UNIVERSITE DE NANCY I U.E.R. SCIENCES MATHEMATIQUES



# TRAITEMENT DU PROBLEME DE VOYAGEUR DE COMMERCE PAR UNE METHODE DE PROGRAMMATION LINEAIRE



THESE

pour l'obtention du

DOCTORAT DE SPECIALITE D'INFORMATIQUE

SOUTENUE LE 22 AVRIL 1977

PAR

ANN TÂY-KIM



MEMBRES DU JURY

Président : M. J. LEGRAS

Examinateurs : M. P. BOYER
M. M. CASTAGNÉ

UNIVERSITE DE NANCY I
U.E.R. SCIENCES MATHEMATIQUES

# TRAITEMENT DU PROBLEME DE VOYAGEUR DE COMMERCE PAR UNE METHODE DE PROGRAMMATION LINEAIRE

THESE

pour l'obtention du

DOCTORAT DE SPECIALITE D'INFORMATIQUE

SOUTENUE LE 22 AVRIL 1977

PAR

ANN TAY-KIM

MEMBRES DU JURY

Président : M. J. LEGRAS

Examinateurs : M. P. BOYER
M. M. CASTAGNÉ

*A la mémoire de mon Grand-père*

*KHOV Sêng-Ann*

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur J. LEGRAS, Professeur à l'Université de NANCY I, qui depuis l'année 1973, a bien voulu me prendre sous sa responsabilité pour ma formation en Mathématiques Appliquées, et diriger mes recherches.

C'est grâce à ses conseils, ses encouragements, sa bonté que ce travail a pu être réalisé.

Je remercie Monsieur M. CASTAGNE, Maître de Conférences, et Monsieur P. BOYER qui me font l'honneur de participer au Jury de cette thèse.

Je remercie Monsieur le Professeur J. MARTIN, qui m'a autorisé à travailler dans son laboratoire d'Informatique Médicale durant la période d'application pratique.

Je remercie également Madame D. MARCHAND, pour la dactylographie du manuscrit, et la présentation de ce mémoire.

J'adresse enfin mes amitiés à tous les Chercheurs Français et Etrangers qui travaillent sous la direction de Monsieur le Professeur LEGRAS.

TABLE DES MATIERES

---

# *INTRODUCTION*

*Il y a plusieurs algorithmes qui permettent de résoudre le problème de voyageur de commerce. Parmi ces algorithmes nous pouvons citer principalement l'algorithme de LITTLE (5) utilisant la méthode S.E.P. (Séparation Evaluation Progressive) et l'algorithme de G.B. DANTZIG, R. FULKERSON, S. JOHNSON (3), (4) utilisant la programmation linéaire.*

*Dans ces deux algorithmes pour trouver une case admissible ou une variable entrante, on a utilisé des critères qui sont liés à la condition d'optimalité de la forme duale du simplexe.*

*Notre présent travail consiste à résoudre le problème de voyageur de commerce par la méthode de programmation linéaire, en nous inspirant de la méthode de simplexe.*

*Pour utiliser la méthode du simplexe, on est obligé de mettre les contraintes sous forme standard, en explicitant en particulier toutes les contraintes inégalités, même si elles n'ont pas à intervenir au cours du traitement. Or dans le cas du problème de voyageur de commerce, le nombre de contraintes unilatérales (contraintes de sous-cycles) augmente très vite avec le nombre n des sommets, et de plus certaines de ces contraintes sont toujours vérifiées au cours des différentes itérations, ce qui nous conduit à penser que l'on n'a pas intérêt d'introduire toutes les contraintes à la fois mais une partie seulement de ces contraintes en nous limitant à celles qui évitent l'apparition de sous-cycles dans la solution du problème. Pour cela, avant de passer d'une itération à l'itération suivante nous testons s'il faut introduire ou non une nouvelle contrainte de sous-cycle. Ainsi le nombre de contraintes augmente au cours des différentes itérations.*

*Un des avantages de la méthode de simplexe est de nous permettre d'avoir, à partir d'une solution de base initiale, une nouvelle solution de base, à chaque itération, sans nous preoccuper de savoir si le déterminant de la matrice extraite de la matrice associée au système de contraintes est nul ou non. En effet d'après le critère de choix de la variable sortante le déterminant de cette matrice est toujours différent de zéro.*

*Dans le chapitre 1, nous traitons d'une part la mise en équation du problème, la reconnaissance de sous-cycles et la construction des contraintes correspondantes, d'autre part le choix des variables de base pour que la solution de départ existe et soit formée d'entiers égaux à 0 ou 1.*

*Dans le chapitre 2, nous traitons la partie théorique du problème. Les résultats rappelés ou démontrés dans ce chapitre sont utilisés au chapitre 1.*

*Dans le chapitre 3, nous décrivons en détail le déroulement de calcul des différentes phases de l'algorithme pour obtenir une solution optimale ou sous-optimale, en nous appuyant sur un exemple simple.*

*Dans le chapitre 4, nous décrirons la bibliothèque des sous-programmes qui mettent en oeuvre l'algorithme proposé et nous présenterons quelques résultats fournis par l'ordinateur.*

# CHAPITRE I

## ETABLISSEMENT DES EQUATIONS

## 1.1 EXPOSE DU PROBLEME

Etant donné n villes ainsi que les différentes distances entre deux villes quelconques, le voyageur de commerce doit partir d'une de ces villes, visiter chacune de ces n villes une fois et une seule et revenir ensuite à la ville de départ.

C'est un problème de graphe si on considère les villes comme les sommets du graphe et les routes reliant les différentes villes comme les arcs du graphe.

Le problème consiste à trouver un chemin de longueur minimale.

Dans le cas où la matrice des distances est non symétrique, il s'agit de trouver un circuit hamiltonien de longueur minimale. Ce circuit hamiltonien sera appelé un n-cycle si les arcs ne sont pas orientés c'est-à-dire que la matrice des distances est symétrique.

L'algorithme que nous proposons donne une solution sous-optimale et quelquefois une solution optimale.

## 1.2 NOTION PRELIMINAIRE

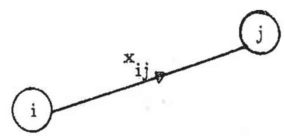
Nous employerons indifféremment le mot "sommet" ou le mot "ville".

Nous désignerons par :

$\|d_{ij}\|$ la matrice des distances entre les différentes villes.

$d_{ij}$ la distance de la ville d'indice i à la ville d'indice j

$x_{ij}$ la variable associée à l'arc (i, j)




$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'arc (i, j) appartient au circuit (fig. 1.2.1)} \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

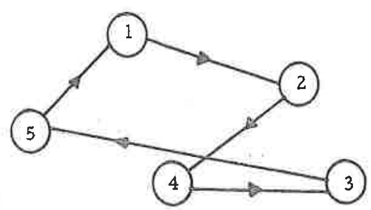



figure 1.2.1

Exemple : Pour le circuit (1 2 4 3 5 1),

$x_{12} = 1$

$x_{13} = 0$

$N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ est l'ensemble des indices de n villes.

Nous appellerons n-cycle, un circuit hamiltonien dans le cas où les arcs ne sont pas orientés (arêtes).

Dans la suite, nous supposerons que la matrice $\|d_{ij}\|$ est symétrique(1), et nous représenterons une matrice soit par la représentation habituelle, soit par un tableau.

Ainsi,

$$x_{ij} = x_{ji} \qquad \forall\, (i, j) \in N^2$$

$$d_{ij} = d_{ji} \qquad \forall\, (i, j) \in N^2$$

(1) Le cas où $\|d_{ij}\|$ est non-symétrique, qui possède beaucoup de points communs avec le cas symétrique, sera examiné vers la fin de ce chapitre.



et la matrice $\|x_{ij}\|$ des variables principales ainsi que la matrice $\|d_{ij}\|$ des distances seront complétement définies si on connaît tous les éléments situés au-dessous (ou bien au-dessus) de la diagonale principale.

Par exemple pour n = 5, on a les matrices triangulaires suivantes :

$\|x_{ij}\|$ =

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | $x_{21}$ | | | | |
| 3 | $x_{31}$ | $x_{32}$ | | | |
| 4 | $x_{41}$ | $x_{42}$ | $x_{43}$ | | |
| 5 | $x_{51}$ | $x_{52}$ | $x_{53}$ | $x_{54}$ | |

tableau 1.2.1

$\|d_{ij}\|$ =

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | $d_{21}$ | | | | |
| 3 | $d_{31}$ | $d_{32}$ | | | |
| 4 | $d_{41}$ | $d_{42}$ | $d_{43}$ | | |
| 5 | $d_{51}$ | $d_{52}$ | $d_{53}$ | $d_{54}$ | |

tableau 1.2.2

Si nous prenons une case de la diagonale principale, par exemple $x_{33}$ (tableau 1.2.1) nous voyons que :

tous les éléments de la 3ème ligne et de la 3ème colonne de $\|x_{ij}\|$ représentent les variables associées à toutes les arêtes issues du sommet 3

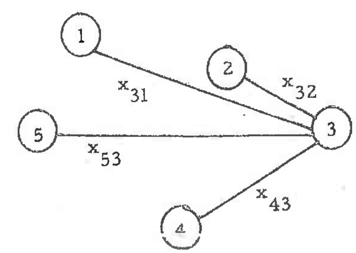



figure 1.2.2

($C_1$) Or, une condition nécessaire (non suffisante) pour qu'un graphe G de n sommets soit un n-cycle est que de chaque sommet de ce graphe soit issues deux arêtes et deux seulement.

Ce qui se traduit par :

$$(1) \quad \underbrace{\sum_{j < i = K} x_{ij}}_{\text{somme des éléments situés sur la Kème ligne de } \|x_{ij}\|} + \underbrace{\sum_{i > j = K} x_{ij}}_{\text{somme des éléments situés sur la Kème colonne de } \|x_{ij}\|} = 2 \quad \text{avec } K = 1, 2, \ldots, n$$

Nous remarquons que $(C_1)$ est une condition nécessaire pour que le graphe soit un n-cycle (figure 1.2.3) mais non suffisante (figure 1.2.4)

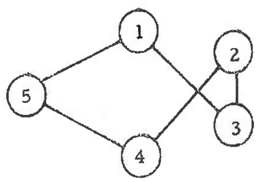



figure 1.2.3

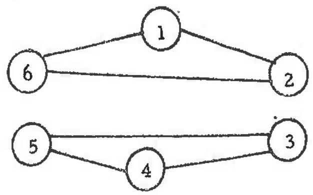



figure 1.2.4

Il faut donc ajouter la condition suivante :

$(C_2)$ ‖ Le graphe ne possède pas de sous-cycles.

Ce qui se traduit par :

$$(2) \quad \sum_{\substack{i \in S \\ j \in S \\ i < j}} x_{ij} \leq |S| - 1$$

pour tout sous-ensemble S inclus strictement dans $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et tel que son cardinal $|S|$ vérifie :

$$3 \leqslant |S| \leqslant n - 1.$$

Le problème peut donc se mettre sous la forme :

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{l} [\,\mathrm{Min}\,] \quad D(x) = \sum_{i>j} d_{ij}\, x_{ij} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n-1) \\ \text{sous les contraintes :} \\ (1) \quad \sum_{j<i=K} x_{ij} + \sum_{i>j=K} x_{ij} = 2 \quad \text{avec } K = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right.$$



$$\left| \begin{array}{lll} (2) \quad \sum_{\substack{i \in S \\ j \in S \\ i > j}} x_{ij} \leq |S| - 1 & & \text{pour tout } S \subset \{1, 2, \ldots, n\} \\ & & \text{tel que } \quad 3 \leq |S| \leq n-1 \\ (3) \quad x_{ij} \leq 1 & \forall (i, j) \in N^2 & \\ (4) \quad x_{ij} \geq 0 & \forall (i, j) \in N^2 & \\ (5) \quad x_{ij} \ \text{entier} & \forall (i, j) \in N^2 & \end{array} \right.$$

Notre but est de résoudre ce problème (I) par la méthode du simplexe, sans tenir compte de la condition (5), tout en essayant autant que possible d'avoir une solution entière à chaque itération.

Mais du fait que le nombre des contraintes (2) augmente très vite avec le nombre n des villes, le problème, tel qu'il est posé sous sa forme (I) introduit un nombre trop élevé de contraintes. Par exemple pour $1 < p < n$, le nombre total de p-cycle est égal à $\frac{(p-1)!}{2}$ . Or pour un problème de n sommets il y a $C_n^p$ sous-ensembles à p éléments, d'où le nombre de sous-cycles à considérer s'élève à

$$\frac{C_n^p \cdot (p-1)!}{2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{n!}{2p\,(n-p)!} .$$

Pour $n = 10$ et $p = 3$ le nombre total de 3-cycles est égal à 120, et il faut encore ajouter à cela les nombres des autres sous-cycles d'ordre 4, 5, 6, 7, 8, 9.

L'algorithme que nous proposons diffère du simplexe classique en ce que nous ne prendrons en charge les contraintes (2) que lorsqu'elles risquent de ne plus être vérifiées.

Le problème ainsi simplifié sera résolu par la méthode du simplexe utilisée comme méthode de montée. Ce problème simplifié (Problème n° II) diffère de (I) sur les points suivants :

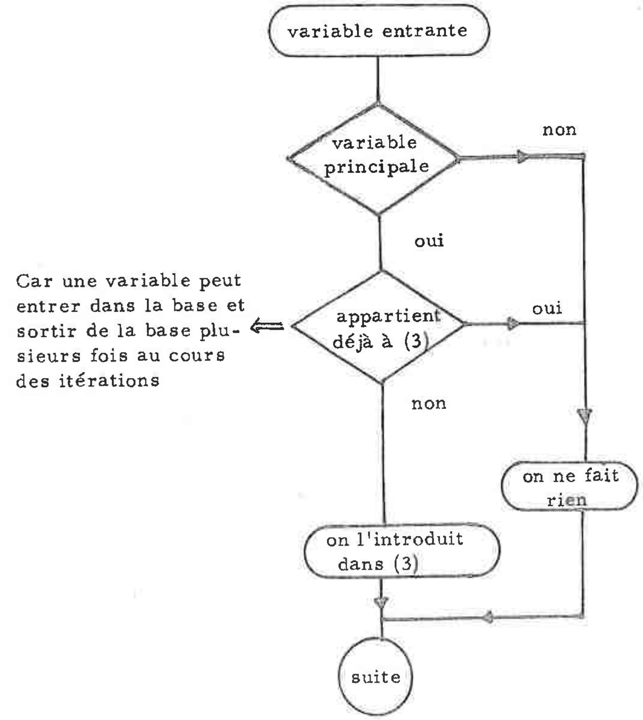
1°) Pour le problème (I) on considère toutes les contraintes du type (2) dès le début, alors que pour le problème (II) nous n'introduisons une contrainte (2) que lorsqu'elle cesse d'être vérifiée, c'est-à-dire quand il apparaît un sous-cycle. Le critère de reconnaissance de sous-cycle et la définition de l'équation de contrainte correspondante qui sont deux points importants et originaux de notre travail seront décrits aux paragraphes 1.3 et 1.4.

2°) Les contraintes du type (3) sont des contraintes liées aux variables principales. Elles sont au nombre de $M = n\,(n-1)/2$. Le nombre de ces contraintes croît donc dans le même sens que $n^2/2$. On doit donc limiter aussi ces contraintes. Une solution simple que nous proposons ici consiste à ne considérer ces contraintes ($x_{ij} \leq 1$) que pour les variables principales qui sont dans la base. Pour les variables principales qui sont des variables hors base, leur valeur est nulle, donc vérifient toujours cette inégalité.

Aussi, lorsqu'une variable entre dans la base nous testons si c'est une variable principale. Si cela est le cas nous cherchons si la contrainte (3) associée à cette variable est déjà considérée, cas où on ne fait rien ; dans le cas contraire on introduit cette contrainte dans le système des contraintes du type (3).

Si la variable entrante est une variable d'écart on ne fait rien.






## 1.3 RECONNAISSANCE DES SOUS-CYCLES

### 1.3.1 Formule donnant les nouvelles valeurs des variables de base

Dans ce paragraphe, nous supposons provisoirement que les éléments de la matrice associée aux variables hors base, ainsi que les valeurs des variables de base sont des nombres entiers.

Résolvons le problème (II) par la méthode de simplexe et posons :

$\dot{\gamma}$ : ensemble des indices des variables de base

$\bar{\gamma}$ : ensemble des indices des variables hors base

A : la matrice associée aux variables hors base

Y : matrice colonne des variables de base

$\bar{Y}$ : matrice colonne dont les éléments sont les valeurs des variables de base.

Les contraintes peuvent ainsi s'écrire :

$$Y + A\, Y_{\bar{\gamma}} = \bar{Y}$$

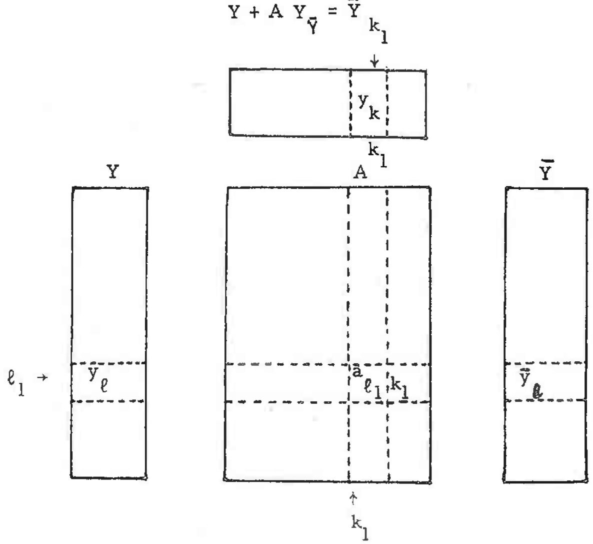



tableau 1.3.1

Sauf indication contraire, nous ferons dans la suite les conventions suivantes :

$A^j$ représente la matrice colonne correspondant à la jème colonne de A.

Si $y_\ell$ est un élément d'une matrice ligne ou d'une matrice colonne, nous désignerons par $\ell_1$ son rang dans cette matrice ligne ou matrice colonne.

Supposons qu'après avoir choisi la variable entrante $y_k$ on ait le tableau 1.3.1 ci-dessus.



On sait que pour trouver la variable sortante correspondante, on calcule :

$$\theta = \inf_{\substack{i \in \gamma \\ a_{i_1 k_1} > 0}} \left( \frac{\bar{y}_i}{a_{i_1 k_1}} \right)$$

Soit

$$(1.3.1) \qquad \boxed{\theta = \frac{\bar{y}_\ell}{a_{\ell_1 k_1}}}$$

cette valeur $\theta$ est la valeur que prend $y_k$ lorsque celle-ci entre dans la base

Nous avons posé

$$Y + A\, Y_{\bar{\gamma}} = \bar{Y}$$

que nous écrirons

$$Y + \sum_{j \in \bar{\gamma}} y_j\, A^{j_1} = \bar{Y} \qquad (1.3.2)$$

Quand on remplace $y_j$ par zéro $\forall j \in \bar{\gamma}$ $(j \neq k)$ et $y_k = \theta$, la relation (1.3.2) devient :

$$Y + \theta A^{k_1} = \bar{Y}$$

D'où

$$\boxed{Y = \bar{Y} - \theta A^{k_1}} \qquad (1.3.3)$$

Cette formule (1.3.3) définit les nouvelles valeurs des variables de base lorsque $y_k$ entre dans la base.

En résumé, lorsque $y_k$ entre dans la base, les nouvelles valeurs des variables de base sont définies par :

$$\boxed{\begin{cases} Y = \bar{Y} - \theta A^{k_1} \\ y_k = \theta \end{cases}} \qquad (1.3.4)$$

C'est sur ces nouvelles valeurs définies par cette formule (1.3.4) que nous allons tester l'existence éventuelle de sous-cycle.

Remarques :

1°) Les valeurs des variables de base définies par (1.3.4) sont des nombres entiers si $\theta$ est entier, d'après les hypothèses faites sur $\overline{Y}$ et sur la matrice A. Nous avons vu que $\theta = \overline{y}_\ell / a_{\ell_1 k_1}$ ; une condition suffisante pour que $\theta$ soit entier, est donc que $a_{\ell_1 k_1}$ soit égal à 1.

2°) Si $\theta = 0$, les nouvelles valeurs de Y sont inchangées pour cette nouvelle itération, donc il n'y a pas de condition de sous-cycle.

3°) Si $\theta$ n'est pas entier, on n'a pas intérêt à introduire une condition de sous-cycle, puisque dans ce cas le problème ne possède pas de solution entière.

4°) L'hypothèse : "les éléments de $\overline{Y}$ et de la matrice A sont des nombres entiers", n'est pas nécessaire pour tester l'exitence des sous-cycles. L'importance est d'avoir :

a) $\theta$ entier

b) les nouvelles valeurs de Y définies par (1.3.4) entières.

5°) Si les valeurs de Y sont des entiers, les valeurs des variables principales de la base sont booléennes. En effet d'après les conditions (3) et (4) du problème (I) on a :

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij} \leq 1 \\ x_{ij} \geq 0 \\ \text{si } x_{ij} \text{ entier} \end{array}\right| \Longrightarrow x_{ij} = 0 \text{ ou } 1.$$

Donc, lorsque la solution définie par la formule (1.3.4) est entière, il n'y a que deux possibilités :



(R5) ‖ a) cette solution correspond à un n-cycle
‖ b) elle correspond à des sous-cycles.

C'est dans ce dernier cas, qu'on doit introduire la contrainte de sous-cycle du type (3) dans le problème (II) avant de continuer à l'itération suivante.

Pour déterminer cette contrainte, il faut pouvoir reconnaître un sous-cycle à partir d'une solution entière donnée.

### 1.3.2 Construction de cycles à partir d'une solution entière

D'après la remarque 5°) ci-dessus, les valeurs des variables principales de la base sont égales à 0 ou à 1. Parmi ces variables principales nous considérons seulement celles qui sont non nulles (qui ont donc la valeur 1). Soit par exemple :

$$(1.3.4)\begin{cases} X(i_1, i_2) = 1 \\ X(i_2, i_3) = 1 \\ X(i_4, i_6) = 1 \\ \vdots \\ X(i_p, i_q) = 1 \end{cases}$$

(Nous écrirons indifféremment $X(i_1, i_2)$ ou $X_{i_1 i_2}$ de même $Y(k)$ ou $Y_k$)

Alors d'après $(R_5)$ les égalités (1.3.4) donne nécessairement un p-cycle $(3 \leq p \leq n)$. Pour trouver ce p-cycle nous considérons un tableau ligne TAB à 2n éléments ; on place successivement dans ce tableau tous les indices des variables principales de (1.3.4). Pour l'exemple ci-dessus on a :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | 2n-1 | 2n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TAB | $i_1$ | $i_2$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ | $i_6$ | | | $i_p$ | $i_q$ |
| | $\underbrace{\quad}_{X(i_1, i_2)}$ | | $\underbrace{\quad}_{X(i_2, i_3)}$ | | $\underbrace{\quad}_{X(i_4, i_6)}$ | | | | $\underbrace{\quad}_{X(i_p, i_q)}$ | |

Remarquons que $i_1, i_2, \ldots, i_p, i_q$ sont les numéros des sommets du graphe et que chaque sommet figure deux fois dans ce tableau TAB ; c'est la raison pour laquelle nous prenons un tableau de 2n éléments.

Nous désignerons par CYCLE un tableau ligne à n + 1 éléments.

| | 1 | 2 | 3 | | n+1 |
|---|---|---|---|---|---|
| CYCLE | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | | |

L'algorithme de recherche d'un p-cycle à partir du tableau TAB est le suivant :

Initialisation

1°) On lit le 1er élément de TAB, on le place dans le tableau CYCLE et on supprime TAB (1).

2°) On lit le 2ème élément de TAB, on le place dans CYCLE et on supprime TAB (2).

Phase itérative :

3°) On compare le dernier élément placé dans CYCLE avec les éléments restants du tableau TAB. Soit k l'adresse de l'élément TAB (k) rangé en CYCLE à l'itération précédente. Comme les éléments k sont l' indice soit de l'origine d'un arc, soit de son extrémité, selon la parité de k, on testera cette dernière :

si k est pair, on place dans CYCLE l'élément TAB (k-1) et on supprime les éléments TAB (k-1) et TAB (k) du tableau TAB.

Si k est impair, on place dans CYCLE l'élément TAB (k+1) et on supprime les éléments TAB (k) et TAB (k + 1) du tableau TAB.

Fin :

On arrête quand le dernier élément placé dans le tableau CYCLE est identique au premier élément CYCLE (1).



Remarques :

1°) Lorsque le dernier élément est identique au 1er élément du tableau CYCLE, on a un sous-cycle ou un n-cycle. Dans ce dernier cas, il y a n + 1 éléments dans le tableau CYCLE. C'est pour cela que nous avons pris n + 1 éléments pour le tableau CYCLE.

2°) Dans nos programmes, nous remplaçons les variables à double indice X (i, j) par une variable à un seul indice Y (k).

Dans le cas n = 5, donné en exemple, les correspondances entre ces deux groupes de variables sont définies par les deux tableaux suivants :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | $x_{21}$ | | | | |
| 3 | $x_{31}$ | $x_{32}$ | | | |
| 4 | $x_{41}$ | $x_{42}$ | $x_{43}$ | | |
| 5 | $x_{51}$ | $x_{52}$ | $x_{53}$ | $x_{54}$ | |

tableau 1.3.2.1

$\Longleftrightarrow$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | $y_1$ | | | | |
| 3 | $y_2$ | $y_3$ | | | |
| 4 | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | | |
| 5 | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{10}$ | |

tableau 1.3.2.2

On a par exemple d'après ces deux tableaux $x_{31} = y_2$.

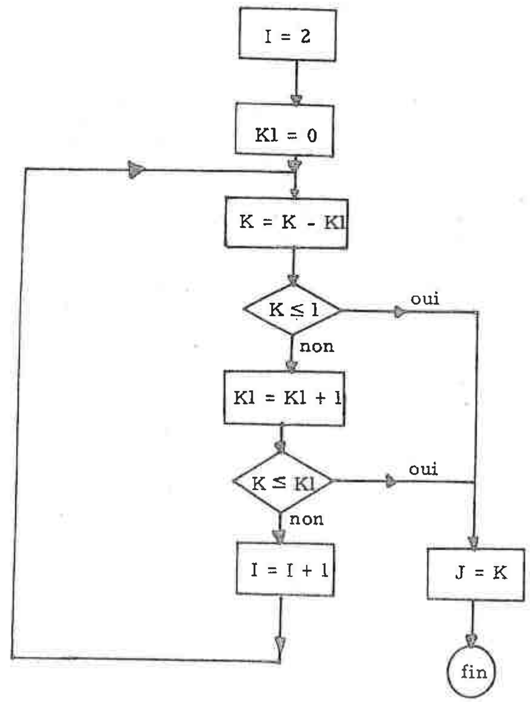
En général, si nous posons

$$X\ (I,\ J) = Y\ (K)$$

le calcul de K se fera par la relation suivante :

$$K = (I - 1)\ (I - 2)/2 + J.$$

Nous aurons également besoin, connaissant K, de trouver I, J. Ce calcul sera fait par l'algorithme représenté par l'organigramme ci-après.




