour les nombres m et n premiers entre eux où

$$\text{Max} (m, n) > \frac{m_{\text{max}}}{2}$$

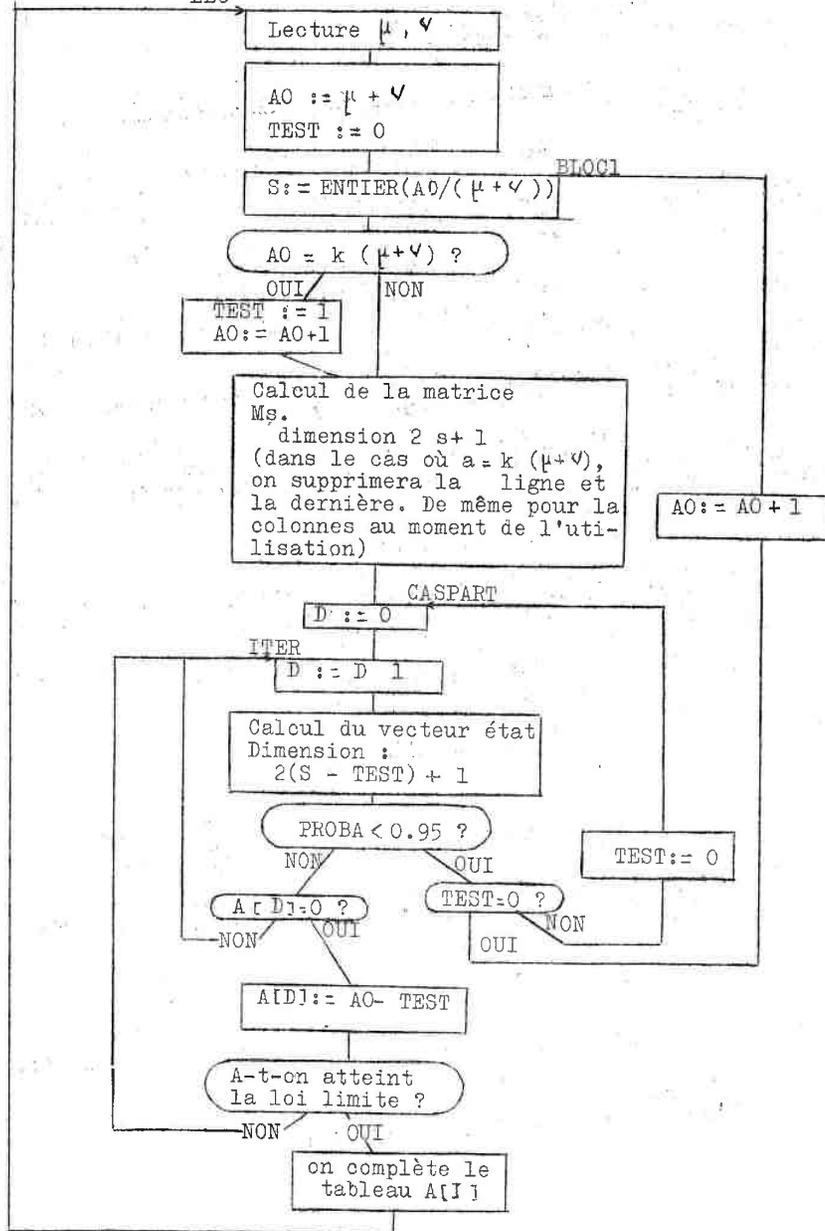
I - Première série de programmes $\text{Max} (\mu, V) \leq \frac{m_{\text{max}}}{2}$

Nous mettrons les résultats dans un tableau de barrières $A[D]$, préalablement remis à zéro.

