

Sc N 77 / 91A

TECHNIQUES D'OPTIMISATION EN
RADIOTHERAPIE EXTERNE

THESE

présentée à
L'UNIVERSITÉ DE NANCY I
pour obtenir le grade de
DOCTEUR ÈS-SCIENCES

par

Hassan ALI AHMED

Soutenu publiquement le 10 Décembre 1977 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. J. LEGRAS

Examineurs : MM. P. BOYER

C. GILORMINI

J.P. HATON

M. LUCIUS

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1



D 095 181172 4

TECHNIQUES D'OPTIMISATION EN
RADIOTHERAPIE EXTERNE

THESE

présentée à
L'UNIVERSITÉ DE NANCY I
pour obtenir le grade de
DOCTEUR ÈS-SCIENCES
par

Hassan ALI AHMED

Soutenue publiquement le 10 Décembre 1977 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

Président : M. J. LEGRAS
Examinateurs : MM. P. BOYER
C. GILORMINI
J.P. HATON
M. LUCIUS

Membres du jury :
Président : M. J. LEGRAS
Examinateurs : MM. P. BOYER
C. GILORMINI
J.P. HATON
M. LUCIUS

A la mémoire de mon Père

A ma Mère

A ma Femme

A mon Fils

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur J. LEGRAS, à qui je dois l'essentiel de ma formation mathématique ; qu'il trouve ici, pour la bienveillance et l'aide incessante qu'il m'a toujours prodiguées, pour les conseils judicieux et les encouragements qu'il m'a donnés, l'expression de ma profonde et respectueuse gratitude.

Je remercie très vivement Monsieur M. LUCIUS et Monsieur P. BOYER pour avoir accepté d'être mes rapporteurs et me faire l'honneur d'être membres du Jury.

Je remercie Monsieur C. GILORMINI et Monsieur J. P. HATON qui ont bien voulu examiner mon travail, et me faire l'honneur de participer au Jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur B. LEGRAS qui m'a fait bénéficier avec bienveillance de sa large connaissance dans le domaine de la radiothérapie. Je n'oublierai jamais ses conseils et ses suggestions qui m'ont été très précieux.

Les programmes ont été mis au point sur l'ordinateur de l'I. U. C. A. de NANCY, dont je remercie le Directeur, ainsi que les Ingénieurs et le Personnel de l'Exploitation.

Mes remerciements s'adressent également au Personnel du Laboratoire d'Informatique de l'U. E. R. Sciences Mathématiques de NANCY I et, à tous mes camarades français et étrangers qui travaillent sous la direction de Monsieur J. LEGRAS.

Enfin, je remercie vivement Madame D^e. MARCHAND qui a assuré avec beaucoup de soin la réalisation matérielle de ce mémoire.

SOMMAIRE

	Pages
INTRODUCTION	I
 <u>CHAPITRE I - TECHNIQUES D'OPTIMISATION</u>	
I.1	Position du problème. 1
I.2	Problème linéaire. 2
I.2.1	Etude de contraintes. 3
I.2.2	Fonctions "objectif" étudiées. 5
I.2.2.1	Minimisation de la somme des doses moyennes des organes sensibles (critère de dose moyenne). 5
I.2.2.2	Minimisation du maximum de la dose délivrée en un point de la tumeur (critère d'homogénéité). 6
I.2.2.3	Minimisation du maximum de la dose délivrée en un point des organes sensibles (critère de seuil). 8
I.2.3	Méthode générale de résolution (méthode du simplexe). 10
I.3	Technique d'amélioration par quadratisation. 13
I.3.1	Présentation du problème. 13
I.3.2	Méthodes de quadratisation : Approximation de $f(X)$ par un polynôme du second degré 14
I.3.2.1	Approximation par développement limité. 15
I.3.2.2	Approximation par un polynôme quadratique d'interpolation. 16
I.3.2.3	Technique de quadratisation partielle. 18
I.3.3	Rappel d'algorithmes d'optimisation d'une fonction de plusieurs variables sans calcul des dérivées. 26

CHAPITRE II - CALCULS PREPARATOIRES A L'OPTIMISATION

II.1	Calcul des doses	29
II.1.1	Caractéristiques du traitement radiothérapique.	30
II.1.2	Etude de l'intersection des axes des faisceaux et du contour du sujet.	33
II.1.3	Calcul de la dose en un point M.	37
II.1.3.1	Cas où M est situé sur l'axe du faisceau.	37
II.1.3.2	Cas où M est situé hors de l'axe du faisceau.	39
II.1.4	Correction de la dose en fonction de l'obliquité.	43
II.2	Usage de coins.	44
II.2.1	Généralités sur les coins.	44
II.2.2	Modification du problème en cas d'usage de coins.	45
II.2.3	Calcul de la dose délivrée en M en présence de coin.	48
II.3	Quadrillage et calcul de la dose moyenne.	50
II.3.1	Quadrillage.	50
II.3.2	Dose moyenne.	54
II.3.2.1	Méthode de calcul.	55
II.3.2.2	Détermination de l'aire élémentaire $\Delta_{i\ell}$.	55
II.3.3	Exemple de quadrillage.	59

CHAPITRE III - PRESENTATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS

III.1	Phase de programmation linéaire.	63
-------	----------------------------------	----

III.1.1	Optimisation en traitement "non défini", "défini" et paramètres calculés.	63
III.1.2	Exemple de traitement "non défini".	67
III.1.3	Exemples de traitement "défini".	74
III.2	Phase d'amélioration par quadratisation.	83
III.2.1	$\Omega(X)$ est le minimum de la somme des doses moyennes des organes sensibles.	83
III.2.2	$\Omega(X)$ est le minimum de la dose maximale délivrée en un point de la tumeur.	89
III.2.3	$\Omega(X)$ est le minimum de la dose maximale délivrée en un point des organes sensibles.	94
	CONCLUSION.	99
	BIBLIOGRAPHIE.	100

TABLE DES NOTATIONS UTILISEES

T	: la tumeur (le volume cible)
n_T	: le nombre de points définis à l'intérieur et sur le contour de la tumeur par le quadrillage effectué
n_O	: le nombre d'organes à protéger (organes sensibles)
O_k	: le k ème organe à protéger
n_{O_k}	: le nombre de points définis à l'intérieur et sur le contour de l'organe O_k par le quadrillage effectué
m	: le nombre de faisceaux
w_j	: le facteur de pondération du faisceau j
d_{ij}	: la dose unitaire délivrée au point i par le faisceau j
D	: la dose totale délivrée en un point par tout l'ensemble des faisceaux
D_T	: la dose seuil admissible à chaque point de la tumeur par tout l'ensemble des faisceaux
D_{O_k}	: la dose seuil admissible à chaque point de l'organe sensible O_k par tout l'ensemble des faisceaux
D_e	: la dose seuil admissible à chaque point d'entrée de faisceau par tout l'ensemble des faisceaux
I_T	: l'ensemble des indices des points de la tumeur
I_{O_k}	: l'ensemble des indices des points de l'organe sensible O_k
I_e	: l'ensemble des indices des points d'entrée des faisceaux
E_T	: l'ensemble des points de la tumeur
E_{O_k}	: l'ensemble des points de l'organe sensible O_k
E^*	: l'ensemble des points de tous les organes sensibles
Γ_o	: le domaine irradié
Γ_T	: le domaine de la tumeur

- A2 -

Γ_k : le domaine de l'organe sensible O_k

C_o : contour du domaine Γ_o

C_T : contour du domaine Γ_T

C_k : contour du domaine Γ_k .

INTRODUCTION

La radiothérapie consiste à délivrer dans un volume de l'organisme qui contient une lésion cancéreuse une dose de radiations ionisantes adéquate.

Parmi les différentes modalités, la radiothérapie externe transcutanée représente le mode d'irradiation de loin le plus utilisé et nous n'envisagerons dans ce travail que la radiothérapie externe transcutanée par Cobalt.

L'irradiation d'une tumeur située à quelque profondeur dans les tissus ne peut pas en général être correctement réalisée avec un seul faisceau, car, d'une part la dose que celui-ci délivre aux tissus sains situés en avant de la tumeur est supérieure à celle délivrée à la tumeur, et d'autre part le gradient de la dose à l'intérieur de la tumeur peut être important si l'épaisseur est grande.

L'utilisation de plusieurs faisceaux convergents vers la tumeur réduit la dose que les tissus sains reçoivent. Le cas où les axes des faisceaux sont coplanaires est le plus fréquent.

Le but d'un plan de traitement radiothérapique est de réaliser l'irradiation homogène de la tumeur en limitant au mieux les tissus en dehors de celle-ci et la dose qui y est délivrée, compte tenu de la radiosensibilité propre à chaque tissu ou organe intéressé.

La détermination manuelle des isodoses résultantes est longue et fastidieuse et sans ordinateur, on se limite en général à une ou deux modalités de traitement.

L'ordinateur permet de calculer de façon précise les doses à l'intérieur d'un contour formé par l'intersection de plan des axes des faisceaux avec le corps du patient, et de sommer rapidement les doses obtenues par chaque faisceau.

On peut essayer ainsi séquentiellement plusieurs combinaisons possibles de champs et choisir la "meilleure" d'entre-elles.

Une nouvelle étape consiste à faire réaliser par l'ordinateur certains choix pour les arrangements des faisceaux et leurs pondérations. C'est le processus de l'optimisation.

On fournit à l'ordinateur une série de contraintes spécifiant les valeurs maximales et minimales des doses à différents emplacements à l'intérieur du contour et celui-ci cherche la meilleure solution.

Les premiers essais sérieux appliquant l'optimisation aux plans de traitement étaient celles de KLEPPER (13), GALLAGHER (8), HOPE et ORR (12).

Le choix de la fonction à optimiser est variable. La plupart des auteurs minimise la dose intégrale aux tissus sains.

KLEPPER (13), BAHR (1) et HODES (10) ont appliqué la technique de programmation linéaire en utilisant comme fonction objectif la dose intégrale.

HOPE et ORR (12) ont calculé différents paramètres "score function" et utilisé trois critères pour l'optimisation, uniformité, dose tumorale et dose intégrale.

BOURGAT et DUTREIX (5) ont choisi comme fonction objectif la dose intégrale aux organes sensibles (minimale).

Le but de notre travail est d'étendre les méthodes précédentes, les changements introduits portent en particulier sur le choix des points où nous exprimons les contraintes, sur l'introduction de différentes fonctions objectifs, entre lesquelles les utilisateurs pourraient choisir la plus utile. De plus nous aborderons l'optimisation non linéaire, faisant intervenir des modifications dans l'emplacement des faisceaux.

Tous ces développements passent nécessairement par le calcul de la dose délivrée en un point par un faisceau et il a fallu choisir entre des formules précises mais lourdes (méthode de Cunningham), ou des formules moins précises mais plus rapides, comme celles de Bourgat et Dutreix.

Dans ce travail où le principal intérêt porte sur les techniques d'optimisation, nous avons préféré utiliser les formules approchées de Bourgat et Dutreix que nous avons étendues pour tenir compte de la correction d'obliquité et de la présence éventuelle de coins.

Il faut noter que les méthodes que nous développons sont valables quelque soit la formulation utilisée pour le calcul des doses.

Un programme mettant en œuvre les techniques d'optimisation développées dans cette thèse et utilisant la méthode de calcul de dose due à Cunningham sera prochainement disponible.

CHAPITRE I

TECHNIQUES D'OPTIMISATION

I.1 POSITION DU PROBLEME

En radiothérapie externe, le patient est irradié par une source de rayonnement qui est fixe ou mobile par rapport au malade.

Nous n'envisagerons dans ce travail que le cas le plus fréquent en pratique où la source est fixe pendant l'irradiation, et nous supposerons que les axes des différents faisceaux sont concourants en un point qui est pris comme origine d'un système d'axes cartésiens.

Pour calculer la dose émise par un faisceau repéré par l'indice j nous introduisons un facteur de pondération w_j , défini comme suit :

nous définissons d'abord la "dose unitaire" qui correspond à une irradiation de 100 rads au point où l'axe du faisceau rencontre le domaine à irradier (point d'entrée). Cette dose unitaire correspond alors à une irradiation d_{ij} émise par le faisceau d'indice j , reçue au point M_i . Le calcul de cette dose unitaire en M_i sera fait ultérieurement.

La dose effectivement délivrée en un point M_i sera proportionnelle à la dose unitaire (le facteur de proportionnalité étant le nombre w_j , dit aussi facteur de pondération) ; elle aura donc pour valeur $d_{ij} \cdot w_j$. En point d'entrée elle vaudra $100 w_j$.

Pour une source donnée, d_{ij} est une fonction de divers paramètres qui sont la position de la source, les dimensions du champ et la distance du point à la source.

Dans ce travail, nous commencerons par traiter le cas où ces paramètres sont fixes, de sorte que d_{ij} n'est plus une variable. Dans ce cas les seules variables que nous chercherons à déterminer sont les facteurs de pondération w_j . Cette détermination sera faite pour un grand nombre de positions

en général équiparties sur un cercle (exemple : sources de 20 en 20 degrés) - ce traitement sera dit traitement "lourd" - ou pour un nombre faible de positions (3 ou 4 positions, fixées à priori) - ce traitement sera dit "léger".

Un deuxième cas, plus général, consiste à rechercher une meilleure solution de la fonction choisie en modifiant légèrement les positions des sources ainsi que les coordonnées du point de concours des axes. Cela sera uniquement appliqué dans le cas du traitement "léger". Nous admettrons que les faisceaux restent concourants et que les dimensions des champs ne sont pas modifiées. L'optimisation n'est plus linéaire et sera résolue par une méthode de quadratisation (I.3 de ce chapitre).

1.2 PROBLEME LINEAIRE

Avant d'étudier les contraintes et les "fonctions objectifs" que nous avons choisies dans ce travail, nous sommes amenés à préciser les définitions suivantes :

Dose totale

On appellera "dose totale" la dose délivrée en un point M_i par l'ensemble des faisceaux. Sa valeur est donc

$$D = \sum_{j=1}^m d_{ij} \omega_j \quad (m : \text{le nombre de faisceaux}) \quad (1)$$

Points de support de l'optimisation

C'est l'ensemble E_n des points M_i auxquels nous calculons la dose unitaire délivrée par chaque faisceau, où

$$\begin{aligned} E_n &= E^* \cup E_T \cup E_e \\ &= E_Q \cup E_e \end{aligned}$$

où E^* est l'ensemble des points de tous les organes sensibles ;

E_T est l'ensemble des points de la tumeur et E_e est l'ensemble des points d'intersection des axes des faisceaux avec le contour du sujet (C_0).

Variables principales du problème

Ce sont les facteurs des pondérations $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$. Il est évident que chacune de ces variables est supérieure ou égale à zéro.

1.2.1 Les contraintes

Les contraintes couramment utilisées, et auxquelles nous nous limiterons sont des contraintes locales, qui font intervenir la dose totale reçue en un point M_i , ces contraintes sont les suivantes :

- i - la dose totale à chaque point de la tumeur doit être supérieure ou égale à une valeur seuil ;
- ii - la dose totale à chaque point d'un organe sensible doit être inférieure ou égale à une valeur seuil, et de même pour les autres organes sensibles, mais cette valeur seuil peut différer d'un organe à l'autre ;
- iii - la dose totale à chaque point d'entrée doit être inférieure ou égale à une valeur seuil.

Les valeurs seuils imposées à la tumeur, à chaque organe et à chaque point d'entrée sont des quantités données.

En introduisant les doses unitaires d_{ij} délivrées par chaque faisceau j en M_i , ainsi que les ω_j , coefficients de pondérations, les contraintes précédentes s'explicitent en :

$$i - \text{Tumeur} \quad \sum_{j=1}^m d_{ij} \omega_j \geq D_T \quad \forall i \quad i \in I_T \quad (2)$$

D_T est une valeur minimale.

ii - Organe sensible O_k

$$\sum_{j=1}^m d_{ij} \omega_j \leq D_{O_k} \quad \forall i \quad i \in I_{O_k} \quad (3)$$

D_{O_k} est une valeur maximale.

iii - Point d'entrée

$$\sum_{j=1}^m d_{ij} \omega_j \leq D_e \quad \forall i \quad i \in I_e \quad (4)$$

D_e est une valeur maximale.

Représentation matricielle

Dans la suite de notre exposé, il sera commode d'utiliser des notations matricielles. Nous introduisons ainsi :

- la matrice des éléments d_{ij} , formée de n lignes et m colonnes où

{	m	est le nombre de variables
}	n	est le nombre de points du support.

Il est commode de distinguer les lignes correspondant aux inégalités des relations (2) qui formeront la sous-matrice A_1 , et les lignes correspondant aux inégalités des relations (3) et (4) qui formeront la sous-matrice A_2 .

- La sous-matrice B_1 des données (valeurs seuils) de la relation (2) et B_2 des relations (3) et (4).

- La matrice Ω des inconnues.

I. 2. 2 Fonctions "objectif" étudiées

Dans les applications réelles, les chercheurs ont été amenés à utiliser diverses fonctions objectifs. Nous sommes ainsi conduit à préciser l'emploi au choix, de trois fonctions objectifs.

- i - La somme des doses moyennes des organes sensibles.
- ii - Le maximum de la dose délivrée en un point de la tumeur.
- iii - Le maximum de la dose délivrée en un point des organes sensibles

Bien entendu, nous n'optimisons que l'un ou l'autre de ces trois objectifs et des essais ultérieurs préciseront les cas d'emploi de chacun d'eux.

I. 2. 2.1 Minimisation de la somme des doses moyennes des organes sensibles (critère de "dose moyenne")

Soit $d_j(x, y)$ la dose unitaire délivrée au point (x, y) par le faisceau j. La dose intégrale unitaire délivrée à l'organe O_k par le faisceau j sera par définition

$$D_{jk} = \iint_{O_k} d_j(x, y) dx dy.$$

La dose totale, délivrée par l'ensemble des faisceaux sera

$$\sum_j \omega_j D_{jk}$$

La dose moyenne pour un organe sera

$$\frac{\sum_j \omega_j D_{jk}}{S_k} = \sum_j \omega_j \bar{D}_{jk}$$

où $S_k = \iint_{O_k} dx dy$, représente l'aire de la section de cet organe par le plan de coupe.

La fonction objectif sera la somme des doses moyennes de chaque organe, c'est-à-dire

$$F = \sum_j \omega_j \left(\sum_{k=1}^{n_O} \bar{D}_{jk} \right).$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ z \end{bmatrix}$$

1.2.2.3 Minimisation du maximum de la dose délivrée en un point des organes sensibles (critère de seuil)

Il peut arriver, en cas de tumeur profonde ou lorsque le nombre de faisceaux est faible qu'il n'y ait pas de solution réalisable, c'est-à-dire compatible avec les contraintes.

On peut se demander comment modifier les contraintes ou certaines d'entre elles, par exemple en diminuant la dose seuil à la tumeur ou en augmentant la dose seuil aux organes sensibles.

Dans notre problème, nous avons choisi de modifier la limite supérieure des doses aux organes sensibles ; la limite minimale à la tumeur reste sans changement.

Pour atteindre ce but, nous minimisons le maximum de la dose délivrée à l'organe sensible considéré.

Comme précédemment nous introduisons une variable auxiliaire Y supérieure à la dose délivrée en chaque point et minimiser Y.

Donc la fonction objectif devient

$$F = Y.$$

Cas de plusieurs organes sensibles (3 organes)

Dans ce cas, nous avons fixé la dose seuil pour le seul organe O_3 et cherchons à minimiser Y qui est délivrée aux organes sensibles O_1 et O_2

$$\sum_{j=1} d_{ij} w_j - Y \leq 0 \quad \forall i \quad i \in (I_{O_1} \cup I_{O_2})$$

tandis que

$$\sum_{j=1} d_{ij} w_j \leq D_{O_3} \quad \forall i \quad i \in I_{O_3}$$

Le vecteur colonne à ajouter à la matrice de contraintes A a n éléments La matrice A sera donc de l'ordre [n (m+1)] et la nouvelle colonne aura comme éléments :

$$i - d_{i,m+1} = 0 \quad \forall i \quad i \in I_T$$

$$ii - d_{i,m+1} = -1 \quad \forall i \quad i \in (I_{O_1} \cup I_{O_2})$$

$$iii - d_{i,m+1} = 0 \quad \forall i \quad i \in I_{O_3}$$

$$iv - d_{i,m+1} = 0 \quad \forall i \quad i \in I_e$$

Dans le cas d'un seul organe sensible O_1 , ii et iii sont remplacés par

$$d_{i,m+1} = -1 \quad \forall i \quad i \in I_{O_1}$$

Le vecteur colonne des variables sera donc le même que dans le cas précédent (critère d'homogénéité).