<u>Exemple de recherche de cycle ou de sous-cycle.</u>

Supposons que n = 6 ; on donne les valeurs suivantes :

$y_1 = 1,\ \ y_2 = 1,\ \ y_3 = 1,\ \ y_{10} = 1,\ \ y_{14} = 1,\ \ y_{15} = 1.$

En appliquant l'algorihtme ci-dessus on a :

X (2,1) = 1 ; X (3,1) = 1 ; X (3,2) = 1
X (5,4) = 1 ; X (6,4) = 1 ; X (6,5) = 1.

Le tableau TAB à 2n = 12 éléments est alors :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TAB | $\cancel{2}$ | $\cancel{1}$ | $\cancel{3}$ | $\cancel{1}$ | $\cancel{3}$ | $\cancel{2}$ | 5 | 4 | 6 | 4 | 6 | 5 |



Le tableau CYCLE est :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CYCLE | 2 | 1 | 3 | 2 | | | |

D'où un sous-cycle : (2, 1, 3, 2)

La contrainte associée est :

X (2,1) + X (1,3) + X (3,2) ≤ 2, car le nombre d'éléments distincts du tableau CYCLE est 3.

Et en l'exprimant en fonction des variables Y (k) on a :

Y (1) + Y (2) + Y (3) ≤ 2.

Comme dans la méthode de simplexe, on travaille sur la matrice associée aux variables hors base, on a intérêt à exprimer les variables intervenant dans cette contrainte de sous-cycle en fonction des variables hors base.

## 1.4 <u>INTRODUCTION D'UNE CONTRAINTE DE SOUS-CYCLE MODIFICATION DE LA MATRICE DE CONTRAINTES.</u>

Supposons que par l'algorithme précédent, nous ayons mis en évidence un sous-cycle : un tel sous-cycle ne peut pas être accepté dans notre problème et nous devons l'interdire en explicitant, parmi les contraintes, la contrainte nouvelle interdisant ce sous-cycle. Il faudra donc modifier le tableau des contraintes par adjonction d'une nouvelle ligne.

Pour cela nous devons expliciter les variables de base en fonction des variables hors-base :

soit par exemple :

$$y_{i_1} + a_{ij_1}\, y_{j_1} + a_{ij_2}\, y_{j_2} + \dots + a_{ij_m}\, y_{j_m} = \overline{y}_{i_1}$$

ou

$$\boxed{y_{i_1} + \sum_{j \in \bar{Y}} a_{ij}\, y_j = \bar{y}_{i_1}} \qquad (1.4.1)$$

Une équation de sous-cycle fait intervenir les variables de base et éventuellement une seule variable hors base.

Pour exprimer cette relation en fonction des variables hors base, il suffit de remplacer chaque variable de base par son expression exprimée en fonction des variables hors base.

La formule (1.4.1) entraîne :

$$\boxed{y_{i_1} = - \sum_{j \in \bar{Y}} a_{ij}\, y_j + \bar{y}_{i_1}} \qquad (1.4.2)$$

Considérons une condition de sous-cycle, par exemple :

(1) $y_{i_1} + y_{h_1} + y_{j_1} \leq 2$ où $y_{i_1}$ et $y_{h_1}$ sont des variables de base, et $y_{j_1}$ est une variable hors base.

(1) $\Longleftrightarrow$ $y_{i_1} + y_{h_1} + y_{j_1} + y_e = 2$ $\quad$ $y_e$ variable d'écart associée

$$\Longleftrightarrow \left(- \sum_{j \in \bar{Y}} a_{ij}\, y_j + \bar{y}_{i_1}\right) + \left(- \sum_{j \in \bar{Y}} a_{hj}\, y_j + \bar{y}_{h_1}\right) + y_{j_1} + y_e = 2$$

$$\Longleftrightarrow - \sum_{j \in \bar{Y}} (a_{ij} + a_{hj})\, y_j + y_{j_1} + y_e = 2 - \bar{y}_{i_1} - \bar{y}_{h_1}$$

Soit

$$- (a_{ij_1} + a_{hj_1})\, y_{j_1} - (a_{ij_2} + a_{hj_2})\, y_{j_2} - \ldots -$$

$$\ldots\ldots - (a_{ij_m} + a_{hj_m})\, y_{j_m} + y_{j_1} + y_e = 2 - \bar{y}_{i_1} - \bar{y}_{h_1}$$

ou

$$\boxed{\begin{array}{c} [\,- (a_{ij_1} + a_{hj_1}) + 1\,]\, y_{j_1} - (a_{ij_2} + a_{hj_2})\, y_{j_2} - \ldots - (a_{ij_m} + a_{hj_m})\, y_{j_m} + \\ + y_e = 2 - \bar{y}_{j_1} - \bar{y}_{h_1} \end{array}}$$



En ajoutant cette nouvelle contrainte dans le tableau du simplexe, on a le nouveau tableau suivant :

| | $Y$ | $y_{j_1}$ | $y_{j_2}$ | | $y_{j_m}$ | $\bar{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i \to$ | $y_{i_1}$ | $a_{ij_1}$ | $a_{ij_2}$ | ------------ | $a_{ij_m}$ | $\bar{y}_{i_1}$ |
| $h \to$ | $y_{h_1}$ | $a_{hj_1}$ | $a_{hj_2}$ | ------------ | $a_{hj_m}$ | $\bar{y}_{h_1}$ |
| | $y_e$ | $-(a_{ij_1} + a_{hj_1}) + 1$ | | | $-(a_{ij_m} + a_{hj_m})$ | $2 - (\bar{y}_{i_1} + \bar{y}_{h_1})$ |

Ainsi, pour déterminer les éléments de la dernière ligne de la matrice correspondant à une nouvelle contrainte de sous-cycle, on effectue les opérations suivantes :

1°) on repère toutes les lignes de la matrice correspondantes aux variables de base de cette contrainte, on additionne ces vecteurs lignes, puis on prend l'opposé du vecteur obtenu.

2°) On ajoute + 1 à l'élément situé sur la colonne correspondant à la variable hors base de la contrainte (si cette variable hors base existe).

3°) Pour le second membre (colonne $\bar{Y}$) on prend l'opposé de la somme des valeurs du second membre des variables de base et, on y ajoute la valeur du 2ème membre de la contrainte.

4°) On place dans la colonne Y la variable d'écart correspondant à cette contrainte.

## 1.5 ALGORITHME DU PROBLEME DE VOYAGEUR DE COMMERCE

Nous exposons d'une façon globale et sommaire, cet algorithme. Nous examinerons ensuite en détail les différents points importants de chaque phase.

Désignons par (I') le problème suivant :

$$
(I') \left\{ \begin{array}{lll}
[\text{ Min }]\ D(x) = \sum\limits_{i > j} d_{ij}\, x_{ij} & & (j = 1, 2, \dots, n-1) \\
\text{sous les contraintes :} & & \\
(1) & \sum\limits_{j < i = K} x_{ij} + \sum\limits_{i > j = K} x_{ij} = 2 & \text{avec } K = 1, 2, \dots, n \\
(4) & x_{ij} \geq 0 &
\end{array} \right.
$$

Dans ce paragraphe, nous désignerons par A, la matrice associée aux variables hors base, quand on applique la méthode du simplexe.

1°) Phase d'initialisation :

a) On applique la méthode de simplexe au problème (I'), en choisissant pour variables de base, les variables principales associées à n-cycle (1, 2, 3, ..., n, 1).

b) On ajoute dans la matrice A les contraintes du type $x_{ij} \leq 1$ pour tout $(i, j) \in Y$.

Après cette première itération, on passe à la phase itérative.



2°) Phase itérative :

On détermine la variable entrante puis, la variable sortante par la méthode de simplexe.

a) On cherche la variable entrante parmi les $\Delta_j \geq 0$ $(j \in \bar{Y})$.

b) On ajoute dans A une contrainte du type $x_{ij} \leq 1$, si la variable entrante qui vient d'être définie est une variable principale.

c) On teste s'il existe une contrainte de sous-cycle, dans ce cas, on ajoute cette contrainte dans la matrice A.

d) On cherche la variable sortante.

3°) Fin :

On arrête quand tous les $\Delta_j$ $(j \in \bar{Y})$ sont négatifs ou nuls.

Examinons, en détail cet algorithme.

1°) Tout d'abord, la matrice A après la première itération est une matrice à éléments entiers et, la solution de base est aussi entière. La démonstration de cette propriété sera faite au chapitre 2.

En général, il peut y avoir plusieurs variables entrantes possibles et, en cas de dégénérescence, plusieurs variables sortantes possibles. On choisira de préférence parmi ces possibilités, celle qui correspond à un pivot égal à 1.

L'algorithme de choix de ce pivot est le suivant :

$\alpha_1$) on prend un $\Delta_j \geq 0$, soit $\Delta_{j_0}$. D'où $y_{j_0}$ est la variable entrante.

$\alpha_2$) On ajoute les contraintes nécessaires.

$\alpha_3$) On prend parmi les variables qui peuvent sortir de la base, celle qui donne le pivot égal à 1.

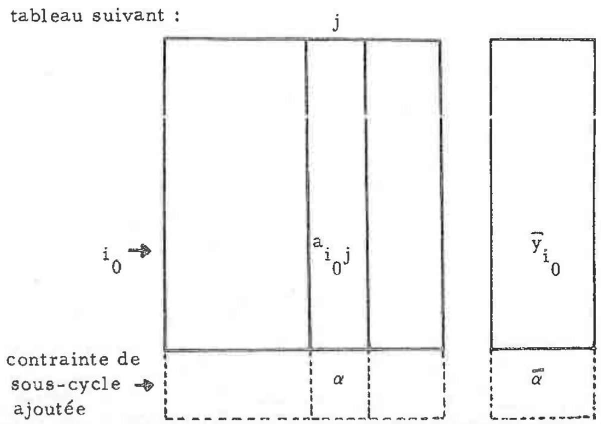
Si de telle variable n'existe pas, on recommence à partir de $\alpha_1$) jusqu'à épuisement de tous les $\Delta_j \geq 0$.

Si, après avoir examiné tous les $\Delta_j \geq 0$, on ne trouve aucun pivot égal à 1, on prend pour variable entrante et variable sortante celles qui correspondent au premier $\Delta_j$ choisi.

La recherche d'un pivot égal à 1 a pour but de rester aussi longtemps que possible dans le cas des solutions entières. L'intérêt est que si on arrête l'algorithme avant d'arriver à la solution optimale, alors on aura une solution sous-optimale qui est la dernière solution entière trouvée.

D'autre part, tant que le pivot est égal à 1, tous les éléments de la matrice A sont des entiers, et dans ce cas, on peut utiliser un programme en nombres entiers, d'où un gain de temps de calcul et la suppression des erreurs de chute. Ce n'est qu'à partir du moment où le pivot est différent de 1 qu'on travaillera en nombres réels. Il faudra donc, partager ce traitement en deux étapes, la première effectuée en "entiers", la seconde en "réels".

2°) Dans la phase itérative de l'algorithme proposé, nous ne choisissons la variable sortante qu'après avoir ajouté dans la matrice A une contrainte de sous-cycle. Or le calcul de $\theta$ dans le paragraphe 1.3 est fait avant d'ajouter cette nouvelle contrainte, ce qui entraîne, que la variable sortante déterminée avant l'addition de cette contrainte peut être différente de celle qu'on choisit après l'addition de cette même contrainte. On a le tableau suivant :






Supposons $\theta = \dfrac{\bar{y}_{i_0}}{a_{i_0 j}}$ et $\alpha > 0$.

Après avoir ajouté une contrainte de sous-cycle pour déterminer la variable sortante, on calcule :

$$\theta' = \inf\left(\theta, \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right) \leq \theta$$

C'est cette valeur $\theta'$ qui est la valeur de la nouvelle variable entrante.

Comme, on a $\theta' \leq \theta$, par précaution, après avoir calculé $\theta$, pour déterminer les contraintes de sous-cycles, on remplace successivement dans la formule (1.3.4) du paragraphe 1.3, $\theta$ non seulement par sa propre valeur, mais aussi par les valeurs entières non nulles qui lui sont inférieures, c'est-à-dire, on donne successivement à $\theta$ de (1.3.4) les valeurs 1, 2, 3, . . . , $\theta$.

En effet, supposons que $\theta = 4$ et que $\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 2$, alors $\theta' = \inf\left(\theta, \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right) =$ Donc, la valeur que peut prendre la nouvelle variable entrante est 2 et non pas 4. Il faut donc prévoir aussi, l'apparition de sous-cycle pour cette valeur 2 de la variable entrante.

La valeur $\theta > 1$ peut exister uniquement, lorsque la variable entrant est une variable d'écart, car pour les variables principales, $\theta$ ne peut être que 0 ou 1, d'après la condition $x_{ij} \leq 1$.

Cet algorithme, qui vient d'être énoncé est valable pour le cas où la matrice $\|d_{ij}\|$ est symétrique, aussi bien que pour le cas où $\|d_{ij}\|$ est non symétrique. Les seules différences pour ces deux cas sont les contraintes. Nous envisageons le cas non symétrique au paragraphe suivant.

## 1.6 MISE EN EQUATIONS DU PROBLEME DANS LE CAS OU LA MATRICE $\|d_{ij}\|$ EST NON SYMETRIQUE

(2b) ne soient pas redondants, on prend seulement pour (2b) les équations correspondant à $j = 1, 2, \ldots, (n-1)$, soit finalement :

$$(2) \begin{cases} (2a) & \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, 2, \ldots, n \\ (2b) & \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, 2, \ldots, (n-1) \end{cases}$$

Puisque $x_{ij} \geq 0 \ \forall (i, j)$, ces contraintes (2) entrainent $x_{ij} \leq 1 \ \forall (i, j)$.

Dans la phase d'initialisation, on pourra donc mettre en équation le problème dans ce cas non symétrique, sous la forme suivante :

$$(1) \qquad ([\text{ Min }] \quad D(x) = \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} d_{ij} x_{ij}$$

sous les contraintes :

$$(2) \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} = 1 & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n \\ \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_{ij} = 1 & \text{pour } j = 1, 2, \ldots, (n-1) \end{cases}$$

$$(3) \qquad x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i, j).$$

Quant aux contraintes de sous-cycle, on les ajoute si c'est nécessaire dans la phase itérative, en prenant les mêmes critères que dans le cas où la matrice $\|d_{ij}\|$ est symétrique.

Remarque :

Pour ce cas non symétrique, il n'y a pas de condition $x_{ij} \leq 1$ comme dans le cas symétrique. Mais en revanche, il y a les conditions de "boucles c'est-à-dire que l'on devra tenir compte, par exemple, des contraintes du type $x_{12} + x_{21} \leq 1$, si on veut éviter la boucle (1, 2, 1). Car $0 \leq x_{ij} \leq 1 \ \forall (i, j)$ n'entraîne pas nécessairement $x_{12} + x_{21} \leq 1$. Alors que, dans le cas de symétrique, on n'a pas à tenir compte de condition de boucle car $\forall$ (i, j) on a $x_{ij} = x_{ji}$ c'est-à-dire, il n'y a pas de distinction entre l'arc (i, j) et l'arc (j, i).

Or, les contraintes de boucles sont inclues dans les contraintes de sous-circuits, donc pour le cas de non symétrique, il n'y a qu'un seul type de contraintes unilatérales à considérer, alors que dans le cas de symétrique il y a deux types de contraintes unilatérales.

## 1.7 PROBLEME DE CHOIX DE VARIABLES DE BASE POUR LA SOLUTION D'INITIALISATION

Pour pouvoir utiliser la méthode de simplexe, nous devons choisir un ensemble $\gamma$ des indices des variables de base de telles sortes, que le déterminant de la matrice $A_\gamma$ correspondant, extraite de la matrice A du système de contraintes AX = B, soit non nul.

Pour notre problème, le choix de cet ensemble $\gamma$ est soumis à deux contraintes :

($D_1$) il faut que $\det A_\gamma \neq 0$

($D_2$) il faut que les variables de base associées à $\gamma$ définissent un n-cycle ou un circuit hamiltonien, car notre but est de partir d'une solution initiale qui est un n-cycle, ou un circuit hamiltonien d'ordre n, et nous essayerons d'améliorer cette solution de départ au cours des itérations successives.

Nous envisageons séparément ce choix dans le cas "symétrique" et dans le cas "non symétrique".



### 1.7.a Cas où la matrice $\|d_{ij}\|$ est symétrique

Pour n est impair, les deux contraintes $D_1$ et $D_2$ du paragraphe 1.7, sont vérifiées en même temps, car le graphe associé à $A_\gamma$ est un n-cycle. Comme n est impair, le déterminant de $A_\gamma$ est égal à $\pm 2$ d'après le théorème 1 du paragraphe 2.4.

Par contre, lorsque n est pair, ces deux contraintes $D_1$ et $D_2$ ne peuvent pas être vérifiées simultanément, si nous considérons uniquement comme système de contraintes, les contraintes bilatérales

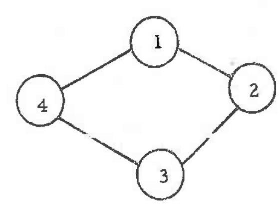
$$(BI) : \sum_{i > j = K} x_{ij} + \sum_{j < i = K} x_{ij} = 2 \quad (K = 1, 2, \ldots, n)$$

Prenons l'exemple n = 4.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | $x_{21}$ | | | |
| 3 | $x_{31}$ | $x_{32}$ | | |
| 4 | $x_{41}$ | $x_{42}$ | $x_{43}$ | |

Le système (BI) donne dans ce cas :

$$(2) \begin{cases} x_{21} + x_{31} + x_{41} = 2 \\ x_{21} + x_{32} + x_{42} = 2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{43} = 2 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 2 \end{cases}$$




Pour avoir le n-cycle (1, 2, 3, 4, 1) nous prenons pour $\gamma$ :

$$\gamma = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

D'où en groupant (2) sous forme $A_Y$ et $A_{\bar{Y}}$ on a :

| | $Y$ | | | | $\bar{Y}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_{12}$ | $x_{23}$ | $x_{34}$ | $x_{41}$ | $x_{31}$ | $x_{42}$ | |
| 1 | 1 | | | 1 | 1 | | 2 |
| 2 | 1 | 1 | | | | 1 | 2 |
| 3 | | 1 | 1 | | 1 | | 2 |
| 4 | | | 1 | 1 | | 1 | 2 |

$$\Rightarrow A_Y = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Tableau 1.7.1

Nous voyons que, pour la matrice $A_Y$ :

ligne 1 + ligne 3 = ligne 2 + ligne 4

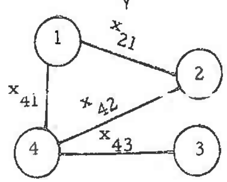
Donc dét $A_Y = 0$.

Montrons que le système (2) n'est pas redondant (cf paragraphe 2.7). Pour cela, nous prenons parmi les variables de base celles qui forment un cycle d'ordre n-1 si n est pair, et un cycle d'ordre n si n est impair, et en utilisant le théorème 1 du paragraphe 2.4, nous pouvons affirmer que le déterminant de la matrice associée à ces variables de base est non nul.

Par exemple pour n = 4, prenons

$Y = \{(2, 1), (4, 2), (4, 1), (4,3)\}$ (figure 1),

et la matrice $A_Y$ associée est d'après le tableau 1.7.1




$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Le graphe G associé à la matrice $A_Y$ considérée comme matrice d'incidence aux arêtes est (figure 2) :



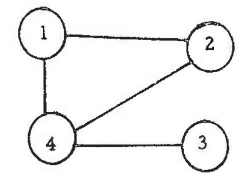



Figure 2

Comme ce graphe représente le 3-cycle (1, 2, 4, 1) alors d'après le théorème 1 (cf. 2.4.1) le déterminant de $A_Y$ est égal à $\pm 2$, c'est-à-dire det $A_Y \neq 0$. Donc le système (2) n'est pas redondant d'après $S_2$ du paragraphe 2.7.

Or, cet ensemble $Y$ tel que le déterminant de $A_Y$ soit non nul, ne nous permet pas d'avoir un n-cycle de départ, autrement dit la condition $D_2$ du paragraphe 1.7 n'est pas remplie. Comme le système n'est pas redondant, pour que les contraintes $D_1$ et $D_2$ soient vérifiées toutes les deux en même temps, nous allons ajouter au système (BI) une contrainte unilatérale du type $x_{ij} \leq 1$.

Prenons d'abord l'exemple n = 6

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | $x_{21}$ | | | | | |
| 3 | $x_{31}$ | $x_{32}$ | | | | |
| 4 | $x_{41}$ | $x_{42}$ | $x_{43}$ | | | |
| 5 | $x_{51}$ | $x_{52}$ | $x_{53}$ | $x_{54}$ | | |
| 6 | $x_{61}$ | $x_{62}$ | $x_{63}$ | $x_{64}$ | $x_{65}$ | |

Les contraintes du système (BI) sont :

$$\begin{cases} x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 2 \\ x_{21} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} = 2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{43} + x_{53} + x_{63} = 2 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{54} + x_{64} = 2 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{65} = 2 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} = 2 \end{cases}$$

En prenant

$$\gamma = \{(1,\ 2)\ ,\ (2,\ 3)\ ,\ (3,\ 4)\ ,\ (4,\ 5)\ ,\ (5,\ 6)\ ,\ (6,1)\}$$

et en groupant le système (2) suivant $\gamma$, $\bar{\gamma}$ on a :

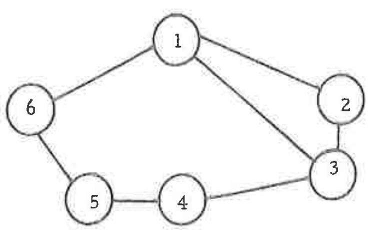
| | $x_{12}$ | $x_{23}$ | $x_{34}$ | $x_{45}$ | $x_5$ | $x_{61}$ | $x_{31}$ | $x_{41}$ | $x_{42}$ | $x_{51}$ | $x_{52}$ | $x_{53}$ | $x_{62}$ | $x_{63}$ | $x_{64}$ | $\bar{X}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | | | | 2 |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | 1 | | 1 | | 1 | | | 2 |
| 3 | | 1 | 1 | | | | 1 | | | | | 1 | | 1 | | 2 |
| 4 | | | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | | | | | | 1 | 2 |
| 5 | | | | 1 | 1 | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | 2 |
| 6 | | | | | 1 | 1 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 2 |

D'après ce tableau, nous voyons que le graphe associé à $A_\gamma$ est le 6-cycle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 1) ; nous avons vu d'après le théorème 1 que det $A_\gamma = 0$.

Pour avoir un déterminant non nul, il faudrait prendre un cycle de longueur impaire (théorème 1), que nous définissons de la façon suivante :

nous prenons

$(a_1)$ $\quad \gamma = \{\ (1,\ 2),\ \ (2,\ 3),\ \ (3,\ 4),\ \ (4,\ 5),\ \ (5,6),\ \ (6,\ 1),\ \ (1,\ 3)\ \}$






Comme nous avons ajouté une variable de base de plus (variable $x_{13}$) il nous faudrait aussi ajouter une contrainte. Les contraintes qui sont toujours compatibles sont les contraintes du type (3) c'est-à-dire $x_{ij} \leq 1$ pour tout $x_{ij}$ variable principale, et nous prenons la contrainte :

$$(a_2) \qquad x_{12} \leq 1 \iff \begin{cases} x_{12} + y_{16} = 1 \\ y_{16} \geq 0. \end{cases}$$

Compte tenu de l'ensemble $\gamma$ définit par $(a_1)$ et de cette nouvelle contrainte $(a_2)$, la nouvelle matrice $A_\gamma$ devient :

$A_\gamma$ =

| | $x_{12}$ | $x_{23}$ | $x_{34}$ | $x_{45}$ | $x_{56}$ | $x_{61}$ | $x_{31}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | | | | |
| 3 | | 1 | 1 | | | | 1 |
| 4 | | | 1 | 1 | | | |
| 5 | | | | 1 | 1 | | |
| 6 | | | | | 1 | 1 | |
| 7 | 1 | | | | | | |

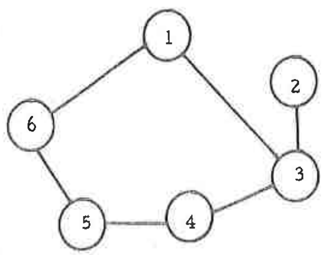
← cette dernière ligne provient de $x_{12} + y_{16} = 1$, $y_{16}$ étant variable hors base.

Nous voyons que la dernière ligne de $A_\gamma$ possède un seul élément non nul. Et en développant par rapport aux éléments de cette dernière ligne il ne reste pour le calcul du déterminant de $A_\gamma$ que la matrice

$A'_\gamma$ =

| | $x_{23}$ | $x_{34}$ | $x_{45}$ | $x_{56}$ | $x_{61}$ | $x_{31}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | 1 | 1 |
| 2 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 1 | | | | 1 |
| 4 | | 1 | 1 | | | |
| 5 | | | 1 | 1 | | |
| 6 | | | | 1 | 1 | |

dont le graphe associé est :




C'est un 5-cycle, par suite det $A'_\gamma = \pm 2$ et aussi det $A_\gamma = \pm 2$.

Dans le cas symétrique, nous adoptons toujours cette solution pour la phase d'initialisation, c'est-à-dire que pour un problème de n sommets nous prenons :

1°) si n est impair

$$\gamma = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$$

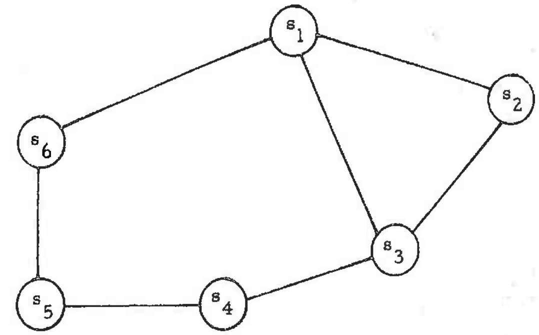
2°) si n est pair

$$\gamma = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1), (1, 3)\}$$

et nous ajoutons au système des contraintes bilatérales (1) du problème (I) (cf. 1.2), la contrainte $x_{12} \leq 1$.

En général si le n-cycle de départ est $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$,






$$\gamma = \{(s_1, s_2), (s_2, s_3), \dots, (s_{n-1}, s_n), (s_n, s_1), (s_1, s_3)\}$$

et la contrainte ajoutée est $x_{s_1 s_2} \leq 1$.