Nous avons tenu compte du théorème :

$$M_s (a+I) = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ * & [M_s(a)] & & * \\ \vdots & & & \\ * & * & & * \end{bmatrix} \text{ dans le cas où } a \text{ est un multiple de } \mu + V$$

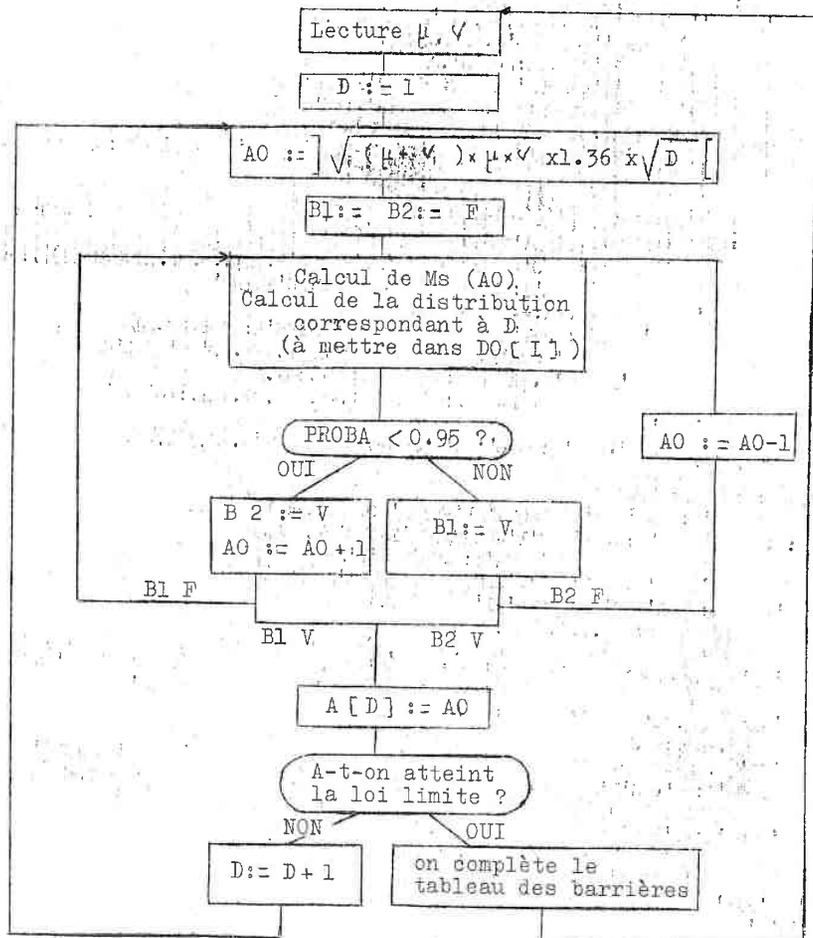
L'organigramme se présente ainsi :



```

'DEBUT' ENTIER MO, NO, MU, NUALECTURE(MO, NO) Δ
LEC: LECTURE(MU, NU) Δ
'DEBUT' ENTIER R, AO, TEST, SO, S1 Δ REEL COEF, Z, PROBA Δ
'TABLEAU' A. | 1: MO/MU | Δ
'TABLEAU' CNP. | 1: MO/MU | Δ
'POUR' R: -1 'PAS' 1 'JUSQUA' ENTIER(MO/MU) 'FAIRE'
'DEBUT' LECTURE(CNP. | R |) Δ A. | R | := 0 'FIN' Δ
Z: -1.36 Δ AO := MU Δ COEF := RAC2((MU+NU) × MU × NU) × Z Δ TEST := 0 Δ
BLOCI: 'SI' AO / (MU+NU) = ENTIER(AO / (MU+NU)) 'ALORS' 'DEBUT' TEST := -1 Δ AO := AO + 1 'FIN' Δ
SO := ENTIER(AO / (MU+NU)) Δ
'DEBUT' ENTIER I, J, K, S, Δ
'TABLEAU' P. | -AO-NU-MU: AO+NU+MU |, M. | -SO: SO, -SO: SO |, DO, DL. | -SO: SO | Δ
'POUR' S := -SO 'PAS' 1 'JUSQUA' SO 'FAIRE'
'DEBUT' 'POUR' I := -AO 'PAS' 1 'JUSQUA' AO 'FAIRE' P. | I | := 0 Δ P. | S × (MU+NU) | := -1 Δ
'POUR' I := -1 'PAS' 1 'JUSQUA' MU+NU 'FAIRE'
'DEBUT' J := -AO Δ K := -AO + 1 - MU - NU
'POUR' J := J + 1 'TANTQUE' P. | J | := 0 'FAIRE' K := J + 1 - MU - NU
'POUR' K := K + MU + NU 'TANTQUE' P. | K | ≠ 0 'ET' K < AO 'FAIRE'
'DEBUT' P. | K + MU | := P. | K + MU | + P. | K | Δ
