

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LOPRAINE.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE (E.N.S.E.M.)

LES SURFACES INDUSTRIELLES COMPLEXES.

CALCUL DE LEUR COMPORTEMENT MECANIQUE.

REALISATION D'UN CODE DE C.A.O SUR MICRO-ORDINATEUR

THESE

Présentée par

HAMMADA ABBAS

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'INPL EN GENIE MECANIQUE

JURY

Michel LUCIUS

Professeur à L'ENSEM-INPL Nancy Président et Rapporteur

Professeur à l'Université de PARIS XI

Michel CARRARD

C

Rapporteur IIII a l'EN

D 136 008890 9

in à l'ENSEM INPL Nancy ir de Thèse

NANCY le 24 juilles 1990

\$ 136 0088 50 9

90NAN 10048

[M] 1990 ABBAS H.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE (E.N.S.E.M.)

LES SURFACES INDUSTRIELLES COMPLEXES.

CALCUL DE LEUR COMPORTEMENT MECANIQUE.

REALISATION D'UN CODE DE C.A.O SUR MICRO-ORDINATEUR

THESE Sections Room stations ENSEM Présentée par

HAMMADA ABBAS

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'INPL EN GENIE MECANIQUE

JURY

Michel LUCIUS

Michel CARRARD

Professeur à L'ENSEM-INPL Nancy Président et Rapporteur

Professeur à l'Université de PARIS XI Rapporteur

Claude BONTHOUX

Professeur à l'ENSEM-INPL Nancy Directeur de Thèse

NANCY le 24 juillet 1990

AVANT PROPOS

Cette étude a été effectuée dans le Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Assistée par Ordinateur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine en France, dirigé par Monsieur le Professeur Claude BONTHOUX.

Je tiens à remercier infiniment Monsieur C. BONTHOUX pour m'avoir permis d'entreprendre cette recherche, pour l'intérêt qu'il a manifesté à l'égard de ces travaux ainsi que pour sa participation à la mise en forme de ce travail.

Je suis sensible à l'honneur que me font Monsieur le Professeur Michel LUCIUS de l'Institut National Polytechnique de Lorraine et Monsieur le Professeur Michel CARRARD de l'Université de Paris XI d'avoir accepté de juger mon travail. Je les remercie de leurs remarques et de leurs suggestions.

Ma reconnaissance va plus particulièrement à Mr Robert MICHELIN qui a bien voulu mettre à ma disposition son programme de Visualisation Assistée par Ordinateur (V.A.O), ce qui m'a permis de donner des représentations concrètes des surfaces réalisées et des résultats de calcul par éléments finis.

Je remercie Mr. René SALAS et Mr Jean-François BRAS qui m'ont donné des éléments nécessaires à faciliter mon travail.

Je remercie Madame ZOBERMAN qui a assuré la mise en forme typographique définitive et a réalisé le tirage de cette thèse.

Mes remerciements vont également au CNOUS et plus particulièrement aux fonctionnaires du CROUS de Nancy pour leur aide permanente tant du point de vue financier que pour les conditions d'hébergement durant mon séjour en France.

PRESENTATION DE L'OBJET DU TRAVAIL

1

Seuls quelques très "grands codes" de calcul par Eléments Finis donnent actuellement la possibilité d'effectuer des évaluations du comportement mécanique de coques de forme absolument quelconque.

Dans la plupart d'entre eux, on sait créer des surfaces à partir des modèles analytiques les plus courants (cylindres, sphères, cônes, etc), mais on se trouve confronté à des grandes difficultés si la surface à représenter et la coque à calculer ne se rapprochent pas de ces surfaces classiques.

Il faut alors faire appel à de véritables systèmes de Conception Assistée par Ordinateur (C.A.O) pour modéliser ces surfaces quelconques puis interfacer le logiciel de C.A.O. à un logiciel de calcul par Elément Finis pour récupérer les fichiers représentatifs de la surface créée et calculer mécaniquement la coque qu'elle représente.

Cette possibilité est donnée grâce à l'association de logiciels puissants tels que CATIA-CAEDDS, EUCLID-IS UNISURF-ANSYS ou EUCLID-IS UNISURF- SYSTUS, etc.... Malheureusement ces logiciels très onéreux nécessitent des moyens informatiques très lourds qui ne sont pas à la portée de tous les bureaux d'études.

L'objectif principal de cette étude est d'essayer de réaliser sur un petit système informatique ce qui actuellement ne se fait que sur de gros et très gros systèmes.

Ce travail a voulu démontrer qu'un sujet aussi délicat et difficile que celui de calculer le comportement mécanique de coques de formes quelconques pouvait être abordé dans un premier temps avec des moyens informatiques réduits de coût très limité. Il faut cependant rester réaliste. Il est hors de question de concurrencer avec un micro ordinateur et un tel logiciel les moyens les plus puissants et les plus modernes

rencontrés par exemple chez les "avionneurs" et les constructeurs automobiles.

L'objectif majeur de ce travail était surtout de maîtriser les connaissances nécessaires à la réalisation de grands codes en vue de mieux utiliser ceux-ci et de mettre éventuellement à la disposition d'entreprises et de bureaux d'études plus modestes des moyens plus appropriés.

Le deuxième but poursuivi dans cette étude est un objectif de formation. On rencontre très rarement des personnes capables de maîtriser, non seulement l'utilisation, mais aussi la conception à la fois de systèmes de C.A.O. et de codes de calcul par Elément Finis.

La véritable Conception Assistée par Ordinateur passe par la maîtrise de ces deux concepts trop souvent séparés au niveau de la formation de futurs enseignants et de responsables de recherche.

SOMMAIRE

PRESENTATION DE L'OBJET DU TRAVAIL

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

PREMIERE PARTIE

MODELISATION DES SURFACES QUELCONQUES

INTRODUCTION		
CHAPITRE I : RAPPELS SUR LES METHODES DE J. FERGUSON, S. A. COONS ET R. RIESENFELD.	1	
I-1. METHODE DE J. FERGUSON	10	
I-1-1. Interpolation de courbes tridimensionnelles	10	
I-1-2. Interpolation de surfaces	19	
I-2. METHODE DE S. A. COONS	23	
I-2-1. Formule non corrigée du carreau de Coons	2:	
I-2-2. Expression de dérivées premières en u et v	21	
I-3. METHODE DE R. RIESENFELD	3	

I-3-1. Approximation des courbes tridimensionnelles 32 I-3-2. Approximation de surfaces 34

CHAPITRE II : LES SURFACES DE BEZIER ET LE SYSTEME UNISURF 36

DESCRIPTION DES SURFACES II-1. Expression plus appropriée et plus utilisable de la forme	36
polynomiale (Base de BERNSTEIN)	39
II-2. Détermination du réseau caractéristique	41
II-2-1. Paramétrage	42
II-2-2. Evaluation des coefficients vectoriels \vec{b}_{ij}	43
II-2-3. Calcul de tous les points de la surface	44

3

pages

1

3

7

4				
CHAPITRE III : METHODE DES B-SPLINES DE C. DE BOOR.	46			
III-1.DEFINITION DES COURBES III-1-1. Les propriétés des B-SPLINES	48			
en ce point	56			
III-2. DEFINITION DES SURFACES Construction géométrique du point courant et des dérivées	57			
en ce point	58			
CHAPITRE IV : DESCRIPTION DES PROGRAMMES	60			
IV-I METHODE DE BEZIER	60			
IV-I-1. Généralités sur le programme	60			
IV-I-2. Organigramme simplifié				
IV-I-3. Relevé des points réels de la surface Degré des polynômes				
d'approximation	62			
IV-I-4. Calcul des paramètres u et v	63			
IV-I-5. Construction de la matrice A	64			
IV-I-6. Triangularisation de la matrice A et résolution du problème	65			
IV-I-6-1 Triangularisation	65			
IV-I-6-2. Résolution du système triangulaire supérieur ou				
substitution arrière	67			
IV-2 METHODE DE B-SPLINES	68			
IV-2-1 Généralités sur le programme	69			
IV-2-2. Relevé des poins réels. Degré des polynômes d'approximation IV-2-3. Calcul des vecteurs noeuds NIU(I) et NIV(v)	69			
CHAPITRE V : EXEMPLES DE REPRESENTATION DE SURFACES	71			
V-1 VISUALISATION D'UNE MEME SURFACE PAR LES METHODES DE BEZIER ET LES B.SPLINES	73			
V-2 CARACTERE GLOBAL DE LA METHODE DE BEZIER ET LOCAL DE LA				
METHODE DE B.SPLINES	79			
V-3 VALIDATION	82			
V-4 EXEMPLES DIVERS SANS OU AVEC RACCORDEMENT DE CARREAUX	83			

	5					
	DEUXIEME PARTIE					
2						
	CALCUL PAK ELEMENT FINIS					
25	I. INTRODUCTION	86				
	CHADITDE L. FORME DISCOPTISEE DES FOMATIONS ET DEINCIDE DU CALC	TT.				
27	DE LA MATRICE DE RAIDEUR ELEMENTAIRE	91				
	I-1 RAPPEL SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.	91				
66	I-2. PRINCIPE DU CALCUL DE LA MATRICE DE RAIDEUR ELEMENTAIRE	94				
65	CHAPITRE II : PREPARATION DES ELEMENTS FINIS UTILISES	98				
792	II-1 EXPRESSION DE LA GEOMETRIE DE L'ELEMENT	98				
	II-2. EXPRESSION DU CHAMP DE DEPLACEMENT	103				
50 62						
64	CHAPITRE III : PREPARATION DU CALCUL AUTOMATIQUE DE CHAQUE					
65	MATRICE DE RAIDEUR ELEMENTAIRE SUR L'ELEMENT DE REFERENCE	108.				
65	III-1. EXPRESSION DES DERIVEES SUR L'ELEMENT DE REFERENCE	108				
	III-2. EXPRESSION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE SUR L'ELEMENT DE	110				
6.7	REFERENCE	112				
65	III-J, CALCOL DE LA MATRICE DE RAIDEOR ELEMENTAIRE	114				
69	III-4-1. Elément linéaire (quatre noeuds par élément)	114				
61	III-4-2. Elément quadratique complet de Lagrange (neuf noeuds	115				
	par element) III 4.2 Elément cubique complet de Lagrange (seize noeuds	115				
71	nar élément)	117				
	III-5. EXPRESSION DE LA LOI DE COMPORTEMENT UTILISEE	118				
73						
77	CHAPITRE IV : ORGANISATION DU PROGRAMME	121				
53	IV-1. VARIABLES UTILISEES	121				
10	IV-2.CONDITIONS AUX LIMITES	126				
	IV-3 CHARGES EXTERIEURES	127				
	IV-4 TRIANGULARISATION DE LA MATRICE [K] ET RESOLUTION DU PROBLEME	128				
	CHAPITRE V : EXEMPLES TRAITES	130				
	VI-1 VALIDATION DU PROGRAMME	132				
	VI-2 ETUDE DE LA COQUE DE LA IERE PARTIE	147				
	CONCLUSION GENERALE	155				

-011 $\widetilde{V}^{(n)}$

 (\cdot, \cdot)

 $\mathcal{D}_{\mathcal{W}}$

FΥ

ANNEXE A correspondant à la lère partie	156			
A-1. LES COURBES DE BEZIER				
nolynomiale (Polynomes de BERNSTEIN)	161			
A-I-2. Détermination d'un polygone caractéristique	165			
A-I-2-1. Paramétrage	165			
1. Méthode simplifiée				
2. Méthode de la ligne brisée				
3. Méthode des arcs de courbes				
4. Méthode projective				
A-I-2-2. Détermination des sommets du polygone caractéristique	168			
A-2. TRIANGULARISATION AVEC PIVOT PARTIEL				
A-3. LISTING DES PROGRAMMES				
ANNEXE B correspondant à la 2ème partie	183			
B-1, TRIANGULARISATION AVEC LA METHODE DE GAUSS	184			
B-2. LISTING DU PROGRAMME DE CALCUL PAR ELEMENT FINIS	189			
ANNEXE C. MATERIEL UTILISE	197			
BIRLIOGRAPHIE	198			

INTRODUCTION GENERALE

L'interfaçage d'un programme de Conception Assistée par Ordinateur de surfaces de formes quelconques à un logiciel de calcul par Eléments Finis a été rendu possible parce que ces deux programmes ont été entièrement maîtrisés et réalisés par l'auteur.

2,1

T 4 4

183

28.

me

321

Son originalité réside dans le fait que cet ensemble fonctionne aujourd'hui sur un micro-ordinateur de type AT (cf. ANNEXE C) ce qui paraissait totalement impensable il y a quelques années.

Les pièces qu'il est nécessaire de calculer mécaniquement aujourd'hui au moyen des codes les plus modernes de calcul par Eléments Finis ne sont plus de forme simple.

Pendant très longtemps, la forme des pièces mécaniques était principalement tracée à la règle et au compas. Leur surface résultait d'une somme "booléenne" de volumes dit "analytiques" traduisibles par des expressions mathématiques élémentaires : parallélépipèdes, cylindres, cônes, sphères, tores, etc.....

Ces surfaces analytiques classiques ne sont plus suffisantes maintenant pour traduire des formes plus complexes résultant d'une optimisation de leurs propriétés ou de leur comportement dans leur utilisation (impératifs esthétiques ou déduits de lois physiques : aéro ou hydrodynamique, meilleure résistance, économie de matière, etc ...).

Les industriels sont amenés à créer de nouvelles formes plus générales et répondant mieux aux besoins dans des domaines très divers qui vont des carrosseries de voitures, aux carènes de bateaux, aux cellules et ailes d'avion et d'engins spatiaux, en passant par des pièces mécaniques plus simples comme des aubes de turbines ou des cames.

La représentation de telles surfaces a été très longtemps laissée aux soins de professionnels hautement qualifiés : maîtresmodeleurs, compagnons mouleurs, ajusteurs en matrices.

Quand on a voulu qualifier de telles surfaces, il a été difficile de choisir des expressions : surfaces gauches, tordues, ou à courbure variable en France ou sculptured surfaces, twisted surfaces, free-form surfaces, space-curved chez les Anglo-Saxons.

En réalité, la seule caractéristique commune à toutes ces formes est de ne disposer d'aucune définition mathématique préalable, même partielle et d'avoir d'abord été réalisées par approximations successives puis terminées à la main, chaque retouche étant décidée en fonction de résultats d'expériences.

Il n'est pas besoin d'insister sur les raisons qui imposent d'employer une représentation mathématique pour les surfaces qui définissent ces objets.

Leur réalisation précise et concrète a entraîné le développement de moyens nouveaux. La commande numérique de machines outils a nécessité la première, que toute forme soit d'abord représentée mathématiquement.

L'idée qui a été à l'origine de ce travail est d'utiliser les méthodes pratiques de génération de surfaces avec des machines à commande numérique pour représenter des coques quelconques qui pourront ensuite être calculées par Eléments Finis.

Dans le cas de surfaces gauches, il existe deux types de problème à résoudre : La représentation mathématique d'une forme déjà élaborée et la conception directe d'une surface à créer.

Dans le premier cas, il est fortement fait appel à l'interpolation (faire passer exactement une surface par un ensemble de points mesurés), alors que dans le second, il s'agit plutôt d'approximation (faire passer au mieux une surface par un ensemble de points donnés). Dans les faits, cette deuxième méthode permet aussi comme la première de faire passer une surface exactement par des points choisis à priori.

L'expérience montre que ces deux types de solution sont utilisées conjointement ce qui complique la compréhension d'un exposé sur les différentes méthodes de représentation numérique de surfaces gauches qui emploient plus ou moins traduction et conception. La classification n'est pas aussi simple qu'on peut le penser. Le programme qui est développé dans notre travail doit pouvoir être mis à la disposition de bureaux d'études modestes. Il est alors extrêmement important de réaliser une bonne liaison entre l'utilisateur (technicien, styliste, ingénieur) et des mathématiques forcément complexes pour répondre à ce problème.

Afin de rester à la portée de non spécialistes, un tel système ne doit pas demander à son utilisateur une connaissance trop approfondie des mathématiques. Nous mettons donc l'accent, plus sur la traduction de formes existantes que sur la création de formes. Les surfaces à traduire existent physiquement mais leur formulation mathématique est totalement inconnue.

Si l'on veut exprimer numériquement une forme élaborée par des moyens classiques, c'est à dire principalement manuels, on pense naturellement à mesurer les coordonnées de points situés sur sa surface, plus ou moins distants les uns des autres selon le degré de complexité de l'objet à reproduire. Si ces surfaces sont "turbulentes", il est nécessaire d'ajouter des conditions supplémentaires : points de passage obligés, tangentes aux points mesurés, courbure, etc

Les surfaces à créer sont des surfaces à réaliser matériellement. Leur définition est connue sous forme mathématique de façon explicite ou implicite.

107.0

Nous opposerons dans l'exposé qui suivra la traduction et la conception pour s'intésser essentiellement à la traduction mathématique d'une surface physique.



Cependant, pour faciliter la compréhension au lecteur, nous serons amenés dans la première partie de notre travail à exposer également quelques méthodes dites de conception car la formulation mathématique est similaire et s'appuie sur des concepts du même ordre.

Bien que les premiers travaux concernant cette représentation mathématique firent usage d'un référentiel cartésien, G. FAYART 1961 [17] et INABA 1967 [20], l'observation qu'une rotation transforme naturellement une solution cartésienne en représentation paramétrique et quelques manques de souplesse relatifs à chacune des méthodes ont conduit normalement à l'adoption de la définition paramétrique.

Les systèmes couramment employés ont généralisé l'usage de surface définies par des fonctions polynomiales paramétriques à coefficients vectoriels avec des paramètres variant dans l'intervalle [0,1].

Il est important en effet que la définition des formes soit indépendante du référentiel. L'introduction de fonctions à coefficients vectoriels, pouvu qu'elles remplissent certaines conditions analytiques, permet de définir des surfaces dont la forme propre reste invariable lorsque l'ensemble des vecteurs subit en bloc une série de translations et de rotations.

L'utilisation de fonctions polynomiales se montre bien adaptée aux moyens informatiques modernes et le paramétrage permet une bonne application des conditions aux limites.

Dans le plupart des cas, une méthode de segmentation a été adoptée afin qu'une modification locale n'affecte pas la totalité de la surface ainsi décrite.

La première partie de notre travail rappelera brièvement les méthodes de J. FERGUSON 1964 [18], S.A. COONS 1967 [14] et R.RIESENFELD 1973 [27].

Nous insisterons sur la méthode de BEZIER 1970 [6] 1977 [7-8] et celle des B-SPLINES de DE BOOR 1978 [10] qui nous permettront de construire les surfaces voulues. Les polynômes de BEZIER utilisés dans la méthode de BEZIER entraînent une interaction globale sur l'ensemble de la surface dès qu'un pôle est modifié. Au contraire, l'utilisation des B-SPLINES permet des modifications purement locales.

11

La définition mathématique de ces surfaces étant maîtrisée et ces dernières étant reconstituées à partir de la seule connaissance de quelques points de mesure, nous pourrons aborder l'étude de son comportement mécanique au moyen d'un code de calcul par élément finis.

La deuxième partie de notre travail explicitera la récupération des fichiers de définition de la surface reconstituée, la préparation de ceux-ci en vue "d'attaquer" le programme de calcul par éléments finis et précisera l'interfaçage entre le code générateur de surfaces et le programme de calcul par éléments finis.

Cette partie concernera également la construction du programme de calcul des coques de forme quelconque. Nous avons choisi d'utiliser des éléments isoparamétriques volumiques dégénérés dont la section moyenne a 4, 9 et 16 noeuds, et de nous limiter, pour des raisons matérielles à l'étude du comportement de coques "facettisées".

Sans être trop complexes et par conséquent trop lourds en 45 . . . besoin informatique, ces éléments finis peuvent cependant rendre compte avec une précision raisonnable du comportement mécanique de coques d'épaisseur donnée. Ils s'adaptent d'autre part assez bien au découpage engendré sur la surface par rer l'évolution du paramétrage utilisé pour la définition de celle-ci. 55510 .

100

Sans être d'une originalité majeure, la réalisation de ce véritable code de C.A.O. aura permis de maîtriser toutes les facettes d'un programme complet en vue d'utiliser plus intelligemment et plus efficacemment tout code de calcul industriel. Elle démontrera surtout la possibilité de traiter avec une informatique légère un problème abordable il y a peu de 10.00 temps encore, avec des moyens lourds seulement.

On peut décrire schématiquement, à la page suivante l'ensemble du travail :



PREMIERE PARTIE

MODELISATION DES SURFACES QUELCONQUES

PREMIERE PARTIE

MODELISATION DES SURFACES QUELCONQUES

INTRODUCTION

Le développement de représentations numériques de qualité des surfaces quelconques à l'aide d'un ordinateur fait l'objet d'une attention constante des industriels, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale, automobile, nucléaire etc... Pour représenter ces surfaces il faut effectuer une approximation qui permette de les modéliser de façon adéquate.

Cependant, l'expérience montre qu'il faut tenir compte de deux aspects très importants dans la représentation d'une surface à l'aide de l'informatique :

- D'une part, le modèle de la surface que l'on veut représenter doit être facile à construire et à modifier, ce qui implique une convivialité constante entre l'utilisateur et l'ordinateur.

- d'autre part, la traduction de ce modèle de surface à l'aide de l'ordinateur doit conduire non seulement à une représentation par un dessin sur l'écran, mais aussi et surtout à des résultats analytiques qui permettront la restitution et la fabrication du modèle.

Il n'est pas inutile de dire que ces deux points sont en nermanence d'actualité dans le monde industriel.

Pour représenter de telles surfaces, on peut s'apercevoir très rapidement qu'une approximation par des polygones plans (ou facettes) ne convient plus, car pour obtenir une bonne approximation il serait nécessaire de découper la surface en "morceaux" très petits et de ce fait le nombre de polygones à traiter deviendrait prohibitif. C'est pourquoi la solution d'approximation d'une surface par des "carreaux" (portion élémentaire de surface définie par les équations des quatre "courbes" frontières) a été développée dans le monde industriel. L'un des précurseurs est PIERRE BEZIER (P.BEZIER [6,7,8] Ingénieur chez RENAULT). Ses travaux serviront de base à cette première partie de notre travail. Avant d'exposer la méthode pour des surfaces quelconques, il sera préférable de se pencher d'abord sur le cas de courbes dans l'espace. La représentation mathématique demande en effet des connaissances théoriques de haut niveau.

On exige par exemple des courbes frontières certaines qualités :

- un bon comportement des dérivées premières (points de raccords des carreaux) et des dérivées secondes (courbure des surfaces).

- une grande facilité de modification de l'allure des surfaces et une facilité de calcul car cette méthode est destinée essentiellement à une utilisation interactive.

Le chapitre I aborde ces principes et décrit sommairement la représentation des surfaces quelconques en utilisant les méthodes de J. FERGUSON, S. COONS et R. RIESENFELD.

Le chapitre II reprend de façon plus détaillée la représentation des surfaces quelconques en utilisant la méthode de P. BEZIER. Cette méthode qui engendra le système UNISURF, permet d'utiliser le découpage des surfaces en "carreaux", avec l'avantage important que les fonctions utilisées ont la propriété de se prêter à une bonne approximation d'un contour polygonal. Cette méthode est basée sur les paramétrées polynomiales de BERNSTEIN et elle permet des modifications très faciles des courbes, donc des surfaces approchées.

Le chapitre III expose la théorie des B-SPLINES et l'algorithme de COX DE BOOR.

183

Le chapitre IV expose la méthode utilisée pour résoudre concrètement le problème de la restitution d'une surface quelconque à partir de la seule connaissance d'un nombre limité de points mesurés.

Le chapitre V présente quelques exemples traités et montre l'intérêt des deux types de représentation.

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LES METHODES DE J. FERGUSON, S. COONS ET R.RIESENFELD

L'intérêt de ces rappels réside dans l'écriture des formules analytiques fondamentales pour des carreaux paramétriques réguliers appartenant à des surfaces quelconques de l'espace de dimension trois. Les formes sont à coefficients vectoriels et de degré bi-cubique. L'accent est mis sur certaines de leurs propriétés.

I-1.METHODE DE J. FERGUSON [18]

I-1-1.Interpolations de courbes tridimensionnelles

Il existe trois modes de définition analytique de courbes tridimensionnelles :

* La définition polynomiale explicite

* La définition paramétrique projetable sur les axes

* La définition paramétrique vectorielle,

La dernière méthode qui présente de multiples avantages a très vite pris le pas sur les autres.

En effet, l'utilisation de polynômes de degré élevé entraîne des difficultés de résolution, des erreurs de chute et des oscillations au voisinage des extrémités [32].

L'utilisation d'un paramètre unique pour définir toutes les grandeurs (coordonnées des points, tangentes, etc...) représente un premier pas intéressant qui a été largement amélioré par l'introduction de coefficients vectoriels interprétables.

La définition paramétrique vectorielle a l'avantage d'avoir des coefficients vectoriels ayant une signification physique et jouant un rôle primordial dans la construction géométrique de la courbe. J. FERGUSON en avril 1964 [18] a été le premier à proposer un polynôme à coefficients vectoriels du troisième degré pour interpoler des segments de courbe tridimensionnelle à partir de quelques points caractéristiques (position de l'origine et de l'extrémité, direction des tangentes en ces points par exemple).

Le degré choisi était intuitivement issu des constatations de la résistance des matériaux appliquée aux poutres. La déformation d'une règle (spline) qui respecte de telles contraintes est représentée par un polynôme du troisième degré.

J. FERGUSON propose la définition paramétrique suivante :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}) = \sum_{l=0}^{3} \vec{\mathbf{a}}_{l} \mathbf{u}^{l} \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u} \in [0, 1] \qquad l-1$$
$$= \vec{\mathbf{a}}_{0} + \vec{\mathbf{a}}_{1} \mathbf{u} + \vec{\mathbf{a}}_{2} \mathbf{u}^{2} + \vec{\mathbf{a}}_{3} \mathbf{u}^{3}$$

Si cette courbe paramétrique passe par deux points, extrémités respectivement de $\vec{P}(0)$ et de $\vec{P}(1)$ et si l'on connait en ces deux points les valeurs des dérivées $d\vec{P}(0)/du$ et $d\vec{P}(1)/du$, alors on possède quatre conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer les quatre coefficients de l'expresssion (I-1).

En effet :

$$\vec{a}_{0} = \vec{P}(0)$$

$$\vec{a}_{1} = \vec{d}_{u} = \vec{P}(0)$$

$$\vec{a}_{2} = 3\left[\vec{P}(1) - \vec{P}(0)\right] - 2\vec{d}_{u} = \vec{O}(0) - \vec{d}_{u} = \vec{O}(0)$$

$$\vec{a}_{3} = 2\left[\vec{P}(0) - \vec{P}(1)\right] + \vec{d}_{u} = \vec{O}(0) + \vec{d}_{u} = \vec{O}(0)$$

La cubique paramétrique vectorielle peut alors être représentée matriciellement par :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{u} & \mathbf{u}^2 & \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{P}}(0) \\ \vec{\mathbf{P}}(1) \\ \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{d\mathbf{u}}(0) \\ \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{d\mathbf{u}}(1) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} - 2$$



Figure I - 1

Le segment de courbe [figure I-1] représenté par l'expression (I-2), a donc $\overrightarrow{P(0)}$ et $\overrightarrow{P(1)}$ respectivement comme origine et comme extrémité et de plus la tangente en ces points est respectivement parallèle à $\overrightarrow{P(0)}/du$ et $\overrightarrow{dP(1)}/du$, et est orientée dans le même sens que ces vecteurs.

On peut raccorder deux segments d'une même courbe très facilement grâce à cette représentation. En effet la position de l'origine de l'arc suivant et la tangente en ce point sont les mêmes grandeurs à l'extrémité de l'arc précédent. De proche en proche, on peut ainsi déterminer une suite d'arcs de cubiques joignant entre eux des points P, P', P⁽ⁿ⁾ liés tangentiellement en leurs points communs. Ceci ne marche cependant très bien, que si les arcs sont de forme et de longueur semblable et régulière.

I-1-2. Interpolation de surfaces

On peut toujours définir sur une surface deux réseaux de courbes caractéristiques principales : l'un lié aux lignes de courbures, l'autre issu des lignes géodesiques [32]. Ceci montre qu'il n' y a pas de paramétrage intrinsèque global sur une surface. Les auteurs des diverses méthodes présentées ci-après vont utiliser des représentations très différentes.

L'idée de base est de définir des "carreaux" de surface au moyen de quatre courbes distinctes telles que définies précédemment et se coupant deux à deux en des points appelés sommets. Chaque paire d'arcs n'ayant aucun point commun a le même paramètre d'évolution. Chaque arc étant tracé sur la surface, le paramétrage de la surface et celui des arcs de courbes correspondent.

Comme pour les courbes, la présence de deux réseaux sur la surface incite en effet à utiliser deux paramètres indépendants u et v pour leur représentation. Un carreau de surface peut alors être défini paramétriquement par une fonction polynomiale vectorielle de ces deux paramètres sous la forme suivante :

$$\vec{P}(u, v) = \sum_{l=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \vec{a}_{lj} u^{l} v^{j}$$

sa forme matricielle est :

1 2

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{u} & \mathbf{u}^2 & \mathbf{u}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_{00} & \vec{a}_{01} & \vec{a}_{02} & \vec{a}_{03} \\ \vec{a}_{10} & \vec{a}_{11} & \vec{a}_{12} & \vec{a}_{13} \\ \vec{a}_{20} & \vec{a}_{21} & \vec{a}_{22} & \vec{a}_{23} \\ \vec{a}_{30} & \vec{a}_{31} & \vec{a}_{32} & \vec{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^2 \\ \mathbf{v}^3 \end{bmatrix}$$

L'expression analytique du carreau peut être alors maîtrisée si l'on connait 16 informations sur cet élément de surface qui permettront de déterminer complétement les 16 coefficients de la forme bilinéaire vectorielle cubique extrapolée précédemment proposée : Pour définir une surface, J. FERGUSON propose un carreau (Fig. I-2) limité par quatre arcs de courbes, respectivement représentés par $\vec{P}(u,0)$, $\vec{P}(u,1)$, $\vec{P}(0,v)$ et $\vec{P}(1,v)$; chaque sommet, soit $\vec{P}(0,0)$, $\vec{P}(1,0)$, $\vec{P}(0,1)$ et $\vec{P}(1,1)$, porte deux vecteurs dérivées partielles, $\partial \vec{P}/\partial u$ et $\partial \vec{P}/\partial v$.





A partir de la connaissance des sommets et des dérivées partielles en ces points, on peut écrire :

 $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{P}}(0,0) + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ $\vec{F} = \vec{P}(1,0) + \frac{\partial \vec{P}}{\partial u}(1,0)$ $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{P}}(0, 1) + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial u}(0, 1)$ $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{P}}(1, 1) + \frac{\vec{\partial \mathbf{P}}}{\partial \mathbf{U}}(1, 1)$ $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{P}}(0,0) + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{V}}(0,0)$ $\vec{\mathbf{G}} = \vec{\mathbf{P}}(1,0) + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{V}}(1,0)$ $\vec{N} = \vec{P}(0, 1) + \frac{\partial \vec{P}}{\partial V}(0, 1)$

Ces données ne constituent que 12 informations. J.FERGUSON propose alors d'introduire quatre grandeurs complémentaires et de définir un carreau à partir de la connaissance en chaque sommet non pas deux vecteurs, mais de trois vecteurs liés à la fonction $\overrightarrow{P}(u,v)$ et à ses dérivées premières et seconde mixte.