Par exemple pour n = 6, si nous prenons pour cycle de départ (1, 4, 3, 6, 5, 2, 1), alors :

$$\gamma = \{(1, 4), (4, 3), (3, 6), (6, 5), (5, 2), (2, 1), (1, 3)\}$$

et la contrainte ajoutée est $x_{14} \leq 1$.

1.7.b <u>Cas où la matrice $\| d_{ij} \|$ est non symétrique.</u>

Pour ce cas aussi, le déterminant de $A_\gamma$ est nul, alors que le système de contraintes bilatérales est non redondant, c'est-à-dire, il existe un ensemble $\gamma_0$ tel que le déterminant de $A_{\gamma_0}$ soit non nul.

Prenons l'exemple n = 4 :

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ |
| 2 | $x_{21}$ | | $x_{23}$ | $x_{24}$ |
| 3 | $x_{31}$ | $x_{32}$ | | $x_{34}$ |
| 4 | $x_{41}$ | $x_{42}$ | $x_{43}$ | |

Les contraintes bilatérales sont (cf. 1.6) :

$$(2)\quad\begin{cases} x_{12}+x_{13}+x_{14}=1 \\ x_{21}+x_{23}+x_{24}=1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{34}=1 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}=1 \\ x_{21}+x_{31}+x_{41}=1 \\ x_{12}+x_{32}+x_{42}=1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{43}=1 \end{cases}$$

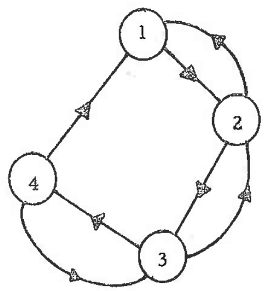



figure b1

Comme il y a 7 équations, nous prenons 7 variables de base correspondant à la figure b1 ci-dessus. En groupant (2) suivant $\gamma$ et $\bar{\gamma}$ on a :

| | $x_{12}$ ($\gamma$) | $x_{23}$ | $x_{34}$ | $x_{41}$ | $x_{21}$ | $x_{32}$ | $x_{43}$ | $x_{13}$ ($\bar{\gamma}$) | $x_{14}$ | $x_{24}$ | $x_{31}$ | $x_{42}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | 1 | 1 | | | | 1 |
| 2 | | 1 | | | 1 | | | | | 1 | | | 1 |
| 3 | | | 1 | | | 1 | | | | | 1 | | 1 |
| 4 | | | | 1 | | | 1 | | | | | 1 | 1 |
| 5 | | | | 1 | 1 | | | | | | 1 | | 1 |
| 6 | 1 | | | | | 1 | | | | | | 1 | 1 |
| 7 | | 1 | | | | | 1 | 1 | | | | | 1 |

tableau b1

D'où :



$A_\gamma =$

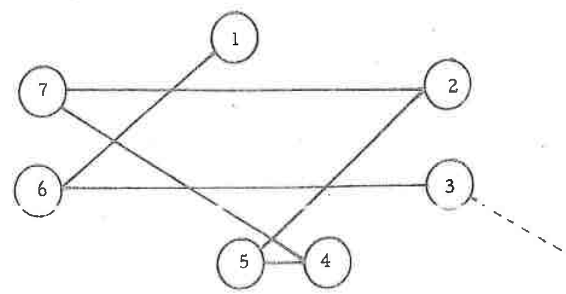
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 2 | | 1 | | | 1 | | |
| 3 | | | 1 | | | 1 | |
| 4 | | | | 1 | | | 1 |
| 5 | | | | 1 | 1 | | |
| 6 | 1 | | | | | 1 | |
| 7 | | 1 | | | | | 1 |

tableau b2

Nous calculons le déterminant de $A_\gamma$ de deux façons, que nous utiliserons dans la suite.

Nous remarquons que chaque colonne de $A_\gamma$ possède au plus 2 éléments non nuls égaux à 1.

<u>1er procédé</u> : Associons à cette matrice le graphe suivant




Pour construire ce graphe, nous numérotons les lignes de $A_\gamma$ et nous associons à :

- chaque colonne de $A_\gamma$ ayant deux éléments non nuls, une arête reliant les 2 sommets qui sont les deux numéros de lignes correspondant à ces deux éléments non nuls.

- Chaque colonne de $A_\gamma$ ayant un seul élément non nul, nous associons une arête pendante en pointillés issue du sommet correspondant à la ligne contenant cet élément non nul.

Nous voyons qu'il y a un cycle (2, 7, 4, 5, 2), nous réarrangeons les lignes de $A_\gamma$ suivant l'ordre de ce cycle et on a la nouvelle matrice $A'_\gamma$ ci-dessous.

$A'_\gamma$ =

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 6 | 1 | 1 | | | | | |
| 3 | | 1 | 1 | | | | |
| 2 | | | | 1 | | | 1 |
| 7 | | | | 1 | 1 | | |
| 4 | | | | | 1 | 1 | |
| 5 | | | | | | 1 | 1 |

$$= \left[\begin{array}{c|c} A' & O \\ \hline O & A'' \end{array}\right]$$

Tableau b3

Pour la matrice A'' on a :

(ligne 1 + ligne 3) = (ligne 2 + ligne 4)

d'où det $A'' = 0 \implies \det A'_\gamma = 0$.

Or la matrice $A'_\gamma$ est obtenue à partir de $A_\gamma$ en permutant les lignes de celle-ci.

D'où $|\det A_\gamma| = |\text{dét } A'_\gamma| \implies \det A_\gamma = 0$



<u>2ème procédé</u> : Chaque ligne de $A_\gamma$ possède au plus deux éléments non nuls.

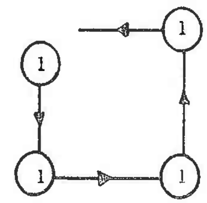
Nous pouvons aussi calculer le déterminant de $A_\gamma$ sans recourir au graphe. Pour cela nous prenons l'algorithme suivant (facile à mettre en œuvre sur l'ordinateur) :

on parcourt

1°) la colonne de $A_\gamma$

2°) la ligne de $A_\gamma$.

On commence au départ par parcourir la 1ère colonne de $A_\gamma$. On change de direction du parcours à chaque fois qu'on rencontre un élément non nul + 1, après avoir marqué (par exemple par un rond, tout autour de



cet élément, tableau b2).

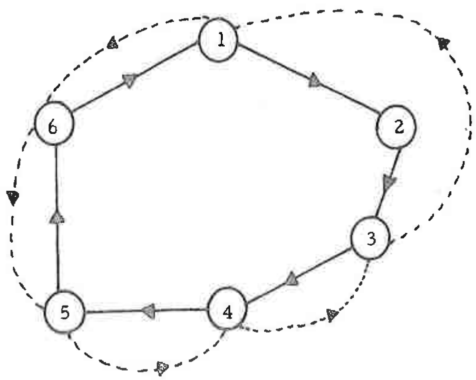
On aura un cycle, si dans ces parcours, on rencontre de nouveau un élément déjà marqué.

On groupe ensuite, les lignes de $A_\gamma$ qui sont reliées ensemble par ces flèches horizontales et verticales, et on retrouve la matrice $A'_\gamma$ précédente.

Si n est le nombre de sommets, le nombre de contraintes bilatérales est égal à 2n-1 (cf. paragraphe 1.6). Nous pouvons donc prendre 2n-1 variables de base. Nous fixons n variables de base qui forment un circuit hamiltonien d'ordre n et nous choisirons les n-1 variables de base restant de telles sortes que le déterminant de $A_\gamma$ soit non nul.

Désignons par $\gamma_1$ l'ensemble des indices des variables de base, qui forment un circuit hamiltonien d'ordre n, et par $\gamma_2$, l'ensemble des n - 1 indices des variables de base restant.

Pour n = 6, nous définissons $\gamma_1$ et $\gamma_2$ de la façon suivante :




$\gamma_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1)\}$

$\gamma_2 = \{(1, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 1)\}$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

C'est-à-dire pour $\gamma_1$, on prend pour éléments, les indices associés aux arcs formant le circuit (1, 2, 3, ..., n, 1), et pour $\gamma_2$ les indices associés aux arcs formant le circuit (1, n, n-1, n-2, ..., 4, 3, 1), (on saute le sommet 2).

En reprenant l'exemple précédent, n = 4 (cf. 1.7.b, tableau bl)

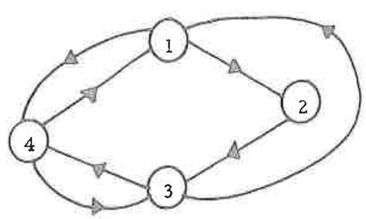



Figure 1.7.b



On a :

| | $x_{12}$ | $x_{23}$ | $x_{34}$ | $x_{41}$ | $x_{14}$ | $x_{43}$ | $x_{31}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | 1 | | |
| 2 | | 1 | | | | | |
| 3 | | | 1 | | | | 1 |
| 4 | | | | 1 | | 1 | |
| 5 | | | | 1 | | | 1 |
| 6 | 1 | | | | | | |
| 7 | | 1 | | | | 1 | |

En faisant le développement suivant les lignes et les colonnes qui contiennent un seul élément non nul, on trouve $|\det A_\gamma| = 1$.

Remarquons que par ce choix de $\gamma_1$ et de $\gamma_2$ la figure 1.7.b ci-contre possède :

- un n-circuit (1, 2, 3, 4, 1)
- un (n-1)-circuit (1, 4, 3, 1).

Donc si n est pair, n-1 est impair et réciproquement, ce qui fait que la partié de n n'a aucune influence sur ce choix. Ce choix est donc valable pour toute valeur de n.

## 1.8 PROPRIETE DES ELEMENTS DE A APRES LA PHASE D'INITIALISATION.

Ayant choisi $\gamma$ tel que le déterminant de $A_\gamma$ soit non nul, nous résolvons le système $[A_\gamma, A_{\bar\gamma}]\ X = B$.

Lorsque la matrice $A_\gamma$ se transforme en matrice unité $I_n$, nous voulons savoir ce que deviennent les éléments de la matrice hors base $A_{\bar{\gamma}}$. D'après les résultats du chapitre 2, nous pourrons énoncer la propriété suivante :

(P) *Les éléments de la matrice hors base, après la phase d'initialisation, ainsi que la solution de base sont des entiers.*

Pour le cas "symétrique" cette propriété (P) provient du théorème 6 et de la remarque du paragraphe 2.11. Pour le cas "non symétrique" elle provient du paragraphe 2.3.

Cette propriété (P) justifie la raison pour laquelle, dans notre algorithme nous cherchons à avoir à chaque itération le pivot égal à un. Elle nous permet aussi de conclure que :

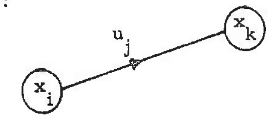
Tant que le pivot vaut un, la solution à chaque itération est entière, et correspond à un n-cycle, ou à un circuit hamiltonien d'ordre n.

## CHAPITRE II

## RAPPEL ET EXTENSION DES PROPRIETES DE MATRICES ASSOCIEES A DES GRAPHES

## 2.1 MATRICE D'INCIDENCE [ 1 ] [ p. 135 ]

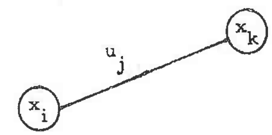
Désignons par $u_1, u_2, \dots, u_m$ les arcs d'un graphe G, par $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses sommets, et posons :




$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est extrémité initiale de } u_j \\ -1 & \text{si } x_i \text{ est extrémité terminale de } u_j \\ 0 & \text{si } x_i \text{ n'est pas extrémité de } u_j \end{cases}.$$

La matrice $S = [\ s_{ij}\ ]$ s'appelle matrice d'incidence aux arcs du graphe.

Si maintenant $u_1, u_2, \dots, u_m$ désignent les arêtes du graphe, posons :




$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est une extrémité de } u_j \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

La matrice $R = [\ r_{ij}\ ]$ est par définition la matrice d'incidence aux arêtes du graphe.

## 2.2 MATRICE TOTALEMENT UNIMODULAIRE [ 1 ]

2.2.1 Définition Une matrice $A = [\ a_{ij}\ ]$ est dite totalement unimodulaire si toute la matrice carrée extraite de A a son déterminant égal à 0, + 1 ou -1.

Tout coefficient $a_{ij}$ d'une matrice totalement unimodulaire est nécessairement égal à 0, + 1 ou -1, puisqu'il est le déterminant d'un mineur d'ordre 1 de la matrice.

### 2.2.2 *Théorème (Heller - Tompking - Gale)* [ *1* ] [ *p. 136* ]

*Soit A une matrice de coefficient 0, +1 ou -1, telle que toute colonne contienne au plus deux coefficients non nuls ; alors A est totalement unimodulaire, si et seulement si ces lignes peuvent être réparties en deux ensembles disjoints $I_1$ et $I_2$, avec les deux conditions suivantes :*

*(1) si les deux coefficients non nuls d'une même colonne ont le même signe, l'un est dans $I_1$ et l'autre dans $I_2$ ;*

*(2) si deux coefficients non nuls d'une même colonne ont des signes contraires, ils sont tous deux dans $I_1$ ou tous deux dans $I_2$.*

## 2.3 APPLICATION AU CAS OU $\|d_{ij}\|$ EST NON SYMETRIQUE

Le théorème d'Heller-Tompking - Gale, nous permet de démontrer que la matrice A associée aux contraintes (2)

$$(2)\quad \begin{cases} (2a) \quad \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} = 1 & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n \\[2ex] (2b) \quad \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_{ij} = 1 & \text{pour } j = 1, 2, \ldots (n-1) \end{cases}$$

est totalement unimodulaire.

Comme le premier membre de chaque équation de (2a) représente la somme des éléments d'une ligne de la matrice $\|x_{ij}\|$, une variable



($C_1$) $x_{ij}$ qui appartient à une équation de (2a), ne peut pas appartenir aux autres équations de (2a).

($C_2$) Nous retrouvons cette même propriété pour le système (2b), où le premier membre de chaque équation est la somme des éléments d'une colonne de la matrice $\|x_{ij}\|$.

Prenons un exemple : n = 4

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ |
| 2 | $x_{21}$ | | $x_{23}$ | $x_{24}$ |
| 3 | $x_{31}$ | $x_{32}$ | | $x_{34}$ |
| 4 | $x_{41}$ | $x_{42}$ | $x_{43}$ | |

$$(2\ a)\ \begin{cases} x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 & (2\ a_1) \\ x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1 & (2\ a_2) \\ x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1 & (2\ a_3) \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 & (2\ a_4) \end{cases}$$

$$(2\ b)\ \begin{cases} x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 & (2\ b_1) \\ x_{12} + x_{32} + x_{42} = 1 & (2\ b_2) \\ x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1 & (2\ b_3) \end{cases}$$

Nous voyons que, la variable $x_{12}$ appartient à l'équation (2 $a_1$), n'appartient pas aux autres équations de (2 a).

On peut vérifier de même pour (2 b).

La matrice associée à ces deux systèmes (2 a) et (2 b) est :

| | | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $x_{21}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{34}$ | $x_{41}$ | $x_{42}$ | $x_{43}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2a) | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | 1 |
| | 2 | | | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 1 |
| | 3 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | 1 |
| | 4 | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| (2b) | 5 | | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 |
| | 6 | 1 | | | | | | | 1 | | | 1 | | 1 |
| | 7 | | 1 | | | 1 | | | | | | | 1 | 1 |

Tableau 2.1

Soit A la matrice associée à (2a) et (2b).

Nous voyons que cette matrice A possède les propriétés suivantes :

1) Chaque colonne de A contient au plus deux éléments non nuls égaux à 1.

2) On peut répartir toutes les lignes de A en deux sous-ensembles $I_1$ et $I_2$ disjoints tels que :

$I_1$ = ensemble des lignes provenant des équations du système (2 a)

$I_2$ = ensemble des lignes provenant des équations du système (2 b).

D'après $(C_1)$ et $(C_2)$ ci-dessus, pour toute colonne de A contenant exactement deux éléments non nuls, si l'un des éléments non nul est dans une ligne de l'ensemble $I_1$, alors l'autre élément non nul est dans une ligne de $I_2$ (tableau 2.1).

Donc d'après le théorème de Heller - Tompking - Gales, la matrice A est totalement unimodulaire.

Sous forme matricielle le système (2) s'écrit :



(2.2) $A_\gamma X_\gamma + A_{\bar\gamma} X_{\bar\gamma} = B$ ($\gamma$ ensemble des indices des variables de base).

Supposons $A_\gamma$ inversible. Comme nous venons de le voir, $A_\gamma$ est totalement unimodulaire. Donc le déterminant de $A_\gamma$ est égal à $\pm 1$.

D'après la formule calculant l'inverse d'une matrice on a :

$$A_\gamma^{-1} = [\, a'_{ij} \,]$$

$$a'_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\,|M_{ij}|}{\det A_\gamma}$$ avec $|M_{ij}|$ le mineur de la matrice $A_\gamma^t$, transposée de $A_\gamma$, associé à son élément de la ième ligne et de la jème colonne.

Comme dét $A_\gamma = \pm 1$ et $M_{ij} = 0$ ou $\pm 1$ (car $A_\gamma$ étant totalement unimodulaire, $A_\gamma^t$ est aussi totalement unimodulaire (cf. 2.2.1), $a'_{ij}$ est donc égal à 0 ou $\pm 1$.

Donc, $A_\gamma^{-1}$ est une matrice à éléments entiers.

La formule (2.2) donne :

$$A_\gamma^{-1}\,(A_\gamma X_\gamma + A_{\bar\gamma} X_{\bar\gamma} = B)$$

$$X_\gamma + A_\gamma^{-1} A_{\bar\gamma} X_{\bar\gamma} = A_\gamma^{-1} B.$$

Soit :

(2.3) $X_\gamma + A_{\bar\gamma}^{(1)} X_{\bar\gamma} = B^{(1)}$ avec $A_{\bar\gamma}^{(1)} = A_\gamma^{-1} A_{\bar\gamma}$ (2.3.1)

$B^{(1)} = A_\gamma^{-1}\, B$ (2.3.2).

$A_\gamma^{(1)}$ est la matrice hors base obtenue après avoir transformé la forme (2.2) en forme simpliciale.

De la formule (2.3.1), nous voyons que les éléments de $A_{\overline{Y}}^{(1)}$ sont des entiers.

On en déduit, dans le cas où la matrice $\| d_{ij} \|$ est non symétrique, que tous les éléments de la matrice associée aux variables hors base, sont des entiers après la première itération.

Il nous reste à résoudre ce même problème pour le cas "symétrique" :

nous ferons appel aux propriétés suivantes :

Dans tout ce qui suit G désigne un graphe ayant n sommets $(n \geq 2)$ et n arêtes, et A la matrice d'incidence aux arêtes, associée à G. (A est une matrice carrée).

## 2.4 PROPRIETE DE LA MATRICE A ASSOCIEE AU GRAPHE G

### 2.4.1 *THEOREME 1*

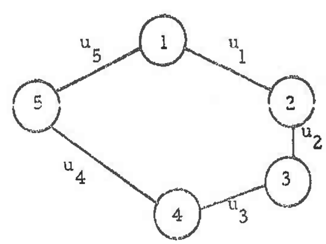
*Si G est un n-cycle, alors le déterminant de la matrice A est égal à :*

*0 si n est pair*

*$\pm 2$ si n est impair.*

Démonstration :

Après un réarrangement des lignes de la matrice A, ce qui peut changer le signe de déterminant de A (det A) mais pas sa valeur absolue, on peut supposer que ce n-cycle est $\mu = [1, 2, 3, \ldots, n, 1]$.






La matrice A sera :

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_{n-1} & u_n \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

Le déterminant associé ne comporte que deux éléments non nuls (tous les autres sont le produit de termes dont au moins un facteur est nul). Nous aurons donc :

$$\det A = (-1)^{\varepsilon(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)} (\underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \ldots\ldots \times 1}_{n \text{ fois}}) + (-1)^{\varepsilon(2\ 3\ 4\ \ldots\ n\ 1)} (\underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{n \text{ fois}})$$

avec $\varepsilon(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ représente le nombre d'inversions que présente une permutation $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$,

ou

$$\det A = 1 + (-1)^{n-1} \Longrightarrow \begin{cases} \text{si } n = 2p, \ (-1)^{2p-1} = -1 \text{ alors dét } A = 0 \\ \text{si } n = 2p+1, \ (-1)^{2p} = 1, \text{ alors dét } A = 2. \end{cases}$$

Comme, en général on a dû faire des réarrangements des lignes de A pour avoir la forme ci-dessus de la matrice A, alors dét $A = \pm 2$, si n est impair, et la proposition est ainsi démontrée.

### 2.4.2 Arbre - définitions et propriétés

Les définitions suivantes, concernant un arbre ([ 1 ], [ p. 146 ] ) sont équivalentes.

Soit H un graphe ayant n sommets ($n > 1$).

Définition 2.1

Un arbre est un graphe fini connexe sans cycle, ayant au moins deux sommets.

Définition 2.2

H est connexe et admet n-1 arêtes.

Définition 2.3

H est sans cycle ; si on ajoute une arête entre deux sommets non adjacents, on crée un cycle et un seul.

Définition 2.4

H est sans cycle et admet n-1 arêtes.

Définition 2.5

H est connexe ; si on supprime une arête quelconque, il n'est plus connexe.

Définition 2.6

Tout couple de sommets est relié par une chaîne et une seule.

On sait que ces six définitions sont équivalentes [ 1 ] .

Définition C1 [ 1 ]

Un sommet a étant donné, désignons par $C_a$ l'ensemble des sommets pouvant être reliés à a par une chaine, augmenté du sommet a ; une composante connexe est un sous-graphe engendré par un ensemble de la forme $C_a$.

*THEOREME C1* [ 1 ]

*Les différentes composantes du graphe $(X,\Gamma)$ constituent une partition de X ;*



*c'est-à-dire :*

*(1)* $C_a \neq \emptyset$

*(2)* $C_a \neq C_b$ *entraîne* $C_a \cap C_b = \emptyset$

*(3)* $\bigcup C_a = X.$

On a (1) puisque $a \in C_a$ ;

Pour vérifier (2), supposons $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, et montrons que $C_a = C_b$.

Soit $x \in C_a \cap C_b$, ce sommet x peut être relié par une chaîne à a et à b ; donc a peut être relié à b, et, par conséquent, $b \in C_a$. On a donc :

$$C_b \subset C_a$$

Comme on a aussi $C_a \subset C_b$ (par raison de symétrie), on a bien $C_a = C_b$. On a (3) car :

$$X \supset \bigcup_{a \in X} C_a \supset \bigcup_{a \in X} \{a\} = X$$

D'où

$$\bigcup C_a = X.$$

*THEOREME C2* [ 1 ]

*Un graphe est connexe, si et seulement si, il ne possède qu'une composante.*

Si le graphe admet deux composantes distinctes $C_a$ et $C_b$, il n'est pas connexe, a et b ne pouvant être reliés par une chaîne.

Si le graphe n'est pas connexe, il existe deux sommets a et b ne pouvant être reliés par aucune chaîne, et $C_a$ et $C_b$ sont deux composantes distinctes.

## 2.5 VALEUR DU DETERMINANT ASSOCIE A LA MATRICE A D'UN GRAPHE G

Pour calculer le déterminant de la matrice A associée au graphe G à n sommets et à n arêts nous commençons par traiter le cas où G possède des sommets isolés : les lignes de A correspondantes à ces sommets isolés sont identiquement nulles, d'où le déterminant de A est nul.

S'il n'y a pas de sommets isolés, désignons par $G_1, G_2, \ldots, G_p$ les composantes connnexes de G qui forment ainsi une partition de G d'après le théorème C1. Comme G ne possède pas de sommets isolés, les sous-graphes $G_i$ possèdent au moins deux sommets. D'après le théorème C2, ces sous-graphes sont connexes.

Parmi ces sous-graphes $G_i$, il y en a qui possèdent des cycles, et, d'autres n'en possèdent pas. Nous désignons par :

$$G' = \bigcup_{i \in I_1} G_i \quad \text{tel que chaque } G_i \text{ possède aucune cycle.}$$

$$G'' = \bigcup_{i \in I_2} G_i \quad \text{tel que chaque } G_i \text{ possède au moins un cycle.}$$

$I_1$ et $I_2$ vérifient $I_1 \cup I_2 = \{1, 2, \ldots, p\}$

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

Pour tout $i \in I_1$, $G_i$ est un arbre, car c'est un graphe fini, connexe, sans cycle et possède au moins deux sommets (définition 2.1).

Pour envisager tous les cas, suivant que les ensembles $I_1$ et $I_2$ sont vides ou non, nous dressons le tableau suivant :



| | $I_1$ | $I_2$ | Déterminant de A |
|---|---|---|---|
| 1 | $\emptyset$ | $\neq \emptyset$ | det A = 0 ou + $2^k$ |
| 2 | $\neq \emptyset$ | $\neq \emptyset$ | dét A = 0 |
| 3 | $\neq \emptyset$ | $\emptyset$ | Impossible |
| 4 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | Impossible |

a) Cas où $I_2 = \emptyset$

Pour ce cas tous les sous-graphe de G sont des arbres c'est-à-dire

$$G = \bigcup_{i \in I_1} G_i \qquad (1)$$

Or chaque arbre $G_i$ possède $n_i$ sommets et $n_{i-1}$ arêtes. Comme les $G_i$ forment une partition de G, on a donc

$$\underbrace{n}_{\substack{\text{nombre de} \\ \text{sommets} \\ \text{du graphe G}}} = \sum_{i \in I_1} n_i \qquad \text{d'après (1)}$$

$$\text{Nombre des arêtes de } G = \sum_{i \in I_1} (n_i - 1)$$

$$= n - |I_1|.$$

Or G possède n arêtes d'où

$$n = n - |I_1| \implies |I_1| = 0$$

ce qui est impossible car $I_1 \neq \emptyset$.

b) Cas où $I_1 \neq \emptyset$ et $I_2 \neq \emptyset$

$G = G' \cup G''$, c'est-à-dire que G est formé d'une part des arbres, et d'autre part des sous-graphes ayant au moins un cycle. Par exemple le graphe de G à la forme suivante (n = 13) :

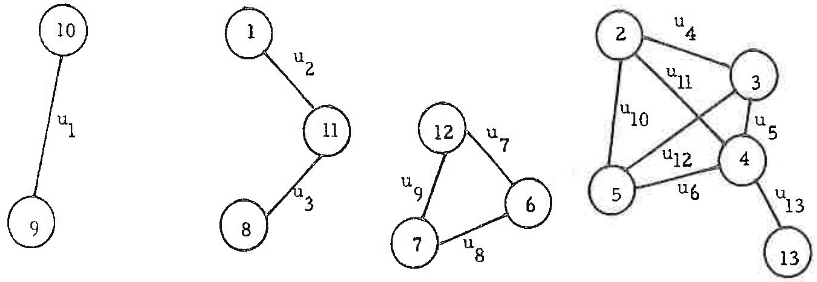



figure c

La matrice A associée est :
(les numéros de sommets du graphe sont indiqués dans les lignes de la matrice).

| | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_7$ | $u_8$ | $u_9$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_{10}$ | $u_{11}$ | $u_{12}$ | $u_{13}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | | | | | | | | |
| 11 | | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | 1 | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | 1 | | 1 | | | | | | | |
| 6 | | | | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | 1 | | | 1 | 1 | | |
| 3 | | | | | | | 1 | 1 | | | | 1 | |
| 4 | | | | | | | | 1 | 1 | | 1 | | 1 |
| 5 | | | | | | | | | 1 | 1 | | 1 | |
| 13 | | | | | | | | | | | | | 1 |

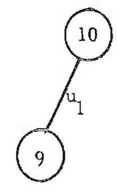
tableau - c



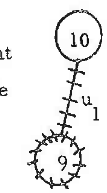
Nous remarquons, que pour chaque ligne de la matrice A (tableau - c) le nombre des éléments non nuls, c'est-à-dire égaux à 1 représente le nombre d'arêtes issues du sommet du graphe, situé dans cette ligne.