1.2.3 Méthode générale de résolution

Il s'agit de minimiser une fonction linéaire F de p variables x_j (j = 1, 2, ... p) où

$$F = \sum_{j=1}^p C_j x_j$$

Ces variables sont liées par des contraintes, mises sous forme canonique

$$\sum_{j=1}^p d_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, n_T \quad (a)$$

$$\sum_{j=1}^p d_{ij} x_j \leq b_i \quad i = n_T + 1, \dots, N \quad (b)$$

Bien entendu, le nombre de variables p sera, soit égal à m (critère de dose moyenne), soit égal à $m+1$ (critère d'homogénéité ou critère de seuil).

Le nombre de contraintes N sera soit égal à n (critère de dose moyenne ou critère de seuil), soit égal à $n + n_T$ (critère d'homogénéité).

En désignant par A la matrice de contraintes de dimensions $(N \times p)$ et par A_1 et A_2 les deux sous-matrices de A contenant les éléments d_{ij} des inégalités (a) et (b) respectivement, nous aurons comme forme matricielle du problème linéaire

$$F = C \cdot X$$

avec

$$A_1 X \geq B_1$$

$$A_2 X \leq B_2$$

$$X \geq 0$$

Introduction des variables d'écart

Pour mettre le problème (5) sous forme standard, nous remplaçons toutes les contraintes de l'ensemble des points de la tumeur (contraintes de type \geq) par

$$\sum_{j=1}^p d_{ij} x_j - x_{i+p} = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n_T \in I_T \quad (a')$$

où

$$x_{i+p} \geq 0.$$

De même, nous remplaçons toutes les contraintes de type \leq par

$$\sum_{j=1}^p d_{ij} x_j + x_{i+p+n_T} = b_i \quad i = n_T + 1, \dots, N \quad (b')$$

où

$$x_{i+p+n_T} \geq 0$$

x_{i+p} et x_{i+p+n_T} sont des variables d'écart, affectées des coefficients nuls dans la fonction objectif.

Introduction des variables artificielles

Pour construire la matrice $I^{(N)}$, nous remplaçons le système (a') par

$$\sum_{j=1}^p d_{ij} x_j - x_{i+p} + x_{i+N+p} = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n_T \quad (a'')$$

où

$$x_{i+N+p} \geq 0$$

x_{i+N+p} ($i = 1, 2, \dots, n_T$) sont les variables artificielles. Elles sont ajoutées uniquement pour les contraintes de type " \geq ". Chacune de ces variables est affectée d'un coefficient unité dans la fonction auxiliaire pris comme objectif de la première phase.

Les vecteurs-unités associés aux n_T variables artificielles de système (a'') et aux $(N - n_T)$ variables d'écart de système (b') précédées du signe positif constituent $I^{(N)}$ matrice unité de sorte que le système de contraintes problème initial est donc finalement remplacé par le suivant

$$A^* X = B \quad (6)$$

où

$$X = \begin{bmatrix} X_r \\ X_e \\ X^a \\ \bar{X}_e \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

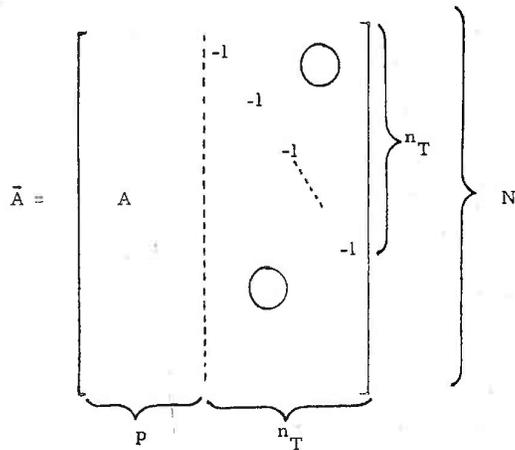
- X_r sont les p variables principales du problème (5)
- X_e et \bar{X}_e sont deux sous-matrices de variable d'écart dont les coefficients sont respectivement de signes négatif et positif
- X^a représentent une sous-matrice des variables artificielles.

Notons que X_r, X_e, \bar{X}_e, X^a et $B \geq 0$

La matrice A^* s'écrit :

$$A^* = [\bar{A}, I^{(N)}]$$

où



Donc A^* est de dimension $[N, (p + n_T + N)]$.

Le système d'équations (6) sera supposé non redondant et possédant plus d'une solution c'est-à-dire

$$N < (p + n_T + N)$$

et $r(A^*) = N$.

Donc la base L du système (6) est la base de l'ensemble de N vecteurs, d_j linéairement indépendants, et les variables de base sont les variables associées aux colonnes de la base L , elles constituent un sous-vecteur X^L de la base L .

Les autres variables $(p + n_T)$ sont les variables hors base et constituent le sous-vecteur X^H complémentaire de X^L dans X .

Donc, notre problème de programmation linéaire s'écrit alors :

$$\text{minimiser} \quad F = C \cdot X_r + \sum_{i=1}^{n_T} x_i^a$$

avec

$$A^* X = B \tag{7}$$

$$X \geq 0.$$

La solution du problème (7) se fait en deux phases distinctes. La première phase permet de chercher s'il existe des programmes de base, dans l'affirmative d'en calculer un. La deuxième phase conduit, à partir du programme déterminé par la phase 1 à l'obtention d'un programme optimal.

I.3 TECHNIQUE D'AMELIORATION PAR QUADRATISATION

I.3.1 Présentation du problème

Il s'agit de minimiser :

$$F = C \cdot X$$

avec $AX \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} B$ où $A = (d_{ij})$.

Dans ce problème les d_{ij} dépendent des nouvelles variables x_o, y_o repérant le centre de la tumeur ainsi que des angles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ repérant chaque faisceau.

Nous avons donc deux groupes d'inconnues :

- i - les coefficients de pondérations w_j qui interviennent linéairement ;
- ii - les nouvelles variables $x_o, y_o, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$.

La méthode que nous nous proposons, consiste à rechercher la distribution optimum pour un ensemble de valeurs $x_o, y_o, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ fixé, optimum obtenu par optimisation linéaire sur les w_j . Cet optimum Ω dépend de $x_o, y_o, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$.

Nous pouvons dire que Ω est une fonction de plusieurs variables. Elle est difficile à expliciter mathématiquement mais elle est en général une fonction non linéaire par rapport à ces variables supposées indépendantes.

Nous nous proposerons au paragraphe suivant de développer une méthode de quadratisation qui permet de résoudre ce problème, en modifiant certaines des variables pour améliorer (diminuer) l'optimum $\Omega(x_o, y_o, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$.

1.3.2 Méthodes de quadratisation : Approximation de $f(X)$ par un polynôme du second degré.

Ces méthodes sont des méthodes itératives : en X^r comme nous approchons $f(X)$ par un polynôme $p(X)$ du second degré en x_1, x_2, \dots, x_n . Nous cherchons alors X^{r+1} qui maximise $p(X)$. Les méthodes diffèrent par le choix de $p(X)$.

I.3.2.1 Approximation par développement limité

Développons $f(X)$ au voisinage de X^r par son développement limité aux termes d'ordre 2 inclusivement :

$$f(X) = f(X^r) + B^t \cdot (X - X^r) + \frac{1}{2} {}^t(X - X^r) \cdot A \cdot (X - X^r) + O(X - X^r)^3 \quad (8)$$

où $\begin{cases} B \text{ est le gradient de } f \text{ calculé en } X^r \\ A \text{ est le hessien, matrice carrée } n \times n \text{ de terme général } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{X^r} \end{cases}$
et prenons comme polynôme approchant

$$p(X) = f(X^r) + B^t (X - X^r) + \frac{1}{2} {}^t(X - X^r) A (X - X^r) \quad (9)$$

le maximum de $p(X)$ aura pour coordonnées la solution de

$$A(X - X^r) + B = 0 \quad (10)$$

système linéaire de n équations à n inconnues. Cette solution X^{r+1} correspondra à un maximum si A est définie négative.

Les itérations successives, X^r, X^{r+1}, \dots se feront donc à chaque étape par résolution du système

$$A(X - X^r) + B = 0 \quad (11)$$

où A et B dépendent de X^r .

Remarques : i) Si $f(X)$ est un polynôme du second degré, $p(X)$ et $f(X)$ sont identiques et X^1 sera le tableau des coordonnées de l'optimum de $f(X)$ (solution stricte en une itération, quelque soit le tableau initial).

ii) La relation (11) entraîne

$$X^{r+1} = X^r - A^{-1} \cdot B \quad (12)$$

où $B = (\text{grad}f)_{X^r}$

$$A = \text{matrice } n \times n \text{ de terme } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{X^r}$$

La relation (12) est identique à la relation liant deux itérés successifs X^r et X^{r+1} obtenus en résolvant le système

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X) = 0 \quad \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} = 0$$

par linéarisation (méthode de Newton).

L'usage des critères de caractérisation de l'optimum où l'approche de $f(X)$ par son développement limité à l'ordre 2 conduisent tous deux au même algorithme : la mise en œuvre de la relation itérative (12).

1.3.2.2 Approximation par un polynôme quadratique d'interpolation

Nous cherchons un polynôme $p(X)$ du second degré en x_1, x_2, \dots, x_n qui interpole $f(X)$ sur un support d'interpolation "simple", choisi pour faciliter les calculs.

Introduisons d'abord les tableaux suivants :

E_i : tableau de n éléments, où l'élément de rang i est égal à 1 et où tous les autres sont nuls.

E_j : tableau de n éléments où l'élément de rang j ($j \neq i$) est égal à 1 et où tous les autres sont nuls.

Le support choisi est formé :

1°) du tableau X^r : $x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r$

2°) des n tableaux $X^r + h_i E_i$: $x_1^r, x_2^r, \dots, x_1^r + h_i, \dots, x_n^r$

où $i = 1, 2, \dots, n$

3°) des n tableaux $X^r - h_i E_i$: $x_1^r, x_2^r, \dots, x_1^r - h_i, \dots, x_n^r$

4°) des $\frac{n(n-1)}{2}$ tableaux $X^r + h_i E_i + h_j E_j$: $x_1^r, x_2^r, \dots, x_j^r + h_j, \dots, x_i^r + h_i, \dots, x_n^r$

où $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, i-1$

h_i est un paramètre (pas choisi).

Pour alléger l'écriture nous prenons comme origine le tableau X^r et comme variable auxiliaire $X' = X - X^r$. Les nouvelles coordonnées du support d'interpolation s'obtiendront en faisant $X^r = 0$ dans les formules précédentes.

Le polynôme d'interpolation $p(X')$ s'écrira alors :

$$p(X') = a + \sum_{i=1}^n [b_i x_i' + \frac{1}{2} c_i x_i'^2] + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i-1}} d_{ij} x_i' x_j'$$

Nous écrivons que $p(X') = f(X')$ lorsque X' prend successivement les valeurs du support choisi. Un calcul élémentaire conduit aux résultats suivants

$$a = f(X^r)$$

$$b_i = \frac{1}{2h_i} [f(X^r + h_i E_i) - f(X^r - h_i E_i)]$$

(13)

$$c_i = \frac{1}{h_i^2} [f(X^r + h_i E_i) - 2f(X^r) + f(X^r - h_i E_i)]$$

$$d_{ij} = \frac{1}{h_i h_j} [f(X^r + h_i E_i + h_j E_j) - f(X^r + h_i E_i) - f(X^r + h_j E_j) + f(X^r)]$$

Il est commode d'introduire :

- { le tableau B , dont les éléments sont b_1, b_2, \dots, b_n ;
- { le tableau carré symétrique A , où les éléments de la diagonale principale sont c_1, c_2, \dots, c_n ; et tout élément sur la i ème ligne et j ème colonne est d_{ij} .

On peut alors écrire

$$p(X') = f(X^r) + B^t (X - X^r) + \frac{1}{2} (X - X^r)^t \cdot A (X - X^r)$$

Le maximum de $p(X)$ aura pour coordonnées la solution de

$$A (X - X^r) + B = 0.$$

Les itérations successives $\dots X^r, X^{r+1}, \dots$ se feront donc à chaque étape pour la résolution du système linéaire.

$$A (X - X^r) + B = 0$$

X^{r+1} peut donc s'écrire

$$X^{r+1} = X^r - A^{-1} \cdot B \quad (14)$$

où A et B se calculent à partir de X^r par les relations (13).

Remarque : lorsque h, pas d'interpolation, tend vers 0,

$$b_i \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{X^r} \quad d_{ij} \rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{X^r}$$

B est un tableau approchant (grad f)
 X^r

A est un tableau approchant le hessien de f calculé en X^r .

Il y a donc une parenté certaine entre les méthodes décrites en I.3.2.1 et I.3.2.2, parenté qui justifie que nous ayons introduit les mêmes relations A et B dans ces deux paragraphes.

I.3.2.3 Technique de quadratisation partielle

La convergence de la suite itérative définie par (14) est en général excellente lorsque le nombre de variables est faible et que le tableau initial X^0 n'est pas trop éloigné de la solution X^* , mais elle est d'autant plus difficile à obtenir que X^0 est plus éloigné de X^* , cette difficulté étant aggravée lorsque le nombre de variables augmente.

Pour parer à cet inconvénient, nous avons modifié les méthodes de quadratisation pour les transformer en "méthodes de montée" plus sûres.

Cette adaptation est déduite des propriétés suivantes :

1 - si la matrice A est définie négative

"la droite $X^r X_r^*$, joignant le tableau X^r (obtenu à l'itération précédente et point de départ de l'itération en cours) à X_r^* , tableau des coordonnées du maximum du polynôme approchant, est direction de montée."

Nous ferons la démonstration dans le cas où p (X) est le développement de $f (X - X^r)$ limité aux termes du second ordre,

On a alors :

$$p (X) = f (X^r) + B^t (X - X^r) + \frac{1}{2} {}^t (X - X^r) A \cdot (X - X^r)$$

$$\text{et } f (X) = p (X) + O (X - X^r)^3.$$

Par définition, X_r^* est solution de

$$A (X_r^* - X^r) + B = 0 \quad (15)$$

Supposons que X soit un "point" du segment $X^r X_r^*$, et posons

$$X = X^r + \lambda (X_r^* - X^r) \quad \text{avec } 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (16)$$

p (X) devient, compte tenu de (15) et de (16)

$$p (X) = f (X^r) + \lambda \cdot B^t \cdot (X_r^* - X^r) + \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) [{}^t (X_r^* - X^r) \cdot A \cdot (X_r^* - X^r)]$$

Remplaçons B^t par $- {}^t (X_r^* - X^r) \cdot A$, (compte tenu (15)), p (X) devient

$$f (X^r) - \lambda {}^t (X_r^* - X^r) \cdot A (X_r^* - X^r) + \left(\frac{\lambda^2}{2} \right) {}^t (X_r^* - X^r) A (X_r^* - X^r)$$

soit

$$p (X) = f (X^r) - \frac{2\lambda - \lambda^2}{2} {}^t (X_r^* - X^r) A (X_r^* - X^r).$$

Or, $2\lambda - \lambda^2 > 0$ et, comme nous avons supposé la matrice A définie négative, le terme

$$- \frac{2\lambda - \lambda^2}{2} (X_r^* - X^r) A (X_r^* - X^r)$$

est positif ce qui entraîne

$$p (X) > f (X^r).$$

La différence $f (X) - p (X)$ est un infiniment petit du 3ème ordre en λ , alors que la différence $p (X) - f (X^r)$ est un infini petit de 2ème ordre ; lorsque λ tend vers 0, c'est donc cette dernière qui donne son signe d'où :

$$f [X^r + \lambda (X - X^r)] > f (X^r)$$

pour λ , positif assez petit.

Cas où p (X) est un polynôme d'interpolation

Nous avons vu que le polynôme d'interpolation tendait vers le polynôme formé par le développement limité lorsque le pas d'interpolation h tend vers zéro.

Il est donc à prévoir que le théorème précédent restera valable lorsque h est "assez petit". Mais comme il n'est pas possible de caractériser cette valeur limite, il faudra introduire une sécurité arrêtant le programme après impression d'un message d'incident lorsque λ devient inférieur à une valeur fixée ε, sans que nous ayons vérifié

$$f [X^r + \lambda (X_r^* - X^r)] > f (X^r).$$

ii - Cas où A n'est pas définie négative

Nous savons que A est, soit le hessien de la fonction f (X), soit un approchant de ce hessien ; si f (X) possède un maximum en X*, le hessien sera défini négatif en ce point et il est naturel de penser que le hessien ou son approchant sera défini négatif au voisinage de X*, mais lorsque nous partons d'un X⁰ initial arbitraire, il n'y a aucune raison pour que, en ce point, le hessien ou son approchant soit défini négatif et que la direction X_r^{*} - X^r précédemment définie soit direction locale de montée.

Pour définir dans ce cas une direction locale de montée, nous opérerons comme suit :

supposons que : par une technique que nous exposerons au paragraphe suivant, nous ayons pu extraire de A, par suppression de lignes et de colonnes une matrice \bar{A} définie négative.

Désignons par :

X₁ = le tableau des éléments de X des lignes supprimées dans A et par R₁ l'espace défini par les éléments de X₁.

X₂ = le tableau des éléments de X des lignes non supprimées dans A et par R₂ l'espace correspondant.

Introduisons alors le tableau X' - X^r tel que :

i) les éléments correspondant aux lignes supprimées sont nuls

$$(X_1 - X_1^r = 0).$$

ii) Les autres sont identiques à ceux de X₂ - X₂^r, il est facile de démontrer que

$${}^t(X' - X^r) A (X' - X^r) = {}^t(X_2 - X_2^r) \bar{A} (X_2 - X_2^r) \quad (17)$$

nous nous contenterons de le vérifier sur un cas simple : prenons n = 5 et supposons que les lignes et colonnes supprimées dans A sont les lignes et colonnes d'indices 2 et 3. La relation (17) est explicitée ci-dessous ; nous poserons X₂ - X₂^r = δ X, dont les éléments sont :

$$\delta x_1, \delta x_4, \delta x_5$$

le premier membre de (17) s'écrit :

$$[\delta x_1 \ 0 \ 0 \ \delta x_4 \ \delta x_5] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \delta x_4 \\ \delta x_5 \end{bmatrix}$$

le second membre est :

$$[\delta x_1 \ \delta x_4 \ \delta x_5] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{14} & a_{44} & a_{45} \\ a_{15} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_4 \\ \delta x_5 \end{bmatrix}$$

chacun de ces membres vaut :

$$a_{11} \delta x_1^2 + a_{44} \delta x_4^2 + a_{55} \delta x_5^2 + 2(a_{14} \delta x_1 \delta x_4 + a_{15} \delta x_1 \delta x_5 + a_{45} \delta x_4 \delta x_5).$$

On déduit de (22), puisque \bar{A} est définie négative, que

$${}^t(X_2 - X_2^r) \cdot \bar{A} \cdot (X_2 - X_2^r) \leq 0$$

donc

$${}^t(X' - X'^r) A (X' - X'^r) \leq 0 \quad (18)$$

La restriction imposée à $X' - X'^r$ revient à bloquer ou immobiliser les variables appartenant à R_1 , d'où le nom de "quadratisation partielle" ne mettant en oeuvre que les variables appartenant à R_2 .

Détermination de R_2

Cette détermination se fait par une extension de la décomposition de CHOLESKI : cette dernière consiste à égaler la matrice $-A$ au produit $S \cdot S^t$, d'une matrice S triangulaire inférieure par sa transposée :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 & \dots \\ s_{12} & s_{22} & 0 & \dots \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots \\ 0 & s_{22} & s_{23} & \dots \\ 0 & 0 & s_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

l'intérêt de cette décomposition est qu'il est possible de calculer, colonne par colonne, les éléments de S . Supposons par exemple, que les éléments des deux premières colonnes de S soient déjà calculés, et cherchons ceux de la 3ème.