P. | K - NU | := P. | K - NU | + P. | K | Δ P. | K | := 0 'FIN' Δ
'FIN' Δ
'POUR' I := -SO 'PAS' 1 'JUSQUA' SO 'FAIRE' M. | S, I | := P. | I × (MU+NU) | Δ
'FIN' Δ
CASPART: D := (2 × S1 := SO - TEST) Δ
'POUR' I := -S1 'PAS' 1 'JUSQUA' S1 'FAIRE' DO. | I | := 0 Δ DO. | 0 | := -1 Δ
ITER: D := D + 1 Δ 'POUR' I := -S1 'PAS' 1 'JUSQUA' S1 'FAIRE' DL. | I | := 0 Δ
RC(1) Δ IMPRESSION(D, 3) Δ 'POUR' I := -S1 'PAS' 1 'JUSQUA' S1 'FAIRE'
'POUR' J := -S1 'PAS' 1 'JUSQUA' S1 'FAIRE' DL. | I | := DL. | I | + DO. | J | × M. | J, I | Δ
'POUR' I := -S1 'PAS' 1 'JUSQUA' S1 'FAIRE' DO. | I | := DL. | I | Δ
PROBA := DO. | 0 | / CNP. | D | Δ
ESPACE(3) Δ IMPRESSION(AO - TEST, 3) Δ ESPACE(3) Δ IMPRESSION(PROBA, 1, 4) Δ
'SI' PROBA < 0.95 'ALORS' 'DEBUT' 'SI' TEST = -1 'ALORS' 'DEBUT' TEST := 0 'ALLERA' CASPART 'FIN'
'SINON' AO := AO + 1 'ALLERA' BLOCI 'FIN' Δ
'SI' A. | D | ≠ 0 'ALORS' 'ALLERA' ITERA
A. | D | := AO - TEST Δ
'SI' (A. | D | ≠ ENTIER(COEF × RAC2(D))) 'OU' D × MU < 1 'ET' D × MU < 30 'ALORS' 'ALLERA' ITERA Δ
'POUR' I := D 'PAS' 1 'JUSQUA' ENTIER(MO/MU) 'FAIRE' A. | I | := ENTIER(COEF × RAC2(I)) Δ
RC(2) Δ IMPRESSION(MU, 2) Δ ESPACE(3) Δ IMPRESSION(NU, 2) Δ RC(1) Δ
'POUR' I := -1 'PAS' 1 'JUSQUA' ENTIER(MO/MU) 'FAIRE'
'DEBUT' IMPRESSION(A. | I |, 3) Δ ESPACE(2) 'FIN' Δ
'ALLERA' LEC
'FIN'
'FIN'
'FIN'
  