Donc pour un sommet isolé, les éléments de la ligne correspondante sont nuls, et le déterminant de A est par suite égal à zéro.

Pour les lignes correspondantes aux sommets pendants, il n'y a qu'un seul élément non nul, et pour calculer le déterminant de A nous développons d'abord par rapport aux éléments de telles lignes. Pour le graphe ce développement correspond à supprimer dans le graphe le sommet pendant, ainsi que l'arête ayant ce sommet pour l'extrémité, et si le sous-graphe est un arbre, on finit par obtenir un sommet isolé. Par exemple pour les sous-graphes de la figure c :




devient après développement par rapport aux éléments de la 1ère ligne de A




$\Rightarrow$


ce qui correspond dans le tableau - c à la 2ème ligne identiquement nulle

D'où lorsque le graphe G possède un sous-graphe qui est un arbre, le déterminant de la matrice associée à G est nul.

d) Cas où $I_1 = \emptyset$ et $I_2 \neq \emptyset$

Le graphe G est dans ce cas constitué uniquement par des sous-graphes ayant chacun au moins un cycle.

D'abord, nous faisons les rappels suivants, [ 1 ] , (chapitre 4) :

Définition :

Les graphes que nous voulons définir ici sont non-orientés : on parlera d'arêtes, et non pas d'arcs. Pour plus de généralité, nous allons considérer non pas un graphe, mais un multigraphe ; un multigraphe (X, U) est par définition le couple formé par un ensemble X de sommets, et par un ensemble U d'arêtes reliant entre eux certains couples de sommets ; mais contrairement aux graphes, il peut y avoir dans un multi-graphe plusieurs arêtes distinctes reliant le même couple de sommets.

Considérons un multi-graphe G, avec n sommets, m arêtes, p composantes connexes.

Posons :

$\rho(G) = n - p$

$\upsilon(G) = m - \rho(G) = m - n + p$

$\upsilon(G)$ est par définition le nombre cyclomatique du multigraphe G. Ses propriétés sont importantes.

*THEOREME C3*

*Soit G un multigraphe, et G' un multi-graphe obtenu à partir du précédent en joignant par une nouvelle arête deux sommets a et b de G ; si a et b sont confondus ou reliés par une chaîne de G, on a*

$$\rho(G') = \rho(G) \qquad \upsilon(G') = \upsilon(G) + 1$$

*dans le cas contraire, on a :*

$$\rho(G') = \rho(G) + 1, \ \upsilon(G') = \upsilon(G).$$

Corollaire 1

On a $\rho(G) \geq 0$, $\upsilon(G) \geq 0$.

*THEOREME C4*

*Le nombre cyclomatique $\upsilon(G)$ d'un multi-graphe G est égal au nombre maximum de cycles indépendants.*

Corollaire 2

Le graphe G n'a pas de cycles si et seulement si $\upsilon(G) = 0$.



Corollaire 3

Le graphe G admet un cycle unique si et seulement si $\upsilon(G) = 1$.

Ayant fait ces rappels, nous revenons à notre problème.

Le graphe G sur lequel nous travaillons est toujours le graphe à n sommets et à n arêtes. Nous sommes dans le cas où G ne possède pas de sous-graphes qui sont des arbres.

a) G est connexe

On a :

$n = n$ (nombre de sommets de G)

$m = n$ (nombre d'arêtes de G)

$p = 1$ car G est connexe

d'où

$\upsilon(G) = m - n + p$

$= n - n + 1$

$\upsilon(G) = 1$, et d'après le corollaire 3, G possède un cycle et un seul.

2.5.1 *THEOREME 2*

*Soit G un graphe à n sommets et à n arêtes. Si G est connexe, G possède un cycle et un seul.*

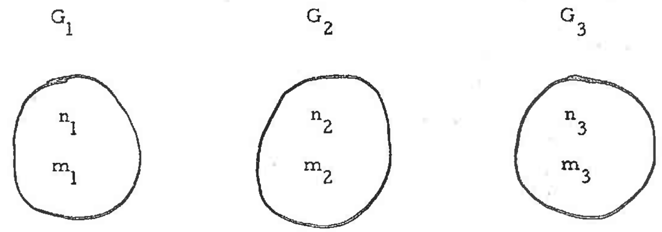
Nous pouvons ainsi en déduire que, le déterminant de la matrice A est égal à 0 ou $\pm 2$ (d'après le théorème 1).

b) G non connexe

Supposons par exemple, que G soit formé de trois sous-graphes disjoints $G_1$, $G_2$ et $G_3$, tels que chaque $G_i$ possède au moins un cycle.

Désignons par $n_i$ le nombre de sommets et par $m_i$ le nombre d'arêtes de graphe $G_i$.

Montrons que $m_i = n_i$




$$\upsilon(G_i) = m_i - n_i + p_i$$
$$= m_i - n_i + 1.$$

D'après le corollaire 1, $\upsilon(G_i) \geq 0$ entraîne $m_i - n_i + 1 \geq 0 \Rightarrow \underline{m_i \geq n_i - 1}$.

Si $m_i = n_i - 1$, $G_i$ est un arbre d'après la définition 3 : ce qui est impossible car $G_i$ possède au moins un cycle par hypothèse d'où $\underline{m_i \geq n_i}$.

On a donc :

$$(1) \quad \begin{cases} m_1 \geq n_1 \\ m_2 \geq n_2 \\ m_3 \geq n_3. \end{cases}$$

Or, puisque les $G_i$ sont disjoints et recouvrent G on a :

$n = n_1 + n_2 + n_3$ (le nombre de sommets de G est égal à la somme des nombres des sommets de $G_1$, de $G_2$ et de $G_3$).

$n = m_1 + m_2 + m_3$ (le nombre d'arêtes de G est égal à la somme des nombres des arêtes de $G_1$, de $G_2$ et de $G_3$) ;

d'où :

$$m_1 + m_2 + m_3 = n_1 + n_2 + n_3$$

ou $\quad (m_1 - n_1) + (m_2 - n_2) + (m_3 - n_3) = 0 \qquad (2)$

D'après (1) $\quad m_i - n_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3.$

Une somme de nombres positifs ou nuls ne peut être égale à zéro que si chaque terme de la somme est nul.



D'où $\quad m_i - n_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad$ d'après (2).

Les sous-graphes de G possèdent donc autant de sommets que d'arêtes.

Comme les sous-graphes $G_i$ possèdent autant de sommets que d'arêtes, alors les matrices $A_i$ associées à $G_i$ sont des matrices carrées. Puisque les sous-graphes $G_i$ forment une partition de G, ces sous-matrices carrées forment des blocs disjoints et on a :

$$\det A = \det A_1 \times \det A_2 \times \ldots \times \det A_q \, .$$

q étant le nombre total des sous-graphes de G.

Comme $A_i$ est une matrice carrée associée à un graphe $G_i$, qui possède un seul cycle alors d'après le théorème 1, le déterminant de $A_i$ est égal à 0 ou $\pm$ 2 ($\det A_i = 0$ ou $\pm 2$), (après le développement par rapport aux éléments des lignes ayant un seul élément non nul, si de telles lignes existent),

d'où $\quad \det A = 0$ ou $\pm 2^q \quad (q \geq 1)$.

En résumé, dans tous les cas, le déterminant de la matrice A associée au graphe G est égal à 0 ou $\pm 2^k$ $(k \geq 1)$. D'où :

### 2.5.2 *THEOREME 3*

*Soient G le graphe à n sommets et à n arêtes, et A la matrice d'incidence associée à G ; le déterminant de A est égal à 0 ou $\pm 2^k$, où k est entier positif.*

## 2.6 DETERMINANT D'UNE MATRICE D'INCIDENCE AUX ARETES DU GRAPHE G.

On sait qu'au graphe G ci-dessus, on peut associer la matrice A d'incidence aux arêtes. Et cette matrice A possède la propriété d'avoir à chaque colonne exactement deux éléments non nuls égaux à 1.

D'où on peut énoncer le théorème suivant équivalent au théorème 3.

*THEOREME 4*

*Soit A une matrice carrée à éléments 0 ou 1, telle que chaque colonne contienne exactement deux éléments non nuls égaux à 1. Alors le déterminant de A est égal à 0 ou $\pm 2^k$ (k entier $\geq 1$).*

## 2.7 PROPRIETE D'UN SYSTEME REDONDANT

Soit le système :

$$AX = B \qquad \text{(A matrice à n lignes)}$$

($S_1$) Ce système de contrainte est redondant, si tous les déterminants des matrices carrées d'ordre n extraites de la matrice A sont tous nuls.

En effet, si le système est redondant, il existe au moins une ligne i de la matrice A qui est la combinaison linéaire des autres lignes de A, donc toute matrice carrée d'ordre n extraite de A a son déterminant nul (car la ligne i de cette matrice est une combinaison linéaire des autres lignes aussi).

D'après l'assertion :

(P) $\Longrightarrow$ (Q) est équivalente à non (Q) $\Longrightarrow$ non (P), la propriété ($S_1$) ci-dessus est équivalente à :

($S_2$) s'il existe un déterminant de la matrice carrée extraite de A, non nul, le système (2) est non redondant.



## 2.8 TRANSFORMATION ELEMENTAIRE

Certaines manipulations effectuées sur les lignes ou les colonnes d'une matrice carrée, ont la propriété de ne pas changer le rang ou la valeur absolue du déterminant de cette matrice. Nous en citerons trois. Ce sont :

- . l'échange de deux lignes (colonnes)
- . multiplication d'une ligne (colonne) par -1
- . addition à une ligne (colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (colonnes) de la matrice.

## 2.9 CALCUL DU DETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE ASSOCIEE A UN N-CYCLE, PAR LES TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES.

*THEOREME 5*

*Soit A une matrice carrée d'incidence aux arêtes, associée à un n-cycle (donc chaque colonne de A contient exactement 2 éléments égaux à + 1).*

*Alors, après les transformations élémentaires, le déterminant de A possède l'une des deux formes suivantes :*

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & & & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & & & & \alpha_2 \\ 0 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \pm 2 \end{vmatrix} \quad \text{(b)}$$

*c'est-à-dire les (n-1) premières colonnes sont des colonnes unitaires et,* *les éléments de la nème colonne sont des entiers quelconques, excepté l'élément de la nème ligne qui vaut 0 ou $\pm$ 2.*

*Ce déterminant est de la forme (a) si n est pair, et de la forme (b) si n est impair.*

Démonstration :

Supposons que ce n-cycle, soit le n-cycle (1, 2, 3, ..., n, 1) (dans le cas contraire, il suffit de réarranger les lignes de la matrice A, ce qui correspond à changer le signe du déterminant de A, par exemple si c'est un n-cycle (1, 3, 2, 4, ..., n, 1), il suffit d'échanger les lignes 2 et 3).

D'où :

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{matrix} \right\|$$

Désignons par :

$L_i$ le ième vecteur ligne de la matrice A

$a_{ij}$ un élément de la ième ligne et de la jème colonne de A

La matrice A possède les caractéristiques suivantes :

1) les éléments de la diagonale principale valent + 1 ;

2) les éléments au-dessus de la diagonale principale sont nuls, exceptés l'élément $a_{1n}$ qui vaut 1.



Ainsi, pour diagonaliser le déterminant de A, nous appliquons la formule suivante :

$$\boxed{L'_i = L_i - L'_{i-1}} \qquad (2.9.a)$$

avec $L'_i$ nouvelle ligne i de A

i prenant successivement les valeurs 2, 3, 4, ..., n, et $L'_1 = L_1$.

Calcul de $L'_n$ :

(2) $L'_2 = L_2 - L'_1$

(3) $L'_3 = L_3 - L'_2$

(4) $L'_4 = L_4 - L'_3$

$\vdots$

(n) $L'_n = L_n - L'_{n-1}$.

Exprimons $L'_i$ en fonction de $L_1, L_2, \ldots, L_i$.

On a :

(2) et (3) $\Longrightarrow$ $L'_3 = L_3 - L_2 + L_1$

(4) $\Longrightarrow$ $L'_4 = L_4 - L_3 + L_2 - L_1$.

Soit

$$\boxed{L'_p = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \, L_{p-i}} \qquad (2.9.b)$$

Démontrons par récurrence cette formule (2.9.b). Elle est vraie pour p = 1.

Supposons qu'elle le soit jusqu'au rang p et démontrons qu'elle le soit aussi pour le rang p + 1.

On a donc :

$$L'_p = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \, L_{p-i} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$

or

$$L'_{p+1} = L_{p+1} - L'_p \qquad \text{d'après (2.9.a)}$$

d'où :

$$L'_{p+1} = L_{p+1} - \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \, L_{p-i}$$

$$= L_{p+1} - [\, L_p - L_{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} L_1 \,]$$

$$= L_{p+1} - L_p + L_{p-1} + \ldots + (-1)^p L_1$$

$$= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \, L_{p+1-i} \quad \text{qui a la même forme que (2.9.b).}$$

Donc la formule (2.12.b) est vraie $\forall$ p.

Pour $p = n$ on a :

$$\boxed{L'_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \, L_{n-i}} \qquad (2.9.c)$$

D'où si n est pair soit $n = 2p$

on a :

$$L'_n = \sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i \, L_{n-i}$$

$$L'_n = L_n - L_{n-1} + \ldots + L_2 - L_1 \qquad (2.9.d)$$

D'où, si on désigne par $a'_{ij}$ le nouvel élément de $a_{ij}$ on a :

$a'_{nn} = 0$ car les coefficients de $L_n$ et de $L_1$ sont opposés dans (2.9.d) et pour la nème colonne de la matrice A, seules ces deux lignes $L_1$ et $L_n$ possèdent des éléments non nuls égaux à +1, et la forme (a) du théorème est ainsi démontrée.

Si n est impair soit $n = 2p + 1$, on a d'après (2.9.c) :



$$L'_n = L_n - L_{n-1} + L_{n-2} + \ldots - L_2 + L_1$$

Comme les coefficients de $L_n$ et de $L_1$ valent +1, alors $a'_{nn} = 2$, et la forme (b) du théorème est démontrée aussi.

Remarque :

Si nous calculons le déterminant de la matrice A à partir des formes (a) ou (b) du théorème 5, nous aurons :

$$\det A = \begin{cases} 0 & \text{si n est pair} \\ \pm 2 & \text{si n est impair} \end{cases}$$

Nous retrouvons ainsi les résultats du théorème 1.

## 2.10 METHODE DE PIVOT MAXIMUM [ 8 ]

Tant que la valeur du pivot est égale à $\pm 1$, la méthode de pivot maximum utilise les transformations élémentaires pour faire la résolution du système d'équations AX = B. Donc tant que le pivot est égal à $\pm 1$, la valeur absolue du déterminant de A ne change pas.

## 2.11 PROPRIETE DES ELEMENTS D'UNE MATRICE A APRES LES TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES

Soit A une matrice à éléments 0 ou 1 de dimension (n, m) (n lignes et m colonnes) avec $m \geq n$, telle que chaque colonne de A contienne exactement deux éléments non nuls. D'après le théorème 4, on peut en déduire que :

(H) le déterminant de toute matrice carrée de dimension (n, n) extraite de A est égal soit à 0, soit à $\pm 2^k$ $(k \geq 1)$.

Nous désignons par $A^1, A^2, \ldots, A^m$ les différentes matrices colonnes de A.

Soit B une matrice carrée (n, n) extraite de A, telle que le déterminant de B soit égal à + 2. Nous supposons que B soit formée des n premières colonnes de A (dans le cas contraire, il suffit d'échanger les colonnes de A) et C la matrice formée par les (m - n) dernières colonnes restantes (figure 2.10.1) :

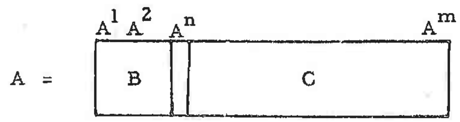



figure 2.10.1

Comme dét B = 2, alors par des transformations élémentaires appliquées sur la matrice B et par la méthode de pivot maximum, de pivot égal à 1, appliquée à la matrice A, c'est-à-dire à l'ensemble [ B, C ], on peut transformer la matrice B sous la forme suivante (figure 2.10.2) :

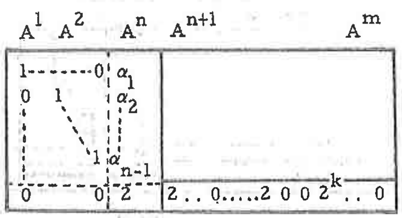



figure 2.10.2

les n-1 premières colonnes de B sont des colonnes d'unité et la nème colonne a des éléments quelconques, sauf l'élément de la nème ligne qui vaut 2, d'après le théorème 3.

Quand la matrice B, a la forme de la figure (2.10.2), alors tous les éléments de la dernière ligne de C sont formés uniquement par des



nombres 0 ou $\pm 2^k$ $(k \geq 1)$, c'est-à-dire, il n'y a pas d'éléments $\pm 1$ dans cette dernière ligne de C.

En effet, s'il existe un élément + 1 par exemple dans une colonne $A^p$ $(p > n)$, alors en considérant le déterminant de la matrice B' formée par les colonnes $A^1, A^2, A^3, \ldots, A^{n-1}, A^p$, on a det B' = 1, ce qui est contraire à l'hypothèse (H) page 63. D'où :

<u>*THEOREME 6*</u>

*Soit A une matrice de dimension (n, m) $(m \geq n)$, à éléments 0 ou 1, telle que chaque colonne de A contienne exactement deux éléments + 1. Soit B une matrice carrée (n, n) formée par les n premières colonnes de A telle que det B = 2, et C la matrice formée par les (m - n) dernières colonnes restantes.*

*Alors, en faisant subir à B des transformations élémentaires, on obtient les résultats suivants :*

*1°) les (n - 1) premières colonnes de B sont des colonnes d'unité*
*2°) l'élément $b_{nn} = 2$ avec $B = \| b_{ij} \|$*
*3°) $c_{np} = 0$ ou $\pm 2^k (k \geq 1)$ $\quad \forall p \in \{ n+1, n+2, \ldots, m \}$*
*en posant $C = \| c_{ij} \|$ .*

Ainsi, par ce théorème nous pouvons conclure, que les éléments de la matrice C sont encore des entiers quand on divise tous les éléments de la nème ligne de A par 2, pour que la matrice B devienne la matrice d'unité d'ordre n, et par suite les éléments de la matrice hors base dans le cas symétrique sont des entiers, après la 1ère itération, car la matrice [ B, C ] n'est autre que la matrice associée aux contraintes (I) du problème (I) défini au paragraphe 1.2, avec $B = A_\gamma$ et $C = A_{\bar{\gamma}}$.

<u>Remarque</u> :

A la phase d'initialisation, pour déterminer une solution de départ, nous avons considéré le système :

$$(1) \qquad \sum_{j<j=K} x_{ij} + \sum_{i>j=K} x_{ij} = 2 \quad (K = 1, 2, \ldots, n) \text{ si n est impair,}$$

et le système :

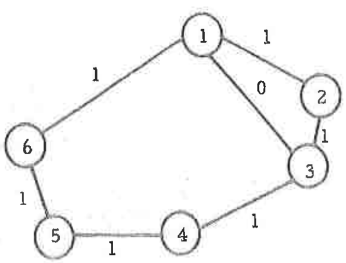
$$(2) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j<j=K} x_{ij} + \sum_{i>j=K} x_{ij} = 2 \quad (K = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{si n est pair} \\ x_{12} \leq 1 \qquad \text{ou} \qquad x_{12} + y_e = 1. \end{cases}$$

Nous avons pris $\gamma = \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n, 1)\}$ pour le système (1) et $\gamma = \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n, 1), (1, 3)\}$ pour le système (2).

Soient (1') et (2') les systèmes déduits de (1) et (2) en faisant égal à zéro les valeurs des variables hors bases.

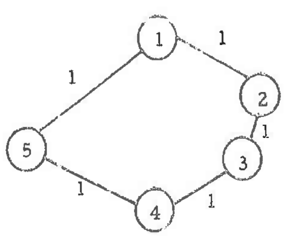
Comme le déterminant de $A_\gamma$ est différent de zéro (cf. 1 . 7.a), les systèmes (1') et (2') sont des systèmes de CRAMER ; ils admettent donc chacun une solution unique qui est nécessairement (cf. contrainte $D_2$ du paragraphe 1. 7) :

- pour n pair (n = 6)




$$\begin{cases} x_{12} = 1 \\ x_{23} = 1 \\ x_{13} = 0 \\ x_{34} = 1 \\ x_{45} = 1 \\ x_{56} = 1 \\ x_{61} = 1 \end{cases}$$

- pour n impair (n = 5)




$$\begin{cases} x_{12} = 1 \\ x_{23} = 1 \\ x_{34} = 1 \\ x_{45} = 1 \\ x_{51} = 1. \end{cases}$$



On en déduit donc que la solution de départ dans les deux cas (n pair ou n impair) est une solution entière.

D'où finalement nous avons les résultats suivants :

1. La matrice hors base après la phase d'initialisation est à éléments entiers.

2. La solution de départ est une solution entière correspondant à un n-cycle.

------------

# CHAPITRE III

## DESCRIPTION DETAILLEE DE DEUX EXEMPLES

## 3.1 TRAITEMENT D'UN CAS SYMETRIQUE

Il s'agit du problème de six villes traité dans [ 3 ] ; le tableau $\|C\|$ des distances est :

$\|C\| =$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | 4 | | | | | |
| 3 | 3 | 2 | | | | |
| 4 | 7 | 5 | 5 | | | |
| 5 | 7 | 7 | 6 | 3 | | |
| 6 | 6 | 7 | 6 | 5 | 3 | |

tableau 3.1.1 des distances

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | $y_1$ | | | | | |
| 3 | $y_2$ | $y_3$ | | | | |
| 4 | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | | | |
| 5 | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{10}$ | | |
| 6 | $y_{11}$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{15}$ | |

tableau 3.1.2 des variables principales

a) Contraintes :

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_4 + y_7 + y_{11} = 2 \\ y_1 + y_3 + y_5 + y_8 + y_{12} = 2 \\ y_2 + y_3 + y_6 + y_9 + y_{13} = 2 \\ y_4 + y_5 + y_6 + y_{10} + y_{14} = 2 \\ y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{15} = 2 \\ y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} = 2 \end{cases}$$

Comme n est pair, ajoutons une contrainte

$$(2)\qquad y_1 + y_{16} = 1$$

Pour la phase d'initialisation, définissons

$$\gamma = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 10,\ 11,\ 15\}$$

$$\bar{\gamma} = \{4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16\}$$

b) A partir des équations de (1) et de (2), on exprime les variables de base en fonction des variables hors base, et on a le tableau suivant :

| | $y_4$ | $y_5$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{16}$ | $\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | | | | | | | | | 1 | 1 |
| $y_2$ | | -1 | 1 | | 1 | -1 | | -1 | | 0 |
| $y_3$ | | 1 | | 1 | | 1 | | | -1 | 1 |
| $y_6$ | | | -1 | -1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y_{10}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | | -1 | | -1 | 1 |
| $y_{15}$ | -1 | -1 | | | 1 | | 1 | | 1 | 1 |
| $y_{11}$ | 1 | 1 | | | -1 | 1 | | 1 | -1 | 1 |

tableau 3.1.3

Ce tableau signifie par exemple (2ème ligne) :

$$y_2 - y_5 + y_7 + y_9 - y_{12} - y_{14} = 0.$$

Ajoutons à ce tableau les contraintes du type $0 \leq y_i \leq 1$, $y_i$ variable principale de base.

Comme les variables principales de la base sont $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_6$, $y_{10}$, $y_{11}$, $y_{15}$ et comme une contrainte de ce type est déjà considérée pour $y_1$, alors il ne reste qu'à ajouter les contraintes suivantes :

$$0 \leq y_2 \leq 1$$
$$0 \leq y_3 \leq 1$$
$$0 \leq y_6 \leq 1$$
$$0 \leq y_{10} \leq 1$$
$$0 \leq y_{11} \leq 1$$
$$0 \leq y_{15} \leq 1.$$

Nous désignerons par M le nombre total des variables principales



($M = \frac{n(n-1)}{2}$ dans le cas de symétrie). Dans la suite la variable d'écart associée à une contrainte $0 \leq y_p \leq 1$ sera désignée par $y_{p+M}$, c'est-à-dire

$$0 \leq y_p \leq 1 \iff \begin{cases} y_p + y_{p+M} = 1 \\ y_p \geq 0 \\ y_{p+M} \geq 0 \end{cases}$$

et la variable d'écart associée à une contrainte de sous-cycle sera désignée par $y_{2M+i}$, i étant le nombre total de contraintes de sous-cycle considérées jusqu'à présent.