En identifiant aux deux membres le terme situé 3ème ligne, 3ème colonne et compte tenu de la structure de S et S^t nous obtenons :

$$s_{13}^2 + s_{23}^2 + s_{33}^2 = -a_{33}$$

comme s_{13} et s_{23} ont été précédemment calculés, cette relation définit s_{33} par

$$s_{33}^2 = -a_{33} - s_{13}^2 - s_{23}^2$$

Si le second membre est positif, nous prendrons :

$$s_{33} = \sqrt{-a_{33} - s_{13}^2 - s_{23}^2}$$

Une fois s_{33} calculé, on explicitera aux deux membres le terme en 4ième ligne, 3ème colonne, soit :

$$s_{14} s_{13} + s_{24} s_{23} + s_{34} s_{33} = -a_{34}$$

s_{14} , s_{24} ; s_{13} , s_{23} appartiennent aux colonnes 1 et 2 et sont connus, s_{33} vient d'être calculé et est non nul, d'où

$$s_{34} = \frac{-a_{34} - s_{14} s_{13} - s_{24} s_{23}}{s_{33}}$$

et de proche en proche, on déterminera ainsi les éléments de la 3ème colonne de S .

Or le produit $S \cdot S^t$ d'une matrice par sa transposée est nécessairement défini positif. La méthode de CHOLESKI ne permettra le calcul de S que si A est défini négatif. Si ce n'est pas le cas, il y aura nécessairement des éléments s_{ii} , le second membre dont le calcul ne sera pas possible ; ceci se produit lorsque :

$$s_{ii}^2 = -a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ik}^2 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

est négatif ou nul.

L'extension de la méthode de CHOLESKI que nous utiliserons, consiste à supprimer, dans les matrices $S \cdot S^t$ et A la ligne et la colonne de tout élément s_{ii}^2 égal à un nombre positif ou nul.

Bien entendu, on ne tiendra plus compte, dans la suite, des éléments s_{ij} supprimés ; c'est ainsi que nous avons gardé les 2 premières lignes et colonnes et supprimé 3ème ligne et 3ème colonne, nous calculerons s_{44} par

$$s_{44}^2 = -a_{44} - s_{14}^2 - s_{24}^2$$

formule dans laquelle n'interviendra pas le terme s_{34} de la colonne supprimée.

Si $a_{44} + s_{14}^2 + s_{24}^2 < 0$, $s_{44}^2 > 0$ nous gardons 4ème ligne et 4ème colonne et calculerons les éléments s_{45} , s_{46} ... de la 4ème colonne de S.

Le test de signe sur les s_{ii}^2 nous permettra donc de déterminer :

- i) les lignes et colonnes à supprimer, les éléments correspondants (de même indice) de X forment X_1 ;
- ii) les lignes et colonnes de S, A à conserver. Ces lignes et colonnes définiront deux matrices \bar{S} et \bar{A} ; les éléments correspondants de X forment X_2 et définissent l'espace R_2 .

Ces matrices vérifient, par construction la relation

$$\bar{S} \cdot {}^t\bar{S} = -\bar{A}$$

qui montre que \bar{A} sera par construction une matrice définie négative.

Nous ferons une quadratisation partielle dans le seul sous-espace R_2 , c'est-à-dire que nous approcherons $f(X)$ en interpolant dans R_2 par

$$p_2(X_2^r) = f(X^r) + \bar{B}^t(X_2 - X_2^r) + \frac{1}{2} {}^t(X_2 - X_2^r) \bar{A} (X_2 - X_2^r).$$

Le maximum de ces polynômes aura pour coordonnées $(\phi) X_2^*$ et X_2^r sera direction de montée pour $f(X)$ puisque \bar{A} est une matrice définie négative, c'est-à-dire que l'on pourra trouver λ assez petit pour que

$$f(X^{r+1}) > f(X^r)$$

où

$$\begin{cases} X_1^{r+1} = X_1^r & \text{(invariance de ces variables)} \\ X_2^{r+1} = X_2^r + \lambda (X_2^* - X_2^r) \end{cases} \quad (19)$$

ϕX_2^* sera solution de $\bar{A} \cdot (X_2^* - X_2^r) + \bar{B} = 0$ dont le calcul sera facilité en utilisant la décomposition de \bar{A} en $-S \cdot {}^t\bar{S}$ (méthode de CHOLESKI).

Algorithme de quadratisation partielle

Il comporte 4 phases :

- i) recherche de \bar{A} , \bar{S} ainsi que de R_2 .
- ii) Dans R_2 , quadratisation partielle et calcul de X_2^* , coordonnées du maximum de $p_2(X_2)$.
- iii) Calcul de X^{r+1} par les relations (19) ou nous faisons $\lambda = 1$
- iv) Test de la condition

$$f(X^{r+1}) > f(X^r).$$

Si la relation est vérifiée, on prend X^{r+1} , valeur que nous venons de calculer, comme valeur de départ pour l'itération suivante (retour en ii).

Si la relation n'est pas vérifiée, on divise λ par 2. On calcule X^{r+1} par la relation (19) et on retourne en iv).

Remarques :

- 1°) La méthode de quadratisation partielle est plus sûre que la simple quadratisation, mais ne garantit pas la convergence : il est possible par exemple que, à une itération, R_2 soit vide.

Il faudra donc dans le programme, prévoir des sécurités portant sur les points suivants :

- R_2 est non vide
- Le nombre de bipartitions de λ (phase iv) ne dépasse pas un nombre fixé.
- Le nombre d'itérations ne dépasse pas un nombre préalablement fixé.

En cas d'incident, il y aura impression d'un message d'incident et arrêt du programme.

- 2°) Au voisinage de la solution, on peut s'attendre à ce que X_1 soit vide ($\bar{A} \equiv A$) et à ce que $\lambda = 1$. Il y a alors identité entre quadratisation partielle et quadratisation simple.
- 3°) La technique de quadratisation partielle est valable quelque soit le mode de détermination du polynôme approchant : développement limité ou polynôme d'interpolation quadratique.

Dans notre problème particulier, nous nous proposons de chercher un minimum de $\Omega(X)$, ou à défaut des valeurs décroissantes, améliorant les résultats.

La méthode mise en œuvre est une méthode de quadratisation partielle par interpolation, utilisant des programmes de bibliothèque (14). Ces programmes sont prévus pour la recherche d'un maximum, nous remplaçons donc la recherche du minimum de $\Omega(X)$ par la recherche du maximum de $-\Omega(X)$ que nous noterons $F(X)$.

I.3.3 Rappel d'algorithmes d'optimisation d'une fonction de plusieurs variables sans calcul des dérivées

Depuis une vingtaine d'années, plusieurs auteurs se sont intéressés à l'optimisation de fonctions de plusieurs variables, lorsque les dérivées de cette fonction ne sont pas accessibles.

Parmi les premières méthodes, la méthode de Hooke et Jeeves et celle de Rosenbrock étaient les plus efficaces (7).

A l'exception de ces premières méthodes, ces méthodes d'optimisation se groupent en deux familles.

La première revient à utiliser les techniques conventionnelles du gradient en approchant ce dernier par des différences (STEWART (30)) sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(X + h_i E_i) - f(X)}{h_i}$$

ou en forme modifiée (STEWART (30) et LILL (17))

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(X + h_i E_i) - f(X - h_i E_i)}{2 h_i}$$

où E_i et h_i sont définis précédemment.

L'inconvénient de ces méthodes est de ne pouvoir faire appel à aucune technique d'accélération de convergence.

La seconde famille revient à approcher la fonction objectif par un polynôme du second degré obtenu par interpolation (WINFIELD (32), FIACCO et Mc CORMICK (6), et WINFIELD (33)) sous la forme

$$P(X) = a + B^t X + \frac{1}{2} X^t A X ;$$

l'idée de base est identique à celle que nous utilisons, mais aucun auteur ne semble utiliser la simplification des formules due à un choix convenable du support d'interpolation.

Enfin, plusieurs auteurs signalent les difficultés qui peuvent apparaître lorsque la matrice du hessien ou de son approchant n'est pas définie négative (si on cherche le maximum de $f(X)$). Ce que proposent FIACCO et Mc CORMICK (6) est d'utiliser une factorisation de cette matrice (A) par la

méthode de Choleski, sous la forme :

$$A = L D L^t$$

et ce que propose MIFFLIN (20) est d'utiliser une factorisation modifiée de cette matrice, sous la forme

$$A = L D L^t - S$$

où L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments de la diagonale sont tous égaux à 1 ; L^t est sa transposée. D est une matrice diagonale et S est une matrice non négative.

Aucun auteur ne semble proposer une technique analogue à la technique de quadratisation partielle que nous avons exposé, technique qui s'est montrée d'une grande efficacité dans plusieurs applications.

CHAPITRE II

CALCULS PREPARATOIRES A L'OPTIMISATION

Dans ce chapitre, nous décrirons le calcul de la dose unitaire délivrée aux points considérés (points du support d'optimisation).

La méthode utilisée est une méthode empirique qui étend celle proposée par BOURGAT et Coll. (1974) pour tenir compte de l'obliquité.

Elle a l'avantage d'être rapide mais reste approximative.

La méthode d'optimisation est indépendante du mode de calcul de la dose, qui pourrait donc être déterminé par toute autre méthode.

Nous décrirons aussi le rôle des coins et leur effet dans le problème d'optimisation linéaire, ainsi que dans le calcul de la dose.

Nous présenterons enfin une technique de quadrillage d'un organe, ainsi que le calcul de la dose moyenne.

II.1 CALCUL DES DOSES

Pour pouvoir effectuer le calcul de la dose en chaque point M_1 , nous avons besoin de connaître :

- le domaine irradié ainsi que les contours du sujet, de la tumeur et des organes sensibles par rapport à un système des axes cartésiens
- les positions des sources
- les champs de chaque faisceau.

Nous avons besoin de plus, de déterminer les points d'intersection des axes des faisceaux avec le contour du sujet, et choisir une formule de calcul (on peut en effet, soit utiliser des formules rapides et approchées, ou des formules plus lourdes mais plus précises).

II.1.1 Caractéristiques du traitement radiothérapique

On suppose dans tous les traitements prévus que les axes des faisceaux sont concourants et situés dans un plan, dit "plan de traitement".

La section du corps à irradier par ce plan est le "domaine d'irradiation" Γ_0 limité par un contour C_0 .

Pour calculer la dose aux points de ce domaine nous serons amenés à définir :

- i - le contour C_0 du domaine Γ_0 , pratiquement le contour sera défini par N points situés sur ce contour et relevés directement sur le corps à irradier.

Le contour C_0 sera approché par le polygone ayant ces N points pour sommets.

Nous supposons que le contour C_0 est de forme telle que toute droite le coupe au plus en deux points.

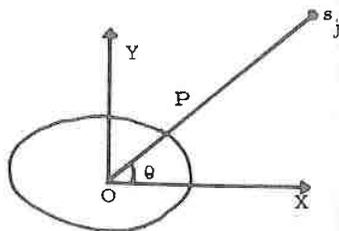
- ii - Les contours $C_T, C_1, C_2 \dots$ limitant les domaines $\Gamma_T, \Gamma_1, \Gamma_2 \dots$ de la tumeur T, des organes sensibles O_1, O_2, \dots . Ces domaines sont contenus dans Γ_0 . Chacun de ces contours sera défini par un nombre fini de points.

Les coordonnées de tous les points des contours $C_0, C_T, C_1, C_2 \dots$ sont repérées par rapport à un système d'axes cartésiens dont l'origine est le point O, point de concours des faisceaux.

Position des sources

Chaque source s_j est repérée

- i - par l'angle polaire de OX et de l'axe Os_j du faisceau
- ii - soit par Os_j , soit par Ps_j .



Les champs de chaque faisceau

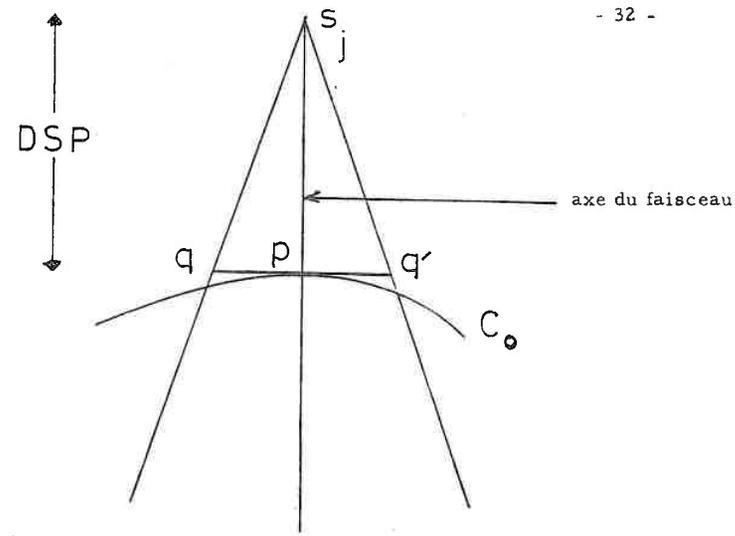
On appelle "champ" la section du faisceau par un plan perpendiculaire à son axe, à une distance fixée de la source.

- Si cette distance est égale à Ps_j (Fig. 1. a) le champ est dit : "défini à la peau" ; Ps_j est la distance "source peau" (DSP).
- Si cette distance est égale à Os_j (Fig. 1. b) le champ est dit : "défini à la tumeur" ; Os_j est la distance "source axe" (DSA).

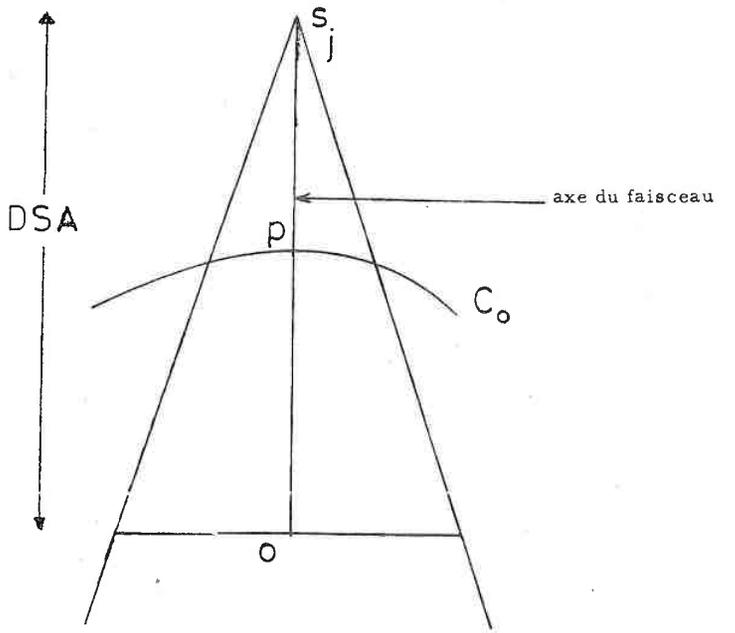
La section habituellement rectangulaire est caractérisée par sa largeur ℓ et sa longueur L.

Le champ s'introduit dans le calcul de dose par la quantité dite "champ équivalent" quantité que nous noterons a, et qu'il est classique de prendre

égale à $\frac{2\ell L}{\ell + L}$.



(a)



(b)

Figure 1

II.1.2 Etude de l'intersection des axes des faisceaux et du contour du sujet

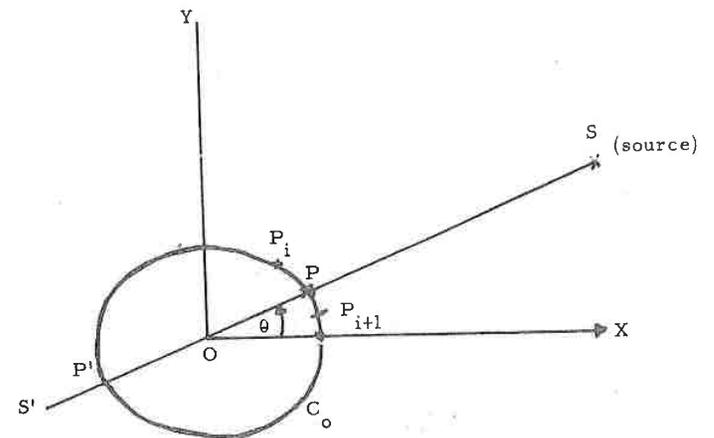
Nous allons chercher pour chaque position de la source :

- l'intersection de l'axe du faisceau avec le contour C_0
- l'angle entre la courbe et la perpendiculaire à l'axe du faisceau au point d'intersection, ceci afin d'introduire une correction d'obliquité.

A - Recherche de l'intersection d'un axe OS d'un faisceau et du contour C_0

On représente par OS un axe du faisceau (demi-droite) et par S'OS la droite qui coupe C_0 en deux points P' et P.

La méthode que nous utilisons pour chercher le point d'intersection de l'axe OS d'un faisceau avec le contour consiste dans un premier temps à chercher deux points successifs P_i et P_{i+1} du contour tels que le segment $P_i P_{i+1}$ coupe S'OS entre P_i et P_{i+1} . Dans un deuxième temps nous cherchons si le point d'intersection de S'S et de $P_i P_{i+1}$ est entre O et S ou non. Ultérieurement nous calculerons la distance "source peau" (DSP) ou bien la distance "source axe" (DSA).



Encadrement du point d'intersection par deux points du contour discrétisé.

Pour une position de l'axe du faisceau, c'est-à-dire pour un angle θ_j , l'équation de OS s'écrit :

$$y \cos \theta_j - x \sin \theta_j = 0.$$

Si dans le premier membre de cette équation nous remplaçons x et y par les coordonnées x_i, y_i d'un point $a_i \equiv (x_i, y_i)$ extérieur à la droite, la quantité $(y_i \cos \theta_j - x_i \sin \theta_j)$ prend une valeur C_i non nulle, dont le signe caractérise la position du point par rapport à la droite.

Nous cherchons à tester si les 2 points consécutifs P_i et P_{i+1} sont du même côté ou de part et d'autre de OS.

On calculera pour chaque i , $i \in \mathbb{N}$

$$C_i = y_i \cos \theta_j - x_i \sin \theta_j$$

et on étudiera la valeur de $r_i = C_i \cdot C_{i+1}$; on peut avoir les 3 cas suivants :

- i - si r_i a la valeur zéro cela entraîne que P_i ou P_{i+1} est situé sur l'axe et on détermine celui des deux points qui est situé sur l'axe.
- ii - si r_i est positif, P_i et P_{i+1} sont situés au même côté de l'axe du faisceau, on recommence ce processus en augmentant i d'une unité.
- iii - si r_i est négatif cela veut dire que P_i et P_{i+1} sont situés de part et d'autre de l'axe. On a "encadré" un des points P ou P'. On calcule alors les coordonnées de ce point comme intersection de OS et de $P_i P_{i+1}$.

Coordonnées du point d'intersection de S' S et $P_i P_{i+1}$

L'équation de S' S est :

$$y \cos \theta_j - x \sin \theta_j = 0.$$

L'équation de $P_i P_{i+1}$ est :

$$x (y_i - y_{i+1}) - y (x_i - x_{i+1}) + (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) = 0.$$

En résolvant ces deux équations, nous obtenons les coordonnées du point d'intersection (P ou P')

$$x^* = \frac{a_0}{t \theta_j - a_1}, \quad y^* = \frac{a_0 t \theta_j}{t \theta_j - a_1}$$

où

$$a_0 = \frac{x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad a_1 = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \text{ et } x_i \neq x_{i+1}$$

(si $x_i = x_{i+1}$ on pose $x^* = x_i$, $y^* = x_i t \theta_j$)

On en déduit immédiatement OP où $OP = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}$.

Intersection de la demi-droite avec le contour

Le point d'intersection sera le point P cherché si les coordonnées de même nom de ce point et du point S sont de même signe.

Si OS n'est pas voisin de y' ($\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2}$), il suffira de vérifier que x^* et x_{s_j} sont de même signe.

Si θ est de voisin de $\frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2}$, on fera le même test sur les y^* et y_{s_j} .