```

Ce programme étant trop long dès que μ et ν sont grands, nous avons conçu un autre qui comportait l'amélioration de choisir a initial à la valeur de la loi limite. L'organigramme s'établit ainsi :



```

'DEBUT' REEL 'PROCEDURE' CNP(M,N) 'ENTIER' M, N 'DEBUT' REEL 'X' 'ENTIER' I 'A
X := -1 'POUR' I := 1 'PAS' 1 'JUSQUA' N 'FAIRE'
X := X * (M - N + I) / I 'CNP := X' 'FIN' 'A
'ENTIER' MO, NO, MU, NU 'LECTURE' (MO, NO) 'A
LEC := LECTURE (MU, NU) 'ARC' (1) 'IMPRESS' (MU, 3) 'AESPACE' (2) 'IMPRESS' (NU, 3) 'A
'DEBUT' ENTIER 'R, A0, TEST, S0, S1, D' REEL 'G, Z, PROBA, COEF' 'A
'BOOLEEN' B1, B2 'ENTIER' TABLEAU 'A, | 1 | 6 | 'A
'POUR' R := 1 'PAS' 1 'JUSQUA' 6 'FAIRE' 'A, | R | := 0 'A
Z := 1.36 'COEF := RAC2' ((MU + NU) * MU * NU) * Z 'D := 1 'A
ITER: TEST := 0 'G := CNP' (MU + NU) * D, D * MU 'A0 := ENTIER' (COEF * RAC2' (D)) 'B1 := B2 := 'FAUX' 'A
RC' (1) 'IMPRESS' (D, 2) 'A
BLOCL := 'SI' A0 / (MU + NU) = ENTIER' (A0 / (MU + NU)) 'ALORS' 'DEBUT' TEST := 1 'A0 := A0 + 1 'FIN' 'A
RC' (1) 'IMPRESS' (B1, 2) 'IMPRESS' (B2, 2) 'AESPACE' (3) 'IMPRESS' (A0, 3) 'A
S0 := ENTIER' (A0 / (MU + NU)) 'A
'DEBUT' ENTIER 'I, J, K, S' 'A
'TABLEAU' P, | -A0 - MU - NU : A0 + MU + NU |, M, | -S0 : S0, -S0 : S0 |, D0, D1, | -S0 : S0 | 'A
'POUR' S := -S0 'PAS' 1 'JUSQUA' S0 'FAIRE' 'A
'DEBUT' 'POUR' I := -A0 'PAS' 1 'JUSQUA' A0 'FAIRE' P, | I | := 0 'P := S * (MU + NU) | := 1 'A
'POUR' I := 1 'PAS' 1 'JUSQUA' MU + NU 'FAIRE' 'A
'DEBUT' J := -A0 'K := -A0 + 1 - MU - NU 'A
'POUR' J := J + 1 'TANTQUE' P, | J | = 0 'FAIRE' K := J - MU - NU + 1 'A
'POUR' K := K + MU + NU 'TANTQUE' P, | K | ≠ 0 'ET' K < A0 'FAIRE' 'A
'DEBUT' P, | K + MU | := P, | K + MU | + P, | K | 'A
P, | K - NU | := P, | K - NU | + P, | K | 'A 'P, | K | := 0 'FIN' 'A
'FIN' 'A
'POUR' I := -S0 'PAS' 1 'JUSQUA' S0 'FAIRE' M, | S, I | := P, | I * (MU + NU) | 'A
'FIN' 'A
CASEPART: S1 := S0 - TEST 'A
'POUR' I := -S1 'PAS' 1 'JUSQUA' S1 'FAIRE' DO, | I | := 0 'DO, | 0 | := 1 'A
'POUR' K := -1 'PAS' 1 'JUSQUA' D 'FAIRE' 'A
'DEBUT' 'POUR' I := -S1 'PAS' 1 'JUSQUA' S1 'FAIRE' 'A
'DEBUT' D1, | I | := 0 'POUR' J := -S1 'PAS' 1 'JUSQUA' S1 'FAIRE' 'A
D1, | I | := D1, | I | + D0, | J | * M, | J, I | 'A 'FIN' 'A
'POUR' I := -S1 'PAS' 1 'JUSQUA' S1 'FAIRE' DO, | I | := D1, | I | 'A
'FIN' 'A
PROBA := DO, | 0 | / G 'A 'ALLERA' 'SI' PROBA < 0.95 'ALORS' W1 'SINON' W2 'A
W1 := B2 := 'VRAI' 'A 'SI' B1 'ALORS' 'ALLERA' SUITE 'A
'SI' TEST = 1 'ALORS' 'DEBUT' TEST := 0 'ALLERA' CASPART 'FIN' 'A0 := A0 + 1 'ALLERA' BLOCL 'A
W2 := B1 := 'VRAI' 'A 'SI' B2 'ALORS' 'DEBUT' A0 := A0 + 1 'ALLERA' SUITE 'FIN' 'A
A0 := A0 + 1 - TEST 'TEST := 0 'ALLERA' BLOCL 'A
SUITE: A, | D | := A0 - TEST 'ARC' (1) 'IMPRESS' (A, | D |, 3) 'A
'SI' A, | D | ≠ ENTIER' (COEF * RAC2' (D)) 'ET' (D + 1) * MU < 30 'ALORS' 'A
'DEBUT' D := D + 1 'ALLERA' ITER 'FIN' 'A
'POUR' I := D + 1 'PAS' 1 'JUSQUA' 6 'FAIRE' A, | I | := ENTIER' (COEF * RAC2' (I)) 'A
'ALLERA' LEC
'FIN'
'FIN'
'FIN'

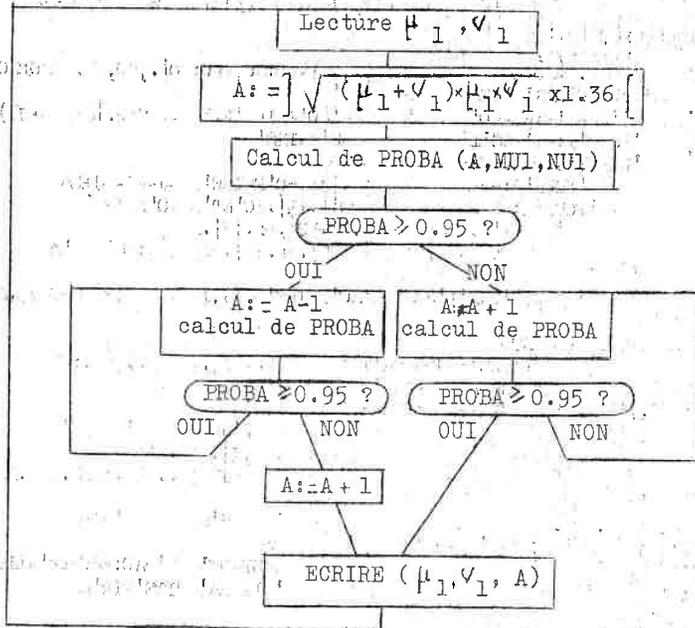
```