D'où les équations des contraintes ajoutées sont :

$$y_2 + y_{17} = 1 \qquad \left(\text{ici } M = \frac{6 \times 5}{2} = 15\right)$$
$$y_3 + y_{18} = 1$$
$$y_6 + y_{21} = 1$$
$$y_{10} + y_{25} = 1$$
$$y_{11} + y_{26} = 1$$
$$y_{15} + y_{30} = 1.$$

Le tableau après la phase d'initialisation est :

(Nous désignerons par Vf la valeur de la fonction objectif) ;

| | $y_4$ | $y_5$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{16}$ | $\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | | | | | | | | | 1 | 1 |
| $y_2$ | | -1 | 1 | | 1 | -1 | | -1 | | 0 |
| $y_3$ | | 1 | | 1 | | 1 | | | -1 | 1 |
| $y_6$ | | | -1 | -1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y_{10}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | | -1 | | -1 | 1 |
| $y_{15}$ | -1 | -1 | | | 1 | | 1 | | 1 | 1 |
| $y_{11}$ | 1 | 1 | | | -1 | 1 | | 1 | -1 | 1 |
| $y_{17}$ | | 1 | -1 | | -1 | 1 | | 1 | | 1 |
| $y_{18}$ | | -1 | | -1 | | -1 | | | 1 | 0 |
| $y_{21}$ | | | 1 | 1 | | | -1 | -1 | -1 | 0 |
| $y_{25}$ | -1 | -1 | -1 | -1 | | | 1 | | 1 | 0 |
| $y_{26}$ | -1 | -1 | | | 1 | -1 | | -1 | 1 | 0 |
| $y_{30}$ | 1 | 1 | | | -1 | | -1 | | -1 | 0 |

$V_f = 23$

tableau 3.1.4

Les dernières lignes de ce tableau 3.1.4, sont obtenues à partir des résultats du paragraphe 1.4 (par exemple dans la ligne $y_{17}$, les éléments situés sur les colonnes correspondant aux variables hors base sont opposés aux éléments des mêmes colonnes de la ligne $y_2$ : $y_2 + y_{17} = 1$).

c) On calcule

$$\Delta_j = \sum_{i \in L} c_i a_{ij} - c_j \qquad \text{(L ensemble des lignes de la matrice A)}$$

Les valeurs de $c_j$ et de $\Delta_j$ sont placées dans les 2 dernières lignes du tableau.

On a ainsi :



| | $y_4$ | $y_5$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{16}$ | $\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | | | | | | | | | 1 | 1 |
| $y_2$ | | -1 | 1 | | 1 | -1 | | -1 | | 0 |
| $y_3$ | | 1 | | 1 | | 1 | | | -1 | 1 |
| $y_6$ | | | -1 | -1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y_{10}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | | -1 | | -1 | 1 |
| $y_{15}$ | -1 | -1 | | | 1 | | 1 | | 1 | 1 |
| $y_{11}$ | 1 | 1 | | | -1 | 1 | | 1 | -1 | 1 |
| $y_{17}$ | | 1 | -1 | | -1 | 1 | | 1 | | 1 |
| $y_{18}$ | | -1 | | -1 | | -1 | | | 1 | 0 |
| $y_{21}$ | | | 1 | 1 | | | -1 | -1 | -1 | 0 |
| $y_{25}$ | -1 | -1 | -1 | -1 | | | 1 | | 1 | 0 |
| $y_{26}$ | -1 | -1 | | | 1 | -1 | | -1 | 1 | 0 |
| $y_{30}$ | 1 | 1 | | | -1 | | -1 | | -1 | 0 |
| $c_j$ | 7 | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 6 | 5 | 0 | |
| $\Delta_j$ | -1 | 0 | -6 | -7 | -6 | -2 | -1 | 3 | 1 | |

↑

$V_f = 23$

tableau 3.1.5

d) Le plus grand $\Delta_j > 0$ est celui de la 8ème colonne du tableau ($\Delta_{14} = 3$). D'où $y_{14}$ entre dans la base.

$y_{14}$ variable principale, d'où contrainte

$y_{14} + y_{29} = 1$.

On calcule $\theta = \inf\limits_{\substack{i \in L \\ a_{ij} > 0}} \left( \dfrac{\overline{Y}_i}{a_{ij}} \right)$

On trouve $\theta = 1$.

On calcule $Y = \overline{Y} - \theta A^j$ (cf. 1.3.3).

On a d'après le tableau 3.1.5, en utilisant la colonne de $y_{14}$, les résultats suivants :

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = \theta$$
$$y_3 = 1$$
$$y_6 = 1 - \theta$$
$$y_{10} = 1$$
$$y_{15} = 1$$
$$y_{11} = 1 - \theta$$

et on pose $y_{14} = \theta.$

Comme ici, $\theta$ prend la seule valeur 1, alors en faisant $\theta = 1$, on a :

$$(d_1) \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 1 \\ y_6 = 0 \\ y_{10} = 1 \\ y_{15} = 1 \\ y_{11} = 0 \\ y_{14} = 1 \end{cases}$$

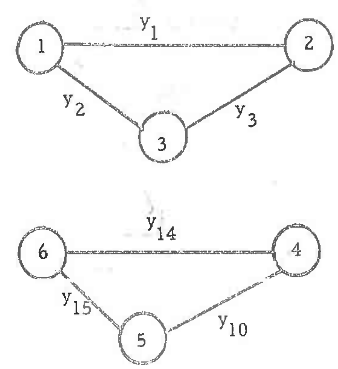
e) Comme ces nouvelles valeurs de y sont des entiers, on cherche si elles donnent naissance à des sous-cycles. Pour cela, il faut convertir les variables à un seul indice $y_i$, aux variables à double indice $x_{k\ell}$. Le tableau de correspondance est le suivant :



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | $\frac{x_{21}}{y_1}$ | | | | | |
| 3 | $\frac{x_{31}}{y_2}$ | $\frac{x_{32}}{y_3}$ | | | | |
| 4 | $\frac{x_{41}}{y_4}$ | $\frac{x_{42}}{y_5}$ | $\frac{x_{43}}{y_6}$ | | | |
| 5 | $\frac{x_{51}}{y_7}$ | $\frac{x_{52}}{y_8}$ | $\frac{x_{53}}{y_9}$ | $\frac{x_{54}}{y_{10}}$ | | |
| 6 | $\frac{x_{61}}{y_{11}}$ | $\frac{x_{62}}{y_{12}}$ | $\frac{x_{63}}{y_{13}}$ | $\frac{x_{64}}{y_{14}}$ | $\frac{x_{65}}{y_{15}}$ | |

<u>tableau 3.1.6</u>

D'où le graphe associé aux égalités $(d_1)$ est :




Ainsi, lorsque $y_{14}$ entre dans la base, il apparait deux sous-cycles : (1, 2, 3, 1) et (4, 5, 6, 4). Considérons seulement l'un des deux sous-cycles (car l'existence de l'un entraîne l'existence de l'autre, d'après les contraintes du type $\sum_{j < i = K} x_{ij} + \sum_{i > j = K} x_{ij} = 2$). Par exemple, nous prendrons le sous-cycle (4, 5, 6, 4) qui contient l'arête associée à la variable entrante $y_{14}$. L'équation de contrainte correspondante est donc :

$$y_{14} + y_{10} + y_{15} \leq 2$$

Soit

$$y_{14} + y_{10} + y_{15} + y_{31} = 2 .$$

Ainsi, les contraintes qu'il faut ajouter avant de chercher la variable sortante, sont :

$$\begin{cases} y_{14} + y_{29} = 1 \\ y_{14} + y_{10} + y_{15} + y_{31} = 2. \end{cases}$$

Et le tableau du simplexe devient, en utilisant les résultats du paragraphe 1.4



| | $y_4$ | $y_5$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{16}$ | $\bar{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | | | | | | | | | 1 | 1 |
| $y_2$ | | -1 | 1 | | 1 | -1 | | -1 | | 0 |
| $y_3$ | | 1 | | 1 | | 1 | | | -1 | 1 |
| $y_6$ | | | -1 | -1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $y_{10}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | | -1 | | -1 | 1 |
| $y_{15}$ | -1 | -1 | | | 1 | | 1 | | 1 | 1 |
| $y_{11}$ | 1 | 1 | | | -1 | 1 | . | 1 | -1 | 1 |
| $y_{17}$ | | 1 | -1 | | -1 | 1 | | 1 | | 1 |
| $y_{18}$ | | -1 | | -1 | | -1 | | | 1 | 0 |
| $y_{21}$ | | | 1 | 1 | | | -1 | -1 | -1 | 0 |
| $y_{25}$ | -1 | -1 | -1 | -1 | | | 1 | | 1 | 0 |
| $y_{26}$ | -1 | -1 | | | 1 | -1 | | -1 | 1 | 0 |
| $y_{30}$ | 1 | 1 | | | -1 | | -1 | | -1 | 0 |
| $y_{29}$ | | | | | | | | 1 | | 1 |
| → $y_{31}$ | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

tableau 3.1.7

f) En utilisant le critère de la variable sortante du simplexe, nous voyons que c'est la variable $y_{31}$ qui doit sortir de la base.

g) On fait des transformations élémentaires pour rendre nuls tous les éléments de la colonne $y_{14}$, excepté le pivot.

On échange les indices $y_{31}$ et $y_{14}$.

On définit de nouveau les éléments de cette colonne $y_{14}$ de la façon suivante :

Si on désigne par j le numéro de la colonne de la matrice, correspondant à la variable entrante, et par i le numéro de la ligne de la matrice, correspondant à la variable sortante, alors :

- On remplace $a_{kj}$ par $-a_{kj}/a_{ij}$ $\forall k \in L$ ensemble des lignes de la matrice A.

- On remplace $a_{ij}$ par $1/a_{ij}$.

Après ce calcul, on obtient le tableau suivant pour la 2ème itération.

A partir de la 2ème itération, le mécanisme se répète et on obtient les tableaux successifs suivants :

2ème itération :

| | $y_4$ | $y_5$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{31}$ | $y_{16}$ | $\bar{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $y_2$ | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $y_3$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| $y_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| $y_{10}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 |
| $y_{15}$ | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $y_{11}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 |
| $y_{17}$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $y_{18}$ | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $y_{21}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 |
| $y_{25}$ | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $y_{26}$ | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $y_{30}$ | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 |
| $y_{29}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $y_{14}$ | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $c_j$ | 7 | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 6 | 0 | 0 | |
| $\Delta_j$ | -1 | 0 | -3 | -4 | -3 | -2 | -1 | -3 | 1 | |

Vf = 23

tableau 3.1.8



$y_{16}$ entre dans la base. Comme $\theta = 0$, les valeurs des variables de base ne changent pas, donc pas de contraintes de sous-cycle, de plus il n'y a pas de contrainte du type $0 \leq x_{ij} \leq 1$, car $y_{16}$ est une variable d'écart. D'où nous déterminons directement la variable sortante, et nous prendrons $y_{18}$.

3ème itération

| | $y_4$ | $y_5$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{31}$ | $y_{18}$ | $\bar{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| $y_2$ | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $y_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $y_6$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| $y_{10}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 |
| $y_{15}$ | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| $y_{11}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | ·1 | 1 |
| $y_{17}$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $y_{16}$ | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $y_{21}$ | 0 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| $y_{25}$ | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $y_{26}$ | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| $y_{30}$ | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $y_{29}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $y_{14}$ | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $y_{20}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $c_j$ | 7 | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 6 | 0 | 0 | |
| $\Delta_j$ | -1 | 1 | -3 | -3 | -3 | -1 | -1 | -3 | -1 | |

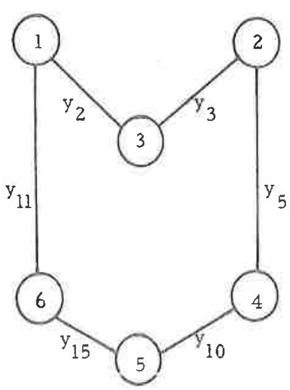
Vf = 23

tableau 3.1.9

$y_5$ entre dans la base. Comme $\theta$ vaut 1, on calcule les nouvelles valeurs des variables de base, et on trouve pour $\theta = 1$ :

$y_1 = 0$
$y_2 = 1$
$y_3 = 1$
$y_6 = 0$
$y_{10} = 1$
$y_{15} = 1$
$y_{11} = 1$
$y_{17} = 0$
$y_{16} = 1$
$y_{21} = 1$
$y_{25} = 0$
$y_{26} = 0$
$y_{30} = 0$
$y_{29} = 1$
$y_{14} = 0$ et, on pose $y_5 = 1$.

Et le graphe associé est :




Comme ce graphe est un n-cycle, alors il n'y a pas de contrainte de sous-cycle. Seule la condition $0 \leq y_5 \leq 1$, c'est-à-dire $y_5 + y_{20} = 1$ doit être ajoutée dans le tableau 3.1.9 avant de déterminer la variable sortante, et nous prendrons $y_6$ pour variable sortante.



4ème itération

| | $y_4$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{31}$ | $y_{18}$ | $\vec{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| $y_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| $y_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $y_5$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| $y_{10}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 |
| $y_{15}$ | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| $y_{11}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| $y_{17}$ | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $y_{16}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 1 |
| $y_{21}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{25}$ | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $y_{26}$ | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 |
| $y_{30}$ | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $y_{29}$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $y_{14}$ | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $y_{20}$ | 0 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| $c_j$ | 7 | 5 | 7 | 7 | 6 | 7 | 6 | 0 | 0 | |
| $\Delta_j$ | -1 | -1 | -3 | -4 | -4 | -2 | -2 | -2 | 0 | |

$Vf = 22$

Tableau 3.1.10

Tous les $\Delta_j$ sont négatifs ou nuls. On arrive donc à l'optimum. D'après les valeurs des variables de base contenues dans la colonne $\vec{Y}$ le n-cycle minimal est : (1, 3, 2, 4, 5, 6, 1). Sa longueur est 22.

## 3.2 TRAITEMENT D'UN CAS NON SYMETRIQUE

Nous prenons n = 5, la matrice des distances est :

$\|C\|$ =

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 5 | 2 | 7 | 9 |
| 2 | 3 | | 8 | 6 | 2 |
| 3 | 7 | 3 | | 9 | 9 |
| 4 | 8 | 8 | 11 | | 5 |
| 5 | 3 | 6 | 4 | 6 | |

tableau 3.2.1.

Le tableau des correspondances entre les variables à un seul indice et celles à double indice est :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $y_1$ / $x_{12}$ | $y_2$ / $x_{13}$ | $y_3$ / $x_{14}$ | $y_4$ / $x_{15}$ |
| 2 | $y_5$ / $x_{21}$ | | $y_6$ / $x_{23}$ | $y_7$ / $x_{24}$ | $y_8$ / $x_{25}$ |
| 3 | $y_9$ / $x_{31}$ | $y_{10}$ / $x_{32}$ | | $y_{11}$ / $x_{34}$ | $y_{12}$ / $x_{35}$ |
| 4 | $y_{13}$ / $x_{41}$ | $y_{14}$ / $x_{42}$ | $y_{15}$ / $x_{43}$ | | $y_{16}$ / $x_{45}$ |
| 5 | $y_{17}$ / $x_{51}$ | $y_{18}$ / $x_{52}$ | $y_{19}$ / $x_{53}$ | $y_{20}$ / $x_{54}$ | |

tableau 3.2.2



D'après le paragraphe 1.6, le problème revient à trouver, pour la phase d'initialisation,

$$[\text{ Min }]\ f = \sum_{i=1}^{20} c_i\, y_i$$

sous les contraintes :

$$(1)\quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ y_5 + y_6 + y_7 + y_8 = 1 \\ y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} = 1 \\ y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} = 1 \\ y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} = 1 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} y_5 + y_9 + y_{13} + y_{17} = 1 \\ y_1 + y_{10} + y_{14} + y_{18} = 1 \\ y_2 + y_6 + y_{15} + y_{19} = 1 \\ y_3 + y_7 + y_{11} + y_{20} = 1 \end{cases}$$

$$(3)\qquad y_i \geq 0 \qquad i \in \{1, 2, 3, \ldots, 20\}.$$

Sous forme de tableau, (1) et (2) donnent :

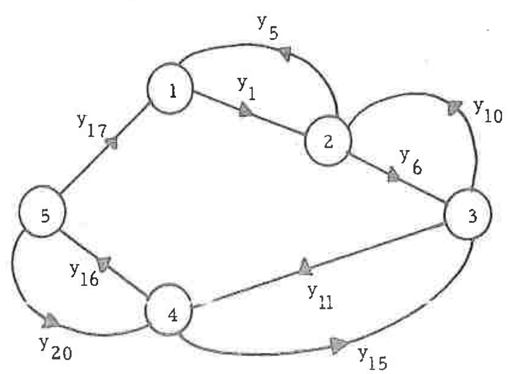
| | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{10}$ | $y_{11}$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{15}$ | $y_{16}$ | $y_{17}$ | $y_{18}$ | $y_{19}$ | $y_{20}$ | $\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 2 | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 3 | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 4 | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | 1 |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 |
| 7 | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | 1 |
| 8 | | 1 | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | 1 | | 1 |
| 9 | | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | 1 |

tableau 3.2.3

Soit une écriture matricielle $AY = \overline{Y}$.

Prenons : $\gamma = \{1, 6, 11, 16, 17, 5, 10, 15, 20\}$

$\overline{\gamma} = \{2, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 18, 19\}$




En réordonnant le tableau 3.2.3 dans l'ordre des indices de $\gamma$, et puis de $\overline{\gamma}$, et en appliquant la méthode de pivot, on obtient le tableau suivant :



| | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{18}$ | $y_{19}$ | $\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| $y_6$ | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 |
| $y_{11}$ | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | -1 | -1 | | 1 |
| $y_{16}$ | | | 1 | | 1 | | 1 | | | | | 1 |
| $y_{17}$ | 1 | | 1 | -1 | | 1 | 1 | | -1 | | 1 | 1 |
| $y_5$ | -1 | | -1 | 1 | | | -1 | 1 | 1 | | -1 | 0 |
| $y_{10}$ | -1 | -1 | -1 | | | | | | 1 | 1 | | 0 |
| $y_{15}$ | | | -1 | | -1 | | -1 | 1 | 1 | | | 0 |
| $y_{20}$ | -1 | | -1 | 1 | | -1 | -1 | | 1 | 1 | | 0 |
| → $y_{21}$ | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $c_j$ | 2 | 7 | 9 | 6 | 2 | 7 | 9 | 8 | 8 | 6 | 4 | |
| $\Delta_j$ | 11 | 4 | -2 | 0 | 0 | -1 | -4 | -2 | -5 | -6 | 4 | |
| | ↑ | | | | | | | | | | | |

Vf = 30

tableau 3.2.4

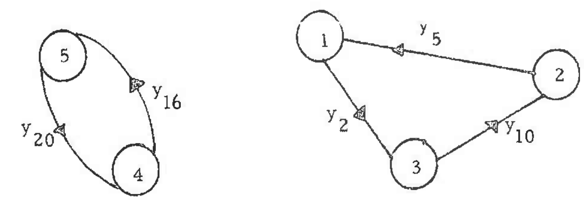
$y_2$ entre dans la base, $\theta = 1$. Les nouvelles valeurs des variables de base sont :

$y_1 = 0$ ; $y_6 = 0$ ; $y_{11} = 0$ ; $y_{16} = 1$

$y_{17} = 0$ ; $y_5 = 1$ ; $y_{10} = 1$ ; $y_{15} = 0$

$y_{20} = 1$ et on prend $y_2 = 1$.

Le graphe associé est alors :



| | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{18}$ | $y_{19}$ | $\bar{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| $y_6$ | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 |
| $y_{11}$ | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | -1 | -1 | | 1 |
| $y_{16}$ | | | 1 | | 1 | | 1 | | | | | 1 |
| $y_{17}$ | 1 | | 1 | -1 | | 1 | 1 | | -1 | | 1 | 1 |
| $y_5$ | -1 | | -1 | 1 | | | -1 | 1 | 1 | | -1 | 0 |
| $y_{10}$ | -1 | -1 | -1 | | | | | | 1 | 1 | | 0 |
| $y_{15}$ | | | -1 | | -1 | | -1 | 1 | 1 | | | 0 |
| $y_{20}$ | -1 | | -1 | 1 | | -1 | -1 | | 1 | 1 | | 0 |
| → $y_{21}$ | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $c_j$ | 2 | 7 | 9 | 6 | 2 | 7 | 9 | 8 | 8 | 6 | 4 | |
| $\Delta_j$ | 11 | 4 | -2 | 0 | 0 | -1 | -4 | -2 | -5 | -6 | 4 | |

Vf = 30

↑

tableau 3.2.4

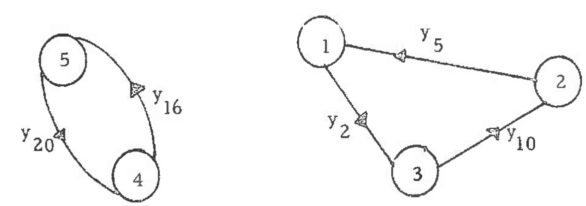
$y_2$ entre dans la base, $\theta = 1$. Les nouvelles valeurs des variables de base sont :

$$y_1 = 0\ ;\quad y_6 = 0\ ;\quad y_{11} = 0\ ;\quad y_{16} = 1$$

$$y_{17} = 0\ ;\quad y_5 = 1\ ;\quad y_{10} = 1\ ;\quad y_{15} = 0$$

$$y_{20} = 1 \quad \text{et on prend} \quad y_2 = 1.$$

Le graphe associé est alors :






Ecrivons la "condition de circuit" interdisant le sous-circuit (4, 5, 4) :

$$y_{16} + y_{20} \leq 1$$

ou

$$y_{16} + y_{20} + y_{21} = 1 \qquad \text{avec } y_{21} \text{ variable d'écart.}$$

On ajoute cette contrainte dans le tableau 3.2.4, à la dernière ligne (en utilisant toujours les résultats du paragraphe 1.4).

On voit que la variable sortante est $y_{21}$. Après le calcul, on obtient le tableau suivant :

| | $y_{21}$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{18}$ | $y_{19}$ | $\bar{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $y_6$ | -1 | 0 | 1 | 1 | 2 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $y_{11}$ | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{16}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{17}$ | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $y_5$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 |
| $y_{10}$ | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y_{15}$ | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_{20}$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y_2$ | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $c_j$ | 0 | 7 | 9 | 6 | 2 | 7 | 9 | 8 | 8 | 6 | 4 | |
| $\Delta_j$ | -11 | 4 | -2 | 11 | 11 | -12 | -4 | -5 | 6 | 5 | 4 | |

Vf = 30

↑

tableau 3.2.5

Ici, il y a deux choix pour $\Delta_j$. Si nous prenons $y_8$ comme variable entrante alors $\theta = \frac{1}{2}$, mais si nous prenons $y_7$ comme variable entrante, $\theta$ vaut 1 qui est un nombre entier. Donc nous choisissons $y_7$ comme

Ecrivons la "condition de circuit" interdisant le sous-circuit (4, 5, 4) :

$$y_{16} + y_{20} \leq 1$$

ou

$$y_{16} + y_{20} + y_{21} = 1 \qquad \text{avec } y_{21} \text{ variable d'écart.}$$

On ajoute cette contrainte dans le tableau 3.2.4, à la dernière ligne (en utilisant toujours les résultats du paragraphe 1.4).

On voit que la variable sortante est $y_{21}$. Après le calcul, on obtient le tableau suivant :

| | $y_{21}$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{18}$ | $y_{19}$ | $\bar{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $y_6$ | -1 | 0 | 1 | 1 | 2 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $y_{11}$ | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{16}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{17}$ | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $y_5$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 |
| $y_{10}$ | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y_{15}$ | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_{20}$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y_2$ | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $c_j$ | 0 | 7 | 9 | 6 | 2 | 7 | 9 | 8 | 8 | 6 | 4 | |
| $\Delta_j$ | -11 | 4 | -2 | 11 | 11 | -12 | -4 | -5 | 6 | 5 | 4 | |

Vf = 30

↑

tableau 3.2.5

Ici, il y a deux choix pour $\Delta_j$. Si nous prenons $y_8$ comme variable entrante alors $\theta = \frac{1}{2}$, mais si nous prenons $y_7$ comme variable entrante, $\theta$ vaut 1 qui est un nombre entier. Donc nous choisissons $y_7$ comme



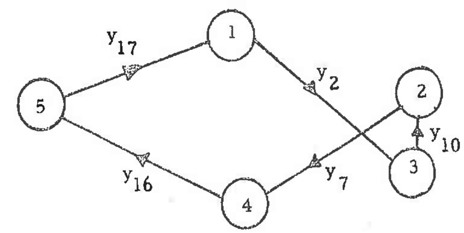
variable entrante. Les nouvelles valeurs des variables de base sont :

$$y_1 = 0 \; ; \quad y_6 = 0 \; ; \quad y_{11} = 0 \; ; \quad y_{16} = 1 \; ; \quad y_{17} = 1$$

$$y_5 = 0 \; ; \quad y_{10} = 1 \; ; \quad y_{15} = 0 \; ; \quad y_{20} = 0 \; ; \quad y_2 = 1$$

et on prend $y_7 = 1$.

Le graphe associé à ces nouvelles valeurs est :




C'est un circuit hamiltonien d'ordre n, donc il n'y a pas de condition de circuit pour cette étape. Et d'après le tableau 3.2.5, on peut prendre $y_{11}$ comme variable sortante.

Après le calcul, on a le tableau suivant :

| | $y_{21}$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_{11}$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{14}$ | $y_{18}$ | $y_{19}$ | $\bar{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $y_6$ | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $y_7$ | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{16}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{17}$ | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $y_5$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 |
| $y_{10}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{15}$ | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_{20}$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y_2$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 |
| $c_j$ | 0 | 7 | 9 | 9 | 2 | 7 | 9 | 8 | 8 | 6 | 4 | |
| $\Delta_j$ | 0 | -7 | -13 | -11 | 0 | -12 | -12 | -2 | 7 | 5 | -4 | |

Vf = 19

↑

tableau 3.2.6

D'après les valeurs de $\Delta_j$, on peut prendre $y_{14}$ comme variable entrante. Comme $\theta = 0$ alors, il n'y a pas de contrainte ajoutée, et on peut déterminer tout de suite la variable sortante qui est $y_{15}$. On fait le calcul et on a le tableau :



| | $y_{21}$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_{11}$ | $y_8$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{15}$ | $y_{18}$ | $y_{19}$ | $\bar{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| $y_6$ | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $y_7$ | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{16}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{17}$ | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $y_5$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 |
| $y_{10}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{14}$ | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $y_{20}$ | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 |
| $c_j$ | 0 | 7 | 9 | 9 | 2 | 7 | 9 | 8 | 11 | 6 | 4 | |
| $\Delta_j$ | 0 | -7 | -7 | -11 | 6 | -12 | -9 | -8 | -6 | +3 | 4 | |

Vf = 19

↑

tableau 3.2.7

- variable entrante $y_8$
- pas de contrainte ajoutée car $\theta = 0$
- variable sortante $y_6$.