Les extrémités des vecteurs $\partial \vec{P}(u,0)/\partial v$ et $\partial \vec{P}(u,1)/\partial v$ permettent de déterminer la génératrice courante joignant $P(u,0) \ge P(u,1)$. Ces extrémités sont respectivement situées sur les courbes CG et NO qui sont déterminées par les vecteurs \vec{CD} , \vec{GH} , \vec{NM} et \vec{OR} .

Les vecteurs $P(\overline{u,0})$ S(u) et $P(\overline{u,1})$ T(u) permettent de déterminer la génératrice $P(\overline{u,0})$ P(u,1), et le "Carreau" A E I K est ainsi déterminé quand en chaque coin, on a défini trois vecteurs tels que \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{CD} .

1-3

En observant que :

$$\vec{\mathbf{CD}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{u}} (0)$$

avec $\vec{\mathbf{Q}} (0) = \vec{\mathbf{P}} (0, 0) + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{v}} (0, 0)$

le vecteur \vec{CD} peut être calculé de la manière suivante :

$$\vec{\mathbf{CD}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{u}}(0,0) + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}(0,0) \qquad \mathbf{I} - 4$$

et

$$\vec{\mathbf{OD}} = \vec{\mathbf{P}}(0,0) + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{v}}(0,0) + \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{u}}(0,0) + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}\partial \mathbf{v}}(0,0) - \mathbf{I} - 5$$

Si l'on porte $\overrightarrow{CB1}$ équipollent à \overrightarrow{AB} , on a :

$$\vec{OD} = \vec{A} + \vec{AC} + \vec{CB1} + \vec{B1D}$$

et comme nous avons :

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{P}} (0, 0)$$
$$\vec{\mathbf{AC}} = \frac{\overrightarrow{\partial \mathbf{P}}}{\partial \mathbf{v}} (0, 0)$$
$$\vec{\mathbf{CB1}} = \vec{\mathbf{AB}} = \frac{\overrightarrow{\partial \mathbf{P}}}{\partial \mathbf{u}} (0, 0)$$

On a donc :

$$\overrightarrow{\mathbf{B}} \stackrel{\rightarrow}{\mathbf{D}} = \frac{\overrightarrow{\partial^2 \mathbf{P}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}} (0, 0)$$

On observe que :

 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

d'où :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{A} - \overrightarrow{AB}$$

Compte tenu des relations (I-4) et (I-5), nous pouvons écrire alors :

$$\vec{\mathbf{BD}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{v}} (0, 0) + \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}} (0, 0) \qquad \mathbf{I} - 6$$

Ainsi, les points B, D, J, M et F, H, L, R définissent respectivement les lieux de points y(v) et x(v) tels que P(o,v), y(v), P(1,v) et X(v) déterminent une génératrice de la surface AEIK qui coupe la génératrice P(u,0) P(u,1) au point P(u,v).

Cette méthode vectorielle très intéressante présente cependant l'inconvénient de donner des conditions surabondantes et non nécessaires [32]. Ceci est une gêne sérieuse pour des carreaux de forme quelconque. Elle fonctionne cependant très bien si la surface à définir est découpée en carreaux de dimensions voisines et de forme similaire et régulière.

I-2. METHODE DE S. A. COONS [12,13,14]

Le problème posé par le Professeur S.A. COONS peut se formuler ainsi : comment peut-on définir à partir d'un réseau de courbes sur une surface (la forme de chacun des carreaux étant ainsi limitée), en assurant de l'un à l'autre un raccordement tangentiel et même parfois une continuité de courbure ? Pour résoudre ce problème, S.A. COONS propose une méthode qui permet d'assurer une interpolation "surfacique" de carreaux dont on connait uniquement les contours, c'est-à-dire les isoparamétriques: $\vec{P}(u,0)$, $\vec{P}(u,1)$, $\vec{P}(0,v)$ et $\vec{P}(1,v)$.



Figure I - 3

Un carreau est limité par quatre arcs de courbes paramétriques (fig.I-3) distincts se coupant deux à deux aux sommets. Chaque paire d'arcs n'ayant aucun point commun a le même paramètre de variation ($u \ ou \ v$).

Les quatre limites d'un carreau (fig.I-4) sont respectivement définies par les fonctions connues :

$$\vec{L}_{1} = \vec{S} (u, 0) = \vec{P} (u, 0) \qquad \vec{L}_{3} = \vec{S} (0, v) = \vec{P} (0, v)$$

$$\vec{L}_{2} = \vec{S} (u, 1) = \vec{P} (u, 1) \qquad \vec{L}_{4} = \vec{S} (1, v) = \vec{P} (1, v)$$

où u, v sont deux paramètres indépendants qui varient dans l'intervalle [0,1].

 $\vec{S}(u,v)$ représente l'équation de la surface réelle et $\vec{P}(u,v)$ celle de la surface approchée.



Figure I - 4

L'objectif est de pouvoir définir un point M quelconque de ce carreau au moyen des 8 données précédentes (quatre sommets et quatre courbes limites). L'idée de COONS, que l'on va retrouver dans de nombreuses autres méthodes, est de considérer le point M comme un barycentre de l'ensemble des 8 quantités connues pondérées par des fonctions remplissant un certain nombre de conditions.

I-2-1. Formule non corrigée du carreau de Coons

Pour définir un carreau de surface, S.A. COONS propose de pondérer par deux fonctions F_0 et F_1 les expressions basées sur les équations des courbes frontieres et sur les sommets :

$$\vec{P}(u, v) = F_0(u) \vec{P}(0, v) + F_1 \vec{P}(1, v) + F_0(v) \vec{P}(u, 0)$$

$$+ F_1(v) \vec{P}(u, 1) - F_0(u) F_0(v) \vec{P}(0, 0)$$

$$- F_0(u) F_1(v) \vec{P}(0, 1) - F_0(v) F_1(u) \vec{P}(1, 0)$$

$$- F_1(u) F_1(v) \vec{P}(1, 1) \qquad i - 8$$

Les deux fonctions d'interpolation F_0 et F_1 sont des polynômes de degré trois vérifiant $F_i(j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker)

$$F_0(t) = 2 t^3 - 3 t^2 + 1$$

$$F_1(t) = 3 t^2 - 2 t^3$$

$$t \in [0,1].$$





Figure I - 5

I-9

et on a donc :

 $F_0(0) = 1$ $F_0(1) = 0$

 $F_1(0)$ $F_1(1) = 1$

 $dF_0(0)/dt = dF_0(1)/dt = dF_1(0)/dt = dF_1(1)/dt = 0$

Lorsque l'on fixe le paramètre u et que l'on fait varier le paramètre v, le point correspondant se déplace le long d'une courbe tracée sur la surface. Inversement, si l'on fixe le paramètre v et que l'on fait varier le paramètre u, on obtient une autre courbe. En restreignant les positions possibles pour u et v à des intervalles discrets, on obtiendra des portions de surfaces délimitées chaque fois par quatre segments de courbes.

Avec l'utilisation de la notation de l'indice muet, la forme générale (I-8) peut s'écrire :

$$\vec{P}(u, v) = F_{i}(u) \vec{P}(i, v) + F_{j}(v) \vec{P}(u, j) - F_{i}(u) F_{j}(v) \vec{P}(i, j)$$
 $i - 10$

ou sous forme matricielle :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\left\{-1 \quad \mathbf{F}_{\mathbf{0}}(\mathbf{u}) \quad \mathbf{F}_{1}(\mathbf{v})\right\} \begin{bmatrix} 0 & \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, 1) & \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, 1) \\ \vec{\mathbf{P}}(0, \mathbf{v}) & \vec{\mathbf{P}}(0, 0) & \vec{\mathbf{P}}(0, 1) \\ \vec{\mathbf{P}}(1, \mathbf{v}) & \vec{\mathbf{P}}(1, 0) & \vec{\mathbf{P}}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{F}_{0}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{F}_{1}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{F}_{1}(\mathbf{v}) \end{bmatrix}$$
$$= -\left[\mathbf{F}_{1}(\mathbf{u})\right]^{\mathsf{T}} \left[\vec{\mathbf{P}}_{1,1}\right] \left[\mathbf{F}_{1}(\mathbf{v})\right]$$

Cette formule restitue la surface avec une certaine approximation.

I-2-2. Expression de dérivées premières en u et v.

Les expressions des dérivées premières selon les directions u et v sur le carreau de la surface permettent de corriger l'erreur faite dans la formule (I-8). Pour résoudre ce problème, on introduit tout d'abord quelques notations complémentaires:

* $\vec{P}(u,v)$ représente une approximation d'ordre 0 de la surface. Les fonctions de pondération peuvent s'écrire avec le symbole F_i .

 $* \vec{Q}(u,v)$ représente la correction de la surface d'ordre 1. On utilise des fonctions de pondération G_i .

* $\vec{R_n}(u,v)$ représente une approximation d'ordre n de la surface. Ici, nous nous limitons à l'ordre 1.

On a :

 $*\vec{s}(u,v)$ représente une fonction définissant la surface réelle.

En évaluant les dérivées successives de la formule (I-10) on obtient alors aisément les relations suivantes :

$$\frac{\partial \vec{R}_{0}}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial F_{1}}{\partial u}(u) \vec{P}(i, v) + F_{j}(v) \frac{\partial \vec{P}}{\partial u}(u, j) - \frac{\partial F_{i}}{\partial u}(u) F_{j}(v) \vec{P}(i, j)$$

$$\frac{\partial \vec{R}_{0}}{\partial v}(u, v) = F_{j}(u) \frac{\partial \vec{P}}{\partial v}(i, v) + \frac{\partial F_{j}}{\partial v}(v) \vec{P}(u, j) - F_{j}(u) \frac{\partial F_{j}}{\partial v}(v) \vec{P}(i, j)$$

$$\frac{\partial^{2} \vec{R}_{0}}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{\partial F_{1}}{\partial u}(u) \frac{\partial \vec{P}}{\partial v}(i, v) + \frac{\partial F_{j}}{\partial v}(v) \frac{\partial \vec{P}}{\partial u}(u, j) - \frac{\partial F_{1}}{\partial u}(u) \frac{\partial F_{j}}{\partial v}(v) \vec{P}(i, j)$$
I-12

Si nous imposons les conditions aux limites des fonctions de pondération $F_i(j) = d_{ij}$ et $dF_iP(j)/dtP = 0$ sur les expressions (I-12) ces fonctions deviennent sur l'arc P(0,0) P(1,0):

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{R}}_{0}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u},0) = \frac{\partial \vec{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u},0)$$
$$\frac{\partial \vec{\mathbf{R}}_{0}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u},0) = \mathbf{F}_{i}(\mathbf{u}) \frac{\partial \vec{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{v}}(i,0)$$

Cette dernière dérivée qui donne les directions des tangentes dans le plan tangent en un point de l'arc, apparait comme le barycentre des deux vecteurs tangents aux points $\vec{\mathbf{P}}(0,0)$ et $\vec{\mathbf{P}}(1,0)$ selon la direction v. Elle est donc insuffisante puisque la surface réelle a sur les points de l'arc une autre valeur de dérivée.

Compte tenu de cette remarque, nous pouvons conclure que la formule (I-10) est satisfaisante uniquement pour assurer une continuité d'ordre 0. (fonction continue avec sa dérivée première connue presque partout)

L'obligation de proportionnalité des dérivées partielles aux limites du carreau contraint à ne juxtaposer que des carreaux de dimensions et de formes semblables (comme FERGUSON) et dont les arêtés se situent dans le prolongement l'une de l'autre. D'autre part

$$\frac{\partial^2 \vec{R}_0}{\partial u \, \partial v} (i, j) = 0$$
 $I - 13$

Cette formule ne rend compte d'aucune torsion aux sommets du carreau, torsion à prendre au sens physique du terme.

Pour assurer une continuité d'ordre plus grand que 0, il faut donc introduire des termes correctifs qui permettent de remédier à ce défaut afin d'obtenir une définition plus fine de la surface.

L'idée de S.A. COONS consiste à proposer alors un terme plus général en utilisant la nouvelle approximation de la surface d'ordre 1 :

$$\vec{R}_{,}(u, v) = \vec{P}(u, v) + \vec{Q}(u, v)$$
 I-14

avec

0.7

$$\vec{\mathbf{Q}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{G}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \frac{\partial \vec{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{i},\mathbf{v}) + \mathbf{G}_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) \frac{\partial \vec{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u},\mathbf{j}) - \mathbf{G}_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) \mathbf{G}_{\mathbf{j}}(\mathbf{v}) \frac{\partial^{2} \vec{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}(\mathbf{i},\mathbf{j})$$

où i, j = 0 ou 1

Gi et Gj représentent les fonctions de pondération qui peuvent s'écrire sous la forme suivantes :

 $G_{I}^{m}(j) = 0$ si $m \neq 1$ $G_{I}^{1}(j) = \delta_{I,i}$ symbole de Kronecker

Les termes de la matrice carrée 3*3 P_{ij} de la relation (I-11) sont en fait des termes connus de la surface. Avec les remarques faites ci-dessus, on peut les remplacer par leur expression en fonction de S. On obtient une matrice $\overrightarrow{R_0}$:

30

$$[\vec{R}_{0}] = \begin{bmatrix} 0 & \vec{S}(u, 0) & \vec{S}(u, 1) \\ \vec{S}(0, v) & \vec{S}(0, 0) & \vec{S}(0, 1) \\ \vec{S}(1, v) & \vec{S}(1, 0) & \vec{S}(1, 1) \end{bmatrix}$$

qui permet d'écrire la représentation matricielle du carreau d'ordre 0.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\vec{R}}_{0}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{0}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}^{t} \begin{bmatrix} \mathbf{\vec{R}}_{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{0}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \qquad 1-15$$

Cette expression assure la continuité d'un carreau à l'autre, chaque carreau présentant un méplat en ses sommets, du fait de la nullité des dérivées mixtes en ces points.

De manière analogue, pour le carreau approximé à l'ordre 1, la formule de $R_1(u,v)$ de l'expression (I-13) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{R}}_{1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{R}}_{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \qquad \mathsf{I} - 16$$

où

$$[F_1(t)]^t = [-1, F_0(t), F_1(t), G_0(t), G_1(t)]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\vec{H}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{\vec{P}}(\mathbf{u}, 0) & \mathbf{\vec{P}}(\mathbf{u}, 1) & \frac{\partial \mathbf{\vec{Q}}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u}, 0) & \frac{\partial \mathbf{\vec{d}}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u}, 1) \\ \mathbf{\vec{P}}(0, \mathbf{v}) & \mathbf{\vec{P}}(0, 0) & \mathbf{\vec{P}}(0, 1) & 0 & 0 \\ \mathbf{\vec{P}}(1, \mathbf{v}) & \mathbf{\vec{P}}(1, 0) & \mathbf{\vec{P}}(1, 1) & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{\vec{Q}}}{\partial \mathbf{u}}(0, \mathbf{v}) & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \mathbf{\vec{Q}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}(0, 0) & \frac{\partial^2 \mathbf{\vec{Q}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}(0, 1) \\ \frac{\partial \mathbf{\vec{Q}}}{\partial \mathbf{u}}(1, \mathbf{v}) & 0 & 0 & \frac{\partial^2 \mathbf{\vec{Q}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}(1, 0) & \frac{\partial^2 \mathbf{\vec{Q}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}(1, 1) \end{bmatrix}$$

I-17

11 -

Dans cette matrice, certains termes sont connus directement par rapport à l'équation réelle de la surface, ce sont les termes en P(i,j) et les termes en $\partial^2 Q(u,v)/\partial u \partial v$. Compte tenu de ces expressions, nous pouvons écrire les autres termes de la matrice [R_{ij}]:

[0	Š (u, 0)	รื(u, 1)	<u>∂\$</u> (u,0)	$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{u}, 1)$	
	Š (0, v)	Š (0, 0)	Š (0, 1)	<u>∂Š</u> ∂ v (0, 0)	$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{v}}(0,1)$	
R ₁]=	Š (1, v)	Š (1, 0)	Š (1, 1)	∂ Š ∂ v (1, 0)	$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{v}}(1, 1)$	
	<u>∂\$</u> ∂u(0, v)	<u>∂\$</u> ∂u(0,0)	$\frac{\partial \vec{s}}{\partial u}(0, 1)$	$\frac{\partial^2 \mathbf{\hat{s}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}(0,0)$	$\frac{\partial^2 \mathbf{\vec{S}}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}(0, 1)$	
	<u>∂S</u> ∂u(1, v)	<u>∂š</u> (1, 0) ∂u	<u>∂š</u> (1, 1) ∂u	<u>- ∂²S</u> ∂u ∂v (1, 0)	$\frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}}(1, 1)$	
					I-18	

L'écriture des carreaux de COONS suppose connu un certain nombre de données. Dans la pratique, ces données ne sont pas toujours accessibles et l'application concrète est très difficile.

En effet, la méthode de S.A. COONS permet d'effectuer un raccordement de degré quelconque entre des carreaux successifs dont on connait seulement les lignes limites. Elle nécessite cependant des calculs très longs et volumineux.

En conclusion, la méthode de COONS sert à définir directement les points internes des carreaux dont on connait seulement l'expression de lignes-limites. Son automatisme est indiscutable, mais elle a l'inconvénient d'annuler les vecteurs torsion au coin des carreaux (relation I-13)

I-3. METHODE DE R. RIESENFELD [27,28]

Depuis les travaux de RIESENFELD, au début des années 1970, les splines ont connu un développement important, leur utilisation s'étant systématisée en C.A.O. Nous allons décrire sommairement cette méthode qui permet de représenter courbes et surfaces.

On a vu précédemment en 1-1, qu'en constituant une ligne par juxtaposition de cubiques (splines), toute modification de l'une entraîne de proche en proche celle de toutes les autres, ce qui a de fâcheuses conséquences. RIESENFELD a proposé une solution pour remédier à ces difficultés.

I-3-1. Approximation des courbes tridimensionnelles

Pour définir le point courant d'une courbe tridimensionnelle quelconque, RIESENFELD propose l'expression suivante :

$$\vec{P}_{m}(u) = \sum_{i=0}^{m} \vec{S}_{i} R_{i,m}(u)$$
 $i-19$

оù

 $R_{i,m}(u)$ représentent des fonctions polynomiales de degré m d'un paramétre u, dites fonctions de RIESENFELD qui pondèrent les vecteurs du polygone caractéristique. La forme générale de $R_{i,m}(u)$ donnée par RIESENFELD est :

$$\mathbf{R}_{l,m}(\mathbf{u}) = (m+1) \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j} \frac{(\mathbf{u}+m-i-j)^{m}}{j!(m-j+1)!} \qquad 1-20$$

où i varie par valeurs entiers dans l'intervalle [0,m].

A titre d'exemple, dans le cas où m = 5, ces fonctions sont :

 $\begin{aligned} &\mathsf{R}_{0,5} = (1/120) \quad (- \ u^5 \ + \ 5 \ u^4 \ - \ 10 \ u^3 \ + \ 10 \ u^2 \ - \ 5 \ u \ + \ 1 \) \\ &\mathsf{R}_{1,5} = (1/120) \quad (5u^5 \ - \ 20 \ u^4 \ + \ 20 \ u^3 \ + \ 20 \ u^2 \ - \ 50 \ u \ + \ 26) \\ &\mathsf{R}_{2,5} = (1/120) \quad (- \ 10 \ u^5 \ + \ 30 \ u^4 \ - \ 60 \ u^2 \ + \ 66) \\ &\mathsf{R}_{3,5} = (1/120) \quad (10 \ u^5 \ - \ 20 \ u^4 \ - \ 20 \ u^3 \ + \ 20 \ u^2 \ + \ 50 \ u \ + \ 26) \\ &\mathsf{R}_{4,5} = (1/120) \quad (-5 \ u^5 \ + \ 5 \ u^4 \ + \ 10 \ u^3 \ + \ 10 \ u^2 \ + \ 5 \ u \ + \ 1) \\ &\mathsf{R}_{5,5} = (1/120) \quad u^5 \end{aligned}$

Les coefficients \vec{S}_i sont des vecteurs dont l'origine est un même point quelconque et les extrémités sont représentées par des points \vec{S}_0 , \vec{S}_1

Un arc de courbe [Figure I-6], engendré par la variation de u dans l'intervalle [0,1], est alors défini par un polygone caractéristique dont les sommets sont les points S_i.

On peut écrire :

$$\vec{P}_{m}(u) = R_{0,5}(u) \vec{S}_{0} + R_{1,5} \vec{S}_{1} + R_{2,5} \vec{S}_{2} + R_{3,5} \vec{S}_{3}$$
$$+ R_{4,5} \vec{S}_{4} + R_{5,5} \vec{S}_{5}$$

Le polygone de l'arc suivant C' de même degré a pour sommets les points \vec{S}_i tels que $\vec{S}_i = S_{i+1}$.

Son expression analytique est :

$$\vec{P}'_{m}(u) = \mathbf{R}_{0,5}(u) \ \vec{S}_{1} + \mathbf{R}_{1,5} \ \vec{S}_{2} + \mathbf{R}_{2,5} \ \vec{S}_{2}3 + \mathbf{R}_{3,5} \ \vec{S}_{4}$$
$$+ \mathbf{R}_{4,5} \ \vec{S}_{5} + \mathbf{R}_{5,5} \ \vec{S}'_{5}$$





Les deux arcs ont en leur point commun une continuité de rang m-1. On observe que lorsque u prend la valeur 1, la fonction \mathbf{R}_0 s'annule ainsi que toutes ses dérivées. On en conclut que le point \vec{S}_0 n'exerce aucune influence au point $\mathbf{P}(\vec{1})$, pas plus sur ses coordonnées, que sur la pente, la courbure, etc

Symétriquement, lorsque u est nul, la fonction \mathbf{R}_5 et ses dérivées sont égales à 0, et le point \vec{S}_5 ne joue aucun rôle par rapport au point $\mathbf{P}(\vec{0})$.

Pour définir n arcs de courbes de degré m, il suffit de m + n sommets.

L'introduction des fonctions de RIESENFELD limite la zone d'influence de chaque expression analytique sur quelques arcs de courbe seulement. On peut ainsi obtenir des influences locales ce qui est tout l'intérêt de la méthode de RIESENFELD.

I-3-2. Approximation de surfaces

La représentation d'une surface tridimensionnelle avec la méthode de RIESENFELD consiste à proposer la définition d'un carreau élémentaire à partir d'un réseau de [(m+1) (n+1)] points (Fig I-7).





Ces points sont les extrémités des vecteurs :

Ŝ_{e+lf+j}

i et j varient par valeurs entières de 0 à m et de 0 à n.

Un point quelconque P du carreau C peut alors s'exprimer par :

$$\vec{P}(u, v) = \sum_{l=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \vec{S}_{e+l, f+j} R_{l, m}(u) R_{j, n}(v)$$
 $l-21$

On voit comme pour les courbes, que le déplacement d'un point S induit une modification du carreau exprimé par la relation précédente, mais reste sans influence sur certains des carreaux adjacents.

Les carreaux ont entre eux, une continuité d'ordre (m-1) dans le sens des u et d'ordre (n-1) dans les sens des v.

Compte tenu de ces expressions, nous avons alors {(p+1) q+1) conditions, il reste donc à donner $\{(p+m)(q+n)-(p+1)(q+1)\}$ conditions pour déterminer les {(p+m)(q+n)} sommets du réseau.

Celles-ci peuvent être constituées par des dérivées partielles et mixtes aux points limites des carreaux, ou des coordonnées cartésiennes de points internes aux surfaces auxquels on a attribué au préalable des coordonnées paramétriques.

CHAPITRE II

LES SURFACES DE BEZIER ET LE SYSTEME UNISURF

Le souci premier de M. Pierre BEZIER lors de l'élaboration du système UNISURF fut de concevoir un système utilisable par tous. Chacun, technicien, styliste, fondeur, aérodynamicien, ingénieur, etc, devait pouvoir apporter son savoir et son savoir faire. Ce système est donc défini à partir d'éléments simples dont la manipulation est aisée.

Le système UNISURF a été conçu principalement en vue de son emploi par des non-mathématiciens, et afin d'obtenir un temps de réponse aussi bref que possible, ce qui est indispensable si l'on veut procéder par approximations successives.[6].

En partant de l'idée de J. FERGUSON, la caractéristique fondamentale de la définition des courbes et des surfaces par BEZIER est d'être fondée également sur l'emploi des fonctions polynomiales paramétriques à coefficients vectoriels. La méthode de BEZIER est une méthode globale.

Avant d'aborder le principe de la définition des surfaces selon BEZIER, on peut lire avec profit en ANNEXE A-1 le mode de représentation des courbes grâce à cette méthode. Les grandes idées seront ainsi assimilées et permettront d'aborder avec profit ce chapitre.

II-1. DESCRIPTION DES SURFACES

Dans le système UNISURF, une surface S de l'espace affiné

euclidien E à trois dimensions est l'ensemble les points $\vec{P}(u,v)$ d e E définis par le lieu géométrique d'une courbe qui subit en même temps une déformation et un déplacement. Un carreau de surface peut ainsi être considéré comme généré par le déplacement et la déformation d'une courbe initiale, appelée génératrice. La définition du point courant de cette génératrice $\vec{G}_{\alpha}(u)$ peut se mettre sous la forme suivante quand u = 0 (cf. Annexe 1)

$$\vec{G}_{0}(u) = \vec{\alpha}_{0} + \sum_{j=1}^{n} f_{j,n}(u) \cdot \vec{\alpha}_{j}(0)$$
 avec $u \in [0, 1]$

où f_{i.n}(u) représentent les fonctions polynomiales de BEZIER

Le déplacement est défini par les trajectoires appelées directrices (figure II-1) des sommets $\overrightarrow{A_{ij}}$ du polygone caractéristique en fonction du paramètre v [32]



Les trajectoires, ou directrices, peuvent être aussi définies par des polynômes de BEZIER, en utilisant des vecteurs $\vec{a_{ij}}$. Dans ces conditions, un point P appartenant à la surface est défini par : $\vec{OM} + MP$. où M $(\vec{A_{i,1}})$ représente un point de la directrice, trajectoire du sommet $\vec{A_{0,1}}$ et \vec{P} un point, appartenant à la surface. Ce point est construit comme étant le point de la courbe UNISURF correspondant au polygone formé des vecteurs $\vec{\alpha}_{j}$, fonction de v, notés $\vec{\alpha}_{i}(v)$:

$$D\vec{P} = O\vec{M} + M\vec{P} = O\vec{A}_{01} + \vec{A}_{01}\vec{M} + \vec{MP}$$

= $\vec{a}_0 + \sum_{i=1}^{m} g_{i,m}(v) \vec{a}_{i,1} + \sum_{j=1}^{n} f_{j,n}(u) \vec{a}_j(v)$
I-23

où $\mathbf{g}_{i,m}(\mathbf{v})$ désigne la famille des polynômes de BEZIER du paramètre u.pour $\mathbf{u} = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\alpha_j}(\mathbf{v})$ peut être déterminé de la façon suivante :

$$\vec{\alpha}_{j}(\mathbf{v}) = \vec{\alpha}_{j} + \sum_{l=1}^{m} g_{l,m}(\mathbf{v}) \left(\vec{a}_{l,j+1} - \vec{a}_{l,j} \right)$$
I-24

En remplaçant $\overrightarrow{\alpha_j}(\mathbf{v})$ de l'expression (I-23) par l'expression (I-24), la position d'un point de la surface S devient

$$\mathbf{OP} = \mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}_{0} + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{g}_{i,m}(\mathbf{v}) \mathbf{a}_{i1} + \sum_{j=0}^{n} \mathbf{f}_{j,n}(\mathbf{u}) \mathbf{a}_{j} + \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{a}_{l,j+1} - \mathbf{a}_{l,j}) \mathbf{g}_{l,m}(\mathbf{v}) \mathbf{f}_{j,n}(\mathbf{u})$$
I-25

En ordonnant par rapport aux puissances croissantes des paramètres u et v, cette expression peut s'écrire sous la forme biparamétrique suivante :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{l}=0}^{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{n}=0}^{n} \vec{\mathbf{b}}_{\mathbf{l},\mathbf{j}} \mathbf{u}^{\mathbf{l}} \mathbf{v}^{\mathbf{j}}$$
I-26

où les $\overrightarrow{b_{i,j}}$ représentent les coefficients vectoriels des $u^i v^j$.

En utilisant l'écriture matricielle la relation devient :

$$P(u,v) = [u] [b_{i,i}]mn [v]^{t}$$
 I-27

avec

$$\begin{bmatrix} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, u, u^{2}, \dots, u^{k}, \dots, u^{n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, v, v^{2}, \dots, v^{j}, \dots, v^{m} \end{bmatrix} et$$

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_{00} & \vec{b}_{01} & \dots & \dots & \vec{b}_{0n} \\ \vec{b}_{10} & \vec{b}_{11} & & \vec{b}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{b}_{k0} & \dots & \vec{b}_{kj} & \dots & \vec{b}_{kn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vec{b}_{m0} & \dots & \vec{b}_{mj} & \dots & \vec{b}_{mn} \end{bmatrix} I-28$$

39

La matrice $[\vec{b}_{ij}]$ représente la caractéristique de la surface. L'isoparamétrique v= 0 est caractérisée par la première colonne.

II-2 EXPRESSION PLUS APPROPRIEE ET PLUS UTILISABLE DE LA FORME POLYNOMIALE (BASE DE BERNSTEIN)

Comme pour la définition d'une courbe, la représentation d'une surface par la méthode de BEZIER peut être mise sous une forme plus avantageuse en utilisant les fonctions polynomiales paramétrées de BERNSTEIN.

L'idée de BEZIER consiste à exploiter la relation {(7).ANNEXE A-1} qui permet d'utiliser les sommets du réseau caractéristique \vec{S}_{ij} {is [0,m] et js [0,n]} selon les deux paramètres indépendantes us [0,1] et v ε [0,1].

Selon la relation {(9) ANNEXE-A-1} le point courant $\vec{T}_i(v)$ des directrices \vec{D}_i avec $i \in [0,m]$ peut s'exprimer par la relation :

$$\vec{T}_{j}(\mathbf{v}) = \sum_{j=0}^{n} \vec{S}_{i,j} \mathbf{B}_{j,n}(\mathbf{v})$$
I-29

Le point courant de la génératrice $\vec{G}_{u}(v)$ ayant $\vec{T}_{i}(v)$ comme sommet s'exprime par :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{l=0}^{m} \vec{\mathbf{T}}_{l}(\mathbf{v}) \mathbf{B}_{l,m}(\mathbf{u})$$
I-30

Tenant compte des relations (I-29) et (I-30), nous pouvons alors écrire l'expression d'un point courant $\vec{P}(u,v)$ de la surface par :

$$\vec{P}(u, v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \vec{S}_{i, j} B_{i, m}(u) B_{i, n}(v)$$

I-31

Dans cette formule les $B_{i,m}(u)$ et $B_{j,n}(v)$ représentent les fonctions polynomiales de BERNSTEIN ou les fonctions mélanges ou pondérantes selon les directions des paramètres u et v, respectivement.

Pour déterminer les vecteurs $\vec{b_{ij}}$ (relation I-26) en fonction des vecteurs $\vec{S_{ij}}$ (relation I-31), nous allons observer que l'expression II-10 peut se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{P}(u, v) = \begin{bmatrix} B_{i,m}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{S}_{00} & \vec{S}_{01} & \dots & \vec{S}_{0n} \\ \vec{S}_{10} & \vec{S}_{11} & \dots & \vec{S}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vec{S}_{m0} & \vec{S}_{m1} & \dots & \vec{S}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{j,n}(v) \end{bmatrix}^{t}$$
I-32

or $[B_{i,m}(u)] = [u^i] [M_A]$ et $[B_{j,n}(v)] = [M_B] [v^j]^t$ I-33

Les matrices $[M_A]$ et $[M_B]$ ont pour éléments les coefficients des polynômes de BERNSTEIN.