B - Calcul de l'angle de l'obliquité

Pour définir l'angle d'obliquité avec la même convention de sens que HOPE et CAIN (11) nous introduisons d'abord la demi-droite PQ déduite de PS par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$, puis prenons comme angle d'obliquité l'angle orienté

$$\mathcal{J} = \widehat{PP_{r+1}, PQ}$$

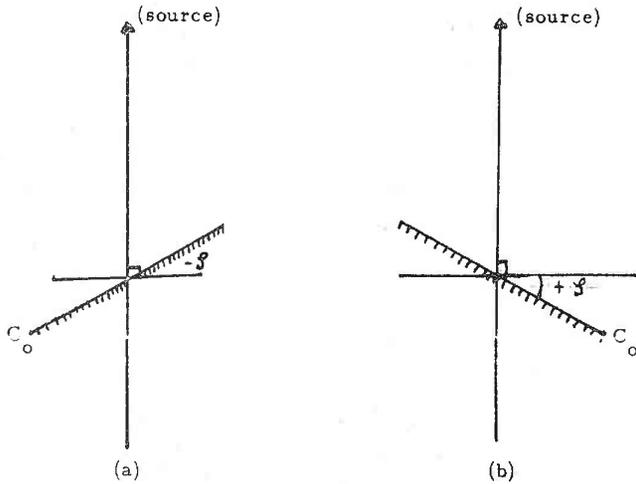
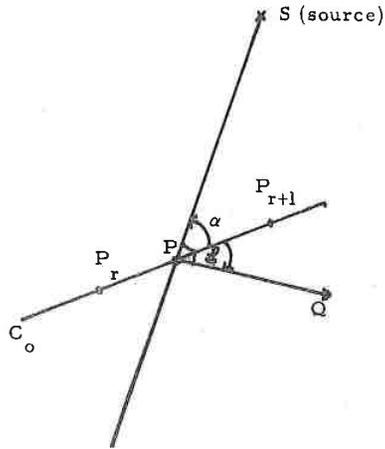
où P_{r+1} est le point du contour qui suit P. (P est situé entre P_r et P_{r+1}).

Il est commode de commencer par calculer $\alpha = \widehat{PP_{r+1}, PS}$, défini par

$$\alpha = \text{Arc cos} \frac{\overrightarrow{PP_{r+1}} \cdot \overrightarrow{PS}}{\| \overrightarrow{PP_{r+1}} \| \| \overrightarrow{PS} \|}$$

et d'en déduire

$$\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$$



Convention du signe de l'angle de l'obliquité. (HOPE ET CAIN (1))

II.1.3 Calcul de la dose en un point M

Nous allons d'abord calculer la dose unitaire d_M délivrée en M par un faisceau dont le champ est rectangulaire, en considérant que l'axe du faisceau est perpendiculaire au contour C_0 au point d'intersection P.

II.1.3.1 Cas où M est situé sur l'axe du faisceau

La dose unitaire délivrée en un point H situé sur l'axe du faisceau est mise sous la forme

$$d_H^0 = A \cdot e^{B \cdot PH} \quad (20)$$

A est une constante qui dépend de l'appareil utilisé ; pour nos applications nous la prendrons égale à 110.

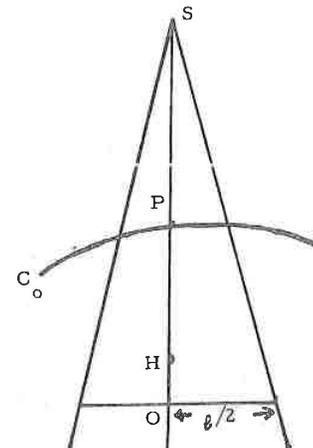
B dépend d'abord du champ du faisceau ; et on l'approche par :

$$B = \beta_0 + \beta_1 a + \beta_2 a^2$$

où a est lié aux dimensions du champ par

$$a = \frac{2 \ell L}{\ell + L}$$

et où B, ainsi que $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dépendent de la distance source peau, que nous notons x.



BOURGAT et Coll. (5) ont donné les valeurs numériques de $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ pour $x = 50, 60, 80, 100$ qui apparaissent dans le tableau suivant :

	x (en cm)			
	50	60	80	100
β_0	-0,1027	-0,0979	-0,087	-0,082
β_1	0,0038	0,00405	0,00328	0,00299
β_2	$-11,10^{-5}$	$-12,8.10^{-5}$	$-9,1.10^{-5}$	$-8,10^{-5}$

On peut avoir besoin de valeurs de B pour d'autres valeurs de x, suivant que l'on travaille en DSP constante, mais différente des valeurs précédentes, suivant que l'on travaille en DSA constante : on approchera alors $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ pour $50 \leq x \leq 100$ par une technique d'interpolation de Lagrange.

Les polynômes d'interpolation s'écrivent (15)

$$\beta_0(x) \simeq P_3^0(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] [L_4] \begin{bmatrix} \beta_0(x_0) \\ \beta_0(x_1) \\ \beta_0(x_2) \\ \beta_0(x_3) \end{bmatrix}$$

de même

$$\beta_1(x) \simeq P_3^1(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] [L_4] \begin{bmatrix} \beta_1(x_0) \\ \beta_1(x_1) \\ \beta_1(x_2) \\ \beta_1(x_3) \end{bmatrix}$$

$$\beta_2(x) \simeq P_3^2(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] [L_4] \begin{bmatrix} \beta_2(x_0) \\ \beta_2(x_1) \\ \beta_2(x_2) \\ \beta_2(x_3) \end{bmatrix}$$

où $[L_4]$ est la matrice d'interpolation de Lagrange correspondant au support non régulier (50, 60, 80, 100).

$$[L_4] = \begin{bmatrix} 32 & -50 & 25 & -6 \\ -1,253 & 2,125 & -1,16667 & 0,295 \\ 0,016 & -0,02875 & 0,0175 & -0,00475 \\ -6,7.10^{-5} & 1,25.10^{-4} & -8,3.10^{-5} & 2,5.10^{-5} \end{bmatrix}$$

Les formules de calcul sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \\ \beta_1 &= \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 \\ \beta_2 &= \delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \delta_3 x^3 \end{aligned}$$

Les valeurs des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \gamma_0, \gamma_1, \dots$ et $\delta_0, \delta_1, \dots$ sont données dans le tableau ci-dessous :

α_0	$-7,44.10^{-2}$	γ_0	$-1,684.10^{-2}$	δ_0	$1,085.10^{-3}$
α_1	$-2,0102.10^{-3}$	γ_1	$8,991.10^{-4}$	δ_1	$-5,157.10^{-5}$
α_2	$3,8425.10^{-5}$	γ_2	$-1,244.10^{-5}$	δ_2	$7,075.10^{-7}$
α_3	$1,938.10^{-7}$	γ_3	$5,45.10^{-8}$	δ_3	$-3,0.10^{-9}$

II.1.3.2 Cas où M est situé hors de l'axe du faisceau

On projette M en H sur l'axe du faisceau et on calcule la dose en M à partir de la dose d_H^0 en H (calculée précédemment) par l'une des formules suivantes, selon que HM est inférieur ou supérieur à la demi-largeur $\rho_{M/2}$ du champ au niveau du point M ;

- si $HM \leq \ell_{M/2}$

on utilise la formule

$$d_M = d_H^0 \left(1 - \frac{e^{\alpha (HM - \ell_{M/2})}}{2} \right)$$

(21)

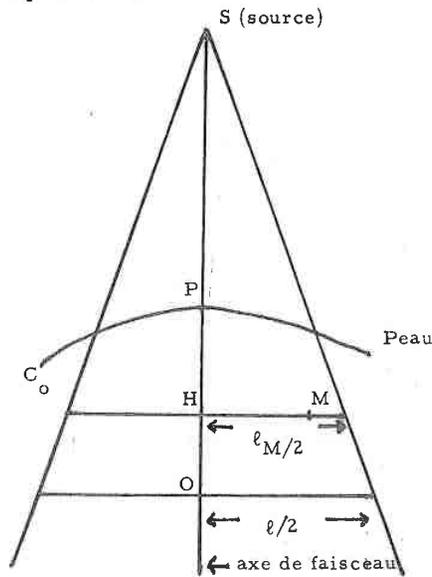
- si $HM \geq \ell_{M/2}$

on utilise la formule

$$d_M = d_H^0 \frac{e^{\alpha (\ell_{M/2} - HM)}}{2}$$

α est une constante positive qui permet de tenir compte de la pénombre.

Nous avons pris $\alpha = 1,5$



Pour utiliser les formules précédentes, nous avons besoin de calculer HM, SM, PH, ainsi que $\ell_{M/2}$.

On opère de la façon suivante :

1°) Calcul HM, SM et PH

On sait que OS a pour équation

$$y \cos \theta - x \sin \theta = 0$$

(le centre de la tumeur est l'origine).

La longueur HM soit déterminée par :

$$HM = | - \sin \theta \cdot X_M + \cos \theta \cdot Y_M |$$

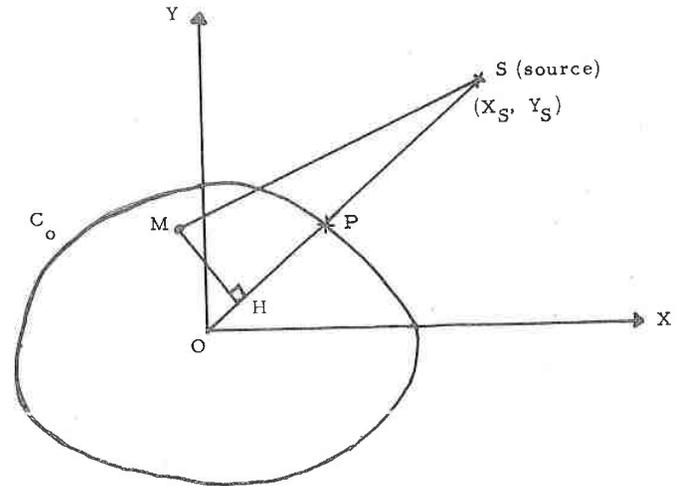
et

$$SM = \sqrt{(X_S - X_M)^2 + (Y_S - Y_M)^2}$$

d'où

$$SH = \sqrt{(SM)^2 - (HM)^2}$$

Donc $PH = SH - SP$, où SP est soit donné (si on travaille en DSP), soit facile à calculer (si on travaille en DSA).



2°) Calcul de la demi-largeur du champ au niveau d'un point ($\ell_{M/2}$)

On désigne par :

$\ell/2$: la demi-largeur du champ défini à la peau où à la tumeur ;

$\ell_{M/2}$: la demi-largeur du champ défini au niveau du point M.

Nous allons calculer $\ell_{M/2}$ dans les deux cas suivants :

1°) Le champ est défini à la peau (travail en DSP) :

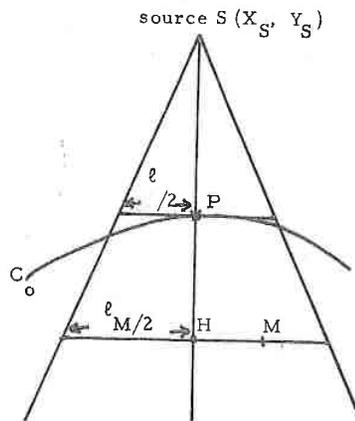
$$\frac{\ell_{M/2}}{\ell/2} = \frac{SH}{SP}$$

donc $\ell_{M/2} = \frac{SH}{SP} \cdot \ell/2$

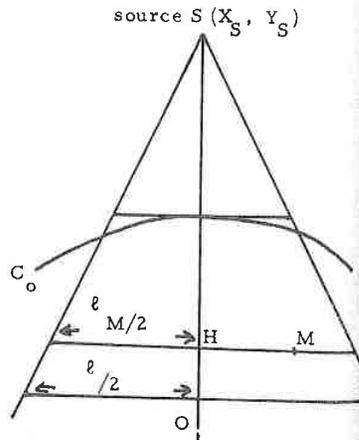
2°) Le champ est défini à la tumeur (travail en DSA),

$$\frac{\ell_{M/2}}{\ell/2} = \frac{SH}{SO}$$

donc $\ell_{M/2} = \frac{SH}{SO} \cdot \ell/2$



Champ est défini à la peau
(travail en DSP)



Champ est défini à la tumeur
(travail en DSA)

II.1.4 Correction de la dose en fonction de l'obliquité

Le contour du domaine irradié est rarement perpendiculaire à l'axe du faisceau. Il est donc naturel de tenir compte de cette obliquité.

Les valeurs de la dose ne sont pas modifiées par l'obliquité sur l'axe du faisceau, mais elles le seront pour les autres rayons.

La figure (2-a) montre par exemple que l'atténuation en M sera plus grande dans le cas de figure que si le contour avait été QP. Au contraire (Figure (2-b)) elle, sera moins grande en M.

On admet en général les formules des corrections suivantes

$$d_M \text{ (corrigé)} = d_M \text{ (sans correction)} \cdot \left(\frac{SP}{SP+h} \right)^2$$

où d_M (sans correction) est déterminé d'après la formule utilisée en (II.1.3.2)

SP : est la distance source peau

h : sera déterminé par le calcul approché suivant.

On considère que les rayons voisins SH et SM sont sensiblement parallèles, ce qui conduit à

$$|h| = P'Q = PQ \operatorname{tg} \mathcal{J} \simeq |HM \operatorname{tg} \mathcal{J}|$$

nous obtiendrons une formule vraie en grandeur et signe en posant :

$$h = - \overline{HM} \operatorname{tg} \mathcal{J}$$

où \mathcal{J} est l'angle de l'obliquité égal à $(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PQ})$ (voir II.1.2), comme on le constate sur les figures (2).

Sur la figure (2-a), d_M (corrigé) doit être inférieur à d_M (sans correction)

$$\Rightarrow h \text{ est positif} \quad (\operatorname{tg} \mathcal{J} < 0)$$

Par contre sur la figure (2-b), d_M (corrigé) doit être supérieur à d_M (sans correction).

$$\Rightarrow h \text{ est négatif} \quad (\operatorname{tg} \mathcal{J} > 0)$$

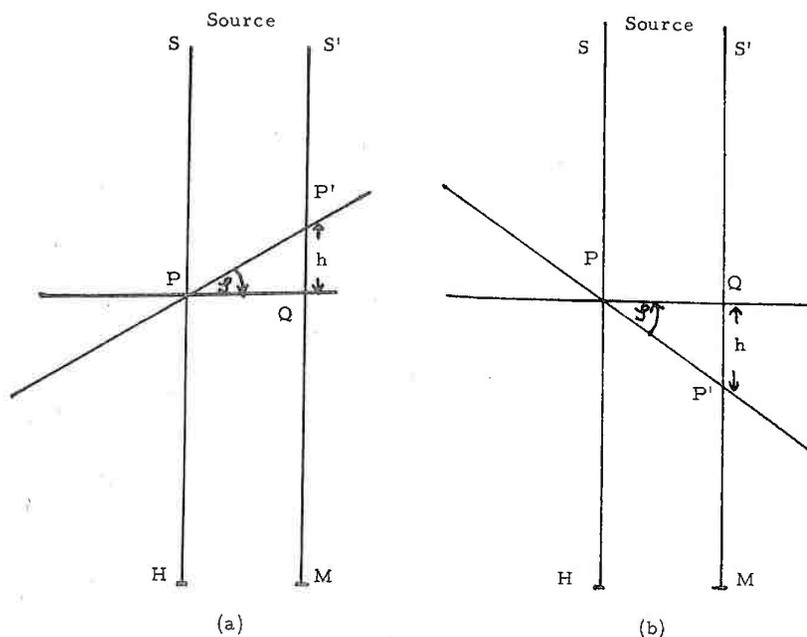


Figure 2

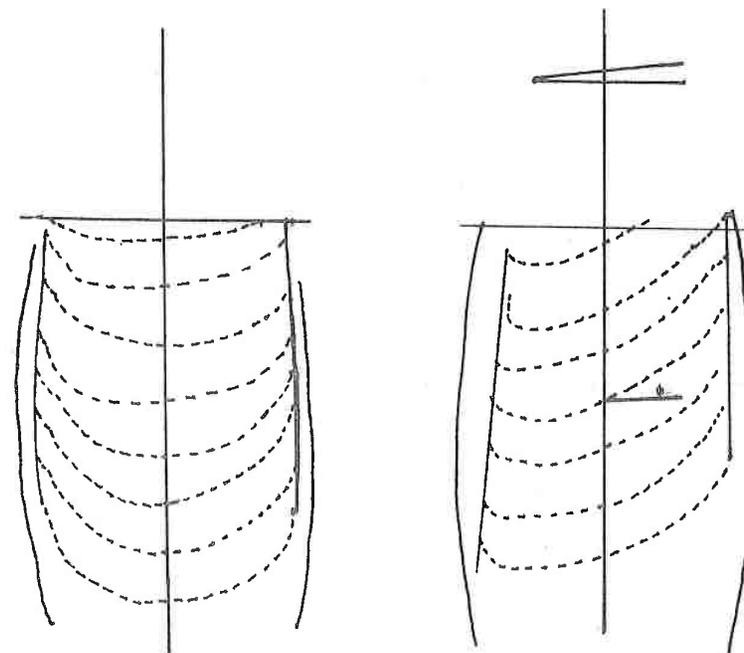
II. 2 USAGE DE COINS

II. 2.1 Généralités sur les coins

Les coins permettent de déformer les isodoses, par exemple pour obtenir une distribution plus homogène dans la tumeur ou pour compenser les effets d'obliquité.

Les figures (3. a) et (3. b) montrent l'effet d'un coin sur les lignes isodoses : l'effet principal est une rotation des isodoses au voisinage de l'axe de

faisceau ; au lieu d'avoir une famille d'isodoses perpendiculaire à cet axe, nous obtenons des isodoses, sensiblement parallèles, et qui font avec la direction précédente un angle ψ . Cet angle qui est donc caractéristique de l'influence du coin sera dit, par abréviation "angle de coin".



(a) - Courbes des isodoses

(b) - L'effet d'un coin sur les isodoses

Figure 3

II. 2.2 Modification du problème en cas d'usage de coins

Nous nous plaçons dans le cas où les utilisateurs ne disposent que d'un nombre réduit de coins (par exemple 2 coins, l'un correspondant à une

rotation des isodoses de 45°, l'autre de 60°) et nous supposons que pour chaque faisceau il y aura deux phases du traitement, la première sans coin et la seconde avec un coin préalablement choisi. Pour la première phase, nous avons un coefficient de pondération w_j , la dose délivrée sera $d_{ij} w_j$; pendant la seconde phase nous aurons un autre coefficient de pondération w_j^* , la dose unitaire calculée compte tenu du coin sera d_{ij}^* , et la dose délivrée sera $d_{ij}^* w_j^*$.

La dose délivrée par le faisceau j sera au total

$$d_{ij} w_j + d_{ij}^* w_j^*.$$

Nous voyons que sur le plan mathématique l'usage de coin se traduit par le fait que dans toutes les formules de calcul de dose nous devons remplacer $d_{ij} w_j$ par

$$d_{ij} w_j + d_{ij}^* w_j^*.$$

Ceci demande le calcul de nouveaux coefficients d_{ij}^* (dont le calcul sera explicité au paragraphe suivant) et introduit de nouvelles inconnues, mais la structure générale du problème de programmation linéaire n'est pas modifiée, en particulier le nombre de contraintes n'est pas changé.