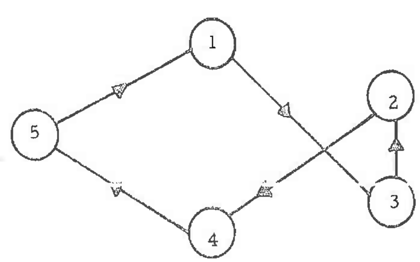
Le calcul donne le tableau suivant :

| | $y_{21}$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_{11}$ | $y_6$ | $y_9$ | $y_{12}$ | $y_{13}$ | $y_{15}$ | $y_{18}$ | $y_{19}$ | $\overline{Y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 |
| $y_8$ | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $y_7$ | -1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 |
| $y_{16}$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 |
| $y_{17}$ | -1 | +1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_5$ | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $y_{10}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $y_{14}$ | 0 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $y_{20}$ | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $c_j$ | 0 | 7 | 9 | 9 | 8 | 7 | 9 | 8 | 11 | 6 | 4 | |
| $\Delta_j$ | 0 | -4 | -17 | -5 | -6 | -6 | -15 | -2 | -6 | -1 | -2 | |

Vf = 19

tableau 3.2.8

Tous les $\Delta_j$ sont négatifs ou nuls. On arrive donc à l'optimum pour la valeur 19 de la fonction objectif. Le circuit hamiltonien correspondant est :



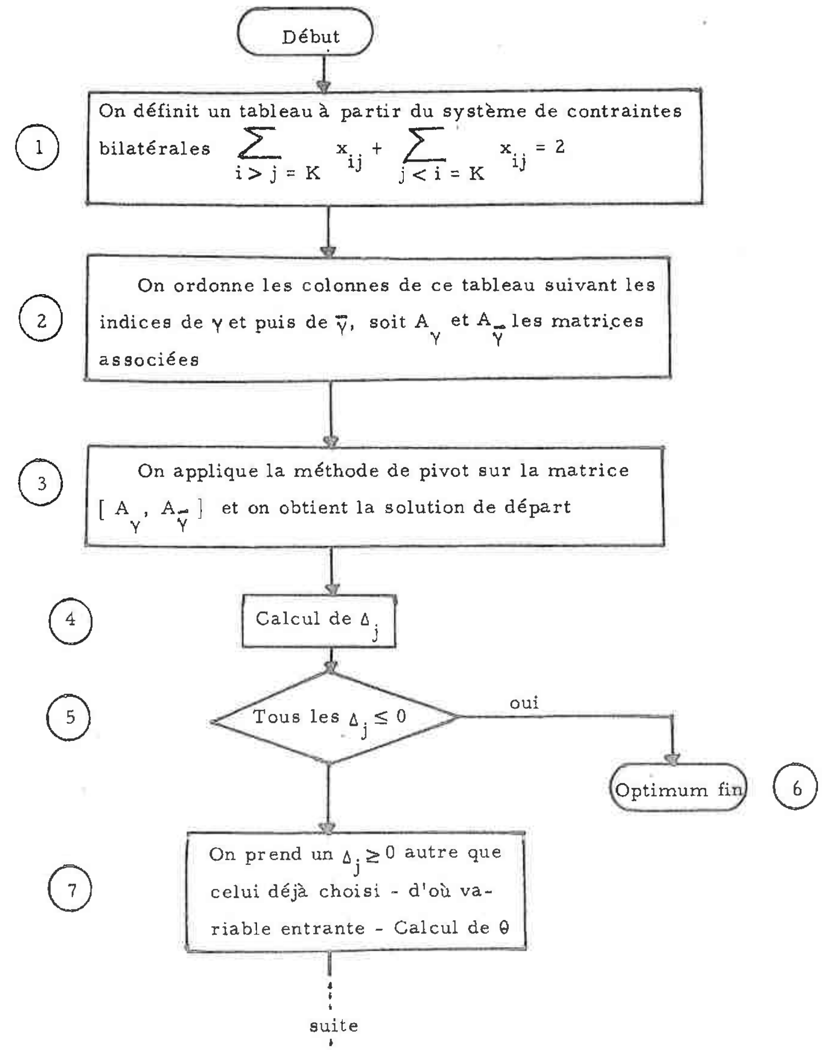

-------------

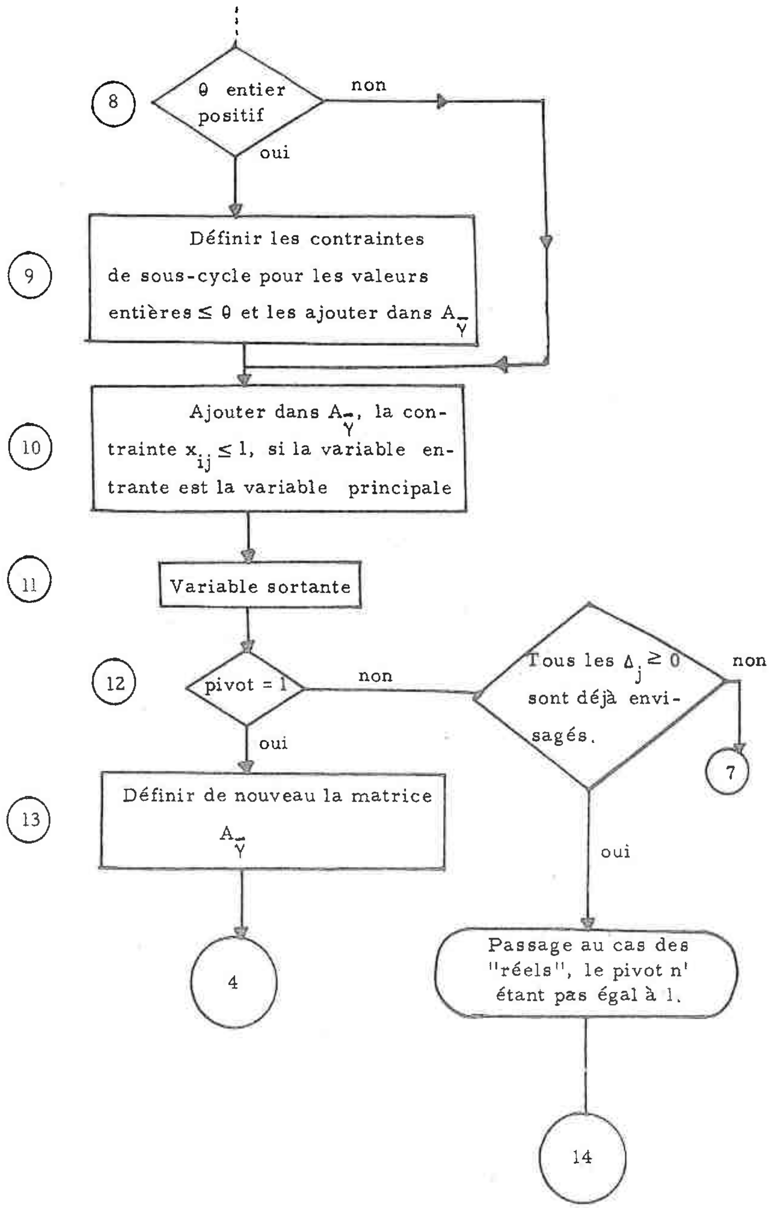
CHAPITRE IV

BIBLIOTHEQUE DES SOUS-PROGRAMMES ET NOTICES

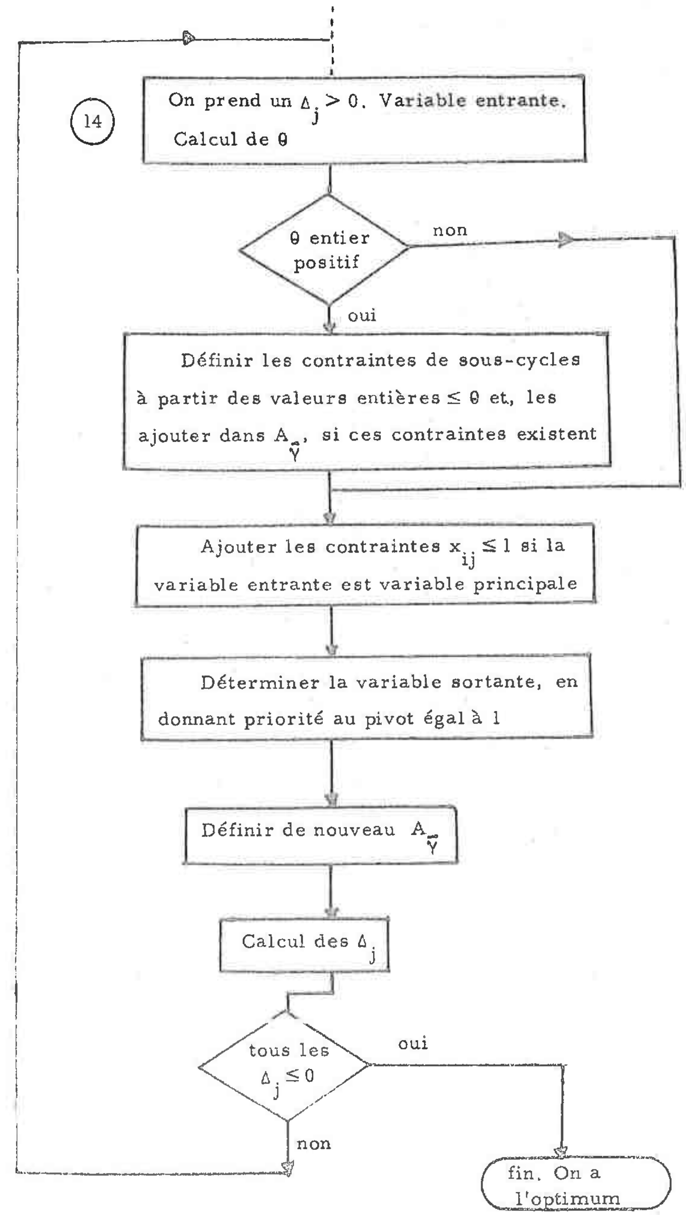
MISE EN ŒUVRE SUR QUELQUES EXEMPLES

Pour la programmation, nous nous limiterons au cas où la matrice des distances est symétrique. L'organigramme général de l'algorithme est le suivant :




8
θ entier positif
non
oui
9
Définir les contraintes de sous-cycle pour les valeurs entières ≤ θ et les ajouter dans $A_{\bar{\gamma}}$
10
Ajouter dans $A_{\bar{\gamma}}$, la contrainte $x_{ij} \leq 1$, si la variable entrante est la variable principale
11
Variable sortante
12
pivot = 1
non
oui
Tous les $\Delta_j \geq 0$ sont déjà envisagés.
non
oui
7
13
Définir de nouveau la matrice $A_{\bar{\gamma}}$
4
Passage au cas des "réels", le pivot n' étant pas égal à 1.
14




14
On prend un $\Delta_j > 0$. Variable entrante.
Calcul de θ
θ entier positif
non
oui
Définir les contraintes de sous-cycles à partir des valeurs entières ≤ θ et, les ajouter dans $A_{\bar{\gamma}}$, si ces contraintes existent
Ajouter les contraintes $x_{ij} \leq 1$ si la variable entrante est variable principale
Déterminer la variable sortante, en donnant priorité au pivot égal à 1
Définir de nouveau $A_{\bar{\gamma}}$
Calcul des $\Delta_j$
tous les $\Delta_j \leq 0$
oui
non
fin. On a l'optimum

## 4.1 LISTE DES VARIABLES ET LEUR SIGNIFICATION

### 4.1.1 COMMON blanc

N = nombre des sommets du graphe, ou nombre total de villes parcourues par le voyageur de commerce.

NH = nombre de variables hors-base.

M = $\frac{N(N-1)}{2}$ = nombre total de variables principales.

LOC = nombre de lignes occupées de la matrice C, avant d'ajouter cette nouvelle contrainte.

EPS = $10^{-3}$.

M1 = NH + 1

NIB = nombre des éléments du tableau IB (juste avant d'ajouter cette contrainte).

IERR = $\begin{cases} 0 & \text{si pas d'erreur} \\ 1 & \text{si erreur, une arête du cycle ne figure pas dans le tableau IA et IB, c'est une erreur du tableau IA ou IB} \end{cases}$

NONCY = $\begin{cases} 1 & \text{si pas de sous-cycle d'où erreur dans la programmation} \\ 0 & \text{il y a un cycle} \end{cases}$

### 4.1.2 COMMON /RESULT/

F = valeur prise par la fonction objectif.

IE = variable entrante.



KA = rang de la variable entrante dans le tableau IA, tableau des indices des variables hors base.

ISS = variable sortante.

KB = rang de la variable sortante dans le tableau IB, tableau des indices des variables de base.

IDELTA = $\begin{cases} -1 & \text{si tous les } \Delta_j \text{ sont négatifs ou nuls} \\ 0 & \text{si } \Delta_j \geq 0 \text{ mais on le pose égal à } -22\,222 \\ 1 & \text{s'il existe } \Delta_j \text{ positif ou nul.} \end{cases}$

NS = nombre de sommets distincts contenus dans le tableau IØ

NCYCLE = $\begin{cases} 1 & \text{si on a un n-cycle} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

IDEBOR = $\begin{cases} 1 & \text{si débordement de la matrice C} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

IENTIE = $\begin{cases} 0 & \text{si solution non entière} \\ 1 & \text{si solution entière} \end{cases}$

NOBORN = $\begin{cases} 1 & \text{si non borné pour la fonction objectif c'est-à-dire il y a variable entrante et pas de variable sortante} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ITRAV = $\begin{cases} 0 & \text{si pas de débordement du tableau de travail E} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

VPIVOT = valeur du pivot après avoir choisi la variable sortante.

ITER = nombre des itérations jusqu'à cette étape.

NIC = nombre des éléments du tableau IC

$$NN \leq NIC \leq M.$$

NSCY = nombre de sous-cycles d'ordre p avec $3 \leq p \leq N - 1$.

$$\text{NEGA} = \begin{cases} 0 & \text{si solution est positive} \\ 1 & \text{si solution est négative (erreur de programmation)} \end{cases}$$

4.1.3 COMMON /ETI/

ID (M) : tableau à une dimension, contenant toutes les distances entre 2 villes quelconques. La quantité entre parenthèses représente la taille de cette dimension.

4.1.4 COMMON /JJØ/ JØ (N+1)

JØ : tableau défini dans le programme principal pour initialiser le n-cycle de départ.

4.1.5 COMMON /DELTA/

U : tableau à une dimension contenant les valeurs de $\Delta_j$.

4.1.6 COMMON /Cycle/ IØ (N+1)

IØ : tableau à une dimension, contenant un n-cycle ou un sous-cycle de chaque itération.

4.1.7 COMMON /TRAV/

V (M + 3) ou V (NH2 + NN) : tableau à une dimension, qui sert le tableau de travail.

E (NN + N1) : tableau à une dimension qui sert le tableau de travail.



4.1.8 COMMON /PIVOT/

$$\text{IPIVOT} = \begin{cases} 1 & \text{si valeur de pivot vaut 1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.1.9 DIMENSION

A (NN, NH2) avec $\text{NN} = \begin{cases} \text{N} & \text{si N est impair} \\ \text{N+1} & \text{si N est pair} \end{cases}$

A = matrice correspondante aux variables hors base, sa dernière colonne contient les valeurs des variables de base.

B (NN, NN)

B : matrice carrée correspondante aux variables de base.

C (N1, NH2) avec NH2 = M1 = NH + 1

C : matrice rectangulaire à N1 lignes et ayant le même nombre de colonnes que celui de la matrice A. Elle sert à contenir les contraintes ajoutées à chaque itération. C'est une matrice surdimensionnée. Sa dernière colonne contient aussi les valeurs des variables de base.

IA (NH)

IA : matrice ligne contenant les indices des variables hors base.

IB (NN + N1)

IB : matrice colonne contenant les indices des variables de base.

BA (NN)

BA : matrice colonne qui contient les valeurs de la dernière colonne de la matrice A.

CA (N1)

CA : matrice colonne qui contient les valeurs de la dernière colonne de la matrice C.

AR : matrice de même dimension que A.

CR : matrice de même dimension que C.

BAR : matrice de même dimension que BA.

CAR : matrice de même dimension que CA.

Comme les matrices A, C, BA, CA sont déclarées en INTEGER, les matrices AR, CR, BAR, CAR servent à contenir les éléments des matrices A, C, BA, CA lorsqu'on fait le passage du cas des entiers au cas des réels.

IC (M)

IC : matrice ligne contenant les indices des variables principales auxquelles sont déjà associées les contraintes du type $x_{ij} \leq 1$.

IS (2N)

IS : matrice ligne qui contient 2 fois chaque sommet du cycle.

### 4.1.10 EQUIVALENCE

C $\Longleftrightarrow$ B



BA (1) $\Longleftrightarrow$ A (1, NH2)
CA (1) $\Longleftrightarrow$ C (1, NH2)
A $\Longleftrightarrow$ AR
C $\Longleftrightarrow$ CR
AR (1, NH2) $\Longleftrightarrow$ BAR (1)
CR (1, NH2) $\Longleftrightarrow$ BAR (1)

### 4.1.11 Lecture des données.

Seules les données des distances entre les différents sommets sont lues. Les équations ou inéquations de contraintes sont construites par des sous-programmes.

Si les distances ne sont pas des entiers, il faut déclarer REAL ID pour le tableau situé dans le COMMON /ETI/.

### 4.1.12 Autres variables.

KS = nombre d'éléments du tableau IS

NN = nombre de lignes de la matrice A

$$NN = \begin{cases} N & \text{si } N \text{ est impair} \\ N + 1 & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$$

M1 = NH + 1

N1 = nombre de lignes de la matrice C. Ce nombre est défini dans le programme principal. On prend par exemple N1 = 4N.

NH2 = M1.

## 4.2 SOUS-PROGRAMME DEFMAT

Ce sous-programme construit les équations correspondantes aux contraintes d'égalités $\sum_{i > j = K} x_{ij} + \sum_{j < i = K} x_{ij} = 2$, liées aux différents sommets du graphe, et de plus sépare les colonnes des variables hors base des colonnes des variables de base. On obtient ainsi, deux matrices A et B respectivement associées aux variables hors base et aux variables de base. Les indices de ces variables se trouvent dans le tableau IA pour les variables hors base, et dans le tableau IB pour les variables de base

| IA | IB |
|---|---|
| A | B |

Analyse :

On convertit une variable à double indice x (I, J) en une variable à un seul indice y (K) en utilisant la relation :

$$K = \frac{(I-1)(I-2)}{2} + J$$

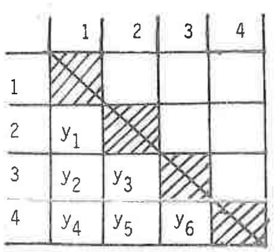



Figure 1

$$(I) \sum_{i > j = K} + \sum_{j < i = K} x_{ij} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + y_4 = 2 \\ y_1 + y_3 + y_5 = 2 \\ y_2 + y_3 + y_6 = 2 \\ y_4 + y_5 + y_6 = 2 \end{cases}$$

Comme les éléments des matrices A et B sont des entiers 0 ou 1, alors pour définir une ligne de la matrice [ A, B ] , on utilise une matrice-



ligne de travail D à M éléments. On intialise D à zéro. On prend une équation de (I), par exemple $y_1 + y_2 + y_4 = 2$ et on donne 1 aux éléments D (1), D (2), D (4), c'est-à-dire on fait :

D (1) = 1

D (2) = 1

D (4) = 1

et après, on recopie cette ligne D dans une ligne de la matrice [ A, B ] .

La dernière colonne de A contient les valeurs du 2ème membre du système (I).

Remarquons, qu'au départ la matrice A ainsi que IA correspondent aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_{NH}$, et les matrices B et IB correspondent aux variables $y_{NH+1}, y_{NH+2}, \ldots, y_M$. Ce n'est que lorsque toutes ces contraintes (I) sont toutes définies qu'on échange les colonnes de A et de B, ainsi que les indices dans IA et IB pour que dans B il n'y a que les colonnes des variables de base et dans A, les colonnes des variables hors base.

Comme nous avons fixé une fois pour toutes que le n-cycle d'initialisation est toujours le n-cycle (1, 2, 3, . . . , n, 1), les variables de base sont celles situées sur la parallèle à la diagonale principale et la variable située dans la case (N, 1). Pour la figure 1 ce sont : $y_1$, $y_3$, $y_6$ et $y_4$. Pour définir A et B nous utilisons un tableau à une dimension de travail D à M éléments, initialisé à zéro, et on donne la valeur +1 aux éléments de D qui correspondent aux variables de base, ici D (1) = D (3) = D (6) = D (4) = 1. Ce qui permet ainsi de repérer les colonnes correspondantes aux variables de base et aux variables hors-base. On fait des échanges de telle sorte qu'à la fin les éléments de D égaux à 1 se trouvent uniquement du côté de la matrice B.

Ce sous-programme DEFMAT est aussi prévu pour initialiser un n-cycle autre que le n-cycle (1, 2, 3, . . . , n, 1). Il suffit pour cela de définir ce n-cycle dans le tableau JØ du programme principal.

## 4.3 SOUS-PROGRAMME INITMA

Ce sous-programme est utilisé uniquement dans le cas où n est pair : il remplace DEFMAT.

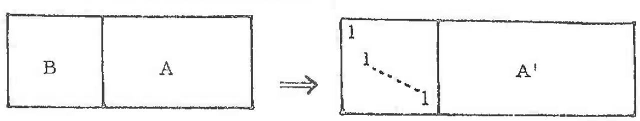
Dans le cas où n est pair, on ajoute une contrainte supplémentaire

$$(1) \qquad y_1 \leq 1 \iff y_1 + y_{M+1} = 1.$$

Comme on a une équation en plus alors, il faut une variable de base en plus aussi, et on prend pour cette nouvelle variable de base, la variable $y_2$. D'où on place $y_2$ dans la base et $y_{M+1}$ dans l'ensemble des variables hors base.

Ce sous-programme construit cette contrainte (1) et la place dans la dernière ligne de B et de A ; ensuite, il permute deux colonnes de A et de B de telle sorte que $y_2$ devienne variable de base et $y_{M+1}$ variable hors base. Il prévoit aussi le cas général du sous-paragraphe 1. 7. a (2ème).

## 4.4 SOUS-PROGRAMME PIVOT




La matrice carrée B est supposée avoir det B $\neq$ 0.

Dans le cas où n est pair PIVOT échange la 1ère ligne et la dernière ligne de [ B, A] .



PIVOT cherche à diagonaliser la matrice B, en prenant à chaque fois pour pivot l'élément maximum de la ligne en cours. Lorsque la diagonalisation est terminée PIVOT ajoute dans les premières lignes de C, les contraintes $x_{ij} \leq 1$ associées aux variables principales de la base.

## 4.5 SOUS-PROGRAMME COMBIN

COMBIN (U, JE, B, NN, A, NH2)

DIMENSION U (1), B (NN, NN), A (NN, NH2)

La matrice ligne U étant donnée, et le JEème élément de U est un pivot.

COMBIN rend égal à 1 l'élément U (JE) et après COMBIN rend égal à zéro tous les éléments de la JEème colonne de la matrice A, les éléments de la matrice B étant considérés comme des éléments du 2ème membre d'un système d'équations, c'est-à-dire que l'opération de combinaison se fait sur l'ensemble [ A, B ] .

## 4.6 SOUS-PROGRAMME CONBOU (condition de boucle)

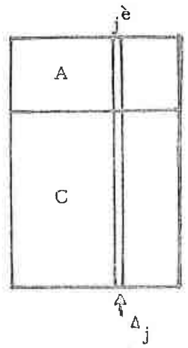
On connait la variable entrante : son rang dans le tableau IA est KA.

CONBOU teste si cette variable est une variable d'écart, si la réponse est oui, il y a sortie du sous-programme ; dans le cas contraire CONBOU cherche à définir la condition de boucle $x_{ij} \leq 1$ (1). Pour cela, il teste si cette contrainte (1) est déjà considérée pour cette variable :

si la réponse est oui : sortie du sous-programme.

Dans le cas contraire, on ajoute cette contrainte dans la première ligne libre de C.

## 4.7 SOUS-PROGRAMME CDELT (calcul de DELTA)



La jème colonne de la matrice $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ étant donnée, CDELT calcule le $\Delta_j$ correspondant et met le résultat dans le mot DEL.

## 4.8 SOUS-PROGRAMME VARENT (variable entrante)

VARENT calcule tous les $\Delta_j$ $(j \in \overline{Y})$, met les résultats dans une matrice ligne U. Ensuite, il cherche un maximum de $\Delta_j$. Si ce maximum est négatif ou nul, il y a sortie du sous-programme. Dans le cas contraire il indique la variable entrante et place la condition de boucle associée à cette variable entrante, dans la première ligne libre de C.

## 4.9 SOUS-PROGRAMME CHOIX

CHOIX cherche à choisir parmi les $\Delta_j > 0$ contenus dans la matrice ligne U, celui qui donne le pivot égal à 1. (On suppose que tous les $\Delta_j$ ne sont pas négatifs ou nuls).

Il prend un plus grand $\Delta_j$ positif. Soit $\Delta_{jl}$.
Il cherche la variable entrante correspondante.



Il ajoute les contraintes de boucle et de sous-cycle.
Il cherche la variable sortante et il teste si le pivot vaut 1.

Si la réponse est oui, on permute les indices des variables entrante et sortante.

Dans le cas contraire, on fait $\Delta_{jl}$ égal à -22 222 dans le tableau U et, on recommence tant qu'il y a encore d'autre $\Delta_j \geq 0$.

Après avoir examiné tous les $\Delta_j \geq 0$, si on ne trouve pas de pivot égal à 1, on prend la première valeur $\Delta_j$ positive rencontrée (soit $\Delta_{jl}$), pour déterminer la variable entrante. On ajoute les contraintes de boucle et de sous-cycle. On détermine la variable sortante et on échange les indices des variables entrante et sortante.

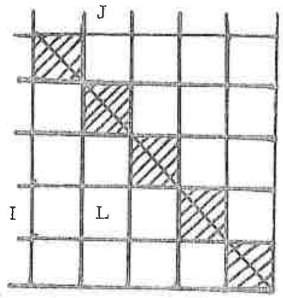
## 4.10 SOUS-PROGRAMME VARSUI (variable suivante).

C'est un sous-programme utilisé par CHOIX. Dans le cas où le pivot n'est pas égal à 1, VARSUI donne à CHOIX une candidate suivante pour la variable entrante, en même temps, il ajoute la condition de boucle associée à cette candidate.

Dans le cas, où il a épuisé toutes les candidates, c'est-à-dire examiner tous les $\Delta_j \geq 0$, VARSUI le signale à CHOIX en donnant la valeur zéro à l'identificateur IDELTA.

## 4.11 SOUS-PROGRAMME CONVER

Ce sous-programme convertit une variable à un seul indice Y (L), en une variable à double indice correspondant X (I, J).




Le principe consiste à retrancher de L les valeurs 1, 2, 3, . . . , Kl, . . . tant que L est supérieur à Kl, c'est-à-dire :

$$I = 2$$
$$Kl = 0$$

Tant que L > Kl on fait

$$Kl = Kl + 1 \quad , \quad L = L - Kl \quad , \quad I = I + 1$$

La valeur de J est la valeur de L lorsque L est inférieur ou égal à Kl.