En remplaçant $B_{i,m}(u)$ et $B_{j,n}(v)$ de l'expression (I-32) par les expressions (I-33), nous avons alors :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left[\mathbf{u}^{\mathsf{I}} \right] \left[\mathbf{M}_{\mathsf{A}} \right] \left[\mathbf{S}_{\mathsf{I}} \right] \left[\mathbf{M}_{\mathsf{B}} \right] \left[\mathbf{v}^{\mathsf{I}} \right]^{\mathsf{T}}$$
 I-34

Cette expression à la même forme que (I-26), nous pouvons donc l'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left\{ \mathbf{u}^{\mathsf{I}} \right\} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{b}}_{\mathsf{I}|\mathsf{I}} \end{bmatrix} \left\{ \mathbf{v}^{\mathsf{I}} \right\}$$
I-35

Les relations (I-34) et (I-35) sont équivalentes, nous pouvons alors conclure que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\vec{b}}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\vec{S}}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{B} \end{bmatrix}$$
I-36

Tenant compte de cette expression, les vecteurs \vec{b}_{ij} sont des fonctions que l'on peut obtenir à partir des vecteurs \vec{S}_{ij} , points de contrôle du carreau de surface.

II-3. DETERMINATION DU RESEAU CARACTERISTIQUE

27. E

Les contraintes relatives à l'approximation des surfaces sont les mêmes que celles imposées aux courbes (points de passage, pente, courbure, torsion). Divers algorithmes ont été imaginés pour définir les surfaces à partir des expressions précédentes et les contraintes sur les surfaces.

Reprenons l'étape effectuée pour une courbe dans l'ANNEXE A-1. Pour déterminer les deux valeurs des paramètres u et v d'un point d'une surface, nous pouvons mettre en oeuvre une méthode systématique utilisant la méthode des moindres carrés. De nombreuses démarches de ce type ont été effectuées, et dans le paragraphe suivant, nous allons utiliser les résultats obtenus pour une courbe.

La méthode proposée par P. BEZIER, travaille directement sur une surface et permet de satisfaire aux conditions de raccordement tangentiel entre surfaces voisines avec une certaine souplesse.

L'algorithme comprend alors les étapes suivantes que nous avons tiré de BEZIER [6]

II-2-1. Paramétrage

Un carreau de surface de l'espace est défini dans le système UNISURF par une représentation paramétrique régulière à deux paramètres indépendants u et v:

$$\vec{P}(u, v) = \sum_{l=0}^{m} \sum_{n=0}^{n} \vec{b}_{l,j} u^{l} v^{j}$$
I-37

BEZIER part d'une collection de points P par lesquels on veut faire passer une surface constituée de carreaux juxtaposés. Il en extrait vingt-cinq points proches les uns des autres désignés par $P_{i,j}$:



$$\vec{\mathbf{p}}_{1-2,j+2}, \quad \vec{\mathbf{p}}_{1-1,j+2}, \quad \dots \quad \vec{\mathbf{p}}_{1+2,j+2} \quad I-38$$

On définit alors les vecteurs :

$$\vec{a}_{k,1} = \vec{P}_{k,1} - \vec{P}_{k-1,1}$$

avec $k \in [i-2, i+2]$
et $l \in [j-2, j+2]$
 $\vec{a}_{k,1} = \vec{P}_{k,1} - \vec{P}_{k,1-1}$
I-39

Puis on calcule alors les valeurs des paramètres u et v correspondant à chaque intersection par les formules suivantes (voir ANNEXE A-1-2-1)



et

 $\mathbf{v}_{l,l} = \frac{\sum_{\substack{n=j-1\\j+2}}^{l} \left[\vec{a}_{l,n} \right]}{\sum_{\substack{n=l-1\\j+2}}^{l} \left[\vec{a}_{l,n} \right]}$

Ce paramétrage qui est à rapprocher de la méthode de la ligne brisée {voir relation 13 en ANNEXE A-1}, conduit ensuite à la résolution du système d'équations (I-37).

La mise en oeuvre de cet algorithme sera faite au chapitre IV.

II-2-2. Evaluation des coefficients vectoriels $\vec{b}_{i,i}$

Après avoir évalué les valeurs des paramétres u et v correspondant à chaque point donné ou mesuré, le report dans l'équation (I-37) donne une équation algébrique reliant les coordonnées du point mesuré aux vecteurs du polynôme caractéristique bij par l'intermédiaire des u_i, v_j.

I-40

L'ensemble des conditions conduit à un système qui à la forme suivante :

$$\left\{ \vec{P}(u,v) \right\} = \left[A \right] \left\{ \vec{b}_{ij} \right\}$$
I-41

La matrice [A] est organisée de telle sorte que les lignes se présentent sous la forme :

$$\left[1, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_1^m, \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_j, ..., \mathbf{u}_1^m, \mathbf{v}_j, ..., \mathbf{v}_j^n, \mathbf{u}, \mathbf{v}_j^n, ..., \mathbf{u}_1^m, \mathbf{v}_j^n \right] = 1 - 42$$

On aura obtenu l'expression analytique pour n'importe quel point de la surface si l'on connait les vecteurs $\vec{b_{ij}}$.

Il faudra donc résoudre le système (I-41) ci-dessus pour accéder aux $\overrightarrow{b_{ij}}$. On pourra ensuite multiplier le nombre de points calculés pour avoir une représentation fine et précise de cette surface.

La méthode de résolution de ce système, utilisant la triangularisation de GAUSS avec pivot partiel est rappelée au Chapitre IV.

II-2-3. Calcul de tous les points de la surface

Pour calculer tous les points de la surface, la formule (II-16) permet d'obtenir les coordonnées X, Y, et Z du vecteur P

Pour l'abscisse X :

$$X(u, v) = b_{00} + b_{01} v + b_{02} v^{2} + \dots + b_{0n} v^{n} + b_{10} u$$

+ $b_{11} u v + b_{12} u v^{2} + \dots + b_{1n} u v^{n} + b_{20} u^{2}$
+ $b_{21} u^{2} v + b_{22} u^{2} v^{2} + \dots + b_{2n} u^{2} v^{n}$
+ $\dots + b_{m0} u^{m} + b_{m1} u^{m} v + b_{m2} u^{m} v^{2}$
+ $\dots + b_{mn} u^{m} v^{n}$ I-43

45

On peut exprimer l'abscisse X(u,v) sous la forme :

$$X(u, v) = (B) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^{2} \\ \vdots \\ v^{n} \\ u \\ u v \\ u v^{2} \\ \vdots \\ u v^{n} \\ u^{2} \\ u^{2} v \\ u^{2} v^{2} \\ \vdots \\ u^{2} v^{n} \\ \vdots \\ u^{m} v^{n} \end{pmatrix}$$

avec

(B) =

$$(\mathbf{b}_{00} \ \mathbf{b}_{01} \ \mathbf{b}_{02} \dots \mathbf{b}_{0n} \ \mathbf{b}_{10} \ \mathbf{b}_{11} \ \mathbf{b}_{12} \ \dots \mathbf{b}_{1n} \ \dots \mathbf{b}_{m0} \ \dots \mathbf{b}_{mn})$$

L'abscisse X s'exprime donc sous la forme d'un polynôme des paramètres u et v.

Le calcul de Y(u,v) et Z(u,v) est similaire au calcul de X(u,v) ci-dessus.

La représentation de cette surface sera faite grâce au programme V.A.O. (Visualisation Assisté par Ordinateur). Cette V.A.O. a été développée par Robert MICHELIN, Ingénieur E.C.P.collaborant avec le laboratoire, qui a bien voulu læ mettre à notre disposition.

CHAPITRE III

METHODE DES B - SPLINES DE C. DE BOOR

De la même façon que BEZIER a eu l'idée d'extrapoler et d'améliorer les résultats de FERGUSON, cette méthode des B-splines est une extension de la théorie de RIESENFELD.

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes attachés à représenter les surfaces quelconques tridimensionnelles en utilisant la méthode de P. BEZIER qui est fondée sur les fonctions paramétrées polynomiales dans la base de BERNSTEIN. De ce fait, elles doivent supporter les limitations de cette base.

Il faut préciser notamment que :

- D'une part, le nombre de sommets du polygone de BEZIER détermine l'ordre du polynôme qui définit la surface de BEZIER correspondante.

- D'autre part, la base de BERNSTEIN possède une nature globale. Cela signifie que tout changement dans la localisation de n'importe quel point de mesure de la surface sera ressentie dans toute la surface.

Dans ce chapitre, nous allons représenter une surface quelconque tridimensionnelle en utilisant une autre méthode, appelée B-SPLINES, qui utilise l'algorithme de C. DE BOOR. La méthode des B-SPLINES a une nature généralement non globale. Chaque sommet du polygone générateur de la courbe et de la surface est associé à une fonction de base unique. De ce fait, chaque sommet influence la forme de la courbe et de la surface dans un intervalle limité des valeurs indépendantes des paramètres u et v, intervalle dans lequel la fonction de base associée est différente de zero.

Le fondement des B-Splines réside dans la recherche d'une solution optimale au problème d'interpolation de courbes à partir d'un ensemble de données échantillonnées. Bien que les polynomiales se prêtent aisément au calcul et se manient facilement, il n'est généralement pas possible de définir une courbe satisfaisante simplement à l'aide de polynomiales $X(\bar{u})$ et Y(u), où X(u) et Y(u) fournissent respectivement les coordonnées x et y d'un point d'une courbe dans le plan pour toute valeur du paramètre u.

Au lieu de cela, il est usuel de diviser la courbe en un certain nombre de segments, dont chacun est défini par des polynomiales particulières, et de connecter de tels segments pour former une courbe composée.

Ainsi, comme le paramètre u varie entre une valeur initiale minimale, soit u_{min} , et une valeur finale maximale, soit u_{max} , afin de définir une courbe, certaines valeurs particulières de u, dites "valeurs nodales", correspondent aux points de jonction entre segments polynomiaux.

La suite des valeurs nodales doit être croissante, c'est-à-dire que :

$\mathbf{u_o} \leq \ldots \leq \mathbf{u_j} = \mathbf{u_{min}} \leq \ldots \leq \mathbf{u_l} = \mathbf{u_{max}} \leq \ldots \leq \mathbf{u_{final}}$

Il faut observer que certaines valeurs nodales peuvent être extérieures à l'intervalle qui correspond à la courbe. Pour une description plus en détail voir [5].

5

23

La collection des valeurs nodales $u_0, ..., u_j, ..., u_l,, u_{final}$ est appelée suite nodale, ou vecteur nodal.

Ainsi, les fonctions paramétriques X(u) et Y(u) sont toutes deux composantes d'éléments polynomiaux, le premier recouvrant l'intervalle compris entre u_j et la valeur située immédiatement à sa droite, le deuxième depuis celle-ci jusqu'à la suivante située à sa droite, et ainsi de suite. Habituellement, X(u)et Y(u) doivent remplir des conditions de continuité aux points nodaux; si les dérivées de rang 0 jusqu'à k sont partout continues, et en particulier aux points nodaux. On dit que X et Y sont continus jusqu'à l'ordre k, ce que l'on exprime par le symbole C^k.

Historiquement, la méthode des B-SPLINES s'appuie sur la théorie mathématique des fonctions splines. Elle fut suggérée par I.J. SCHOENBERG (1946) [31], vinrent en suite les travaux de M. G. COX (1971) [15], de CARL DE BOOR (1972) [10-11] puis ceux de R. F. RIESENFELD (973) [27-28].

III-1. DEFINITION DES COURBES.

La définition des courbes des B-SPLINES est semblable à celle des courbes de BEZIER. La différence fondamentale réside dans la définition des fonctions mélanges. Le point courant d'une courbe B-SPLINE tridimensionnelle peut être défini à partir de

$$\vec{S}(u) = \sum_{l=0}^{m} \vec{P}_{l} B_{l,k}(u)$$
 1-45

Dans cette formule, les \vec{P}_i sont les (m+1) sommets du polygone, les $B_{i,k}(u)$ sont des fonctions mélanges d'ordre k ou fonctions pondérantes ou fonctions B-SPLINES du paramètre u différentes de celles de BERNSTEIN.

Ces dernières sont définies de la manière suivante :

Soit une suite doublement infinie et croissante de nombres réels.

$$\prod = \left\{ u_{l} \right\}_{l=-\infty}^{l=+\infty}$$

Pour tout entier k > 1, on pose :

 $g_{k}(s, u) = (s - u)_{+}^{k-1} = \begin{cases} (s - u)^{k-1} & \text{pour } s \ge u \\ 0 & \text{pour } s < u \end{cases}$

On appelle différence divisée d'ordre k sur les points t_1, \ldots, t_{k+1} l'expression construite à partir des k+1 points donnés t_i (pour tout i variant de l à max), d'une fonction f définie par :

$$f[t_1,\ldots,t_{k+1}] = \det A/\det B$$

оù

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t_{1} & t_{1} & t_{k+1} \\ 1 & s^{1-l} & f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1} & \mathbf{t}_{1} & \mathbf{t}_{k+1} \\ \mathbf{j}_{1} & \mathbf{j}_{1} & \mathbf{j}_{1} \\ \mathbf{t}_{1} & \mathbf{t}_{1} & \mathbf{t}_{k+1} \\ \mathbf{t}_{1} & \mathbf{t}_{1} & \mathbf{t}_{k+1} \\ \mathbf{t}_{1} & \mathbf{t}_{1} & \mathbf{t}_{k+1} \\ \mathbf{t}_{1} & \mathbf{s}_{1} & \mathbf{s}_{1} \end{bmatrix}$$

Une des propriétés des différences divisées sert de base à tous les algorithmes de calcul : elle est rappelée pour mémoire :

$$f[t_1, \ldots, t_{k+1}] = (f[t_2, \ldots, t_{k+1}] - f[t_1, \ldots, t_k])/(t_{k+1} - t_1)$$

avec $t_1 \neq t_{k+1}$

1 1

La B-SPLINE $M_{i,k}(u)$ est définie comme la différence divisée d'ordre k sur les points u_i , u_{i+1} , ..., u_{i+k} , de $g_k(s,u)$ fonction de s pour u fixé :

$$M_{l,k}(u) = g_{k}(u_{l}, u_{l+1}, \dots, u_{l+k}, u)$$
 $l-47$

La B-spline normalisée $B_{i,k}(u)$ est alors définie de la manière suivante :

$$B_{i,k}(u) = (u_{i+k} - u_i) M_{i,k}(u)$$

 $= g_k(u_{i+1}, ..., u_{i+k}, u) - g_k(u_i, ..., u_{i+k-1}, u)$ I-48

Si k > 1 et si π est une suite telle que (k-1) noeuds u_i consécutifs au plus puissent coïncider, $M_{i,k}$ et $B_{i,k}$ telles que définies en I-47 et I-48 sont des fonctions continues bien définies.

Nous supposerons que cette hypothèse est toujours réalisée dans la suite (sauf éventuellement pour les noeuds placés aux extrémités d'un intervalle fini)

Si tel n'était pas le cas, $M_{i,k}$ et $B_{i,k}$ n'auraient de sens que pour $u \neq u_i$ à cause de la discontinuité pour s = u de la dérivée $(k-1)^{\text{ème}}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k-1} g_k(s; u)$$

S'il en était ainsi, nous imposerions arbitrairement que $M_{i,k}$ et $B_{i,k}$ soient continus à droite, soit :

$$M_{i,1}(u) = \begin{cases} \left(u_{i+1} - u_{i} \right)^{-1} & u_{i} \le u \le u_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et par suite

$$B_{1,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_1 \le u \le u_{1+1} \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

Notons que ces définitions impliquent que si :

$$u_i = u_{i+1} \implies M_{i,1}(u) = B_{i,1}(u) = 0$$

On démontre alors l'identité suivante : (m > 1)

$$M_{l,k}(u) = \frac{u - u_{l}}{u_{l+k} - u_{l}} M_{l,k-1}(u) + \frac{u_{l+k} - u}{u_{l+k} - u_{l}} M_{l+1,k-1}(u) \qquad l-51$$

De même, on a :

$$\mathbf{B}_{i,k}(u) = \frac{u - u_{i}}{u_{i+k-1} - u_{i}} \mathbf{B}_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u_{i}}{u_{i+k} - u_{i+1}} \mathbf{B}_{i+1,k-1}(u) \qquad i - 52$$

et l'on en déduit que pour $u_i < u < u_{i+k}$, $B_{i,k}(u)$ et $M_{i,k}(u)$ sont > 0 et que $B_{i,k}(u)$ et $M_{i,k}(u)$ sont nulles ailleurs, donc le support de $B_{i,k}(u)$ et $M_{i,k}(u)$ est l'intervalle $[u_i, u_{i+k}]$ (Figure III-1).



FIGURE III - 1

L'ordre k de la courbe est reflétée dans le vecteur noeud parce qu'il faut spécifier des noeuds de multiplicité k aux deux extrémités du vecteur. Par exemple, si l'on considère un polygone de 5 sommets (m = 4) alors une courbe B-spline d'ordre k = 3 utilisera le vecteur noeud suivant [00012333].

Les valeurs des u_i indiquent également l'intervalle dans lequel peut varier le paramètre u. Contrairement aux courbes de BEZIER où u variait toujours dans l'intervalle [0,1] ; avec les B-SPLINES, le paramètre u peut varier dans l'intervalle [a,b] où a et b sont respectivement les valeurs minimales et maximales des éléments du vecteur noeud. Par exemple, le vecteur noeud [0012344] indique que le paramètre u varie de 0 à 4.

1 C = 1

14

Lorsque π est doublement infinie, on note $S_k(\pi)$ l'espace des B-Splines de degré k ayant comme noeuds les points de π . Une fonction B-Spline de degré k définie sur intervalle [a,b] est de classe C k-1 et sa restriction à chaque sous intervalle [u_i, u_{i+1}] est un polynôme de degré k. Tout \overrightarrow{S}_k appartient à l'ensemble $\overrightarrow{S}_k(\pi; \mathbf{a}, \mathbf{b})$ de ces fonctions. Elle se représente de manière unique sous la forme suivante:

$$\vec{S}_{k}(u) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \vec{P}_{l} B_{l,k+1}(u)$$
 I-53

Lorsque π est finie et que l'on a :

 $a = u_0 < u_1 < \dots < u_m = b$

Il est commode d'introduire deux noeuds de multiplicité k+1à chaque extrémité, ce qui donne les 2 k + m + 1 noeuds suivants :

$$u_0^1 = u_1^1 = \dots u_k^1 = u_0 = a$$

 $u_1^1 = u_{1-k}^1 \qquad (k+1 \le i \le k+m-1)$
 $u_{k+m}^1 = u_{k+m+1}^1 = \dots = u_{2k+1}^1 = u_m = b$

 $S_k(\pi; a, b)$ est l'espace des fonctions de $C^{k-1}[a,b]$ dont la restriction à (u_i, u_{i+1}) est un polynôme de degré < k. Si $\vec{S_k}$ appartient à l'ensemble $\vec{S_k}(\pi; a,b)$ de ces fonctions. Elle peut s'écrire alors de la manière unique suivante :

$$\mathbf{\hat{S}}_{k}(\mathbf{u}) = \sum_{l=0}^{k+m-1} \vec{\mathbf{P}}_{l} \mathbf{B}_{l,k+1}(\mathbf{u})$$
 avec $[\mathbf{a} \le \mathbf{u} \le \mathbf{b}]$ $l-54$

Le support de la fonction B-spline $B_{i,k+1}$ est l'intervalle $[u_{i}^{1}, u_{i+k+1}^{1}]$.(voir la figure III-2)

III-1-1. Propriétés des B-Splines [11]

Soit une suite strictement croissante de noeuds, la définition des B-Splines de classe 1 est :

$$B_{i,1}(u) = 1 \qquad \text{pour } u_i < u < u_{i+1}$$

et pour k < 1, la définition des B-Splines est donnée par la relation récurrente :

$$B_{l,k}(u) = \frac{u - u_{l}}{u_{l+k-1} - u_{l}} B_{l,k-1}(u) + \frac{u_{l+k} - u}{u_{l+k} - u_{l+1}} B_{l+1,k-1}(u)$$

B-SPLINES DE DEGRE 2 SUR L'INTERVALLE [0,4]

Suite des noeuds : $\pi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4\}$





Fig III - 2

Compte tenu de ces définitions, nous pouvons démontrer les propriétés suivantes :

1. $B_{i,k}(u) = 0$ pour $u \in [u_i, u_{i+k}]$. Cet intervalle constitue le support de la B-Spline.

2. Chaque intervalle $[u_r, u_{r+1}]$ est recouvert par k support de B-Splines et sur cet intervalle la somme des B-Splines est égale à 1.

$$\sum_{l=r-m+1}^{r} B_{l,r}(u) = 1 \qquad \text{pour} \quad u \in \left[u_r, u_{r+1}\right]$$

3. Les B-Splines sont des fonctions polynomiales par morceaux de degré au plus égales à k-1. Si les noeuds sont tous distincts ce sont des fonctions de classe Ck-2.

4. De façon générale, lorsque r noeuds sont confondus (1< r< k-1) multiplicité du noeud est r), la B-Spline est de classe C^{k-r-1} . Lorsque k = r, il apparaît une discontinuité du graphe de la B-spline.

5. Les B-Splines permettent d'obtenir les dérivées successives de

$$\mathbf{\vec{S}}_{k}(\mathbf{u}) = \sum_{i} \mathbf{\vec{P}}_{i} \mathbf{B}_{i,k+1}(\mathbf{u})$$

et une suite

Pour obtenir les dérivées successives de cette relation, nous nous donnons tout d'abord une suite

> $\Pi = \left(\mathsf{u}_{\mathsf{I}} \right)_{\mathsf{I} = -\infty}^{+\infty}$ $(\mathbf{P}_{1})^{+\infty}$

de points formant un polygone P infini, auxquels on associe la courbe paramétrée :

$$\mathbf{\tilde{S}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{p},\pi;\mathbf{u}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbf{\tilde{P}}_{j} \mathbf{B}_{j,\mathbf{k}+1}(\mathbf{u}) \qquad \mathbf{u} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$$

Chaque coordonnée est donc une fonction Spline de degré k, c'est à dire un élément de $S_k(\pi)$. Nous nous donnons les 2k + n + n1 noeuds

 $\pi = \{u_0, \ldots, u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n, \ldots, u_n\}$ et un polygone $\mathbf{P} \cdot = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{k+n-1}\}$ On leur associe l'arc paramétré :

 $\vec{S}_{k}(p, \pi; u) = \sum_{i=0}^{k+n-1} \vec{P}_{j} B_{j, k+1}(u)$ avec $u \in [a, b]$

Chaque coordonnée de cet arc est un élément de $\vec{S_k}(\pi;a,b)$.

Compte tenu de ces expressions, nous pouvons dire que $\vec{S_k}$ est la courbe Spline de degré k associée à la subdivision π et au polygone Spline P*. Il résulte immédiatement de ces expressions et des propriétés des B-splines que le point $\vec{S}_k(p, \pi; u)$, que l'on écrira souvent $S_k(u)$ ou $S_k(p, u)$ pour simplifier, est le barycentre des sommets Pi du polygone affecté des masses positives $B_{i,k+1}(u)$.

Les résultats des dérivées successives de cette relation s'obtiennent très simplement.

Si

$$\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(\mathbf{u}) = \sum_{i} \mathbf{P}_{i} \mathbf{B}_{i,k+1}(\mathbf{u})$$

pour 1 < n < k-1

$$\mathbf{\hat{S}}_{k}^{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{k}(\mathbf{k}-1)\dots(\mathbf{k}-\mathbf{n}+1)\sum_{j}\vec{P}_{j}^{n}\mathbf{B}_{j,k-n+1}(\mathbf{u})$$
 I-55

avec

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{j}^{(0)} = \mathbf{P}_{j} & \text{et pour } i \ge 1 \\ \\ \mathbf{P}_{j}^{(1)} = \frac{\left(\mathbf{P}_{j}^{(i-1)} - \mathbf{P}_{j-1}^{(1-1)}\right)}{\left(\mathbf{u}_{j+k-l+1} - \mathbf{u}_{j}\right)} \end{cases}$$

Par conséquent $\vec{S}_k \in \vec{S}_k(\pi)$

$$\vec{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{n}} \in \vec{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}-\mathbf{n}}(\pi)$$
 pour $0 \le \mathbf{n} \le \mathbf{k}-1$

Ceci montre que cette relation est à un coefficient près, la courbe Spline de degré k-n associée au polygone Spline

$$P^{n} = \left\{ P_{l}^{n} \right\}_{l \in I}$$
 avec l fini ou infini.

Compte tenu de ces expressions, nous pouvons écrire que $\vec{S_k}$ est la courbe de B-Spline de degré k associée aux subdivisions {ui} et $\vec{P} = \{\vec{P_i}, i \in I\}$.

III-1-2. Construction géométrique du point courant et des dérivées en ce point

L'algorithme de C. DE BOOR - COX permet de déterminer le point courant :

$$\mathbf{\hat{S}}_{k}(\mathbf{p}; \mathbf{u}) = \sum_{l=n-k}^{n} \mathbf{\hat{P}}_{l} \mathbf{B}_{l,k+1}(\mathbf{u})$$

Lorsque $u \in [u_n, u_{n+1}]$, cela consiste à déterminer une suite de points dont le dernier est $\vec{S_k}(u)$. Successivement, on fait les opérations suivantes :

- a). On pose $\overrightarrow{P}_{i,0}^{*} = \overrightarrow{P}_{i}^{*}$ pour n-k < i < n
- b). Pour 1 < j < k et n k + j < i < n, on fait

$$\overrightarrow{\mathbf{P}}_{i,j}^{\flat}(\mathbf{u}) = \lambda \overrightarrow{\mathbf{P}}_{i,j-1}^{\flat}(\mathbf{u}) + (1 - \lambda) \overrightarrow{\mathbf{P}}_{i-1,j-1}^{\flat}(\mathbf{u})$$

avec $\lambda = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_i) / (\mathbf{u}_{i+k-j+1} - \mathbf{u}_i)$

c). $\vec{S_k}(u) = \vec{P_{n,k}}(u)$.

I-56

Le calcul nécessite l'évaluation de k(k-1)/2 combinaisons linéaires. Il est stable numériquement, mais coûteux en nombre d'opérations. Géométriquement, chaque point $\vec{P}_{i,j}$ est sur le segment $[P_{i-1,j-1})$, $P_{i,j-1}$. Plus généralement, lorsque $u \in [u_n, u_{n+1}]$, la définition du point courant $\vec{Sn}_k(p;u)$. S'obtient par application de l'algorithme ci-dessus au polygone p^n . On obtient, pour 0 < n < k-1

a).
$$P^{n}_{i,0} = P_{i}^{n}$$
 pour $m + k + n < i < m$
b). $P^{n}_{i,j} = \lambda P_{i,j-1}^{n}(u) + (1 - \lambda) P_{i-1,j-1}^{n}(u)$
avec $\lambda = (u - u_{i}) / (u_{i+k+1-j-n} - u_{i})$ I-57
pour $1 < j < k - n$ et $m - k + n + j < i < m$
c). $S^{n}_{k}(p;u) = k (k - 1) \dots (k - n + 1) P_{m}^{n}_{k-n}(u)$

III-2. DEFINITION DES SURFACES.

24

4.1

La définition des surfaces quelconques par des B-SPLINES est semblable à celle des surfaces de BEZIER. La différence fondamentale réside dans la définition des fonctions mélanges ou fonctions pondérantes.

Les surfaces représentées par des B-SPLINES se définissent par une généralisation de de la théorie sur les courbes en passant par l'intermédiaire du produit tensoriel. Un point est défini par la relation suivante :

$$\mathbf{\hat{S}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{\vec{P}}_{i,j} \mathbf{B}_{i,k}(\mathbf{u}) \mathbf{B}_{j,1}(\mathbf{v})$$
 I-58

Dans cette formule, les $\overrightarrow{P}_{i,j}$ sont les (m+1) (n+1) sommels du polygone et les $B_{i,k}(u)$ et $B_{j,l}(v)$ sont respectivement les fonctions mélanges ou fonctions pondérantes de base associées aux deux variables indépendantes u et v. Ces dernières sont définies par la relation I - 52 ci-dessus.

La procédure de construction des surfaces peut se décrire de la manière suivante :

Lorsque l'on fixe u et que l'on fait varier v, le point correspondant se déplace le long d'une courbe tracée sur la surface. Inversement, si l'on fixe v et que l'on fait varier u, on obtient une autre courbe. En restreignant les positions possibles pour u et v à des intervalles discrets, on obtiendra des portions de surfaces délimitées chaque fois par quatre segments de courbes. Une surface donnée peut donc être approchée par un ensemble de "carreaux" qui en se raccordant donneront une approximation de la surface d'autant meilleure que les intervalles choisis pour les variations des paramétres u et v seront petits.

Les carreaux ont entre eux, une continuité d'ordre m dans le sens des u et n dans le sens des v.

Notre généralisation va s'établir de la façon suivante : une surface sera constituée par une somme pondérée de fonctions de base, utilisant comme facteurs de pondération les x, les y et les z des coordonnées d'un ensemble topologiquement assimilable à des rectangles de points de définition ; on appelle cela le filet ou le réseau de définition auprès duquel la surface doit passer. Puisque les points de définition sont disposés suivant une topologie rectangulaire, $\overrightarrow{Pi}_{i,j}$, la surface peut être exprimée par la double 'sommation ci-dessus.

CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DU POINT COURANT ET DES

DERIVEES EN CE POINT

La détermination d'un point courant $\vec{S}(u,v)$ d'une surface représentée par des B-SPLINES se fait en utilisant l'algorithme de C. DE BOOR suivant la direction u puis v ou l'inverse. Cette surface étant définie par :

$$\mathbf{\hat{S}}_{k,i}(\mathbf{p}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{l=m-k}^{m} \sum_{j=n-l}^{n} \vec{P}_{lj} \mathbf{B}_{l,k+1}(\mathbf{u}) \mathbf{B}_{j,l+1}(\mathbf{v}) - l - 59$$

Lorsque $(u,v) \in [u_r, u_{r+1}] * [v_s, v_{s+1}]$, on utilise l'algorithme de C.DE BOOR pour évaluer la surface $\vec{S}(p;u,v)$. 59

Tout d'abord, on décompose la relation I-59 selon les deux formes suivantes :

$$\vec{S}$$
 (p; u, v) = $\sum_{i=m-k}^{m} \vec{P}_{i}(v) B_{i,k+1}(u)$

$$\vec{P}_{i}(v) = \sum_{j=n-1}^{n} \vec{P}_{i,j} B_{j,i+1}(v) \qquad m-k \ \langle i \leq m \rangle$$

Puis on applique l'algorithme de C. DE BOOR :

pour 0 < n < k-1 et 0 < m < l-1

a). Pour toute valeur de (i,j), on pose :

$$\vec{P}_{i,j}^{n}(\mathbf{v}) = \vec{P}_{i,j}$$
 pour $\mathbf{r} - \mathbf{k} + \mathbf{n} \le \mathbf{i} \le \mathbf{r}$ et
 $\mathbf{s} - \mathbf{i} + \mathbf{n} \le \mathbf{j} \le \mathbf{s}$

b). Pour $1 \le i \le l-m$ et $s-l+m \le j \le s$, on fait :

$$\vec{P}_{1j}^{n}(v) = \chi \vec{P}_{1-1,j}^{n}(v) + (1-\chi) \vec{P}_{1-1,j-1}^{n}(v)$$

$$\chi = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_j}{\mathbf{v}_{j+1+1-1} - \mathbf{v}_j}$$

où

c).
$$\mathbf{S}_{l}^{"}(\mathbf{p}; \mathbf{v}) = \mathbf{I}(l-1) \dots \dots (l-m+1) \vec{P}_{l-m,k}^{"}(\mathbf{v})$$

C'est cet algorithme qui sera programmé au chapitre IV.