Pour retrouver les notations déjà utilisées nous posons :

$$w_j \text{ ou } w_j^* \quad (\text{selon le cas}) = w'_j$$

$$d_{ij} \text{ ou } d_{ij}^* \quad (\text{selon le cas}) = d'_{ij}$$

Par exemple les contraintes à la tumeur s'écrivent :

$$\sum_{j=1}^{2m} d'_{ij} w'_j \geq D_T \quad \forall i \quad i \in I_T$$

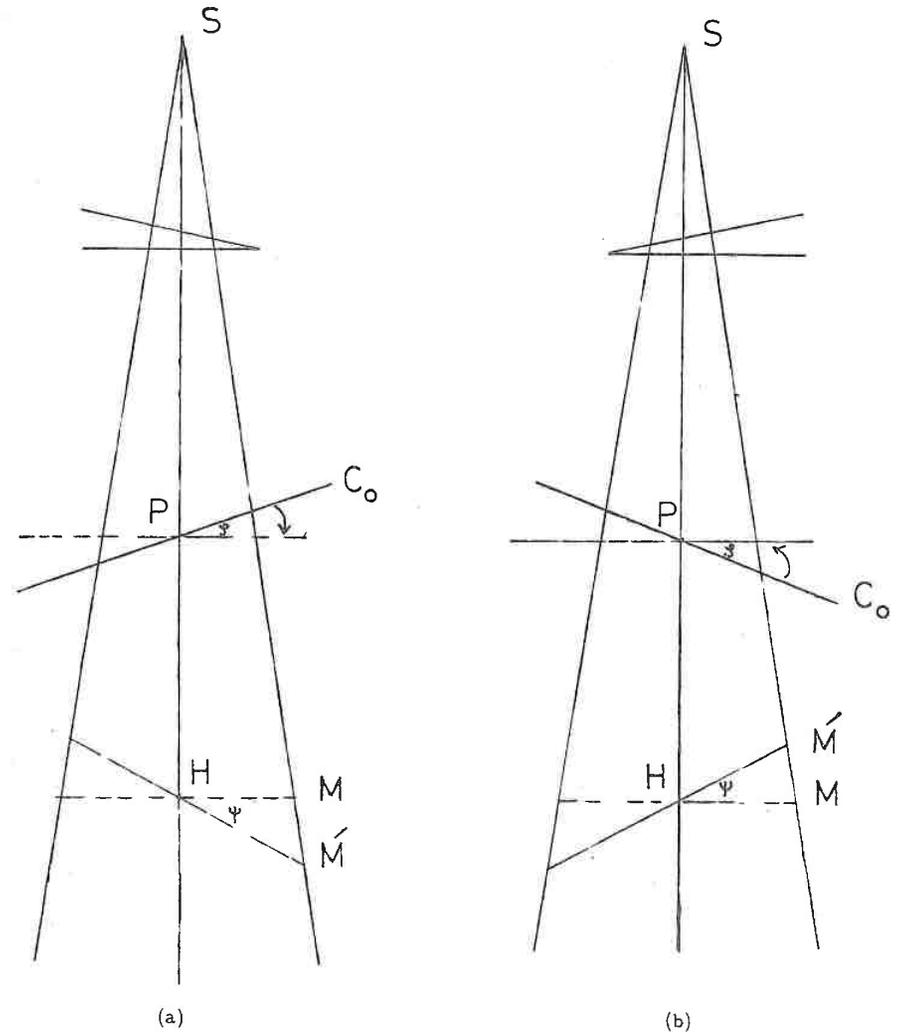


Figure 4

Position de coin en fonction de l'angle de l'obliquité ψ .

II. 2. 3 Calcul de la dose délivrée en M en présence de coin

Nous avons vu que l'influence du coin n'intervenait pas en un point de l'axe du faisceau où

$$d_{ij} = d_{ij}^*$$

Pour un point M hors de l'axe nous utilisons la formule suivante

$$d_{ij}^* = d_{ij} e^{-\mu (MM')}$$

où μ : est le coefficient linéaire d'atténuation ^{ϕ} (connu)

MM' sera approché par la formule

$$MM' \simeq \mathcal{L} (MH \operatorname{tg} \psi) \quad \text{avec } \mathcal{L} = \pm 1.$$

\mathcal{L} sera choisi en fonction de l'angle de l'obliquité ψ ; par exemple : sur la figure (4. a), d_M^* doit être supérieur à d_M

$$\implies \mathcal{L} = -1 \quad (\psi < 0)$$

Par contre sur la figure (4. b), d_M^* doit être inférieur à d_M

$$\implies \mathcal{L} = +1 \quad (\psi > 0).$$

La figure (5) représente un exemple de distribution de doses pour un seul faisceau dont l'axe est normal au contour d'abord sans coin, puis avec coin de 45°, et met en évidence la déformation des isodoses. Les doses aux différents points ont été calculées par les formules développées précédemment

On notera que la dose calculée est égale à 110 à la surface, et à 105 à profondeur voisine de 0,5 cm.

En réalité la dose à la surface est inférieure à 100 %, le maximum de dose ayant lieu à 0,5 cm de profondeur.

La méthode de calcul utilisée conduit donc à surestimer les doses d'au moins 10 % au niveau du point d'entrée et d'environ 5 % au niveau du maximum

^{ϕ} μ : est le coefficient d'atténuation dans l'eau (ou les tissus). Il est égal à 0,0706 cm⁻¹ pour Co⁶⁰.

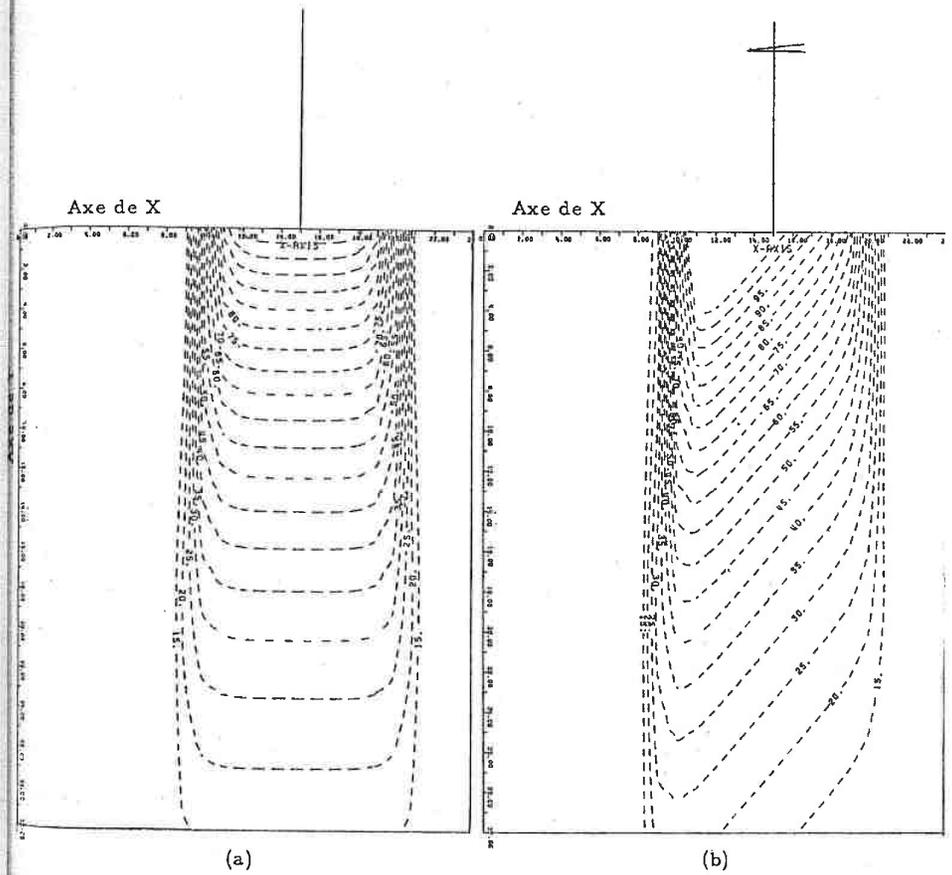


FIGURE 5

Courbes d'isodoses d'un champ [10 cm . 10 cm] défini à la peau
[DSP = 80 cm] .

(a) sans coin

(b) avec coin de 45°

II. 3 QUADRILLAGE ET CALCUL DE LA DOSE MOYENNE

II. 3.1 Quadrillage

Il est évident que l'on ne peut pas calculer la dose en tous les points du domaine irradié ou d'un organe déterminé ; il faut donc choisir un nombre fini des points et il est naturel de les choisir régulièrement espacés.

Certains auteurs ont pris comme points de calcul les nœuds d'un réseau maillé régulier couvrant tout le domaine ; l'inconvénient de cette technique est de nécessiter un réseau très dense, si on veut faire intervenir de façon satisfaisante les contours des domaines jouant un rôle particulier (tumeur organes sensibles). Nous avons préféré une méthode nous permettant de couvrir un domaine par un quadrillage s'appuyant sur des points des contours, aussi régulièrement que possible.

La technique utilisée est la suivante : nous supposons le domaine limité par un contour connu, et nous supposons qu'une horizontale ou une verticale ne coupe ce contour qu'en 2 points au plus*.

Nous déterminons par programme deux horizontales dont la première passe au point le plus bas $a \equiv (x_1, y_1)$; la seconde passe par le point le plus haut $b \equiv (x_2, y_2)$ de ce contour.

Nous divisons l'espace entre les deux horizontales par des droites parallèles à celles-ci et régulièrement espacées.

On déterminera enfin, sur chacune de ces droites les 2 points extrêmes du domaine, $r_i \equiv (x_{r_i}, y_{r_i})$ et $s_i \equiv (x_{s_i}, y_{r_i})$.

* Pour des contours ne répondant pas à cette condition (tête de fémur par exemple) on peut développer une technique analogue en coordonnées polaires.

La méthode utilisée pour chercher ces points est très voisine de celle utilisée pour chercher les points d'intersection de l'axe du faisceau avec le contour (cf. II, 1.2). Elle consiste à chercher 2 points successifs P_i, P_{i+1} du contour tel que le segment $P_i P_{i+1}$ coupe en une extrémité du domaine, la droite entre $P_i P_{i+1}$, et on continue la recherche pour que le segment $P_k P_{k+1}$ la coupe à l'autre extrémité entre $P_k P_{k+1}$ (P_k et P_{k+1} sont deux points successifs du contour).

Pour chaque droite, une fois déterminée les deux extrémités du domaine, on cherchera à déterminer un nombre fini de points régulièrement espacés sur cette droite.

On note qu'on pourrait prendre toujours le même nombre de points sur chaque droite, ce qui simplifie la programmation, mais introduit des points qui deviennent très voisins lorsque la largeur $r_i s_i$ devient très petite, comme l'indique la figure (6. i). Pour ces raisons nous modifions le nombre de points en fonction de la largeur $r_i s_i$, nous le rendrons proportionnel par exemple à cette largeur. On obtient alors un partage un peu plus régulier, comme l'indique la figure (6. ii), et on peut réduire le nombre de points sans réduire la qualité de l'approximation.

Dans l'algorithme que nous utilisons nous fixons d'abord le nombre de points que nous désirons déterminer par le quadrillage (N), et nous choisissons un pas h (en cm), puis on détermine le nombre de bandes n_y situées entre a et b par la relation :

$$n_y = \text{valeur entière de } \left(\frac{y_2 - y_1}{h} \right)$$

et on calcule le pas h_y par la relation

$$h_y = \frac{y_2 - y_1}{n_y}$$

L'équation de la droite i est :

$$y_{r_i} = y_1 + i \cdot h_y$$

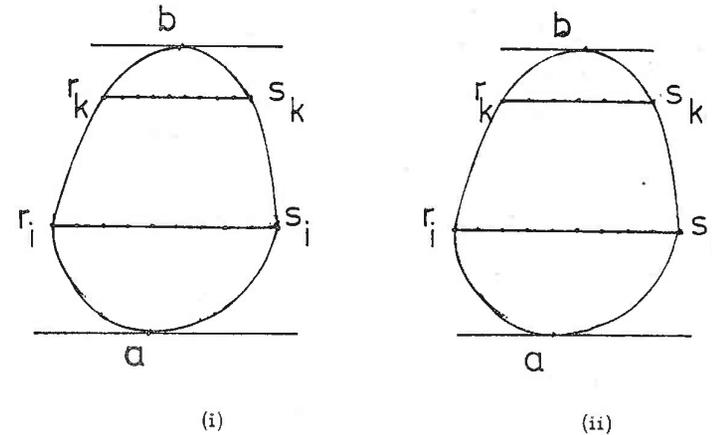


Figure 6

L'intersection de cette droite avec le contour donne les coordonnées des deux extrémités r_i et s_i qui ont la même ordonnée y_{r_i} et d'abscisses différentes avec $x_{s_i} > x_{r_i}$.

On détermine le nombre d'intervalles sur la droite i par

$$n_{r_i} = \text{valeur entière de } \left(\frac{x_{s_i} - x_{r_i}}{h} \right)$$

et le pas h_{x_i} sur la droite par

$$h_{x_i} = \frac{x_{s_i} - x_{r_i}}{n_{r_i}}$$

Si n_i est le nombre de points sur la droite i

$$\text{donc } n_i = n_{r_i} + 1.$$

Le nombre de points ainsi déterminé par le quadrillage du domaine s'obtient par la formule suivante :

$$n = \sum_{i=1}^{n_y-1} n_i + 2$$

Le terme "2" correspond aux points a et b.

La donnée de h_y (séparant deux droites entre a et b) et de h_{x_i} (séparant deux points successifs sur la droite d'indice i ($i = 1, 2, \dots, n_y - 1$)) permet de déterminer les coordonnées de tous les points de quadrillage.

Si le nombre déterminé de points par quadrillage (n) diffère de plus ou moins 10 % d'une valeur choisie N , on réalise par programme un ajustement de h en prenant comme nouveau pas h' , où

$$\begin{aligned} h' &= \alpha h \\ \text{avec } \alpha &= \sqrt{\frac{n}{N}} \end{aligned}$$

Puis, on recherche h_y' , h_{x_i}' et n à partir de h' .

II. 3. 2 Dose moyenne

Avant de définir la dose moyenne nous définissons d'abord la dose intégrale.

On appellera "dose intégrale" l'intégrale de la dose absorbée, étendue à une surface donnée.

Soit $d_j(x, y)$ la dose unitaire délivrée au point (x, y) par le faisceau j . La dose intégrale unitaire délivrée à l'organe O_k par le faisceau j sera par définition

$$D_{jk} = \iint_{O_k} d_j(x, y) dx dy$$

La dose totale délivrée à l'organe O_k par l'ensemble des faisceaux sera

$$\sum_j w_j \cdot D_{jk}$$

Donc, la dose moyenne J_k délivrée par l'ensemble des faisceaux à l'organe O_k sera

$$J_k = \frac{\sum_{j=1} w_j D_{jk}}{S_k} = \sum_j w_j \cdot \bar{D}_{jk} \quad (22)$$

où $S_k = \iint_{O_k} dx dy$, représente l'aire de la section de cet organe par le plan de coupe (l'aire du domaine Γ_k).

Dans la suite, nous nous intéressons à calculer \bar{D}_{jk} qui est

$$\bar{D}_{jk} = \frac{\iint_{O_k} d_j(x, y) dx dy}{\iint_{O_k} dx dy} \quad (23)$$

II. 3. 2. 1 Méthode de calcul

Nous ne pouvons pas en général calculer exactement les intégrales (23). Nous pouvons obtenir une valeur approchée de ces intégrales de la manière suivante :

on peut écrire

$$\iint_{O_k} d_j(x, y) dx dy = \sum_i \sum_\ell \iint_{\Delta_{i\ell}} d_j(x_i, y_\ell) dx dy$$

où

$d_j(x_i, y_\ell)$: est la dose unitaire délivrée en un point $M_{i\ell}$, déterminé par le quadrillage étudié.

$\Delta_{i\ell}$: est l'aire élémentaire qui entoure $M_{i\ell}$ dans Γ_k

$$\sum_i \sum_\ell \iint_{\Delta_{i\ell}} d_j(x_i, y_\ell) dx dy \simeq \sum_i \sum_\ell d_j(x_i, y_\ell) \cdot \Delta_{i\ell}$$

de même

$$\iint_{O_k} dx dy \simeq \sum_i \sum_\ell \Delta_{i\ell}$$

On a donc

$$\bar{D}_{jk} = \frac{\sum_i \sum_\ell d_j(x_i, y_\ell) \cdot \Delta_{i\ell}}{\sum_i \sum_\ell \Delta_{i\ell}} \quad (24)$$

Le calcul \bar{D}_{jk} demande le calcul des aires élémentaires $\Delta_{i\ell}$.

II. 3. 2. 2 Détermination de l'aire élémentaire $\Delta_{i\ell}$

On a remarqué dans l'algorithme de quadrillage d'un organe que l'on détermine les 2 horizontales limitant le domaine étudié puis que l'on divise en bandes de même longueur, h_y , l'espace compris entre les 2 horizontales. Sur chaque droite entre a et b on détermine les deux points extrêmes du domaine puis entre eux des points $x_{i\ell}$ espacés régulièrement d'une distance h_{x_i} .

Pour calculer l'aire élémentaire $\Delta_{i\ell}$ qui entoure le point $M_{i\ell}$ de Γ_k , nous divisons chaque bande par une droite située au milieu de cette bande, nous obtenons ainsi une redistribution des bandes ayant h_y comme longueur, où $r_i s_i$ est situé au milieu de cette bande. Nous partageons ensuite chaque bande en rectangles de nombre égal au nombre de points $x_{i\ell}$ situés sur la droite i , et chacun de largeur h_{x_i} comme l'indique la figure (7).

Donc le domaine étudié est décomposé en un ensemble de rectangles $\Delta_{i\ell}$ de même longueur h_y mais de largeurs différentes selon la bande ; on peut distinguer trois cas :

i - $\Delta_{i\ell}$ est strictement à l'intérieur du domaine Γ_k .

Dans ce cas $\Delta_{i\ell}$ est représentée par un rectangle de longueur h_y et de largeur h_{x_i} dont l'aire est

$$\Delta_{i\ell} = h_{x_i} \cdot h_y$$

ii - Un côté de $\Delta_{i\ell}$ est approché par un trapèze équivalent au rectangle de longueur h_y et de largeur h_{x_i} dont l'aire est

$$\Delta_{i\ell} = \frac{h_{x_i} \cdot h_{x_i}}{2} \cdot h_y$$

iii - Une extrémité de $\Delta_{i\ell}$ est située au point a ou b.

Dans ce cas, on remplace l'arc rbs par un arc de parabole d'axe parallèle à r_y comme l'indique la figure ci-dessous.

L'équation de la parabole approchée aux axes r_x et r_y est :

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

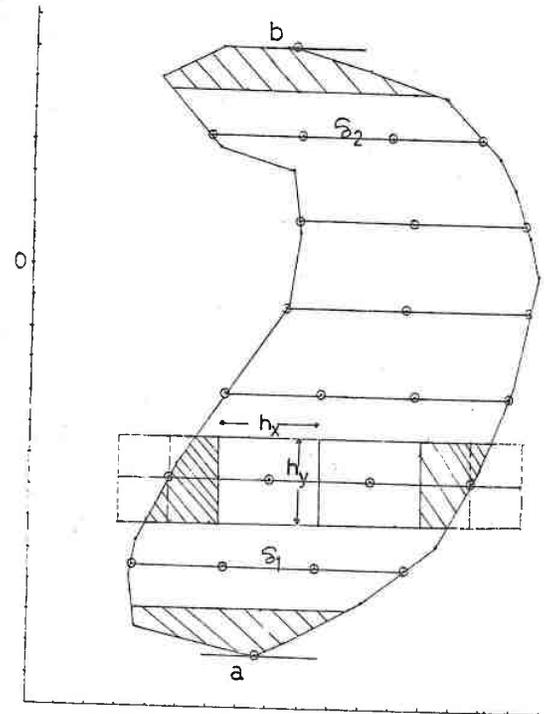
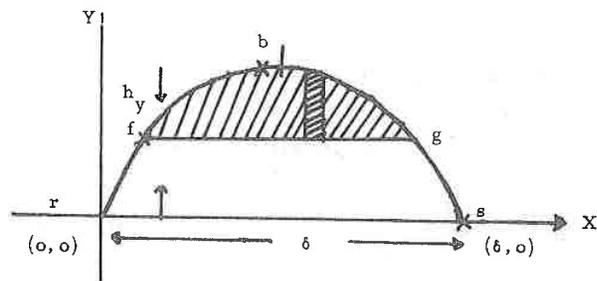


Figure 7

Cet arc de parabole passe par les trois points :

$$r \equiv (0, 0), \quad b \equiv (x_b, h_y) \quad \text{et} \quad s \equiv (\delta, 0).$$

On a donc

$$0 = 0 + 0 + \gamma$$

$$h_y = \alpha x_b^2 + \beta x_b$$

$$0 = \alpha \delta^2 + \beta \delta$$

En résolvant ce système on obtient

$$\beta = \frac{\delta h_y}{x_b (\delta - x_b)} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{-h_y}{x_b (\delta - x_b)}.$$

Donc l'équation de cette parabole est la suivante

$$y = \frac{h_y}{x_b (\delta - x_b)} (\delta x - x^2)$$

Pour calculer l'aire élémentaire Δ_{if} , on cherche à déterminer les coordonnées des points f et g.

L'ordonnée du point f ou du point g est $\frac{h_y}{2}$.