## 4.12 SOUS-PROGRAMME CYCLE

Ce sous-programme cherche à déterminer un n-cycle, ou un sous-cycle dans le cas où la solution est entière.

Quand une solution est entière, les valeurs des variables principales de la base sont 0 ou 1. Et ces valeurs définissent nécessairement soit un n-cycle, soit plusieurs sous-cycles, d'après la condition

$$\sum_{j < i = K} x_{ij} + \sum_{i > j = K} x_{ij} = 2 \qquad (K = 1, 2, \ldots, n).$$



Comme à une valeur +1 de la variable principale, il correspond un couple de sommets, on construit un tableau à une dimension IS qui contient tous les couples de sommets correspondants aux valeurs non nulles des variables principales de la base. Par exemple, si

$$x_{13} = 1$$
$$x_{45} = 1$$
$$x_{34} = 1$$

alors, on place dans le tableau IS les sommets

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 |

tableau IS

Pour ce sous-programme CYCLE, on suppose donné ce tableau IS, ainsi que le nombre KS de ses éléments. CYCLE donne à partir de ce tableau IS, un tableau IØ qui contiendra un cycle construit à partir de IS.

Par exemple, soit un tableau IS suivant :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IS : | ~~1~~ | ~~2~~ | 4 | 5 | 6 | 4 | 6 | 5 | ~~3~~ | ~~2~~ | ~~1~~ | ~~3~~ |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

(figure 1)

alors, le sous-programme CYCLE donne le sous-cycle (1, 2, 3, 1).

Pour trouver ce cycle, il suffit de barrer les éléments qu'on a déjà pris dans le tableau IS.

Par exemple (figure 1) en parcourant le tableau IS de gauche à droite, on doit trouver d'abord le couple de sommets (1, 2). Alors, on place ces sommets 1 et 2 dans le tableau IØ. Comme le deuxième élément de ce couple est le sommet 2 alors, on parcourt dans le tableau

IS pour trouver un autre sommet 2 . On le trouve en colonne 10, IS (10) = 2. Comme 10 est un nombre pair, le sommet adjacent à 2 est le sommet 3 de la colonne 9 et, non pas le sommet 1 de la colonne 11. Alors, on barre 3 de la colonne 9 et à partir de 3 on cherche le sommet adjacent à 3 et ainsi de suite.

On s'arrête quand le dernier sommet trouvé est confondu avec le premier sommet IS (1).

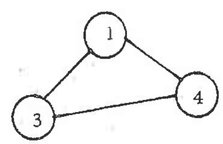
Le sous-programme CYCLE donne à la fin le nombre NS de sommets distincts du cycle trouvé. Il signale l'erreur dans le cas où à partir du tableau IS on ne peut pas trouver un cycle, par la valeur de NONCY = 1.

## 4.13 SOUS-PROGRAMME C O N T R A (contrainte)

Dans le cas où le sous-cycle n'est pas une boucle, CONTRA définit à partir du tableau IØ l'équation de ce sous-cycle et la place dans la première ligne libre de C, en même temps NIB et LOC sont incrémentés de 1.

IØ $\boxed{1\ 4\ 3\ 1}$

figure 1




Pour trouver l'équation de contrainte, on prend à chaque fois deux éléments consécutifs du tableau IØ

(fig. 1) $\Longrightarrow$ IØ (1) = 1 ; IØ (2) = 4 $\Longrightarrow$ x (4, 1)

car on doit avoir I > J
c'est-à-dire, on prend
I = 4
J = 1

A cette variable $x_{41}$, on associe la variable à un seul indice y (K), donnée par la formule :



$$K = L\ (I,\ J) = (I - 1)\ (I - 2)/2 + J$$

$$= 3 \times 2\ /2 + 1 = 4.$$

Ayant y (K), on cherche le rang de cet indice K dans le tableau IB ou IA ;

si K $\varepsilon$ IB — on applique le résultat du paragraphe 1.4

si K $\varepsilon$ IA — soit par exemple IA (K1) = K et si I1 est la ligne de C dans laquelle sera placée cette contrainte, alors il suffit d'ajouter +1 à l'élément C (I1, K1).

## 4.14 SOUS-PROGRAMME R E D E F M

REDEFM modifie la matrice C : il ajoute une ligne supplémentaire à la matrice C, s'il y a une contrainte de sous-cycle.

Au départ REDEFM définit les éléments du tableau IS utilisés dans le sous-programme CYCLE. Pour cela, il calcule θ. Si θ est nul ou non entier alors fin. Sinon, pour chaque valeur de θ, il cherche les nouvelles valeurs des variables de base et les place dans un tableau V (formule 1.3.4 du paragraphe 1.3), sans oublier la valeur θ de la variable entrante. A partir des valeurs +1 des variables principales de la base et de la variable entrante, on construit le tableau IS des couples de sommets correspondants. Après, on utilise les sous-programmes CYCLE et CONTRA pour définir l'équation de cette nouvelle contrainte.

REDEFM signale aussi l'erreur dans le cas où la solution est négative.

## 4.15 SOUS-PROGRAMME MATSUI (matrice suivante)

Ayant donné le rang de la variable entrante KA et le rang de la variable sortante KB, MATSUI rend égal à zéro tous les éléments de la colonne KA des matrices A et C, après avoir sauvegardé les éléments de cette colonne dans le tableau auxiliaire E. Après cela MATSUI modifie les éléments de la colonne KA de la matrice A et C, de même que les éléments de la ligne sortante de A ou bien de C.

Après avoir appelé MATSUI, on obtient les matrices A et C qui seront utilisées à l'étape suivante.

## 4.16 SOUS-PROGRAMME FONCOB (fonction objectif)

FONCOB calcule la fonction objectif à partir des valeurs des variables de base et des distances entre les différents sommets. Le résultat de ce calcul est mis dans le mot F.

## 4.17 SOUS-PROGRAMME HASARD

C'est un sous-programme de bibliothèque : il créé un nombre au hasard Z à chaque fois qu'on introduit un nombre impair IA, avec $0 \leq Z < 1$.



## 4.18 SOUS-PROGRAMME ECRIT1, ECRIT2

Ce sont des sous-programmes d'écriture. ECRIT1 imprime les résultats suivants :

- valeur de la fonction objectif
- variable entrante
- équation de contrainte
- variable sortante
- valeur de pivot.

ECRIT2 imprime la liste des sommets du n-cycle.

## 4.19 LES SOUS-PROGRAMMES UTILISES DANS LE CAS OU L'ON TRAVAILLE EN NOMBRES REELS.

On a vu que lorsque le pivot n'est pas égal à 1, on doit travailler sur les nombres réels. Dans ce cas le programme principal se charge de transférer les éléments des matrices A et C, pour les mettre respectivement dans les matrices AR et CR. Comme le déroulement de l'algorithme est le même que celui du cas des entiers, les différents sous-programmes utilisés sont les mêmes, si ce n'est que les variables sont des réels. Donc on peut reprendre tous les sous-programmes précédemment décrits, et pour les utiliser dans le cas des réels, il suffit de changer leurs noms et de supprimer l'ordre INTEGER. Pour changer le nom d'un sous-programme, nous remplaçons sa dernière lettre par la lettre R, par exemple le sous-programme REDEFM dans le cas des "entiers" est remplacé par REDEFR, dans le cas des "réels", et en même temps, nous enlevons l'ordre INTEGER A, C, V, E.

Comme certains sous-programmes appellent d'autres sous-programmes, alors dans les instructions CALL ..... de ces sous-programmes, on doit changer le nom du sous-programme appelé.

## 4.20 LE PROGRAMME PRINCIPAL

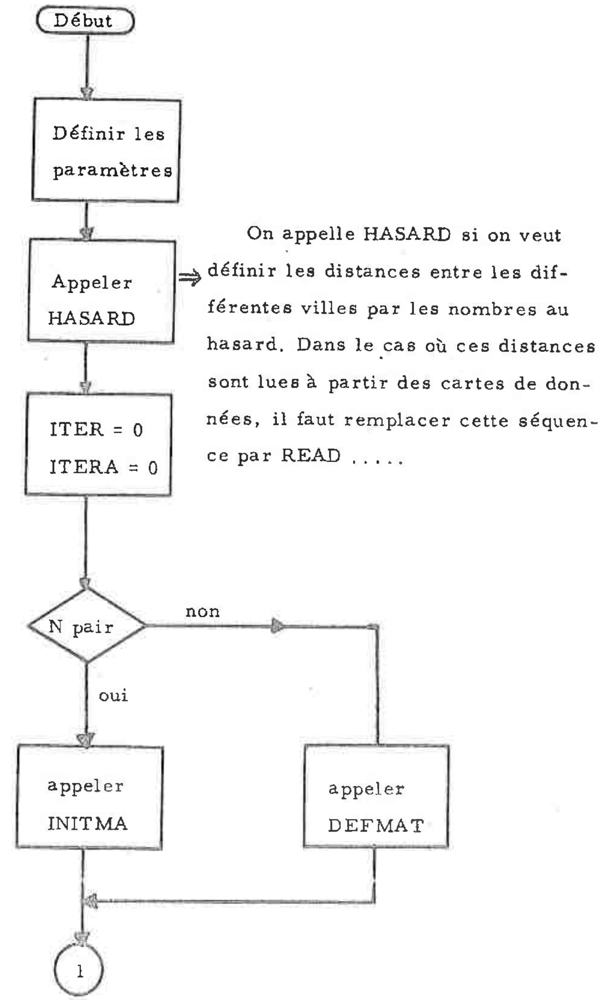
Le programme principal sert à définir ou à initialiser les paramètres utilisés dans les sous-programmes ou les COMMONS. Il imprime les données (distances des différentes villes). Il utilise les différents sous-programmes pour chercher les différents n-cycles, en particulier un n-cycle optimal.

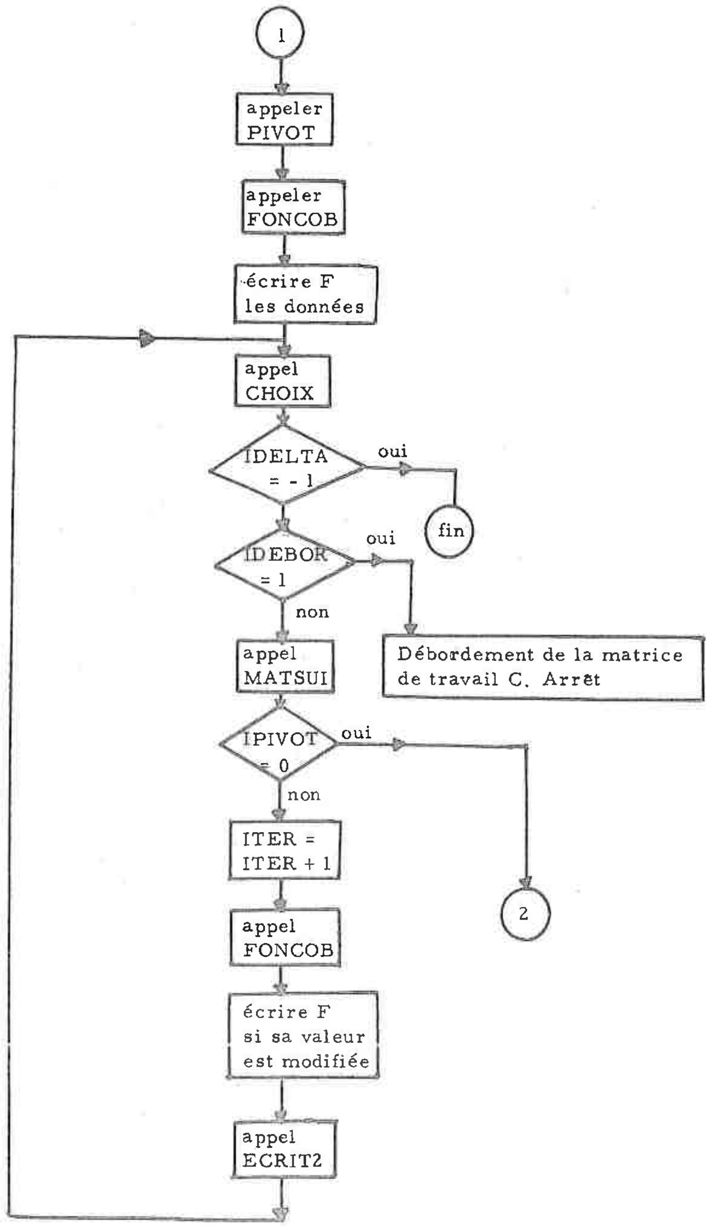
Dans le cas de passage du cas des entiers au cas des réels, il recopie les éléments de A et de C respectivement dans AR et CR et, après il appelle les différents sous-programmes du cas des réels.

Au cas où le n-cycle d'initialisation n'a pas été défini dans le tableau JØ, il prend par défaut le n-cycle (1, 2, 3, ..., n, 1).

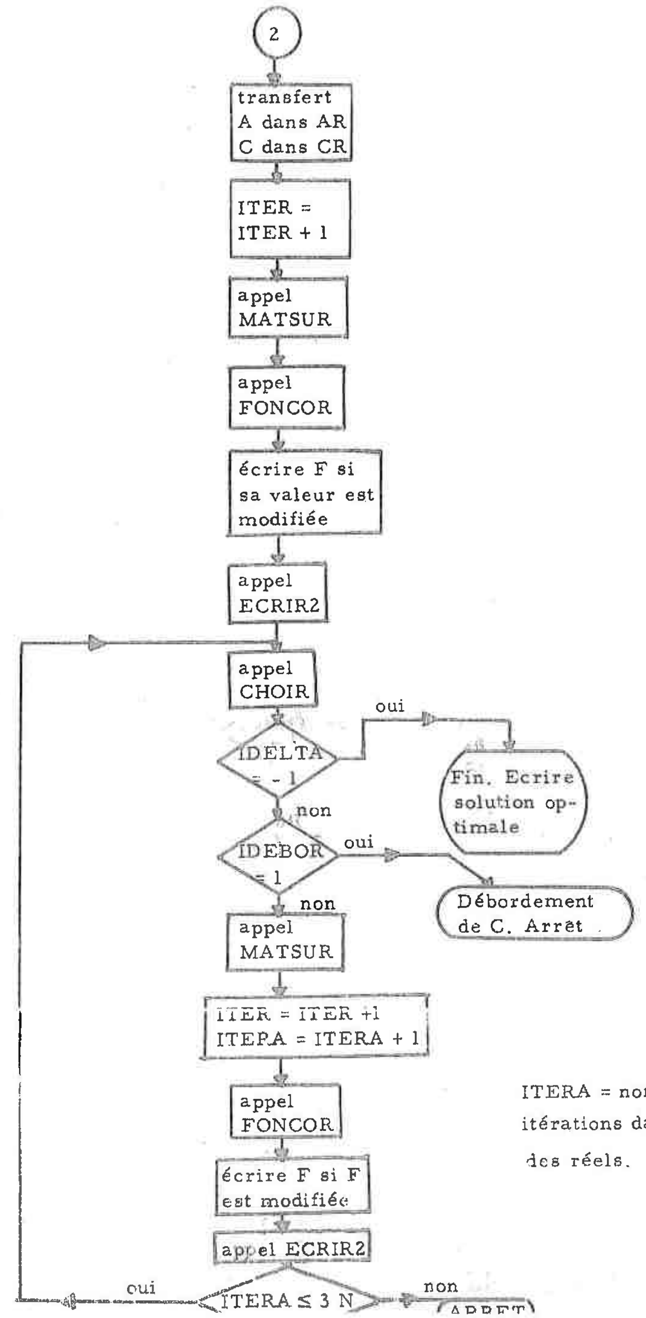
## 4.21 ORGANIGRAMME DU PROGRAMME PRINCIPAL










ITERA = nombre des itérations dans le cas des réels.

## 4.22 EXEMPLE D'UTILISATION DE PROGRAMME PRINCIPAL ET SOUS-PROGRAMMES.

Prenons N = 12.

Dans le programme principal, on définit :

1°) les dimensions des tableaux A, B, C, IA, IB, BA, CA, AR, CR, BAR, CAR, par les relations du sous-paragraphe 4.1.9.

Puisque N est pair alors :

A (13, NH2) avec $M = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$

NH = M - N = 66 - 12 = 54

NH2 = NH + 1 = 54 + 1 = 55.

D'où

DIMENSION A(13,55), B (13, 13), IA (54).

Si on prend Nl = 4N alors Nl = 4 × 12 = 48

d'où

C (48, 55), IB (61), BA (13), CA (48) et

AR (13, 55), CR (48, 55), BAR (13), CAR (48).

2°) Les équivalences :

(BA (1), A (1, 55)), (CA (1), C (1, 55))

(BAR (1), AR (1,55)), (CAR (1), CR (1,55)).

3°)

N = 12

NN = 13

Nl = 4N



Remarquons, que cette valeur Nl représente le nombre des lignes de la matrice C, ou de la matrice CR. Il faut donc fixer cette valeur Nl avant de définir les dimensions des tableaux ci-dessus.

## 4.23 QUELQUES RESULTATS DONNES PAR L'ORDINATEUR

En faisant les essais sur l'ordinateur IRIS 80, nous avons obtenu les résultats suivants :

| N | Nbre d' essais | temps de calcul | longueur de n-cycle de départ | longueur de n-cycle obtenu par l' algorithme | valeur optimale de la fonction objectif |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 6 sc | 617 | 172 | 172 |
| 20 | 2 | 9mn, 45sc | 2 299 | 474 | 474 |
| | | | 2 323 | 461 | 460, 50 |
| 25 | 1 | 13 mn | 2 694 | 531 | 528, 50 |

Le tableau suivant donne les résultats obtenus en faisant les essais sur l'ordinateur MITRA 15.

Nous faisons 10 essais. La matrice des distances à chaque essai est obtenue à partir d'un sous-programme HASARD qui génère les nombres au hasard.

Nous avons pris N = 12.

| IAA paramètre du ssp HASARD | N° d'essai | Valeur de départ de la fonction objectif | Solution donnée par l'algorithme | Aprés un nombre d'itérations | Solution optimale | Aprés un nombre d'itérations Observat. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 1er | 5155 | 1441 | 47 | 1441 | 47 |
| 25 | 2è | 5690 | 1464 | 31 | 1440,33 | 36 |
| 27 | 3è | 6227 | 2218 | 53 | Le programme s'arrête car débordement de matrice C. | |
| 29 | 4è | 4763 | 1971 | 35 | 1971 | 35 |
| 31 | 5è | 7297 | 2613 | 54 | 2562 | 58 |
| 33 | 6è | 7832 | 2934 | 74 | 2934 | 74 la solution optimale du cas des réels est entière |
| 35 | 7è | 4369 | 2067 | 33 | 2067 | 33 |
| 37 | 8è | 5904 | 1070 | 42 | 1051 | 44 |
| 39 | 9è | 7439 | 2114 | 48 | 2113 | 52 |
| 41 | 10è | 6976 | 2588 | 38 | 2140,50 | 70 |

Dans les exemples suivants, les lignes "ID:" représentent les éléments de la matrice triangulaire des distances, écrits ligne par ligne. Dans l'exemple ci-après (IAA = 23, N = 12) la matrice des distances associée est :



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 181 | | | | | | | | | | | |
| 3 | 84 | 870 | | | | | | | | | | |
| 4 | 463 | 944 | 496 | | | | | | | | | |
| 5 | 480 | 417 | 182 | 337 | | | | | | | | |
| 6 | 379 | 239 | 23 | 983 | 692 | | | | | | | |
| 7 | 303 | 590 | 809 | 544 | 984 | 8 | | | | | | |
| 8 | 189 | 60 | 657 | 403 | 499 | 365 | 698 | | | | | |
| 9 | 900 | 114 | 584 | 481 | 623 | 408 | 843 | 381 | | | | |
| 10 | 697 | 757 | 265 | 773 | 249 | 536 | 977 | 32 | 402 | | | |
| 11 | 120 | 102 | 533 | 281 | 883 | 767 | 652 | 12 | 201 | 95 | | |
| 12 | 763 | 719 | 448 | 213 | 241 | 529 | 0 | 245 | 461 | 564 | 232 | |

IAA représente la valeur initialisée pour gérer les nombres au hasard.

N représente le nombre des villes.

F représente la valeur de la fonction objectif à la phase d'initialisation, valeur du n-cycle (1, 2, 3, ..., n, 1).

PROG. NBRE = Programme en nombre

N° ITER = Numéro d'itération.

FCT. OBJ. = Fonction objectif.

4.23.1 *Exemple 1* N = 12 , IAA = 23

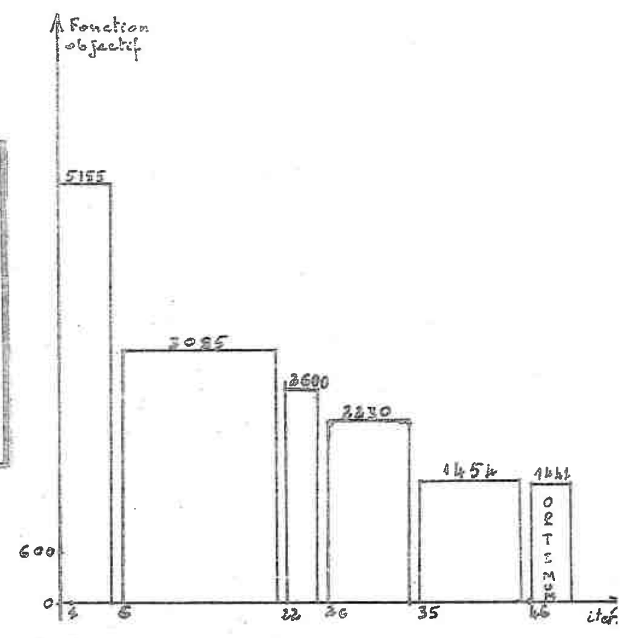
Tableau des Distances :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ID : | 182 | 84 | 870 | 463 | 944 | 496 | 480 | 417 | 182 | 337 | 379 | 239 | 23 | 983 | 692 | 303 | 590 | 809 |
| ID : | 544 | 984 | 3 | 189 | 60 | 657 | 403 | 499 | 365 | 698 | 900 | 114 | 584 | 481 | 623 | 408 | 843 | 381 |
| ID : | 697 | 757 | 265 | 773 | 249 | 536 | 977 | 32 | 402 | 120 | 102 | 533 | 281 | 883 | 767 | 652 | 12 | 201 |
| ID : | 95 | 763 | 719 | 448 | 213 | 241 | 529 | 0 | 245 | 461 | 564 | 232 | | | | | | |

Tableau des résultats successifs :

F = 5155

| PROG. NBRE | N° ITER | n-cycle | | | | | | | | | | | | | FCT. OBJ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | 6 | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 12 | 11 | 10 | 8 | 9 | 6 | 7 | 2 | 3085 |
| N T | 22 | 5 | 4 | 1 | 3 | 6 | 7 | 2 | 9 | 8 | 10 | 11 | 12 | 5 | 2600 |
| I | 26 | 11 | 9 | 2 | 7 | 6 | 3 | 1 | 4 | 12 | 5 | 10 | 8 | 11 | 2230 |
| E R | 35 | 2 | 1 | 3 | 6 | 7 | 12 | 4 | 5 | 10 | 8 | 11 | 9 | 2 | 1454 |
| S | 46 | 11 | 9 | 2 | 8 | 10 | 5 | 4 | 12 | 7 | 6 | 3 | 1 | 11 | 1441 |




Observation : Pour cet exemple, l'optimum du problème de voyageur de commerce est atteint.

4.23.2 Exemple 2   N = 12 , IAA = 25

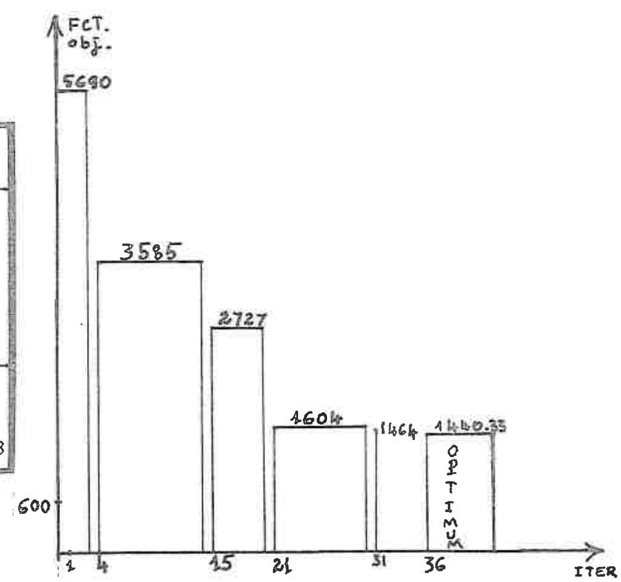
Tableau des distances :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ID : | 197 | 178 | 294 | 155 | 286 | 321 | 348 | 193 | 24 | 410 | 238 | 738 | 286 | 68 | 839 | 416 | 945 |
| ID : | 922 | 26 | 852 | 878 | 597 | 674 | 671 | 960 | 716 | 658 | 498 | 65 | 906 | 853 | 957 | 68 | 792 |
| ID : | 133 | 675 | 845 | 997 | 375 | 275 | 270 | 148 | 453 | 383 | 219 | 869 | 241 | 623 | 566 | 786 | 616 |
| ID : | 622 | 187 | 523 | 451 | 3 | 956 | 705 | 623 | 392 | 748 | 957 | 5 | 414 | 439 | 905 | | |

Tableau des résultats successifs :

F = 5690

| PROG. NBRE | N° ITER | n-cycle | | | | | | | | | | | | | FCT. OBJ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ENTIERS | 4 | 2 | 1 | 12 | 8 | 7 | 11 | 10 | 9 | 5 | 6 | 4 | 3 | 2 | 3585 |
| | 15 | 2 | 1 | 12 | 8 | 7 | 11 | 10 | 9 | 5 | 3 | 6 | 4 | 2 | 2727 |
| | 21 | 2 | 1 | 12 | 8 | 11 | 10 | 6 | 4 | 7 | 9 | 5 | 3 | 2 | 1604 |
| | 31 | 3 | 2 | 11 | 8 | 12 | 1 | 9 | 7 | 4 | 6 | 10 | 5 | 3 | 1464 |
| REELS | 35 | pas de n-cycle | | | | | | | | | | | | | 1444.5 |
| | 36 | pas de n-cycle | | | | | | | | | | | | | 1440.33 |




Observation : Le passage au cas "réels" ne donne pas une solution optimale entière.