CHAPITRE IV

DESCRIPTION DES PROGRAMMES

IV-I. METHODE DE BEZIER

IV-I-1. Généralités sur le programme

Le but de ce chapitre est de présenter le programme sur micro-ordinateur qui modélisera des surfaces quelconques en utilisant la méthode de BEZIER. Ces surfaces seront ensuite visualisées au moyen de la V.A.O. (Visualisation Assistée par Ordinateur) aimablement mis à notre disposition par Robert MICHELIN.

Le programme est basé sur une suite logique d'appel de routines qui exécutent chacune une opération du processus de résolution du problème. Ce problème consiste, comme on l'a vu précédemment à déterminer le réseau des lieux du polygone caractéristique de BEZIER dans la base des fonctions mélange ou pondérante de BERNSTEIN à partir d'un certain nombre de points réels mesurés sur la surface modélisée.

Ce programme est écrit en FORTRAN. On trouvera le listing en ANNEXE A-3. Il correspond à l'organigramme simplifié de la page suivante et utilise les notations ci-dessous :

- Le degré du polynome d'approximation selon les directions u et v est respectivement indiqué par les variables NPU et NPV, variant de 2 à 5.

- Le découpage selon les directions u et v est précisé grâce aux variables NT et NS.

- Les coordonnées des points mesurés sont indexées dans un tableau ((PT(I,J), J=1,3), I = 1,NPT) avec NPT (nombre de points)=(NPU+1) (NPV + 1).

- La matrice de connectivité de chaque sous carreau permettant d'effectuer le maillage qui sera utile pour appliquer le programme de calcul par Elément Finis est écrite grâce à la



variable ((NOD (I,J), J = 1,4), I=1,NEL) dans le cas d'éléments à quatre noeuds) avec NEL (nombre d'éléments) = NT*NS. Cette matrice est générée automatiquement par un sous programme appelé AUTO. On a visualisé la surface grâce au programme de visualisation assistée par ordinateur.

Les systèmes de numérotation locale et globale des points sont donnés dans la figure IV-1 :



FIGURE IV - 1

Dans les paragraphes suivants, nous allons décrire plus en détail cette procédure afin de faciliter la compréhension du programme,

IV-I-2. Relevé des points réels de la surface. Degré des polynômes d'approximation.

Nous allons commencer la description de ce programme par quelques considérations générales de programmation.

Tout d'abord, le programme est écrit en double précision, ce qui évite ainsi en grande partie les erreurs de chute. Ensuite, on surdimensionne tous les tableaux afin de restituer des surfaces avec différentes précisions. Enfin, notons la présence d'une zone COMMON qui permet l'utilisation de modules séparés plus simples à écrire et plus faciles à compiler tout en gardant des variables communes. Ceci est absolument nécessaire en particulier lorsqu'on travaille sur micro-ordinateur. Au début du programme, on lit les valeurs de NPU et NPV qui entraine les degrés des polynômes de BERNSTEIN. Ces valeurs ont été volontairement limitées à 5 (NPU \leq 5 et NPV \leq 5) et leur produit = (NPU + 1)(NPV + 1) à 36. En effet, il est inutile de prendre des degrés trop grands, car cela introduit beaucoup de calculs et nous n'avons à notre disposition qu'un micro-ordinateur à vitesse relativement lente (AT 286 à 8 MHz). Il aurait besoin de beaucoup trop de temps pour résoudre de tels problèmes. Les

points réels mesurés sur la surface sont ensuite rangés dans un tableau PT (36,3) (on se limite donc à 36 points au maximum). Le tableau ainsi obtenu va permettre de calculer les paramètres u et v intermédiaires par le programme suivant.

IV-I-3. Calcul des paramètres u et v

Ce sous programme permet de calculer la valeur des paramètres u et v associés à chaque point du réseau. Les valeurs des coordonnées x, y et z sont rangées dans trois tableaux de dimension (k * l).



FIGURE IV = 2

Dans le cas représenté sur le dessin ci-dessus, k = l, on a des tableaux carrés, mais la méthode est générale et l'on peut traiter $l \neq k$.

Pour calculer la valeur des paramètres u et v (qui varient entre 0 et 1) associés aux points mesurés, on effectue une double itération.à partir de leurs coordonnées.

Le calcul des paramètres u et v est un simple calcul de proportionnalité et ceux-ci sont obtenus en effectuant le rapport de la longueur du sous-arc (jusqu'au point courant) sur la longueur totale de l'arc.

Par une simple proportionnalité, on obtient à partir de chacun des trois tableaux de coordonnées des points mesurés, deux tableaux de même dimension contenant les valeurs des paramètres u et v.

IV-I-4. Construction de la matrice [A] (BEZIER)

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le calcul des paramètres u et v était associé à chaque point du réseau sur la surface.

La matrice [A] définie dans II-20 peut être évaluée pour l'ensemble des points du réseau.

Le terme générique de cette matrice s'écrit sous la forme suivante :

 $\left[1, u_{1} \dots u_{l}^{m}, v_{j}, u_{l} v_{j}, \dots \dots u_{l}^{m} v_{j}, \dots \dots, v_{j}^{n}; u v_{j}^{n}, \dots \dots u_{l}^{m} v_{j}^{n} \right]$

et contient NPT = (m + 1) (n + 1) termes par ligne.

La construction de la matrice [A] est effectuée en trois étapes qui correspondent aux trois valeurs particulières de u $\{0, 0 < u < 1, 1\}$.

L'algorithme est le suivant :

Dans une première étape, on effectue le calcul pour u = 0:

On écrit alors les k premières lignes correspondant à toutes les valeurs du paramètre v. Pour chaque ligne de la matrice, on écrit la valeur "1" à la première colonne, puis on écrit la valeur "0" à partir de la deuxième colonne jusqu'a NPT colonne. Ensuite, à partir de la colonne k+2 et avec un pas de (k+1), on écrit v^k_j en itérant sur j pour les valeurs numériques de v en multipliant par v à chaque itération sur j avec pour but d'accroître le degré de v de 1 à chaque fois. La deuxième étape correspond à la valeur u = 1:

Avec le même principe que précédemment, la construction des k dernières lignes de la matrice [A] avec u = 1 peut être effectuée pour chaque valeur de v.

Tout d'abord, on écrit la valeur "1" à partir de première colonne jusqu'à la $(m+1)^{\text{ème}}$ colonne. Ensuite, à partir de la colonne (m+2) et un pas de (m+1), on écrit v^k en itérant sur j pour chaque valeur numérique de v en multipliant à chaque fois par v, pour incrémenter son degré.

La troisième étape correspond à la valeur 0 < u < 1:

Pour écrire toutes les lignes intermédiaires, c'est le même principe qui est appliqué, le premier terme prend à la valeur "1". Puis on effectue pour la première des lignes une itération sur les valeurs intermédiaires de v. On continue avec les puissances de v à partir du $(k+2)^{bme}$ terme et tous les (k+1) placés en incrémentant sur les puissances de v par itération. Enfin, on complète le tableau par une itération sur les m termes compris entre deux puissances successives de v.

IV-I-5 Triangularisation de la matrice [A] et résolution du problème

La matrice [A] à p lignes et q colonnes est reliée au vecteur colonne de coordonnées {C} par la relation ci-dessous

$$[A] \{b\} = \{C\}$$
 I-60

La résolution consiste à déterminer les inconnues {b} par utilisation de la méthode de GAUSS avec pivot partiel. Cette méthode s'effectue en deux étapes :

IV-I-5-1. Triangularisation

La triangularisation consiste à transformer le système d'équation (I-60) en un système triangulaire supérieur :

 $[0 \setminus S] \{b\} = \{C'\}$ I-61
Pour effectuer la triangularisation par la méthode de GAUSS à pivot partiel, il suffit de placer sur la diagonale les termes les plus importants, en intervertissant éventuellement des lignes.

La description de cette méthode et son algorithme seront donnés en ANNEXE A-2.

Après triangularisation, on obtient une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1q} \\ 0 & \mathbf{A}_{22}^{1} & \cdots & \mathbf{A}_{2q}^{1} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33}^{2} & \cdots & \mathbf{A}_{2q}^{2} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33}^{2} & \cdots & \mathbf{A}_{3q}^{2} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{ss}^{s-1} & \mathbf{A}_{sq}^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{qq}^{q-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1} \\ \mathbf{b}_{2} \\ \mathbf{b}_{3} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{3} \\ \mathbf{b}_{3} \\ \vdots \\ \mathbf{b$$

 $\begin{bmatrix} 0 \setminus A^{q-1} \end{bmatrix} \{ b_q \} = \{ C^{q-1} \}$

ou

soit

.

 $[0 \setminus S] \{ \dot{p}_q \} = \{ \dot{C}^{\dagger} \}$

I-63

I-62

IV-I-5-2 Résolution du système triangulaire ou substitution arrière

Pour calculer les variables inconnues b_n , b_{n-1} b_2 à partir de la dernière ligne, la résolution d'équation (I-63) s'effectue de la manière suivante :

$$b_{n} = \frac{C_{n}^{1}}{S_{nn}^{-1}}$$

$$b_{n-1} = \frac{\left(C_{n-1}^{1} - S_{n-1,n}b_{n}\right)}{S_{n-1,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$b_{1} = \frac{\left(c_{1}^{1} - S_{1,2}b_{2} - S_{1,3}b_{3} - \dots - S_{1,n}b_{n}\right)}{S_{1,1}}$$
I-64

En pratique le programme travaille directement sur les matrices [A] et {C} toutes deux modifiées par la triangularisation.

$$b_q = C_q / A_{q q}$$

 $i = q \cdot 1, q \cdot 2, \dots 1.$
 $b_n = A_{ii} \cdot 1 (C_i \cdot \Sigma A_{ij} b_j)$ I-65

IV-2. METHODE DE B-SPLINE

IV-2-1. Généralités sur le programme

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes attachés à analyser le programme de calcul des surfaces quelconques tridimensionnelles en utilisant la méthode de BEZIER qui est fondée sur les fonctions paramétrées polynomiales dans la base de BERNSTEIN.

Dans ce paragraphe, nous allons construire le programme de représentation d'une surface quelconque tridimensionnelle en utilisant la méthode des B-SPLINES qui utilise l'algorithme de Carl DE BOOR. Cette surface sera ensuite visualisée au moyen de la V.A.O.

Ce programme est également écrit en FORTRAN-77. On trouvera le listing en ANNEXE A-4. Il correspond à l'organigramme simplifié de la page suivante et utilise les notations ci-dessous :

- Le nombre d'ordre qui caractérise l'échantillonnage selon les directions u et v est représenté par les variables NCU et NCV.

- Le découpage selon les directions u et v est précisé grâce aux variables NOU et NOV.

- Le nombre de sommets du polynôme selon les directions u et v est représenté par les variables NPU et NPV, variant de 2 à 5.

- Les coordonnées des points mesurés sont indexées dans un tableau ((PT(I,J), J = 1,3), I=1, NPT) avec NPT (nombre de point) = (NPU + 1) (NPV + 1).

- Le vecteur noeud selon les directions u et v est respectivement indiqué par les variables (NIU(I), I=1,NPU+NCU +1) et (NIV(I), I= 1, NPV+NCV+1).

- La matrice de connectivité de chaque sous carreau permettant d'effectuer le maillage qui sera également utile pour appliquer le programme de calcul par Elément Finis est écrite grâce à la variable ((NOD (I,J), J = 1, 4), I = 1,NEL) avec NEL=NOU*NOV. Cette matrice est générée automatiquement par le sous programme AUTO. On a visualisé la surface grâce au programme de V.A.O.

Les systèmes de numérotation locale et globale des points sont donnés dans la figure IV-1 (page 62). IV-2-2. Relevé des points réels de la surface. Degré des polynômes utilisés.

Comme pour le programme correspondant à la méthode de BEZIER, le programme est écrit en double précision, ce qui permet d'éviter les erreurs de chute. Une zone COMMON permet l'utilisation de modules séparés plus simples à écrire et plus faciles à compiler tout en gardant des variables communes. Ceci est absolument nécessaire en particulier lorsqu'on travaille sur micro-ordinateur.

Au début du programme, on lit les valeurs d'ordre NCU et NCV, puis les valeurs NPU et NPV des degrés des polynômes de B-SPLINE. Ces degrés ont été volontairement limités à 5 (NPU \leq 5 et NPV \leq 5) et leur produit = (NPU +1) (NPV + 1) à 36. Les points réels mesurés sur la surface sont ensuite rangés dans un tableau PT (36,3) (on se limite donc à 36 points au maximum).

IV-2-3. Calcul des vecteurs noeuds NIU(I) et NIV(I)

Ce sous programme permet de calculer des vecteurs noeuds (NIU(I),I=1,NPU+NCU+1) et (NIV(I),I=1,NPV+NCV+1) associés à chaque valeur de ui et vi.

Le vecteur noeud se calcule de la manière suivante: Selon la direction u :

 $\begin{cases} NIU_{i} = 0 & si & i < NCU \\ NIU_{i} = i - NCU + 1 & si & NCU \le i \le NCU + NPU + 1 \end{cases}$

$|N|U_i = NPU - NCU + 2 si i > NPU$

A titre d'exemple, les vecteurs noeuds, pour (NCU = 2, 3 et 4), et NPU = 3 sont :

Nombre de sommets	ordre	vecteur noeud	<u>b</u>
NPU = 3	2	001233	3
	3	0001222	2
	4	00001111	1

où : b est la valeur maximale des éléments du vecteur noeud. Cette valeur est donnée par la relation b = NPU-NCU+2

Le vecteur noeud selon la direction vi se calcule de manière analogue

69





QUELQUES EXEMPLES TRAITES

7205

2). Sur un exemple, on montre le caractère global de la représentation de REZIER et le caractère local de la représentation par les R-SPV ARTIGAHO

3).L.x validation de la représentation par les polynomes de BEZIER sera faite par comparaison avec des résultats obtenus pa**ZENERS JORGENERTATION DES SURFACES**

4.4. Dates sans sans being solution of a solution of the sans sans of the solution of the solu

Dans ce chapitre, nous allons donner des exemples de modélisation de surfaces quelconques en utilisantisces deux méthodes à partites prespectivement Schueberés causandes (NPU+1)*(NPV+1) points mesurés (9 à 36 points) et des epolynômes de degréss 2,23n40bm & Luitilisation de polynômes de degrés d'approximation différents apporte une précision plussou moins grande.

6,0,0 1,0,2 2,0,1 4,0,0

Le réseau des (NPU+1)(NPV+1) points?, mesurés, lest un réseau de points distributés, selon lès, directions, u et v(), fis? sont donnés par leurs trôis, à coordonnées 2. dans un () système orthonormé direct de référence.

La représentation de la surface par chaque méthode et avec des solgmexes sempleagréennes not someving acegén selenard VALE VA2.

1).Visualisation d'une même surface par les deux méthodes canteq pedes ignonetionsenspondérantes.» de Védégré d'écroissant (fig. .VA,VB,VC)

1-1. Les offigures comparatives OVA1, VB4, VC1,0, montrent l'influence du Odegré des fonctions, pondérantés i utilisées, sur la représentation dec la surface, par la méthode (de, BEZIER, set avec l'indice 2 par la méthode des B-SPDINES. 5, 5, 1 0, 5, 0

040 1409 2425 342 440

1-2.L'observation simultanée des figures VAI-VA2, VB1-VB2, VC1-VC2, montre la représentation d'une même elsurface pardesadesageméthodes ede BEZIER/ETIOB-SPLANES avec des fonctions pondérantes des degré croissant sonnob les orthup digeb 2). Sur un exemple, on montre le caractère global de la représentation de BEZIER et le caractère local de la représentation par les B-SPLINES.

3).La validation de la représentation par les polynômes de BEZIER sera faite par comparaison avec des résultats obtenus par ailleurs sur un ordinateur de grande capacité.[23]

4).La représentation d'exemples divers sans ou avec raccordement de carreaux en utilisant la méthode BEZIER.

V-1. LA VISUALISATION D'UNE MEME SURFACE AVEC DES FONCTIONS PONDERANTES DE DEGRE 3, 4 OU 5 PAR LES DEUX METHODES

Les ensembles de points mesurés (16, 25 ou 36) sur la surface à représentéer sont donnés ci-dessous.

1. NPU = NPV = 3. Les coordonnées des seize points mesurés sont:

0,0,0	1,0,2	2,0,1	4,0,0
0,1,2	1,1,2	2,1,2	4,1,0
0,3,0	1,3,2	2,3,0	4,3,2
0,4,0	1,4,0.5	2,4,2.5	4,4,0

La représentation de la surface par chaque méthode et avec des polynômes de degré trois est donnée dans les figures VA1.et VA2.

2. NPU = NPV = 4. Les coordonnées des vingt cinq points mesurés sont :

0,0,0	1,0,2	2,0,1	3,0,0	4,0,0
0,1,2	1,1,2	2,1,2	3,1,1	4,1,0
0.2.1	1,2,2	2,2,1	3,2,0	4,2,1
0.3.0	1,3,2	2,3,0	3,3,0	4,3,2
0.4.0	1,4,0.5	2,4,2.5	3,4,2	4,4,0

La représentation de la surface par chaque méthode avec de degré quatre est donnée dans les figures VB1 et VB2.

74 '

4. NPU = NPV = 5. Les coordonnées des trente six points mesurés sont :

0,0,0	1,0,2	2,0,1	2.5,0,1	3,0,0	4,0,0
0,1,2	1,1,2	2,1,2	2.5,1,1	3,1,1	4,1,0
0,2,1	1,2,2	2,2,1	2.5,2,2	3,2,0	4,2,1
0,3,0	1,3,2	2,3,0	2.5,3,0	3,3,0	4,3,2
0,3.5,0	1,3.5,2	2,3.5,0	2.5,3.5,0	3,3.5,0	4,3.5,2
0,4,0	1,4,0.5	2,4,2.5	2.5,4,2.2	3,4,2	4,4,0

La représentation de la surface par chaque méthode et avec des polynômes de degré cinq est donnée dans les figures VC1.et VC2.

On fait suivre ces surfaces des tableaux des points calculés dans chacun des cas qui montrent la précision obtenue dans chacun des cas.



Le tableau comparatif ci-dessous montre les cotes z de quelques points calculés d'une même surface par les deux méthodes de BEZIER et B-SPLINES

DEGRE 3

Numéro des points	METHODE		2
	BEZIER (Fig V-A-1)	B-SPLINE (Fig (V-A-2)	
10	1.1508	1.1510	
31	1.2400	1.2400	
52	1.3089	1.3087	
73	1.3586	1.3586	
94	1.3827	1.3826	
115	1.4091	1.4091	
136	1.4133	1.4132	
157	1.4057	1.4055	
178	1.3881	1.3881	8000
199	1.3623	1.3623	
220	1.3125	1.3308	
241	1.2931	1.3132	1
262	1.2532	1.2653	1
283	1.2122	1.2222	
304	1.1717	1.1718	
325	1.1336	1.1336	1
346	1.0995	1.0996	
367	1.0712	1.0713	
388	1.0508	1.0508	
409	1.0396	1.0396]
430	1.0395	1,0395	

Tableau V-1-3



COQUE TRIDIM. de 400 elements, 441 points, 1600 segments

Figure VAC CURFACE DE E-TFLINE DE DETRE 3

-

Numéro des points	MET	METHODE	
	BEZIER (Fig V-B-1)	B-SPLINE (Fig (V-B-2)	
10	0.9665	0.9665	
31	1.0969	1.0970	
52	1.1909	1.1909	
73	1.2531	1.2531	
94	1.2870	1.2868	
115	1.2999	1.2998	
136	1.2932	1.2931	
157	1.2721	1.2721	
178	1.2409	1.2408	
199	1.2035	1.2035	
220	1.1639	1.1640	
241	1.1263	1.1263	
262	1.0941	1.0942	
283	1.0713	1.0714	
304	1.0615	1.0616	
325	1.0683	1.0680	
346	1.0951	1.0951	
367	1.1454	1.1454	
388	1.2224	1.2224	
409	1.3294	1.3294	
430	1.4695	1.4695	

Tableau V-1-4

176



Figure VB2 SURFACE DE B-SPLINE DE DEGRE 4

76-1

DEGRE 4

77-1 -

DEGRE	5

Numéro des points	METHODE		
	BEZIER (Fig V-C-1)	B-SPLINE (Fig (V-C-2)	
10	1.0243	1.0244	
31	1.1142	1.1372	
52	1.1679	1.2049	
73	<u>1.1899</u>	1.2340	
94	1.1847	1.2309	
115	1.1572	1.2019	
136	1.1125	1.1531	
157	1.0557	1.091	
178	0.9924	1.0216	
199	0.9279	0.9511	
220	0.8679	0.8855	
241	0.8180	0.8308	
262	0.7841	0.7928	
283	0.7720	0.7775	
304	0.7873	0.79054	
325	0.8359	0.8376	
346	0.9237	0.9244	
367	1.0560	1.0563	
388	1.2388	1.2389	
409	1.4774	1.4774	
<u>430</u>	1.7772	1.7771	

Tableau V-1-5



Les tableaux des quelques points calculés et l'influence du degré des fonctions pondérantes utilisées sur la représentation de la surface par chaque méthode

1 - METHODE DE BEZIER

Numéro des points	DEGRE		
	3	4	5
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.2779	0.3565	0.4298
3	0.513	0.6318	0.7371
4	0.7076	0.8345	0.9456
5	0.864	0.9728	1.0752
6	0.9844	1.0547	1.1426
7	1.0710	1.0878	1.1613
8	1.1261	1.0795	1.1423
9	1.1520	1.0368	1.0940
10	1.1508	0.9665	1.0243
11	1.1250	0.8750	0.9375
12	1.0766	0.7685	0.8381

Tableau V-1-1

2 - METHODE DE B-SPLINE

Numéro des points	DEGRE		
	3	4	5
1	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.2779	0.3565	0.4298
3	0.5130	0.6318	0.7371
4	0.7076	0.8344	0.9457
5	0.864	0.9728	1.0753
6	0.9843	1.0547	1.1427
7	1.0711	1.0880	1.1614
8	1.1261	1.0794	1.1424
9	1.1520	1.0367	1.0944
10	1.1510	0.9665	1.0244
11	1.1251	0.8750	0.9376
12	1.0767	0.7685	0.8382

Tableau V-1-2

>

V-2. LES CARACTERES GLOBAL DE LA REPRESENTATION DE BEZIER ET LOCAL DE LA REPRESENTATION PAR LES B-SPLINES

Pour montrer les caractères global et local des deux représentations, nous donnons ici un exemple identique à celui représenté dans la figure VB avec modification d'un pôle.

La représentation de la surface pour chaque méthode est donnée dans la figure V-2

La modification du point central mesuré sur la surface réelle permet de montrerviles figures VB1, VB2 et les tableaux VB11, VB22, le caractère global de la représentation par la méthode de BEZIER et le caractère local de la représentation par la méthode des B-SPLINES.

Les nouvelles coordonnées sont:

0,0,0	1,0,2	2,0,1	3,0,0	4,0,0
0,1,2	1,1,2	2,1,2	3,1,1	4,1,0
0,2,1	1,2,2	2.2.2	3,2,0	4,2,1
0,3,0	1,3,2	2,3,0	3,3,0	4,3,2
0,4,0	1,4,0.5	2,4,2.5	3,4,2	4,4,0

Les nouvelles représentations à comparer avec celles de la figure VB sont données dans les figures V-2.-A et. V-2-B



81 DEGRE 4

Numéro des points	METHODE		
	BEZIER (sans changement)	BEZIER(avec changement de pôle)	
10	0.9665	0.9664	
31	1.0969	1.1019	
52	1.1909	1,2089	
73	1,2531	1.2894	
94	1.2870	1.3454	
115	1.2999	1.3793	
136	1.2932	1.3935	
157	1,2721	1.3908	
178	1,2409	1,3741	
199	1,2035	1,3468	
220	1,1639	1.3121	
241	1,1263	1.2736	
262	1.0941	1.2353	
283	1.0713	1.2013	
304	1.0615	1.1757	
325	1.0683	1.1632	
346	1.0951	1.1684	
367	1,1454	1.1964	
388	1,2224	1.2522	
409	1 3294	1.3414	
430	1 4695	1 4695	

V-B 11

Numéro des points	METHODE			
	SPLINE (sans changement)	SPLINE(avec changement de pôle)		
10	0.9665	0.9664		
31	1.0970	1.1019		
52	1.1909	1.2088		
73	1.2531	1.2889		
94	1,2868	1.3444		
115	1,2998	1.3774		
136	1,2931	1.3904		
157	1.2721	1.3862		
178	1,2408	1,3679		
199	1,2035	1.3386		
220	1.1164	1,3018		
241	1,1263	1.2614		
262	1,0942	1.2218		
283	1.0714	1.1855		
304	1.0616	1,1588		
325	1,0680	1.1459		
346	1,0951	1.516		
367	1,1454	1.1813		
388	1,2224	1,2403		
409	1,3294	1.3344		
430	1,4695	1.4695		

V-B 22

82

V-3. COMPARAISON ENTRE LES RESULTATS OBTENUS PAR LA METHODE DE BEZIER SUR MICRO-ORDINATEUR ET CEUX OBTENUS PAR AILLEURS SUR UN ORDINATEUR DE GRANDE CAPACITE

Pour valider le programme des surfaces complexes représentées par les polynômes de BEZIER, nous donnons ci-après la représentation obtenue avec un très gros logiciel sur un gros ordinateur.

Dans cette représentation, nous choisissons d'utiliser le réseau de seize points mesurés suivante :

0,0,0	1,0,2	2,0,0	3,0,0
0,1,2	1,1,1	2,1,1	3,1,1
0,2,0	1,2,1	2,2,1	3,2,0
0,3,0	1,3,0	2,3,2	3,3,0

La représentation de la surface obtenue par ailleurs [23] est donnée dans la figure V-3-A et la représentation de la surface que nous avons obtenue est rappelée avec la figure V-3-B.



V-4. EXEMPLES, DIVERS, SANS, OU AVEC, RACCORDEMENT of TROT **DE CARREAUX** surée sont : Nous traitons ici quelques exemples de las représentation (1.0) d'une surface quelconque en utilisant la méthode de BEZIER sans ou avec raccordement de scarreaux. £1.00.8.7 50.0.00.8,6 5,8,66,0 Dans un premier temps, nous représentons une surfage avec. 00.8 un seul carreau de degré cinq. Les coordonnées des trente six 10.0.20: tnos sont :02.0.01 10,0,6.67 10,0,13.33 0.0.01 eprésentation de la Ordezce Orothundo, Orfe la Orothe VO.01 0,0,0 suaus de Bernstein de degré quatre 4,2,0 5,2,0 0,2,0 1.2.0 2.2.2 3,2,2 Pour le premier carreau, les coordonnées des points 0.3.0 1,3,0 2,3,2 3,3,2 4,3,0 5,3,0 : 1008 sèrus 1,4,0 2,0,8,4,02223,4,002,1,4,4,0,2,05,4,022711,2222 6.0 0,4,0 1,5,0 7.0.2,5,070403,5;00 + 4,5,0 7 25,5,0 + 0 M YUPP H 2 0,5,0 La représentation de das surface jest donnée dans la figure V-4-A, Nous allons gonstruirer maintenant daux sexemples describer surface avec raccordement de carreaux. 20.0.13 20.13,0 20,9.192,9.192 15 9 192, 191, 192 1. Pour le premier exemple, nous choisissons d'utiliser un Pour le deuxième carrene, les signétiques el moites entitues el moit iesurés sont : Pour le premier carreau, les coordonnées des points mesurés sont : E1,0,02 20,9.192,9.192 20,13,0 20,9,192,-9,192 -10.0.0

83

48

23.7.071, -7.071 <u>95,0001</u>- 2678780,00071 70.06,020140 0,0,01-26,4.2426,-4.24205,52333686 **E6261,523368-4**.2**R00,7,036,6** 0,5,636.8-25,7,6569,-5,65695,3338873 **E6261,633368**74,6**R0336**36,36,86,6 29,7,6569,-5,65695,3338873 **E6261,6336**36,6**R0336**,77782,36,01,0,11 0,01,0

représentation de la surface est donnée dans la figure V-4-C

51

84

Pour le deuxième carreau, les coordonnées des points mesurés sont :

0,10,0	0,10,6.67	0,10,13.33	0,10,20
5,8.66,0	5,8.66,6.67	5,8.66,13.33	5,8.66,20
8.66,5,0	8.66,5,6.67	8.66,5,13.33	8.66,5,20
10,0,0	10,0,6.67	10,0,13.33	10,0,20

La représentation de la surface est donnée dans la figure V-4-B

2. Pour le deuxième exemple, nous choisissons d'utiliser un polynôme de Bernstein de degré quatre .

Pour le premier carreau, les coordonnées des points mesurés sont :

0,0,-5	0,3.5355,-3.5355	0,5,0	0,3.5355,3.5355	0,0,5
5,0,-7	5,4.9497,-4.9497	5,7,0	5,4.9497,4.9497	5,0,7
10,0,-9	10,6.364,-6.364	10,9,0	10,6.364,6.364	10,0,9
15,0,11	15,7.7782,-7.7782	15,11,0	15,7.7782,7.7782	15,0,11
20,0,-13	20,9.192,-9.192	20,13,0	20,9.192,9.192	20,0,13
mesu	Pour le deuxième arés sont :	carreau	, les coordonnée	s des points
20,0,-13	20,9.192,-9.192 2	0,13,0	20,9.192,9.192	20,0,13
23,0,-10	23,7.071,-7.071 2	3,10,0	23,7.071,7.071	23,0,10
26,0,-6	26,4.2426,-4.2426	26,6,0	26,4.2426,4.2426	5 26,0,6
29,0,-8	29,5.6569,-5.6569	29,8,0	29,5.6569,5.6569	29,0,8
31,0,-11	31,7.7782,-7.7782	31,11,0	31,7.7782,7.778	2 31,0,11
La re	présentation de la s	urface es	t donnée dans la f	igure V-4-C



DEUXIEME PARTIE

CALCUL PAR ELEMENTS FINIS

DEUXIEME PARTIE

CALCUL PAR ELEMENT FINIS

INTRODUCTION

Dans la première partie, nous nous sommes attachés à modéliser une surface quelconque à trois dimensions qui a été définie par une représentation paramétrique régulière à deux paramètres \mathbf{u} et \mathbf{v} { \mathbf{u} et $\mathbf{v} \in [0,1]$ } en utilisant le système UNISURF ou la méthode des B-SPLINES.

Le second objectif recherché dans ce travail est le calcul d'une telle structure modelisée par cette surface. Il s'agit d'évaluer les déplacements, les rotations, les contraintes et les déformations d'un point quelconque de la coque construite sur cette surface en utilisant la méthode des éléments finis qui est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatiale, nucléaire, construction navale, mécanique, génie civil, etc...

L'objectif retenu ici n'est pas de construire un programme de calcul par élément finis des plus performants et universel, mais de montrer la faisabilité sur un micro-ordinateur d'un système complet de C.A.O orienté vers l'étude du comportement mécanique de coques ayant une forme quelconque.

Nous avons choisi d'utiliser des élément finis relativement simples, mais suffisamment représentatifs du phénomène physique. En conséquence, nous avons écarté les éléments de plaque et coque basés uniquement sur l'hypothèse de Kirchoff (sans cisaillement transverse). Nous avons préféré utiliser des éléments isoparamétriques de volume dégénérés qui permettent d'introduire le cisaillement transverse.