On cherche donc les abscisses x_f et x_g

$$\frac{h_y}{2} = \frac{h_y}{x_b (\delta - x_b)} (\delta x - x^2)$$

$$2 (\delta x - x^2) = x_b (\delta - x_b)$$

$$x^2 - \delta x + \frac{x_b}{2} (\delta - x_b) = 0$$

$$x_f = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - 2 x_b (\delta - x_b)}}{2}, \quad x_g = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - 2 x_b (\delta - x_b)}}{2}$$

On a donc

$$\Delta_{i\ell} = \int_{x_f}^{x_g} (y - \frac{h}{2}) dx$$

$$= \int_{x_f}^{x_g} \left\{ \frac{h}{x_b} \frac{(\delta \cdot x - x^2)}{(\delta - x_b)} - \frac{h}{2} \right\} dx$$

On pose

$$I_1 = \int_{x_f}^{x_g} \frac{h y (\delta \cdot x - x^2)}{x_b (\delta - x_b)} dx = \frac{h y}{x_b (\delta - x_b)} \left[\frac{\delta x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x_f}^{x_g}$$

$$= \frac{h y}{x_b (\delta - x_b)} \left[x_g^2 \left(\frac{\delta}{2} - \frac{x_g}{3} \right) - x_f^2 \left(\frac{\delta}{2} - \frac{x_f}{3} \right) \right]$$

et

$$I_2 = - \int_{x_f}^{x_g} \frac{h y}{2} dx = - \frac{h y}{2} [x_g - x_f]$$

$$\Delta_{i\ell} = I_1 + I_2$$

$$\Delta_{i\ell} = \frac{h y}{x_b (\delta - x_b)} \left[x_g^2 \left(\frac{\delta}{2} - \frac{x_g}{3} \right) - x_f^2 \left(\frac{\delta}{2} - \frac{x_f}{3} \right) \right] - \frac{h y}{2} (x_g - x_f)$$

Cette formule est valable pour chacun des deux points a et b en substituant dans chaque cas par les paramètres correspondants.

Une fois $\Delta_{i\ell}$ déterminée et connaissant la dose unitaire $d_j(x_i, y)$ à chaque point $M_{i\ell}$, on peut calculer la dose moyenne en utilisant les formules (24 et 22). Les facteurs de pondérations w_j des faisceaux ($j = 1, 2, \dots$) seront déterminés par la phase de programmation linéaire.

II.3.3 Exemple de quadrillage

Nous donnons ici un exemple d'un quadrillage du domaine Γ_2 limité par le contour C_2 de l'organe sensible O_2 (poumon).

Dans le tableau ci-dessous, nous trouvons les coordonnées du contour (l'origine est le centre de la tumeur), en plus le pas choisi h, les pas calculés (h'_y et h'_x) et le nombre de points de quadrillage. La valeur N (nombre de points de référence) est égale à 22).

Dans le tableau qui le suit, nous trouvons les coordonnées des points de quadrillage (T_x, T_y) et l'aire élémentaire Δ_{xy} .

La figure (8) montre les positions des points de quadrillage pour cet organe. Ces points sont ceux entourés par des petits cercles.

X	4,2 6,2 8,6 11,1 13,5 15,5 16,0 16,5 16,8 16,5 16,0 15,0 13,6 11,1
Y	6,1 7,1 7,1 6,4 5,6 3,7 2,7 1,2 0,0 -1,3 -3,7 -6,2 -8,7 -10,6
X	8,6 7,7 3,7 3,5 3,7 5,0 8,6 8,9 8,6 6,2
Y	-11,9 -12,3 -11,4 -9,9 -8,7 -6,0 -1,0 1,2 3,2 3,9
Pas choisi en cm	h 2,0
Pas calculés en cm	h'_y 2,697
	h'_x 2,771
	h'_x 2,983 3,326 3,118 3,034 3,767 3,020
n° de points de quadrillage	n_{O_2} 24

Coordonnées des points des quadrillages en cm		Aire élémentaire en cm
T_x	T_y	Δ_{xy}
7,700	-12,300	5,928
3,562	-9,529	4,133
6,545	-9,529	8,266
9,527	-9,529	8,266
12,510	-9,529	4,133
4,710	-6,757	4,609
8,036	-6,757	9,217
11,362	-6,757	9,217
14,688	-6,757	4,609
6,533	-3,986	4,320
9,651	-3,986	8,640
12,768	-3,986	8,640
15,886	-3,986	4,320
8,452	-1,214	5,590
12,486	-1,214	11,180
16,520	-1,214	5,590
8,846	1,557	5,220
12,614	1,557	10,441
16,381	1,557	5,220
5,810	4,329	4,185
8,831	4,329	8,371
11,851	4,329	8,371
14,871	4,329	4,185
8,600	7,100	8,538

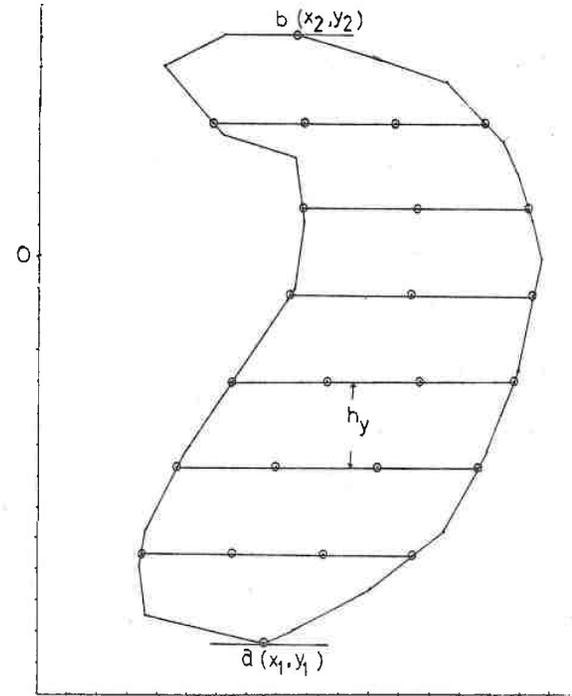


Figure 8

Quadrillage du domaine d'un organe (Poumon).

CHAPITRE III

PRESENTATION ET INTERPRETATION

DES RESULTATS

Dans les deux premiers chapitres, nous avons étudié en détail les techniques que nous proposons afin d'optimiser la dose délivrée à l'intérieur du domaine Γ_0 .

Nous nous proposons maintenant de mettre en œuvre ces techniques en commençant par la phase de programmation linéaire. Dans cette phase, nous allons montrer les résultats obtenus pour les différents critères d'optimisation suivant la fonction objectif choisie dans les deux cas suivants : "traitement non défini" et "traitement défini". Nous allons comparer entre deux critères où les deux fonctions objectifs sont :

- i - la somme de la dose moyenne par organe sensible (critère de dose moyenne).
- ii - Le maximum de la dose délivrée en un point de la tumeur (critère d'homogénéité).

Cette comparaison sera faite en calculant quelques paramètres dépendant des facteurs de pondérations ψ_j ($j = 1, 2, \dots, m$).

Nous montrerons ensuite les résultats de la phase d'amélioration par quadratisation dans le cas de "traitement défini" en prenant comme fonction à améliorer, $\Omega(X)$, l'un ou l'autre des trois optimums obtenus pour les trois critères choisis dans la phase de programmation linéaire.

III 1 PHASE DE PROGRAMMATION LINEAIRE

III.1.1 Optimisation en traitement "non défini", "défini" et paramètres calculés

En pratique, on peut distinguer les traitements "non définis" où l'on essaie de nombreuses positions de la source pour sélectionner les meilleures, et les traitements "définis" où les positions des sources sont préalablement fixées et où leur nombre est faible.

Dans le premier cas, nous essayons un grand nombre de faisceaux (18) et le traitement se fait en absence de coin.

Dans le deuxième cas, nous fixons un nombre de faisceaux (3 ou 4) d'angles donnés et le traitement se fait en l'absence ou en présence de coin.

La solution du problème de programmation linéaire nous donne le facteur de pondération de chaque faisceau. La connaissance de ces facteurs nous permet de calculer la dose totale délivrée à chaque point du support de l'optimisation.

Pour faciliter la comparaison des diverses irradiations obtenues, nous introduirons des paramètres supplémentaires, ces paramètres seront non en rads, mais en "pourcentage", qui conduisent à une interprétation plus commode; les paramètres que nous introduisons sont les suivants :

i - contribution en pourcentage de chaque faisceau au centre de la tumeur.

La contribution en "pourcent" d'un faisceau est définie par le rapport de la dose délivrée en O par le faisceau considéré à la dose totale délivrée en O, étant multipliée par 100.

Par exemple :

la dose totale délivrée au centre O de la tumeur en absence et en présence de coin est respectivement

$$S_1 = \sum_{j=1}^m d_{O,j} \cdot \omega_j$$

$$S_1^* = \sum_{j=1}^m (d_{O,j} \cdot \omega_j + d_{O,j}^* \cdot \omega_j^*)$$

où $d_{O,j}$ est la dose unitaire délivrée en O par le faisceau j.

Donc la contribution en pourcentage du faisceau j en O est :

$$C_j = \frac{d_{O,j} \cdot \omega_j}{S_1} \cdot 100 \quad (\text{sans coin})$$

$$C_j^* = \frac{d_{O,j}^* \cdot \omega_j^*}{S_1^*} \cdot 100 \quad (\text{avec coin})$$

Notons qu'en absence de coin S_1^* est identique à S_1 .

ii - Pondération en pourcentage de chaque faisceau à l'entrée :

elle est définie par le rapport de la pondération de ce faisceau à la somme des pondérations de l'ensemble de faisceaux, par exemple :

posons

$$S_2 = \sum_{j=1}^m \omega_j$$

et

$$S_2^* = \sum_{j=1}^m (\omega_j + \omega_j^*)$$

cette pondération sera

$$P_j = \frac{\omega_j}{S_2} \cdot 100 \quad (\text{sans coin})$$

$$P_j^* = \frac{\omega_j^*}{S_2^*} \cdot 100 \quad (\text{avec coin})$$

Notons que en absence de coin S_2^* est identique à S_2 .

La plupart des documents représentent les isodoses repérées non pas par leur valeur réelle en rad, mais par repérage proportionnel à la valeur réelle; le facteur de proportionnalité est tel qu'une isodose choisie comme référence ait le repère 100. Soit L_o la valeur en rad correspondant à cette isodose, une isodose quelconque correspondant à L sera repérée par $L/L_o \cdot 100$.

Nous gardons L_0 égal au seuil inférieur repéré à la tumeur de sorte que l'isodose de repère 100 englobe la tumeur.

Pour que les documents que nous imprimons soient compatibles avec cette convention, nous multiplions par le même facteur $100/L_0$ les différentes doses calculées comme suit :

iii - Ecart maximum en pourcentage au niveau de la tumeur :

$$\text{il est égal à } (L_1 - L_0) \cdot \frac{100}{L_0}$$

où L_1 est la valeur maximum de la dose délivrée en un point de la tumeur.

iv - Dose moyenne en pourcentage par organe :

$$\text{elle est égale à } J \cdot \frac{100}{L_0}$$

où J est la dose moyenne en rad délivrée par l'ensemble de faisceaux, soit à la tumeur, soit à un organe sensible.

v - Dose moyenne en pourcentage par la totalité des organes sensibles :

elle est égale à

$$\frac{\sum_{k=1}^n J_k \cdot \Delta_{O_k}}{\sum_{k=1}^n \Delta_{O_k}} \cdot \frac{100}{L_0}$$

où Δ_{O_k} est l'aire du domaine Γ_k de l'organe sensible O_k et J_k est la dose moyenne pour cet organe.

vi - Dose moyenne en pourcentage au niveau des points d'entrée

elle est égale à

$$\frac{\sum_{j=1}^m D_j}{m} \cdot \frac{100}{L_0}$$

où D_j est la dose totale délivrée au point d'entrée M_j par l'ensemble de faisceaux.

III.1.2 Exemple de traitement non défini

Cet exemple concerne un contour contenant une tumeur de l'oesophage et trois volumes-sensibles (les deux poumons et la moëlle) comme l'indique la figure (9).

Nous prenons 18 positions régulièrement espacées de 20° en 20° ; le champ est identique pour les dix huit faisceaux, et défini à la tumeur. Ses dimensions sont 7 cm, 13 cm.

La distance de la source au centre de la tumeur (DSA) est constante et égale à 80 cm.

Le tableau suivant définit les contraintes imposées sur la dose totale délivrée en chaque point du support de l'optimisation de l'organe intéressé.

Localisation	Tumeur	org. sens. O_1 (Poumon)	org. sens. O_2 (Poumon)	org. sens. O_3 (moëlle)	points d'entrée
Dose en rads	≥ 6000	≤ 2000	≤ 2000	≤ 4000	≤ 3600

Nous comparons les deux critères d'optimisation "dose moyenne" et "homogénéité". Les résultats sont portés dans les tableaux (1) et (2). Le tableau (1) nous montre les paramètres C_j et P_j déjà définis.

Nous remarquons sur ce tableau que les pondérations des quatre faisceaux (20° , 40° , 160° , 240°) sont nulles dans le premier cas, alors qu'il y a sept faisceaux (0° , 20° , 140° , 200° , 220° , 260° , 280°) de pondérations nulles dans le second cas.

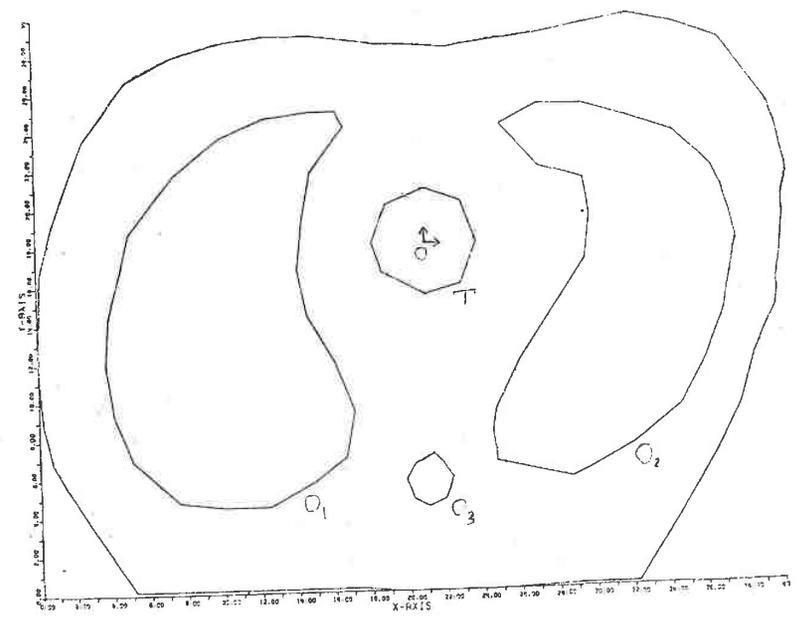


Figure 9

Contour d'oesophage contenant une tumeur T et
3 organes sensibles O_1 , O_2 et O_3
O est le point de concours de faisceaux.

j	angles (en degrés)	Homogénéité		Dose moyenne	
		C _j	P _j	C _j	P _j
1	0	8,7	9,8	0,0	0,0
2	20	0,0	0,0	0,0	0,0
3	40	0,0	0,0	1,9	2,3
4	60	21,8	14,8	20,8	16,8
5	80	3,5	2,0	15,1	10,5
6	100	4,4	2,6	19,8	13,9
7	120	1,5	1,0	5,9	4,8
8	140	9,6	8,4	0,0	0,0
9	160	0,0	0,0	7,0	9,3
10	180	8,6	10,8	6,7	10,1
11	200	0,3	0,4	0,0	0,0
12	220	8,8	14,1	0,0	0,0
13	240	0,0	0,0	4,7	7,2
14	260	8,0	8,3	0,0	0,0
15	280	8,9	9,4	0,0	0,0
16	300	4,9	6,2	8,0	12,0
17	320	5,8	6,6	1,2	1,6
18	340	5,3	5,7	8,9	11,5

Tableau 1

Sur le tableau (2) nous trouverons les valeurs des autres paramètres.

Nous pouvons noter que :

- l'écart maximum ainsi que la dose moyenne au niveau de la tumeur pour le critère d'homogénéité sont inférieurs aux valeurs correspondantes obtenues dans le cas du critère de dose moyenne.
- Les doses moyennes au niveau des organes sensibles et des points d'entrée sont supérieures dans le cas du critère d'homogénéité aux valeurs obtenues dans le cas du critère de la dose moyenne.

Les figures (10) et (11) nous montrent les courbes des isodoses correspondantes ; dans chaque figure nous représentons également les contours du sujet, de la tumeur et des organes sensibles.

Les positions des isodoses sont calculées par interpolation linéaire et les isodoses sont dessinées sur traceur de courbes en dimensions réelles.

Le pas choisi de mailles du réseau est 1,0 cm. Les isodoses sont indiquées en pourcent de la dose minimale délivrée à la tumeur (100 %) et tracées à intervalle de 10 %. La dose maximale résultante est donc supérieure à 100 %.

		Homogénéité	Dose Moyenne
Ecart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur		7,3	21,3
Dose moyenne en "pourcent." par organe	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	104,7	110,7
	Poumon gauche seuil 2000 rads repère 33,3	22,4	16,1
	Poumon droit seuil 2000 rads repère 33,3	22,8	17,7
	moëlle seuil 4000 rads repère 66,6	37,8	17,0
Dose moyenne en "pourcent." par la totalité des organes sensibles		22,8	16,8
Dose moyenne en "pourcent." au niveau de points d'entrée		24,4	22,7

Tableau 2

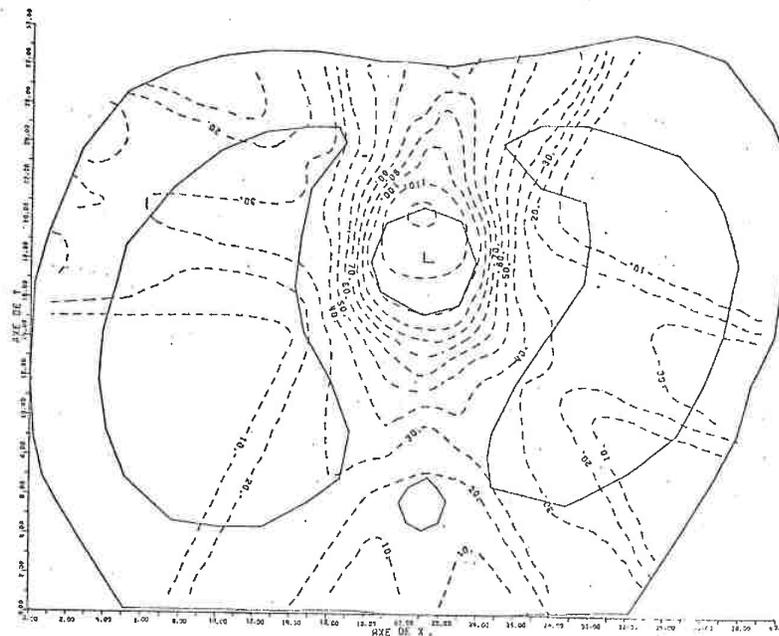


Figure 10

Isodoses de traitement non défini

critère : somme des doses moyennes des organes sensibles

pas de maille : 1,0 cm.

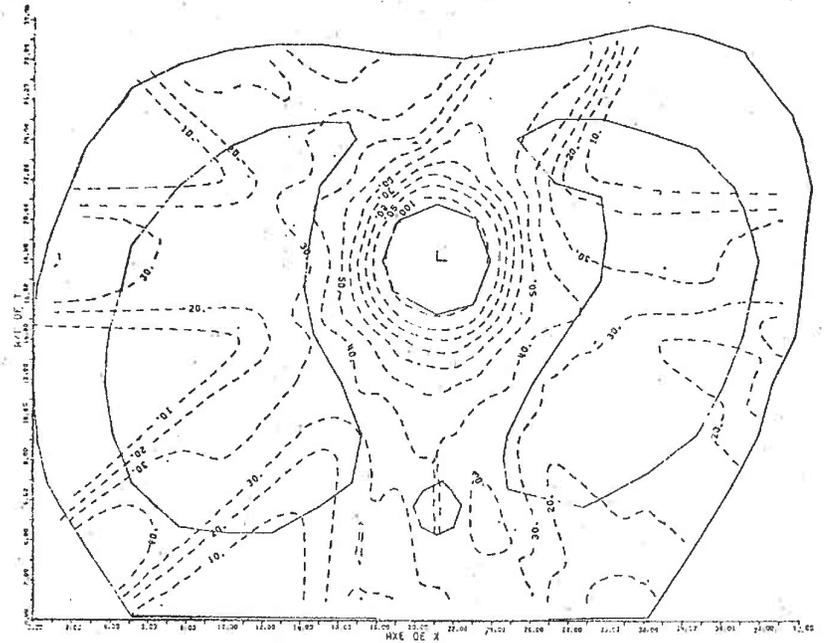


Figure 11

Isodoses de traitement non défini

Critère : homogénéité

pas de maille : 1,0 cm.