2. Programme lorsque $\text{Max}(\mu, \nu) > \frac{m \cdot \max}{2}$

Celui-ci est un simple calcul pas à pas de la distribution au bout d'un temps $m+n$ si on part d'un vecteur état :

$$C: [0 \ 0 \dots \ 0 \ 1 \ 0 \dots \ 0] \\ -AO+1 \qquad \qquad \qquad AO-1$$

L'organigramme s'établit



Remarque. Dans ce programme, le calcul de PROBA a été fait sous forme de procédure.

```

'DEBUT' 'ENTIER' MU1, NU1, A, REEL CNPΔ
'REEL' 'PROCEDURE' PROBA(AO, MU, NU)Δ: ENTIER AO, MU, NUΔ
'DEBUT' 'ENTIER' I, J, KΔ: TABLEAU P. | -AO -MU -NU: AO+MU+NU |.Δ
'POUR' I:=-AO' PAS'1 'JUSQUA' AO' FAIRE' P. | I |. := QΔP. | 0 |. := 1Δ
'POUR' I:=-1' PAS'1 'JUSQUA' MU+NU' FAIRE'
'DEBUT' J:=-A QΔK:=-1 -MU-NU-AQΔ
'POUR' J:=J-1' TANTQUE' P. | J |. =0' FAIRE' K:=J-MU-NU+1Δ
'POUR' K:=K+MU+NU' TANTQUE' P. | K |. ≠0' ET' K<AO' FAIRE'
'DEBUT' P. | K+MU |. := P. | K+MU |. +P. | K |.Δ
P. | K-NU |. := P. | K-NU |. +P. | K |.ΔP. | K |. := 0
'FIN'Δ
'FIN'ΔPROBA:=P. | 0 |.
'FIN'Δ
LEC: LECTURE(MU1, NU1, CNP)ΔA:=ENTIER(RAC2((MU1+NU1) * MU1 * NU1) * 1.36)Δ
'SI' PROBA(A, MU1, NU1) / CNP > 0.95 'ALORS'
'DEBUT' ECL: A := A - 1Δ
'SI' PROBA(A, MU1, NU1) / CNP > 0.95 'ALORS' 'ALLERA' ECLΔ
A := A + 1Δ 'ALLERA' SUITE
'FIN'Δ
ECL1: A := A + 1Δ 'SI' PROBA(A, MU1, NU1) / CNP < 0.95 'ALORS' 'ALLERA' ECL1Δ
SUITE: RC(1)ΔIMPRESSIION(MU1, 2)ΔESPACE(3)ΔIMPRESSIION(NU1, 2)Δ
ESPACE(3)ΔIMPRESSIION(A, 3)ΔALLERA' LEC
'FIN'
  