L'utilisation des éléments de volume à vingt noeuds dans leur forme originale, pose certains problèmes. Pour ZIENKIEWICZ [35,1977], deux difficultés principales se présentent : 87

Tout d'abord, la conservation de trois degrés de liberté en chacun des vingt noeuds, entraîne l'obtention de termes de rigidité très grands pour les déplacements relatifs le long des côtés correspondant à l'épaisseur de la coque. Ceci peut alors conduire à des systèmes d'équations mal conditionnés (une dimension de l'élément beaucoup plus petite que les deux autres), à des difficultés numériques et à une précision très mauvaise.

En second lieu, l'utilisation de plusieurs noeuds dans l'épaisseur de la coque sur des normales à la surface moyenne, en ignorant une hypothèse fondamentale sur les coques, entraîne un très grand nombre de degrés de liberté et des temps de calcul prohibtifs.

Pour tenter d'éliminer ces difficultés, AHMAD [2,3] a modifié l'élément isoparamétrique de volume à 20 noeuds en introduisant les simplications suivantes :

*La première simplification consiste à considérer une variation linéaire des déplacements suivant l'épaisseur, ce qui permet de supprimer quatre noeuds intermédiaires et conduit à la définition d'un élément à trois dimensions à 16 noeuds et 48 DDL (fig. II-1).

Cette hypothèse permet d'éviter l'emploi de degrés de liberté surabondants dans l'épaisseur de la coque.



FIGURE II - 1

* La deuxième simplification consiste, d'après l'hypothèse $\sigma_z = 0$ (ou très inferieure à σ_x et σ_y) de la théorie des coques, à négliger dans l'énergie de déformation les termes dépendant de \mathcal{E}_z . Ceci permet après intégration dans l'épaisseur, la définition d'un élément de coque à 8 noeuds avec 5 DDL par noeud : u, v, w, α , et β dans un trièdre local lié à la surface moyenne (fig. II-2). On obtient ainsi un modèle de coque avec cisaillement transverse. En effet, les normales à la surface moyenne de la coque restent droites mais ne restent pas normales à la fibre moyenne au cours de la déformation à cause de la présence du cisaillement, et ne changent pas de longueur durant la déformation.



FIGURE II - 2.

* La troisième simplification consiste à utiliser une hypothèse de comportement uniaxial dans la direction ξ . Ceci revient à supposer les phénomènes de membrane et de flexion découplés.et permet de considérer uniquement les phénomènes de flexion ($u_i = v_i = 0$). En utilisant les mêmes noeuds pour définir la géométrie et les déplacements, on obtient ainsi un élément isoparamétrique de plaque en flexion à 8 noeuds avec 3 DDL par noeud : w, α , et β (fig. II-3). Ce type d'élément servira de base à cette deuxième partie du travail .



Les deux premières simplifications de la formulation et les caractères de généralité des éléments isoparamétriques de volume à partir des hypothèses des théories des coques conduisent à des éléments très intéressants. Ils permettent en effet à priori le calcul des structures de formes quelconques et d'épaisseurs variables, la prise en compte de renforts éventuels, la liaison de structures minces et massives etc,...

La dernière simplification a été introduite ici pour des raisons liées au matériel utilisé : n'ayant à notre disposition qu'un micro-ordinateur, nous avons réduit à trois le nombre de degrés de liberté par noeud afin de rester dans des temps raisonnables de résolution. Ceci a pour conséquence que le comportement de la coque à étudier peut être représenté par le comportement d'un assemblage d'éléments plans (coques à facettes planes) et non celui d'une coque courbe. La coque courbe est ici remplacée par une coque en "carapace de tortue"

Le chapitre I rappelle la forme discrétisée des équations qui régissent ces problèmes.

Le chapitre II décrit de façon détaillée les éléments finis utilisés (expressions de la géométrie de l'élément et du champ de déplacement)

Le chapitre III indique tous les calculs complémentaires à effectuer pour préparer l'évaluation des matrices de raideur élémentaires : dérivées sur l'élément de référence, fonctions

d'interpolation, matrice du jacobien, coefficients de pondération affectés à la valeur de la fonction en chaque point de Gauss, la loi de comportement utilisée.

Le chapitre IV décrit l'organisation du programme de calcul par élément finis.

Le chapitre V, donne quelques exemples des surfaces représentées dans la première partie traitées par éléments finis.

CHAPITRE I

FORME DISCRETISEE DES EQUATIONS ET PRINCIPE DU CALCUL DE LA MATRICE DE RAIDEUR ELEMENTAIRE

I-I RAPPEL SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS [9]

FORMULATION ENERGETIQUE DES EQUATIONS GENERALES DE LA STATIQUE DES SOLIDES DEFORMABLES ELASTIQUE.

Soit un corps solide déformable schématisé (fig. II-4) de domaine V limité par la surface S (normale extérieure unitaire $\vec{n_j}$).



FIGURE II - 4

Les notations utilisées sont les suivantes :

u_i représente les composantes des déplacements d'un point u_i [x,y,z].

σ_{ii} sont les composantes du tenseur des contraintes.

E_{ii} sont les composantes du tenseur des déformations.

fi sont les composantes des forces de volume.

 ϕ_i sont les composantes des forces de surfaces imposées (conditions aux limites).

On appellera w_d l'énergie de déformation ou U_d :

$$2 \mathbf{U}_{\mathbf{d}} = 2 \mathbf{W}_{\mathbf{d}} = \int_{\mathbf{V}} \sigma_{\mathbf{I} \mathbf{j}} \varepsilon_{\mathbf{I} \mathbf{j}} d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} \{\sigma\}^{\mathsf{t}} \{\varepsilon\} d\mathbf{V} \qquad |\mathsf{I}-1|$$

On appellera w_f le travail des forces extérieures conservatives de surface et de volume :

$$2 W_{f} = \int_{V} f_{1} u_{1} dV + \int_{S} \phi_{1} u_{1} dS$$
$$= \int_{V} \{f\}^{t} \{u\} dV + \int_{S} \{\phi\}^{t} \{u\} dS \qquad II-2$$

Le principe d'Hamilton donne alors :

.

$$\delta \int_{\mathbf{v}} \{\sigma\}^{t} \{\epsilon\} d\mathbf{V} = \delta \int_{\mathbf{v}} \{\mathbf{f}\}^{t} \{\mathbf{u}\} d\mathbf{V} + \delta \int_{\mathbf{s}} \{\phi\}^{t} \{\mathbf{u}\} d\mathbf{S} \qquad \mathbf{I} \mathbf{I} - 3$$

Parmi tous les déplacements cinématiquement admissibles du système déformable, la solution réelle résulte de l'équation ci-dessus.

On n'a pas toujours des forces de surface ou volumiques qui dérivent d'une fonction de force. Dans ce cas, le principe résultant est celui du travail virtuel.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps déformable soit en équilibre est que le travail des forces extérieures soit égal au travail de déformation pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible $\{\delta u\}$.

$$\int_{\mathbf{V}} \{\sigma\}^{t} \{\delta \varepsilon\} d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} \{f\}^{t} \{\delta u\} d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{S}} \{\phi\}^{t} \{\delta u\} d\mathbf{S}$$

ou
$$\delta \mathbf{U}_{d} = \delta \mathbf{W}_{f}$$
$$\int_{\mathbf{V}} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\mathbf{V} = \int_{\mathbf{V}} \rho f_{i} \delta u_{i} d\mathbf{V} + \int_{\mathbf{S}} \phi_{i} \delta u_{j} d\mathbf{S} \qquad 11-4$$

Si l'on prend des sous-domaines ou Eléments finis, ces grandeurs vont se calculer sur chaque élément et s'additionner. Si, on a k éléments, :

$$\sum_{\mathbf{k}} \int_{\mathbf{V}_{\mathbf{k}}} \sigma_{1j}^{(\mathbf{k})} \delta \varepsilon_{1j}^{(\mathbf{k})} d\mathbf{V}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \int_{\mathbf{V}_{\mathbf{k}}} \rho f_{1}^{(\mathbf{k})} \delta u_{1}^{(\mathbf{k})} d\mathbf{V}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{k}}} \phi_{1}^{(\mathbf{k})} \delta u_{1}^{(\mathbf{k})} d\mathbf{S}_{\mathbf{k}}$$

La recherche d'une fonction de déplacement u continue est remplacée par la recherche d'un vecteur u_n , valeur approchée de u aux noeuds du maillage.

Sur chaque élément v_k , la fonction continue u_i est remplacée par son interpolée u_i^k ; la valeur interpolée à l'intérieur d'un élément ne dépend que de u_i : aux noeuds de cet élément.

On peut écrire :

$$\{ u^{(k)} \} = [N_k] \{ q_k \}$$

et $\{ \delta u^{(k)} \} = [N_k] \{ \delta q_k \}$

La définition des déformations $\mathcal{E}_{y} = \frac{1}{2} (u_{i}, j + u_{j}, i)$

donne { $\mathcal{E}^{(k)}$ } = [B_k] { q_k }

d'où {
$$\delta \epsilon^{(k)}$$
} = [B_k]{ δq_k }

la loi de comportement élastique s'écrit :

$$\{ \mathbf{O}^{(k)} \} = [\mathbf{D}] \{ \mathbf{E}^{(k)} \} = [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_k] \{ \mathbf{q}_k \}$$

En reportant ces diverses relations dans (II -4) :

$$\left[\left\{ \sum_{k} \int_{\mathbf{V}_{k}} [\mathbf{B}]_{k}^{t} [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]_{k}^{d} \mathbf{V}_{k} \right\} \left\{ \mathbf{q}_{k} \right\} \right] \left\{ \delta \mathbf{q}_{k} \right\} = \left[\sum_{k} \int_{\mathbf{V}_{k}} \{\mathbf{f}\}^{t} [\mathbf{N}]_{k}^{d} \mathbf{V}_{k} \right] \left\{ \delta \mathbf{q}_{k} \right\}$$
$$+ \left[\sum_{k} \int_{\mathbf{q}_{k}} \{\phi\}^{t} [\mathbf{N}]_{k}^{d} \mathbf{S}_{k} \right] \left\{ \delta \mathbf{q}_{k} \right\}$$

93

Posons :

.

. . .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{k}} \int_{\mathbf{V}_{\mathbf{k}}} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix}_{\mathbf{k}}^{t} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix}_{\mathbf{k}} \mathbf{d} \mathbf{V}_{\mathbf{k}}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{k}} \int_{\mathbf{V}_{\mathbf{k}}} \left\{ \mathbf{f} \right\}^{t} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \end{bmatrix}_{\mathbf{k}} \mathbf{d} \mathbf{V}_{\mathbf{k}}$$
$$\begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix} = \sum_{\mathbf{k}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{k}}} \left\{ \phi \right\}^{t} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \end{bmatrix}_{\mathbf{k}} \mathbf{d} \mathbf{S}_{\mathbf{k}}$$

Cette définition nous donne simultanément l'assemblage.

Le principe d'Hamilton est équivalent à :

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathsf{K} \end{bmatrix} \left\{ \mathsf{q}_{\mathsf{k}} \right\} - \left(\begin{bmatrix} \mathsf{f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix} \right) \right\} \left\{ \delta \mathsf{q}_{\mathsf{k}} \right\} = 0$$

et l'équilibre du corps déformable est donnée par l'équation classique :

$$[K] \{q\} = [F]$$
 II-5

La résolution consiste à déterminer le vecteur $\{q\}$ des déplacements inconnus d'un point quelconque d'une structure sollicité de façon statique.

I-2 PRINCIPE DE CALCUL DE LA MATRICE DE RAIDEUR ELEMENTAIRE

Les équations discrétisées régissant le comportement statique élastique de toute structure discrétisée également, peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\{F\} = [K] \{q\}$$
 II-6

Où $\{F\}$ est le vecteur des forces ponctuelles extérieures appliquées ou la discrétisation des forces réparties de volume ou de surface.

{q} représente les composantes w, α et β de déplacements de tous les noeuds de l'ensemble de la structure.

et [K] est la matrice de raideur globale de la structure élastique.

La matrice de raideur globale résulte donc de l'assemblage des matrices de raideur élémentaires évaluées par :

$$[K]_{k} = \int_{V_{k}} [B]_{k}^{t} [C] [B]_{k} dV_{k} \qquad II-7$$

[C] est la matrice de comportement élastique du matériau

La loi de comportement relie contraintes et déformations de la manière suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{\mathbf{x}} \\ \sigma_{\mathbf{y}} \\ \sigma_{\mathbf{x} \mathbf{y}} \\ \sigma_{\mathbf{y} \mathbf{z}} \\ \sigma_{\mathbf{z} \mathbf{x}} \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{\mathbf{x}} \\ \varepsilon_{\mathbf{y}} \\ \gamma_{\mathbf{x} \mathbf{y}} \\ \gamma_{\mathbf{y} \mathbf{z}} \\ \gamma_{\mathbf{z} \mathbf{x}} \end{bmatrix}$$
 $\mathbf{11 - 8$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{55} \end{bmatrix}$$

[B] est représentatif du taux de déformations compte tenu d'une hypothèse de pondération liant le déplacement d'un point quelconque de l'élément aux déplacement de ses noeuds

 $({\mathbf{E}^k} = [\mathbf{B}_k] {q_k}).$

avec

Dans notre travail, nous montrerons au chapitre II qu' en un point M de l'élément, de coordonnées x, y, z, et de composantes de déplacement w, β , et α , le vecteur de déplacement {u} peut s'exprimer relativement aux déplacements des noeuds ui de l'élément, par l'intermédiaire de fonctions d'interpolation N_i de degrés plus ou moins élevés selon la "richesse" des éléments finis utilisés.

Nous montrerons au chapitre II que pour le type d'élément choisi, et en utilisant des fonctions d'interpolation N_i , le déplacement d'un point quelconque de l'élément s'écrit de la façon suivante :

II-10

Ces fonctions N_i seront explicitées pour des éléments de coque à surface moyenne à quatre, neuf et seize noeuds.

 $[B]_k$ sera alors directement déduit du déplacement et des rotations grâce aux lois de la mécanique des milieux continus.



avec

	0	$z \frac{\partial}{\partial x}$	0
	0	0	$-z\frac{\partial}{\partial y}$
[D] =	0	$z \frac{\partial}{\partial y}$	$-z\frac{\partial}{\partial x}$
	d d	0	-1
	<u>6</u>	1	0

et

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 0, 0, \dots, 0, \mathbf{N}_{1}, \mathbf{N}_{2}, \dots, \mathbf{N}_{n}, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, \mathbf{N}_{1}, \mathbf{N}_{2}, \dots, \mathbf{N}_{n} \\ \mathbf{N}_{1}, \mathbf{N}_{2}, \dots, \mathbf{N}_{n}, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}$$

n est le nombre de noeuds par élément et de ce fait la matrice d'interpolation des déformations est la suivante :

$$[B(x,y,z)]_{k} = [D] [N(x,y,z)]$$
 II -11

Cette matrice sera explicitée au chapitre III.

CHAPITRE II

PREPARATION DES ELEMENTS FINIS UTILISES.

Trois types d'éléments isoparamétriques ont été introduits dans ce travail:

- 1. Elément linéaire (quatre noeuds).
- 2. Elément quadratique complet (neuf noeuds).
- 3. Elément cubique complet (seize noeuds)

II-1. EXPRESSION DE LA GEOMETRIE DE L'ELEMENT

La coque est discrétisée à l'aide d'éléments de volume tels que E'.



FIGURE II - 5.

Pour systématiser l'évaluation des intégrales donnant la raideur élémentaire, nous allons faire appel à un élément de référence sur lequel les calculs seront facilités.

On approxime la géométrie de l'élément réel E' de coque en considérant un élément E dit de référence défini à partir des coordonnées cartésiennes d'un certain nombre de points i de E' et de fonctions d'interpolation N_i permettant de déterminer tout autre point de l'élément à partir de celles-ci.



FIGURE II - 6.

Grâce à une transformation géométrique, nous remplaçons la définition analytique de chaque élément réel par la définition analytique plus simple de son élément de référence.

La géométrie de l'élément de référence E est défini alors de la manière suivante :

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^{NPE} \mathbf{N}_{I} (\xi, \eta, \zeta) \mathbf{x}_{I}$$
$$\mathbf{y} = \sum_{I=1}^{NPE} \mathbf{N}_{I} (\xi, \eta, \zeta) \mathbf{y}_{I}$$
$$II - 12$$

 $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{N}_{i} (\xi, \eta, \zeta) \mathbf{z}_{i}$

où

 ξ , η et ζ sont les de coordonnées curvilignes variant entre -1 et +1 sur les faces respectives de l'élément.

x_i, y_i et z_i sont les coordonnées cartésiennes des points i. NPE est le nombre de noeud de l'élément.

 $Ni(\xi,\eta,\zeta)$ représentent les fonctions d'interpolation, fonction des coordonnées ξ, η et ζ d'un point de l'élément de référence E.

Ces fonctions prennent la valeur 1 au noeud i, la valeur Ø pour tous les autres noeuds. Elles sont telles qu'elles assurent la compatibilité avec les éléments voisins. Elles permettent de passer des coordonnées intrinsèques 5, n, 5 aux coordonnées X, y, z.

Les équations (II-12) peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{cases} = \sum_{I=1}^{NPE} N_{I}(\xi, \eta, \zeta) \begin{cases} \mathbf{x}_{I} \\ \mathbf{y}_{I} \\ \mathbf{z}_{I} \end{cases}$$
 II - 13

Les relations (II-13) définissent, pour l'élément E de référence, la transformation correspondante entre les coordonnées cartésiennes x, y, z et les coordonnées curviglines ξ, η, ζ.



(A)



-1, -1, +1

Domaine de définition des coordonnées curvilignes

(B)

FIGURE II - 7.

Nous utiliserons des éléments finis isoparamétriques. Ce sont des éléments tels que les fonctions d'interpolation servent à la fois à définir les déplacements d'un point quelconque en fonction des déplacement des noeuds, et à écrire la transformation qui permet de passer d'un élément de référence à l'élément réel. Tout est alors ramené sur l'élément de référence.

Pour notre application, nous pouvons considérer que la structure est discrétisée de manière satisfaisante avec des éléments dont les sections dans l'épaisseur sont générées par une droite.



L'approximation géométrique de l'élément de référence E peut alors être définie à l'aide des coordonnées cartésiennes de points i_{sup} et i_{inf}, appartenant respectivement aux faces supérieures et inférieures de l'élément, de la manière suivante :



où les points i_{sup} , i_{inf} et i ont respectivement les coordonnées curvilignes suivantes :

$$\begin{split} & i_{sup} \left(\xi_{l'} \eta_{l'} + 1 \right); \\ & i_{lnf} \left(\xi_{l'} \eta_{l'} - 1 \right); \\ & i \left(\xi_{l'} \eta_{l'} 0 \right). \end{split}$$

Compte tenu de la formule précédente, nous pouvons écrire les fonctions d'interpolation N_i (ξ, η, ζ) sous la forme suivante :

$$N_{|_{\mathfrak{sup}}}(\xi,\eta,\zeta) = N_{|}(\xi,\eta) \quad \frac{1+\zeta}{2}$$
$$N_{|_{\mathfrak{sup}}}(\xi,\eta,\zeta) = N_{|}(\xi,\eta) \quad \frac{1-\zeta}{2}$$

où $N_i(\xi,\eta)$ représente les fonctions d'interpolation des coordonnées ξ, η d'un point i appartenant à la surface moyenne de l'élément de référence.

Ces fonctions d'interpolation seront données au chapitre III.

La relation (II-14) peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{cases} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{NPE}} \mathbf{N}_{\mathbf{i}} (\xi, \eta) \begin{cases} \mathbf{x}_{\mathbf{i}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{i}} \\ \mathbf{z}_{\mathbf{j}} \end{cases} + \frac{\zeta}{2} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{NPE}} \mathbf{N}_{\mathbf{i}} (\xi, \eta) \begin{pmatrix} \left[\mathbf{x}_{\mathbf{i}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{i}} \right] \\ \mathbf{z}_{\mathbf{j}} \\ \mathbf{z}_{\mathbf{z}_{\mathbf{j}} \\ \mathbf{z}_{\mathbf{j}} \\ \mathbf{z}_{\mathbf{z}_{\mathbf{j}} \\ \mathbf{z}_{\mathbf{z}_{\mathbf{j}}} \\ \mathbf{z}_{\mathbf{z}_{\mathbf{j}}} \\ \mathbf{z}_{\mathbf$$

La surface moyenne de l'élément de référence peut être définie par l'équation (II-15) si $\zeta = 0$ et elle s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{X} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{cases} = \sum_{\mathbf{I}=1}^{\mathbf{NPE}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}} (\xi, \eta) \begin{cases} \mathbf{X}_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{y}_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{z}_{\mathbf{I}} \end{cases} \mathbf{I} \mathbf{I} - 16$$

où x_i , y_i et z_i représentent les coordonnées cartésiennes du point i appartenant à la surface moyenne de l'élément réel.

II-2. EXPRESSION DU CHAMP DE DEPLACEMENT

Pour écrire le champ de déplacement, on utilise l'hypothèse suivante :

Toute normale à la surface moyenne reste droite après déformation, mais n'est plus forcément normale à la surface moyenne déformée (hypothèses cinématiques de Hencky-Mindlin) [24].

Compte tenu de cette hypothèse, le déplacement d'un point quelconque M d'élément peut s'exprimer à l'aide du déplacement des points i_{sup} et i_{inf} , appartenant respectivement aux faces supérieures et inférieures de l'élément par un procédé et des relations analogues à ceux utilisés pour l'expression de la géométrie de l'élément. Nous aurons ainsi un élément isoparamétique.



où u_i, v_i et w_i représentent les composantes du déplacement des noeuds i.

 $N_i(\xi,\eta)$ représentent les fonctions d'interpolation des coordonnées ξ , η d'un point i appartenant à la surface moyenne de l'élément. Avec le même processus que celui utilisé pour la définition de géométrique (II-15), on obtient pour le champ du déplacement.:



Considérons au niveau du noeud i, un repère local orthonormé V_{1i} , V_{2i} et V_{3i} ; où V_{3i} est le vecteur unitaire normal à la surface moyenne, V_{1i} et V_{2i} représentent les deux vecteurs tangents à cette surface moyenne.

z; est l'épaisseur de la coque au point i.



FIGURE II - 9.

Soient α_i et β_i les valeurs algébriques des rotations de la normale à la surface moyenne V_{3i} autour des vecteurs V_{1i} et V_{2i} .

Nous supposons que les rotations α_i et β_i sont suffisamment petites pour que l'on puisse écrire dans le repère local, les relations suivantes :



оù

 $\{u_i, v_i, w_i\}^t_{isup}$ et $\{u_i, v_i, w_i\}^t_{iinf}$ représentent les composantes du déplacement des points i_{sup} et i_{inf} dans le repère local V_{1i}, V_{2i}, V_{3i} .

Dans le repère global, nous avons :



où les v_{jk}^{i} représentent la composante suivant l'axe k du repére global, du vecteur v_{ij}^{i} (cosinus directeurs).

104

Compte tenu de l'expression (II-20), avec $u_i = v_i = 0$ nous pouvons approximer le champ de déplacement au moyen de la forme matricielle suivante:

(u)	0	z _I N _I	0	w 1	
$\left\{ \mathbf{v} \right\} = \sum_{i=1}^{NPE}$	0	0	– z ₁ N ₁	$\left\{ \beta_{1} \right\}$	11-21
(w)	N	0	0	$\left[\alpha_{1}\right]$	

Le déplacement d'un point quelconque de l'élément s'exprime donc à l'aide d'une composante du déplacement du noeud i, et des deux rotations de la normale à la surface moyenne en ce même noeud i.

 w_i, α_i et β_i sont les trois déplacements généralisés (degrés de liberté) du noeud i.

D'après la relation (II-19), nous avons alors :



Les relations (II-18) peuvent alors s'écrire sous la forme suivante:



Cette relation permet d'exprimer le déplacement d'un point quelconque de l'élément de référence E à l'aide des trois composantes du déplacement des noeuds i, et des deux rotations de la normale à la surface moyenne en ces mêmes noeuds i.

Dans ce travail, utilisant des éléments de plaque plane nous considérons que le calcul du déplacement d'un point quelconque de l'élément peut s'exprimer à l'aide d'une composante du déplacement des noeuds i, et des deux rotations de la normale à la surface moyenne en ces mêmes noeuds i.

Ce type d'élément correspond au cas d'une plaque plane pour laquelle les phénomènes de membrane et de flexion sont supposés découplés, ce qui nous permet de considérer uniquement les phénomènes de flexion ($u_i = v_i = 0$). On aboutit ainsi à un élément isoparamétrique de plaque en flexion à NPE noeuds avec trois DDL par noeud (w_i, α_i, β_i).

1

108

CHAPITRE III

PREPARATION DU CALCUL AUTOMATIQUE DE CHAQUE MATRICE DE RAIDEUR ELEMENTAIRE SUR L'ELEMENT DE REFERENCE

La matrice de rigidité élémentaire doit être calculée en axes globaux pour pouvoir effectuer l'assemblage ultérieurement. Cette matrice est donnée par la relation (II-7) sur l'élément réel :

$$[K] = \int_{K} \left[B_{k}(x, y, z) \right]^{t} [C] \left[B_{k}(x, y, z) \right] dx dy dz$$

et sur l'élément de référence par

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[B_{k}(\xi, \eta, \zeta) \right]^{t} [C] \left[B_{k}(\xi, \eta, \zeta) \right] det[J] d\xi d\eta d\zeta |I| - 22$$

où on aura tenu compte de la transformation de [B], dans le passage sur l'élément de référence.

$$\begin{bmatrix} B(x, y, z) \end{bmatrix}_{k} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(x, y, z) \end{bmatrix}_{k}$$

III-1. EXPRESSION DES DERIVEES SUR L'ELEMENT DE REFERENCE

Pour intégrer le changement de variables, nous devons calculer les dérivées nécessaires sur l'élément de référence grâce au Jacobien J de la transformation donnée par (II-13).

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial \xi} \\
\frac{\partial}{\partial \eta} \\
\frac{\partial}{\partial \zeta}
\end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \end{bmatrix}
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}
\end{cases}$$

$$\mathbf{I} = 23$$

1	0	9
-	-	-

ou				
	<u> </u>	<u> </u>	<u>तेष्ट</u> २६	
[J] =	<u> त्र</u>	<u>θ</u> γ	∂ z	
	$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta}$	<u> </u>	$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \zeta}$	

	$\left[\left(\sum_{i=1}^{NPE\partial N_{i}} \frac{1}{\partial \xi} \mathbf{x}_{i}\right)\right]$	$\left(\sum_{I=1}^{NPE} \frac{\partial N_{I}}{\partial \xi} \mathbf{y}_{I}\right)$	$\left(\sum_{I=1}^{NPE\partial N_{I}} \overline{\partial \xi} \mathbf{z}_{I}\right)$
J] =	$\left(\sum_{I=1}^{NPE\partial N_{I}} \overline{\partial \eta} \mathbf{x}_{I}\right)$	$\left(\sum_{I=1}^{NPE \partial N_{I}} \overline{\partial \eta} \boldsymbol{y}_{I}\right)$	$\left(\sum_{I=1}^{NPE\partial N_{I}} \overline{\partial \eta} \mathbf{z}_{I}\right)$
	$\left(\sum_{l=1}^{NPE\partial N_{l}} \mathbf{x}_{l}\right)$	$\left(\sum_{I=1}^{NPE\partial N_{I}} \frac{\partial V_{I}}{\partial \zeta} \mathbf{y}_{I}\right)$	$\left(\sum_{j=1}^{NPE\partial N_{j}} \frac{z_{j}}{\partial \zeta} z_{j}\right)$

Finalement :



A partir des relations précédentes, on obtient les dérivées des déplacements :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \end{cases} = \left[\mathbf{J} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} \end{array} \right\} = \left[\mathbf{J} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} \end{array} \right\} = \left[\mathbf{J} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \zeta} \end{array} \right\} \left\{ \mathbf{z}_{1} \beta_{1} \right\}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} = [\mathbf{J}]^{-1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \right\} = [\mathbf{J}]^{-1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}^{\mathsf{t}}}{\partial \mathbf{n}} \right\} \left\{ -\mathbf{z}_{\mathsf{I}} \alpha_{\mathsf{I}} \right\}$$

et







où $[J]^{-1}$ est l'inverse de la matrice Jacobienne [J] et z_i est l'épaisseur de l'élément.

110

112

III-2. EXPRESSION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE SUR L'ELEMENT DE REFERENCE

Sur l'élément réel l'expression B_k (ξ , η , ζ) devient sur l'élément de référence :



[C] représente la matrice de comportement du matériau élastique isotrope. Cette matrice sera donnée au paragraphe (III-5)

J représente la matrice du jacobien.

III-3. CALCUL DE LA MATRICE DE RAIDEUR ELEMENTAIRE

Le calcul de l'intégrale définissant la raideur est faite en utilisant la méthode de Gauss. Dans cette méthode, l'intégrale peut être évaluée exactement en utilisant la formule de discrétisation classique.

$$[K] = \sum_{I=1}^{NPG} \sum_{J=1}^{NPG} \sum_{K=1}^{NPG} W_{I} W_{J} W_{K} [B]^{t} [C] [B] [J]$$
 II-26

où NPG représente le nombre des points Gauss dans les directions ξ , η et ζ respectivement.

On donne ci-dessous, le schéma du nombre de points d'intégration de Gauss utilisé dans chaque élément selon les directions ξ , η et ζ , respectivement.

FLEMENT	Nombre de points d'integration				
	2	2	2		
	3	3	2		
	4	4	2		

 W_I , W_J et W_K représentent les coefficients de pondération (ou poids) affectés à la valeur de la fonction en chaque point de Gauss.

113

On donne ci-dessous, la position des points d'intégration de Gauss et les coefficients de pondération correspondants.

TYPE -	NOMBRE DE	POINTS	14/ 14/ 14/
D'ELEMENT	POINTS D'INTEGR.	ξ, η, ζ	1, "J," K
· .			
1. LINEAIRE	2 * 2	+ 0.57735027	1.00000000
2. QUADRATIQUE	3*3	+ 0.77459667	0,55555555
		0.0000000	0.88888888
3. CUBIQUE	4 • 4	+ 0.86113631	0.34785485
	t.	+ 0.33998104	0.65214516

III-4. FONCTIONS D'INTERPOLATION

Les fonctions d'interpolation linéaire, quadratique et cubique de type lagrange sont utilisées pour définir la position géométrique et le déplacement d'un point quelconque de l'élément

L'expression de ces fonctions peut s'écrire sous la forme suivante :

III-4-1. Elément linéaire (4 noeuds par élément)

Dans cette étude, l'élément et la numérotation de ces noeuds sont rappelés ci-dessous :

Le déplacement à chaque noeud a trois composantes (w, α , β). Les douze composantes aux noeuds de l'élément sont regroupées pour former le vecteur {q} (voir équation II-1-6).

 $\{q\}^t = \{w_1, w_2, w_3, w_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}^t$



FIGURE II - 10

Les fonctions d'interpolation correspondant à la transformation élément réel - élément de référence sont les suivantes :

 $N_{1} = 1/4 (1 - \xi) (1 - \eta)$ $N_{2} = 1/4 (1 + \xi) (1 - \eta)$ $N_{3} = 1/4 (1 - \xi) (1 - \eta)$ $N_{4} = 1/4 (1 + \xi) (1 + \eta)$

Les N_i sont des fonctions d'interpolation de Serendip ou de Lagrange du noeud i.

III-4-2. Elément quadratique complet de Lagrange (9 noeuds par élément)

On rappelle ci-dessous, l'élément et la numérotation de ses noeuds :

Les vingt sept composantes aux noeuds de l'élément sont regroupées pour former le vecteur {q} (voir équation II-6).