III.1.3 Exemples de traitement défini

Nous nous proposons d'étudier les trois critères choisis

- i - Dose moyenne
- ii - homogénéité
- iii - seuil

et nous commençons d'abord par comparer les deux premiers en prenant comme exemple un contour de cou contenant une tumeur et un organe sensible comme l'indique la figure (12).

Ensuite, nous étudierons le troisième critère en prenant comme exemple le contour d'œsophage déjà utilisé dans III.1.2.

*
1) Etude des deux critères "dose moyenne" et "homogénéité".

La tumeur est irradiée par 3 faisceaux des angles 90° , 180° et 270° . Le champ identique pour les 3 faisceaux est défini à la peau et ses dimensions sont 5 cm . 5 cm.

La distance source peau (DSP) est égale à 60 cm.

Les valeurs seuil imposées sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

Localisation	Tumeur	Org. sensible (moëlle)	points d'entrée
Dose en rads	≥ 6000	≤ 4000	≤ 6000

et nous distinguons deux cas d'optimisation, sans coin puis avec coin.

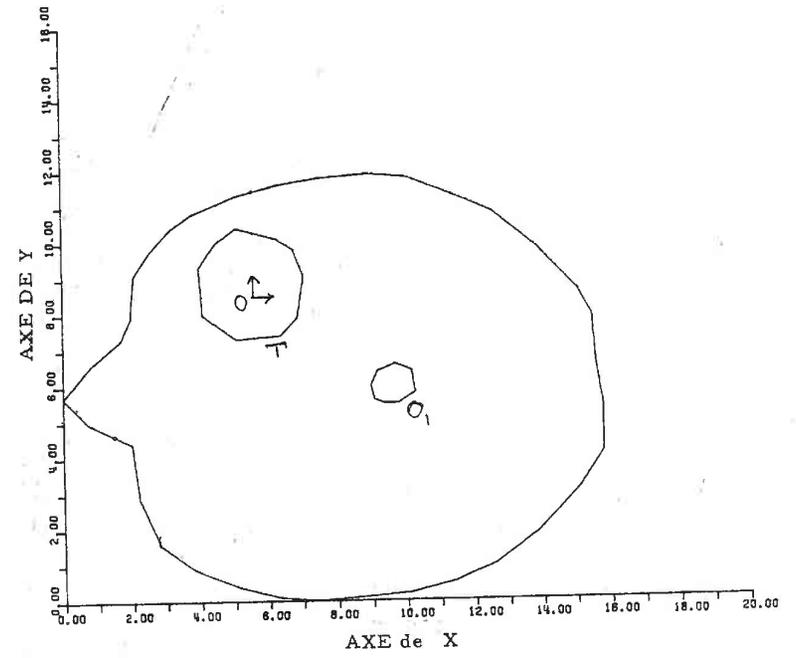


Figure 12

Contour de cou contenant une tumeur T
et un organe sensible O_1

O est le point de concours des axes.

A - Optimisation en l'absence de coin

j	angle (en degrés)	Homogénéité		Dose moyenne	
		C _j	P _j	C _j	P _j
1	90	43,1	35,9	45,2	37,7
2	180	21,1	18,5	19,6	17,2
3	270	35,8	45,6	35,3	45,1

Tableau 3

		Homogénéité	Dose moyenne
Ecart maximum en "pourcent" au niveau de la tumeur		9,8	9,9
Dose moyenne en "pourcent." par organe	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	107,5	107,5
	moëlle seuil 4000 rads repère 66,66	17,9	17,2
Dose moyenne en "pourcent." au niveau de points d'entrée		80,7	80,6

Tableau 4

B - Optimisation en présence de coin (coins de 60°)

j	angle (en de- grés)	Homogénéité				Dose moyenne			
		C _j	C _j [*] avec coin	P _j	P _j [*] avec coin	C _j	C _j [*] avec coin	P _j	P _j [*] avec coin
1	90	27,9	19,3	25,9	17,9	34,0	13,7	28,3	11,5
2	180	26,4	15,3	25,7	14,9	16,4	0,0	14,3	0,0
3	270	0,0	11,0	0,0	15,4	36,0	0,0	45,9	0,0

Tableau 5

Ecart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur		Homogénéité	Dose moyenne
		4,3	6,9
Dose moyenne en "pourcent." par organe.	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	102,2	104,4
	Moëlle seuil 4000 rads repère 66,66	29,2	15,9
Dose moyenne en "pourcent." au niveau de points d'entrée		65,5	78,6

Tableau 6

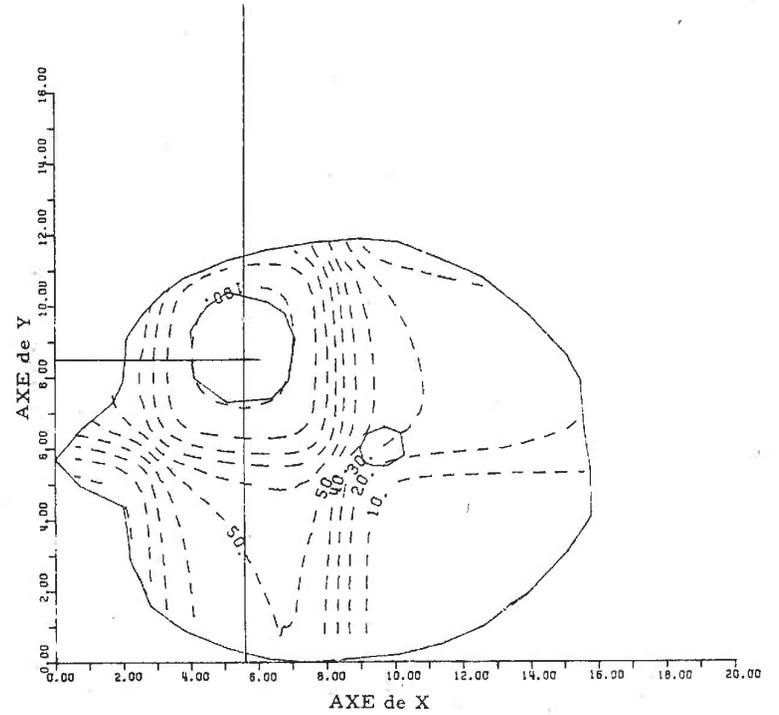


Figure 13

Isodoses pour trois faisceaux
 Champ (5 × 5) cm² défini à la peau (DSP = 60 cm)
avec coin 60°

Critère d'homogénéité
 Pas de maille 0,5 cm.

2*) Etude du 3ème critère (critère de seuil)

On se propose maintenant de minimiser la dose maximale délivrée en un point des organes sensibles.

Nous prenons comme exemple le contour d'oesophage précédemment utilisé (III.1.2) en gardant les mêmes dimensions des champs, ainsi que la distance source axe (DST), mais en utilisant seulement 4 faisceaux d'angles 0° , 90° , 180° et 270° .

Nous fixons la dose à la tumeur, à l'entrée et à l'organe sensible O_3 (moëlle) et nous cherchons à minimiser la dose seuil y délivrée aux organes sensibles O_1 (poumon gauche) et O_2 (poumon droit), en l'absence puis en présence de coin de 45° .

Les doses seuil imposées à la tumeur, à l'entrée et à l'organe O_3 sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

Localisation	Tumeur	O_1 (Poumon gauche)	O_2 (Poumon droit)	O_3 (moëlle)	Points d'entrée
Dose en rads	≥ 6000	$\leq Y$	$\leq Y$	≤ 5000	≤ 6000
		Y est la fonction objectif			

A - Optimisation en l'absence de coin

Dans ce cas la valeur y cherchée est 4256 rads et repérée en pourcentage 70,9.

Les paramètres correspondants, apparaissent dans les deux tableaux suivants.

j	angle (degrés)	C_j	P_j
1	0	18,8	23,2
2	90	40,0	25,3
3	180	19,2	26,6
4	270	22,1	25,0

Tableau 7

Ecart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur	Dose moyenne en "pourcent." par organe				Dose moyenne en "pourcent." par la totalité des organes sensibles	Dose moyenne en "pourcent." au niveau de points d'entrée
	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	Poumon gauche seuil 4256 rads repère 70, 9	Poumon droit seuil 4256 rads repère 70, 9	(moelle) seuil 5000 rads repère 83,3		
12	107,8	18,1	19,0	77,2	19,2	95,7

Tableau 8

B - Optimisation en présence de coin (coin de 45°)

La valeur y cherchée est 4162 rads, et repère en "pourcentage" 69,36.

Les paramètres correspondants apparaissent dans les deux tableaux suivants :

j	angle (degrés)	C _j	C _j [*]	P _j	P _j [*]
1	0	13,5	5,2	16,7	6,4
2	90	40,0	0,0	25,3	0,0
3	180	12,1	7,1	16,7	9,9
4	270	21,6	0,5	24,5	0,5

Tableau 9

Ecart maximum en "pourcent. " au niveau de la tumeur	Dose moyenne en "pourcent. " par organe				Dose moyenne en "pourcent. " par la totalité des organes sensibles	Dose moyenne en "pourcent. " au niveau de points d'entrée
	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	Poumon gauche seuil 4163 rads repère 69,36	Poumon droit seuil 4162 rads repère 69,36	(moëlle) seuil 5000 rads repère 83,3		
11,7	107,8	18,2	19,0	77,1	19,3	95,6

Tableau 10

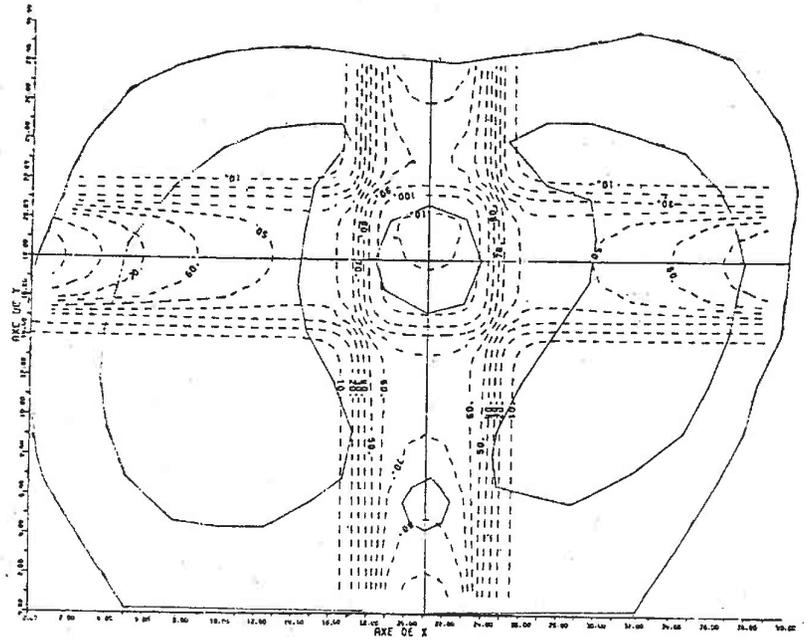


Figure 14

Isodoses pour quatre faisceaux
champ [7 × 13] cm² défini à l'axe DSA (80 cm)
critère : seuil
pas de maille : 1,0 cm.

III.2 PHASE D'AMELIORATION PAR QUADRATISATION

La programmation linéaire nous a permis d'obtenir un optimum Ω , lorsque nous connaissons la géométrie des sources, c'est-à-dire les coordonnées x_0, y_0 du contour de la tumeur, ainsi que les θ_j de chaque source.

Nous nous proposons maintenant de modifier certaines de ces variables x_0, y_0, θ_j de façon à améliorer les résultats déjà obtenus.

La fonction Ω sera, au choix, l'une quelconque des trois fonctions objectifs précédemment définies et nous cherchons à diminuer Ω .

Nous allons appliquer la méthode à l'exemple du cou, traité par programmation linéaire au paragraphe (III.1.3). Les champs ne seront pas modifiés, ni les distances PS_j : les 5 variables sont donc

x_0 et y_0 : centre de la tumeur

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$: angles polaires des axes des faisceaux. Le

tableau de ces cinq variables sera noté :

$$[X] = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

III.2.1 $\Omega(X)$ est le minimum de la somme des doses moyennes des organes sensibles.

La fonction $\Omega(X)$ a comme valeur initiale $\Omega(X^0)$, obtenue par programmation linéaire pour le tableau X^0 fixé pendant cette phase.

A - Traitement en l'absence de coin

Nous avons choisi comme pas initiaux les valeurs suivantes :

$$h_1 = 0,01 \quad h_2 = 0,01 \quad h_3 = 0,1 \quad h_4 = 0,1 \quad h_5 = 0,1.$$

Le tableau (11) nous montre les valeurs des variables et de la fonction $\Omega(X)$ pendant les itérations successives.

Itération (NT)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F (X)
0	0,0	0,0	1,57080	3,14159	4,71239	1030,9897
1	0,389814	0,0	1,28964	3,14159	4,49123	988,06958
2	-0,353255	0,0	1,35464	3,14159	4,49123	893,22290
3	0,0307382	0,0	1,35464	3,14159	4,49122	770,53003
4	0,0776139	0,0	1,04115	3,14158	4,54150	684,91968
5	(Pas de Programme de base)					

Tableau 11

Nous remarquons que pour NT = 5, il n'y a pas de programme de base dans la phase de programmation linéaire et on arrête le programme en ce moment. Nous prenons donc la solution obtenue pour l'itération précédente (pour NT = 4) et nous la considérons, la solution améliorée obtenue d'après cette phase.

Donc le tableau X^4 (4 : indice d'itération) est celui que nous conservons et pour lequel nous déterminons les paramètres $C_j, P_j \dots$ et aussi que les courbes des isodoses.

Le tableau (12) montre les nouvelles positions des axes des faisceaux et les valeurs de C_j et P_j ($j = 1, 2, \dots, m$) correspondantes.

Dans le tableau (13) nous mettons en évidence le gain obtenu par la technique de quadratisation ; on constate que

j	angle (en degrés)	C_j	P_j
1	59,65	44,3	38,2
2	180,0	14,4	12,2
3	260,21	41,3	49,6

Tableau 12

		phase de programmation linéaire	phase d'amélioration par quadratisation
		Ecart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur	9,9
Dose moyenne en "pourcent." par organe.	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	107,4	106,0
	moëlle seuil 4000 rads repère 66,6	17,2	11,4
Dose moyenne en "pourcent." au niveau des points d'entrée		80,6	80,3

Tableau 13

la dose moyenne en pourcentage par organe sensible est passée de 17,2 à 11,4.

Les courbes isodoses correspondant apparaissent dans la figure (15).

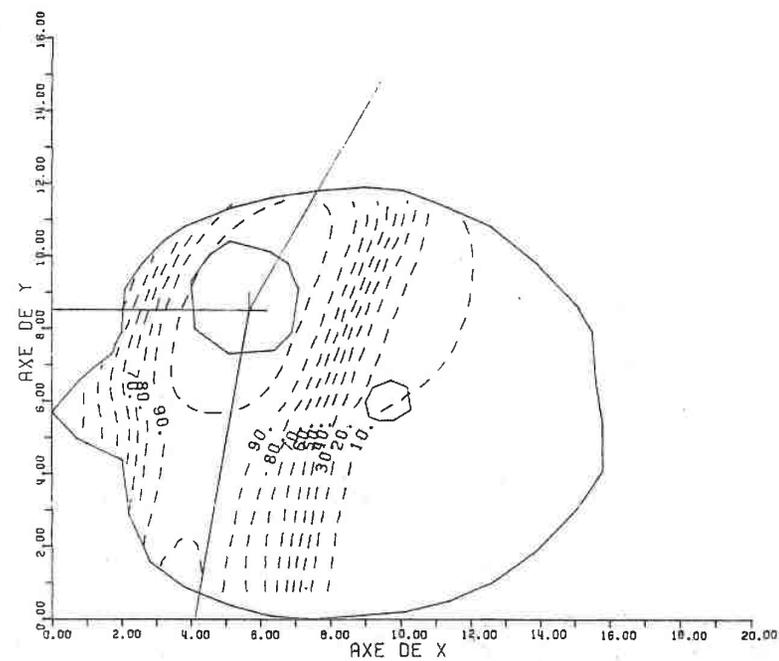
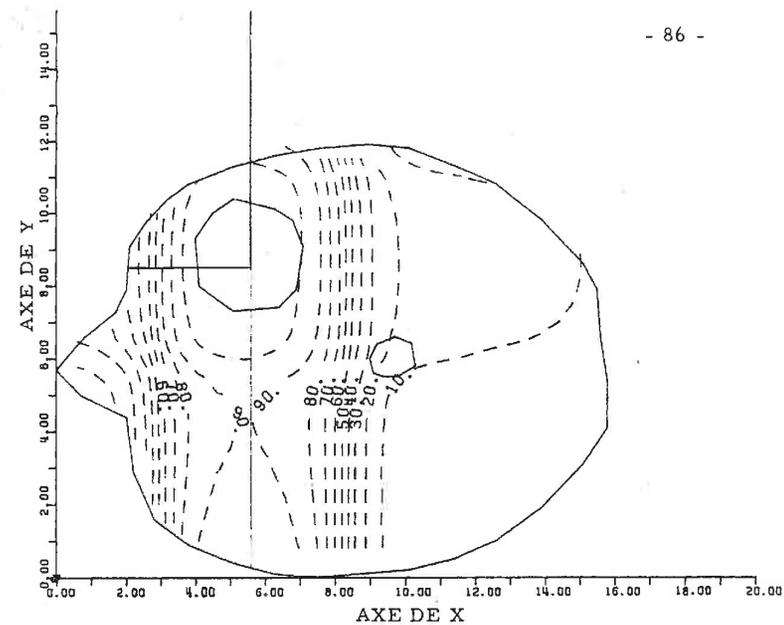


Figure 15 Isodoses pour 3 faisceaux en absence de coin.

- i - Phase de programmation linéaire pour le critère de dose moyenne (figure du haut)
- ii - Phase d'amélioration de cet optimum par quadratisation

B - Traitement en présence de coin (coins de 60°)

Nous avons choisi comme pas initiaux les valeurs déjà utilisées dans le cas A.

Le tableau (14) nous montre l'évolution des valeurs des variables et de la fonction $\Omega(X)$ pendant les itérations successives.

Itération (NT)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F(X)
0	0,0	0,0	1,57080	3,14159	4,71239	952,59912
1	-0,404585	0,0	1,46597	3,14159	4,63977	687,94653
2	-0,604288	0,0	1,46454	3,14159	4,32146	484,32471
3			(pas de programme de base)			

Tableau 14

Les résultats correspondants à la deuxième itération apparaissent dans les tableaux suivants :

j	angle (en degrés)	C_j	C_j^*	P_j	P_j^*
1	83,91	24,2	22,7	21,1	19,8
2	180,0	12,0	0,0	10,5	0,0
3	247,60	0,0	41,2	0,0	48,7

Tableau 15

Ecart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur		Phase de programmation linéaire	Phase d'amélioration par quadratisation
		6,9	8,4
Dose moyenne en "pourcent." par organe	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	104,3	105,7
	moëlle seuil 4000 rads repère 66,66	15,9	8,1
Dose moyenne en "pourcent." au niveau des points d'entrée		78,6	83,1

Tableau 16

Dans le tableau (16), on constate que la dose moyenne en pourcentage par organe sensible est passée pour la moëlle de 15,9 à 8,1.

III. 2. 2 $\Omega(X)$ est le minimum de la dose maximale délivrée en un point de la tumeur

A - Traitement en l'absence de coin

Nous avons choisi comme pas initiaux les valeurs suivantes :
 $h_1 = 0,1$ $h_2 = 0,1$ $h_3 = 0,1$ $h_4 = 0,1$ $h_5 = 0,1$.

Le tableau (17) nous montre l'évolution des valeurs des variables et de la fonction $\Omega(X)$ pendant les itérations successives.