```

V Exploitation du tableau - Utilisation du test

On veut tester si deux échantillons d'ordres m et n proviennent de la même population. On range ces deux échantillons par ordre de grandeur croissant et on les réunit de façon à obtenir un échantillon d'ordre $m + n$ rangé par valeurs croissantes.

On cherche alors les μ et ν correspondant à m et n , c'est-à-dire les quotients de m et n par leur plus grand commun diviseur.

On établit alors les $(m + n)$ sommes algébriques suivantes (en partant de 0) :

$$s_0 = 0$$

$$s_k = s_{k-1} + \eta$$

où η $\left\{ \begin{array}{l} = \mu \text{ si l'élément rencontré est un élément du } n\text{-échantillon.} \\ = -\nu \text{ si l'élément rencontré est un élément du } m\text{-échantillon.} \end{array} \right.$

On cherche parmi ces $(m + n)$ nombres celui de plus grand module :

$$D = \max_k |s_k|$$

et on compare D au nombre donné à l'intersection des lignes m et colonne n du tableau (soit $D_{m,n}$ ce nombre).

- * Si $D > D_{m,n}$ il y a 95 chances sur 100 que les deux échantillons ne proviennent pas de la même population.
- * Si $D \leq D_{m,n}$ Le test ne contredit pas l'hypothèse que les deux échantillons proviennent de la même population.

Vu et Approuvé

Nancy, le

Le Doyen de la Faculté
des Sciences de NANCY

M. AUBRY

Vu et Permis d'imprimer

Nancy, le

le Recteur :

Président du Conseil de

l'Université

P. IMBS



$\gamma = 2$

MATRICES $M_a(a)$

$a=3$	$\begin{pmatrix} 511000000 \end{pmatrix}$				
$a=4$	$\begin{pmatrix} 514000000 \end{pmatrix}$				
$a=5$	$\begin{pmatrix} 518000000 \end{pmatrix}$				
$a=6$	$\begin{pmatrix} 5120000000 & 5130000000 & 5110000000 \\ 5150000000 & 5180000000 & 5130000000 \\ 5130000000 & 5150000000 & 5120000000 \end{pmatrix}$				
$a=7$	$\begin{pmatrix} 5130000000 & 5140000000 & 5110000000 \\ 5160000000 & 5210000000 & 5140000000 \\ 5130000000 & 5160000000 & 5130000000 \end{pmatrix}$				
$a=8$	$\begin{pmatrix} 5150000000 & 5140000000 & 5110000000 \\ 5190000000 & 5210000000 & 5140000000 \\ 5150000000 & 5190000000 & 5150000000 \end{pmatrix}$				
$a=9$	$\begin{pmatrix} 5170000000 & 5150000000 & 5110000000 \\ 5190000000 & 5210000000 & 5150000000 \\ 5150000000 & 5190000000 & 5170000000 \end{pmatrix}$				
$a=10$	$\begin{pmatrix} 5190000000 & 5150000000 & 5110000000 \\ 5210000000 & 5210000000 & 5150000000 \\ 5150000000 & 5210000000 & 5190000000 \end{pmatrix}$				
$a=11$	$\begin{pmatrix} 5120000000 & 5130000000 & 5110000000 & 5000000000 & 5000000000 \\ 5150000000 & 5190000000 & 5150000000 & 5110000000 & 5000000000 \\ 5140000000 & 5210000000 & 5210000000 & 5150000000 & 5110000000 \\ 5110000000 & 5150000000 & 5210000000 & 5190000000 & 5130000000 \\ 5000000000 & 5110000000 & 5140000000 & 5150000000 & 5120000000 \end{pmatrix}$				