 $\{q\}^t = \{w_1, w_2, \dots, w_9, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9, \beta_1, \beta_2, \beta_9\}^t$



116



4

FIGURE II -11.

Les fonctions d'interpolation correspondant à la transformation élément réel - élément de référence sont les suivantes :

$$N_{1} = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \xi \eta$$

$$N_{2} = -\frac{1}{2} (1 - \xi^{2}) (1 - \eta) \eta$$

$$N_{3} = -\frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \xi \eta$$

$$N_{4} = -\frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^{2}) \xi$$

$$N_{5} = (1 - \xi^{2}) (1 - \eta^{2})$$

$$N_{6} = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^{2}) \xi$$

$$N_{7} = -\frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \xi \eta$$

$$N_{8} = \frac{1}{2} (1 - \xi^{2}) (1 + \eta) \eta$$

$$N_{9} = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \xi \eta$$

Les N_i sont les fonctions d'interpolation quadratique de Lagrange du noeud i.

III-4-3. Elément cubique complet de Lagrange (16 noeuds par élément)

On rappelle ci-dessous, l'élément et la numérotation de ses noeuds :



FIGURE II - 12

Les quarante huit composantes aux noeuds de l'élément sont regroupées pour former le vecteur {q} (voir équation II-6)

 $\{q\}^{t} = \{ w_1, w_2, \dots, w_{16}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{16}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{16} \}$

Les fonctions d'interpolation correspondant à la transformation élément réel- élément de référence sont les suivantes :

$$N_{1} = 1/256 (1 - \xi) (1 - 9 \xi^{2}) (1 - \eta) (1 - 9 \eta^{2})$$

$$N_{2} = -9/256 (1 - \xi^{2}) (1 - 3 \xi) (1 - \eta) (1 - 9 \eta^{2})$$

$$N_{3} = -9/256 (1 - \xi^{2}) (1 + 3 \xi) (1 - \eta) (1 - 9 \eta^{2})$$

$$N_{4} = 1/256 (1 + \xi) (1 - 9 \xi^{2}) (1 - \eta) (1 - 9 \eta^{2})$$

$$N_{5} = -9/256 (1 - \xi) (1 - 9 \xi^{2}) (1 - \eta^{2}) (1 - 3 \eta)$$

 $N_{6} = 81/256 (1 - \xi^{2}) (1 - 3\xi) (1 - \eta^{2}) (1 - 3\eta)$ $N_{7} = 81/256 (1 - \xi^{2}) (1 + 3\xi) (1 - \eta^{2}) (1 - 3\eta)$ $N_{8} = -9/256 (1 + \xi) (1 - 9\xi^{2}) (1 - \eta^{2}) (1 - 3\eta)$ $N_{9} = -9/256 (1 - \xi) (1 - 9\xi^{2}) (1 - \eta^{2}) (1 + 3\eta)$ $N_{10} = 81/256 (1 - \xi^{2}) (1 - 3\xi) (1 - \eta^{2}) (1 + 3\eta)$ $N_{11} = 81/256 (1 - \xi^{2}) (1 + 3\xi) (1 - \eta^{2}) (1 + 3\eta)$ $N_{12} = -9/256 (1 + \xi) (1 - 9\xi^{2}) (1 - \eta^{2}) (1 + 3\eta)$ $N_{13} = 1/256 (1 - \xi^{2}) (1 - 3\xi) (1 - \eta^{2}) (1 + 3\eta)$ $N_{14} = -9/256 (1 - \xi^{2}) (1 - 3\xi) (1 - \eta^{2}) (1 - 9\eta^{2})$ $N_{15} = -9/256 (1 - \xi^{2}) (1 - 3\xi) (1 + \eta) (1 - 9\eta^{2})$ $N_{16} = 1/256 (1 + \xi) (1 - 9\xi^{2}) (1 + \eta) (1 - 9\eta^{2})$

Les $N_{i} \; \text{sont} \; \text{les} \; \text{fonctions} \; \text{d'interpolation} \; \text{cubique} \; \text{de} \; \text{Lagrange} \; \text{du} \; \text{noeud} \; i.$

III-5. EXPRESSION DE LA LOI DE COMPORTEMENT UTILISEE

Le tenseur des contraintes σ_{ij} en un point d'un solide élastique est représenté par la matrice des composantes du tenseur des contraintes

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & SYM & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

119

Cette matrice est symétrique et comporte donc six composantes indépendantes. Cet état de contrainte peut être représenté par un vecteur à six composantes,

 $[\sigma]^{t} = [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{13}]$

De la même façon, l'état de déformation en un point d'un solide élastique est représenté par la matrice des composantes du tenseur des déformations

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11} & \boldsymbol{\varepsilon}_{12} & \boldsymbol{\varepsilon}_{13} \\ & \boldsymbol{\varepsilon}_{22} & \boldsymbol{\varepsilon}_{23} \\ & & & \\$$

Cette matrice est également symétrique et comporte six composantes indépendantes. Cet état de déformation peut également être représenté par un vecteur à six composantes

 $\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{13} \end{bmatrix}$

La loi de comportement relie contraintes et déformations de la façon suivante :

$$\sigma = C \epsilon$$
 II-27

Pour un matériau isotrope élastique en contraintes planes, la loi de Hooke donne une matrice C liant contraintes et déformations sous la forme ci-après :

	1	$\frac{1}{1-v}$	$\frac{0}{1-v}$	0	0	0
	$\frac{\upsilon}{1-\upsilon}$	1	$\frac{\upsilon}{1-\upsilon}$	0	0	0
$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{E}(1-\upsilon)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}$	$\frac{\upsilon}{1-\upsilon}$	$\frac{\upsilon}{1-\upsilon}$	1	0	0	0
	0	0	0	$\frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)}$	0	0
	0	0	0	0	$\frac{1-2v}{2(1-v)}$	<u>)</u> 0
	o	0	0	0	0	$\frac{1-2\upsilon}{2(1-\upsilon)}$

Pour les éléments utilisés ici nous avons pris comme hypothèse que : Les contraintes normales σ_{33} agissant sur des surfaces parallèles à la surface moyenne sont petites et négligeables devant toutes les autres contraintes (Deuxième hypothèse de Kirchoff-Love).

Compte tenu de cette hypothèse, nous pouvons interpréter très simplement en écrivant

 $\sigma_{33} = 0$

En un point quelconque M, la relation entre les composantes du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations peut alors s'écrire sous la forme suivante :

 $\{\sigma^1\} = \{C^1\} \{\varepsilon^1\}$

soit :



CHAPITRE IV

ORGANISATION DU PROGRAMME

Le but de ce chapitre est de présenter le programme de calcul par élément finis pour déterminer les déplacements d'un point quelconque de la surface réelle. La construction de ce programme nous permet de mettre en oeuvre la méthode des éléments finis sur micro-ordinateur. Ce programme est écrit en FORTRAN 77. On trouvera le listing en ANNEXE B-2. Pour la compréhension, on trouvera un organigramme simplifié à la page suivante.

Les données du problème sont les suivantes :

- . * Module d'élasticité E
- * Coefficient de poisson u
- * Epaisseur de l'élément T
- * Les composantes des forces extérieures appliquées F

Les inconnues à déterminer sont le déplacement w et les rotations α et β en chaque noeud.

IV-1. VARIABLES UTILISEES

4 1

On peut utiliser trois types d'éléments dans ce code : des quadrilatères à quatre, neuf et seize noeuds. Le type d'élément est spécifié par la variable NPE (nombre de noeuds par élément).

* Le nombre total d'éléments du maillage est indiqué par la variable NEL (nombre d'éléments).

* Le nombre total de noeuds du maillage est précisé par la variable NPT (nombre de points).

* La matrice de connectivité de chaque élément est indiquée par la variable NOD(I,J) (tous les noeuds J de l'élément I).

* Les coordonnées globales de chaque direction sont indiquées par les variables X(I),Y(I) et Z(I), respectivement.



2. Pour les éléments quadratiques complets à neuf noeuds :



La matrice de connectivité {NOD(I,J)} et le nombre total de noeuds du maillage (NPT) sont générés automatiquement par le sous programme AUTO, qui demande d'entrer :

* Le nombre d'éléments selon les directions u (variable NEU) et v (variable NEV), respectivement.

Ce sous programme AUTO peut être utilisé pour discrétiser le domaine rectangulaire par éléments rectangulaires linéaires (quatre noeuds), quadratiques (neuf noeuds) et cubiques (seize noeuds).

Les systèmes de numérotation globale et locale des noeuds sont donnés dans la figure suivante :

1. Pour les éléments linéaires à quatre noeuds :



Figure IV - 1





3. Pour les éléments cubiques complets à seize noeuds :



FIGURE IV - 3.

IV-2. APPLICATION DES CONDITIONS AUX LIMITES

L'imposition de conditions aux limites entraîne la modification des termes de la matrice [K] et du vecteur $\{F\}$ correspondant aux DDL bloqués q_i . Ceci a pour conséquence de réduire le nombre des inconnues du système. On considére l'équation sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \cdots & \mathbf{K}_{1n} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \cdots & \mathbf{K}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1} \cdots & \mathbf{K}_{n2} & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{I} \mathbf{I} - 29$$

Supposons que $q_2 = \alpha$ soit imposé. La matrice est alors modifiée de la façon suivante :

$$K_{22} = 1, F_2 = \alpha$$
 et $K_{2i} = K_{i2} = 0$ pour $i = 2$ $(i = 1, 3, ..., n)$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{33} & \dots & \mathbf{K}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n3} & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1} \\ \mathbf{q}_{2} \\ \mathbf{q}_{3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{1} \\ \mathbf{\alpha} \\ \mathbf{F}_{3} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{n} \end{bmatrix}$$

où
$$F'_i = F_i - \alpha K_{i2}$$
 avec $i = 1, 3, 4, 5, \dots, i = 2$

Dans le cas général, si $q_k = \alpha$ est imposé, nous avons donc :

$$K_{kk} = 1$$
; $F_k = \alpha$
 $F'_i = F_i - \alpha K_{ik}$
où $i = 1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n$ $i = k$

L'introduction des conditions aux limites est effectuée dans le sous programme COND. qui demande :

1. Le nombre de DDL connus ou imposés (variable NDC)

2. Les numéros de ces DDL connus {variable (IBF(I), I = 1,NDC)}

3. Le vecteur des valeurs correspondantes des DDL connus {variable (VBF(I), I=1,NDC)}.

Les DDL connus correspondent aux composantes du déplacement w et des rotations α et β connus.

IV-3. CHARGES EXTERIEURES

Le programme a besoin de connaître les sollicitations extérieures agissant sur le système. Il faut alors entrer ces grandeurs connues différentes de zéro et donner :

1. Le nombre de variables du second membre non nulles (forces appliquées) (Variable NSF)

2. Les numéros des variables du second membre non nulles $\{variable (ISF (I), I = 1, NSF)\}.$

3. Le vecteur des valeurs correspondant aux forces non nulles {variable (VSF (I), I = 1, NSF)}.

Ces variables du second membre non nulles correspondent aux forces ponctuelles extérieures appliquées ou la discrétisation des forces réparties de volume ou de surface.

IV-4. TRIANGULARISATION DE LA MATRICE [K] ET RESOLUTION DU PROBLEME

La matrice élémentaire [K] à m lignes et n colonnes est reliée au vecteur colonne des charges extérieures $\{F\}$ par la relation II- 6.

La résolution consiste à déterminer les inconnues $\{q\}$ par utilisation de la méthode de GAUSS. Cette méthode s'effectue en deux étapes :

IV-4-1. Triangularisation

La triangularisation consiste à transformer le système d'équation (II-6) en un système traingulaire supériur :

 $[0 \setminus S] \{q_n\} = \{F'\}$ II-30

La triangularisation avec la méthode de GAUSS consiste à éliminer successivement les inconnues $\{q_i\}$, $i=1,\,2,...,$ n-1 dans les équations i+1 à n.

La description de cette méthode sera donnée en ANNEXE B-1.

Après triangularisation, on obtient en effet une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1n} \\ 0 & \mathbf{K}_{22}^{1} & \cdots & \mathbf{K}_{2n}^{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{33}^{2} & \cdots & \mathbf{K}_{3n}^{2} \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_{mm}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_{nn}^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1} \\ \mathbf{q}_{2} \\ \mathbf{q}_{3} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{m} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{m} \\ \mathbf{k}_{m}^{m} \\ \mathbf{k}_{m}^{m-1} \\ \mathbf{k}_{m}^{m-1} \\ \mathbf{k}_{m}^{m-1} \end{bmatrix}$$

ou

$$\left[0 \setminus \mathbf{K}^{n-1}\right] \{\mathbf{q}_n\} = \left\{ \mathbf{F}^{n-1} \right\}$$

129

soit

$$[0 \setminus S] \{q_n\} = \{F'\}$$
 II-31

IV-4-2. Résolution du système triangulaire ou substitution arrière

Le calcul des variables inconnues q_n , q_{n-1} q_2 à partir de la dernière ligne s'appelle substitution arrière. La résolution de l'équation II-31 sera explicitée en ANNEXE B-1.
CHAPITRE V

QUELQUES EXEMPLES TRAITES

CHAPITRE V

EXEMPLES TRAITES

Dans les exemples illustrant la première partie, nous nous sommes attachés à visualiser des surfaces tridimensionnelles absolument quelconques en utilisant les deux méthodes présentées.

On peut maintenant étudier leur comportement mécanique linéaire sous l'influence de charges statiques ou à variation lente avec utilisation de la méthode des éléments finis.

Nous traitons ci-après des exemples en utilisant des éléments linéaires à quatre noeuds, quadratiques complets à neuf noeuds et cubiques complets à seize noeuds.

1). On valide d'abord le programme d'éléments finis par comparaison avec des résultats de la littérature :

1-1. plaque plane.

1-2. quart de cylindre.

2). On donne ensuite quelques exemples de déformées d'une coque de forme quelconque.

V-1 VALIDATION DU PROGRAMME

Pour valider le programme de calcul par éléments finis, nous traitons ci-après la représentation obtenue dans la littérature.[26].

Dans cette représentation, nous allons faire appel aux deux éléments ci-dessous sur lesquels les calculs seront facilités.

- Plaque plane
- quart de cylindre.
- V-1-1. Elément plaque plane.

On considère une plaque carrée simplement appuyée (Figure V1) à un chargement uniforme avec les caractéristiques des matériaux suivantes :



FIGURE V1

- longueur de la plaque (l) = 10 in
- épaisseur de la plaque (t) = 0.1 in
- Module d'Young du matériau considéré (E) =106 lb/in²
- le coefficient de Poisson v = 0.3

Compte tenu des symétries géométriques et du chargement, nous pouvons traiter un quart de plaque pour résoudre le problème. Pour l'élément linéaire à quatre noeuds, on représente les quatre éléments du maillage (figure V2).



FIGURE V2

Le nombre de noeud par élément (NPE) = 4 Le nombre total des éléments (NEL) = 4

L'introduction des conditions aux limites correspondant aux DDL (trois degrés de liberté par noeud) peut s'écrire:

- Le nombre de DDL connus ou imposés (NDC) = 15

- Les numéros de ces DDL connus :

(IBF) = (2,3,6,7,9,11,16,18,19,20,22,23,25,26,27)

- Le vecteur des valeurs corrépondantes des DDL connus est zéro.

Les charges extérieures peuvent s'écrire de la manière suivante :

- Le nombre de variables du second membre non nulles (forces appliquées) (NSF) = 4

- Les numéros des variables du second membre non nulles sont :

 $\{ ISF \} = \{ 1,4,10,13 \}$

- Le vecteur de valeurs correspondant aux forces non nulles est :

 $\{ VSF \} = \{ 156.25, 312.50, 312.50, 625 \}.$

La représentation des résultats obtenus alittérature est donnée dans le tableau V-1 et la représentation des résultats que nous avons obtenus est rappelée avec la figure V3 ensuite par le tableau V-2.

Pour l'élément quadratique complet à neuf noeuds, on représente quatre éléments.

Le calcul de ce type d'élément est similaire au calcul d'éléments linéaires à quatre noeuds et la représentation des résultats obtenus par littérature est donnée dans le tableau V-3 et la représentation des résultats que nous avons obtenus est rappelée avec la figure V4 ensuite par le tableau V-4.



Pour NPE = 4 les valeurs obtenues par :

1- LITTERATURE (Reddy)				
N° du noeud	Déplacement w _i (* 10 ⁻³)	Rotation α _i (* 10 ⁻³)	Rotation β_i (* 10 ⁻³)	
1	43.368	0	0	
2	30.838	10.019	0	
3	0	14.636	0	
4	30.838	0	10.019	
5	20.963	7.0974	7.0974	
6	. 0	10.460	0	
7	0	0	14.636	
8	0	0	10.460	
9	0	0	0	

Tableau V-1

100 B B B

2 - ABBAS

N° du noeud	Déplacement w _i (* 10 ⁻³)	Rotation α _i (* 10 ⁻³)	Rotation $\beta_{i} = \beta_{i} + \beta_{i}$ $\beta_{i} (* 10^{-3})$
1	44.83	0	0
2	31.61	10.69	0
3	. 0	14.84	0
4	32.64	0	10.62
5	21.51	8.22	8.24
6	0	10.53	0
7	0	0	13.84
8	0	0	11.42
9	0	0	0





COQUE TRIDIM. de 4 elements, 25 points, 36 segments

Dimensions X= 5.00 Y= 5.00 Z= 0.00



-COQUE TRIDIM. de 4 elements, 25 points, 36 segments







COQUE TRIDIM. de 4 elements, 25 points, 36 segments



VALIDATION DU PROGRAMME

0	DOR	ABBAS
4 Eléments 4 noeuds 4 points GAUSS		- 0.022502
4 éléments 9 noeuds 9 points de GAUSS	- 0.024836	- 0.024505
4 éléments 16 nœuds 16 points de GAUSS	- 0.090703	- 0.090341

V-2. EXEMPLES DIVERS D'UNE COQUES DE FORME QUELCONQUE

Nous traitons ici deux exemples du calcul par éléments finis d'une forme quelconque en utilisant les trois types d'éléments :

- éléments linéaires à quatre noeuds,

- éléments quadratiques complets à neuf noeuds

- éléments cubiques complets à seize noeuds.

Pour le premier exemple, nous choisissons de rappeler un exemple de la représentation de surface quelconque dans la première partie (figures: VA1). Une change concentree est appliquée au centre de la surface.

A partir de cet exemple de la surface, nous faisons une simplification souhaitable pour permettre d'utiliser des éléments finis relativement simples, mais suffisamment représentatifs du phénomène physique. Les résultats des simplifications peuvent se visualiser avec la V.A.O.N. pour chacun cas de type d'éléments. qui sont respectivement donnés par les figures V-2-1, V-2-2 et V-2-3.

Pour le deuxième exemple, nous allons traiter une autre type de la coque mais absolument quelconque. Pour représenter cette coque, nous choisissons d'utiliser la méthode de BEZIER de degré 2.

Les coordonnées des points mesurés sont :

0,0,0	1,0,1	2,0,0
0,1,1	1,1,2	2,0,1
0,2,0	1,2,1	2,2,0

La visualisation de chaque type d'éléments est respectivement donnée dans les figures V-2-4A, V-2-5A, et V-2-6.A

148	
Les caractéristiques mécaniques	des matériaux sont :
Module d'Young	E = 2.1*107 N/cm2
Coefficient de Poisson	v = 0.3
Epaisseur de l'élément	t = 0.3 cm

Les résultats obtenus avec ces trois types d'éléments sont respectivement donnés dans les figures V-2-4B, V-2-5B, V-2-6B.









CONCLUSION GENERALE

Nous avons dans ce travail "tradoit" une surface en utilisant deux méthodes différentes et complémentaires pour l'analyse linéaire des structures coques de forme absolument quelconque

La première partie de ce travail nous a permis de confirmer le fait que:

- D'une part, la construction de surfaces complexes par la méthode de BEZIER dans la base des polynômes de BERNSTEIN entraine une intéraction globale sur l'ensemble du carreau dès qu'un pôle est modifié, et par la méthode des B-SPLINES, définies à partir d'un ensemble de données échantillonnées, entraine une modification locale pour la même variation d'un pôle.

- D'autre part, l'observation montre que les surfaces obtenues par les deux méthodes avec l'utilisation des fonctions pondérantes de degré croissant apporte une bonne approximation.

- Et que la validation relative à des résultats obtenus par ailleurs sur un ordinateur de grande capacité montre qu'un simple micro-ordinateur de type AT a des possibilités très performantes.

Pour la deuxième partie de ce travail, basée sur les concepts d'éléments isoparamétriques de volume, nous avons constitué les éléments de coque tridimensionnelle à trois degrés de liberté par noeud, qui rendent compte du cisaillement transverse, tout en conservant des encombrements mémoires raisonnables, ce qui est nécessaire étant donné les limitations d'ordre matériel. Ceci permet d' effectuer un programme de calcul par éléments finis sur un micro-ordinateur pour calculer leur comportement mécanique linéaire de structures de forme absolument quelconque.

ANNEXE A

A-1. LES COURBES DE BEZIER

A-2. TRIANGULARISATION AVEC PIVOT PARTIEL

A-3. LE LISTING DES PROGRAMMES

A - I. LES COURBES DE BEZIER

BEZIER et son équipe ont repris l'idée de FERGUSON avec

ses coefficients vectoriels $\overrightarrow{a_i}$ ayant une signification géométrique. Mais au lieu d'associer à ces vecteurs de simples puissances de u, ils eurent l'idée d'utiliser des fonctions de ce même paramètre.

Une courbe C de l'espace affine euclidien E à trois dimensions est défini dans le système UNISURF par une représentation paramétrique vectorielle régulière à un paramètre u :

$$\vec{P}(u) = \sum_{l=0}^{m} \vec{\alpha}_{l} f_{i,m}(u)$$
 avec $u \in [0, 1]$

(1)

où les $\vec{\alpha}_i$ sont des vecteurs de \mathbb{R}^2 où \mathbb{R}^3 repérés dans un référentiel orthonormé d'ordre 2.où 3. Leur extrémité est appelée point de contrôle, m est le degré d'approximation et $f_{i,m}(u)$ représentent les fonctions de BEZIER.

Pour valider cette forme analytique, M. BEZIER impose un certain nombre de conditions de telle sorte que le polygone caractéristique formé par les vecteurs $\vec{\alpha_i}$ placés bout à bout, dans l'ordre des indices, donne immédiatement l'allure générale de la courbe.

Ces conditions qui permettront de déduire les fonctions appropriées $f_{i,m}$ proposées par BEZIER, sont les suivantes :

* A l'origine de la courbe qui correspond à u= 0, BEZIER impose que :

- La position soit donnée par :

 $\vec{\alpha}_{0} \Rightarrow \mathbf{f}_{1,0}(0) \equiv 0$ pour $\mathbf{i} \neq 0;$

- La direction de la tangente par :

 $\vec{\alpha}_i \Rightarrow f'_{im}(0) \equiv 0$ sauf pour i = 0;

- La dérivée seconde ne dépende que de $\overrightarrow{\alpha_1}$ et $\overrightarrow{\alpha_2}$, soit $f_{i,m}^{*}(0) = 0$ sauf pour i = 1 et i = 2.

- Et d'une façon générale, la dérivée kième ne dépende que des k vecteurs significatifs $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, .., \vec{\alpha_k}$, ce qui impose $f_{1,m}^{(k)}(0) = 0$ pour i= k+1, k+2, ., m

* A l'extémité qui correspond à u = 1, BEZIER impose que :

- La position soit donnée par la somme des vecteurs :

 $\vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_m \implies f_{i_m}(1) \equiv 1, \forall i;$

- La direction de la tangente dépende :

 $d e^{\vec{\alpha}_m} \Rightarrow f'_{i,m}(1) = 0$ sauf pour i = m

- La dérivée seconde ne dépende que de α_m et α_{m-1} , soit $f'(1) \equiv 0$ sauf pour i=m et i=m-1

- Et d'une facon générale la dérivée $\mathbf{k}^{i \text{ eme}}$ en u = 1 ne dépende que des vecteurs $\overrightarrow{\alpha_m}, \overrightarrow{\alpha_{m-1}, ..., \alpha_{m-k+1}}$, ce qui impose :

$$f_{l,m}^{(k)}(1) \equiv 0 \text{ pour } i \leq m - k$$

De façon concrète, on peut résumer ainsi les principales propriétés des courbes de BEZIER :

Propriété 1 : un arc de courbe passe par le premier et le dernier point $\overrightarrow{\alpha_0}$ et $\overrightarrow{\alpha_m}$. En général la courbe ne passe pas par les autres points.

1

Propriété 2 : la courbe est tangente aux côtés du polygone en ses points extrêmes.

Propriété 3 : chaque point de contrôle exerce une attraction sur la portion de courbe qui se trouve près de lui. Cette attraction est proportionnelle au coefficient $f_{i,m}(u)$.

Propriété 4 : une courbe de BEZIER est toujours contenue à l'intérieur du contour polygonal convexe extrême déterminé par l'ensemble des points de mesure.

Propriété 5 : le contrôle de la courbe est global. Le moindre changement dans la position de l'un des points de mesure provoque une altération complète de la courbe.

Propriété 6 : une courbe de BEZIER est indépendante du système d'axes auquel elle est rapportée.

Remarque : la définition (1) et les propriétés 1, 2, 3 et 5 découlent directement des propriétés d'un barycentre dont les poids sont variables. Elles donnent une méthode d'obtention des points de la courbe à partir de la connaissance des pôles. En effet, chaque point de l'arc de paramètre u (0<u<1) est le barycentre du système des points ai pondérés par les coefficients fi.m(u).

Si m = 3, ces propriétés peuvent être représentées géométriquement de la façon suivante :



et $\vec{P}(u) = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 f_{1,3}(u) + \vec{a}_2 f_{2,3}(u) + \vec{a}_3 f_{3,3}(u)$

Ces conditions permettent d'obtenir les familles des fonctions $f_{i,m}(u)$.

BEZIER propose de les déterminer directement par l'expression :

$$f_{l,m}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{x}_{k,i} \mathbf{u}^{k} \text{ avec } \mathbf{x}_{k,i} = (-1)^{k-1} \mathbf{C}_{k-1}^{k-1} \mathbf{C}_{m}^{k}$$
(2)
qui respecte les conditions ci-dessus.

A titre d'exemple, les fonctions de BEZIER, pour m = 5 sont :

$$f_{0,5}(\dot{u}) = 1$$

$$f_{1,5}(u) = u^{5} - 5u^{4} + 10u^{3} - 10u^{2} + 5u$$

$$f_{2,5}(u) = -4u^{5} + 15u^{4} - 20u^{3} + 10u^{2}$$

$$f_{3,5}(u) = 6u^{5} - 15u^{4} + 10u^{3}$$

$$f_{4,5}(u) = -4u^{5} + 5u^{4}$$

$$f_{5,5}(u) = u^{5}$$
(3)

La figure A-2, représente les fonctions correspondant à cet exemple





On peut aussi montrer que ces fonctions peuvent être engendrées à partir de la fonction génératrice suivante :

$$f_{l,m}(u) = \frac{(-u)^{l}}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{l-1}\left[\frac{(1-u)^{m}-1}{u}\right]}{du^{l-1}}$$
(4)

ou s'écrire :

.

$$f_{l,m}(u) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{l+j} \frac{m!}{j \cdot (i-1)! (j-i)! (n-j)!} u^{j}$$
(5)

Parmi les propriétés des fonctions de BEZIER, on peut retenir que :

$$f_{i,m}(u) - f_{l+1,m}(u) = C_m^l u^l (1 - u)^{m-l} = B_{i,m}(u)$$
(6)

Ces dernières fonctions $B_{i,m}(u)$ introduites ci-dessus, sont appelées fonctions de BERNSTEIN ou fonctions mélanges.

L'une des propriétés les plus importantes des fonctions de BERNSTEIN (condition de CAUCHY) est $\sum_{i=0}^{m} B_{i,m}(u) = 1$. Elle permet d'assurer la conservation de l'arc lors de translations et de rotations.

A-I-1. Expression plus appropriée et plus utilisable de la forme polynomiale (polynômes de BERNSTEIN)

Afin de montrer comment la modification d'un polygone caractéristique entraîne la déformation correspondante de la courbe, BEZIER a donné une autre forme polynomiale utilisant les polynômes de BERNSTEIN.

On peut introduire ces fonctions de BERNSTEIN en reprenant l'expression (1) où l'on exprime les vecteurs $\vec{\alpha}_i$ en fonction des composantes \vec{S}_i donnant les sommets du polygone caractéristique.





Nous avons (Fig. A - 3) : $\vec{\alpha}_1 = \vec{S}_1 - \vec{S}_{1-1}$

avec $\mathbf{S}_{-1} = \mathbf{\vec{0}}$ (vecteur nul)

Les relations (1) deviennent :

$$\vec{P}(u) = \sum_{l=0}^{m} f_{l,m}(u) \vec{\alpha}_{l}$$

$$= \sum_{l=0}^{m} f_{l,m}(u) (\vec{S}_{l} - \vec{S}_{l-1})$$
n développant selon les S_i, on obtient :
(7)

Er

$$\vec{P}(u) = \sum_{I=0}^{m} \vec{S}_{I}(f_{I,m}(u) - f_{I+1,m}(u))$$
(8)

et l'on voit apparaître les polynômes de BERNSTEIN définis en (6) ainsi, la construction d'un point courant P(u) est représenté par l'expression :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{l}=0}^{\mathbf{m}} \mathbf{B}_{\mathbf{l},\mathbf{m}}(\mathbf{u}) \,\vec{\mathbf{S}}_{\mathbf{l}}$$
⁽⁹⁾

où

avec

$$B_{i, m}(u) = C_{m}^{i} u^{i} (1 - u)^{m-1}$$

$$C_{m}^{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}$$

La courbe réelle est obtenue par pondération du polygone caractéristique.

A titre d'exemple, on donne ci-dessous les fonctions de BERNSTEIN de degré m ($5 \ge m \ge 2$):

Pour m = 2
$$B_{02} = (1 - u)^2$$

 $B_{12} = 2 u (1 - u)$
 $B_{22} = u^2$
Pour m = 3 $B_{03} = 1 - 3 u + 3 u^2 - u^3$
 $B_{13} = 3 u - 6 u^2 + 3 u^3$
 $B_{23} = 3 u^2 - 3 u^3$
 $B_{33} = u^3$
Pour m = 4 $B_{04} = 1 - 4 u + 6 u^2 - 4 u^3 + u^4$
 $B_{14} = 4 u - 12 u^2 + 12 u^3 - 4 u^4$
 $B_{24} = 6 u^2 - 12 u^3 + 6 u^4$
 $B_{34} = 4 u^3 - 3 u^4$
 $B_{44} = u^4$
Pour m = 5 $B_{05} = 1 - 5 u + 10 u^2 - 10 u^3 + 5 u^4 - u^5$
 $B_{15} = 5 u - 20 u^2 + 30 u^3 - 20 u^4 + 5 u^5$
 $B_{25} = 10 u^2 - 30 u^3 + 30 u^4 - 10 u^5$
 $B_{35} = 10 u^3 - 20 u^4 + 10 u^5$
 $B_{45} = 5 u^4 - 5 u^5$
 $B_{55} = u^5$

Leur représentation est donnée figure A - 4.

(10)





La formulation utilisant les fonctions de BERNSTEIN est bien adaptée à la modification d'une courbe. En effet, si le sommet S_k est déplacé de la quantité ΔS_k la nouvelle courbe a pour expression :

$$\vec{P}_{mod}(\mathbf{u}) = \vec{P}(\mathbf{u}) + \mathbf{B}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(\mathbf{u}) \Delta \vec{S}_{\mathbf{k}}$$
(11)

La déformation est portée par le vecteur ΔS_k d'amplitude modulée par la fonction de BERNSTEIN associée $B_{k,m}(u)$.