Itération	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F (X)
0	0,0	0,0	1,57080	3,14159	4,71239	6586,7148
1	0,791898	0,0	1,57079	3,14159	4,71239	6404,0039
2	0,724399	0,121749	1,57079	3,14135	4,71239	6363,3477
3	0,689598	0,347974	1,35331	3,14135	4,71239	6349,0781
(pas de programme de base)						

Tableau 17

Les résultats correspondants à la troisième itération apparaissent dans les tableaux suivants :

i	angle (en degrés)	C_i	P_i
1	77,54	16,3	10,9
2	179,99	41,2	43,6
3	270,0	42,5	45,5

Tableau 18

Ecart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur		Phase de programmation linéaire	Phase d'amélioration par quadratisation
			9,8
Dose moyenne en "pourcent." par organe	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	107,5	103,6
	Moëlle seuil 4000 rads repère 66,66	17,9	31,5
Dose moyenne en "pourcent." au niveau des points d'entrée		80,7	65,9

Tableau 19

Dans le tableau (19) on constate que l'écart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur est passé de 9,8 à 5,8.

La figure (16) nous montre les courbes isodoses correspondantes.

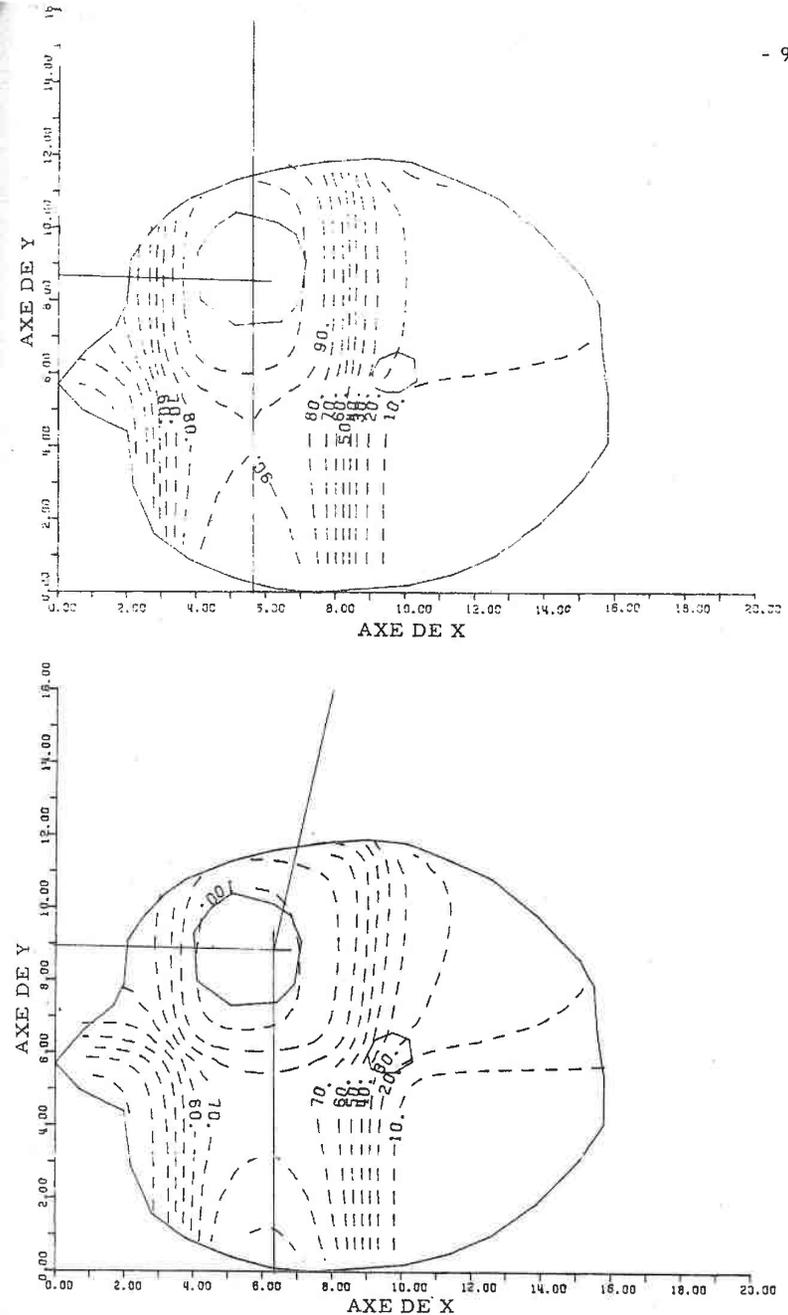


Figure 16 Isodoses pour 3 faisceaux en absence de coin.

- i - Phase de programmation linéaire pour le critère d'homogénéité (figure du haut)
- ii - Phase d'amélioration de cet optimum par quadratisation (figure du bas)

B - Traitement en présence de coin (coin de 60°)

Nous avons choisi comme pas initiaux les valeurs suivantes :

$$h_1 = 0,2 \quad h_2 = 0,2 \quad h_3 = 0,1 \quad h_4 = 0,1 \quad h_5 = 0,1.$$

Le tableau (20) nous montre l'évolution des valeurs des variables et de la fonction $\Omega(X)$ pendant les itérations successives.

Itération (NT)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F (X)
0	0,0	0,0	1,57080	3,14159	4,71239	6256,3828
1	0,252017	0,560031	1,57079	3,14159	4,71239	6228,9883
2	0,168249	0,644284	1,57079	3,21454	4,71239	6224,8594
3	0,145411	0,576261	1,57079	3,21454	4,707044	6224,3594
4	0,145613	0,557057	1,57078	3,21453	4,66000	6224,0469
Optimum obtenu						

Tableau 20

Les résultats correspondants à la quatrième itération apparaissent dans les deux tableaux suivants.

j	angle (en degrés)	C_j	C_j^*	P_j	P_j^*
1	90,0	24,3	2,0	19,3	1,6
2	184,18	41,0	0,0	36,0	0,0
3	267,00	9,0	23,7	11,9	31,3

Tableau 21

		Phase de programmation linéaire	Phase d'amélioration par quadratisation
Ecart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur		4,3	3,8
Dose moyenne en "pourcent." par organe	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	102,2	101,8
	Moëlle seuil 4000 rads repère 66,66	29,2	15,1
Dose moyenne en "pourcent." au niveau des points d'entrée		65,5	78,3

Tableau 22

Dans le tableau (22) on constate que l'écart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur est passé de 4,3 à 3,8.

III.2.3 $\Omega(X)$ est le minimum de la dose maximale délivrée en un point des organes sensibles

A - Traitement en l'absence de coin

Nous avons choisi comme pas initiaux les valeurs suivantes :

$$h_1 = 0,1 \quad h_2 = 0,1 \quad h_3 = 0,1 \quad h_4 = 0,1 \quad h_5 = 0,1.$$

Le tableau (23) nous montre les valeurs des variables et de la fonction $\Omega(X)$ pendant les itérations successives.

Itération (NT)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F(X)
0	0,0	0,0	1,57080	3,14159	4,71239	1541,1060
1	0,365912	0,0	1,57079	3,14159	4,34319	1498,7617
2	0,0524940	0,0	1,48825	3,14159	4,34319	1169,5896
3	-0,0136151	0,0	1,48825	3,14159	4,16304	1102,4712
4	0,0409248	0,0	1,49405	3,14717	4,16304	1026,2964
(Pas de programme de base)						

Tableau 23

Les résultats correspondants à la quatrième itération apparaissent dans les tableaux suivants :

j	angle (en degrés)	C_j	P_j
1	85,60	37,8	32,5
2	180,32	15,1	13,6
3	238,52	47,1	53,9

Tableau 24

		Phase de programmation linéaire	Phase d'amélioration par quadratisation
Ecart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur		9,9	13,4
Dose moyenne en "pourcent." par organe	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	107,5	109,4
	Moëlle seuil 4000 rads repère 66,66	17,2	11,6
Dose moyenne en "pourcent." au niveau des points d'entrée		80,6	82,3

Tableau 25

Dans le tableau (23), on constate que la valeur seuil de l'organe sensible est passée de 1541,1060 à 1026,2964 et par conséquent nous trouvons que la dose moyenne en "pourcent." délivrée à cet organe est passée de 17,2 à 11,6 comme l'indique le tableau (25).

B - Traitement en présence de coin (coins de 60°)

Nous avons choisi comme pas initiaux les valeurs suivantes :

$$h_1 = 0,02 \quad h_2 = 0,02 \quad h_3 = 0,02 \quad h_4 = 0,02 \quad h_5 = 0,02.$$

Le tableau (26) nous montre l'évolution des valeurs des variables et de la fonction $\Omega(X)$ pendant les itérations successives.

Itération (NT)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F(X)
0	0,0	0,0	1,57080	3,14159	4,71239	1464,1780
1	-0,465253	0,0	1,37779	3,15415	4,71239	954,85889
2	-0,844074	0,0	1,37779	3,16753	4,71239	914,56372
3	-0,602605	0,0	1,37779	3,16752	4,71239	900,78809
4	-0,627763	0,0	1,37779	3,16752	4,71238	899,07593
5	-0,681654	0,0	1,37779	3,16752	4,71238	896,58350
6	-0,714711	0,0	1,33712	3,16752	4,71238	882,66040
7	-0,651988	0,0	1,33712	3,16752	4,71238	881,45630
8	-0,648041	0,0	1,33711	3,16751	4,71238	881,44824
Optimum obtenu						

Tableau 26

Les résultats correspondants à la huitième itération apparaissent dans les deux tableaux suivants :

j	angle (en degrés)	C_j	C_j^*	P_j	P_j^*
1	76,61	0,0	48,2	0,0	41,2
2	181,48	17,5	0,0	14,8	0,0
3	270,0	30,2	4,1	38,7	5,2

Tableau 27

		Phase de programmation linéaire	Phase d'amélioration par quadratisation
Ecart maximum en "pourcent." au niveau de la tumeur		6,9	9,8
Dose moyenne en "pourcent." par organe	Tumeur seuil 6000 rads repère 100	104,3	105,9
	Moëlle seuil 4000 rads repère 66,6	15,9	10,3
Dose moyenne en "pourcent." au niveau des points d'entrée		78,6	84,8

Tableau 28

Dans le tableau (26), on constate que la valeur seuil de l'organe sensible est passée de 1464,1780 à 881,44824 et par conséquent nous trouvons que la dose moyenne en pourcentage délivrée à cet organe est passée de 15,9 à 10,3 comme l'indique le tableau (28).

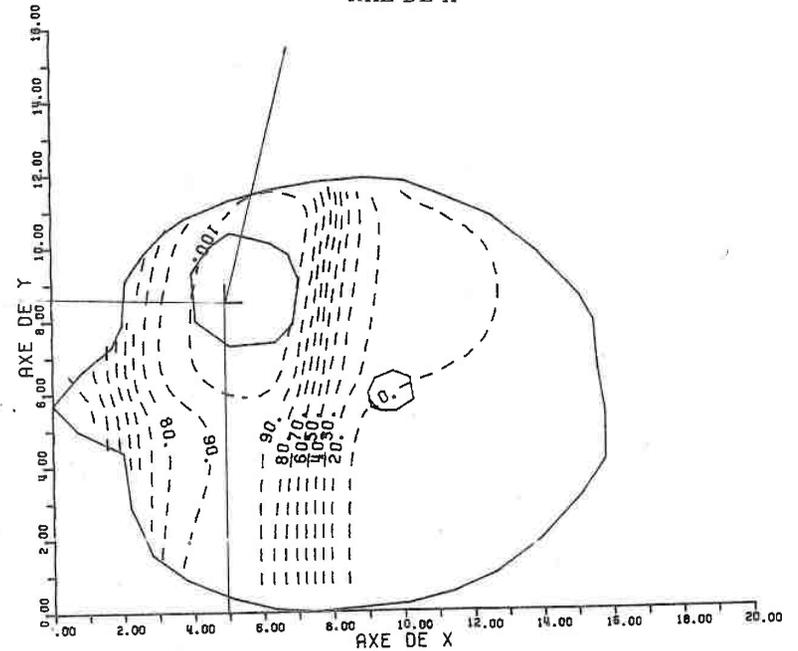
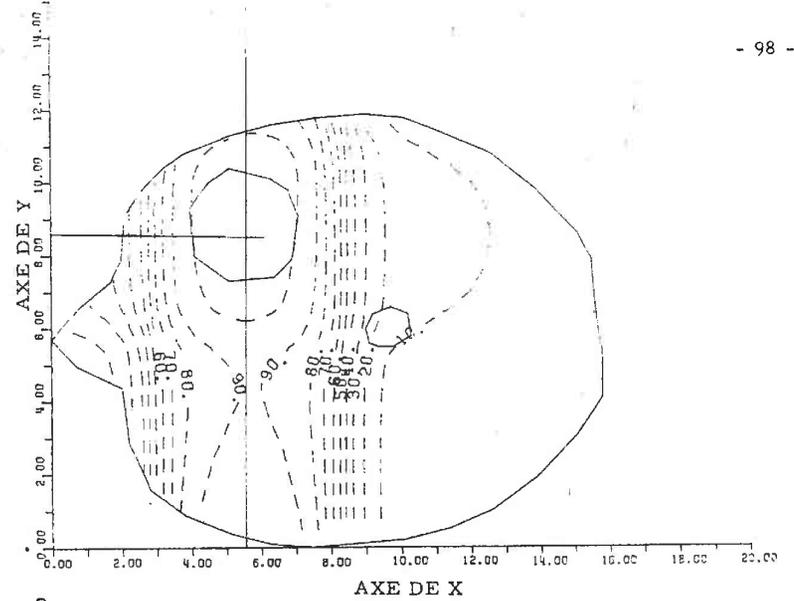


Figure 17

Isodoses pour 3 faisceaux en présence de coin (60°)

- i - Phase de programmation linéaire pour le critère seuil (figure du haut).
- ii - Phase d'amélioration de cet optimum par quadratisation (figure du bas).

CONCLUSION



Les techniques d'optimisation proposées dans ce mémoire nous ont permis de construire un programme de distribution des doses, selon le critère d'optimisation choisi, dans un plan coupant le corps irradié.

Nous avons constaté que la phase de quadratisation, ayant comme fonction objectif l'un ou l'autre des trois optimums obtenus d'après la phase de programmation linéaire, permet d'améliorer le résultat et nous avons comparé ce dernier au résultat obtenu dans la phase linéaire.

Les techniques exposées dans ce travail paraissent être un outil satisfaisant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAHR G.K., KEREIAKES J.G., HORWITZ H., FINNEY R.,
GALVIN S. et GOODE K.
"The method of linear programming applied to
radiation treatment planning".
Radiology, 91, 688, 1968.
- [2] BLANC D., DUTREIX A., et MATHIEU J.
Physique de la radiothérapie.
Collection SUP, 1974, Presses Universitaires
de France.
- [3] BOUDAREL R., DELMAS J. et GUICHET P.
Commande optimale des processus, programmation
non linéaire et ses applications.
DUNOD, Paris, 1968, tome 2.
- [4] BOUHNİK H.
Etude comparative pour différents rayonnements de
la distribution des doses pour des champs de forme
complexe, (C^{60} - Rx 5,5 MV - Rx 25 MV).
Thèse de docteur d'Université spécialité
Physique des radiations, Université de
Limoges, 1973.
- [5] BOURGAT J.F., RIVER M., DUTREIX A. et BERNARD D.
Optimisation par ordinateur du traitement en télécobal-
thérapie.
J. Radiol. Electrol. 55, 775 - 779, 1974.
- [6] FIACCO A.V. et Mc CORMICK G.P.
Nonlinear programming : sequential unconstrained
minimization techniques.
John Willey and Sons Inc., New York, 1968.

- [7] FLETCHER R. Function minimization without evaluating derivatives.
Computer J. 8 (1965), 33 - 41.
- [8] GALLAGHER T. L.
Optimization of external radiation beams for therapy planning.
Ph. D. Thesis, 1967, Washington University St Louis, Mo., U.S.A.
- [9] GILL P.E. et MURRAY W.
Newton-type methods for unconstrained and linearly constrained optimization.
Mathematical Programming, 7 (1970), 311, 350.
- [10] HODES L.
Semiautomatic optimization of external beam radiation treatment planning.
Radiology, 110 : 191 - 196, 1974.
- [11] HOPE C.S. et CAIN O.
A computer program for optimized stationary beam treatment planning using score functions.
Computers programs in Biomedicine, 2 : 221-231, 1972.
- [12] HOPE C.S. et ORR J.S.
Computer optimisation of 4 MeV treatment planning.
Phys. Med. Biol. 10 (1965) 365.
- [13] KLEPPER L. Y. Electronic computers and methods of linear programming in the choice of optimal conditions for radiation therapy.
(In Russian) Medskaya Radiol. 11, part 5, 8 (1966).

- [14] LEGRAS J.
Algorithmes d'optimisation en problèmes avec contraintes de contrôle optimal .
Cours de D.E.A. oct. 1975.
- [15] LEGRAS J.
Méthodes et techniques de l'analyse numérique.
Dunod Paris, 1971.
- [16] LEUNG P.M.K. The Physical basis of radiotherapy.
The Ontario Cancer Institute and the Princess Margaret Hospital, 1972.
- [17] LILL S.A.
A modified Davidon method for finding the minimum of a function, using difference approximation for derivatives.
Computer J., Vol. 13, 111 - 113, 1970.
- [18] MALLET J.L.
Présentation d'un ensemble de méthodes et techniques de la cartographie automatique numérique.
Science de la Terre, série mémoire, Université de Nancy I, 1974.
- [19] MALLET J.L.
Programmes de cartographie automatique : présentation de la bibliothèque CARTOLAB.
Science de la Terre, document technique, Université de Nancy I, 1976.
- [20] MIFFLIN R.
A superlinearly convergent algorithm for minimization without evaluating derivatives.
Mathematical programming 9 (1975) 100-117.
- [21] MONOT C.
Identification des paramètres d'un système integro-différentiel.
Thèse Docteur ès-sciences, Université de Nancy I, 1975.

- [22] NGUYEN VAN TUAN
Méthode d'optimisation par interpolation de la fonction objectif, application à un problème de contrôle optimal.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université de Nancy I, 1973.
- [23] ORR J. S. Optimisation of radiotherapy treatment planning.
Computer Programs in Biomedicine, 2 : 216 - 220, 1972.
- [24] PELLETIER P. Technique numérique appliquée au calcul scientifique.
Masson et Cie, Paris 1971.
- [25] POWELL M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives.
Computer Journal 7 (1964) 155-162.
- [26] POWELL M. J. D. Recent advances in unconstrained optimisation.
Mathematical Programming 1, (1971) 26-57.
- [27] PUN L. Introduction à la pratique de l'optimisation.
Dunod, Paris, 1972.
- [28] REDPATH A. T., VICKERY B. L. et WRIGHT D. H.
A new technique for radiotherapy planning using quadratic programming.
Phy. Med. Biol., 1976, vol. 21, N° 5, 781 - 791.
- [29] SIMONNARD M. Programmation linéaire.
Vol. 1, Fondements, Dunod, Paris, 1972.

- [30] STEWART G. W. A modification of Davidon's minimization method to accept difference approximations of derivatives.
Journal of the A. C. M. 14 (1967) 72-83.
- [31] VAN DER LAARSE et STRACEE J.
Pseudo optimization of radiotherapy treatment planning.
British Journal of Radiology, 49, 450-457, 1976.
- [32] WINFIELD D. H. Function minimization without derivatives by a sequence of quadratic programming problems.
Technical Report N° 537, Engineering and applied physics division, Harvard University (1967).
- [33] WINFIELD D. H. Function minimization by interpolation in a data table.
J. Inst. Math. Applics (1973), 12, 339-347.
- [34] WOOD R. G. Optimisation of treatment plans.
Computer in Radiotherapy Physical Aspects, 82-95 (Butterworth and Co London) 1974.
- [*] H. ALI AHMED, B. LEGRAS, M. POTDEVIN, J. LEGRAS, N. CHAU, P. SCHOUMAKER
Différentes méthodes d'optimisation par ordinateur des traitements en télécobalthérapie.
Acceptée par Journal Français de Biophysique et de Médecine Nucléaire.
-

NOM DE L'ETUDIANT : ALI AHMED Hassan

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES

VU, APPROUVE

et PERMIS D'IMPRIMER

NANCY LE 5 DECEMBRE 1977

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