4.23.3 Exemple 3 N = 12 , IAA = 27

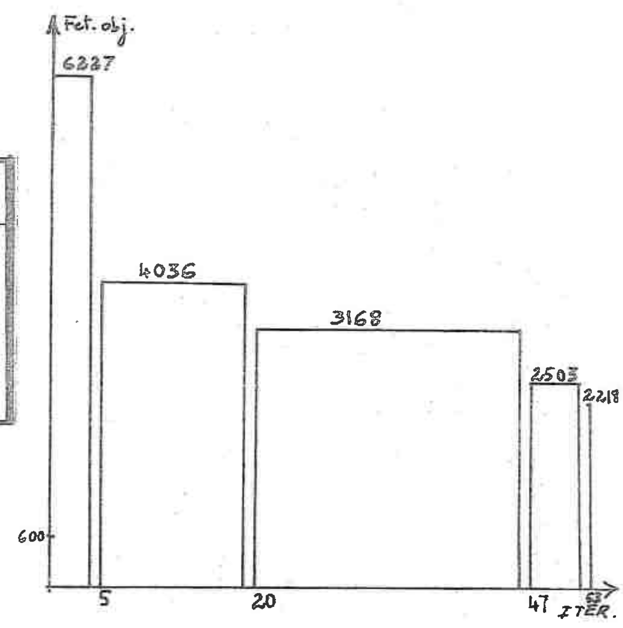
Tableau des distances :

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ID : | 213 | 273 | 717 | 848 | 629 | 147 | 216 | 968 | 866 | 483 | 97 | 237 | 548 | 154 | 986 |
| ID : | 530 | 301 | 36 | 508 | 721 | 749 | 4 | 288 | 685 | 517 | 934 | 951 | 298 | 230 | 699 |
| ID : | 121 | 434 | 514 | 175 | 424 | 969 | 993 | 237 | 485 | 777 | 292 | 760 | 929 | 733 | 37 |
| ID : | 619 | 381 | 713 | 852 | 689 | 465 | 592 | 362 | 844 | 807 | 244 | 192 | 961 | 32 | 544 |
| ID : | 968 | 914 | 765 | 368 | 314 | 577 | | | | | | | | | |

Tableau des résultats successifs :

F = 6227

| PROG. NBRE | N° ITER | n-cycle | | | | | | | | | | | | | FCT. OBJ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ENTIERS | 5 | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 10 | 9 | 12 | 11 | 8 | 7 | 6 | 2 | 4036 |
| | 20 | 4 | 3 | 7 | 8 | 11 | 1 | 6 | 2 | 12 | 9 | 10 | 5 | 4 | 3168 |
| | 47 | 4 | 3 | 7 | 8 | 11 | 2 | 6 | 1 | 5 | 10 | 9 | 12 | 4 | 2503 |
| | 53 | 8 | 7 | 3 | 9 | 10 | 5 | 1 | 6 | 4 | 12 | 2 | 11 | 8 | 2218 |




Observation : Il y a débordement de la matrice C des contraintes, avant d'arriver à l'optimum. Nous avons prévu dans ce cas, l'arrêt du programme

4.23.4 Exemple 4 N = 12 , IAA = 33

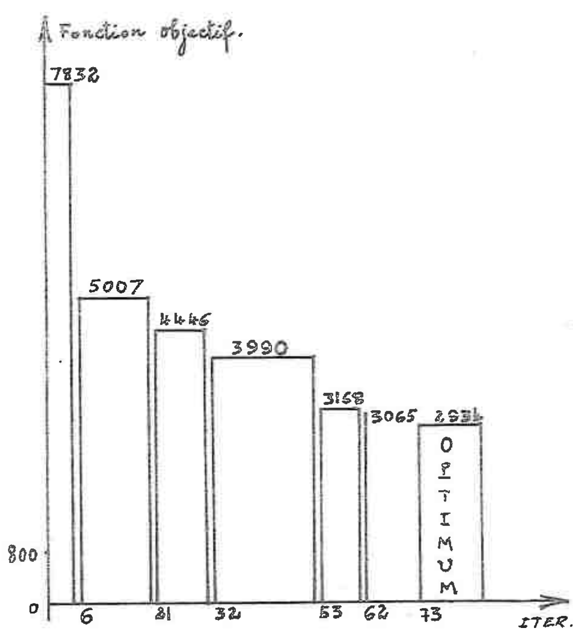
Tableau des distances :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ID : | 260 | 555 | 988 | 925 | 658 | 624 | 819 | 294 | 392 | 701 | 674 | 734 | 337 | 410 | 428 | 870 | 368 |
| ID : | 378 | 955 | 325 | 359 | 228 | 130 | 726 | 187 | 586 | 829 | 697 | 726 | 76 | 926 | 864 | 850 | 325 |
| ID : | 296 | 851 | 436 | 956 | 815 | 283 | 357 | 596 | 358 | 785 | 489 | 868 | 799 | 983 | 708 | 397 | 13 |
| ID : | 501 | 887 | 810 | 876 | 964 | 902 | 730 | 262 | 998 | 628 | 784 | 47 | 227 | 940 | 595 | | |

Tableau des résultats successifs :

F = 7832

| PROG. NBRE | N° ITER | n-cycle | | | | | | | | | | | | | FCT. OBJ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ENTIERS | 6 | 2 | 1 | 3 | 4 | 5 | 10 | 9 | 12 | 11 | 6 | 7 | 8 | 2 | 5007 |
| | 21 | 2 | 1 | 3 | 4 | 10 | 9 | 12 | 11 | 6 | 7 | 5 | 8 | 2 | 4446 |
| | 32 | 2 | 1 | 3 | 4 | 10 | 5 | 7 | 6 | 11 | 9 | 12 | 8 | 2 | 3990 |
| | 53 | 2 | 1 | 3 | 6 | 11 | 7 | 5 | 10 | 4 | 8 | 12 | 9 | 2 | 3168 |
| | 62 | 2 | 1 | 3 | 6 | 11 | 5 | 7 | 10 | 4 | 8 | 12 | 9 | 2 | 3065 |
| REELS | 66 | pas de n-cycle | | | | | | | | | | | | | 2966.5 |
| | 71 | pas de n-cycle | | | | | | | | | | | | | 2955.33 |
| | 73 | 2 | 1 | 8 | 12 | 4 | 10 | 5 | 11 | 6 | 3 | 7 | 9 | 2 | 2934. |




Observation : Le minimum du problème de voyageur de commerce est obtenu après passage au cas des "réels".

4.23.5 Exemple 5 N = 20

Tableau des distances

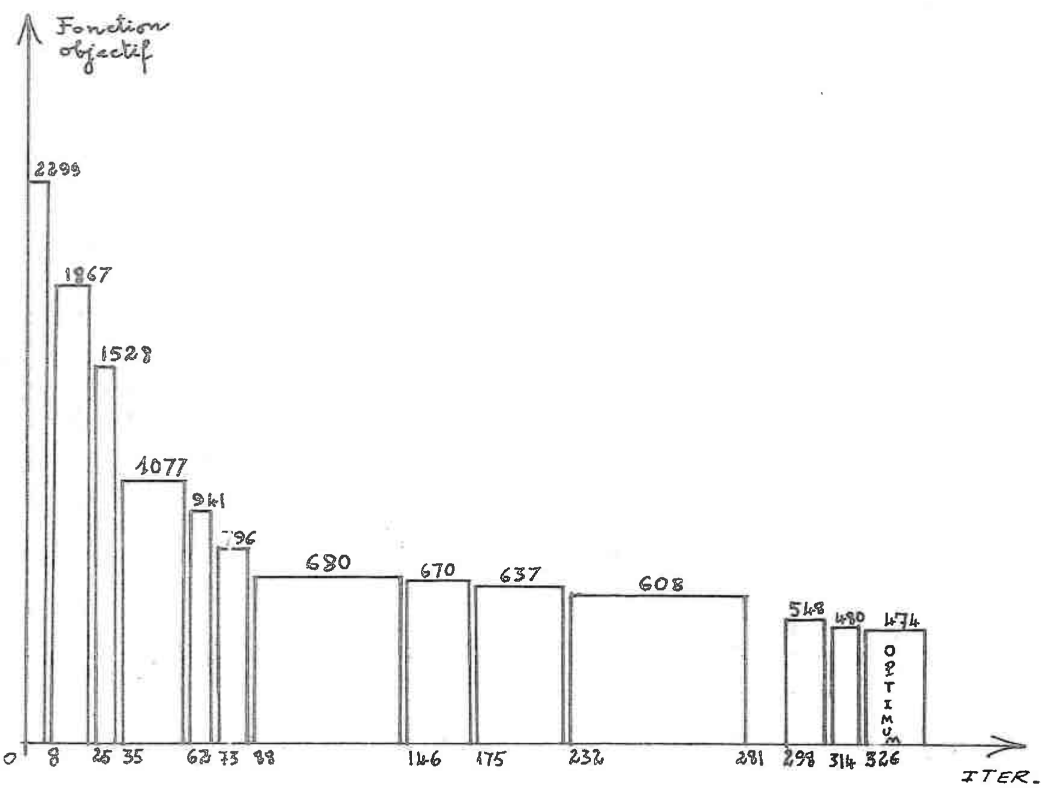
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ID : | 39 | 45 | 37 | 47 | 9 | 50 | 49 | 21 | 15 | 61 | 62 | 21 | 20 | 17 | 58 | 60 | 16 | 17 | 18 | 6 | 59 | 60 | 15 | 20 | 26 | 17 | 10 | 62 | 66 | 20 |
| ID : | 25 | 31 | 22 | 15 | 5 | 81 | 81 | 40 | 44 | 50 | 41 | 35 | 24 | 20 | 103 | 107 | 62 | 67 | 72 | 63 | 57 | 46 | 41 | 23 | 108 | 117 | 66 | 71 | 77 | 68 |
| ID : | 61 | 51 | 46 | 26 | 11 | 145 | 149 | 104 | 108 | 114 | 106 | 99 | 88 | 84 | 63 | 49 | 40 | 181 | 185 | 140 | 144 | 150 | 142 | 135 | 124 | 120 | 99 | 85 | 76 | 35 |
| ID : | 187 | 191 | 146 | 150 | 156 | 142 | 137 | 130 | 125 | 105 | 90 | 81 | 41 | 10 | 161 | 170 | 120 | 124 | 130 | 115 | 110 | 104 | 105 | 90 | 72 | 64 | 34 | 31 | 27 | 142 |
| ID : | 146 | 101 | 104 | 111 | 97 | 91 | 85 | 86 | 75 | 51 | 59 | 29 | 53 | 48 | 21 | 174 | 178 | 133 | 138 | 143 | 129 | 123 | 117 | 118 | 107 | 83 | 84 | 54 | 46 | 35 |
| ID : | 26 | 31 | 185 | 186 | 142 | 143 | 140 | 130 | 126 | 124 | 128 | 118 | 93 | 101 | 72 | 69 | 58 | 58 | 43 | 26 | 164 | 165 | 120 | 123 | 124 | 106 | 106 | 105 | 110 | 104 |
| ID : | 86 | 97 | 71 | 93 | 82 | 62 | 42 | 45 | 22 | 137 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Tableau des résultats successifs

F = 2299.

| Programme en nombre | Numéro itération | n - cycle | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | FONCTION OBJECTIF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ENTIERS | 8 | 2 | 1 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 12 | 13 | 10 | 11 | 8 | 9 | 6 | 7 | 4 | 5 | 3 | 2 | 1867 |
| | 25 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | 8 | 11 | 10 | 13 | 12 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 17 | 2 | 1528 |
| | 35 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | 8 | 11 | 18 | 16 | 15 | 13 | 10 | 12 | 14 | 19 | 20 | 17 | 2 | 1077 |
| | 62 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 7 | 6 | 9 | 8 | 11 | 16 | 18 | 15 | 13 | 10 | 12 | 14 | 19 | 20 | 17 | 2 | 941 |
| | 73 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 7 | 20 | 17 | 19 | 14 | 12 | 10 | 13 | 15 | 18 | 16 | 11 | 8 | 9 | 6 | 2 | 796 |
| | 88 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 7 | 20 | 17 | 19 | 14 | 16 | 18 | 15 | 13 | 11 | 8 | 10 | 12 | 9 | 6 | 2 | 680 |
| | 146 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 7 | 16 | 14 | 19 | 17 | 20 | 18 | 15 | 13 | 11 | 8 | 10 | 12 | 9 | 6 | 2 | 670 |
| | 175 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 7 | 13 | 15 | 18 | 20 | 16 | 14 | 19 | 17 | 12 | 10 | 8 | 11 | 9 | 6 | 2 | 637 |
| | 232 | 6 | 2 | 8 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 | 16 | 14 | 19 | 17 | 12 | 10 | 1 | 3 | 5 | 4 | 7 | 9 | 6 | 608 |
| REELS | 282 | pas de n - cycle | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 572 |
| | 293 | pas de n - cycle | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 566 |
| | 298 | 6 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 | 16 | 14 | 19 | 17 | 12 | 10 | 8 | 6 | 548 |
| | 314 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 | 16 | 14 | 19 | 17 | 12 | 10 | 480 |
| | 326 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 18 | 20 | 17 | 19 | 16 | 14 | 12 | 10 | 474 |

Observation : Le passage au cas des "réels", nous donne une solution optimale au problème de voyageur de commerce.




REPRESENTATION GRAPHIQUE DES RESULTATS DE

L'EXEMPLE 5 (N = 20)

4.23.6 Exemple 6 : N = 25

Tableau des distances :

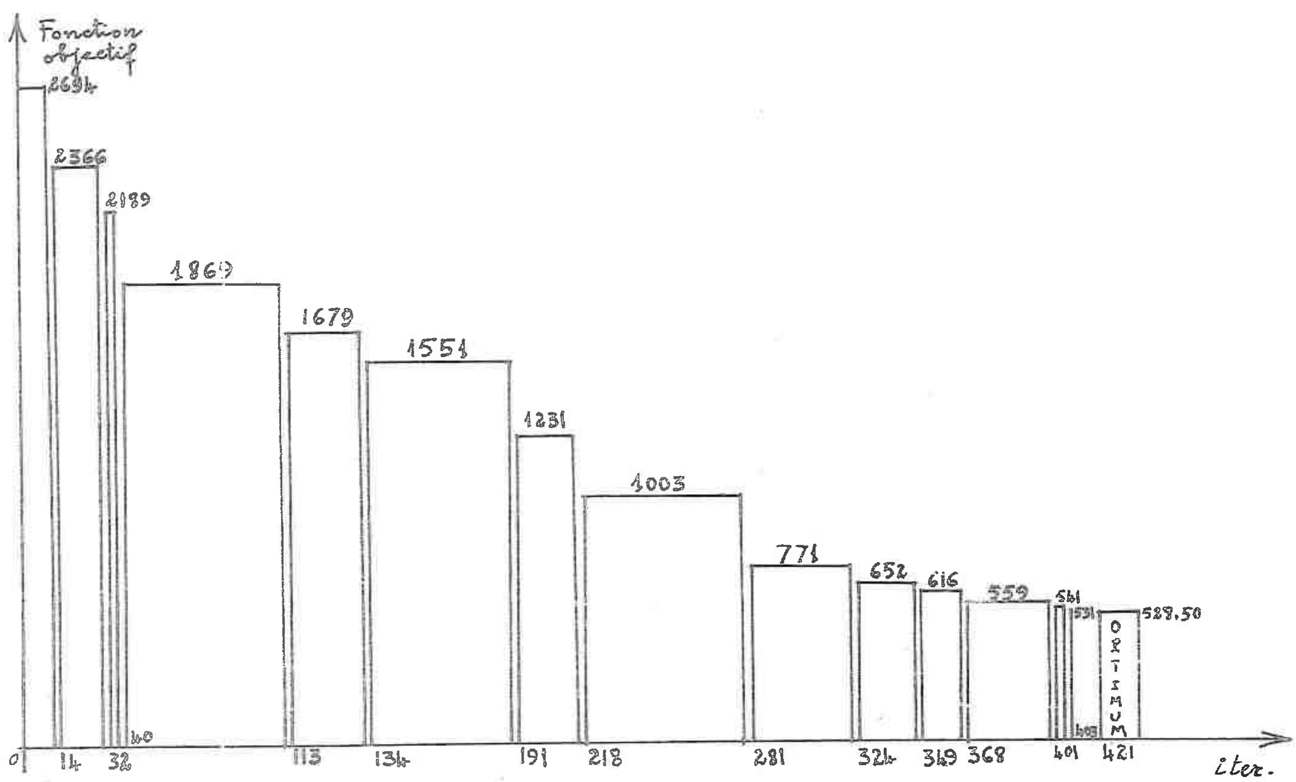
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ID : | 39 | 45 | 37 | 47 | 9 | 50 | 49 | 21 | 15 | 61 | 62 | 21 | 20 | 17 | 58 | 60 | 16 | 17 | 18 | 6 | 59 | 60 | 15 | 20 | 26 | 17 | 10 | 62 | 66 | 20 |
| ID : | 25 | 31 | 22 | 15 | 5 | 81 | 81 | 40 | 44 | 50 | 41 | 35 | 24 | 20 | 103 | 107 | 62 | 67 | 72 | 63 | 57 | 46 | 41 | 23 | 108 | 117 | 66 | 71 | 77 | 68 |
| ID : | 61 | 51 | 46 | 26 | 11 | 145 | 149 | 104 | 108 | 114 | 106 | 99 | 88 | 84 | 63 | 49 | 40 | 181 | 185 | 140 | 144 | 150 | 142 | 135 | 124 | 120 | 99 | 85 | 76 | 35 |
| ID : | 187 | 191 | 146 | 150 | 156 | 142 | 137 | 130 | 125 | 105 | 90 | 81 | 41 | 10 | 161 | 170 | 120 | 124 | 130 | 115 | 110 | 104 | 105 | 90 | 72 | 64 | 34 | 31 | 27 | 142 |
| ID : | 146 | 101 | 104 | 111 | 97 | 91 | 85 | 86 | 75 | 51 | 59 | 29 | 53 | 48 | 21 | 174 | 178 | 133 | 138 | 143 | 129 | 123 | 117 | 118 | 107 | 83 | 84 | 54 | 46 | 35 |
| ID : | 26 | 31 | 185 | 186 | 142 | 143 | 140 | 130 | 126 | 124 | 128 | 118 | 93 | 101 | 72 | 69 | 58 | 58 | 43 | 26 | 164 | 165 | 120 | 123 | 124 | 106 | 106 | 105 | 110 | 104 |
| ID : | 86 | 97 | 71 | 93 | 82 | 62 | 42 | 45 | 22 | 137 | 139 | 94 | 96 | 94 | 80 | 78 | 77 | 84 | 77 | 56 | 64 | 65 | 90 | 87 | 58 | 36 | 68 | 50 | 30 | 117 |
| ID : | 122 | 77 | 80 | 83 | 68 | 62 | 60 | 61 | 50 | 34 | 42 | 49 | 82 | 77 | 60 | 30 | 62 | 70 | 49 | 21 | 114 | 118 | 73 | 78 | 84 | 69 | 63 | 57 | 59 | 48 |
| ID : | 28 | 36 | 43 | 77 | 72 | 45 | 27 | 59 | 69 | 55 | 27 | 5 | 85 | 89 | 44 | 48 | 53 | 41 | 34 | 28 | 29 | 22 | 23 | 35 | 69 | 105 | 102 | 74 | 56 | 88 |
| ID : | 99 | 81 | 54 | 32 | 29 | 77 | 80 | 36 | 40 | 46 | 34 | 27 | 19 | 21 | 14 | 29 | 40 | 77 | 114 | 111 | 84 | 64 | 96 | 107 | 87 | 60 | 40 | 37 | 8 | 87 |

Tableau des résultats successifs :

F = 2694.

| PROGRAMME EN NOMBRE | NUMERO ITERATION | n - cycle | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | FONCTION OBJECTIF |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ENTIERS | 14 | 2 | 1 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 12 | 13 | 10 | 11 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2366 |
| | 32 | 2 | 1 | 25 | 24 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 23 | 14 | 12 | 13 | 10 | 11 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2189 |
| | 40 | 2 | 1 | 4 | 12 | 14 | 23 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 24 | 25 | 10 | 13 | 11 | 9 | 8 | 7 | 5 | 6 | 3 | 2 | 1869 |
| | 113 | 2 | 1 | 4 | 12 | 14 | 23 | 15 | 16 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 22 | 24 | 25 | 10 | 13 | 11 | 9 | 8 | 7 | 5 | 6 | 3 | 2 | 1679 |
| | 134 | 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 8 | 7 | 5 | 9 | 11 | 13 | 10 | 25 | 24 | 22 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 16 | 15 | 23 | 14 | 12 | 2 | 1551 |
| | 191 | 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 8 | 7 | 5 | 9 | 11 | 13 | 10 | 25 | 23 | 15 | 16 | 21 | 24 | 22 | 17 | 18 | 20 | 19 | 14 | 12 | 2 | 1231 |
| | 218 | 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 25 | 23 | 14 | 12 | 18 | 20 | 19 | 17 | 22 | 24 | 21 | 16 | 15 | 13 | 11 | 9 | 2 | 1003 |
| | 281 | 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 25 | 23 | 19 | 17 | 22 | 24 | 21 | 16 | 20 | 18 | 14 | 12 | 15 | 13 | 11 | 9 | 2 | 771 |
| | 324 | 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 | 7 | 25 | 23 | 21 | 16 | 19 | 17 | 20 | 18 | 14 | 12 | 15 | 13 | 11 | 9 | 24 | 22 | 10 | 8 | 2 | 652 |
| | 349 | 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 | 7 | 25 | 23 | 21 | 24 | 9 | 11 | 13 | 15 | 12 | 17 | 19 | 16 | 14 | 18 | 20 | 22 | 10 | 8 | 2 | 616 |
| | 368 | 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 | 7 | 25 | 23 | 21 | 19 | 17 | 15 | 13 | 11 | 9 | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 2 | 559 |
| | 401 | 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 25 | 23 | 21 | 19 | 17 | 15 | 13 | 11 | 9 | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 541 |
| | 403 | 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 25 | 23 | 21 | 19 | 17 | 15 | 13 | 11 | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 531 |
| REELS | 420 | pas de n-cycle | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 529,50 |
| | 421 | pas de n-cycle | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 528,50 |

Observation : Pour cet exemple nous obtenons une solution sous optimale. Le passage au cas des "réels" nous permet de savoir seulement que l'écart entre la solution optimale du problème de voyageur de commerce, et la solution sous-optimale trouvée est inférieur à : 531 - 528,50 = 2,5.




REPRESENTATION GRAPHIQUE DES RESULTATS DE

L'EXEMPLE 6 (N = 25)

Dans la suite d'essais schématisés dans les tableaux précédents, nous avons obtenu les cas suivants :

1°) Solution optimale obtenue sans utiliser le passage en "réels".

2°) Solution optimale obtenue après usage du programme en "réels'

3°) Solution sous-optimale : la solution optimale obtenue après passage en "réels" ne correspond pas à un n-cycle.

4°) Solution intermédiaire : quand la matrice des contraintes se déborde, nous avons prévu l'arrêt du programme.

D'après la représentation graphique, nous constatons que la valeur de la fonction objectif décroit assez vite dès le départ et, de moins en moins vite quand elle s'approche de l'optimum.

Les listings de la bibliothèque des sous-programmes et du programme principal peuvent être obtenus sur demande adressée à :

l'Université de NANCY I
U.E.R. Sciences Mathématiques
Monsieur le Professeur LEGRAS
Case Officielle 140
54037 NANCY CEDEX.

------------

## *CONCLUSION*

*Pour éviter l'encombrement de la mémoire de l'ordinateur, rencontré dans la méthode de LITTLE, nous avons essayé de limiter le nombre de contraintes de sous-cycles utilisées dans le programme. Pour cela nous avons introduit un critère qui permet de savoir à quel moment il faut expliciter telle contrainte.*

*Le choix de pivot égal à un permet d'avoir une solution intermédiaire entière à chaque itération. Si on est obligé d'arrêter le programme avant d'arriver à l'optimum, on aura au moins une solution sous-omptimale qui est la dernière solution entière donnée par l'algorithme.*

*A chaque itération, notre algorithme conduit à une valeur de la fonction objectif inférieure ou égale à la valeur de l'itération précédente. Nous obtenons toujours au moins une solution sous-optimale. L'algorithme permet, dans certains cas, de démontrer, de plus que l'on a obtenu une solution optimale. Dans le cas contraire, on obtient une minorante de l'optimum de la fonction objectif (sauf dans le cas où le traitement doit être interrompu en cours de calcul) : cette minorante est alors obtenue comme minimum du problème linéaire en solution non entière.*

*Il faut noter que notre problème est un problème de programmation linéaire en variables booléennes pour lequel on n'a pas, en général, de critères simples caractérisant l'optimum. La solution obtenue en nombre "réelle" donne une borne inférieure à toute solution du même problème traité en variables entières.*

*Le nombre d'itérations, donc le temps de calcul, pour arriver à la solution sous-optimale dépend de la solution associée au n-cycle choisi au départ, et aussi de la matrice des distances. Dans les résultats précédents, nous avons fixé une fois pour toutes pour n-cycle de départ, le n-cycle (1, 2, 3, ..., n, 1).*

*Si à l'itération p, on arrête le programme pour une raison quelconque (temps de calcul trop long, ou débordement de la matrice C), on a intérêt à prendre la dernière solution entière comme solution de départ lorsqu'on relance de nouveau le programme.*

---

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BERGE C. Théorie des graphes et ses applications. (Dunod, 1963).

[2] DIXMIER J. Cours de Mathématiques du Premier Cycle (Gauthier-Villars, 1969).

[3] DANTZIG G.B. - FULKERSON R. and JOHNSON S. Solution of a large-scale travelling Salesman problem (The Rand Corporation, August, 1954).

[4] DANTZIG G.B. - FULKERSON R. and JOHNSON S. On a linear programming, combinatorial approach to the travelling-salesman problem (Opn Res. 7, (pages 58-66), 1959).

[5] GOEPP D. Adaptation et extension de la Méthode de Little pour une application sur ordinateur solution optimale et solutions sous-optimales. (Thèse de 3ème cycle, 1975, Université de NANCY I).

[6] HERZ J.C. Points frontières entiers des polyèdres convexes (Revue française de traitement de l'information 1964, p. 91 - 103).

[7] LEGRAS J. Cours polycopié de Programmation Linéaire.

[8] LEGRAS J. Méthodes et Techniques de l'Analyse Numérique (Dunod 1971).

[9] ROMAKINE M.I. Eléments d'Algèbre linéaire et de programmation linéaire (Editions d'organisation, 5, rue Rousselet PARIS 7ème).

[ 10 ] SIMONNARD M. Programmation linéaire
(Dunod, 1973 - 2 volumes).

[ 11 ] VAJDA S. Théorie des Jeux et Programmation linéaire
(Monographie Dunod, Paris 1968).

------------

NOM DE L'ETUDIANT : ANN TAY KIM

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE SPECIALITE EN INFORMATIQUE (Informatique de la Décision)

VU, APPROUVE

& PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 15 MARS 1977

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I