A-I-2.Détermination d'un polygone caractéristique

La forme des courbes de BEZIER de degré m est déterminée par son polygone caractéristique. Lorsqu'un certain nombre de points de la courbe est connu, on peut penser que l'expérience et l'intuition doivent permettre de reconstituer directement le polygone caratéristique, mais il est plus raisonnable de disposer de méthodes algorithmiques pour établir une solution approximative. Généralement, les contraintes imposées à un arc de courbe sont de passer par un certain nombre de points ou du moins au plus près de ceux-ci ; il peut également y avoir des conditions de tangence, etc.

Compte tenu de ces conditions, nous allons donner dans le paragraphe suivant, un aperçu des méthodes utilisées en C.A.O pour construire le polygone caractéristique à partir de points connus (éventuellement mesurés) d'une courbe.

A-I-2-1. Paramétrage

La première étape consiste à paramétrer la courbe dans le domaine 0,1 et à attribuer à chaque point une valeur du paramètre.

Le problème est de définir une courbe de degré m passant, avec une tolérance imposée, par certains points donnés P_0 , P_i P_m .

1. Méthode simplifiée

Une méthode simple est de constituer avec les valeurs des paramètres, une progression arithmétique de raison 1/m comprise entre 0 et 1.

 $\rho_0 = 0 \qquad \rho_i = i/m \quad \dots \quad \rho_n = 1.$





Cette méthode ne peut s'appliquer raisonnablement que dans le cas d'un arc à courbure régulière variant relativement peu et avec des points à peu près également espacés.

2. Méthode de la ligne brisée

On commence par relier les points dans l'ordre indicé par une ligne brisée formée de segments α_i .





La longueur totale de la ligne brisée est donnée par :

$$L = \sum_{i=1}^{m} |\vec{a}_i|$$

(12)

167

La valeur du paramètre attribuée à un point P_j peut être calculée par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{P}_{i}) = \frac{\sum_{i=1}^{i} |\vec{a}_{i}|}{\mathbf{L}}$$
(13)

Cette méthode peut donner de bons résultats si la courbure ne varie pas beaucoup, mais elle ne permet pas par contre de s'autoriser l'utilisation de points irrégulièrement espacés.

3. Méthode des arcs de courbes

BEZIER a pensé remplacer les segments de la méthode de la ligne brisée par des arcs de cercle ou de parabole. Mais de tels choix ont un intérêt limité et n'apportent pas une précision très supérieure à la méthode de la ligne brisée.

4. Méthode projective

La suite de points donnés constitue le polygone caractéristique. On trace la courbe ayant pour polygone caractéristique la ligne brisée, puis on attribue à chacun des sommets la même valeur du paramètre que celle de sa projection sur la courbe.



FIGURE A - 7

Cette méthode plus générale demande par contre un temps de calcul plus élevé car elle n'est pas très simple à programmer. A-1-2-2. Détermination des sommets du polygone caractéristique

Une courbe C de l'espace est définie par son polygone caractéristique qui peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{P}(u) = \vec{a}_{0} + \sum_{l=1}^{m} \vec{a}_{l} f_{l,m}(u)$$
 (14)

En ordonnant par rapport aux puissances croissantes du paramètre u, cette expression peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{l}=0}^{\mathbf{m}} \vec{\mathbf{b}}_{\mathbf{l}} \mathbf{u}^{\mathbf{l}}$$
(15)

Pour déterminer les sommets du polygone caractéristique, on affecte la valeur du paramètre correspondant à chaque point d'indice j, 0 < j < m. On dispose alors de (m+1) équations de la forme suivante :

$$\vec{P}(u_j) = \sum_{l=0}^{m} \vec{b}_l u_j^l$$
(16)

Ces équations constituent un système linéaire à m inconnues vectorielles $\vec{b_i}$

Si n et m ont la même valeur, la solution est immédiate.

Si n < m, on se ramène facilement au cas précédent en attribuant une valeur nulle aux coefficients $\vec{b_i}$ de rang compris entre (n+1) et m

Si n > m, il n'y a pas de solution exacte, et on peut employer par exemple la méthode des moindres carrés. On attribue un poids à chaque point pour déterminer sa distance par rapport à la courbe proposée.

Ce dernier cas est celui qui est le plus rencontré en pratique (dans l'industrie aéronautique par exemple). On définit alors une tolérance de la courbe approchée, par rapport à la solution exacte.

A-2 TRIANGULARISATION AVEC PIVOT PARTIEL

La triangularisation par la méthode de GAUSS à pivot partiel consiste à placer sur la diagonale les termes les plus importants, en intervertissant éventuellement les lignes.

Cette méthode applique les résultats suivants basés sur l'utilisation des matrices orthogonales symétriques :

Soient U et V deux matrices colonnes et Q la matrice du système linéaire qui les relie.

 $\mathbf{V} = \mathbf{Q} \mathbf{U}.$

Si Q est symétrique orthogonale $Q = Q^t = Q^{-1}$ et de plus :

 $V = Q U \implies || V || < || Q || || U ||$

 $U = Q^{t} V \implies || U || < || Q^{t} || || V || = || Q || || V ||$

d'où || U || = || V ||

Appliquons ce rappel à notre problème.

La matrice [A] à p lignes et q colonnes est reliée au vecteur colonne de coordonnées {C} par la relation ci-dessous

 $[A] \{b\} = \{C\}$ A-2-1

La résolution consiste à déterminer les inconnues {b} avec une précision plus ou moins grande A chaque étape de résolution, l'équilibre Ab-C met en évidence un résidu R :

 $\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{b} - \mathbf{C} \qquad \qquad \mathbf{A} - 2 - 2$

Si on applique le résultat ci-dessus à l'équation A-2-2, on obtient alors:

 $|\mathbf{R}|| = ||\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{C}|| = ||\mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{C})||$ et toute matrice qui minimise $||\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{C}||$, minimise donc $||\mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{C})||$.

La méthode consiste donc à multiplier R par des matrices orthogonales Q_1, Q_2, \dots, Q_m qui transforment la matrice A en une matrice triangulaire supérieure, fournissant alors un système dont la solution est immédiate par substitution arrière.

On cherche donc à construire des matrices orthogonales Q_i telles que l'on fasse apparaître à chaque étape des zéros dans le triangle inférieur correspondant à la ligne i.

 $Q_1 A = A_1$ $Q_2 A_1 = A_2$

 $\mathbf{Q}_{\mathbf{m}} \quad \mathbf{A}_{\mathbf{m}-1} = \mathbf{A}_{\mathbf{m}}$

où

A ₁ =	X	x	X	x	X	
	0	х	x	x	x	
	0	x	X	x	x	
	3	:	3	:		
	1	: :	÷	:		
		0	X	X	x	x]

A ₂ · =	X	X	X	X	X
	0	X	x	X	X
	0	0	х	х	x
	1	:	÷	:	
	:	:	:	:	
	0	0	x	x	x]

et pour m itérations :

A _m =		Γx –	x	x	X	x]
		0	X	X	X	X
	_	0	0	x	x	x
	-	:	÷	:	÷	i
		:	:	:	ł	
		Lo	0	0	0	0

171

De plus, on normera

$$\mathbf{A} \mathbf{b} - \mathbf{C} \| = \sqrt{\sum_{\mathbf{l} > \mathbf{m}} \mathbf{c}_{\mathbf{l}}^2}$$

où Ci est le terme général de la matrice colonne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{m} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{m} \mathbf{Q}_{m-1} \dots \dots \mathbf{Q}_{1} \mathbf{C}$$

qui elle aussi a été modifiée par les calculs.

Les matrices Q_i peuvent s'obtenir par les itérations successives suivantes :

La première itération consiste à trouver la matrice Q_1 symétrique orthogonale telle que : $Q_1 A = A_1$

On part d'une matrice de la forme $Q_1 = I - \beta W W^t$ où W est une matrice colonne, β un paramètre et I est la matrice identité.

On écrira que Q_1 doit satisfaire à deux conditions pour nous permettre de déterminer les paramètres inconnus β et W.

O₁ est une matrice orthogonale.

 $O_1 V = (1 - \beta W W^t) V$

a) lère condition : Q_1 est une matrice orthogonale, donc $Q_1 \ Q_1{}^t = Q_1{}^2 = 1$

 $Q_1^2 = I - 2\beta W W^t + \beta^2 W W^t W W^t$

En égalisant les deux termes et en posant le scalaire $W^t W$ égal à d :

 $O_1^2 = I - 2 \beta W W^t + d\beta^2 W W^t$

La condition d'orthogonalité normée donne : $Q_1^2 = I$

soit

$$W \quad W^t \left(-2\beta + d\beta^2 \right) = 0$$

d'où
$$d.\beta = 2$$

soit

- $\beta W^t W = 2.$
- b) 2ème condition : $Q_1 V = (1 \beta W W^t) V$

Imposons que β W^t V = 1. On obtient alors Q₁V = V-W, ce qui permet de déterminer les éléments W_i en fonction des V_i, éléments de V :

 $W_i = V_i$ $- V_i = 1$

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer β et W₁.

On écrit donc que :

$$W^{t} W = W_{1}^{2} + \dots + W_{m}^{2} = V_{1}^{2} + V_{2}^{2} + \dots + V_{m}^{2}$$

soit :

$$W^{t}W = \sum_{l=1}^{m} V_{l}^{2} + W_{1}^{2} - V_{1}^{2}$$

$$W^{t} V = W_{1}V_{1} + \dots + W_{m}V_{m} = W_{1}V_{1} + V_{2}^{2} + \dots + V_{m}^{2}$$

soit :

$$W^{t}V = \sum_{i=1}^{m} V_{i}^{2} + W_{1}V_{1} - V_{1}^{2}$$

Les deux égalités β W⁴ W = 2. et β W⁴ V = 1. entraînent donc l'écriture d'un système de deux équations à deux inconnues β et W₁ qui se résolvent très simplement :

 $\beta W^t W = 2.$ $\beta W^t V = 1.$

$$\beta \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{V}_{i}^{2} + \mathbf{W}_{1}^{2} - \mathbf{V}_{1}^{2} \right) = 2$$
$$\beta \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{V}_{1}^{2} + \mathbf{W}_{1}\mathbf{V}_{1} - \mathbf{V}_{1}^{2} \right) = 1$$

En éliminant $\beta,$ on obtient une équation du second degré en W_1 :

$$W_1^2 - 2W_1V_1 + V_1^2 - \sum_{l=1}^m V_l^2 = 0$$

Le discriminant $\Delta' = \sum V_1^2$ est toujours positif.On peut donc expliciter les solutions W_1 et β :

$$W_1 = V_1 \pm \sqrt{\sum_{i=1}^m V_i^2}$$

et

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} V_{i}^{2}} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m} V_{i}^{2}} \pm V_{i} \right)}$$

En résumé, on a donc parfaitement déterminé la matrice Q_1 par ses éléments caractéristiques suivants :

 $Q_1 = I - \beta W W^t \qquad A - 2 - 3$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\sum_{l=1}^{m} \mathbf{V}_{l}^{2}} \left(\sqrt{\sum_{l=1}^{m} \mathbf{V}_{l}^{2}} \pm \mathbf{V}_{1}\right)}$$
A-2-4

$$\mathbf{W}^{\mathsf{t}} = \left[\pm \sqrt{\sum_{l=1}^{\mathsf{m}} \mathbf{V}_{l}^{2}} + \mathbf{V}_{1}, \mathbf{V}_{2}, \cdots , \mathbf{V}_{\mathsf{m}} \right]$$
A-2-5

Les éléments de V : V_1 , V_2 , V_m , sont les éléments de la première colonne de la matrice A.

La $(i+1)^{\text{ème}}$ itération consiste à calculer la matrice Q_{i+1} qui permet d'obtenir une matrice de la forme $A_{i+1} = Q_{i+1} A_i$.

Dans l'itération précédente, on a obtenu une matrice A_i de la forme :



On cherche donc une matrice orthogonale Q_{i+1} qui par multiplication avec la matrice A_i transforme la sous matrice B_2 en B_2^1 telle que :

$$B_{2} = \begin{bmatrix} x & x & x & \dots & x \\ x & x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$
$$B_{2}^{1} = \begin{bmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

et surtout sans toucher à la zone de Ai contenant les zéros, ce qui impose à Q_{i+1} la condition suivante :

$$\mathbf{Q}_{1+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_{1+1} \end{bmatrix}$$

En agissant comme la première itération, on choisit $q_{i+1} = I \cdot \beta W W^T$. Dans ces conditions, Q_{i+1} est symétrique et orthogonale.

En effet, en prenant le carré de Qi, on obtient :

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{l+1}}^{2} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_{\mathbf{l+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_{\mathbf{l+1}} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{l} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_{\mathbf{l+1}}^{2} \end{bmatrix}$$

or $Q_{i+1}^2 = I$ à cause du choix de la forme et des propriétés de Q_{i+1} . On peut calculer A_{i+1} :

$$A_{1+1} = Q_{1+1}A_1 = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \\ & & \\ 0 & q_{1+1}B_2 \end{bmatrix}$$
 A-2-6

La mise en oeuvre de cette méthode est indiquée ci-dessous :

MISE EN OEUVRE

En utilisant les notations suivantes :

 β (variable Bet), ΣV_i^2 (variable SIG) sont des variables simples qui permettent de calculer W

Pour m variant de 0 à n+1 A est une matrice qui se présente sous la forme d'un tableau rectangulaire de m (n+2) éléments. Initialement, les n+1 premières colonnes contiennent A et la dernière contient C. A la ième itération, les n+1 premières colonnes contiennent A_i et la dernière $Q_1 Q_2 \dots Q_i C$.

I,J sont les indices de ligne et colonne de A

W(m) est une colonne de m éléments contenant W

Dans cette méthode de triangularisation, on adopte une méthode avec pivot partiel pour lequel on cherche la plus grande valeur afin d'éviter les erreurs de chute importantes dans le calcul numérique. Une fois trouvée, on intervertit les lignes de manière à ramener le pivot le plus grand sur la diagonale. Ensuite, on calcule les éléments caractéristiques de la méthode de triangularisation (β et W1) et on procède au calcul matriciel ensuite pour recalculer les termes de la nouvelle matrice que l'on reconstruit. On complète cette reconstruction en annulant tous les termes situés sous la diagonale.

L'algorithme de calcul se présente ainsi :

Début

pour i = 0 jusqu'à n, avec un pas pas de 1 faire

début

Calcul de :
$$\sqrt{\sum_{1}^{m} V_{1}^{2}}$$
, β et W

pour j = 1 jusqua'à n+1 avec pas de 1 faire

début

Calcul dans AI de la nouvelle colonne J de Ai

transfert de AI dans A

fin

fin

Résolution du système triangulaire supérieur .

fin.

LISTING PROGRAMMES BEZIER ET

B-SPLINES

.178 PROCEEDING DE MODELLISATION DES SUBFACES ODELLOANNES PRAF. INOMBURG ADLAS TUTELRE I PROF. C. ROMINOR DE DECLINATION PERFECTION TUTELRE I PROF. C. ROMINOR DE DECLINATION FUE Ĉ. ¢ č PROGRAMME LECTURE ET INFRESSION DES FUINTS HESURES 6 IMPLICIT REALIDIA-H.0-7) IMPLICIT INTEGERIA(1-H) COMMUN/HOEUB/NEL, NUB(2008, 4) DIMENSION PT(5,6,6,3) *********** ASSIGNATION DES FORMATS ĉ ASSIGN PIM TO IFHT FORMAT(3023.16) 998 LA SURFACE (S) ć. C C WHITE(1,20) FORMAT(SX." ENTREZ LE NUMBRE TUTAL DE CARKEAUX :'./) READ(0,0) NTS 20 С 90 WELTELE. 1001 196 110 IF (NPU.NE.3.0R.NEV.NE.3) GO TO 128 **BULTO 254** IF (NPU.NE.4.08.NPV.NE.4) 60 TO 138 60 TO 258 120 1.30 IF (NEU.NE.S. OR. NEV.NE-5) GO 10 90 GO TO 250 C 250 HRITE(4.260) FURNATION, POUR CHAQUE CARREAU, ENTREZ LE NOMBRE TOTAL, ','. 5%,' DE DECTUPAGE SELON LES DIRECTIONS U ET V ",'. 5%,' RESPECTIVEMENT (') FORMAL NET NE 260 READ(. . NT, NS С NPE=4 NXX1=NF1+1 NYY1+NFV+1 MPR=(NTS#NPU+1)4(NPV+1) 460 OPEN 2, FILE + NOUSOR, FIN', ACCESS*'SEQUENTIAL', FORM*'FORMATTED', STATUS- NEW) WRITEL2, 61 NHR - WRITE(1,470) 478 FORMATISK." ENTRES LE NUMERO DU CANREAU 1.1 READING NO WRITE(1.600) 600 FORMATISK. ENTRES LES LOOPDONNELS DES FOINTS MESULA : 1 .1 £=1 IF (NO.07.1) L=2 DO 669 J=L.NAXI DO 668 J=L.NV/1 READ(1.1) (FI(NU,1,J.8),1=1,3) 666 CONTINUE GO TO 700 700 10 710 J=1.MYL NO 710 M×1,3 1F(ND,NE,1) PT(ND,1,J,K)=PT((NQ-1),NXXL,J,K) 1F(ND,EQ.NTS) GD TO 790 718 GO TO 460 CUNTINUE DO 000 K+1,NIS 790 1.01 15(F.GT.1) L#Z 16(8,61,1) 6-2 NO 800 1-6,NXX1 DO 800 3-6,NXX1 MATTE(2,1FNT) PT(0,2,3,1),PT(0,2,3,2),PT(8,1,3,3) BANA 2000 CONTINUE OPEN(3, FILE= MANSUR, PIA', ACCESS='SEQUENTIAL', FURH- FORMATTED', STATUS= "NEW") 00 1950 K#1.N15 W((1613,1910) K 1910 FURMAT(7/203.

LA SURFACE 5 =1,16/1

1910 FLAMMTF//20x.' LA SURFACE S ='.(6/)
0.1930 in1,INKL
MITIE(3,1490) I
1940 FLAMMTF()AX.' F0/INTS OUL COMPOSENT LES VECTEURS A(I.J) ='.(6/)
0.1950 JH1.3 (F1/K.1L.J).L=1,NYYL)
1930 MRTTE(3,1979.4.4))
1930 MRTTE(3,1979.4.4))
1930 MRTTE(3,1979.4.4))

OPEN(4,FILE= MODSUR.FTE', ACCESS='SCOUENTIAL', FORM= FORMATTED',

UPEN(6.FILE*'CDOUE.LNN', ACCESS*'SEQUENTIAL', FORM*'FORMATTED', STATUS='NEW') NEL-NTSINTINS

.

С

c

- C

С

2108 c

STATUS="NEN"] STATUS='NEN'| NEC=(NPU+L)+(NPV+L) WELTE(4,F) NEC DO 2160 1=1,PPU+1

WRITE(6.0) HEL HELI=NTINS

DD 2100 J=1.NPV+1 WRITE(4,IFMT) (P1(1,1,J,K),K=1,3) CLUSE(4,STATUS='KEEP')

CALL AUTO(L.IPC.NTS.NT.NS.PFK)

4,200 WELFE(&.2400) NFE.(NO0(1.0).0*1.(NE) FURMAT(107.2015) 2400 LEEN(23, FILE* MODSUR, FAT ACCESS* SEQUENTIAL FORMATED. ARTITE (23,3042) NEW INTU, NEV. NT. NS. NTS 1008 FORMAT(51,616) C FERNETURE DES FICHLERS CLOSE(23,57//f//S='KEEP') CLOSE(6,51ATUS='KEEP') (LOSE(4,51ATUS='KEEP') CLUSE 12, STATUS* 'KEEP' END C SUDROUTINE AUTOIND. NEE. NTS. NT. NS. NEK. IMPLICIT REAL BU(A-H.O-Z) IMPLICIT INTEGER44(1-H) COMMON/NUEUD/NEL , HOU (2000 . 4) ITEL=1 NEX1=NT+1 NEY1=NS+1 HX4=CTFLANT NYXI-NEXI NYXI-NEXI NYXI-NEXI 1#3.=NXX1014Y\$1 INT. + HARLOUTL INT.= + NDD(1,1)=(NG-1)=(NS+1)=NT+1 HOH(1,2)=NDD(1,1)+1 HOD(1,3)=ND(1,1)+1(+2 HOD(1,4)=NDD(1.3)-1 HOM 10-0 IF(HILED.1) GO TO 1160 HN=1 DO 1150 (=2,NS DO 1190 T#2,95 DO 1140 J#1,95 NUD(L,J)#NUD(MN,J)+NYYI+(TTEL~1)+NEYI+KU+NS 11411 11.54 MN-L 1160 IFINS.ED. 11 GO TO 1204 00 1178 N(=2,NS ET ALTEL IF(1.E0.4.(#.I.E0.8) [1+1+E0 100(N1,1)=N00(N1-1.1)+E1 HN=NI 10 1191 NJ=Z.NT L=INJ-1 HINS+HE 00-1100 J#L NPE 1 190 1 170 1 200 DC ILUM J#LAMA NGD(L,J)=NUD(MH,J)+NYYI+(I¥EL-I)+NEYI+FQ#NT RETURN 1230 IF(NT.E0.1) GO TO 1300 MN=1 DO 1270 (=2.NT L=[1-110N5+1 DO 1260 JAL.NEE 1260 NOD(L,J)*NOD(HN,J)+3#NYV1+2#NEV1+KU#(NS-2) 1279 HIN#L (F(NS.E0.1) GO 10 1400 1.500 DD 1399 N1=2.NS 11=3 NGD(N1,1)=NOE(N1+1,1)*K1 1340 MN=NI EU 1399 HJ=2.NT L=(NJ-L)=NS+N1 1/2 1368 J+1.NFE 1304 NOD(L.J)=NUD(IN.J)+30NYX+20HEY1++04(NS-2+ minel 1400 RETURN ENU ~

PROGRAMUE TREANGULARISATION IMPLICIT FEAL (8/A-H.O-Z)

- COMMON/FUINT/X(100),Y(1001,2(108) DIMENSION A(100,103),A((103),N((103)) DIMENSION FMU(26),FMV(26) NEMAX = 353
- i. C SEERED ASSIGNATION DES FORMATS
- ASSIGN 900 TO 1FHT FORMAT(3023.16) 98.0 C

- £2

- DPENC2.FILE='MODSUK.PAI',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS='ULD') KEAD(2,3) NPE.NPU.NPU.NT.NS.NTS CLUSE(2.STATUS='KEEP')
- 12 OPEN: 4, FILE* "HODSUR. PIO", ACCESS* SEQUENTIAL", STATUS* OLD ')
- NENUTA, 11 THT 00 30 1=1.NPT READIA.IFMEL X(1),Y(1).Z(1) CLOSE14.STATUS*'KEEP') 20
- C OPENIA.FILE= MODSUR.UV0'.ACCESS= SEQUENTIAL .STATUS='ULD') REDD(a.+) NH.NL DO 30 I=L.NH
- 58 READ(6.8) PHU(1)
- READ(6.1) FMU(1) BG 60 (=1.NL READ(6.1) FMV(1) CLOSE(6.5TATUS=') FEP') 60
- ¢ NPK=NPT+3
- 0 OPENTY, FILE* MODSUR, DCA", ACCESS* SEMILENTIAL , STATUS* OLD'] READ (7, 11 NI .NZ
- NEAD(7.1FNT, NT, NT, NZ DU LEN 1=1, NPT NEAD(7.1FNT) (A(E,K),1=L,NPT) CLOSE(7.STATUS="FEEP") 180
- r, CALL ACUNSTRIA, NET)
- С
- OPEN, LL, FILG= "HODSUR.DCB", ACCESS+ SEQUENTIAL", FORM= "FORMATTED", STATUS= NEN') WRITE(11,1) NPT DO THE LEL MPT
- 244 WRITELLI, IFMT) (A(1,C),L=1,MPK) CLOSE(11,STATUS+ REEF)
- E TERMENAL TRIMMAR ARTSATION ET RESOLUTION DE LA MAISTLE A
- CALL PRESDLI (1.188844.NCMAA.AI.WI.NFT) CALL ARTER(1.NRMAX.NCMAX.IFT)
- DFEN:12.11LE='HNDSUR:UCC'.ACCESS='SCRENTIAL .FORME'FRAMATIED . STATUS='HNM' MITLL12.11.02T 60.122M [H.1.02T MITETI2.ITM1 [AL.1.1.L=1.NFK] CLOSE(12.STATUS='KEEP') 1220
- 1240 CONTINUE DEFNITANCE OFFICE* MODEQUE, PTI' ACCESS* SEQUENTIAL ".FURH*'FORMATTED . STATUS*'NEW") • RETILLA'N NET
- 1250 1256 11, NPT 1250 WRITE(14, IFMT1 (A(1, NPT+3), J=1, 3) LLOSE(14, SYATUS='KEEP')
- C TERRETE FIN DU PRUGRAMME C
- END С

C

250

.

C

SUBROUTINE ACONSTMIA,NFT) IMPLICIT REAL481A-H,O-Z) IMPLICIT MIEGEREA(I-N) COMMON/ROINF/Z(IOD) (IAM1.Z(IOD) EIMPNSION A(100,103)

- DU 250 1=1.NFT All.NFT+L1=X(1) All.NFT+2)=Y(1) All.NFT+2)=Y(1) All.NFT+2)=2(1) CONTINUE RE LURN
- END

C SUBROUTINE FRESOLITATIK.NC.AT.WI.NT HPLICIT REALBO(A-0.0-2) THPLICIT INTEGEREA(1-N) DIMENSION A(NR. NCI. ALINRI, WICHRI 1C=3 MP1C=N+1C MP1z=N+1 С DO LO 1=1,H

- A1(1)=0.0 18 DD 200 1-1,N SIGR=0.0 IND=I PG=0.0 DO 76 J=I.N
- B=A(J,1) H=(J)=B BB=DA6S(B) IF(BB.LE.FG) 60 10 40 FG=DB
- 10=3 CONTINUE S168=S168+B#B 60
- 70) 90)
- CONTINUE IF(IND.EG.T) GO TO 110 DO 100 J=1.MF1C 8=A(1,J) A(1,J)=A(1ND,J) A(1ND,J)=B CONTINUE
- 100
- 8-W1(1) W1(1)-W1(TND)
- WI(IND)=B CONTINUE SIG=DSORT(SIGP) 112 VIEWICI
- 8=SIG+DABS(V1) IF(516.60.0.0.0K.8.60.0.0) 60 TO 200 RET=1./SIG/8
- 115 WI(L)=8 WI((1)=8 DET==8E IF(V1.LT.0.0) WI(1)==8 DO 130 L=(.HPIC DO 130 K=I.N XX=0.0 DO 120 J=1.N XX=XX+MI(J)0A(J.L) CONTINE
- 120
- CONTINUE XX=A(k,L)+BET(W)(K)#XX A)(K)=XX CONTINUE
- 130
- DO 150 J=I,N A(J,L)=A1(J) CONTINUE 150
- 180 CONTINUE
- LUNTINUE 1FILGT.1) W1/1-L1=8.02 CONTINUE RETURN 204
- FND

С

SUBPOLITINE ARLERIA.NR. NC. 11 IMPLICIT REALIS(A-H.D-2) INPLICIT INTEGERI4(1-N) DIMENSION A(NR.NC) DO 590 V=1.3 PIV=A(N,N) 1F(PIV.E0.0.0) GO TO 300 A(N.N+E)=A(N.N+K)/F12 396 CONTINUE NPT=N=1 DU 40M JK=NPT+L+-L FACT=A(-K,N+E) 11#3K+1 D0 380 J=11.N FACT=FACT=A(JK,J)+A+J.N+).

- 388
- FACTORAL FATCH, JIGHT, NO. J CONTINUE A(JE,N+F)=8.8 IF(A(JE,JE)=60,00,00) GU TU 400 A(JE,N+F)=FACT/A(JE,JE) CONTINUE 40ମ 50ଥ
- EONT INDE RETURN END

FRUGERAMME M. MULEU FULL LARGE SUM ACCOUNT OF A SUMPLY ACCOUNTS AND A SUMPLY ACCOUNTS AND A SUMPLY ACCOUNT OF A SUMPLY ACCOUNT OF A SUMPLY ACCOUNT OF A SUMPLY ACCOUNT OF A SUMPLY ACCOUNT ACC PRUGRAMME PRINCIPAL IMPLICIT REALIBIA-H.O-2) IMPLICIT INTEGERRA(1-N) C COMMON/POINT/FK(35,35,3),PTC(35,35,3) DTHENSION *(100),/(100),2(100) OTHENSION FMU(30),FMV(30) DTHENSION FU(20),XV(20) HEMAX=175 NCMAX=150 000 *********** ASSIGNATION DES FORMATS ASSIGN 900 TO IFMT 900 FORMAT(3023.16) DFEM(2.FILE="HODSUR.PAI".ACCESS= SEQUENTIAL".STATUS="OLD") FEBO(2.4) HEE.HPU.NEV.NT.NS.NIS CLOSE(2.STATISHEV) LOSE(2.STATISHEV) HS-MP-0-1 HS-MP-0-1 HS-MP-0-1 HS-MP-1 HS-MP-1 С OPEN(4,FILE='HODSUK,FTG',ACCEES= SECHENTIAL',STATUS='OLD') REAC(4,1) NPT GO 30 J=L,NPC DO 30 J=L,NPC READ(4,LTN() (PTC(1,3,1),N=1,3) CLOSE(4,STATUS='AEEP') 38 С 0°EVI6,FILE='HODSUR.UVO',ACCESS='SEQUENTIAL',STATUS≤ 0(D') READ(6,1) HT,N DO 36 IL,IN READ(6,1) FMU(1) DO 46 IL,IN READ(6,1) FMU(1) CLOBE(6,STATUS= [EEP') 50 60 d OFEN(14,FILE='MODSUR.FT1',ACCESS4'SEDURNTIAL .STATUS='DLU') READ(14,+) MFT D0 1230'L-1,MFT READ(14,IFMT) X(1),Y(1),Y(1) READ(14,IFMT) X(1),Y(1),Y(1) 1250 L. NFP=INTSIN1+L)E(NSI] UFLNIA,TILE=COUBLEDEP: ACCESS='SECUENTIAL',FORM=FORMATTEP, STATUS='NEW') HRITEILO,ET NFR с. CALL BERN(YU,MR) CALL BERN(YU,MR) CALL BERN(YV,MAY) CHL_SERVICE.BY P-SPL_FELORIENTENTS; PASEL_FELORIENTENTS; PASEL_FELORIENTENTS; PASEL_FELORIENTS; PASEL_FELORIENT; PASEL_FELORI DU 1450 1-1,NT1 DU 1450 1-1,NS1 WRITE(16,IFMI) (PK(Y,I,J),J=1,3) CLUSE(16,STATUS= KEEP)) 1450 DFENI17.FILE= HODGUR.DE0 ,ACCESS='SEQUENTIAL ,FORH='FORHATTED'. STATUS='Keu ; NOTIELI7.4 NRR D0 2100 1+1.NT1 D0 2100 1+1.NT1 WHITEN J-1.NEN (LJ,F).K=1.3) GLOBE(17.5TNUS='KEEP ; 1148 WRITE(1.2200) 2200 FORMATLINX, VISUALISATION DE LA SURFACE 2 . (2) . CLOSE (24.STATUS='REEP') CLOSE (23.STATUS='REP') CLOSE (22.STATUS= (EEP)

٤

6

C PRESENT FIN PH DROGT SHIP

183

ANNEXE B

B-1. TRIANGULARISATION AVEC LA METHODE DE GAUSS

B-2. LE LISTING DES PROGRAMMES

B-1. TRIANGULARISATION AVEC LA METHODE DE GAUSS

La résolution consiste à déterminer les inconnues {q} par l'utilisation de la méthode de GAUSS. Cette méthode est constituée de deux étapes :

B-1-1. TRIANGULARISATION

La triangularisation consiste à transformer le système d'équations (II-6) en un système triangulaire supérieur de la forme suivante :

$$[0^{S}] \{q_n\} = \{F'\}$$
 B-1

On peut écrire l'équation d'équilibre (II-6) sous la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \dots \dots K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} \dots \dots K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} \dots \dots K_{n2} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \qquad B-2$$

La triangularisation consiste à éliminer successivement les inconnues q_i , i = 1,2, n-1 dans les équations i+1 à n.