MATRICES $M_s(a)$

$a = 12$

5130000000	5140000000	5110000000	5000000000	5000000000
5160000000	5210000000	5190000000	5110000000	5000000000
5140000000	5210000000	5210000000	5150000000	5110000000
5110000000	5150000000	5210000000	5210000000	5140000000
5000000000	5110000000	5140000000	5160000000	5130000000

$a = 14$

5150000000	5140000000	5110000000	5000000000	5000000000
5190000000	5210000000	5150000000	5110000000	5000000000
5150000000	5210000000	5210000000	5150000000	5110000000
5110000000	5150000000	5210000000	5210000000	5140000000
5000000000	5110000000	5150000000	5190000000	5150000000

$a = 16$

5170000000	5150000000	5110000000	5000000000	5000000000
5190000000	5210000000	5150000000	5110000000	5000000000
5150000000	5210000000	5210000000	5150000000	5110000000
5110000000	5150000000	5210000000	5210000000	5150000000
5000000000	5110000000	5150000000	5190000000	5170000000

$a = 18$

5190000000	5150000000	5110000000	5000000000	50000
5210000000	5210000000	5150000000	5110000000	50000
5150000000	5210000000	5210000000	5150000000	51100000
5110000000	5150000000	5210000000	5210000000	51500000
5000000000	5110000000	5150000000	5210000000	51900000

$d(\mu, \nu)$

EXEMPLES DE DISTRIBUTIONS AVE BOUT de (μ, ν) d'AS, SENSIBILITES p_{00}

(Cas $\mu=3, \nu=2$)

$a=32$

d	p_{00}	$d(\mu, \nu)$	p_{00}	$d(\mu, \nu)$	p_{00}	$d(\mu, \nu)$	p_{00}	$d(\mu, \nu)$
d=1	50100005	[5140000000	5210000000	5210000000	5150000000	5110000000]	p_{00}	
	511000000		4600820333	6500170021	1500630367	6000858003		
d=2	50100005	[5311700000	5324200000	5320800000	5311600000	5233000000]	p_{00}	
	5099047619	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003		
d=3	50100005	[5427510000	5455810000	5446990000	5426400000	5377100000]	p_{00}	
	5093886113	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003		
d=4	50100005	[5563175000	5612777500	5610713000	5560102000	5517572000]	p_{00}	
	5085044058	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003		
d=5	50100005	[5714447970	5729198320	5724446580	5713698770	5640025400]	p_{00}	
	5074788543	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003		
d=6	50100005	[5833001892	5866673727	5855790323	5831243416	5791249230]	p_{00}	
	5064502533	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003		
d=7	50100005	[5975345273	6015219899	6012732076	5971280905	5920813876]	p_{00}	
	5054800598	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003		
d=8	50100005	[6117197936	6134737968	6129056123	6116264950	6047488600]	p_{00}	
	5046229357	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003		

$a=35$

d=1	50100005	[5150000000	5210000000	5210000000	5150000000	5110000000]	p_{00}
	511000000		4600820333	6500170021	1500630367	6000858003	
d=2	50100005	[5317000000	5324600000	5321000000	5311900000	5235000000]	p_{00}
	511000000	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003	
d=3	50100005	[5442330000	5458700000	5448650000	5428010000	5386100000]	p_{00}
	5097202797	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003	
d=4	50100005	[5610112100	5613914800	5611454800	5565954000	5520374000]	p_{00}
	5090932761	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003	
d=5	50100005	[5723966310	5732915880	5727037510	5715547940	5648023400]	p_{00}
	5082714882	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003	
d=6	50100005	[5856680996	5877794118	5863841191	5836680389	5811324007]	p_{00}
	5073810626	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003	
d=7	50100005	[6013394382	6018378029	6015074876	5986572082	5926718372]	p_{00}
	5064979050	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003	
d=8	50100005	[6131640575	6143406444	6135596452	6120437097	6063062809]	p_{00}
	5056635260	0000000000	4600820333	6500170021	1500630367	6000858003	