On élimine la variable q1 du système B-2, par l'utilisation de la première équation sous la forme :

$$q_1 = \frac{1}{K_{11}} (F_1 - K_{12} q_2 \dots - K_{1n} q_n) = B - 3$$

On reporte de cette expression de q₁ dans les équations 2, 3,n, nous obtenons alors :





avec

$$K_{ij}^{1} = K_{ij} - \left(\frac{K_{i1}}{K_{11}}\right)K_{1j}$$

$$(i, j = 2, 3,, n)$$

$$F_{i}^{1} = F_{i} - \left(\frac{K_{i1}}{K_{11}}\right)F_{1}$$

L'indice supérieur 1 montre la première étape de l'opération.

Après élimination des termes sous la diagonale des colonnes 1, 2, ...n-1, nous obtenons alors :



Après la dernière intération, le système final triangulaire se présente sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22}^{1} & \dots & \mathbf{K}_{2n}^{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{33}^{2} & \dots & \mathbf{K}_{2n}^{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_{(n-1)(n-1)}^{n-1} & \dots & \mathbf{K}_{3n}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_{(n-1)(n-1)}^{n-1} & \dots & \mathbf{K}_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}_{nn}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1} \\ \mathbf{q}_{2} \\ \mathbf{q}_{3} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n} \\ \mathbf{q}_{n} \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathbf{F}_{1} \\ \mathbf{F}_{2}^{1} \\ \mathbf{F}_{3}^{2} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{n-1}^{n-2} \\ \mathbf{F}_{n}^{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{n}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$[0 \ S] \{q_n\} = \{F^{n-1}\}$$

où F^{n-1} est le vecteur transformé des forces extérieures après la dernière itération.

La construction des matrices [K¹], [K²], dans la matrice originale [K] peut s'évaluer par la forme algorithmique suivante :

$$m = 1, 2, \dots \dots \dots n-1$$

$$i = m+1, m+2, \dots \dots n$$

$$C = K_{im}/K^{-1}mm$$

$$F_{i}=F_{i}-C F_{m}$$

$$j = m+1, m+2, \dots \dots n$$

$$K_{ij} = K_{ij} - C K_{mj}$$

Pour un système symétrique l'indice j varie de i à n et $K_{ji} = K_{ij}$.

B-1-2. RESOLUTION DU SYSTEME TRIANGULAIRE SUPERIEUR

La résolution du système (B-5), pour calculer les variables inconnues $q_n, q_{n-1} \ldots q_2$ à partir de la dernière ligne, s'appelle substitution arrière. La procédure est la suivante :



LISTING CODE DE CALCUL COQUES FACETTISEES PAR ELEMENTS FINIS

PROGRAMME DE CALUZL PAR ELEMENTS FINIS DES COURS DE FORME DURLDONDUE PAR I HAMMADA ABBAS TUTEUR I PARA C. GRINIMON COPLAD, FOR 0000 ċ PROGRAMME LECTURE ET VISUALISATION DES ELEMENTS SUR VAO C IMPLICIT REALIB(A-H.D-Z) IMPLICIT INTEGERIA(I-N) C COMMON/NODE/NEL.NDD(100,16) COMMON/POINT/FK(70,35,3),PTC(26,6,3) DIMENSION CM(5,5) CCC *********** ASSIGNATION DES FORMATS ASSIGN 988 TO 1FMT FORMAT(3023.16) 980 L' WRITE(1.18) DES ELEMENTS FINIS FORMAT(18X. 10 ć C ********** LECTURE ET IMPRESSION DES ELEMENTS C 28 30 40 IF (NPE.NE.4) GO TO 50 NII=NEU+1 NT2=NEU+1 GO TU 70 LF (NPE+NE.7) GO TU 60 NT1=21NEU+1 50 NT2+24NEV+1 GO TO 70 1F(NFE.NE.16) GO TO 30 NT1=30NEU+1 60 NT2=38NEV+1 78 CONTINUE C NPT=NT1+NT2 NEL=NEUANEV Ç HRITELS 751 75 WRITE (# . BR) 69 FORMAT(SX. HODULE D' ELASTICITE READ(\$, *) ET E : .) WRITE(#,05) FORMAT(5x,' COEFFICIENT DE FOISSON READ(#,#) XN 65 NU IL.L FORMAT(5%, "EPAISSEUR D''ELEMENT READ(*.*) TH 66 T 11.3 DO 90 1=1,5 DO 90 1=1,5 Ch(1,J)=0.0 Cl1=ET/(L.-XN#XN) Cl2=XN#Cl2 78 GL=ET/12.8(1.+XN)) GL=ET/[2.\$(1.+X) CM(1,1)=C11 CM(1,2)=C12 CM(2,1)=CM(1=2) CM(2,2)=C11 CM(3,3)=GL CH(4.41=G) CH(5.5)=GL с OFEN(2,FILE= MODSUR.PAI", ACCESS= SEQUENTIAL', STATUS="OLD") READ(2.1) NCE, NEU, NEV, NT, NS, NTS CLOSE (2, STATUS= YEEP С NV=NTS#NT+1 NW-NS+1 OPEN(7,FILE='MODSUR.DE0 ,ACCESS* SEQUENTIAL',STATUS='OLD') CONSINT,FILE= MODSOR_DE0 ,AC(READ(7,0) NPC D0 170 [=1,NV D0 170 [=1,NV D0 170 [=1,NH READ(7,0) (FY(1,J,k),i=1,3) CLOSE(7,STATUS='KEEP') 170 с C OPEN(14,FILE='NODSUR.PTB',ACCCSS+'SEQUENTIAL',STATUS='OLD') READ(14,1) NPC NPU1+NPV1 NPV1+NPV1 DO 1258 (+1,NPV1 DO 1258 (+1,NPV1 DO 1258 (+1,NPV1 1258 READ(14,1FMT) (+TC(1,K,J),J=1,3) CLOBE(14,STATUS='KEEP') с DPENIIS,FILE="COOVE.DEP",ACCESS="SEQUENTIAL",FORM="FORMATTED", STATUS="NEM") MITELIG.11 MFT с 00 1458 K=1.NT1 DO 1430 (41,412 DO 1430 (41,412) WRITE(16,1FMT) (FK(K,1,4),J=1.3) ELOSE(16,STATUS= KEEP) 1450 С C ######## RAPPEL SOUSPROGRAMME AUTO POUR CALCULER LES PUINTS 1968 OPENICZ, FILE="COQUE.LMN", ACCESS" SEQUENTIAL . FORM- "FORMATTED",

. STAFUS='NEW'; CALL AUTOINT.NFE_HEU.NEV; WiffEl22,) NEL UO 1970 I=1.NFL 1970 HTTEC22,1980, NFE,(NGD(1,J),J=1,NFE) UV0 FORMAT(107,2015) C OPEN(24 .FILE. HODSUR. HAT' , ACCESS- SEQUENTIAL' , FORM- FORMATTED . WRITE (24,2000) ET, XN, TH, GL 2000 FORMAT (5X, 4E15.6) FORMAT15X,4E13.6) DO 2100 1=1.5 MRTTE(24,2150) (CM(I,J),J=1.5) FORMAT(5X,3E13.6) CLOSE(24,STATUS='KEEP') 2100 С WRITE(0,2200) 2200 FORMAT(10X, VISUALISATION DES ELEMENTS £1.71 C ******* FERMETURE DES FICHTERS Ē CLOSE (22, STATUS='KEEF') STERSES FIN OU PROGRAMME c END с · C SUBROUTINE AUTO(NPC.NPE.NT.NS) IMPLICIT REAL18(A-H.O-Z) IMPLICIT INTEGER14(L-N) CUMMON/NODE/NEL, NOD (100, 16) С IF(NPE.GT.4) GO TO JB0 IF (NPE.GT.4 ITEL=1 NEX1=NT+1 NEY1=NS+1 NXX=(TEL=NT NYY=[TEL=NS NXX1-NEXI NYYL=NEYI NPC=NXX18NYYL /#PC=N4X14NYYL NDD(1,4)=1 NDD(1,2)=2 NDD(1,3)=NS+3 NDD(1,3)=NS+3 NDD(1,3)=NS+3 NO-48 GD 10 1138 IF(NPE.GT.9) GO TO 128 184 IF (NPE.GT.0 ITEL=2 NEXL=NT+1 NEY1=NS+1 NXX=ITEL8NT NYY=ITEL8NS NXX1=NXX+1 NYXL=NXX+1 NPC-NXX18NYY1-NTENS 10=1 NOD(1,1)=1 MOD(1,1)=1 MOD(1,4)=1EL+1 MOD(1,4)=1 128 ITEL=2 NEX1=NT+1 HEY1=NS+1 NXX=ITELONT HELATIELENT HYV-ITELINS NETIANIS-I NETIANIS-I NETANIS-I NOD(1,1)-I I NOD(1,1)-I NOD(1,1)-I I NOD(1,1)-I NOD(1 GO TO 1130 IF(NPE.GT.16) GO TO 1130 ITEL=2 KO=1 NEX1=NT+1 NEX 936 NYY=ITELINS NXXX-NXX+1
 WY-1-0000-1

 WY-2-1000-1

 WY-2-10 NYYI SNYY+1 NGD(1.15)=NGD(1.11)+1 H()D(1.16)=NGD(1.15)+1 GO TO 1230

C ITTA IFINT FO.IT GO TO LIAN

	100
	195

1F(MPE.EQ.4) 10=0 HN=1 DO 1156 1=2.NT 00 1130 12-01 L=(1-1)HNS-1 D0 1140 J=1,HPE 1140 MO(L(J)-NMD(HM,3)+NYY1+(1TEL-1)HNEY1+K0HNS 1130 HN-4 L140 (F(NSEC)11 00 TO 1208 DO 1178 1=1,NPE K1=ITEL IF(1.EG.4.OR.1.EG.8) KL#1+KO 1178 NGD(NI,1)=NGD(NI-1.1)+KI MN=N1 00 1198 NJ=2.NT CG 1198 NJ=2.N1 L=(NL-1)NNS+N1 DD 1188 J=1,NFE 1198 NN=L 1298 RFLTRM 1298 FFLTRM 1298 FFLT 1238 |PTNF,EDITION NHL DO 1278 |#2.NT L=(|-1|3NS+1 DO 1268 J=1,MPE 1268 NOP(L,J)=NOD(NH,J)+38NYYI+28NEYI+K08(NS-2) 1278 MN-L IF(NS.EG.1) 60 TO 1400 DO 1398 NI=2,NS DO 1348 I=1,NFE K1=3 1348 NOD(NE,1)=NOD(NE-1,1)+K1 NUD(L,J) NUD(L,J)NS+NI L=(NJ-1)NS+NI DO 1398 J=1,NPS DO 1398 J=1,NPS NI DO 1398 J=1,NPS N 1386 1399 Period RETURN END

CE PROGRAMME PERMET LE CALCUL ET L'ASSEMULADE DES MATRILES ELEMENTAIRES FOUR OBTENIR LA MATRICE DE RIGIDITE EN ATES GLORAUX PAR À MOMMAN ARBAS TUTEUR : PROF.C. BONTAUX 0. CUFLAGL FOR HPELICIT REALIBICA-H.(J-7) IMPLICIT INTEGENAV(1-H) COMPON/REDD/MEL.NPE.(NE) COMPON/REDD/MEL.NPE.(NE) COMPON/RAIDS/ELEMI, 1,573, LEMI(48,40) COMPON/RAIDS/ELEMI(48,40) COMPON/RAIDS/ELEMI(48,40) COMPON/RAIDS/ELEMI(48,40) DIMENSION MODILSS.(15),GR(400,75),GF(400) DIMENSION CH(3,5),F(45) ASSIGN 988 TO IFHT 989 FORMAT (3023.6) C č C CREATION DU FICHIER DES CONDITIONS AUX LIMITES OPEN(1.FILE="HUNGUR.COB".ACCESS="SEQUENTIAL",FURM="FORMATTED". STATUS="HEM" MITIC(1.144) HUC FORMAT(31.16) MITIC(1.144) (IGF(1).T=1.NDC) FORMAT(31.2015) MITIC(1.141) (VGF(1).T=1.NDC) CLOSE(1.STATUS='KEEP') 144 145 C MRITEIRIAGE HRITEIRIAGE HRI C IGX." AJA FORCES NEW HULLES (VSF(1),1=1,NSF) 1,1 READ(1,1) (VSF(1),1=1,NSF) С F0=a.0 C \$446666888 OUVERTURE DU FICHIER DES CARACTERISTIQUES DU MATERIAU C OPEN(4,FILE='HODSUR_HAT',ACCESS='BEDUENTIAL',STATUS='OLD') READ(4,4) ET,TN,TN,GL DO 228 T4L,5 READ(4,4) (CH(1,J),J=L,5) C ********* DUVERTURE DU FICHIER DES COORDONNEES OPEN(&,FILE* COQUE.DEP", ACCESS* SEQUENTIAL', STATUS* OLD") REAQ(&, t) NPC DO 298 1+1,NPC READ(6,8) X(1),Y(1),Z(1) 290 CONTINUE C SALANAL OUVERTURE DU FICHIER DES ELEMENTS OPEN(7.FILE='CODUE.LMN', ACCESS='SEDUENTIAL', STATUS='OLD') READ(7,6) NEL DO 295 1=1.NEL 295 READ(7,6) NPE,(NOD(1,J),J=1,NPE) C ********* LECTURE DU NOMBRE TOTAL D'EQUATIONS (NEQ) NDUL=3 NEQ=NPC+NDDL NN=NPE+NDDL C ######### CALCUL DE LA DEMI LARGEUR DE BANDE C ******** INIALISATION DE LA MATRICE DE RATDEUR GLOBALE ET DU VECTEUR FORCE c DG 368 t=1,NE0 DF (1)=0.8 DO 368 J=1,ND8 368 GR(1,J)=8.8 NEMAX=580 NCHAX=180 NCH4X=180 DO 550 N=1,NEL DO 440 I=1,NPE NI=NOD(N,11 ELEM(1,1)=X(N1) ELEM(1,2)=Z(N1) ELERTIE.JI=Y(NE)

C STITUTES CALCUL DE LA MATRICE DE RAIDEUR ELEMENTAIRE COMPREMANT LE C CALCUL DES COORDANNEES E/ PUIDS DES POINTS GAUSS, C DES FONCTIONS EF EY LEURS DERIVEES DSF CALL RAIDQ (CH. TH) C SESERVELAGE DES MATRICES ELEMENTAIRE FOUR OBTENIR C LA MATRICE EN AXES GLUBAUX DO 550 [*1.NPE NR*(NDD(N,1)-1)*NDDL DG 350 13*1,NDL NR*NR+1 L*(1-1)*NDDL+13 GF(NR)=GF(NR)+F(L) DQ 358 J=L NPE NCL=(NOD(N,J)-1)+NDDL DQ 558 JJ=L NDDL UL 350 JJ=1,NDDL H=(J-1)*NDDL+JJ NE=NCL+JJ+L-NR IF(NC) 558,550,450 GR(NR,NC)*GR(NR,NC)+ELMR(L,M) 458 CONTINUE C 1001000 DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR C LES VARIABLES DES PREMIER ET SECOND MEMBRES 1RE+0 [F(NSF.EQ.0) GO TO 700 DO 600 t=1,NSF NI=1SF(1) GF(NI)=GF(NI)+VSF(1) CONTINUE 680 790 IF (NDC .EQ. @) GO TO BOO CALL COND(GR, GF) è C ******** CREATION DU FICHIER MATRICE DE RAIDEUR TENANT COMPTE DES OPEN(B, FILE= "MODSUR.KSL", ACCESS="SEQUENTIAL", FORM= "FORMATTED". 888 WRITE (8,810) NEG WRITE(8,810) NEG Format(3x,16) Do 820 J=1.NED WRITE(8,1FMT) (GR(1,J),J=1,NDB) 818 829 C CREATION DU FICHIER DES SECONDS MEMBRES OPEN(12,FILE*'HODSUR,FRC',ACCESS*'SEQUENTIAL',FORM='FORMATTED', VFR(12,FILE* MUDDM.FRC ,ALLES STATUS*/NEW') WRITE(12,1) NED WRITE(12,1FHT) (GF(1),1=1,NED) C ********* CREATION DU FICHIER DES PARAMETRES DU FRODLEME OPENII4, FILE= "HODSUR. PAC" . ACCESS= SEQUENTIAL , FORMA "FORMATTED", WRITE(14, 846) NDB. NED. NDDL, NFC. NEL 848 FORMAT(51,516) C FERMETURE DES FICHLERS C CLOSE(14,STATUS= FEEP)

C # CE SOUSPROGRAMME ETABLIT LA MATRICE DE RAIDEUR DES ELEMENIS **C i** c SUBROUTINE RAIDO(CH, TH) IMPLICIT REAL#8(A-H, O-Z) IMPLICIT INTEGER#4(I-N) IONNOVIA MIDDEC.vr:1-m/ IONNOVIA MIDDEC.vr:1-m/ CUMMOV/ACD/SELENT(14.3).ELMR(48,48) CUMMOV/ACD/SELENT(14.3). DIMENSION BA(4,4).NT(4,4).DSF(3,16).SF(16).B8(3,48). . CF(5,3).GJ(3,3).BJ(3,3).DJ(5,48).EE(48,5).RT(16) С DO 1 I=1,4 DO 1 J=1,4 WT(1,J)=0.0 HT(1,J)=0.0 GA(1,J)=0.0 GA(1,J)=0.0 GA(1,2)=-0.57735027 GA(1,2)=-0.57735027 GA(1,3)=-0.77459667 GA(3,3)=0.77459667 GA(3,3)=0.77459667 GA(2,4)=-0.33998104 GA(3,4)=0.33998104 1 GA(4,4)=0.86113631 GA(4,4)=0.86113631 WT(1,1)=2.6 WT(1,2)=1.0 WT(2,2)=1.0 WT(2,2)=1.0 WT(1,3)=0.33555555 WT(2,3)=0.889888888 WT(3,3)=0.55555555 WF(1.4)=0.34785485 WT(2,4)=0.45214515 WT(3,4)=0.65214515 WT(3,4)=0.65214515 WT(4,4)=0.34785485 ¢ IF (NPE.NE.4) 60 TO 18 NFG=2 60 T0 30 1F(NFE.NE.7) 60 T0 20 18 NP6=3 GO TO 30 20 1FINPE NE. 161 60 TO TO PG=4 30 CONT INUE NPG1=Z NDDL=3 NN=NPE INDOL C BEERE LANCEMENT DE L'INTEGRATION PAR LE METHOLE DU GAUSS DO 250 NI=1,NPG DU 250 NJ=1,NPG DO 250 NK=1,NPG1 XI=GA(NJ,NPG) ETA=GA(NJ,NPG) ZET=GA(NK.NFG1) [FINFE.NE.4) 60 [0 60 CALL FFORM4(X1,ET4,28T,SF,DSF) 60 TO 80 50 10 80 1F(NPE.NE.91 GO TO 70 CALL FFORM9(41,ETA.ZET.SF.05F) 50 TO 80 68 1E (NEE, NE, 16) 60 10 80 261)F(NFE.NE.16) 60 10 88 CALL FFORM(6/X),ETA,ZET,SF,DSF) CONTINUE CALL JACOB(SF,DSF,DETJ,GJ,GJ1,ELEH) CONTOETJATT(N1,NFG) WT(NJ,NFG)(WT(NK,NFG)) 64 CONFECTIONT(N1,NPG)(ff#ZET/2. DD 90 k=1,NPE Z1=0.0 DD 85 [=1,3 DD 85 [=1,3 DD 85 [=1,3 CT=ZT+FTTTTNYT(I,J) R((k)=ZT CONTINUE 85 CONTINUE CONTINUE CALL TRANS(GJ,GJ1,SF,USF,RT,BB) OC 100 1-1,5 CG 108 J=1,NM DD(T,J)-0.0 DO 100 K=1,5 90 DD([.J]=DD([.J)+CM([.K)+58(K.J) CONTINUE DO 150 INL.NN 100 DO 150 Lat.5 EE(1,1)=BB(L,1) DO 200 [=1.NN DO 200 J=1.NN 150 DD 200 0-1.00 DD 200 K=1.5 ELMR(1.J)=ELMR(1.J)+EE(1.K)+DD(K.J)+CON 200 250 CONTINUE 712 DU 720 I=1.NN 710 00 720 1=1,NN DO 720 J=1,NN 720 ELMR(J,I)=ELMR(I,J) 808 RETURN

END

PROGRAMME TREAMED AND LATER TREAMENTS FINTS LES COURS DE FORTE OBEL CONTRE FOR : INSPECTO AND AND A TUTEUR : PROF. C. EQUITADA IMPLICIT NEAL 10 (A-H.O-2) IMPLICIT INTEGER 14 (I-N) с DIMENSION GLR(400,751,6LF (400) ****** ASSIGNATION DES FORMATS ASSIGN 908 TO LEMT FURMAT(3023.16) 130 NUMBER AND A Ċ OPENI6.FILE= HUDSUM.FOC .ALCESS=SERMENIAL .STATUS= OLD) RLADIA. (I NDG.NEGT.NDGL.NFL.NGE LLUSE(6.STATUS=)EEF 1 DU 35 1×1,8601 GLF(1)=0,0 EU 35 J=1,808 GLR(1,J)=0,0 35 C OFENES,FILE= MORRAR.FS(,ACLESS= SERUENTINL ,STATUS*'OL0') MEAD(3,4) NG(1) D/23 1-1,NG(1) D/23 1-1,NG(1,1),J=1,NOD) (LOGG(5,JNUUS+'EEL+) 25 č OFEN(12,FILE="MODGUR.FKC ,ACCESS="SEGUENTIAL",STATUS="DLD") READ(12,4) NEOT READ(12,4) (GEF(1),I=1,NEOT) CLOSE(12,STATUS= KEEP") C RESOLUTION DU FRODUEME CALL RESOL (MENT, NOR , GLI (, GLF, NRHAR, NUHAR) £. CALL SUBS (SLR, GLF, NDB, NEUT, MRMA), MLMAN I c OFEN. 96. FILE* MOUSUA. FHU , ADLESS - SECHENTIAL , FORM- FORMATTED . Grentya, Dies Rubsin, And , alessa 31A106 Mem ; Weititus, 520 Mem ; Kokhaitus, Fai Weititus, 540 Mem ; Kokhaitus, Fai Weititus, 100 (100) 520 Ċ. INFERIOR , FILE- MODSHELLS2 , ACLESS- SECTENTIAL , FURME FORMATIED. PG 570 1=: HEGE 570 WELLEY', IFHES IDERTLAT, JA. JALINDAS C ITTETT FERMETURE DES FICHIERS CLOSE 197, STATUS= NEEP (CLUSE 195, STATUS= 'NEEP') LND с DIMENSION GLAINER, 751, GLAINAR D1HENGLOW GLEFEGU,201,GLEFEGU TUHEGDI= D013001 KE1V=1,111 F1V=0LG14E7,211 AFV001F4F1V=1,111 F1V=0LG14E7,211 AFV00F4F1V=1,115 F1V=1LG14E1,211 F1V=1LG14E1,211 F1V=1LG14E1,211 KE_M401HEQ1F=1 F1FEV1.62,818,03 F100 46 PACT=0LF14F1V,812/F1V CONTINUE 00 304 MC0L+HC0LSF 10CL+HC0LHAG14E7 F1CL4+C0LF14G14E7 F1 48 200 400 500 C 12 SUPROLITINE SUBSIDER, OLF . NDB . NET . NRM . NCH1 1/54.1011 REA.48(A-H.G-2) 1951.1013 INTEGER44(1-N) 01NEH510N SLR(488,75), SLF(4091 c 00 6441 IT-12,0ED HINVANEQ-11+2 PTV-GURINEEV, FI IFIFIV.NE.B.DI GLEINFIVI-GLEINPIVIZEIV CONTINUE 60 Continue 168

,

197

ANNEXE C

MATERIEL UTILISE

MICRO-ORDINATEUR VICTOR 286 TYPE AT

Microprocesseur Coprocesseur Mémoire vive Disque dur Ecran graphique Imprimante Intel 286 à 8 MHz Intel 287 640 Ko 20 Mo Temps d'accès 40ms. Type Hercules. EPSON FX 800 (240 cps)

198

 [12] COONS S.A. <u>**3IHPARDOIJAIB**</u>
 "Mathématique et CAO vol. 5, Méthode Matrictelle, Edition Hermes, Paris 1987.

- [2] AlimAD S., B. M. IKOKS & Construction of the Elements with Particular, "Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular," (61) Reference to Axisymetric, Problems, Proc. Conf. Matrix Meth. Struct. (61) Wright-Patterson, Ain Force, Pase, Ohio, AFFDL, TR-59, 150, 296802.
- [3] AHMAD S., B.M.IRONS & O. C. ZIENKIEWICZ "Analysis: of Thick and Thin Shell Structures by curved Filite" XOO [31] "Elements", Inter. J. for Num Meths in Engineering, vol 2004/09/09/17" Elements", Inter. J. for Num Meths in Engineering, but somethic
- [4]J BARBE "Théáriendes.teoques.i Toment: Ecole Nationale Superiour de 17 anu" l'Aéronautique et de l'espace, 1977. 4801 notificas provinces para
- [5] BARTELS R.H., JOHN C. BEATY et RIAB A. ANING K.H.R ZLATABA [5] "Mathématiquenetr CAQ" Algardr. Algoret algardr. Algoret CAQ" (2000) "Les fabrications mecaniques algardr. August 1961".
- [18] FERGUSON J. Rosting and Star (198)
 [18] FERGUSON J. Resolution and Section (198)
 [18] Multivariable Curve interpolation. Journal of the .088 bcizes must be computing Machinery, Avril 1964.

 [7] BEZIER P.
 "Essai de définition numérique des courbes et des surfaces, "Essai de définition numérique des courbes et des surfaces, bexpérimentales," sufficience des propostories des

[8] BEZIER P.

"Emploi de la commande numérique pour l'étude, des carrosseries et des outillages" Journal de la Société des Ingénieurs de "AUAMI [01" l'Automobile (S.I.A.), Avril 1968.

- [9] BONTHOUX CW note: A LARA & RENEAUN N NTENNER [12]
 [9] BONTHOUX CW note: Spanning for bontake, namely and "
 "Le Calcul de Structures et La Méthode, des Eléments Finits and "
 ENSEM-INPL, Nancy, 1985-1986.
- [10] BOOR CADE : sizytan A gninging ni setubleory in the sini?" "On calculating with B-Splines", J. Approx. Theory, 1922.
- [11] BOOR C. DE "A Practical Guides to Splines, Applied Mathematical Sciences 27, Springer-Verlag, N. York Inc. Fourth Printing 1987

 [12] COONS S.A.
 "Mathématique et CAO vol. 5, Méthode Matricielle, Edition Hermes, Paris 1987.

[13] COONS S.A. "Surface patches and B-Splines curves", CAGD, 1974.

[14] COONS S.A.

"Surfaces for computer-aided design of space form", Technical report MAC-TR-41, M.I.T. Cambridge, Mass, Juin 1967.

[15] COX M. G.

"The Numerical Evaluation of B-Splines", Journal of the Institute of Mathematics and its Applications, Octobre 1972.

[16] DHATT G.- TOUZOT G.

"Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis, Maloine S.A. Paris, deuxième édition, 1984.

[17] FAYARD G.

- "Les fabrications mécaniques à partir des équation mathématiques", La Technique Moderne, Avril 1961".
- [18] FERGUSON J. "Multivariable Curve interpolation", Jou

" Multivariable Curve interpolation", Journal of the Association for Computing Machinery, Avril 1964.

[19] IMBERT J.F.

"Analyse des Structures par Eléments finis, SUPAERO, Cepadues Ed. Deuxième Edition, 1984.

[20] INABA, F-MESH

"Computer Program Manual", Fijitsu Ltd.

[21] KENNETH H. HUEBNER & EARL A. THORNTON "The Finite Element Method for Engineers", John Wiley & Sons, Virginia, second Edition 1982.

[22] KLAUS - JURGEN BATHE

"Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.

[23] LANGLOIS X.

"Etude de différences de construction des courbes et surfaces Gauches en CAO, Rapport DEA, ENSEM-INPL, 1988.

[24] MINDLIN R. D.

"Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic plates", J. Appl. Mecha., New York, 1951.

[25] PRESS W.H., B.P.FLANNERY, S.A. TEUKOLSKY et W.T. VETTERLING

"Numerical recips. The Art of Scientific Computing, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[26] REDDY .J.N.

"An Introduction To The Finite Element Method", McGRAW Hill Book Company, 1985.

[27] RIESENFELD R.

"Application of B-Splines Approximation to Geometric problems of Computer Aided Design", PhD dissertation, Departement of Systems and Information Science, Syracuse University, New York, U.S.A, May 1973.

[28] RIESENFELD R.

"On Chaikin's Algorithm, Computer Graphics and Image Processing 4(3), Septembre 1975.

[29] RIS G.

"Raccordement à l'ordre n entre carreaux de surfaces définis par des polynômes biparamétriques à coefficients vectoriels. Application aux surfaces UNISURF" Thèse Université de Nancy I.

[30] SABLONNIERE P.

"Base de Bernstein et Approximation splines", Thèse, Univ. Des Sciences et Techniques de Lille, 11/6-1982.

[31] SCHOENBERG I.J.

"Smoothing Operator and their Generating functions".Bulletin of the American Mathematics Society, 1953.

[32] VERON M.

"Technique de la CFAO, La modélisation des surfaces", séminaires, Edition Hermès, 21/6-1988.

[33] VERON M.

"Contribution à l'Etude des surfaces Numériques UNISURF, Conditions de Raccordement", Thèse Univ. de NANCY I 8/2/1973.

[34] YANG T.Y.

"Finite Element Structural Analysis", Prentice-Hall, Inc England Diffs N.J. 07632, 1986.

[35] ZIENKIEWICZ O.C.

"The Finite Element Method", McGRAW-Hill, N. York, Third edition, 1977.

[36] Isabelle DOR

" Elément de coque isoparamétrique à haute précision sur microordinateur" Rapport DEA-ENSEM NANCY 26/9/1987.


AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE

DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur le Professeur Michel LUCIUS, ENSEM (NANCY) Monsieur le Professeur Michel CARRARD

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

M onsieur ABBAS Hammada

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse

intitulée : Les surfaces industrielles complexes et le calcul de leur comportement mécanique.

Réalisation d'un code C.A.O. sur micro-ordinateur.

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : MECAN/TQUE ET ENERGETIQUE

Fait à Vandoeuvre, le 26 JUIN 1990

Le Président de l'I.N.P.L.

M. GANTOIS

2, avenue de la Forêt de Haye - B.P. 3 - 54501 VANDŒUVRE CEDEX Téléphone : 83. 59. 59. 59 - Télex : 961 715 F - Télécopie : 83. 59. 55